§1. Уравнения и графики гармонических колебаний

Ожидаемый результат

Прочитав параграф, вы сможете:
- *исследовать гармонические колебания: x(t), υ (t), a(t) экспериментально, аналитически и графически.*

I. Условия возникновения свободных гармонических колебаний

Тело совершает свободные гармонические колебания в том случае, когда при его смещении от положения равновесия возникает равнодействующая сила, пропорциональная смещению и направленная к положению равновесия.

Положением равновесия называют *положение тела*, в котором векторная сумма сил, действующих на тело равна нулю.

На тело пружинного маятника, выведенного из состояния равновесия, действует сила упругости, которая удовлетворяет условиям возникновения гармонических колебаний *(рис. 1)*:

$$F_x = -kx. \qquad (1)$$

Задание 1

1. Приведите примеры тел, совершающих колебательное движение.
2. Из приведенных ниже примеров выберите тела, совершающие свободные колебания: поршень в цилиндре ДВС, маятник механических часов, ветка дерева под порывистым ветром, детские качели, руки человека при ходьбе.

Задание 2

Колебания математического маятника происходят под действием равнодействующей сил, которая пропорциональна смещению и направлена к положению равновесия *(рис. 2)*: $F_R = -kx$. Используя *рисунок 2*, докажите, что коэффициент пропорциональности равнодействующей силы, действующей на математический маятник, и смещением равен: $k = \frac{mg}{l}$. (2)

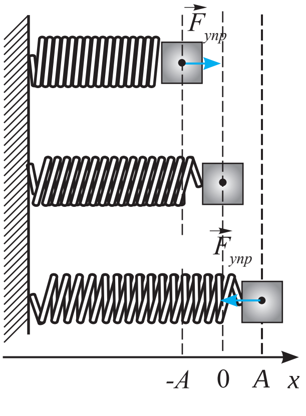


Рис. 1. *Сила, вызывающая колебания пружинного маятник*

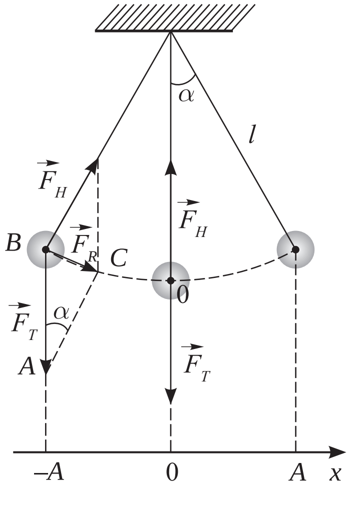


Рис. 2. *Силы, вызывающие колебания математического маятника*

II. Законы гармонических колебаний

В пружинном и математическом маятниках могут совершаться свободные гармонические колебания, которые происходят по закону косинуса или синуса.

Без учета сил трения и сопротивления законы гармонических колебаний примут вид:

$$x = A\cos\omega_0 t \qquad (3)$$

$$x = A\sin\omega_0 t, \qquad (4)$$

где A – амплитудное значение смещения,
ω_0 – собственная циклическая частота.

Закон движения (3) используют, если тело начинает свое движение из положения максимального отклонения $x = A$. Если тело начинает движение из положения равновесия $x = 0$, применяют закон движения (4).

Возьмите на заметку

В общем случае законы гармонических колебаний имеют вид:

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$;

$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$,

где φ_0 – начальная фаза, ω_0 – собственная циклическая частота.

III. Фаза колебаний. Связь фазы гармонических колебаний с периодом

Аргумент функции косинуса или синуса φ в законах движения (3) и (4) называют *фазой колебаний:*

$$\varphi = \omega_0 t. \qquad (5)$$

Единица измерения фазы – радиан, $[\varphi] = 1$ *рад*.

Если колебание системы наблюдают с произвольного момента времени, то начальная фаза колебаний отличается от нуля. В этом случае фазу колебаний определяют по формуле:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \qquad (6)$$

где φ_0 – начальная фаза колебаний. При $t = 0$ фаза колебаний равна начальной $\varphi = \varphi_0$.

Учитывая связь циклической частоты с периодом колебаний $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, из формулы (5) получим:

$$\varphi = 2\pi\frac{t}{T}. \qquad (7)$$

Фаза колебаний **– это угловая мера времени, выраженная в долях периода, и которая характеризует колебание в данный момент времени.**

Задание 3

Определите зависимость коэффициента пропорциональности силы, приводящей в колебательное движение деревянного кубика, от смещения.

Возьмите на заметку

Собственная частота колебаний, циклическая частота и период системы зависят, от величин, характеризующих ее: массы груза m и жесткости пружины k – для пружинного маятника, длины нити l и ускорении свободного падения – для математического маятника.

Собственная частота колебаний не зависит от амплитуды колебаний.

Вспомните!

$T = \dfrac{1}{\nu}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$;

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$;

$\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$;

$\omega_0 = 2\pi\nu$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$;

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Задание 4

Используя формулу (7), определите фазу колебаний, соответствующих следующим промежуткам времени:

$t = \dfrac{T}{4}$; $t = \dfrac{T}{2}$; $t = \dfrac{3T}{4}$;

$t = T$.

IV. Уравнения гармонических колебаний

При ускоренном движении тела применим второй закон Ньютона:

$$ma = F. \qquad (8)$$

С учетом формул расчета сил, приводящих маятники в движение (1) и (2), второй закон Ньютона для пружинного маятника примет вид:

$$ma = -kx, \qquad (9)$$

для математического маятника:

$$ma = -\frac{mg}{l}x\,. \qquad (10)$$

Нам известно, что скорость тела, движущегося вдоль одной прямой, – это быстрота изменения координаты тела: $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, а ускорение – быстрота изменения скорости тела: $a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$, тогда при малых значениях Δt скорость можно принять за первую производную от координаты тела $\upsilon = x'$, а ускорение за первую производную от его скорости: $a = \upsilon'$. Следовательно, ускорение является второй производной координаты тела:

$$a = x''. \qquad (11)$$

Формулы (9) и (10) с учетом (11) примут вид:

$$x'' = -\frac{k}{m}x\,, \qquad (12)$$

$$x'' = -\frac{g}{l}x\,. \qquad (13)$$

Запишем уравнения (12) и (13) в виде:

$$x'' = -\omega_0^2 x\,. \qquad (14)$$

Полученные выражения (12), (13) и (14) называют *уравнениями колеблющегося тела под действием сил упругости и тяжести.*

Задание 5

Используя формулы (17) и (20) запишите формулы зависимости максимальной скорости и максимального ускорения от периода и частоты колебаний.

Ответьте на вопросы

1. *Почему в момент максимального отклонения от положения равновесия, скорость колеблющегося тела равна нулю?*
2. *Почему при положительных значениях смещения ускорение отрицательное?*
3. *Почему при нулевом значении смещения ускорение тоже принимает нулевое значение?*

V. Скорость и ускорение при колебательном движении

Формулы расчета ускорения и скорости, легко получить из законов движения:

$$\upsilon = x' = (A\cos\omega_0 t)' = -A\omega_0 \sin\omega_0 t \qquad (15)$$

или $\upsilon = x' = (A\sin\omega_0 t)' = A\omega_0\cos\omega_0 t\,,$ (16)

где $\upsilon_{max} = A\omega_0$ (17) – амплитудное значение скорости.

$$a = x'' = -A\omega_0^2\cos\omega_0 t \qquad (18)$$

или $a = x'' = -A\omega_0^2\sin\omega_0 t\,,$ (19)

$$a_{max} = A\omega_0^2 \qquad (20)$$

где a_{max} – амплитудное значение ускорения.

Запомните!

Для определения разности фаз необходимо выразить зависимость величин от времени через одну и ту же тригонометрическую функцию, используя формулы приведения.

VI. Графики гармонических колебаний. Сдвиг фаз

Приняв значение начальной фазы равным нулю $\varphi_0 = 0$, построим графики колебаний $x(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$ в пределах одного периода, используя полученные зависимости (3, 15, 18).

Из *рисунка 3* видно, что колебания величин происходят со смещением по фазе. Колебания скорости опережают колебания координаты на $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями координаты тела.

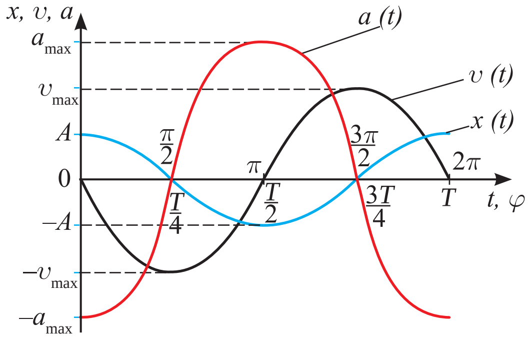


***Рис. 3.** Графики зависимости координаты, скорости, ускорения от времени и фазы колебаний*

Эксперимент

Определите амплитуду и период колебаний пружинного маятника, максимальные значения скорости и ускорения, максимальное значение силы, действующей на тело.
По полученным значениям постройте графики зависимости координаты, скорости и ускорения от времени для маятника.

Для ускорения, применяя соотношения из формулы (18) с учетом (20) при $\varphi_0 = 0$, получим:

$$a = -a_{max} \cos\omega_0 t = a_{max} \cos(\omega_0 t + \pi).$$

Колебание ускорения опережает колебание координаты тела на π:

$$\Delta\varphi = (\omega_0 t + \pi) - \omega_0 t = \pi.$$

Результаты, полученные нами алгебраическим и графическим методом, совпадают.

Разность фаз гармонических колебаний одной и той же частоты выраженных через одну тригонометрическую функцию, называют *сдвигом фаз.*

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнение колебаний математического маятника имеет вид: $x = 0,02\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Определите смещение груза относительно положения равновесия при $t = \frac{3T}{4}$ и амплитуду скорости.

Дано:

$x = 0,02\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$t = \frac{3T}{4}$

$x - ?$

$\upsilon_{max} - ?$

Решение:

Заменим в уравнении циклическую частоту $\omega_0 = 3\pi$ через период колебаний:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ и подставим данное в условии задачи значение времени, получим:

$$x = 0,02\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,02\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Максимальную скорость колебаний определим по формуле $\upsilon_{max} = A\omega_0$,

$$\upsilon_{max} = 0,02 \cdot 3\pi = 0,06\pi \approx 0,18\,\frac{м}{с}.$$

Ответ: $x = 0$; $\upsilon_{max} \approx 0,18\,\frac{м}{с}$.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют гармоническими?
2. При каком условии колебания совершаются по закону косинуса, при каком – по закону синуса?
3. Что называют фазой колебаний, что – сдвигом фаз?
4. При каком условии определяют сдвиг фаз колебаний рассматриваемых величин?

Упражнение 1

1. Чему равна фаза гармонических колебаний для момента времени $t = \frac{T}{2}$? Начальная фаза колебания равна 180°. Ответ представьте в радианах.
2. Математический маятник длиной 0,1 м, совершает гармонические колебания с амплитудой 0,5 см. Определите максимальное значение скорости маятника.
3. Уравнение колебаний пружинного маятника имеет вид: $0,05\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Определите смещение груза относительно положения равновесия при $t = \frac{T}{4}$ и амплитуду скорости.
4. Математический маятник совершает колебания по закону $x = 0,02\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Определите смещение точки от положения равновесия при $t = \frac{T}{4}$ и амплитуду ускорения.
5. Груз массой 200 г, подвешенный на пружине, колеблется с той же частотой, что и математический маятник длиной 0,2 м. Определите коэффициент жесткости пружины.

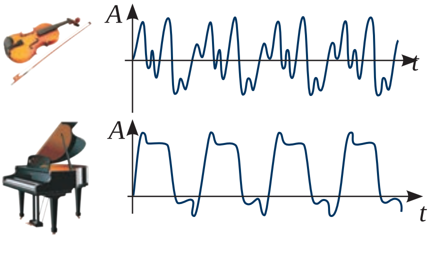
Экспериментальное задание

Определите амплитуду и период колебаний маятника часов.

По полученным значениям постройте графики зависимости координаты, скорости и ускорения от времени для маятника.

Творческое задание

Подготовьте сообщение на тему: Гармонические колебания и музыка.



Музыкальные инструменты и их звуковые колебания