таких элементов x выберем наименьший. Тогда соответствующее ему множество и будет наименьшим. $\triangleright$

Следствием доказанных теорем является то, что любые два вполне упорядоченных множества сравнимы по мощности (одно равномощно подмножеству другого). Сейчас мы увидим, что всякое множество может быть вполне упорядочено (теорема Цермело), и, следовательно, любые два множества сравнимы по мощности.

2.6. Теорема Цермело

Теорема 24 (Цермело). Всякое множество может быть вполне упорядочено.

$\triangleleft$ Доказательство этой теоремы существенно использует аксиому выбора и вызывало большие нарекания своей неконструктивностью. На счётных множествах полный порядок указать легко (перенеся с $\mathbb{N}$). Но уже на множестве действительных чисел никакого конкретного полного порядка указать не удаётся, и доказав (с помощью аксиомы выбора) его существование, мы так и не можем себе этот порядок представить.

Объясним, в какой форме используется аксиома выбора. Пусть A — данное нам множество. Мы принимаем, что существует функция φ, определённая на всех подмножествах множества A, кроме самого́ A, которая указывает один из элементов вне этого подмножества:

$$X \subsetneq A \Rightarrow \varphi(X) \in A \setminus X.$$

После того, как такая функция фиксирована, можно построить полный порядок на A, и в этом построении уже нет никакой неоднозначности. Вот как это делается.

Наименьшим элементом множества A мы объявим элемент $a_0 = \varphi(\varnothing)$. За ним идёт элемент $a_1 = \varphi(\{a_0\})$; по построению он отличается от a_0. Далее следует элемент $a_2 = \varphi(\{a_0, a_1\})$. Если множество A бесконечно, то такой процесс можно продолжать и получить последовательность $\{a_0, a_1, \ldots\}$ элементов множества A. Если после этого остаются ещё не использованные элементы множества A, рассмотрим элемент $a_\omega = \varphi(\{a_0, a_1, a_2, \ldots\})$