Дискретное преобразование Фурье

В *разд. "Спектр дискретного сигнала" главы 3* мы проанализировали явления, происходящие со спектром при дискретизации сигнала. Рассмотрим теперь, что представляет собой спектр дискретного *периодического* сигнала.

Итак, пусть последовательность отсчетов $\{x(k)\}$ является периодической с периодом N:

$$x(k+N) = x(k) \quad \text{для любого } k.$$

Такая последовательность полностью описывается *конечным* набором чисел, в качестве которого можно взять произвольный фрагмент длиной N, например $\{x(k),\ k = 0, 1, ..., N-1\}$. Поставленный в соответствие этой последовательности сигнал из смещенных по времени дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t - kT) \tag{5.1}$$

также, разумеется, будет периодическим с минимальным периодом NT.

Так как сигнал (5.1) является дискретным, его спектр должен быть *периодическим* с периодом $2\pi/T$. Так как этот сигнал является также и периодическим, его спектр должен быть *дискретным* с расстоянием между гармониками, равным $2\pi/(NT)$.

Итак, периодический дискретный сигнал имеет периодический дискретный спектр, который также описывается конечным набором из N чисел (один период спектра содержит $\frac{2\pi}{T}\Big/\frac{2\pi}{NT} = N$ гармоник).

Рассмотрим процедуру вычисления спектра периодического дискретного сигнала. Так как сигнал периодический, будем раскладывать его в *ряд Фурье*. Коэффициенты $\dot{X}(n)$ этого ряда, согласно общей формуле (1.12), равны

$$\begin{aligned}\dot{X}(n) &= \frac{1}{NT}\int_0^{NT} s(t)e^{-j\omega_n t}dt = \frac{1}{NT}\int_0^{NT}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta(t-kT)e^{-j\omega_n t} = \\ &= \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\int_0^{NT}\delta(t-kT)e^{-j\omega_n t}dt = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j\omega_n kT} = \\ &= \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Таким образом, формула для вычисления комплексных амплитуд гармоник представляет собой линейную комбинацию отсчетов сигнала.

В выражении (5.2) реальный масштаб времени фигурирует только в множителе $1/T$ перед оператором суммирования. При рассмотрении дискретных последовательностей обычно оперируют номерами отсчетов и спектральных гармоник без привязки к действительному масштабу времени и частоты. Поэтому множитель $1/T$ из (5.2) удаляют, т. е. считают частоту дискретизации равной единице. Удаляют обычно и множитель $1/N$ (об этом см. замечание далее). Получившееся выражение называется *дискретным преобразованием Фурье* (*ДПФ*; английский термин — *Discrete Fourier Transform*, DFT):

$$\dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (5.3)$$

Существует и *обратное* дискретное преобразование Фурье. Переход от дискретного спектра к временным отсчетам сигнала выражается следующей формулой:

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}(n) \exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (5.4)$$

Это выражение отличается от формулы прямого ДПФ (5.3) лишь знаком в показателе комплексной экспоненты и наличием множителя $1/N$ перед оператором суммирования.

Замечание

В размещении множителя $1/N$ в формулах (5.3) и (5.4) нет полного единства. В большинстве источников, среди которых [1, 4, 8], а также в математических пакетах компьютерных программ (в том числе и в MATLAB), этот множитель фигурирует в формуле *обратного* ДПФ (5.4) (этот вариант принят и в данной книге). В то же время в учебнике [2] этот множитель включен в формулу *прямого* ДПФ (5.3). Встречается (особенно в "чисто математических" источниках) также симметричный вариант, когда в формулах прямого и обратного ДПФ фигурируют одинаковые множители, равные $1\big/\sqrt{N}$.

Свойства дискретного преобразования Фурье

В целом свойства ДПФ аналогичны свойствам непрерывного преобразования Фурье (см. *главу 1*), однако дискретный характер анализируемого сигнала привносит некоторую специфику.

Линейность

Из формулы (5.3) очевидно, что ДПФ является линейным, т. е. если последовательностям $\{x(k)\}$ и $\{y(k)\}$ с одним и тем же периодом N соответствуют наборы гармоник $\{\dot{X}(n)\}$ и $\{\dot{Y}(n)\}$, то последовательности $\{ax(k) + by(k)\}$ будет соответствовать спектр $a\dot{X}(n) + b\dot{Y}(n)$.

Задержка

Если задержать исходную последовательность на один такт ($y(k) = x(k - 1)$), то, согласно (5.3), спектр необходимо умножить на $\exp\left(-j\frac{2\pi n}{N}\right)$:

$$\dot{Y}(n) = \dot{X}(n) \exp\left(-j\frac{2\pi n}{N}\right).$$