Mathe LK Rh

Tim D.

MSS 2017-20

Inhaltsverzeichnis

Teil I

11/1

Kapitel 1

Terme, Gleichungen, Ungleichungen

1.1 Pascalsches Dreieck

$n = 0$:									1									
$n = 1$:								1		1								
$n = 2$:							1		2		1							
$n = 3$:						1		3		3		1						
$n = 4$:					1		4		6		4		1					
$n = 5$:				1		5		10		10		5		1				
$n = 6$:			1		6		15		20		15		6		1			
$n = 7$:		1		7		21		35		35		21		7		1		
$n = 8$:	1		8		28		56		70		56		28		8		1	

1.2 pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

1.3 abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4 Satz von Vieta

$$0 = x^2 + px + q$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{(\frac{p}{2})^2 - q}_{\text{Diskriminante*}}}$$

*Diskriminante:
$> 0 \quad \Rightarrow$ zwei Lösungen
$= 0 \quad \Rightarrow$ eine Lösung
$< 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots} - \frac{p}{2} - \sqrt{\cdots} = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots})(-\frac{p}{2} - \sqrt{\cdots}) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$0 = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Beispiel

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = \frac{1}{9}(x^2 \underbrace{-6}_{x_1+x_2} x \underbrace{-72}_{x_1 \cdot x_2})$$
$$x_1 = 12; \; x_2 = -6$$
$$0 = \frac{1}{9}\underbrace{(x-12)(x+6)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

1.5 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Beispiele

$n = 2$

$$(a+b)^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^{2}}_{\text{Drei Summanden: k = 0; k = 1; k = 2}} \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k$$

$$= \underbrace{\binom{5}{0} a^2}_{\text{k = 0}} + \underbrace{\binom{5}{1} ab}_{\text{k = 1}} + \underbrace{\binom{5}{2} b^2}_{\text{k = 2}}$$

$$= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$n = 5$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} \cdot b^k$$

$$= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Binominialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.6 Gleichungen und Ungleichungen

1.6.1 Gleichung lösen durch Substitution

Beispiel $0 = 2x^4 - 3x^2 - 5$
Lösungsmenge der Gleichung = Menge der Nullstellen (Schnitte mit der x-Achse) der Funktion mit gleichem Funktionsterm

substituiere $x^2 = t$

$0 = 2t^2 - 3t - 5$

$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$

$t_1 = 2.5, \quad t_2 = -1$

resubstituiere

$t_1 = x^2 = 2.5 \qquad |\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{2.5};\ x_2 = -\sqrt{2.5}$

$t_2 = x^2 = -1 \qquad |\sqrt{}$

keine Lösung

$L = \{\sqrt{2.5}; -\sqrt{2.5}\}$

1.7 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

1.7.1 Potenz- und Wurzelgesetze

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$

$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$

$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$

1.7.2 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = \log_a(x) \cdot y$$
$$a^x = 10^{\log(a) \cdot x}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Kapitel 2

Funktion - Relation - Zahlenfolge

Eine Funktion ist eine Zuordnung (Zahlen $x \rightarrow$ Zahlen y), die jeder Zahl x der Definitionsmenge genau eine Zahl y der Wertemenge zuordnet.

Darstellung:

- Funktionsgleichung, z. B. $f(x) = y = \underbrace{2x^2 + 5}_{\text{Funktionsterm}}$
- Graph
- Wertetabelle

Eine Relation ist eine allgemeine Zuordnung von x zu y,
z. B. $x = 3$ (senkrechte Gerade), $x^2 y = y^2 + x^3$

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit $x \in \mathbb{N}$

2.1 Zahlenfolgen

Definitionsmenge $D = \mathbb{N}_0$
Wertemenge $W = \mathbb{R}$
$a_n = y = \ldots \leftarrow Funktionsterm$
Angabe eines Funktionsterms für alle Zahlen nennt man explizite Darstellung der Zahlenfolge.

$$a_n = (\frac{1}{2})^n$$
$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad \ldots; \quad a_{100} = 2^{-100}$$

Berechnung der Folgezahlen Schritt für Schritt nennt man implizite Darsteluung der Zahlenfolge. (Rekursion)

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$$
$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$$

16/1

a

$$a_n = \frac{2n}{5}$$
$$a_1 = \frac{2}{5};\ a_2 = \frac{4}{5};\ a_3 = 1\frac{1}{5};\ a_4 = 1\frac{2}{5};\ a_5 = 2;$$
$$a_6 = 2\frac{2}{5};\ a_7 = 2\frac{4}{5};\ a_8 = 3\frac{1}{5};\ a_9 = 3\frac{3}{5};\ a_{10} = 4$$

d

$$a_n = (\frac{1}{2})^n$$
$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = 1\frac{1}{8};\ a_4 = \frac{1}{16};\ a_5 = \frac{1}{32};$$
$$a_6 = \frac{1}{64};\ a_7 = \frac{1}{128};\ a_8 = \frac{1}{256};\ a_9 = \frac{1}{512};\ a_{10} = \frac{1}{1024}$$

f

$$a_n = \sin(\frac{\pi}{2}n)$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 0;\ a_3 = -1;\ a_4 = 0;\ a_5 = 1;$$
$$a_6 = 0;\ a_7 = -1;\ a_8 = 0;\ a_9 = 1;\ a_{10} = 0$$

16/2

a

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 + a_n$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 5;\ a_4 = 7;\ a_5 = 9;$$
$$a_6 = 11;\ a_7 = 13;\ a_8 = 15;\ a_9 = 17;\ a_{10} = 19$$
$$a_n = 2n - 1$$

b

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 4;\ a_4 = 8;\ a_5 = 16;$$
$$a_6 = 32;\ a_7 = 64;\ a_8 = 128;\ a_9 = 512;\ a_{10} = 1024$$
$$a_n = 2^{n-1}$$

d

$$a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \text{(Fibonacci)}$$
$$a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3;$$
$$a_6 = 5;\ a_7 = 8;\ a_8 = 13;\ a_9 = 21;\ a_{10} = 34$$
$$a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

2.2 Monotonie, Beschränktheit

16/5

$$a_n = 200000€ \cdot 0.98^n$$

16/7

a

$$V_0 = 1^3 = 1$$
$$V_1 = V_0 + \frac{1}{8}V_0 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$
$$V_2 = V_1 + \frac{1}{8}(\frac{1}{8}V_0) = \frac{9}{8} + \frac{1}{64} = \frac{73}{64}$$
$$V_3 = V_2 + \frac{1}{8}(\frac{1}{8}(\frac{1}{8}V_0)) = \frac{73}{64} + \frac{1}{512} = \frac{585}{512}$$

b

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} 8^{-k}$$

Streng monoton fallende Zahlenfolge
z. B. a_n von 16/5 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n < a_{n-1}$
Streng monoton steigende Zahlenfolge
z. B. V_n von 16/7 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n > a_{n-1}$
Ohne „streng“entsprechend $\leqslant$ bzw. $\geqslant$

18/1

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$
$$a_1 = 2;\ a_2 = 1\frac{1}{2};\ a_3 = 1\frac{1}{3};\ a_4 = 1\frac{1}{4};\ a_5 = 1\frac{1}{5}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt (2); nach unten beschränkt (1)

b

$$a_n = (\frac{3}{4})^n$$
$$a_1 = \frac{3}{4};\ a_2 = \frac{9}{16};\ a_3 = \frac{27}{64};\ a_4 = \frac{81}{256};\ a_5 = \frac{243}{1024}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt $(\frac{3}{4})$; nach unten beschränkt (0)

c

$$a_n = (-1)^n$$
$$a_1 = -1;\ a_2 = 1;\ a_3 = -1;\ a_4 = 1;\ a_5 = -1$$

nicht monoton
nach oben beschränkt (1); nach unten beschränkt (-1)

d

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$
$$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{2}{3};\ a_4 = \frac{5}{4};\ a_5 = \frac{4}{5}$$

nicht monoton
nach oben beschränkt $(\frac{3}{2})$; nach unten beschränkt (0)

e

$$a_n = \frac{8n}{n^2+1}$$
$$a_1 = 4;\ a_2 = \frac{16}{5};\ a_3 = \frac{12}{5};\ a_4 = \frac{32}{17};\ a_5 = \frac{20}{13}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt (4); nach unten beschränkt (0)

	a_n	n	$(-1)^n \cdot n$	$(-1)^n : n$	$1+1:n$
	↑ beschränkt	✗	✗	✓	✓
18/2	↓ beschränkt	✓	✗	✓	✓
	beschränkt	✗	✗	✓	✓
	monoton	✓	✗	✗	✓

2.3 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion

Der Grenzwert g ist eine reelle Zahl, der sich die Folgenwerte (Funktionswerte) annähern, sodass die Folgenwerte (Funktionswerte) vom Grenzwert praktisch nicht mehr unterschieden werden können.
z. B.

$$a_n = n^{-1}$$
$$a_n = \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n}$$

a_n hat den Grenzwert $g = 0$, da a_n auch streng monoton fallend ist, ist $s = 0$ die größte untere Schranke (=„Infimum“).

Vorgehen
Ich gebe eine Genauigkeitsschranke, z. B. $\epsilon = 10^{-3}$ vor (kleine positive Zahl). Zu ϵ finde ich ein $n_\epsilon = 1001$. Alle Folgenwerte mit $n \geqslant n_\epsilon = 1001$ (also $a_{1001},\ a_{1002},\ \ldots$) liegen näher beim Grenzwert $g = 0$ als $\epsilon = 10^{-3}$ angibt. Finde ich zu jeder möglichen Genauigkeitsschranke ϵ solch ein n_ϵ, so ist g der Grenzwert. Ist diese Bedingung erfüllt, so notiert man
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ hier: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} = 0$

22/2 (Abweichung $< \epsilon = 0.1$)

a

$$a_n = \frac{1+n}{n}$$
$$|\frac{1+n}{n} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 10$$

b

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$$
$$|\frac{n^2-1}{n^2} - 1| < 0.1$$
$$\epsilon > \sqrt{10} \approx 3.162 \quad \text{(ab 4)}$$

c

$$a_n = 1 - \frac{100}{n}$$
$$|1 - \frac{100}{n} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 1000$$

d

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}$$
$$|\frac{n-1}{n+2} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 28$$

e

$$a_n = \frac{2n^2-3}{3n^2}$$
$$|\frac{2n^2-3}{3n^2} - 1| < 0.1$$
$\rightarrow$ keine Lösung

zu e

$$
\begin{aligned}
&|\frac{2n^2-3}{3n^2}-1|<0.1\\
&1-\frac{2n^2-3}{3n^2}<0.1 \qquad |-0.1+\frac{2n^2-3}{3n^2}\\
&0.9<\frac{2n^2-3}{3n^2} \qquad |\cdot 3n^2\\
&2.7n^2<2n^2-3 \qquad |-2n^2\\
&0.7n^2<-3 \qquad |:0.7\\
&n^2<-\frac{30}{7} \qquad |\sqrt{}\\
&n<\sqrt{-\frac{30}{7}} \text{ und } n<-\sqrt{-\frac{30}{7}}\\
&\Rightarrow \text{nicht lösbar}
\end{aligned}
$$

2.3.1 Grenzwerte

Eine Zahlenfolge mit Grenzwert ist eine konvergente Folge. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert ist eine divergente Folge. Eine Nullfolge hat den Grenzwert $g = 0$.
$a_n = \frac{n}{n+1} \quad g = 1 \quad \rightarrow \quad a_n^* = \frac{n}{n+1} - 1 \quad g = 0$ (Nullfolge)

22/4

a

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{3n-2}{n+2})-3|<\epsilon\\
&|\frac{-8}{n+2}|<\epsilon \qquad |x^{-1}\\
&\frac{n+2}{8}>\frac{1}{\epsilon} \qquad |\cdot 8\\
&n+2>\frac{8}{\epsilon} \qquad |-2\\
&n>\frac{8}{\epsilon}-2
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{n^2+n}{5n^2}) - 0.2| < \epsilon \\
&\frac{n}{5n^2} < \epsilon \qquad | \cdot 5 \\
&n^{-1} < 5\epsilon \qquad |x^{-1} \\
&n > \frac{1}{5\epsilon}
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}) - 2| < \epsilon \\
&|\frac{-2}{2^n+1}| < \epsilon \qquad | : 2;\ x^{-1} \\
&2^n + 1 > \frac{2}{\epsilon} \qquad | - 1 \\
&2^n > \frac{2}{\epsilon} - 1 \qquad | \log;\ : \log(2) \\
&n > \frac{\log(\frac{2}{\epsilon} - 1)}{\log(2)}
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1}}) - \frac{3}{2}| < \epsilon \\
&|\frac{3 \cdot 2^n + 2 - 3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}| < \epsilon \\
&\frac{2}{2[n+1]} < \epsilon \\
&\frac{1}{2^n} < \epsilon \qquad |x^{-1} \\
&2^n > \frac{1}{\epsilon} \qquad | \log \ : \log(2) \\
&n > \frac{-\log(\epsilon)}{\log(2)}
\end{aligned}
$$

24/2

a

$$a_n = \frac{1+2n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{1}{n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} n} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

b

$$a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10} = \frac{7+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 7 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n^3}} = \frac{7+0}{1-0} = 7$$

f

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} = (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}) : (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}) = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

g

$$a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} = (\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1})^4$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}))^4 = (\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} - \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + \lim_{n\to\infty} 1})^4 = (\frac{0-1}{0+1})^4 = 1$$

24/3

a

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1}) = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim_{n\to\infty} 1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

b

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{0.5}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 0.5} = \frac{1-0}{0.5} = 2$$

c

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{1+4^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4^n}}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

d

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^{n+1}}{2^n+3^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}-1}{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}+1}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^{n+1}}{2\cdot 3^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{(\frac{2}{3})^n+3}{2}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n + \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

2.3.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim\limits_{x\to\infty}$; $\lim\limits_{x\to a}$

$f(x) = y = \frac{3x^2-3}{(x+1)(x-4)}$ D $= \mathbb{R}\backslash\{\underbrace{-1;4}_{\text{Nullstellen des Nenners}}\}$

$x=-1 \rightarrow$ Nullstelle des Zählers und Nenners
$x=4 \rightarrow$ Nullstelle des Nenners

$$f(x) = y = \frac{3(x^2-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-3}{x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-3}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\cdots = \lim_{x\to-\infty}\cdots = \lim_{x\to-\infty}\cdots = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} \neq \lim_{x\to-\infty}$$

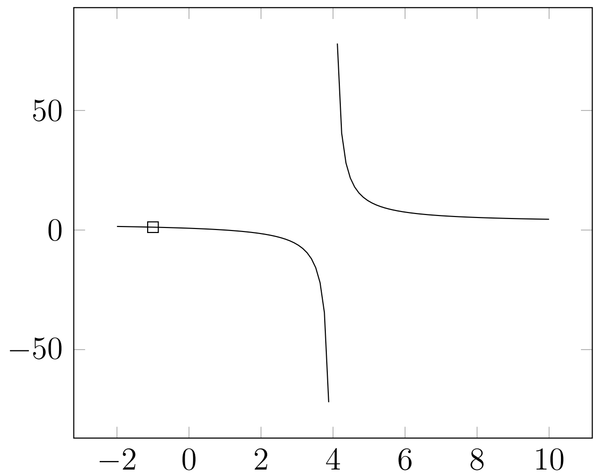
Beispiel $f(x) = 2^x$

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty;\ \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x-3}{x-4} = \frac{3(-1)-3}{-1-4} = \frac{-6}{-5} = 1.2$$
$$\lim_{x\to 4} \frac{3x-3}{x-4} = ?$$

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	-87	-897	-8997	93	903	9003

$$\lim_{x\nearrow 4} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\searrow 4} f(x) = +\infty$$



$x = 4 \rightarrow$ Unendlichkeitsstelle, ein Pol mit Vorzeichenwechsel
Der Punkt $(-1|1.2)$ gehört nicht zum Graphen. Es ergibt sich ein Loch im Graphen.

28/6

a

$$f(x) = \frac{x}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	1	1	1	1

b

$$f(x) = \frac{x^3}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	-0.01	-0.0001	0.0001	0.01

c

$$f(x) = \frac{x}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	100	10000	10000	100

d

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2^0}{3^0} = 1$$

e

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2^0 - 1}{3^0} = 0$$

Kapitel 3

Analysis

3.1 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit

$$D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < -5 \\ x^2 + 10 & \text{für } -5 \leqslant x < 1 \\ -x & \text{für } x \geqslant 1 \end{cases}$$

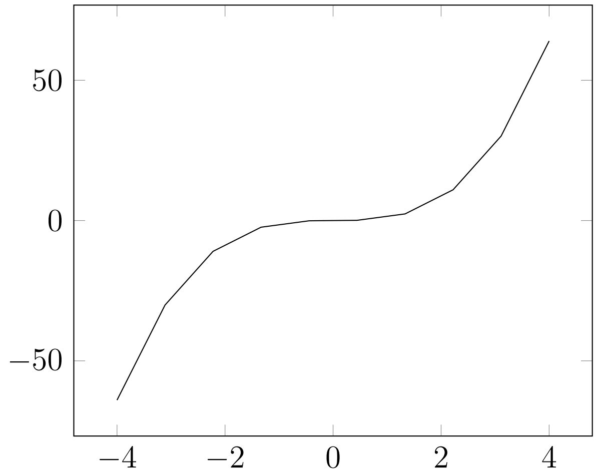
Abschnittsweise definierte Funktionen → Für verschiedene Abschnitte der Zahlengeraden von $\mathbb{R}$ sollen unterschiedliche Funktionsterme gelten.

Einschub: Ganzrationale Funktionen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
z. B. $f(x) = 3x^4 + 5x - 7$
$n = 4$ (Grad $n \in \mathbb{N}$)
$a_4 = 4$
$a_3 = a_2 = 0$
$a_1 = 5$
$a_0 = -7$
Grad der ganzrationalen Funktion ist die höchste Potenz, bspw. 4
Funktionsterm = Polynom

Die Stetigkeit einer Funktion beschreibt die Tatsache, ob man den Graph der Funktion ohne abzusetzen zeichnen kann.

Beispiel: $f(x) = x^3$



$f(x)$ ist überall stetig

Allgemein gilt:
Ganzrationale Funktionen sind überall, d. h. $-\infty < x < \infty$, stetig.

Untersuche $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$x_1 = -5;\ x_2 = 1$

$\lim\limits_{x \nearrow -5} f(x) = -10$

$\lim\limits_{x \searrow -5} f(x) = -35$

$\Rightarrow$ unterschiedliche Grenzwerte bedeuten $f(x)$ ist bei $x = -5$ unstetig

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 11$

$\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = -1$

$\Rightarrow$ unstetig bei $x = 11$

28/9

a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqslant 3 \\ 12 - x & \text{für } x > 3 \end{cases}$$
$$\lim_{x \nearrow 3} f(x) = 3^2 = 9$$
$$\lim_{x \searrow 3} f(x) = 12 - 3 = 9$$
$\Rightarrow$ stetig

b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{für } x \leqslant -1 \\ 2^x - 3 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$
$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$$
$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = 2^{-1} - 3 = -2.5$$
$\Rightarrow$ unstetig

28/11

- $$f(x) = sin(\frac{1}{x}) \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
  $\lim_{x \to 0} f(x) = \sin(\infty) = -1$ bis $+1$ $\quad \Rightarrow$ kein Grenzwert
  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \sin(0) = 0$$

3.2 Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0

Eine Funktion ist stetig bei $x = x_0$, wenn Folgendes gilt:
$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$

29/4

a $a_n = \frac{n^2-7n-1}{10n^2-7n} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{10}$

b $a_n = \frac{n^3-3n^2+3n-1}{5n^3-8n+5} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{5}$

f $a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

g $a_n = \frac{3^n+1}{5^n} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

29/5

a $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+100} - \sqrt{n}) = 0$

b $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+10} - \sqrt{n})) = 5$

c $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n} - 2n) = \frac{3}{4}$

30/10

a $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$

b $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^4-16} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{8}$

30/11

a

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = x-1 = 0$$

c

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1} = x^1+1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1;-1\}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1^2+1 = 2$$
$$\lim_{x\to -1} f(x) = (-1)^2+1 = 2$$

29/6 $a_n = 0.95^n$

a $a_5 = 0.95^5 = 0.77$

b $0.5 = 0.95^n \Rightarrow n = \frac{\log(0.5)}{\log(0.95)} \approx 13.5 \quad n = 13$

c

$$s(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_k$$
$$s(5) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$
$$= 1 + 1.9 + 1.805 + 1.71475 + 1.6290125 = 8.0487625$$

3.3 Polynomdivision

30/11

d

$$f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$
$$(x^6 - 1) : (x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^6 \qquad\qquad\qquad - 1\big) \div \big(x^2 - 1\big) = x^4 + x^2 + 1 \\
\underline{\;- x^6 + x^4\;} \\
\qquad\quad x^4 \\
\qquad \underline{\;- x^4 + x^2\;} \\
\qquad\qquad\quad x^2 - 1 \\
\qquad\qquad \underline{\;- x^2 + 1\;} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$
$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$$

3.4 Punktbrobe

(erfüllt ein Punkt eine Gleichung)
z. B. $P(2|3)$
$f(x) = y = 2x^2 - 5x + 3$
Setze für x die Zahl 2 ein
$f(x) = 8 - 10 + 3 = 1 \neq 3$
$\Rightarrow P$ gehört nicht zum Graphen von f

38/4

a Höhenmeter: 250m
Streckenkilometer: 10km

b Gesamtanstieg: 750m

c Bei Streckenkilometer 25: Achsensymmetrie zur y-Achse

39/7

a 1.8m

b $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 7.42\}$

c $f(2.5) = 2.425$

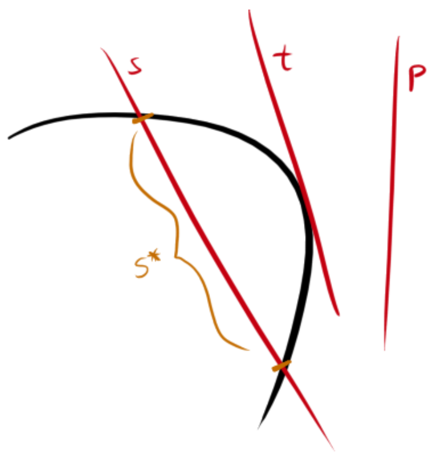
39/11

a $f(x) = 1.9879 \cdot 10^{-4} + 86$

b $f(-995.5) = f(995.5) = 283$
$f(0) = 86$

c $D = \{x \in \mathbb{R} | -995.5 \leqslant x \leqslant 995.5\}$

3.5 Mittlere Änderungsrate



Eine **Sekante s** ist eine Gerade, die eine Kurve in 2 (oder mehr) Punkten schneidet.
Eine **Sehne s***, Teil einer Sekante, ist eine Strecke, die zwei Kurvenpunkte verbindet.
Eine **Tangente t** ist eine Gerade, die die Kurve in einem Punkt berührt.
Eine **Passante p** ist eine Gerade, die die Kurve nicht schneidet.

$P(1|3) \qquad Q(10|8)$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5}{9}$ (Steigung der Sekante durch P und Q)

Die Sekantensteigung m heißt mittlere Änderungsrate der Funktion f zwischen den Punkten P und Q.

$P(1|3)\ f(1) = 3$

$Q(10|8)\ f(10) = 8$

$x_1 = 1;\ x_2 = 10 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = h = 9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Differenzenquotient}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Beispielrechnung$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$x_1 = 2;\ x_2 = 10$

$h = x_2 - x_1 = 8$

$m = \dfrac{f(10) - f(2)}{8} = \dfrac{175 - 7}{8} = 21$

41/2

t [d]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h [mm]	0	0	0	0	1	2	4	6	7

a $m = \frac{h(9)-h(1)}{8} = \frac{7}{8}$

b $m = \frac{h(3)-h(1)}{2} = 0$

d $m = \frac{h(6)-h(4)}{2} = 1$

c $m = \frac{h(9)-h(7)}{2} = \frac{3}{2}$

41/1 $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

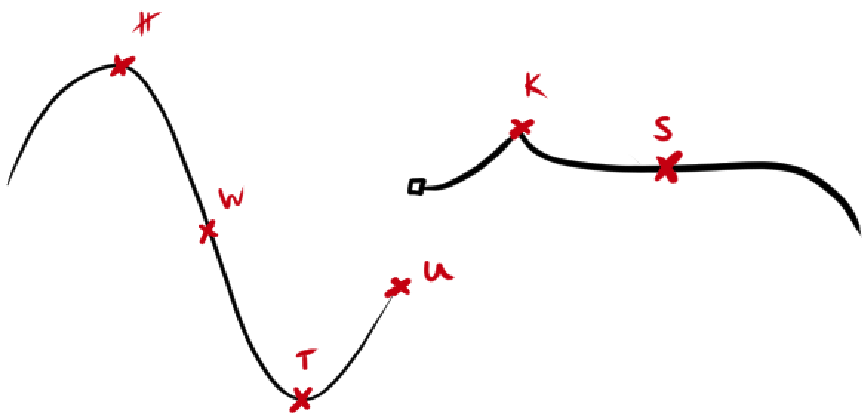
a $m = \frac{f(1)-f(0.1)}{0.9} = -10$

b $m = \frac{f(12)-f(2)}{10} = -\frac{1}{24}$

c $m = \frac{f(0.02)-f(0.01)}{0.01} = -5000$

d $m = \frac{f(1000)-f(100)}{900} = -100000^{-1}$

3.6 Tangentensteigung, Ableitung



H Hochpunkt (waagerechte Tangente)

W Wendepunkt (maximale/minimale Steigung)

T Tiefpunkt (waagerechte Tangente)

U Unstetigkeit (keine Tangentensteigung)

K Knickstelle (keine Tangentensteigung)

S Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

3.6.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

$$f(x) = y = x^2 \quad x_0 = 2$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \quad \text{(Sekante)}$$

$$m = \lim_{h \to 0}(4 + h) = 4 \quad \text{(Tangente)}$$

3.6.2 Ableitung

$$f(x) = 2x^3 \quad x_0 = 4$$
$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \frac{2(4+h)^3 - 2 \cdot 4^3}{h}$$
$$= \frac{128 + 96h + 24h^2 + 2h^3 - 128}{h}$$
$$= 96 + 24h + 2h^2$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(6|f(6)) \Rightarrow h = 2$
$m = 96 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 152$
Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(-1|f(-1)) \Rightarrow h = -5$
$m = 96 + 24 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5)^2 = 26$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $h \to 0$.
$m_{\text{Tangente}} = \lim\limits_{h \to 0} m_{\text{Sekante}} = \lim\limits_{h \to 0} 96 + 24h + 2h^2 = 96$
Die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3$ bei $x = 4$ ist 96.
$f'(4) = 96$ (Tangentensteigung)
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

46/6

a 10.15 Uhr: $m = \frac{500m}{15min} = 33.\overline{3}\frac{m}{min}$

10.45 Uhr: $m = \frac{-500m}{15min} = -33.\overline{3}\frac{m}{min}$

11.15 Uhr: $m = \frac{-1000m}{15min} = -66.\overline{6}\frac{m}{min}$

b am größten: ∼10.05 Uhr
am kleinsten: ∼11.20 Uhr

48/3

a $x_0 = 4$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = 8$

b $x_0 = 3$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{-2(3+h)^2-(-2)\cdot 3^2}{h} = -12$

e $x_0 = -1$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(-1+h)^{-1}-(-1)^{-1}}{h} = -1$

h $x_0 = 3$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(-3+h+2)-(-3+2)}{h} = -1$

i $x_0 = 7$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{4-4}{h} = 0$

3.7 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung

$f(x) = 5x^3 \qquad P_1(2|f(2)) \quad P_2(4|f(4))$

Sekantengleichung

$$y = m \cdot x + b$$
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{320 - 40}{2} = 140$$
$$b = -m \cdot x + y = -140 \cdot 2 + 40 = -240$$
$$s(x) = 140x - 240$$

Tangentengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(2+h)^3 - 40}{h} = 60$$
$$b = -m \cdot x + y = -60 \cdot 2 + 40 = -80$$
$$t(x) = 60x - 80$$

Normalengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$
$$m_n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -(\frac{\Delta y}{\Delta x})^{-1} = \frac{-1}{m_t}$$
$$m_n \cdot m_t = -1$$
$$m_t = 60$$
$$m_n = -\frac{1}{60}$$
$$b = -m \cdot x + y = 40\frac{1}{30}$$
$$n(x) = -\frac{1}{60}x + 40\frac{1}{30}$$

Zwei Geraden mit m_1 und m_2 sind orthogonal, wenn gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$

49/14

a

$$f(x) = 0.5x^2 \qquad P(1|f(1) = 0.5)$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0}(1 + \frac{1}{2}h) = 1$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = -\frac{1}{2}$$
$$y_t = x - \frac{1}{2}$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -1$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = 1.5$$
$$y_n = -x + 1.5$$

b

$$f(x) = 2x^2 - 4 \qquad P(-2|f(-2) = 4)$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{2(-2+h)^2 - 4 - 4}{h} = -8$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = -12$$
$$y_t = -8x - 12$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{8}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = 4\frac{1}{4}$$
$$y_n = \frac{1}{8}x + 4\frac{1}{4}$$

c

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad P(0.5|f(0.5) = \sqrt{0.5})$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0.5 + h} - \sqrt{0.5}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$y_t = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = \sqrt{2}$$
$$y_n = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x + \sqrt{2}$$

d

$$f(x) = -x^3 + 2 \qquad P(2|f(2) = -6)$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{-(2 + h)^3 + 2 + 6}{h} = -12$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = 18$$
$$y_t = -12x + 18$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{12}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = -6\frac{1}{6}$$
$$y_n = \frac{1}{12}x - 6\frac{1}{6}$$

49/13 $f(x) = -\frac{1}{x}$

a

$$P(-1|f(-1) = 1)$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{-1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h + h^2} = 1$$
$$\alpha = atan(m_t) = 45^\circ$$

b

$$
\begin{aligned}
&P(2|f(2) = -\frac{1}{2}) \\
&m_t = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2}}{2h + h^2} = \frac{1}{4} \\
&\alpha = atan(m_t) = 14.04^\circ
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&P(0.1|f(0.1) = -10) \\
&m_t = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{0.1+h} + 10}{h} = 100 \\
&\alpha = atan(m_t) = 89.43^\circ
\end{aligned}
$$

49/12c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -3\sqrt{x} \qquad x_0 = 8 \\
&f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{-3\sqrt{8+h} - (-3\sqrt{8})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(-\sqrt{72+9h} + \sqrt{72})(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}{h(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{9}{-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72}} \\
&= \frac{9}{-2\sqrt{72}} = \frac{3}{-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{32}}
\end{aligned}
$$

3.8 Ableitungsfunktion

Die Ableitung von $f(x)$ bei x_0 ist eine lokale Eigenschaft der Funktion $f(x)$, also einer Stelle x_0. Allerdings sind unsere Funktionen fast überall differenzierbar. Ausnahmen sind Unstetigkeitsstellen und Knickstellen. Es gibt eine Funktion $f'(x) = m_t(x)$ für alle Stellen x. Sie heißt Ableitungsfunktion.

$$
f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
$$

z. B. $f(x) = x^4$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4x^2 + h^3$$
$$= 4x^3$$

z. B. $f'(5) = 500$

$g(x) = x^2$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

$h(x) = x^3$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

$i(x) = a \cdot x^2$

$$i'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + 2xh + ah^2 - ax^2}{h} = 2ax$$

$j(x) = \sqrt{x}$

$$j'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$k(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^{-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^{-1} - x^{-1}}{h} = -2x^-3$$

$$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

54/2

a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

b

$$f(x) = \frac{a}{x} + c$$
$$f'(x) = -ax^{-2}$$

c

$$f(x) = x^{c+1}$$
$$f'(x) = (c+1)x^c$$

d

$$f(x) = t^2 + 3t$$
$$f'(x) = 2t + 3$$

e

$$f(x) = x - t$$
$$f'(x) = 1$$

f

$$f(t) = x - t$$
$$f'(t) = -1$$

55/7

c

$$f(x) = 3x^2 + 3$$
$$f'(x) = 6x$$
$$P(0.5|f(0.5) = 3.75)$$
$$m = f'(0.5) = 3$$
$$b = -m \cdot x + y = 2.25$$
$$y = 3x + 2.25$$

d

$$\begin{aligned}
&f(x) = -x^3 + 2\\
&f'(x) = -3x^2\\
&P(2|f(2) = -6)\\
&m = f'(2) = -12\\
&b = -m \cdot x + y = 18\\
&y = -12x + 18
\end{aligned}$$

59/6 $g(x) = 10 - 3x \Rightarrow m = -3$

c

$$\begin{aligned}
&f(x) = -\frac{1}{100}x^3\\
&f'(x) = -\frac{3}{100}x^2\\
&-3 = -\frac{3}{100}x^2\\
&x = 10\\
&P(10|f(10) = -20)
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
&f(x) = bx^3 + c\\
&f'(x) = 3bx^2\\
&-3 = 3bx^2\\
&x = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}}\\
&P(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}|f(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}) = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} + c) \qquad b < 0
\end{aligned}$$

60/12

$$H(t) = \begin{cases} 3.2 & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant 1\\ 3.2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 \leqslant t \leqslant 1.8\\ 0 & \text{für } 1.8 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$$

a

$$\begin{aligned}
&H'(0.5) = 0\\
&H'(1.5) = -10t + 10 = -5\\
&H'(2.5) = 0
\end{aligned}$$

b

$$H'(1) = 0 = -10t + 10$$
$$H'(1.8) = -10t + 10 = -8 \neq H'(1.8) = 0$$

67/3

a

$$x^5 - 20x^3 + 64x = 0 \qquad | : x \Rightarrow x = 0$$
$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - 20t + 64 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{0; \pm 2; \pm 4\}$$

b

$$x^5 - 17x^3 + 16x = 0 \qquad | : x \Rightarrow x = 0$$
$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - 17t + 16 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = 8.5 \pm \sqrt{72.25 - 16} = 8.5 \pm 7.5 \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{0; \pm 1; \pm 4\}$$

c

$$(x - \frac{2}{3})(x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1) = 0$$
$$x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
$$x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - \frac{13}{6}t + 1 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{\frac{2}{3}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\}$$

d

$$(x^3-8)(x^4-\frac{14}{3}x^2+5)=0$$
$$x^3-8=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$$
$$x^4-\frac{14}{3}x^2+5=0 \qquad |t=x^2$$
$$t^2-\frac{14}{3}t+5=0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}-5}=\frac{7}{3}\pm\frac{2}{3} \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4}=\pm\sqrt{t_1 1/2}$$
$$L=\{2;\pm\sqrt{\frac{5}{3}};\pm\sqrt{3}\}$$

3.9 Nullstellen

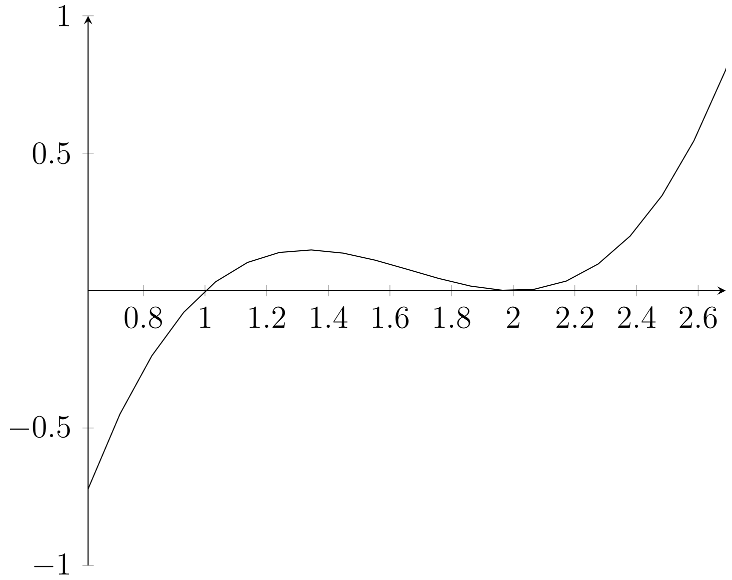
Annahme: $f(x)=0$ habe $x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=1$ als Lösungen,
$f(x)$ hat Grad 3.

$$f(x)=x(x-2)(x+3)(x-1)$$
$$=x^3-7x+6 \text{ für } c=1$$

Würde ich die zusätzliche Nullstelle $x_4=4$ als Linearfaktor in die Funktionsgleichung einfügen, so hätte ich eine Funktion 4. Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion mit Grad n hat maximal n Nullstellen. Funktionen mit ungeradzahligen Graden $n=1,3,5,7$ ... haben mindestens eine Nullstelle. Solche mit geradzahligen Graden $n=2,4,6,8$ ... haben keine Mindestzahl an Nullstellen.

3.9.1 Mehrfache Nullstellen

Beispiel $f(x)$ habe $x_1 = x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ als Nullstellen (Grad 3).



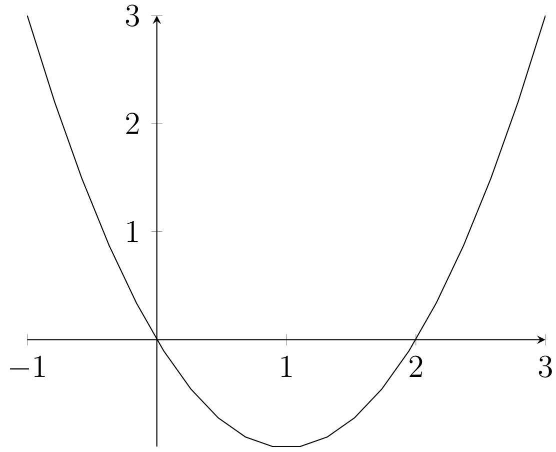
Berührpunkt bei $x = 2$, außerdem Extrempunkt.

Finde ich eine doppelte Nullstelle, so liegt gleichzeitig an der Stelle ein Extrempunkt vor. Eine dreifache Nullstelle ist zusätzlich ein Sattelpunkt mit waagerechter Tangente.

67/5

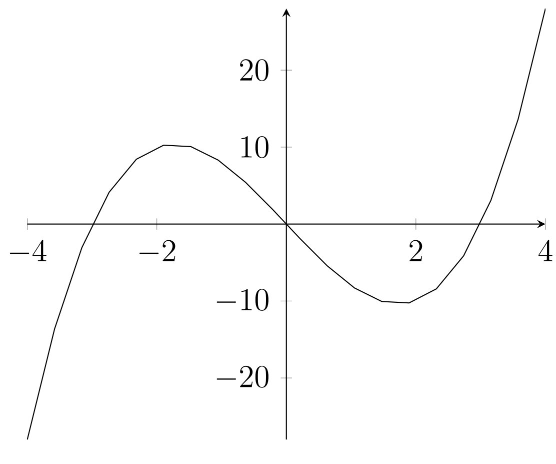
a

$$f(x) = x^2 - 2x$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{0; 2\}$$



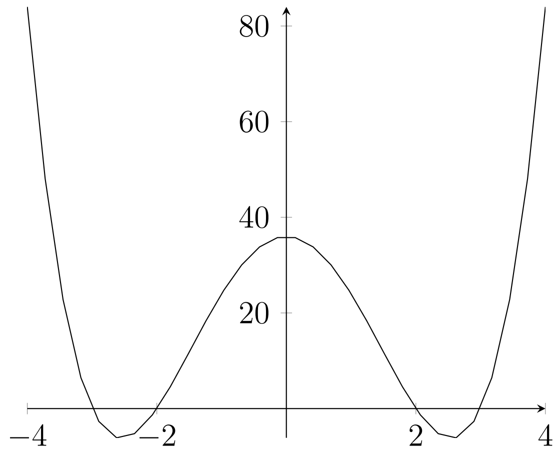
c

$$f(x) = x(x^2 - 9)$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{0; \pm 3\}$$



f

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$
$$f(0) = 36$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{\pm 2; \pm 3\}$$



68/13 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a

NS: $0; -4; \frac{4}{5}$

$a = 5$

$f(x) = a(x-0)(x+4)(x-\frac{4}{5}) = a(x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 - 3\frac{1}{5}x)$

$= 5x^3 + 16x^2 - 16x$

b

NS: $-\frac{1}{3}; 3; \frac{10}{3}$

$a = 9$

$f(x) = a(x+\frac{1}{3})(x-3)(x-\frac{10}{3}) = a(x^3 - 6x^2 - \frac{1}{9}x + 3\frac{1}{3})$

$= 9x^3 - 72x^2 - x + 30$

c

NS: $0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$

$a = 1$

$f(x) = a(x-0)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = a(x^3 - 2x)$

$= x^3 - 2x$

d

NS: $0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$

$a = 5$

$f(x) = a(x-0)(x+\frac{1}{\sqrt{5}})(x-\frac{1}{\sqrt{5}}) = a(x^3 - \frac{1}{5}x)$

$= 5x^3 - x$

68/12 $f(x) = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$

a

$0 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$

$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 4(-0.08) \cdot 1.44}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.88}{-0.16}$

$(x_1 = -2) \quad x_2 = 9$

b

$1.44 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$

$0 = -0.08x^2 + 0.56x$

$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.56}{-0.16}$

$(x_1 = 0) \quad x_2 = 7$

68/11

$f(x) = ax^2 + c$

$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$

$f(5) = f(-5) = 1$

$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2$

$f(x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{50}$

Breite: $2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$

68/15

$$
\begin{aligned}
&s = 1000m\\
&s(t) = 30t - 0.4t^2\\
&v(t) = 30 - 0.8t
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
&v(t) = 0 = 30 - 0.8t \Rightarrow t = 37.5\\
&s(37.5) = 30(37.5) - 0.4(37.5)^2 = 565.5
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&s(t) = v_0 \cdot t - 0.4t^2 < 1000\\
&v(t) = v_0 - 0.8t \Rightarrow t = \frac{v_0}{0.8}\\
&s(t) = \frac{v_0^2}{0.8} - 0.4(\frac{v_o}{0.8})^2 = \frac{5}{8}v_0^2 < 1000\\
&v_0 < \sqrt{1600} = 40
\end{aligned}
$$

3.10 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

Hochpunkt: $f(x_H) \geqslant f(x)$ in der Nähe
Tiefpunkt: $f(x_T) \leqslant f(x)$ in der Nähe

$$f'(x_H) = f'(x_T) = f'(x_S) = 0$$

Daraus folgt ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Stellen x mit $f'(x) = 0$.

z. B. $f(x) = x^3 - 2x^2$
$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$
x_1 und x_2 sind Kandidaten für Extrema.

Umgebungsuntersuchung

für Hochpunkte gilt: $f'(x_l) > 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) < 0$
für Tiefpunkte gilt: $f'(x_l) < 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) > 0$

zu: $x_1 = 0 \quad x_l = -1 \quad x_r = 1$
$f'(x_l) = f'(-1) = 7$
$f'(x_1) = f'(0) = 0$
$f'(x_r) = f'(1) = -1$
$\Rightarrow H(0|0)$

zu: $x_2 = \dfrac{4}{3} \quad x_l = 1 \quad x_r = 2$
$f'(x_l) = f'(1) = -1$
$f'(x_1) = f'(0) = 0$
$f'(x_r) = f'(2) = 4$
$\Rightarrow T(\dfrac{4}{3}| - 1.2)$

Sonderfall Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$f'(x_l) < 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) < 0$ oder
$f'(x_l) > 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) > 0$

73/2

e

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$$
$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$
$$0 = -x^2 + 3x \qquad | : x \Rightarrow x_2 = 0$$
$$0 = -x + 3 \qquad | - 3; \cdot(-1)$$
$$3 = x$$
$$L = \{0; 3\}$$

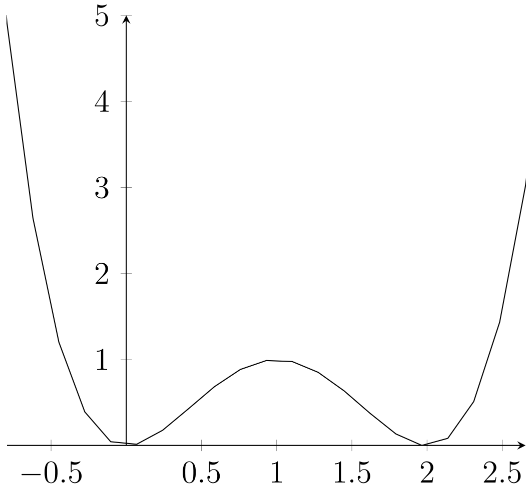
$f'(-1) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt $S(0|f(0) = -4)$
$f'(2) = 4 \quad f'(3) = 0 \quad f'(4) = -16 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $H(3|f(3) = 2\dfrac{3}{4})$

74/6

b

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$
$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 8x \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$
$$0 = 4x^2 - 12x + 8 \qquad |abc$$
$$x_{2/3} = \frac{12 \pm 4}{8}$$
$$x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$f'(-1) = -24 \quad f'(x_1) = 0 \quad f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad \Rightarrow T(0|0)$$
$$f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad f'(x_2) = 0 \quad f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad \Rightarrow H(1|1)$$
$$f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad f'(x_3) = 0 \quad f'(3) = 24 \quad \Rightarrow T(2|0)$$



3.11 2. Ableitungsfunktion

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Die 2. Ableitungsfunktion $f''(x)$ beschreibt das Krümmungsverhalten der Ursprungsfunktion $f(x)$.
$f''(x) > 0$ links gekrümmt
$f''(x) < 0$ rechts gekrümmt
$f''(x) = 0$ Wendepunkt

80/1

b

$$f(x) = 2x - 3x^2$$
$$f'(x) = 2 - 6x$$
$$f''(x) = -6$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\frac{1}{3}\}$$
$$f''(\frac{1}{3}) = -6 < 0 \quad H(\frac{1}{3}|\frac{1}{3})$$

d

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$
$$f'(x) = 2 - 6x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 8$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{2}; 0\}$$
$$f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad T(\pm\sqrt{2}| - 1)$$
$$f''(0) = -8 < 0 \quad H(0|3)$$

e

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$$
$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$
$$f''(x) = 16x^3 - 20x$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}\}$$
$$f''(\frac{1}{2}) = -8 < 0 \quad H(\frac{1}{2}|\frac{11}{15})$$
$$f''(-\frac{1}{2}) = 8 > 0 \quad H(-\frac{1}{2}| - \frac{11}{15})$$
$$f''(\frac{3}{2}) = 24 > 0 \quad T(\frac{3}{2}| - \frac{9}{5})$$
$$f''(-\frac{3}{2}) = -24 < 0 \quad T(-\frac{3}{2}|\frac{9}{5})$$

3.12 Wendepunkte

Wendepunkte eines Graphen sind Punkte, an denen die Krümmung wendet. Am Wendepunkt selbst ist das Krümmungsverhalten gleich 0. Außerdem sind Wendepunkte Punkte mit maximaler bzw. minimaler Steigung.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

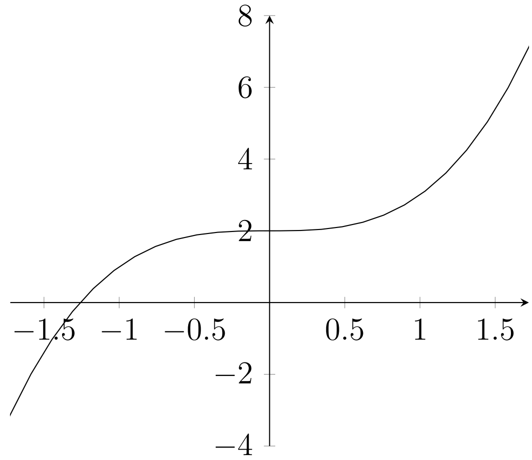
Hinreichende Bedingung (I): Umgebungsuntersuchung
$f''(x_l) > 0$ $f''(x_r) < 0$ Wechsel im Krümmungsverhalten
$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP(x|f(x))$ (links-rechts)

Hinreichende Bedingung (II): $f'''(x) \neq 0$
für $f'''(x) < 0$ LRWP
für $f'''(x) > 0$ RLWP
für $f'''(x) = 0$ keine Entscheidung

84/1

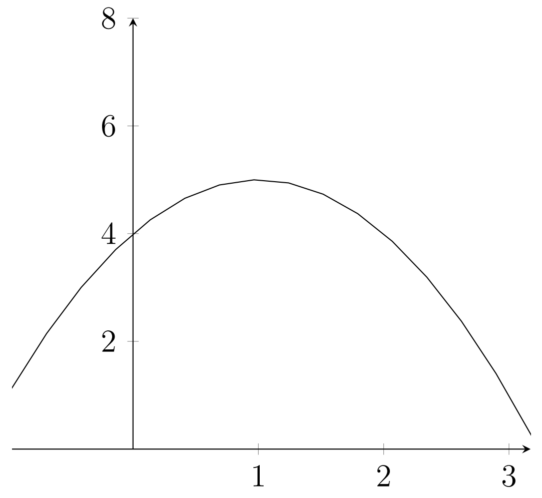
a

$f(x) = x^3 + 2$
$f''(x) = 6x = 0 \quad L = \{0\}$
$f'''(x) = 6 \Rightarrow RLWP(0|2)$
rechts: $x \in]-\infty; 0]$
links: $x \in [0; \infty[$



b

$f(x) = 4 + 2x - x^2$
$f''(x) = -2 = 0 \quad L = \{\}$
rechts: $x \in]-\infty; \infty[$

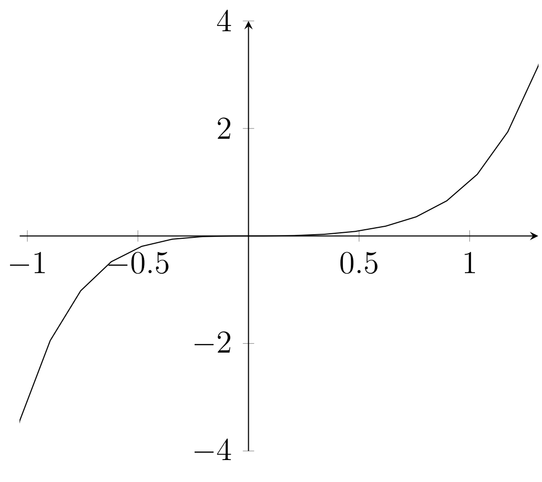


d

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3$$
$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \quad L = \{0\}$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$
$$f'''(0) = 6 \Rightarrow RLWP(0|0)$$

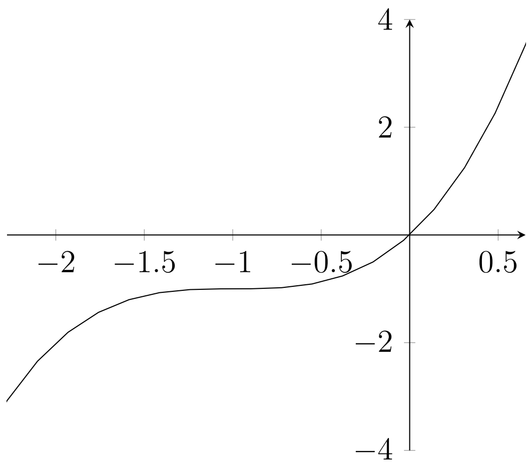
rechts: $x \in]-\infty; 0]$

links: $x \in [0; \infty[$



84/2b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x + 6$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f''(x) = 0 \quad L = \{-1\}$$
$$f'''(-1) = 6 \Rightarrow RLWP(-1|f(-1) = -1)$$
$$f'(-1) = 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$



85/12

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$$
$$f''(x) = 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}b$$
$$f'(x) = 3(-\frac{1}{3}b)^2 + 2b(-\frac{1}{3}b) + c = -\frac{1}{3}b^2 + c = 0$$
$$\Rightarrow c = \frac{b^2}{3}$$

85/14

a

$$f_a(x) = x^3 - ax^2$$
$$f_a''(x) = 6x - 2a = 0 \quad L = \{\frac{a}{3}\}$$
$$f_a'''(x) = 6 \quad f_a'''(\frac{a}{3}) = 6 \Rightarrow RLWP(\frac{a}{3}|f_a(\frac{a}{3}))$$

b

$$f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$$
$$f_a''(x) = 12x^2 - 4a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$$
$$f_a'''(x) = 24x$$
$$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(\sqrt{\frac{a}{3}}) > 0 \Rightarrow RLWP(\sqrt{\frac{a}{3}}|f_a(\sqrt{\frac{a}{3}}))$$
$$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < 0 \Rightarrow LRWP(-\sqrt{\frac{a}{3}}|f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

89/2

A wahr, die Steigung ist negativ, d. h. die Werte werden kleiner

B falsch, die Funktion hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt, die Steigung ist davor und danach positiv

C wahr, einen Tiefpunkt bei $x = 2$ und einen Hochpunkt bei $x = 0$

D ?, die Funktionswerte sind an der Ableitungsfunktion nicht erkennbar

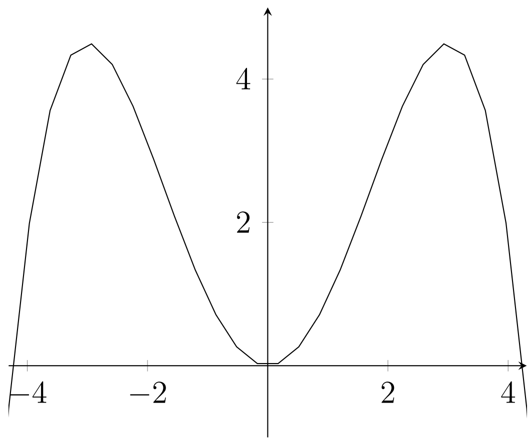
89/1

c

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^4 + x^2$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$
$$f(x) = 0 \quad L = \{0; \pm\sqrt{18}\} \Rightarrow S(0|0), S(\sqrt{18}|0), S(-\sqrt{18}|0)$$
$$f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$
$$f''(0) = 2 \Rightarrow T(0|f(0) = 0)$$
$$f''(3) = 4 \Rightarrow T(3|f(3) = \frac{9}{2})$$
$$f''(-3) = -4 \Rightarrow T(-3|f(-3) = \frac{9}{2})$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0 :]{-\infty}; -3], [0; 3]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0 : [3; 0], [3; \infty[$

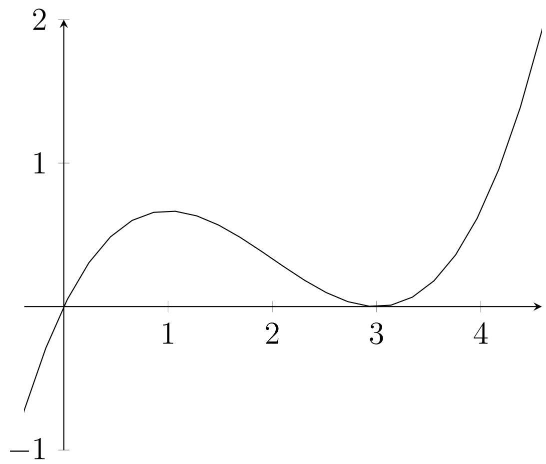


d

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$
$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x = 0 \quad L = \{0; 3\} \Rightarrow S(0|0), S(3|0)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.5 = 0 \quad L = \{1; 3\}$$
$$f''(x) = x - 2$$
$$f''(1) = -1 \Rightarrow H(1|f(1) = 0.\overline{6})$$
$$f''(3) = 1 \Rightarrow T(3|f(3) = 0)$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0 : [-\infty; 1], [3; \infty]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0 : [1; 3]$



f

$$f(x) = x + \frac{5}{x} \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \text{(kein Schnittpunkt mit y-Achse)}$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{\} \quad \text{(kein Schnittpunkt mit x-Achse)}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{5}\}$$

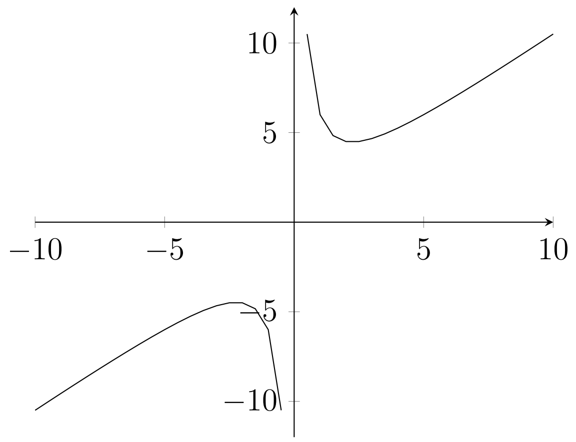
$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

$$f''(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(\sqrt{5}|f(\sqrt{5}) = \sqrt{20})$$

$$f''(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(-\sqrt{5}|f(-\sqrt{5}) = -\sqrt{20})$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0 : \left]-\infty; -\sqrt{5}\right], \left[\sqrt{5}; \infty\right]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0 : \left[-\sqrt{5}; 0\right[, \left]0; \sqrt{5}\right]$



3.13 Nullstellen: Polynomdivision

97/2

b
$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12\right) \div \left(x + 4\right) = 2x^2 - 6x + 3 \\
\underline{-2x^3 - 8x^2} \\
\qquad -6x^2 - 21x \\
\qquad\ \ \underline{6x^2 + 24x} \\
\qquad\qquad\quad 3x + 12 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{-3x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

c $\left(2x^3 - 7x^2 - x + 2\right) \div \left(2x - 1\right) = x^2 - 3x - 2$

$$
\begin{array}{l}
-2x^3 + x^2 \\
\hline
-6x^2 - x \\
6x^2 - 3x \\
\hline
-4x + 2 \\
4x - 2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

d $\left(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2\right) \div \left(x + 2\right) = x^3 - 4x - 1$

$$
\begin{array}{l}
-x^4 - 2x^3 \\
\hline
-4x^2 - 9x \\
4x^2 + 8x \\
\hline
-x - 2 \\
x + 2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

98/4

a $x_1 = 1$

$\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) \div \left(x - 1\right) = x^2 - 5x + 6$

$$
\begin{array}{l}
-x^3 + x^2 \\
\hline
-5x^2 + 11x \\
5x^2 - 5x \\
\hline
6x - 6 \\
-6x + 6 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

b $x_1 = 2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \quad + x^2 - 4x - 4\big) \div \big(x - 2\big) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad 3x^2 - 4x \\
\quad \underline{-3x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad 2x - 4 \\
\qquad\quad \underline{-2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= \frac{-3 \pm 1}{2} \\
x_2 &= -2 \\
x_3 &= -1 \\
f(x) &= (x-2)(x+2)(x+1)
\end{aligned}
$$

c $x_1 = -2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^3 \qquad\quad - 13x + 6\big) \div \big(x + 2\big) = 4x^2 - 8x + 3 \\
\underline{-4x^3 - 8x^2} \\
\qquad -8x^2 - 13x \\
\qquad\ \underline{8x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad\quad 3x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= \frac{8 \pm 4}{8} \\
x_2 &= \frac{1}{2} \\
x_3 &= \frac{3}{2} \\
f(x) &= (x+2)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})
\end{aligned}
$$

d $x_1 = 3$

$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ 4x^3 \ \ - 8x^2 - 11x - 3\big) \div \big(x - 3\big) = 4x^2 + 4x + 1 \\
\underline{-4x^3 + 12x^2} \\
\qquad\quad 4x^2 - 11x \\
\qquad\ \ \underline{-4x^2 + 12x} \\
\qquad\qquad\qquad x - 3 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{-x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$
$$x_{2/3} = -\frac{1}{2}$$
$$f(x) = (x-3)(x+\frac{1}{2})$$

98/11 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \qquad S(-2|0) \Rightarrow x_1 = -2$

a
$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 - 2x^2 - 3x + 10\big) \div \big(x + 2\big) = x^2 - 4x + 5 \\
\underline{-x^3 - 2x^2} \\
\qquad -4x^2 - 3x \\
\qquad\ \ \underline{4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\quad 5x + 10 \\
\qquad\qquad \underline{-5x - 10} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$\Rightarrow$ keine Lösung

b

$$g(x) = mx + b \quad m = 2 \quad S(-2|0)$$
$$0 = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4$$
$$\Rightarrow g(x) = 2x + 4$$

$$f(x) = g(x)x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 2x + 4$$
$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = -2$$

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) \div \left(x+2\right) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-x^3 - 2x^2} \\
\qquad -4x^2 - 5x \\
\qquad \underline{4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$$x_2 = 1 \quad S(1|6)$$
$$x_3 = 3 \quad S(3|10)$$

98/12 $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$

a

$$f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x \qquad | : x$$
$$0 = 2x^2 - 2x + 8$$
$$x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{-60}}{4} \quad \text{keine Lösung}$$
$$L = \{0\}$$

$$f_{10}(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x \qquad | : x$$
$$0 = 2x^2 - 10x + 8$$
$$x_{2/3} = \frac{10 \pm 6}{4}$$
$$L = \{0; 1; 4\}$$

$$f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x \qquad | : x$$
$$0 = 2x^2 + 10x + 8$$
$$x_{2/3} = \frac{-10 \pm 6}{4}$$
$$L = \{0; -1; -4\}$$

b

Diskriminante > 0

$|t| > 8$

c

$t = 8$
$f_8(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$
Nullstellen: $\{0; 2\}$

3.14 Verhalten für $x \to \pm\infty$

z. B. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \approx \lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \approx \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3) = +\infty$
$\Rightarrow$ unterschiedlich für ungeradzahligen Grad

z. B. $g(x) = 2x^4 - 5x$
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \approx \lim\limits_{x\to\infty}(2x^4) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \approx \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4) = +\infty$
$\Rightarrow$ gleich für geradzahligen Grad

3.15 Symmetrie

Bsp. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 7$
$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten vorkommen.
Bsp. $g(x) = x^5 - 7x^3 + x$
$g(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.

allgemein:
achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$
ansonsten: Symmetrie nicht erkennbar

Anwendung:
Bsp. $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+5}$
$h(-x) = \frac{3(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+5} = -\frac{3x^2+2x}{x^2+5} = -h(x)$
$\Rightarrow$ punktsymmetrisch

100/2

a $f(x) = -\boldsymbol{3x^4} - 0.2x^2 + 10$

b $f(x) = 3x + 4x^3 - x^2 = \boldsymbol{4x^3} - x^2 + 3x$

c $f(x) = 2(x-1) \cdot x^2 = \boldsymbol{2x^3} - 2x^2$

d $f(x) = (x+1)(x^3+1) = \boldsymbol{x^4} + x^3 + x + 1$

e $f(x) = -2(x^4 - x^3 - x^2) = -\boldsymbol{2x^4} + 2x^3 + 2x^2$

f $f(x) = x^2 \cdot (-6x - x^2) = -\boldsymbol{x^4} - 6x^3$

102/1

d $f(x) = x(x^2-5) = x^3 - 5x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

e $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$ nicht erkennbar

f $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

3.16 Kurvendiskussion

105/1

c

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

Ableitungen

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$

$f''(x) = 3x - 8$

$f'''(x) = 3$

Symmetrie

$f(-x) \neq f(x)$

$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

$f(-x) \neq -f(x)$

$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$

Nullstellen

$f(x) = 0 = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$L = \{0; 4\}$

Grenzverhalten

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x^3 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$

Extremstellen

$f'(x) = 0 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$

$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm 4}{3}$

$L = \{\frac{4}{3}; 4\}$

$f''(x_1) = f''(\frac{4}{3}) = -4 < 0 \quad HP(\frac{4}{3}|f(\frac{4}{3}))$

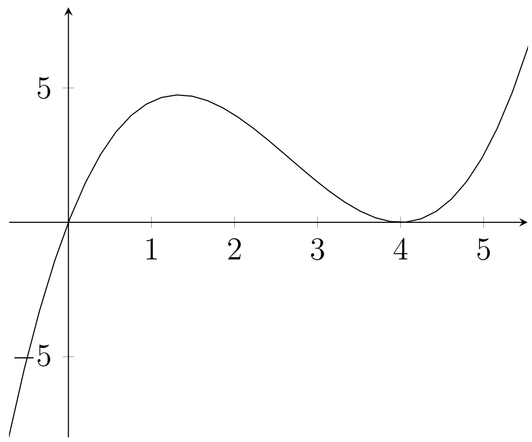
$f''(x_2) = f''(4) = 4 > 0 \quad TP(4|f(4))$

Wendestellen

$f''(x) = 0 = 3x - 8$

$L = \{\frac{8}{3}\}$

$f'''(x_1) = f'''(\frac{8}{3}) = 3 > 0 \quad RLWP(\frac{8}{3}|f(\frac{8}{3}))$



d

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 - 16$

Ableitungen

$f'(x) = 3x^2 + 12x$

$f''(x) = 6x + 12$

$f'''(x) = 6$

Symmetrie

$f(-x) \neq f(x)$

$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq x^3 + 6x^2 - 16$

$f(-x) \neq -f(x)$

$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq -x^3 - 6x^2 + 16$

Nullstellen

$f(x) = 0 = x^3 + 6x^2 - 16$

$x_1 = -2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 6x^2 \qquad\quad - 16\big) \div \big(x + 2\big) = x^2 + 4x - 8 \\
\underline{\;-x^3 - 2x^2\;} \\
\qquad\qquad 4x^2 \\
\qquad\quad \underline{-4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad\qquad -8x - 16 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\;8x + 16} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-8)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2}$

$L = \{-2; -5.46; 1.46\}$

Grenzverhalten

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Extremstellen

$f'(x) = 0 = 3x^2 + 12x \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$

$3x + 12 = 0$

$L = \{0; -4\}$

$f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0 \quad TP(0|f(0))$

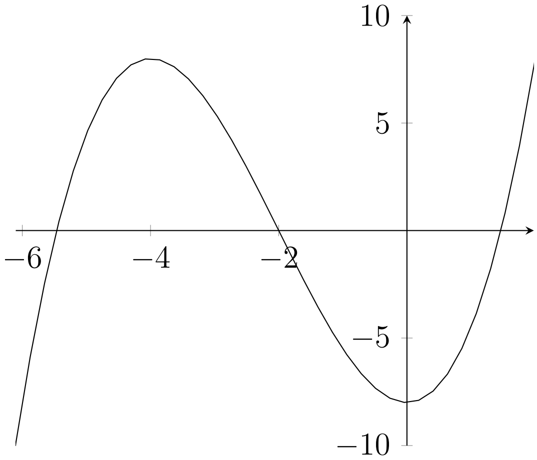
$f''(x_2) = f''(-4) = -12 < 0 \quad HP(-4|f(-4))$

Wendestellen

$f''(x) = 0 = 6x + 12$

$L = \{-2\}$

$f'''(x_1) = f'''(-2) = 6 > 0 \quad RLWP(-2|f(-2))$



106/5

$$f(x) = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.988 \cdot 190^{-6} \cdot x^4$$

a

Höhe
$f(0) = 187.5$
Breite
$f(x) = 0$
subst. $t = x^2$
$0 = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot t - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$
$t_{1/2} = \dfrac{1.579 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{(1.579 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6}) \cdot 187.5}}{2 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6})}$
$t_1 < 0 \qquad t_2 = 6520.923541$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{t_2} \approx \pm 80$
$2 \cdot 80 = 160$

b

$f'(x) = -3.158 \cdot 10^{-2} \cdot x - 7.952 \cdot 10^{-6} \cdot x^3$
$f'(80) = -2.5264 - 4.071424 \approx -6.6$
$atan(-6.6) \approx -81^\circ$

c

$f(19) = 187.5 - 5.70019 - 0.259078148 \approx 181$
vertikaler Abstand: $187.5 - 181 = 6.5 < 10$
$f(9) - 10 = 177.5 - 1.579 - 0.01988 \approx 176.2$

3.17 Tangente und Anwendungen

3.17.1 Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung

$f(x) = y = m \cdot x + b$
Stelle u $\quad f'(u) = m \quad f(u) = y$
$f(u) = f'(u) \cdot u + b \quad \Rightarrow \quad b = f(u) - f'(u) \cdot u$
$t(x) = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$
$= f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

108/5

a

$$f(x) = x^2 - x; \quad B(-2|6) \quad u = -2$$
$$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(u) = -5$$
$$t(x) = -5 \cdot (x + 2) + 6 = -5x - 4$$
$$n(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 2) + 6 = \frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$$

b

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2; \quad B(4|3) \quad u = 4$$
$$f'(x) = -4x^{-2} \quad f'(u) = -\frac{1}{4}$$
$$t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 3 = -\frac{1}{4}x + 4$$
$$n(x) = 4 \cdot (x - 4) + 3 = 4x - 13$$

Exkurs: Quadratische Ergänzung

führt auf die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

z. B. $f(x) = x^2 - x$
$= x^2 - x + 0.25 - 0.25$
$= (x - 0.5)^2 - 0.25$
Scheitelpunkt $S(0.5| - 0.25)$

z. B. $g(x) = 4x^2 - 3x + 8$
$= 4(x^2 - \frac{3}{4}x) + 8$
$= 4(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}) + 8$
$= 4(x - \frac{3}{8})^2 - 4(\frac{9}{64}) + 8$
$= 4(x - \frac{3}{8})^2 + \frac{137}{16}$
Scheitelpunkt $S(\frac{3}{8}|\frac{137}{16})$

nimm den Koeffizienten (-1), halbiere ihn (-0.5) und quadriere anschließend (0.25).

109/10

$$f(x) = y = 4 - \frac{1}{2}x^2$$
$$Y(0|6)$$
$$f'(x) = -x$$
$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} - x \cdot x_0 + 4$$
$$0 = \frac{1}{2}x_0^2 - 2 \qquad x_0 = \pm 2$$

109/11

$f(x) = -0.002x^4 + 0.122x^2 - 1.8$
Tiefster Punkt: $T(0| - 1.8)$
Augen: $P(x_0|1.6)$
$f'(x) = -0.008x^3 + 0.244x$
$t(x) = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 0.008u^3x + 0.224ux - 1.8$
$t(0) = -1.8 = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 1.8 \qquad L = \{0; \pm\sqrt{\frac{61}{3}}\}$
$t(x) = 0.366752x - 1.8 \quad fuer\ u = \sqrt{\frac{61}{3}}$
$1.6 = 0.366752x_0 - 1.8$
$x_0 = 9.2706$

112/7

$$S(t) = -0.08t^3 + 3.5t^2 + 10.6t + 237$$

a

$$S'(t) = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

Die Ableitung gibt an, wie stark die Schulden ansteigen, also die Neuverschuldung pro Jahr.

b

$$S''(t) = -0.48t + 7$$
$$S''(t_0) = 0$$
$$t_0 = 14.58\overline{3} \quad (um\ 1994)$$

c

$$S'(t_0) = 0 = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$
$$t_0 = \frac{1}{12}(175 + \sqrt{36985}) \approx 30.6 \quad (um\ 2010)$$
$$S''(t_0) \approx -7.69 < 0 \quad \Rightarrow \quad Hochpunkt$$

d Nicht die Staatsschulden, sondern die Neuverschuldung, nahm ab.

111/3

$$f(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

a

$$f(t) = 0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t \qquad L = \{0; 24\}$$

$$f'(t) = 0 = 0.75t^2 - 24t + 144 \qquad L = \{8; 24\}$$
$$f''(t) = 1.5t - 24$$
$$f''(8) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad HP$$
$$f''(24) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

$$f''(t) = 0 = 1.5t - 24 \qquad L = \{16\}$$
$$f'''(t) = 1.5 > 0 \quad \Rightarrow \quad RLWP$$

b

$$\text{Hälfte d. Maximalwerts } = \frac{f(8)}{2} = \frac{512}{2} = 256$$

$f(t) = 256 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$

$0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$

$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ \frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 256\big) \div \big(t - 16\big) = \frac{1}{4}t^2 - 8t + 16 \\
\underline{\ -\frac{1}{4}t^3\ \ + 4t^2\ } \\
\qquad\quad -8t^2 + 144t \\
\qquad\quad \underline{\ \ \ 8t^2 - 128t} \\
\qquad\qquad\qquad 16t - 256 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-16t + 256} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$L = \{2.1436; 16; (29.856)\}$

$f_2(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$

$f_2'(t) = f'(t) = 0.75t^2 - 24t + 144$

$f_2'(2.1436) \approx 96 > 0$

$f_2'(16) = -48 < 0$

$(f_2'(29.856) \approx 96 > 0)$

Zeitraum: 2.1436 bis 16

Teil II

11/2

112/5

$$O(t) = -\frac{1}{300}(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700) \qquad t \in [0; 24]$$

a

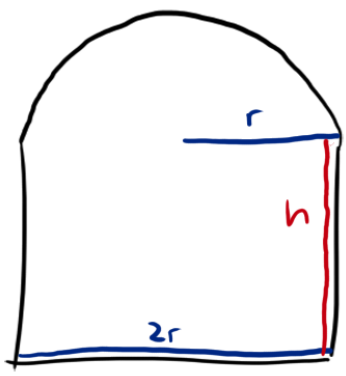
$$O'(t) = \frac{1}{100}(-t^2 + 24t - 108) = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{-2} = \frac{-24 \pm 12}{-2} = 12 \pm 6$$
$$t_1 = 6 \qquad t_2 = 18$$

$$O''(t) = \frac{12 - t}{50}$$
$$O''(t_1) = \frac{6}{50} > 0 \quad \Rightarrow \quad TP(6|O(6) = 16.12)$$
$$O''(t_2) = \frac{-6}{50} < 0 \quad \Rightarrow \quad HP(18|O(18) = 19)$$

b Die Steigung der Wendetangente gibt an, wie sich die Temperaturänderung ändert (Beschleunigung).

3.18 Optimieren unter Nebenbedingungen

Tunnelquerschnitt:



Länge der Randlinie (Umfang) ist $5m$; A ist maximal

Hauptbedingung HB

$A(r,h) = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$

($A(r)$ heißt Zielfunktion ZF)

Nebenbedingung NB

$U = 5 = 2h + 2r + \pi r \qquad | - 2r - \pi r$

$h = \frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r$

setze h in $A(r,h)$ ein

$A(r) = 2r(\frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r) + \frac{1}{2}\pi r^2$

$= 5r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$

$= (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot r^2 + 5r$

$A'(r) = 5 - 7.14159r$

$A'(r) = 0 \qquad L = \{0.7\}$

$h = 0.7 \quad fuer \; r = 0.7$

$A(r) = 1.75m^2$

114/3

$A(l,b) = l \cdot b$

$U = 50 = 2(l+b) \Rightarrow b = 25 - l$

$A(l) = 2l \cdot (25 - l) = -2l^2 + 50l$

$A'(l) = -4l + 50$

$A'(l) = 0 \qquad L = \{12.5\}$

$l = b = 12.5cm$

114/4

$$U(l,b) = 2(l+b)$$
$$A = 400 = l \cdot b \Rightarrow b = \frac{400}{l}$$
$$U(l) = 2l + \frac{800}{l}$$
$$U'(l) = 2 - 800l^{-2}$$
$$U'(l) = 0 \qquad L = \{\pm 20\}$$
$$l = b = 20cm$$

115/7

a

$$V(x) = (16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$
$$V'(x) = 0 \qquad L = \{2; (\frac{20}{3})\}$$
$$V(2cm) = 144cm^3$$

115/8

$$U(r,h) = \pi r + 2r + 2h$$
$$A = 45 = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh \Rightarrow h = \frac{45 - \frac{1}{2}\pi r^2}{2r}$$
$$U(r) = \frac{1}{2}\pi r + 2r + \frac{45}{r}$$
$$U'(r) = -45r^{-2} + \frac{1}{2}\pi + 2$$
$$U'(r) = 0 \qquad L = \{\pm 3.55\}$$
$$r = 3.55m$$
$$h = 3.55m \quad fuer\ r = 3.55m$$

115/11

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

$$12^2 = (2r)^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{36 - \frac{h^2}{4}}$$

$$V(h) = \pi \cdot (36 - \frac{h^2}{4}) \cdot h = 36h\pi - \frac{h^3\pi}{4}$$

$$V'(h) = -\frac{3}{4}\pi h^2 + 36\pi$$

$$V'(h) = 0 \qquad L = \{\pm 6.93\}$$

$$h = 6.93cm$$

$$r = 4.9cm \quad fuer\ h = 6.93cm$$

115/14

a ... Kantenlänge der Grundfläche

$$V(a,h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$2.4^2 = 5.76 = h_s^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$h_s^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V_2(a) = V(a)^2 = \frac{1}{9} \cdot a^4 \cdot (5.76 - \frac{a^2}{2}) = -\frac{1}{18}a^6 + 0.64a^4$$

$$V_2'(a) = -\frac{1}{3}a^5 + 2.56a^3$$

$$V_2'(a) = 0 \qquad L = \{0; \pm 2.771\}$$

$$V(2.771m) \approx 3.55m^3$$

115/13

Tragfähigkeit $T \sim b$
Tragfähigkeit $T \sim h^2$

a

$$r = 50cm$$
$$T(b,h) = b \cdot h^2$$
$$h^2 + b^2 = (2r)^2 \Rightarrow h^2 = 10000 - b^2 \Rightarrow h = \sqrt{10000 - b^2}$$
$$T(b) = b \cdot (10000 - b^2) = -b^3 + 10000b$$
$$T'(b) = -3b^2 + 10000$$
$$T'(b) = 0 \qquad L = \{\pm\frac{100}{\sqrt{3}}\}$$
$$T(\frac{100}{\sqrt{3}}) \approx 384900$$

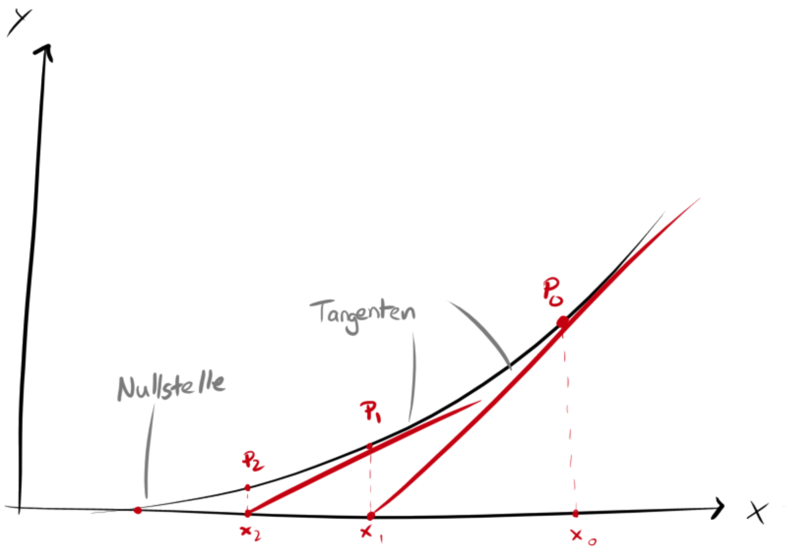
$$b \approx 57.74cm$$
$$h = \sqrt{10000 - (\frac{100}{\sqrt{3}})^2} \approx 81.65cm$$

3.19 Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung

z. B. $f(x) = x^3 + 5x - 10$
probeweise:

$f(1) = -4$
$f(2) = 8$
$\Rightarrow$ Nullstelle zwischen 1 und 2

Vermutung $x_0 = 1.5$



Zum Rechenverfahren

Tangentengleichung $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$t(x_1) = 0 \qquad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$\rightarrow x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

allgemeine Näherungsformel nach Newton (und Raphson)

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

n beginnend bei 0

Abbruchbedingung: Nullstelle auf 3 Dezimalen genau. Das bedeutet, dass beim nächsten Schritt sich die 3. Dezimale nicht mehr ändern darf

Beispiel $f(x) = x^3 + 5x - 10$
$f'(x) = 3x^2 + 5$
$x_0 = 1.5$
$x_1 = 1.5 - \dfrac{1.5^3 + 5 \cdot 1.5 - 10}{3 \cdot 1.5^2 + 5} \approx 1.4255$
$x_2 = ... \approx 1.4233$
$x_3 = ... \approx 1.42331$
Nullstelle auf 3 Dezimalen genau: $x = 1.423$

118/1

a

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2$$
$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 0 - \frac{-1}{2} = 0.5$$
$$x_2 = \frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$
$$x_3 = \frac{1581}{3487} \approx 0.453398...$$
$$x_4 = \frac{50302634185}{110945952227} \approx 0.453397...$$
$$x^* = 0.453$$

3.19.1 Anwendungen des Newton-Verfahrens

Mögliche Fragestellungen:

- Nullstellen eines Funktionsgraphen $f(x) = 0$, auch $f(x) = a$
- Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 0$, auch $f'(x) = m$
- Schnittstellen zweier Funktionsgraphen $f(x) = g(x)$
- zu Zielfunktion Lösungen finden

118/2

a

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$x_0 = 2$$
$$x_1 = 1.8889$$
$$x_2 = 1.8795$$
$$x_3 = 1.8794$$
$$x_4 = 1.8794$$
$$x_1^* = 1.879$$
$$...$$
$$x_2^* = -1.532$$
$$x_3^* = -0.347$$

b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$
$$x_0 = 1$$
$$x_1 = 0.8889$$
$$x_2 = 0.8795$$
$$x_3 = 0.8794$$
$$x_4 = 0.8794$$
$$x_1^* = 0.879$$
$$...$$
$$x_2^* = -2.532$$
$$x_3^* = -1.347$$

c

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 10x$$
$$x_0 = 0.5$$
$$x_1 = 0.4271$$
$$x_2 = 0.4203$$
$$x_3 = 0.4204$$
$$x_4 = 0.4204$$
$$x_1^* = 0.420$$
$$...$$
$$x_2^* = -1.332$$
$$x_3^* = -0.521$$
$$x_4^* = 3.432$$

d

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 0.5$$
$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x + 1$$
$$x_0 = 0.5$$
$$x_1 = 0.6071$$
$$x_2 = 0.6030$$
$$x_3 = 0.6030$$
$$x_1^* = 0.603$$
$$...$$
$$x_2^* = -2.635$$
$$x_3^* = -0.246$$
$$x_4^* = 1.278$$

118/3

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$
$$x_0 = -1$$
$$x_1 = -0.8750$$
$$x_2 = -0.8400$$
$$x_3 = -0.8376$$
$$x_4 = -0.8376$$
$$x^* = -0.838$$

118/4

a

$$g(x) = x^2; \quad h(x) = x^3 - 1$$
$$f(x) = g(x) - h(x) = -x^3 + x^2 + 1$$
$$f'(x) = -3x^2 + 2x$$
$$x_0 = 1.5$$
$$...$$
$$x^* = 1.466$$

b

$$g(x) = x^3; \quad h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2$$
$$f(x) = g(x) - h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 2$$
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2$$
$$x_0 = 1$$
$$...$$
$$x^* = 0.848$$

118/5

a

$$f(x) = 0.1x^4 - x^2 - x + 1; \quad m = 1$$
$$f'(x) = 0.4x^3 - 2x - 1 = 1$$
$$0.4x^3 - 2x - 2 = 0$$
$$x_0 = 2.5$$
...
$$x^* = 2.627$$

b

$$f(x) = -0.1x^4 - x^3 + x^2 + 3; \quad m = -18$$
$$f'(x) = -0.4x^3 - 3x^2 + 2x = -18$$
$$-0.4x^3 - 3x^2 + 2x + 18 = 0$$
$$x_0 = 2.5$$
...
$$x^* = 2.400$$

c

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{x}; \quad m = 4$$
$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} = 4$$
$$\frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$
$$x_0 = 2.5$$
...
$$x^* = 2.418$$

d

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^3 + 3; \quad m = -10$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 = -10$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 + 10 = 0$$
$$x_0 = 2.5$$
...
$$x^* = 2.622$$

118/6

a

$$f(x) = x^5 + x + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

Die Funktion ist streng monoton steigend, d. h. sie hat genau eine Nullstelle.

b

$$x_0 = -1$$
...
$$x^* \approx -0.755$$

118/7

$$r = 9cm$$
$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V_Z = h\pi R^2 = \frac{1}{4}V_K = \frac{1}{3}\pi r^3$$
$$hR^2 = \frac{1}{3}r^3$$
$$R^2 + (\frac{h}{2})^2 = r^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$
$$h(r^2 - \frac{h^2}{4}) = hr^2 - \frac{h^3}{4} = \frac{1}{3}r^3$$
$$81h - \frac{h^3}{4} = 243$$
$$-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243 = 0$$
$$(-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243)' = -\frac{3}{4}h^2 + 81$$
$$...$$
$$(h_1 \approx -19.345)$$
$$h_2 \approx 3.091$$
$$h_3 \approx 16.25$$
$$R_2 = \sqrt{r^2 - \frac{h_2^2}{4}} \approx 8.87$$
$$R_3 = \sqrt{r^2 - \frac{h_3^2}{4}} \approx 3.87$$

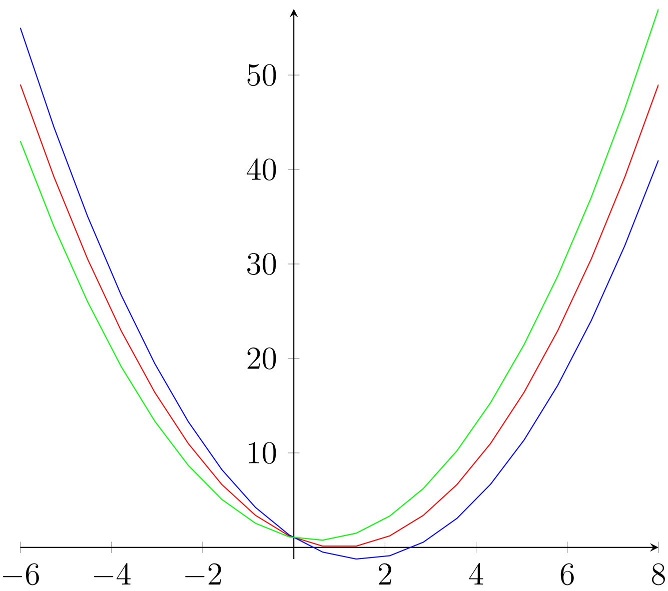
3.20 AB Kurvenuntersuchungen

AB/1

a

$f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$
$a \in \mathbb{R}, a > 0$
Symmetrie
$f_a(-x) = x^2 + 2ax + 1 \neq f_a(x)$
$-f_a(x) = -x^2 + 2ax - 1 \neq f_a(-x)$
$\Rightarrow$ keine Symmetrie erkennbar
Nullstellen
$x^2 - 2ax + 1 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$
Extrema
$f_a'(x) = 2x - 2a = 0 \quad L = \{a\}$
$f_a''(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow TP(a|f_a(a) = -a^2 + 1)$
Wendepunkte
$f_a''(x) = 0 \quad L = \{\}$

b



$a = 1,\ 1.5,\ 0.5$

c

$$f_a'(4) = 2 \cdot 4 - 2a = 1 \quad \Rightarrow a = 3.5$$

d

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$
$$a^2 - 1 < 0 \quad fuer\ a < 1 \quad \Rightarrow \text{ keine Nullstelle}$$
$$a^2 - 1 = 0 \quad fuer\ a = 1 \quad \Rightarrow \text{ 1 Nullstelle}$$
$$a^2 - 1 > 0 \quad fuer\ a > 1 \quad \Rightarrow \text{ 2 Nullstellen}$$

3.20.1 Ortslinie

Der Graph, auf dem alle Tiefpunkte zu unterschiedlichen a liegen, heißt Ortslinie der Tiefpunkte:

$T(a|-a^2+1)$

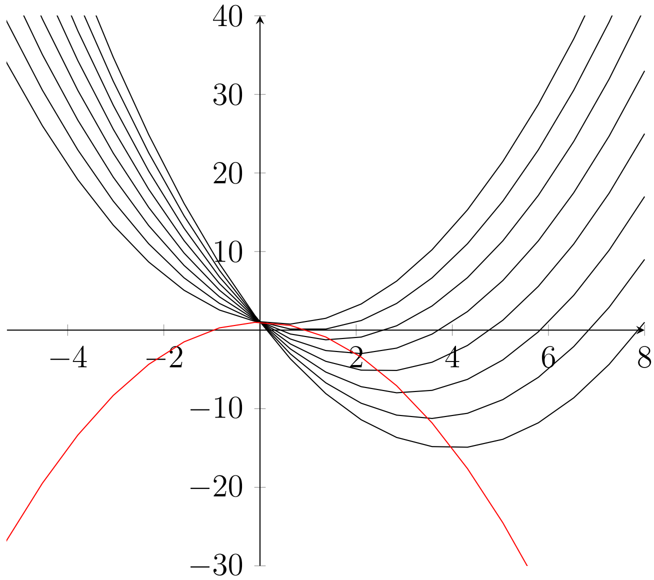
$x = a$

$y = -a^2 + 1$

setze a aus x-Koordinate in y ein

$f(x) = y = -x^2 + 1$

Funktionsgleichung der Ortskurve der Tiefpunkte



AB/5

a

$f_a(x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2$

$a > 0$

Symmetrie

$f_a(-x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 = f_a(x)$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie

$-f_a(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 \neq f_a(-x)$

$\Rightarrow$ keine Punktsymmetrie erkennbar

Nullstellen

$\frac{1}{2}x^4 - ax^2 = 0 \qquad | : x^2$

$\frac{1}{2}x^2 - a = 0$

$L = \{0; \pm\sqrt{2a}\}$

Extrema

$f_a'(x) = 2x^3 - 2ax = 0 \qquad | : x$

$2x^2 - 2a = 0$

$x = \pm\sqrt{a}$

$f_a''(x) = 6x^2 - 2a$

$f_a''(\pm\sqrt{a}) = 4a > 0 \Rightarrow TP$

$f_a''(0) = -2a < 0 \Rightarrow HP$

Wendepunkte

$f_a''(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$

$f_a'''(x) = 12x$

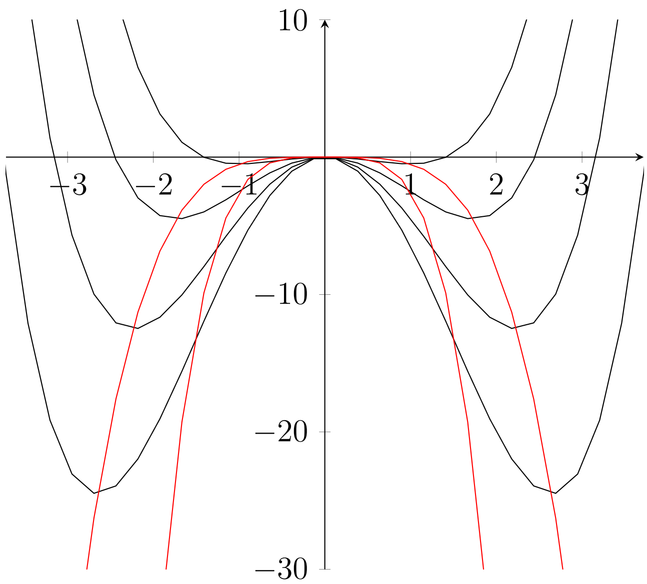
$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 12\sqrt{\frac{a}{3}} > 0 \Rightarrow RLWP$

$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = -12\sqrt{\frac{a}{3}} < 0 \Rightarrow LRWP$

b

$$T(\pm\sqrt{a}| - \frac{1}{2}a^2)$$
$$f_T(x) = -\frac{1}{2}x^4$$

$$W(\pm\sqrt{\frac{a}{3}}| - \frac{5a^2}{18})$$
$$f_W(x) = -\frac{5}{2}x^4$$



AB/4

a

$$f_a(x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) \qquad WP(1|f_a(1))$$
$$f_a(-x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) = f_a(x)$$
$\Rightarrow$ Achsensymmetrie $\Rightarrow$ zweiter Wendepunkt bei $x = -1$
$$f_a''(\pm 1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad \Rightarrow a = 6$$
$$f_6(\pm 1) = \frac{1}{4}(1^4 - 6 \cdot 1^2) = -\frac{5}{4}$$

b

$$f_a''(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\}$$
$$t_1(x) = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$
$$t_2(x) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$

3.21 Wiederholung

115/9

$$O(a,h) = a^2 + 4ah$$
$$V(a,h) = a^2 \cdot h = 40dm^3 \quad \Rightarrow h = \frac{40dm^3}{a^2}$$
$$O(a) = a^2 + 160dm^3 \cdot a^{-1}$$
$$O'(a) = 2a - 160dcm^3 \cdot a^{-2}$$
$$a = \sqrt[3]{80dm^3} \approx 4.309dm$$
$$h = \frac{40dm^3}{\sqrt[3]{80dm^3}^2} = \sqrt[3]{10} \approx 2.154dm$$

119/8

$$h(0) = 400m$$
$$h(370) = 0$$

a h' beschreibt das Gefälle des Flusses und gibt den Höhenverlust des Wassers pro Kilometer an

b ein Stausee hat einen waagerechten Abschnitt des Graphen zur Folge, ein Wasserfall eine Sprungstelle

c h' ist nicht positiv, da das Wasser ausschließlich nach unten fließt; die Einheit ist $\frac{m}{km}$

3.22 Sinus- und Kosinusfunktion

$f(\alpha) = sin(\alpha)$
$f(x) = sin(x)$

$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{U} \qquad U = 2\pi r$

$x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360^\circ} \qquad \alpha = \frac{x \cdot 360^\circ}{2\pi}$

wichtige x-Koordinaten
$x = 3.14... = \pi \qquad x = 6.28... = 2\pi$
$x = 1.57... = \frac{\pi}{2} \qquad x = 4.71... = \frac{3\pi}{2}$

$sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x) \qquad sin(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$

3.22.1 Vielfachheit der Lösungen von (geniometrischen) Gleichungen

$sin(x) = 0.7$
$x = asin(0.7) \approx 0.775$
$x_n \approx 0.775 + n \cdot 2\pi$
$x_m \approx \pi - 0.775 + m \cdot 2\pi$
$n, m \in \mathbb{Z}$

$cos(x) = 0.3$
$x = acos(0.3) \approx 1.266$
$x_n \approx 1.266 + n \cdot 2\pi$
$x_m \approx -1.266 + n \cdot 2\pi$
$n, m \in \mathbb{Z}$

128/6

a

$$sin(x) = 0.9396$$
$$x = asin(0.9396) \approx 1.221$$
$$x_n \approx 1.221 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx \pi - 1.221 + m \cdot 2\pi$$

b

$$sin(x) = 0.5519$$
$$x = asin(0.5519) \approx 0.585$$
$$x_n \approx 0.585 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx \pi - 0.585 + m \cdot 2\pi$$

c

$$cos(x) = 0.6294$$
$$x = asin(0.6294) \approx 0.890$$
$$x_n \approx 0.890 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx -0.890 + m \cdot 2\pi$$

d

$$cos(x) = -0.8870$$
$$x = asin(-0.8870) \approx 2.662$$
$$x_n \approx 2.662 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx -2.662 + m \cdot 2\pi$$

128/7

a

$$sin(x) = 0.63$$
$$x = asin(0.63) \approx 0.682$$
$$x_n \approx 0.682 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx \pi - 0.682 + m \cdot 2\pi$$

b

$$
\begin{aligned}
&cos(x) = -0.55\\
&x = asin(-0.55) \approx 2.153\\
&x_n \approx 2.153 + n \cdot 2\pi\\
&x_m \approx -2.153 + m \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&sin(x) = -\frac{1}{2}\\
&x = asin(-\frac{1}{2}) \approx -0.524\\
&x_n \approx -0.524 + n \cdot 2\pi\\
&x_m \approx \pi + 0.524 + m \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\
&x = asin(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) \approx 2.356\\
&x_n \approx 2.356 + n \cdot 2\pi\\
&x_m \approx -2.356 + m \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

3.22.2 Die allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = y = a \cdot sin(b(x - c)) + d$$

a Streckung entlang der y-Achse (Amplitude)

b Streckung entlang der x-Achse (Perioden pro 2π, Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$)

c Verschiebung in x-Richtung (für $c > 0$ nach rechts)

d Verschiebung in y-Richtung

3.22.3 AB Die Funktionen $f : x \mapsto a \cdot sin(b(x-c))$ und ihre Graphen

AB/3

a

$$f(x) = 3 \cdot sin(\frac{1}{2}(x-\pi))$$
$$p = 4\pi$$
$$3 \cdot sin(\frac{1}{2}(x-\pi))$$
$$x_H = 2\pi + n \cdot p$$
$$x_T = n \cdot p$$
$$x_W = \pi + \frac{n}{2} \cdot p$$

b

$$f(x) = 2 \cdot sin(\frac{2}{3}x)$$
$$p = 3\pi$$
$$x_H = \frac{3}{4}\pi + n \cdot p$$
$$x_T = 2\frac{1}{4}\pi + n \cdot p$$
$$x_W = \frac{n}{2} \cdot p$$

c

$$f(x) = 4 \cdot sin(x - \frac{\pi}{6})$$
$$p = 2\pi$$
$$x_H = \frac{2}{3}\pi + n \cdot p$$
$$x_T = \frac{5}{3}\pi + n \cdot p$$
$$x_W = \frac{\pi}{6} + \frac{p}{2}$$

AB/5

$$f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + e)$$

a

$$f(x) = 20 \cdot sin(\frac{\pi}{20} \cdot x - \frac{\pi}{2})$$

b

$$f(x) = 6 \cdot sin(\frac{\pi}{12} \cdot x + \frac{\pi}{4})$$

c

$$f(x) = 4 \cdot sin(\frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{\pi}{2})$$

AB/6

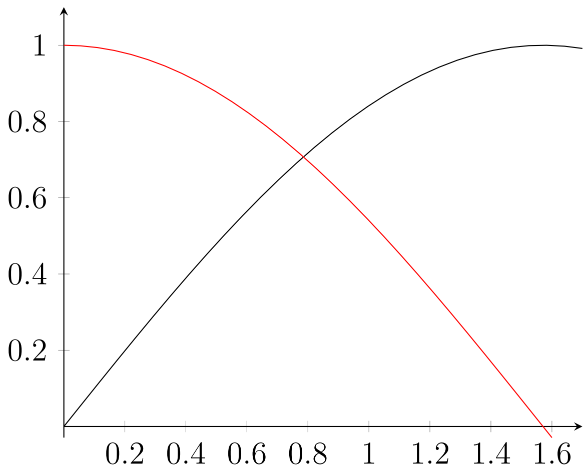
$$f(t) = a \cdot sin(b(t - c)) \qquad -2 \leqslant t \leqslant 13$$

a Die Sonne bewegt sich aus Sicht der Aufnahmen periodisch auf und ab. Ihr Höhenverlauf lässt sich daher über eine Sinuskurve modellieren.

b

$$f(x) = a \cdot sin(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 6))$$

3.22.4 Ableitung der Sinusfunktion



$sin(x)$, $cos(x)$

Annäherung mit Taylorreihe

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$
$$a = x_0 = 0$$
$$f(x_0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ...$$
$$sin(x) = 0 + x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$
$$(sin(x))' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = ... = cos(x)$$

$$f(x) = sin(x)$$
$$f'(x) = cos(x)$$
$$f''(x) = -sin(x)$$
$$f'''(x) = -cos(x)$$
$$f''''(x) = sin(x)$$
$$...$$

130/1

a

$$f(x) = 12 \cdot sin(x)$$
$$f'(x) = 12 \cdot cos(x)$$

b

$$f(x) = -2 \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = -2 \cdot (-sin(x))$$

c

$$f(x) = \sqrt{5} \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = \sqrt{5} \cdot (-sin(x))$$

d

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot sin(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot cos(x)$$

e

$$f(x) = 5x^3 - sin(x)$$
$$f'(x) = 15x^2 - cos(x)$$

f

$$f(x) = 2 \cdot cos(x) - sin(x)$$
$$f'(x) = 2 \cdot (-sin(x)) - cos(x)$$

130/3

b

$$f(x) = 3 \cdot sin(x)$$
$$P(\frac{5\pi}{3}|?)$$
$$y = f(\frac{5\pi}{3}) \approx -2.598$$
$$f'(x) = 3 \cdot cos(x)$$
$$m_t = f'(\frac{5\pi}{3}) = 1.5$$
$$b_t = -2.598 - 1.5 \cdot \frac{5\pi}{3} \approx -10.452$$
$$t(x) = 1.5x - 10.452$$

130/4

c

$$f(x) = 2 \cdot sin(x) - cos(x); \quad x \in [0; 2\pi]$$
$$f'(x) = 2 \cdot cos(x) + sin(x)$$

$$f'(x) = 0 = 2 \cdot cos(x) + sin(x)$$
$$2 = -\frac{sin(x)}{cos(x)} = -tan(x) \quad \Rightarrow \quad x = atan(-2)$$
$$L = \{atan(-2) + n\pi\} \quad n \in \{1; 2\}$$

$$f''(x) = cos(x) - 2 \cdot sin(x)$$
$$f''(atan(-2) + \pi) \approx -2.23 < 0$$
$$HP(atan(-2) + \pi | f(atan(-2) + \pi)) = HP(2.034|2.236)$$
$$f''(atan(-2) + 2\pi) \approx 2.23 > 0$$
$$TP(atan(-2) + 2\pi | f(atan(-2) + 2\pi)) = TP(5.176| - 2.236)$$

d

$$f(x) = 4 \cdot cos(x) + 2x; \quad x \in [0; 2\pi]$$
$$f'(x) = -4 \cdot sin(x) + 2$$

$$f'(x) = 0 = -4 \cdot sin(x) + 2$$
$$0.5 = sin(x) \quad \Rightarrow \quad x = asin(0.5)$$
$$L = \{asin(0.5); \pi - asin(0.5)\}$$

$$f''(x) = -4 \cdot cos(x)$$
$$f''(asin(0.5)) \approx -3.46 < 0$$
$$HP(asin(0.5)|f(asin(0.5))) = HP(0.524|4.51)$$
$$f''(\pi - asin(0.5)) \approx 3.46 > 0$$
$$TP(\pi - asin(0.5)|f(\pi - asin(0.5))) = TP(2.618|1.772)$$

3.23 Neue Funktionen aus alten Funktionen

gegeben sind
$f(x) = sin(x)$
$g(x) = \sqrt{x}$
$h(x) = x^2 + 5$

Produkt
$i(x) = f(x) \cdot g(x) = sin(x) \cdot \sqrt{x}$
$j(x) = h(x) \cdot f(x) = (x^2 + 5) \cdot sin(x)$

Quotient
$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{sin(x)}$
$l(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$

Verkettung
$m(x) = f(g(x)) = sin(\sqrt{x})$
$n(x) = g(f(x)) = \sqrt{sin(x)}$
$o(x) = f(g(h(x))) = sin(\sqrt{x^2 + 5})$

3.23.1 Ableitungsregeln

Produktregel

$$k(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}$$
$$= \boldsymbol{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Kettenregel

$$
\begin{aligned}
k(x) &= f(g(x)) \\
k'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+i) - f(z)}{i} \cdot g'(x) \\
&= f'(z) \cdot g'(x) \\
&= \boldsymbol{f'(g(x)) \cdot g'(x)}
\end{aligned}
$$

$$g(x) = z \qquad g(x+h) = z+i$$

Beispiele

$$k(x) = (x^2 + 2x - 7) \cdot sin(x)$$
$$k'(x) = (2x + 2) \cdot sin(x) + (x^2 + 2x - 7) \cdot cos(x)$$

$$k(x) = sin(x^3 - 5x)$$
$$k'(x) = cos(x^3 - 5x) \cdot (3x^2 - 5)$$

135/1

a

$$f(x) = (x+2)^4$$
$$f'(x) = 4(x+2)^3$$

b

$$f(x) = (8x+2)^3$$
$$f'(x) = 3(8x+2)^2 \cdot 8 = 24(8x+2)^2$$

c

$$f(x) = (\frac{1}{2} - 5x)^3$$
$$f'(x) = 3(\frac{1}{2} - 5x)^2 \cdot (-5) = -15(\frac{1}{2} - 5x)^2$$

d

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5)^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5) \cdot 2x = x^3 - 5x$$

135/2

a

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(x-1)^{-3}$$

b

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(3x-1)^{-3} \cdot 3 = -6(3x-1)^{-3}$$

e

$$f(x) = sin(2x)$$
$$f'(x) = cos(2x) \cdot 2 = 2cos(2x)$$

f

$$f(x) = sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = cos(2x + \pi) \cdot 2 = 2cos(2x + \pi) = -2cos(2x)$$

138/1

g

$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = -2x^{-2} \cdot cos(x) - \frac{2}{x} \cdot sin(x)$$

h

$$f(x) = sin(x) \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = (cos(x))^2 - (sin(x))^2 = cos(2x)$$

i

$$f(x) = x^2 \cdot sin(x)$$
$$f'(x) = 2x \cdot sin(x) + x^2 \cdot cos(x)$$

j

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = -\frac{cos(x)}{2\sqrt{x^3}} - \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$$

k

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot sin(x) \cdot (2 - x)$$
$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot cos(x) \cdot (2 - x) - \frac{\pi}{4} \cdot sin(x)$$

l

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

135/4

a

$$f(x) = 0.25 \cdot sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = 0.25 \cdot cos(2x + \pi) \cdot 2 = -0.5 \cdot cos(2x)$$

b

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot sin(\pi - 3x)$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot cos(\pi - 3x) \cdot (-3) = 2 \cdot cos(3x)$$

c

$$f(x) = -cos(x^2 + 1)$$
$$f'(x) = sin(x^2 + 1) \cdot 2x$$

d

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (cos(x))^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot cos(x) \cdot (-sin(x)) = -\frac{2}{3} \cdot cos(x) \cdot sin(x)$$

e

$$f(x) = \sqrt{3x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

f

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+x}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

g

$$f(x) = \sqrt{7x-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x-5}} \cdot 7 = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{7x-5}}$$

h

$$f(x) = \sqrt{7x^2-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x^2-5}} \cdot 14x = \frac{7x}{\sqrt{7x^2-5}}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{sin(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{(sin(x))^2} \cdot cos(x) = -\frac{cos(x)}{(sin(x))^2}$$

Ableitungen mit mehr als zwei Funktionen

$$l = g \cdot [h \cdot k]$$
$$l' = g' \cdot h \cdot k + g \cdot [h' \cdot k + h \cdot k']$$
$$= g' \cdot h \cdot k + g \cdot h' \cdot k + g \cdot h \cdot k'$$

$$l = g(h(k))$$
$$l' = g'(h(k)) \cdot h'(k) \cdot k'$$

$$l = g \cdot h(k)$$
$$l' = g' \cdot h(k) + g \cdot h'(k) \cdot k'$$

$$l = g(h \cdot k)$$
$$l' = g'(h \cdot k) \cdot [h' \cdot k + h \cdot k']$$

Quotientenregel

$$l = \frac{g}{h} = g \cdot h^{-1}$$
$$l' = g' \cdot h^{-1} + g \cdot [-h^{-2} \cdot h']$$
$$= g' \cdot h^{-1} - g \cdot h^{-2} \cdot h'$$
$$= \frac{g'}{h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} = \frac{g' \cdot h}{h \cdot h} - \frac{g \cdot h'}{h^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}}$$

138/2

e

$$f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2}$$
$$f'(x) = 3(5 - 4x)^2 \cdot (-4) \cdot x^{-2} + (5 - 4x)^3 \cdot (-2x^{-3})$$
$$= -\frac{2 \cdot (5 - 4x)^2 \cdot (2x + 5)}{x^3}$$

f

$$f(x) = 3x \cdot cos(2x)$$
$$f'(x) = 3 \cdot cos(2x) + 3x \cdot (-sin(2x)) \cdot 2$$
$$= 3 \cdot (cos(2x) - 2x \cdot sin(2x))$$

g

$$f(x) = 3x \cdot (sin(x))^2$$
$$f'(x) = 3 \cdot (sin(x))^2 + 3x \cdot 2 \cdot sin(x) \cdot cos(x)$$
$$= 3 \cdot sin(x) \cdot (sin(x) + 2x \cdot cos(x))$$

h

$$f(x) = (2x-1)^2 \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = 2(2x-1) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + (2x-1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(2x-1) \cdot (10x-1)}{2\sqrt{x}}$$

i

$$f(x) = 0.5x^2 \cdot \sqrt{4-x}$$
$$f'(x) = x \cdot \sqrt{4-x} + 0.5x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \cdot (-1)$$
$$= \frac{(4-1.25x) \cdot x}{\sqrt{4-x}}$$

140/2

a

$$f(x) = \frac{1-x^2}{3x+5}$$
$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (3x+5) - (1-x^2) \cdot 3}{(3x+5)^2}$$
$$= -\frac{(3x+1) \cdot (x+3)}{(3x+5)^2}$$

b

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$$
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2-x}{2\sqrt{x} \cdot (x+2)^2}$$

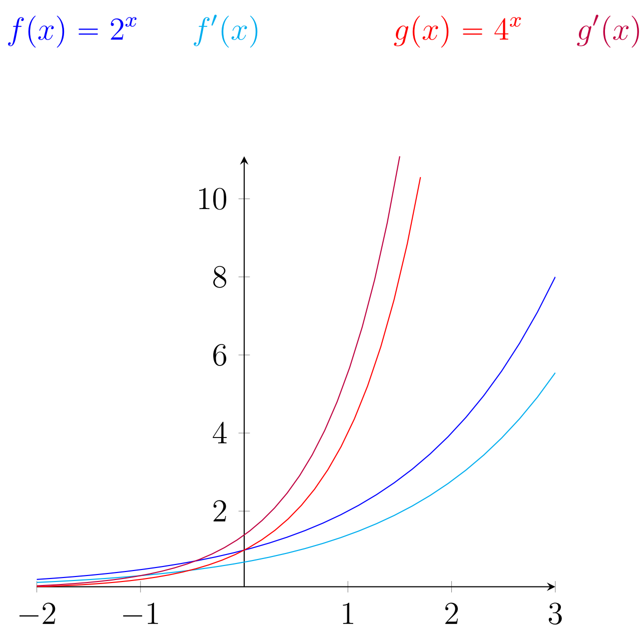
c

$$h(x) = \frac{3 \cdot sin(x)}{6x - 1}$$
$$h'(x) = \frac{3 \cdot cos(x) \cdot (6x - 1) - 3 \cdot sin(x) \cdot 6}{(6x - 1)^2}$$

d

$$k(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$
$$k'(x) = \frac{cos(x) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot (-sin(x))}{(cos(x))^2}$$
$$= 1 + (tan(x))^2$$

3.24 Exponentialfunktionen - Ableitung



Zwischen 2^x und 4^x liegt eine Exponentialfunktion, deren Ableitungsfunktion genau der Ursprungsfunktion entspricht. Sie wird natürliche Exponentialfunktion genannt.

$$f(x) = e^x$$

Eulersche Zahl $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.71828$

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$
...

$e^x \leftrightarrow log_e(x) = ln(x)$
$\Rightarrow e^{ln(x)} = ln(e^x) = x$

$2^x = 5^{x \cdot \frac{log(2)}{log(5)}} = 5^{x \cdot log_5(2)}$
$2^x = e^{x \cdot ln(2)}$
$10^x = e^{x \cdot ln(10)}$

$f(x) = e^{x \cdot ln(2)} = 2^x$
$f'(x) = e^{x \cdot ln(2)} \cdot ln(2) = 2^x \cdot ln(2) \approx 2^x \cdot 0.7$

$f(x) = e^{x \cdot ln(4)} = 4^x$
$f'(x) = e^{x \cdot ln(4)} \cdot ln(4) = 4^x \cdot ln(4) \approx 4^x \cdot 1.4$

142/3

a

$$f(x) = x \cdot e^x$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x \cdot (x+1)$$

b

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2}$$

c

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

d

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x \cdot (x+2)$$

e

$$f(x) = \frac{x}{e^{-0.5x}}$$
$$f(x) = \frac{1 \cdot e^{-0.5x} - x \cdot (-0.5) \cdot e^{-0.5x}}{(e^{-0.5x})^2} = e^{0.5x} \cdot (1 + 0.5x)$$

f

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) - 1}{x^2}$$

g

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$$

h

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot (x+2) - e^{3x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^{3x} \cdot (3x+5)}{(x+2)^2}$$

i

$$f(x) = x^2 + x \cdot e^{0.1x} = x^2 \cdot (1 + \frac{e^{0.1x}}{x})$$
$$f'(x) = 2x \cdot (1 + \frac{e^{0.1x}}{x}) + x^2 \cdot \frac{e^{0.1x} \cdot (0.1x - 1)}{x^2} = e^{0.1x} \cdot (0.1x + 1) + 2x$$

j

$$f(x) = x \cdot e^{-2x+1}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x+1} + x \cdot (-2e^{-2x+1}) = e^{1-2x} \cdot (1-2x)$$

k

$$f(x) = x^2 \cdot e^{ax}$$
$$f'(x) = 2x \cdot e^{ax} + x^2 \cdot a \cdot e^{ax} = x \cdot e^{ax} \cdot (2 + ax)$$

l

$$f(x) = x \cdot e^{2x^2+1}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x^2+1} + x \cdot e^{2x^2+1} \cdot 4x = e^{2x^2+1} \cdot (4x^2 + 1)$$

3.24.1 Basis $\neq e$

$$f(x) = 10^x = (e^z)^x = e^{ln(10) \cdot x}$$
$$e^z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = ln(10)$$
$$\Rightarrow \quad b^x = e^{ln(b) \cdot x}$$

$$f'(x) = e^{ln(10) \cdot x} \cdot ln(10)$$
$$= 10^x \cdot ln(10)$$
$$\Rightarrow \quad b^x \cdot ln(b)$$

145/8

f

$$e^{2x} + 10 = 6.5 \cdot e^x \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$z^2 + 10 = 6.5z \qquad | - 6.5z$$
$$z^2 - 6.5z + 10 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{6.5 \pm \sqrt{42.25 - 40}}{2}$$
$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2.5 \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2.5 = e^x \qquad |ln$$
$$x_2 = ln(2.5) \approx 0.916$$

a

$$e^{2x} - 6 \cdot e^x + 8 = 0 \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$z^2 - 6z + 8 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$
$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2 \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2 \qquad |ln$$
$$x_2 = ln(2) \approx 0.693$$

b

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$z - 2 - \frac{15}{z} = 0 \qquad | \cdot z$$
$$z^2 - 2z - 15 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$
$$z_1 = 5 \quad (z_2 = -3) \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 5 = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(5) \approx 1.609$$

g

$$(e^{2x} - 6) \cdot (5 - e^{3x}) = 0 \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$(z^2 - 6) \cdot (5 - z^3) = 0$$

$$z^2 - 6 = 0 \qquad |\sqrt{}$$
$$z_1 = \sqrt{6} \approx 2.449 \qquad |\text{resubst.}$$
$$z_1 = \sqrt{6} = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(\sqrt{6}) \approx 0.896$$

$$5 - z^3 = 0 \qquad |\sqrt[3]{}$$
$$z_2 = \sqrt[3]{5} \approx 1.710 \qquad |\text{resubst.}$$
$$z_2 = \sqrt[3]{5} = e^x \qquad |ln$$
$$x_2 = ln(\sqrt[3]{5}) \approx 0.536$$

h

$$2 \cdot e^x + 15 = 8 \cdot e^{-x} \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$2z + 15 = \frac{8}{z} \qquad | - \frac{8}{z}$$
$$2z + 15 - \frac{8}{z} = 0 \qquad | \cdot z$$
$$2z^2 + 15z - 8 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4}$$
$$z_1 = 0.5 \quad (z_2 = -8) \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 0.5 = e^x \qquad |ln$$
$$x = ln(0.5) \approx -0.693$$

146/9

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{kt}$$

a

$$h(0) = 0.02$$

b

$$h(6) = 0.02 \cdot e^{6k} = 0.4$$
$$e^{6k} = 20$$
$$6k = ln(20)$$
$$k = \frac{ln(20)}{6} \approx 0.499$$

c

$$h(9) = 0.02 \cdot e^{0.499 \cdot 9} \approx 1.784$$

d

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{0.499t} = 3$$
$$e^{0.499t} = 150$$
$$0.499t = ln(150)$$
$$t = \frac{ln(150)}{0.499} \approx 10.041$$

e

$$h(t+1) - h(t) = 1.5$$
$$0.02 \cdot e^{k \cdot (t+1)} - 0.02 \cdot e^{k \cdot t} = 1.5$$
$$0.02e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 1.5$$
$$e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 75$$
$$0.647e^{0.499t} = 75$$
$$e^{0.499t} = 115.92$$
$$0.499t = ln(115.92)$$
$$t = \frac{ln(115.92)}{0.499} \approx 9.525$$

f

$$h'(t) = 0.02k \cdot e^{kt} = 1$$
$$0.02 \cdot 0.499 \cdot e^{0.499t} = 1$$
$$e^{0.499t} = 100.2$$
$$0.499t = ln(100.2)$$
$$t = \frac{ln(100.2)}{0.499} \approx 9.233$$

g

$t \geqslant 9$
$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t}$

$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 3$
$e^{-0.175t} \approx 0.061$
$-0.175t \approx ln(0.061)$
$t \approx \dfrac{ln(0.061)}{-0.175} \approx 15.982$

$k(t+1) - k(t) = 0.2$
$3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175\cdot(t+1)} - 3.5 + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$
$-8.2 \cdot e^{-0.175\cdot(t+1)} + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$
$-8.2 \cdot e^{-0.175t} \cdot (e^{-0.175} - 1) = 0.2$
$1.316 \cdot e^{-0.175t} \approx 0.2$
$e^{-0.175t} \approx 0.152$
$-0.175t \approx ln(0.152)$
$t \approx \dfrac{ln(0.152)}{-0.175} \approx 10.765$

3.25 Wiederholung

3.25.1 Sinusfunktionen und Newton-Verfahren

130/8

$$P(x_0|f(x_0)) \qquad Q(x_0|g(x_0)) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

a

$$f(x) = 2 \cdot sin(x) \qquad g(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2 \cdot cos(x) \qquad g'(x) = 2x$$
$$h(x) = f'(x) - g'(x) = 2 \cdot cos(x) - 2x = 0$$
$$h'(x) = -2 \cdot sin(x) - 2$$

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1$$
$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.75036$$
$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.73911$$
$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.73908$$
$$x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.73909$$
$$x^* \approx 0.7391$$

$$P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.7391|1.3472)$$
$$Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.7391|0.5463)$$

b

$$f(x) = sin(x) + 2 \cdot cos(x) \qquad g(x) = x^3$$
$$f'(x) = cos(x) - 2 \cdot sin(x) \qquad g'(x) = 3x^2$$
$$h(x) = f'(x) - g'(x) = cos(x) - 2 \cdot sin(x) - 3x^2 = 0$$
$$h'(x) = -sin(x) - 2 \cdot cos(x) - 6x$$

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 0.5$$
$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.34120$$
$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.32336$$
$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.32311$$
$$x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.32311$$
$$x^* \approx 0.3231$$

$$P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.3231|2.2140)$$
$$Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.3231|0.0337)$$

3.25.2 Produktregel

138/3

a

$$f(x) = (2x - 8) \cdot sin(x) \qquad f'(x) = 2 \cdot cos(x)$$
$$f(x) = a \cdot b \qquad f'(x) = a' \cdot b + a \cdot b' \neq a' \cdot b'$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot sin(x) + (2x - 8) \cdot cos(x)$$

b

$$g(x) = (2x - 3) \cdot (8 - x)^2$$
$$g'(x) = \mathbf{2} \cdot (8 - x)^2 + (2x - 3) \cdot \mathbf{(16\ -\ 2x)}$$

3.25.3 Quotientenregel

140/11

a

$$f(x) = sin(x) + tan(x) = sin(x) + \frac{sin(x)}{cos(x)}$$
$$f'(x) = cos(x) + (cos(x))^{-2}$$

b

$$f(x) = sin(x) \cdot tan(x) = \frac{(sin(x))^2}{cos(x)}$$
$$f'(x) = sin(x) + \frac{sin(x)}{(cos(x))^2}$$

c

$$f(x) = \frac{cos(x)}{tan(x)} = \frac{(cos(x))^2}{sin(x)}$$
$$f'(x) = -2 \cdot cos(x) - \frac{(cos(x))^3}{(sin(x))^2}$$

d

$$f(x) = \frac{tan(x)}{2} = \frac{sin(x)}{2 \cdot cos(x)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot (cos(x))^2}$$

e

$$f(x) = tan(2x) = \frac{sin(2x)}{cos(2x)}$$
$$f'(x) = \frac{2}{(cos(2x))^2}$$

f

$$f(x) = tan(x^2) = \frac{sin(x^2)}{cos(x^2)}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(cos(x^2))^2}$$

g

$$f(x) = (tan(x))^2 = \frac{(sin(x))^2}{(cos(x))^2}$$
$$f'(x) = \frac{2 \cdot sin(x)}{(cos(x))^3}$$

h

$$f(x) = \frac{2}{tan(x)} = \frac{2 \cdot cos(x)}{sin(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{2}{(sin(x))^2}$$

3.25.4 Kurvendiskussion

146/13

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x}$$
$$0 \mathrel{\hat{=}} 01.10.2002$$

a

$$92 \mathrel{\hat{=}} 01.01.2003$$
$$f(92) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 92} \approx 96161.27$$
$$457 \mathrel{\hat{=}} 01.01.2004$$
$$f(457) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 457} \approx 199542.38$$

b

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000$$
$$e^{0.002x} = 12.5$$
$$x = \frac{ln(12.5)}{0.002} \approx 1262.86 \mathrel{\hat{=}} 17.03.2006$$

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000000$$
$$e^{0.002x} = 12500$$
$$x = \frac{ln(12500)}{0.002} \approx 4716.74 \mathrel{\hat{=}} 31.08.2015$$

c

$$2 \cdot f(x_1) = f(x_2)$$
$$2 \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} = 80000 \cdot e^{0.002x_2}$$
$$2 \cdot e^{0.002x_1} = e^{0.002x_2}$$
$$ln(2) + 0.002x_1 = 0.002x_2$$
$$x_2 - x_1 = \frac{ln(2)}{0.002} \approx 346.57$$

d

$$p \cdot f(x_1) = f(x_1 + 365)$$
$$p \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} = 80000 \cdot e^{0.002\cdot(x_1+365)}$$
$$p \cdot e^{0.002x_1} = e^{0.002x_1} \cdot e^{0.002\cdot 365}$$
$$p = e^{0.002\cdot 365} \approx 2.08 = 208\%$$

e

$$365 \mathrel{\hat{=}} 01.10.2003$$
$$f(365) - f(364) = 80000 \cdot e^{0.002\cdot 365} - 80000 \cdot e^{0.002\cdot 364} \approx 331.68$$

$$f'(x) = 80000 \cdot 0.002 \cdot e^{0.002x} = 160 \cdot e^{0.002x}$$
$$f(364.5) \approx 331.68$$

f

$$f(x+1) - f(x) = 400$$
$$80000 \cdot e^{0.002\cdot(x+1)} - 80000 \cdot e^{0.002x} = 400$$
$$80000 \cdot e^{0.002x} \cdot (e^{0.002} - 1) = 400$$
$$x = ln(\frac{400}{80000 \cdot (e^{0.002} - 1)}) \cdot \frac{1}{0.002} \approx 457.65 \mathrel{\hat{=}} 02.01.2004$$

$$f'(x) = 160 \cdot e^{0.002x} = 400$$
$$x = ln(\frac{400}{160}) \cdot \frac{1}{0.002} \approx 458.15 \mathrel{\hat{=}} 03.01.2004$$

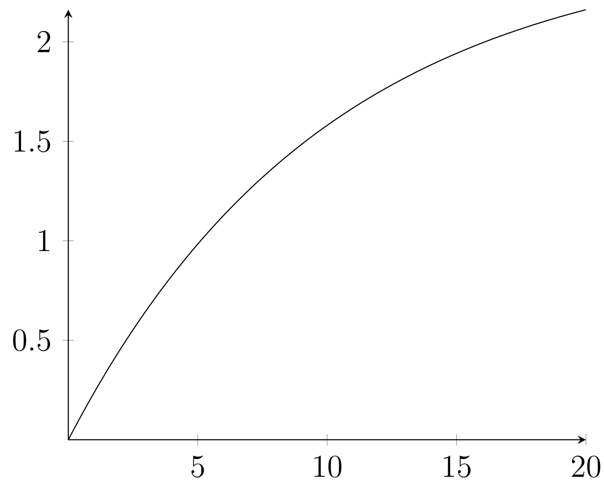
146/10

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$

a

$$v(0) = 0$$
$$v(10) \approx 1.58$$

b



c

$$v(t) = 2$$
$$t = -\frac{ln(0.2)}{0.1} \approx 16.09$$

d

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 2.5$$

e

$$
\begin{aligned}
&v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t}) \\
&v(t+1) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v(t) < v(t+1) \\
&2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t}) < 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)}) \qquad | : 2.5 \\
&1 - e^{-0.1t} < 1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)} \qquad | - 1; \cdot(-1) \\
&e^{-0.1t} > e^{-0.1 \cdot (t+1)} \qquad |ln() \\
&-0.1t > -0.1 \cdot (t+1) \qquad | \cdot (-10) \\
&t < t+1
\end{aligned}
$$

f

$$
\begin{aligned}
&\Delta v = v(t_2) - v(t_1) \\
&= v(5) - v(2) \approx 0.98 - 0.45 = 0.53
\end{aligned}
$$

g

$$
\begin{aligned}
&v'(t) = 0.25 \cdot e^{-0.1t} \\
&v'(2) = 0.20
\end{aligned}
$$

h Die Beschleunigung ist bei $t = 0$ am größten, da sie ständig kleiner wird.

3.26 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

z. B. $\begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{vmatrix}$ 2x3 LGS

LGS in Stufenform

$$\left|\begin{array}{lllll} -x_2 & + & 4x_1 & + & 3x_3 & = 2 \\ 3x_2 & + & x_1 & & & = 5 \\ 4x_2 & & & & & = 8 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow$ einfach zu lösen

III $4x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 2$

eingesetzt in II

$x_1 + 3 \cdot 2 = 5 \rightarrow x_1 = -1$

eingesetzt in I

$4 \cdot (-1) - 2 + 3x_3 = 2 \rightarrow x_3 = \dfrac{8}{3}$

$L = \{(-1|2|\dfrac{8}{3})\}$

3.26.1 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren dient dazu, ein LGS in Stufenform zu überführen und dann zu lösen.

256/4

a

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{vmatrix}$$

Eliminiere x_1 aus 2 der 3 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ \color{red}{0}x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad III - 2 \cdot I$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ \color{red}{0}x_1 & + & 18x_2 & - & 1x_3 & = & 17 \\ \color{red}{0}x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad 2 \cdot II - 3 \cdot I$$

Eliminiere x_2 aus 1 der 2 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ \color{red}{0}x_1 & + & \color{red}{0}x_2 & + & 38x_3 & = & 38 \\ \color{red}{0}x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad II - 3 \cdot III$$

Löse LGS in Stufenform

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ & & & & 38x_3 & = & 38 \\ & & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix}$$

II $38x_3 = 38 \rightarrow x_3 = 1$

eingesetzt in III

$6x_2 - 13 \cdot 1 = -7 \rightarrow x_2 = 1$

eingesetzt in I

$2x_1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_1 = 1$

$L = \{(1|1|1)\}$

3.26.2 Matrix-Schreibweise

256/4

b

$$\begin{vmatrix} -x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & -2 \end{vmatrix} \quad II + I; \quad III - II$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 12 & 0 & \vdots & 12 \end{vmatrix} \quad II - 3 \cdot III$$

...

$L = \{0|1|2\}$

c

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 0 & -3.6 & -6 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} II - 2 \cdot I$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 2.1 & 0 & 0 & -2.4 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} II + 3.6 \cdot III$$

$$2.1x_1 = -2.4 \rightarrow x_1 = -\frac{8}{7}$$

$$0.5 \cdot (-\frac{8}{7}) + x_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{11}{7}$$

$$0.6x_2 + 1.8 \cdot \frac{11}{7} = 3 \rightarrow x_2 = \frac{2}{7}$$

$$L = \{-\frac{8}{7}|\frac{2}{7}|\frac{11}{7}\}$$

Beispiel einer Sonderfall-Lösung

$$\begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 5 \\ & - & x_2 & + & 12x_3 & = 50 \end{vmatrix} I + 3 \cdot II$$

Eine Variable ist frei wählbar und wird a bezeichnet

$x_3 = a$

$II \quad -x_2 + 12a = 50 \rightarrow x_2 = 12a - 50$

$I \quad 3x_1 + 2(12a - 50) - 3a = 5 \rightarrow x_1 = -7a + 35$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a + 35 \\ 12a - 50 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a \\ 12a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung im $\mathbb{R}^3$

3.26.3 Steckbriefaufgaben

Beispiel Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Funktion zweiten Grades
$y = ax^2 + bx + c$
Merkmale:

1. verläuft durch $P(2|5)$

$$f(2) = 5$$
$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c5 = 4a + 2b + c$$

2. hat bei $x = 3$ die Steigung 10

$$f'(x) = 2ax + b = 10$$
$$10 = 6a + b$$

3. schneidet die y-Achse bei 5

$$f(0) = 5$$
$$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$5 = c$$

$$c = 5$$
$$10 = 6a + b \quad \Rightarrow \quad b = 10 - 6a$$
$$5 = 4a + 2(10 - 6a) + 5 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$$
$$b = 10 - 6 \cdot 2.5 = -5$$

Die gesuchte Funktion heißt $f(x) = 2.5x^2 - 5x + 5$

Beispiele für Bedingungen

- hat bei $P(1|3)$ einen Wendepunkt

$$f(1) = 3$$
$$f''(1) = 0$$

- verläuft bei $P(-2|3)$ parallel zur Geraden $g(x) = 4x - 1$

$$f'(-2) = 4$$

- hat an der Stelle $x = 3$ einen Sattelpunkt

$$f'(3) = 0$$
$$f''(3) = 0$$

- ist eine achsensymmetrische Funktion 4. Grades / punktsymmetrische Funktion 5. Grades

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$\Rightarrow \quad b = d = 0$$
$$g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$
$$\Rightarrow \quad b = d = f = 0$$

262/1

c

$$A(1|3) \qquad B(-1|2) \qquad C(3|2)$$
$$y = ax^2 + bx + c$$
$$3 = a + b + c$$
$$2 = a - b + c$$
$$2 = 9a + 3b + c$$

$$a - b + c = 9a + 3b + c \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}b$$
$$\frac{1}{2}b + c = -\frac{3}{2} + c + 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$
$$3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = 2\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 2\frac{3}{4}x$$

262/4

a

$A(0|1) \qquad B(1|0) \qquad C(-1|4) \qquad D(2|-5)$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$1 = d$
$0 = a + b + c + d$
$4 = -a + b - c + d$
$-5 = 8a + 4b + 2c + d$

$a + b + c = a + b - c + d + 8a + 4b + 2c + d \quad \Rightarrow \quad c = 2a + b$
$4 = -a + b - 2a - b + d \quad \Rightarrow \quad a = -1 \quad \Rightarrow \quad b + c = 0$
$c = 2a + b \quad \Rightarrow \quad c = -1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

$y = -x^3 + x^2 - x + 1$

3.26.4 Funktionenschar

262/3

b

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$A(2|0) \qquad B(-2|0)$

$$\begin{vmatrix} 4a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 4a & - & 2b & + & c & = & 0 \end{vmatrix}$$

2x3 LGS unterbestimmt $\Rightarrow$ eine Variable ist frei wählbar

$$\begin{vmatrix} 4a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 4b & & & & & = & 0 \end{vmatrix} \qquad I - II$$

$\Rightarrow \quad b = 0$
$4a + c = 0$

setze $a = k$
$4k + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4k$

$f_k(x) = kx^2 - 4k$ Funktionenschar, Parameterfunktion

c

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$A(-4|0) \qquad B(0|-4)$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 16a & - & 4b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & -4 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow \quad c = -4$

$16a - 4b - 4 = 0$

$a = k$

$16k - 4b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4k - 1$

$$f_k(x) = kx^2 + 4kx - x - 4$$

262/8

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$f(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad b = d = 0$

$f(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad e = -1$

$f(1) = -3 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) < 0$

$f(x) = ax^4 + bx^2 - 1$

$f(1) = a + b - 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a + b = -2$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f'(1) = 4a + 2b = 2a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -4$

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$$

$f''(x) = 24x^2 - 8$

$f''(1) = 16 > 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

263/10

c

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
$P(-3|3) \qquad Q(3|0)$

$f(-3) = 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 3$
$f(3) = 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0$

$9a_2 - 3a_1 + a_0 = 9a_2 + 3a_1 + a_0 + 3$
$-a_1 = a_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\dfrac{1}{2}$
$9a_2 + 1.5 + a_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.5 - 9a_2$

$a_2 = k$
$f_k(x) = kx^2 - 0.5x + 1.5 - 9k$

schwarz

$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = -\dfrac{1}{8}$
$f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2.625$

rot

$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -\dfrac{1}{4}$
$f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 3.75$

blau

$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = -1 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - 0.75$

263/11

$$f(\pm\frac{1624}{2}) = f(\pm 812) = 254 - 65 = 189$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad b = 0$$
$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$f(812) = ax^2 = 659344a = 189 \quad \Rightarrow \quad a \approx 2.8665 \cdot 10^{-4}$$
$$f(x) = 2.8665 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$$

263/12

$$SP(-1|-1) \qquad SP(1|1) \quad \Rightarrow \quad f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0$$
$$WP(0|0) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$
$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f(1) = a + b + c = 1$$
$$f'(1) = 5a + 3b + c = 0$$
$$f''(1) = 20a + 6b = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad II - I$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad III - 3 \cdot II$$

$$8a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8}$$
$$\frac{3}{2} + 2b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{4}$$
$$\frac{3}{8} - \frac{5}{4} + c = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{8}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

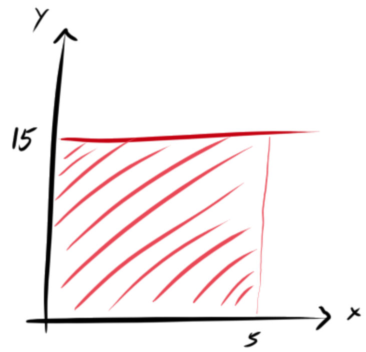
Kapitel 4

Integralrechnung

$s = v \cdot t \qquad$ fuer $v = const.$

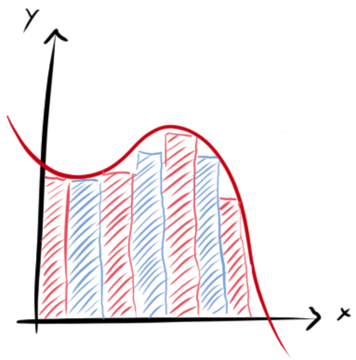
Rechtecksfläche $A = 5s \cdot 15\dfrac{m}{s} = 75m$

Es gilt $A = s =$ zurückgelegter Weg



$s(t) = v(t) \cdot t$

$s =$ Summe von Rechtecksstreifen als Näherung für den Flächeninhalt

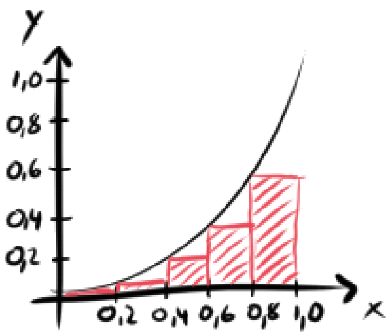


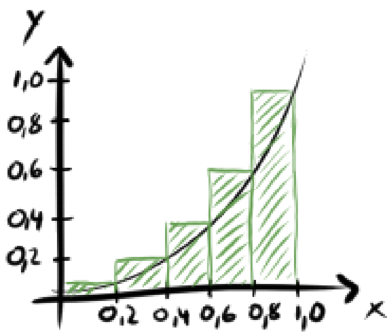
Durch Grenzwertbildung erhält man

$$s = \int_0^5 v(t) \cdot dt$$

4.1 Untersumme - Obersumme

Beispiel $f(x) = y = x^2 \qquad x \in [0; 1]$





Untersumme

$U_5 = 0.2 \cdot (0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64) = 0.24FE$
Der wahre Flächeninhalt ist sicher größer als $0.24FE$

Obersumme

$O_5 = 0.2 \cdot (0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1) = 0.44FE$
Der wahre Flächeninhalt ist sicher kleiner als $0.44FE$

$5 \rightarrow$ Intervall in 5 gleiche Abschnitte:
$I = [0; 1] \Rightarrow$ Intervallbreite $0.2 \rightarrow$ Breite der Rechtecke
$(0 + ... + 0.64)$ bzw. $(0.04 + ... + 1) \rightarrow$ Höhen der Rechtecke
$FE \rightarrow$ Flächeneinheiten

$U_{10} = 0.1 \cdot (0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81)$
$= 0.285FE$
$O_{10} = 0.1 \cdot (0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1)$
$= 0.385FE$

4.1.1 Obersumme/Untersumme → lim → Integral

$$f(x) = x^2$$

Teile das Intervall in n Teile
→ Jeder Teil ist $\frac{b}{n}$ (da $b = 1 \rightarrow \frac{1}{n}$) Längeneinheiten breit

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot (0 + (\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + (\frac{3}{n})^2 + ... + (\frac{n-1}{n})^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot ((\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + (\frac{3}{n})^2 + ... + (\frac{n-1}{n})^2 + (\frac{n}{n})^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2(n+1)-1)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}$$

Der wahre Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{3} FE$

Wenn gilt, dass $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n =$ Zahl $= \int_a^b f(x) \cdot dx$

Existiert ein gemeinsamer Grenzwert ($n \rightarrow \infty$) von Untersumme und Obersumme, so nennt man den Grenzwert Integralwert des bestimmten Integrals.

160/3

a $1FE \mathrel{\hat{=}} 1000000m^3$ Wasser

b Am schnellsten zwischen $2h$ und $4h$.
Am langsamsten zwischen $8h$ und $10h$.
Nach $12h$ wiederholt sich der Graph periodisch.

c Der Graph wird um 25% gestreckt, die Fläche wächst also um 25%.

4.2 Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

a, b ... linke bzw. rechte Intervallgrenze
$f(x)$ ... Integrand, zu integrierende Funktion
x ... Integrationsvariable
dx ... Differenzial $\quad \lim\limits_{x \to 0} \Delta x = dx$
$f(x) \cdot dx$ ... Fläche eines infinitesimal schmalen Rechteckstreifens mit Breite dx und Höhe $f(x)$
$\int$ ... Integralzeichen meint eine Summation

liegt $f(x)$ unterhalb der x-Achse (< 0) im Intervall $[a; b]$, so gilt $\int_a^b f(x) \cdot dx < 0$

Das Integral ist die Differenz oberhalb der x-Achse und unterhalb der x-Achse liegender Flächenstücke

4.3 Berechnung von Integralen, Hauptsatz

Gesucht: Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x) = y = \frac{2}{5}x^3$ im Intervall $[0; b]$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{b}{n} \cdot (\frac{1}{5}(\frac{b}{n})^3 + \frac{1}{5}(\frac{2b}{n})^3 + ... + \frac{1}{5}(\frac{(n-1)\cdot b}{n})^3 + \frac{1}{5}b^3) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot (1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{4}n^2 \cdot (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}) = \frac{1}{20}b^4$$

Betrachte den Flächeninhalt zu linker Grenze a und rechter Grenze b.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{20}a^4 \qquad fuer \quad [0; a] \\
&\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{20}b^4 \qquad fuer \quad [0; b] \\
&A = \frac{1}{20}b^4 - \frac{1}{20}a^4 \qquad fuer \quad [a; b]
\end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{20}b^4 - \frac{1}{20}a^4 = \int_a^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx = \left[\frac{1}{20}x^4\right]_a^b$$

4.3.1 Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dabei gilt $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ heißt Aufleitungsfunktion oder Stammfunktion von $f(x)$.

im Beispiel: $F(x) = \frac{1}{20}x^4 \quad \rightarrow \quad (\frac{1}{20}x^4)' = \frac{d}{dx}(\frac{1}{20}x^4) = \frac{1}{5}x^3$

167/3

a

$$f(x) = x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{3}x^3$$
$$\int_0^4 x^2 \cdot dx = F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 \qquad F(x) = \frac{1}{40}x^5$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{8}x^4 \cdot dx = F(-1) - F(-2) = 0.775$$

j

$$f(x) = 0.5x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{6}x^3$$
$$\int_{-4}^{4} 0.5x^2 \cdot dx = F(4) - F(-4) = \frac{64}{3}$$

k

$$f(x) = x^5 \qquad F(x) = \frac{1}{6}x^6$$
$$\int_{-1}^{1} x^5 \cdot dx = F(1) - F(-1) = 0$$

4.4 Integrale lösen - Anwendung

168/11

$$v(t) = 9.81 \cdot t \qquad V(t) = s(t) = 4.905 \cdot t^2$$
$$\int_0^3 v(t) \cdot dt = V(3) - V(0) = 44.145$$

168/13

a

$$f(x) = x \qquad F(x) = 0.5x^2$$
$$\int_0^z x \cdot dx = 18 = F(z) - F(0) = F(z) - 0$$
$$F(z) = 18 \quad \Rightarrow \quad z = 6$$

b

$$f(x) = 4x \qquad F(x) = 2x^2$$
$$\int_1^z 4x \cdot dx = 30 = F(z) - F(1) = F(z) - 2$$
$$F(z) = 32 \quad \Rightarrow \quad z = 4$$

c

$$f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$$
$$\int_z^{10} 2x \cdot dx = 19 = F(10) - F(z) = 100 - F(z)$$
$$F(z) = 81 \quad \Rightarrow \quad z = 9$$

d

$$f(x) = 0.4 \qquad F(x) = 0.4x$$
$$\int_0^{2z} 0.4 \cdot dx = 8 = F(2z) - F(0) = F(2z) - 0$$
$$F(2z) = 8 \quad \Rightarrow \quad 2z = 20 \quad \Rightarrow \quad z = 10$$

168/15

a

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{72}}{-4}$$
$$x_1 \approx -0.1213 \qquad x_2 \approx 4.1213$$

b

$$f(x) = (x+3)^2 \cdot (x+1) = 0$$
$$(x+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3$$
$$(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$$

c

$$f(x) = 4x^2 \cdot (x^2 - 10) + 4x^2 = 8x^4 - 40x^2 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$(x^2 - 10) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 3$$

d

$$f(x) = 4 \cdot (x - 0.5)^4 - 4 = 0$$
$$(x - 0.5)^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.5 \qquad x_2 = -0.5$$

e

$$f(x) = e^x - e^2 = 0$$
$$x = 2$$

f

$$f(x) = 0.2e^{2x} - 1 = 0$$
$$e^{2x} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{log(5)}{2} \approx 0.8047$$

Teil III

12/1

4.5 Stammfunktion bilden, integrieren

$$\int_a^b x^7 \cdot dx = \left[\frac{1}{8}x^8\right]_a^b$$

$$\int \frac{1}{(x+4)^3} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-2} + c$$

$$\int \frac{5}{(3x-2)^5} \cdot dx = -\frac{5}{4 \cdot 3} \cdot (3x-2)^{-4} + c$$

$$\int \frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot e^{2x} + c$$

4.6 bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx = [ln(|x|)]_a^b$$

sofern $a, b > 0$ oder $a, b < 0$ kein Problem
wenn eines größer und eines kleiner 0 ist, dann muss man genauer untersuchen (Polstelle!)

$a = -1 \qquad b = 2$

$$\int_a^b \frac{1}{2x-5} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot ln(|2x-5|)\right]_a^b$$

171/3

a

$$\int_0^2 (2+x)^3 \cdot dx = \left[\frac{1}{4} \cdot (2+x)^4\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot ((2+2)^4 - (2+0)^4) = 60$$

b

$$\int_2^3 (1 + \frac{1}{x^2}) \cdot dx = \left[x - \frac{1}{x}\right]_2^3 = (3 - \frac{1}{3}) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{6}$$

c

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-(x+1)^{-1}\right]_0^2 = -(2+1)^{-1} + (0+1)^{-1} = \frac{2}{3}$$

d

$$\int_0^9 \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = [\frac{4}{15} \cdot x^{\frac{3}{2}}]_0^9 = \frac{4}{15} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot 0^{\frac{3}{2}} = 7.2$$

e

$$\int_{-0.5}^0 e^{2x+1} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_{-0.5}^0 = \frac{1}{2}e^{2\cdot 0+1} - \frac{1}{2}e^{2\cdot(-0.5)+1} \approx 0.8591$$

f

$$\int_0^\pi sin(3x-\pi) \cdot dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot cos(3x-\pi)\right]_0^\pi =$$
$$-\frac{1}{3} \cdot cos(3\pi-\pi) + \frac{1}{3} \cdot cos(3 \cdot 0 - \pi) = -\frac{2}{3}$$

g

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[\frac{2}{5}e^{\frac{1}{2}x}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}e^{\frac{1}{2}\cdot 1} - \frac{2}{5}e^{\frac{1}{2}\cdot(-1)} = \frac{2e-2}{5 \cdot \sqrt{e}} \approx 0.4169$$

h

$$\int_{-\pi}^\pi cos(3x) \cdot dx = [-3 \cdot sin(3x)]_{-\pi}^\pi = -3 \cdot sin(3\pi) + 3 \cdot sin(3 \cdot (-\pi)) = 0$$

171/4

c

$$\int_3^4 \frac{1}{2(x+1)} \cdot dx = \left[\frac{ln(x+1)}{2}\right]_3^4 = \frac{ln(4+1)}{2} - \frac{ln(3+1)}{2} \approx 0.1116$$

4.6.1 Integralfunktion

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = J$$

$$J_a(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Integralfunktion zur unteren (linken) Grenze a. Sie gibt zu jedem später eingesetzten Wert x $(= b)$ den bestimmten Integralwert an.

$$\int f(x) \cdot dx = [F(x)]^x = F(x) + c$$

unbestimmtes Integral

175/2

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad J_a(x) = \int_a^x \frac{1}{2}t \cdot dt$$

x	-4	-2	0	2	4	6
$J_{-4}(x)$	0	-3	-4	-3	0	5

x	-4	-2	0	2	4	6
$J_0(x)$	4	1	0	1	4	9

x	-4	-2	0	2	4	6
$J_2(x)$	3	0	-1	0	3	8

4.7 Rechenregeln für Integrale

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = -\int_b^a f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \pm \int_a^b g(x) \cdot dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \cdot dx$$

172/15

a

$$\int_{-1}^{3.3} 5x^2 \cdot dx - 10 \cdot \int_{-1}^{3.3} \frac{1}{2}x^2 \cdot dx = 0$$

b

$$\int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2+4}) \cdot dx + 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{x^2+4} \cdot dx = \int_0^1 x \cdot dx = 0.5$$

c

$$\int_3^{3.7} \frac{1}{x} \cdot dx + \int_{3.7}^4 \frac{1}{x} \cdot dx = \int_3^4 \frac{1}{x} \cdot dx = ln(4) - ln(3) \approx 0.2877$$

176/10

$$f(t) = 50t^4 \cdot e^{-t}$$

a Die Integralfunktion gibt die Anzahl der Telefonanrufe bis zum Zeitpunkt x an.

$$J_0(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt$$
$$J_0(4) = \int_0^4 f(t) \approx 445$$

b

$$J_4(8) = J_0(8) - J_0(4) \approx 1080 - 445 = 635$$

Die Anzahl der Anrufer in der Warteschleife ist zu dem Zeitpunkt am höchsten, an dem die Anrufer pro Minute wieder unter 200 sinken (bei $t \approx 5$).

176/9

$$f(t) = cos(\frac{2\pi}{24}(t-12))$$
$$g(t) = cos(\frac{2\pi}{24}(t-6))$$

a Zunahme ($f(t) > 0$) zwischen 6 und 18 Uhr
Abnahme ($f(t) < 0$) zwischen 18 und 6 Uhr

Zunahme ($g(t) > 0$) zwischen 0 und 12 Uhr
Abnahme ($g(t) < 0$) zwischen 12 und 24 Uhr

b Am schnellsten um 12 Uhr (Hochpunkt)
Am langsamsten um $0/24$ Uhr (Tiefpunkt)

Am schnellsten um 6 Uhr (Hochpunkt)
Am langsamsten um 18 Uhr (Tiefpunkt)

c Maximal um 18 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)
Minimal um 6 Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

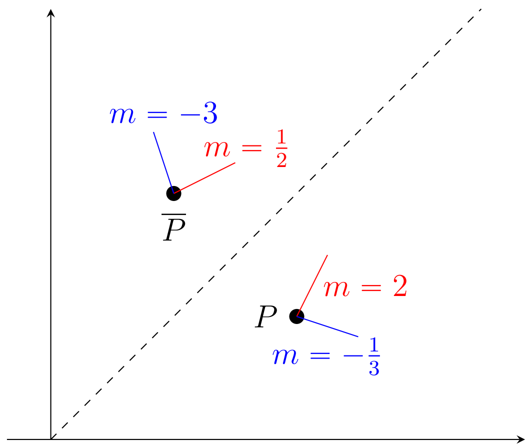
Maximal um 12 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)
Minimal um $0/24$ Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

d

$$F(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot sin(\frac{\pi}{12}t) + c$$
$$c = 20 - F_{c=0}(12) = 20$$
$$F(18) \approx 23.82 \qquad F(6) \approx 16.18$$

$$G(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot cos(\frac{\pi}{12}t) + c$$
$$c = 20 - G_{c=0}(12) \approx 16.1803$$
$$G(12) = 20 \qquad G(0) = G(24) \approx 12.36$$

4.8 Ableitung der Umkehrfunktion



$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \sqrt{y}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)}$$

Beispiele

$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = y = e^x \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = ln(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{ln(x)}} = \frac{1}{y}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = y = sin(x) \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = asin(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{cos(asin(y))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(asin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = y = cos(x) \Leftrightarrow f(y) = x = acos(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{-sin(x)} = \frac{1}{-sin(acos(y))}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(acos(y))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = y = tan(x) \Leftrightarrow f(y) = x = atan(y)$$

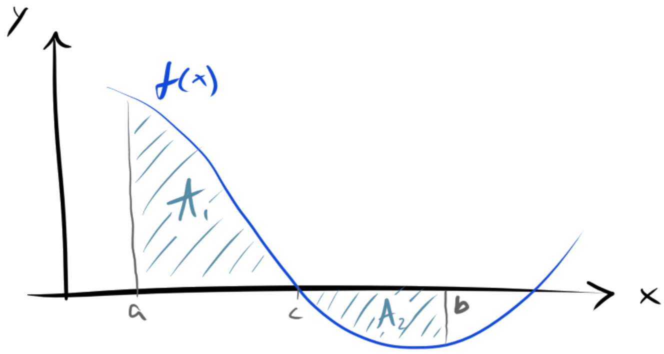
$$\overline{f'(y)} = cos^2(x) = cos^2(atan(y))$$

$$= 1 - sin^2(x) = 1 - sin^2(atan(y)) = 1 - \frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

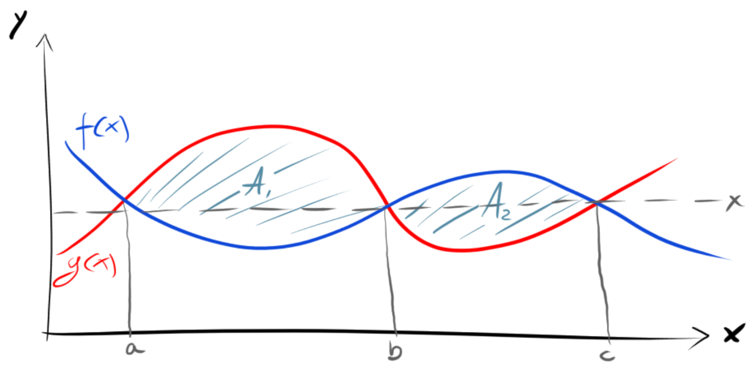
4.9 Integral und Flächeninhalt



$A = A_1 + A_2$

$A \neq \int_a^b f(x) \cdot dx = I$

$A = |\int_a^c f(x) \cdot dx| + |\int_c^b f(x) \cdot dx|$



$A = A_1 + A_2$

1. Berechne die Schnittstellen a, b, c
2. $A = |\int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx| + |\int_b^c (g(x) - f(x)) \cdot dx|$

Wie die Flächen zur x-Achse liegen ist unwichtig, weil ich gedanklich beide Graphen gemeinsam soweit nach oben schieben kann dass die Flächen komplett oberhalb der x-Achse liegen.

$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow f(x)+d \\ g(x) &\longrightarrow g(x)+d \end{aligned}$$

Durch Differenzialbildung fallen die gedanklich eingeführten Verschiebungen wieder weg.

$$\int_a^b ((f(x)+d)-(g(x)+d)) \cdot dx = \int_a^b (f(x)-g(x)) \cdot dx$$

179/2

a

$$f(x) = -0.5x^2 + 0.5 \qquad g(x) = -1.5$$
$$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 0.5x \qquad G(x) = -1.5x$$

I $A_2 + A_3$

$$\begin{aligned} A &= |\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx| \\ &= |F(1) - F(-1)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

II $A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$$\begin{aligned} A &= |\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x)) \cdot dx| \\ &= |(F(2) - F(-2)) - (G(2) - G(-2))| = 5\frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

III A_3

$$\begin{aligned} A &= |\int_{0}^{1} f(x) \cdot dx| \\ &= |F(1) - F(0)| = \frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

IV A_1

$$\begin{aligned} A &= |\int_{-2}^{-1} f(x) \cdot dx| \\ &= |F(-1) - F(-2)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

180/5

a

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -x^2 + 4x$$
$$f(x) = g(x) \qquad L = \{0; 2\}$$
$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x$$
$$A = |\int_0^2 (2x^2 - 4x) \cdot dx| = |[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2]_0^2| = 2\frac{2}{3}FE$$

b

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad g(x) = 2.5x - 5.25$$
$$f(x) = g(x) \qquad L = \{2; \sim -0.4; \sim 0.5\}$$
$$f(x) - g(x) = -2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2}$$
$$A \approx |\int_{0.5}^2 (-2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2}) \cdot dx|$$
$$= |[-1.25x^2 + 5.25x + \frac{1}{x}]_{0.5}^2| \approx 1.7FE$$

4.9.1 Flächeninhalt, uneigentliche Integrale

180/8

$$f_t(x) = \frac{t}{x^2} \qquad [1; 2]$$
$$F_t(x) = -\frac{t}{x}$$
$$A(t) = \int_1^2 -\frac{t}{x} \cdot dx = \frac{t}{2}$$
$$A(16) = 8$$

180/10

$$f_a(x) = a \cdot sin(x) \qquad g_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot sin(x) \qquad x \in [0;\pi]$$
$$f_a(x) - g_a(x) = sin(x) \cdot (a + \frac{1}{a})$$
$$A(a) = \int_0^\pi sin(x) \cdot (a + \frac{1}{a}) \cdot dx = (a + \frac{1}{a}) \cdot [-cos(x)]_0^\pi = (a + \frac{1}{a}) \cdot 2$$

$$A'(a) = -\frac{2}{a^2} + 2$$
$$A''(a) = \frac{4}{a^3}$$
$$A'(a) = 0 \qquad L = \{\pm 1\}$$
$$A''(1) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

Minimaler Flächeninhalt: $A(1) = 4FE$

Beispiel $f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad [3;\infty[$

$$A = \lim_{z\to\infty} \int_3^z \frac{1}{x^2} \cdot dx = \lim_{z\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_3^z$$
$$= \lim_{z\to\infty} (-\frac{1}{z} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}FE$$

183/1

Fig. 1

$$y = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad [1;z]$$
$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^z = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}$$
$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \frac{1}{2}$$

Fig. 2

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad [2;z]$$
$$A(z) = \int_2^z e^{-\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^z = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{e}$$
$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \frac{2}{e} \approx 0.736$$

Fig. 3

$$y = \frac{2}{x^3} \qquad [z;1]$$
$$A(z) = \int_z^1 \frac{2}{x^3} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right] = -1 + \frac{1}{z^2}$$
$$A = \lim_{z\to 0} A(z) = \infty$$

Fig. 4

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} \qquad [z;4]$$
$$A(z) = \int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot dx = \left[8 \cdot \sqrt{x}\right] = 16 - 8 \cdot \sqrt{z}$$
$$A = \lim_{z\to 0} A(z) = 16$$

183/7

$$W = \int_{h_1}^{h_2} F(s) \cdot ds$$
$$F(s) = \gamma \frac{m \cdot M}{s^2}$$
$$c = \gamma \cdot m \cdot M \approx 3.982 \cdot 10^{17} \cdot \frac{m \cdot kg}{s^2}$$
$$F(s) = c \cdot s^{-2}$$
$$W = \int_{h_1}^{h_2} c \cdot s^{-2} \cdot ds = \left[-c \cdot s^{-1}\right]_{h_1}^{h_2}$$

a

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \qquad h_2 = 4.22 \cdot 10^7 m$$
$$W = \left[-c \cdot s^{-1}\right]_{6.37\cdot 10^6 m}^{4.22\cdot 10^7 m} \approx 1.333 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 5.308 \cdot 10^{10} Nm$$

b

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \qquad h_2 \to \infty$$
$$W = \lim_{h_2\to\infty} \left[-c \cdot s^{-1}\right]_{6.37\cdot 10^6 m}^{h_2} \approx 1.570 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 6.252 \cdot 10^{10} Nm$$

183/5 I $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\quad F(x) = -\frac{1}{2 \cdot x^2}$

II $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad F(x) = -\frac{1}{x}$

III $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad F(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$

a

$$\lim_{z \to \infty} \int_1^z f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^z$$

I $= \frac{1}{2}$

II $= 1$

III $= \infty$

b

$$\lim_{z \to 1} \int_z^0 f(x) \cdot dx = [F(x)]_z^1$$

I $= \infty$

II $= \infty$

III $= 2$

180/11

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^2 \\
&t(x) = m \cdot x + b \\
&f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad m = f'(a) = 2a \\
&f(a) = a^2 \quad \Rightarrow \quad b = a^2 - 2a \cdot a = -a^2 \\
&\Rightarrow t(x) = 2a \cdot x - a^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^a (f(x) - t(x)) \cdot dx = \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) \cdot dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{3}a^3$$

4.10 Integration von Produkten: partielle Integration

Ableitungs-Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$
\begin{aligned}
&(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' && | - u \cdot v' \\
&u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v' && | \int \\
&\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v' \\
&\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$\int sin(x) \cdot x \cdot dx = -cos(x) \cdot x - \int -cos(x) \cdot 1 \cdot dx$$
$$= -cos(x) \cdot x + sin(x) + c$$
$$(-cos(x)) \cdot x + sin(x))' = sin(x) \cdot x$$

$$\int e^{2x} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - (\frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1 \cdot dx)$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \frac{1}{4}e^{2x}$$
$$= e^{2x} \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$$

Spezialfälle

$$\int 1 \cdot ln(x) \cdot dx = x \cdot ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$= x \cdot ln(x) - x$$

(Stammfunktion von $ln(x)$)

$$\int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -cos(x) \cdot cos(x) - \int cos(x) \cdot (-sin(x)) \cdot dx$$
$$= -cos^2(x) - \int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx \qquad | + \int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx$$
$$2 \cdot \int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -cos^2(x) \qquad | : 2$$
$$\int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -\frac{cos^2(x)}{2}$$

188/1

a

$$\int_{-1}^{1} e^x \cdot x \cdot dx = [e^x \cdot x]_{-1}^{1} - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = [e^x \cdot x - e^x]_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

d

$$\int_{0}^{0.5} e^{2x+2} \cdot 4x \cdot dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+2} \cdot 4x\right]_{0}^{0.5} - \int \frac{1}{2}e^{2x+2} \cdot 4 \cdot dx$$
$$= \left[2e^{2x+2} \cdot x - e^{2x+2}\right]_{0}^{0.5} = e^2$$

188/2

b

$$\int_{0}^{\pi} cos(x) \cdot x \cdot dx = [sin(x) \cdot x]_{0}^{\pi} - \int sin(x) \cdot 1 \cdot dx$$
$$= [sin(x) \cdot x + cos(x)]_{0}^{\pi} = -2$$

d

$$\int_{0}^{2\pi} sin(0.5x) \cdot 2x \cdot dx = [-2cos(0.5x) \cdot 2x]_{0}^{2\pi} - \int -2cos(0.5x) \cdot 2 \cdot dx$$
$$= [-2cos(0.5x) \cdot 2x + 8sin(0.5x)]_{0}^{2\pi} = 8\pi$$

188/8

a

$$\int_0^\pi (sin(x))^2 \cdot dx = [-cos(x) \cdot sin(x)]_0^\pi - \int -cos(x) \cdot cos(x) \cdot dx$$

$$= [-cos(x) \cdot sin(x)]_0^\pi - \int (-sin^2(x) - 1) \cdot dx$$

$$= [-cos(x) \cdot sin(x) + x]_0^\pi - \int sin^2(x) \cdot dx \qquad | + \int_0^\pi sin^2(x) \cdot dx; \quad : 2$$

$$= \left[\frac{-cos(x) \cdot sin(x) + x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

c

$$\int_{-2}^2 e^x \cdot cos(x) \cdot dx = [sin(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int sin(x) \cdot e^x \cdot dx$$

$$= [sin(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - ([-cos(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int -cos(x) \cdot e^x \cdot dx)$$

$$= [sin(x) \cdot e^x + cos(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int cos(x) \cdot e^x \cdot dx$$

$$= \left[\frac{(sin(x) + cos(x)) \cdot e^x}{2}\right]_{-2}^2 \approx 1.912$$

d

$$\int_0^2 sin(\pi x) \cdot e^{2x} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} \cdot sin(\pi x)\right]_0^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot \pi \cdot cos(\pi x) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \cdot sin(\pi x)\right]_0^2 - (\left[\frac{1}{4}e^{2x} \cdot \pi \cdot cos(\pi x)\right]_0^2 - \int -\frac{1}{4}e^{2x} \cdot \pi^2 \cdot sin(\pi x) \cdot dx)$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \cdot sin(\pi x)\right]_0^2 - (\left[\frac{1}{4}e^{2x} \cdot \pi \cdot cos(\pi x) + \frac{1}{4}\pi^2\right]_0^2 - \int e^{2x} \cdot sin(\pi x) \cdot dx)$$

$$= \left[\frac{2e^{2x} \cdot sin(\pi x) - \pi \cdot e^{2x} \cdot cos(\pi x)}{\pi^2 + 4}\right]_0^2 = \frac{\pi}{\pi^2 + 4} - \frac{e^4 \cdot \pi}{\pi^2 + 4} \approx -12.140$$

4.11 Integration durch Substitution

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int (f(g(x)))' \cdot dx$$

$= f(g(x))$ Dabei ist f die Stammfunktion von f'

$\Rightarrow$ Benenne um $f' \to f$ $f \to F$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = F(g(x))$$

Substitution 1

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx \qquad \text{ersetze } z = g(x) \qquad \frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dz = g'(x) \cdot dx$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)}$$

Resubstitution

$$= [F(g(x))]_a^b$$

Beispiel

$$\int_1^2 \frac{5x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$$

$$\text{subst. } z = 1 + 3x^2 \qquad \frac{dz}{dx} = (1+3x^2)' = 6x \qquad dz = 6x \cdot dx$$

$$= \frac{5}{6} \int_1^2 \frac{6x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx = \frac{5}{6} \int_4^{13} z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz$$

$$= \frac{5}{6} \left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_4^{13} = \frac{5}{6} \left[2 \cdot (1+3x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 \approx 2.676$$

191/1

a

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx; \qquad g(x) = 1 + 2x^2$$

subst. $z = g(x) \qquad dz = g'(x) \cdot dx$

$$= \int_{g(0)}^{g(2)} \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot dz = \left[2 \cdot \sqrt{z}\right]_1^9 = 4$$

b

$$\int_{-1}^1 \frac{-2x}{(4-3x^2)^2} \cdot dx; \qquad g(x) = 4 - 3x^2$$

subst. $z = g(x) \qquad dz = g'(x) \cdot dx$

$$= \int_{g(-1)}^{g(1)} \frac{1}{3z^2} \cdot dz = \left[-\frac{1}{3z}\right]_1^1 = 0$$

191/3

e

$$\int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx$$

subst. $z = 1 + x^2 \qquad dz = 2x \cdot dx$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{z} \cdot dz = [ln(z)]_1^{10}$$

resubst.

$$= \left[ln(1+x^2)\right]_0^3 = ln(10) \approx 2.3026$$

f

$$\int_{-1}^2 \frac{e^x}{2+e^x} \cdot dx$$

subst. $z = 2 + e^x \qquad dz = e^x \cdot dx$

$$= \int_{2+e^{-1}}^{2+e^2} \frac{1}{z} \cdot dz = [ln(z)]_{2+e^{-1}}^{2+e^2}$$

resubst.

$$= [ln(2+e^x)]_{-1}^2 \approx 1.3775$$

g

$$\int_{e}^{e^2} \frac{4}{x \cdot ln(x)} \cdot dx$$

subst. $z = ln(x) \qquad dz = \frac{1}{x} \cdot dx$

$$= \int_{1}^{2} \frac{4}{z} \cdot dz = [4 \cdot ln(z)]_1^2$$

resubst.

$$= [4 \cdot ln(ln(x))]_e^{e^2} = 4 \cdot ln(2) \approx 2.7726$$

h

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi \cdot cos(\pi x)}{sin(\pi x)} \cdot dx$$

subst. $z = sin(\pi x) \qquad dz = \pi \cdot cos(\pi x) \cdot dx$

$$= \int_{sin(\frac{\pi}{3})}^{sin(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{z} \cdot dz = [ln(z)]_{sin(\frac{\pi}{3})}^{sin(\frac{\pi}{2})}$$

resubst.

$$= [ln(sin(\pi x))]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \approx 0.1438$$

191/8

a

$$\int_{0}^{ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} \cdot dx \qquad t = e^{2x} + 3 \qquad t' = \frac{dt}{dx} = 2e^{2x} \qquad dx = \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt$$

$$= \int_{t(0)}^{t(ln(2))} \frac{e^{4x}}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(ln(2))} \frac{e^{2x}}{2t} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(ln(2))} \frac{t-3}{2t} \cdot dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{3}{2} \cdot ln(t)\right]_4^7 \approx 0.6606$$

b

$$\int_{1}^{2} \frac{2x+3}{(x+2)^2} \cdot dx \qquad t = x + 2 \qquad t' = \frac{dt}{dx} = 1 \qquad dx = dt$$

$$= \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2x+3}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2t-1}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} (\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}) \cdot dt$$

$$= \left[2 \cdot ln(t) + \frac{1}{t}\right]_3^4 \approx 0.4920$$

c

$$\int_{0.5}^{7} \frac{x}{\sqrt{4x-1}} \cdot dx \qquad t = 4x - 1 \qquad t' = \frac{dt}{dx} = 4 \qquad dx = \frac{dt}{4}$$

$$= \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{4} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{4 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{t+1}{16 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt$$

$$= \left[(\frac{1}{16}t + \frac{1}{16}) \cdot 2 \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{1}{8} \cdot \sqrt{t} \cdot dt$$

$$= \left[(\frac{1}{8}t + \frac{1}{8}) \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \right]_{t(0.5)}^{t(7)}$$

$$= \left[\frac{1}{8} \cdot (t \cdot \sqrt{t} + \sqrt{t} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3}) \right]_{1}^{27} \approx 6.3285$$

d

$$\int_{0}^{4} \frac{4}{1 + 2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx \qquad t = 1 + 2 \cdot \sqrt{x} \qquad t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad dx = \sqrt{x} \cdot dt$$

$$= \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \sqrt{x} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \frac{t-1}{2} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4t-4}{2t} \cdot dt$$

$$= \left[\frac{1}{2t} \cdot (2t^2 - 4t) \right]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} -\frac{1}{2t^2} \cdot (2t^2 - 4t) \cdot dt$$

$$= [t-2]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} (\frac{2}{t} - 1) \cdot dt$$

$$= [t - 2 - (2 \cdot ln(t) - t)]_{t(0)}^{t(4)} = [2 \cdot (t - 1 - ln(t))]_{1}^{5} \approx 4.7811$$

Substitution 2

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot dx \qquad \text{ersetze } x = g(z)$$

$$= \int_{a}^{b} f(g(z)) \cdot dx = \int_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz$$

$$x = g(z) \qquad z = \overline{g}(x)$$

$$\frac{dx}{dz} = g'(z) \qquad dx = g'(z) \cdot dz$$

$$= [F(g(z))]_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} = [F(x)]_{a}^{b}$$

Beispiel

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \qquad x = sin(z) \qquad dx = cos(z) \cdot dz$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{cos(z)}{\sqrt{1-sin^2(z)}} \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \cdot dz = [z]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \approx 0.524$$

AB/23

a

$$\int_0^1 e^x \cdot \sqrt{e^x+1} \cdot dx$$
$$x(t) = ln(t) \qquad t = e^x \qquad dx = \frac{1}{t} \cdot dt$$
$$= \int_{e^0}^{e^1} e^{ln(t)} \cdot \sqrt{e^{ln(t)}+1} \cdot \frac{1}{t} \cdot dz = \int_1^e \sqrt{t+1} \cdot dz$$
$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(t+1)^3}\right]_1^e \approx 2.8943$$

c

$$\int_1^3 \frac{1}{x} \cdot ln(x^2) \cdot dx$$
$$x(t) = e^t \qquad t = ln(x) \qquad dx = e^t \cdot dt$$
$$= \int_{ln(1)}^{ln(3)} \frac{1}{e^t} \cdot ln(e^{t^2}) \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{ln(3)} ln(e^{2t}) \cdot dt = \int_0^{ln(3)} 2t \cdot dt$$
$$= \left[t^2\right]_0^{ln(3)} = (ln(3))^2 \approx 1.2069$$

4.11.1 Wiederholung

1. Ersetze $g(x)$ durch z

$$\int_a^b = f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz$$
$$= [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_a^b$$
$$z = g(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = g'(x)$$
$$dz = g'(x) \cdot dx$$

2. Ersetze x durch $g(z)$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz$$
$$= [F(g(z))]_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} = [F(x)]_a^b$$

$$x = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{g}(x)$$
$$\frac{dx}{dz} = g'(z)$$
$$dx = g'(z) \cdot dz$$

AB/23

d

$$\int_1^2 \frac{1 + ln(x)}{x \cdot (1 - ln(x))} \cdot dx$$
$$x(t) = e^t \qquad t = ln(x) \qquad dx = e^t \cdot dt$$

$$= \int_{ln(1)}^{ln(2)} \frac{1 + ln(e^t)}{e^t \cdot (1 - ln(e^t))} \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{ln(2)} \frac{1+t}{1-t} \cdot dt$$
$$z = 1 - t \qquad \frac{dz}{dt} = -1 \qquad dz = -dt$$

$$= -\int_{1-0}^{1-ln(2)} \frac{2-z}{z} \cdot dz = -\int_{1-0}^{1-ln(2)} (\frac{2}{z} - 1) \cdot dz$$
$$= -[2 \cdot ln(z) - z]_1^{1-ln(2)} \approx 1.6696$$

g

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot dx$$
$$x(t) = 2 \cdot sin(t) \qquad t = asin(\frac{x}{2}) \qquad dx = 2 \cdot cos(t) \cdot dt$$

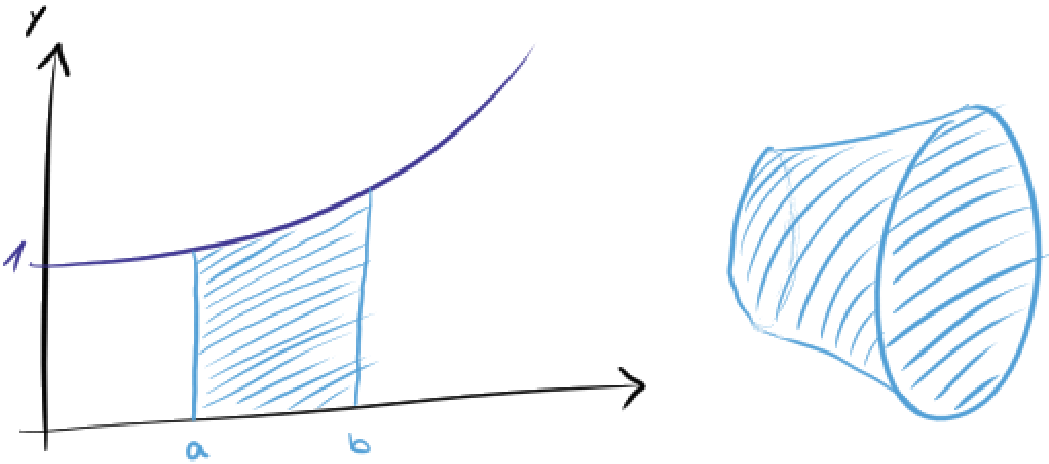
$$= \int_{asin(\frac{0}{2})}^{asin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot cos(t)}{\sqrt{4 - (2 \cdot sin(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{asin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot cos(t)}{2 \cdot \sqrt{1 - (sin(t))^2}} \cdot dt$$
$$= \int_0^{asin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot cos(t)}{2 \cdot \sqrt{(cos(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{asin(\frac{1}{2})} 1 \cdot dt = [t]_0^{asin(\frac{1}{2})} = \frac{\pi}{6}$$

4.12 Rotationskörper

Rotationssymetrische Körper, die man sich dadurch entstanden vorstellen kann, dass eine Fläche um eine Achse (x-Achse) rotiert.

4.12.1 Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$



$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b f(x) \cdot dx \\
&= \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 + 1) \cdot dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{13}{6}FE \approx 2.17FE \\
V &= \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx \\
&= \pi \cdot \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 + 1)^2 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{293\pi}{60}VE \approx 15.34VE
\end{aligned}$$

196/1

a

$$y = \sqrt{x+1}$$
$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{-1}^{2} (x+1) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \pi \cdot 4.5VE \approx 14.1372VE$$

b

$$y = \frac{1}{x}$$
$$V = \pi \cdot \int_{1}^{3} (\frac{1}{x})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{1}^{3} x^{-2} \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[-x^{-1}\right]_{1}^{3} = \pi \cdot \frac{2}{3}VE \approx 2.0944VE$$

c

$$y = x^2 - 6x + 8$$
$$y = 0 \qquad L = \{2; 4\}$$
$$V = \pi \cdot \int_{2}^{4} (x^2 - 6x + 8)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{2}^{4} (x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{52}{3}x^3 - 48x^2 + 64x\right]_{2}^{4} = \pi \cdot \frac{16}{15}VE \approx 3.3510VE$$

197/8

$$f(x) = 0.5x + 1 \qquad g(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x-1} \qquad [0; 4]$$

a

$$V_W = \pi \cdot \int_{1}^{4} (1.5 \cdot \sqrt{x-1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{1}^{4} (2.25x - 2.25) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[1.125x^2 - 2.25x\right]_{1}^{4} = 10.125\pi \approx 31.8086$$
$$[V_W] = cm^3$$

b

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (0.5x+1)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^4 (0.25x^2+x+1) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^4 = \frac{52\pi}{3} \approx 54.4543$$
$$V_G = V - V_W = 10.125\pi - \frac{52\pi}{3} = 22.6456$$
$$[V] = [V_G] = cm^3$$

197/9

b

$$f(x) = 3x^2 - x^3 \qquad g(x) = x^2$$
$$f(x) = g(x) \qquad L = \{0; 2\}$$

$$V = \pi \cdot ((3x^2 - x^3)^2 - (x^2)^2) \cdot dx = \pi \cdot (9x^4 - 6x^5 + x^6 - x^4) \cdot dx$$
$$= \pi \left[\frac{8}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^2 = \frac{192\pi}{35} \approx 17.2339$$

188/4

b

$$f(x) = 2x \cdot sin(x)$$
$$\int f(x) \cdot dx = -cos(x) \cdot 2x - \int -cos(x) \cdot 2 \cdot dx = -cos(x) \cdot 2x + sin(x) \cdot 2$$

188/9

b

$$\int_1^e x \cdot ln(2x) \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot ln(2x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot ln(2x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot ln(2x) - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e \approx 4.3115$$

c

$$\int_{1}^{e^2} x^2 \cdot ln(x) \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot ln(x) - \frac{1}{9}x^3\right]_1^{e^2} \approx 224.2382$$

Kapitel 5

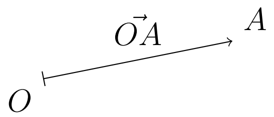
Analytische Geometrie

5.1 Punkte und Vektoren

Jeder Punkt im Raum $\mathbb{R}^3$ ist durch 3 Koordinaten $(x|y|z)$ oder $(x_1|x_2|x_3)$ festgelegt, sofern zuvor der Ursprung O des Koordinatensystems festgelegt wird.
Den Vektor, der vom Ursprung O zum Punkt $A(x|y|z)$ führt, nennt man Ortsvektor von A und notiert man

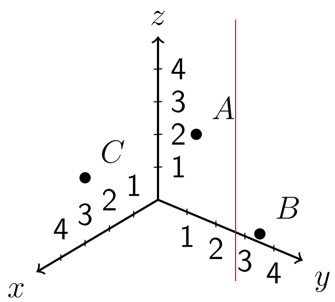
$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor ist eine Stecke (mit Länge) mit Orientierung (Pfeil).



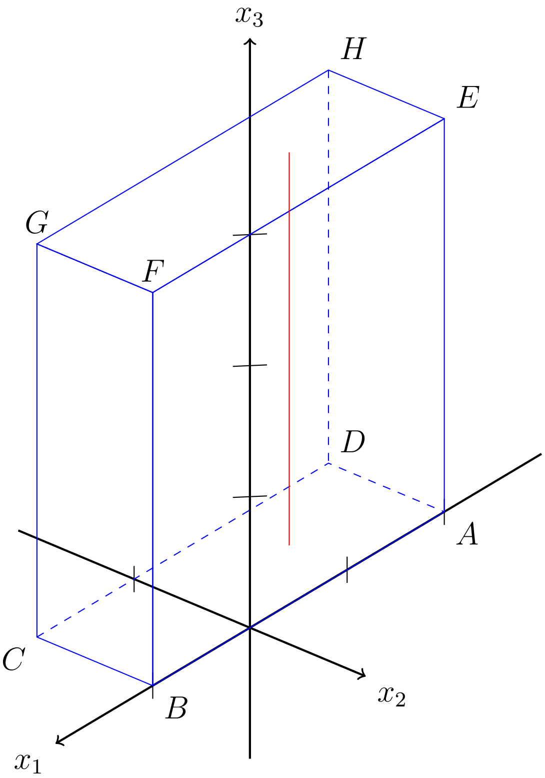
5.1.1 Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem

$A(2|3|4)$ $\quad B(-3|1|-2)$ $\quad C(3|0|2)$
Alle Punkte mit $(-2|1|z)$ liegen auf einer Geraden parallel zur z-Achse.



275/2

a+c



b

$D(-2|-1|0)$ $E(-2|0|3)$ $F(1|0|3)$ $H(-2|-1|3)$

276/3

$P(2|3|0)$ $Q(4|4|0)$
$R(0|3|1)$ $S(0|-2|-1)$
$T(2|0|2)$ $U(3|0|-1)$

276/10

$A(2|0|0)$ $B(-1|2|-1)$ $C(-2|3|4)$ $D(3|4|-2)$

a

$A'(2|0|0)$ $B'(-1|2|1)$ $C'(-2|3|-4)$ $D'(3|4|2)$

b

$$A'(-2|0|0) \qquad B'(1|2|-1) \qquad C'(2|3|4) \qquad D'(-3|4|-2)$$

c

$$A'(2|0|0) \qquad B'(-1|-2|-1) \qquad C'(-2|-3|4) \qquad D'(3|-4|-2)$$

5.2 Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren

$\vec{OA}$ ist der Ortsvektor des Punktes A. Der Vektor führt vom Ursprung O zum Punkt A. $\vec{BC}$ ist ein Verschiebungsvektor, der Punkt B auf Punkt C verschiet, bzw. B mit C verbindet und auf C zeigt. Mit Hilfe des Vektors $\vec{BC}$ lassen sich auch andere Punkte in gleicher Weise verschieben wie Punkt B auf Punkt C.

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P(0|1) \quad Q(4|3) \quad R(1.5|0.5)$$

$$\vec{OP} + \vec{BC} = \vec{OP'} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$