Mathe LK Rh

Tim D.

MSS 2017-20

Inhaltsverzeichnis

Teil I

11/1

0.1 Terme, Gleichungen, Ungleichungen

0.1.1 Pascalsches Dreieck

$n = 0$:									1									
$n = 1$:								1		1								
$n = 2$:							1		2		1							
$n = 3$:						1		3		3		1						
$n = 4$:					1		4		6		4		1					
$n = 5$:				1		5		10		10		5		1				
$n = 6$:			1		6		15		20		15		6		1			
$n = 7$:		1		7		21		35		35		21		7		1		
$n = 8$:	1		8		28		56		70		56		28		8		1	

0.1.2 pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

0.1.3 abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

0.1.4 Satz von Vieta

$$0 = x^2 + px + q$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{(\frac{p}{2})^2 - q}_{\text{Diskriminante*}}}$$

*Diskriminante:
$> 0 \quad \Rightarrow$ zwei Lösungen
$= 0 \quad \Rightarrow$ eine Lösung
$< 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots} - \frac{p}{2} - \sqrt{\cdots} = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots})(-\frac{p}{2} - \sqrt{\cdots}) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$0 = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Beispiel

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = \frac{1}{9}(x^2 \underbrace{-6}_{x_1+x_2} x \underbrace{-72}_{x_1 \cdot x_2})$$
$$x_1 = 12;\ x_2 = -6$$
$$0 = \frac{1}{9}\underbrace{(x-12)(x+6)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

0.1.5 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Beispiele

$n = 2$

$$(a+b)^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^{2}}_{\text{Drei Summanden: k = 0; k = 1; k = 2}} \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k$$

$$= \underbrace{\binom{5}{0} a^2}_{\text{k = 0}} + \underbrace{\binom{5}{1} ab}_{\text{k = 1}} + \underbrace{\binom{5}{2} b^2}_{\text{k = 2}}$$

$$= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$n = 5$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} \cdot b^k$$

$$= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Binominialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

0.2 Gleichungen und Ungleichungen

0.2.1 Gleichung lösen durch Substitution

Beispiel $0 = 2x^4 - 3x^2 - 5$
Lösungsmenge der Gleichung = Menge der Nullstellen (Schnitte mit der x-Achse) der Funktion mit gleichem Funktionsterm

substituiere $x^2 = t$

$0 = 2t^2 - 3t - 5$

$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$

$t_1 = 2.5, \quad t_2 = -1$

resubstituiere

$t_1 = x^2 = 2.5 \qquad |\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{2.5};\ x_2 = -\sqrt{2.5}$

$t_2 = x^2 = -1 \qquad |\sqrt{}$

keine Lösung

$L = \{\sqrt{2.5}; -\sqrt{2.5}\}$

0.3 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

0.3.1 Potenz- und Wurzelgesetze

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$

$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$

$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$

0.3.2 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = \log_a(x) \cdot y$$
$$a^x = 10^{\log(a) \cdot x}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

0.4 Funktion - Relation - Zahlenfolge

Eien Funktion ist eine Zuordnung (Zahlen $x \rightarrow$ Zahlen y), die jeder Zahl x der Definitionsmenge genau eine Zahl y der Wertemenge zuordnet.

Darstellung:

- Funktionsgleichung, z. B. $f(x) = y = \underbrace{2x^2 + 5}_{\text{Funktionsterm}}$
- Graph
- Wertetabelle

Eine Relation ist eine allgemeine Zuordnung von x zu y,
z. B. $x = 3$ (senkrechte Gerade), $x^2 y = y^2 + x^3$

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit $x \in \mathbb{N}$

0.4.1 Zahlenfolgen

Definitionsmenge $D = \mathbb{N}_0$
Wertemenge $W = \mathbb{R}$
$a_n = y = \ldots \leftarrow Funktionsterm$
Angabe eines Funktionsterms für alle Zahlen nennt man explizite Darstellung der Zahlenfolge.

$$a_n = (\frac{1}{2})^n$$
$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad \ldots; \quad a_{100} = 2^{-100}$$

Berechnung der Folgezahlen Schritt für Schritt nennt man implizite Darsteluung der Zahlenfolge. (Rekursion)

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$$
$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$$

16/1

a

$$a_n = \frac{2n}{5}$$
$$a_1 = \frac{2}{5};\ a_2 = \frac{4}{5};\ a_3 = 1\frac{1}{5};\ a_4 = 1\frac{2}{5};\ a_5 = 2;$$
$$a_6 = 2\frac{2}{5};\ a_7 = 2\frac{4}{5};\ a_8 = 3\frac{1}{5};\ a_9 = 3\frac{3}{5};\ a_{10} = 4$$

d

$$a_n = (\frac{1}{2})^n$$
$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = 1\frac{1}{8};\ a_4 = \frac{1}{16};\ a_5 = \frac{1}{32};$$
$$a_6 = \frac{1}{64};\ a_7 = \frac{1}{128};\ a_8 = \frac{1}{256};\ a_9 = \frac{1}{512};\ a_{10} = \frac{1}{1024}$$

f

$$a_n = \sin(\frac{\pi}{2} n)$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 0;\ a_3 = -1;\ a_4 = 0;\ a_5 = 1;$$
$$a_6 = 0;\ a_7 = -1;\ a_8 = 0;\ a_9 = 1;\ a_{10} = 0$$

16/2

a

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 + a_n$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 5;\ a_4 = 7;\ a_5 = 9;$$
$$a_6 = 11;\ a_7 = 13;\ a_8 = 15;\ a_9 = 17;\ a_{10} = 19$$
$$a_n = 2n - 1$$

b

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 4;\ a_4 = 8;\ a_5 = 16;$$
$$a_6 = 32;\ a_7 = 64;\ a_8 = 128;\ a_9 = 512;\ a_{10} = 1024$$
$$a_n = 2^{n-1}$$

d

$$a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \text{(Fibonacci)}$$
$$a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3;$$
$$a_6 = 5;\ a_7 = 8;\ a_8 = 13;\ a_9 = 21;\ a_{10} = 34$$
$$a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

0.4.2 Zahlenfolgen: Monotonie, Beschränktheit

16/5

$a_n = 200000€ \cdot 0.98^n$

16/7

a

$$V_0 = 1^3 = 1$$
$$V_1 = V_0 + \frac{1}{8}V_0 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$
$$V_2 = V_1 + \frac{1}{8}(\frac{1}{8}V_0) = \frac{9}{8} + \frac{1}{64} = \frac{73}{64}$$
$$V_3 = V_2 + \frac{1}{8}(\frac{1}{8}(\frac{1}{8}V_0)) = \frac{73}{64} + \frac{1}{512} = \frac{585}{512}$$

b

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} 8^{-k}$$

Streng monoton fallende Zahlenfolge
z. B. a_n von 16/5 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n < a_{n-1}$
Streng monoton steigende Zahlenfolge
z. B. V_n von 16/7 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n > a_{n-1}$
Ohne „streng“entsprechend $\leqslant$ bzw. $\geqslant$

18/1

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$
$$a_1 = 2;\ a_2 = 1\frac{1}{2};\ a_3 = 1\frac{1}{3};\ a_4 = 1\frac{1}{4};\ a_5 = 1\frac{1}{5}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt (2); nach unten beschränkt (1)

b

$$a_n = (\frac{3}{4})^n$$
$$a_1 = \frac{3}{4};\ a_2 = \frac{9}{16};\ a_3 = \frac{27}{64};\ a_4 = \frac{81}{256};\ a_5 = \frac{243}{1024}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt ($\frac{3}{4}$); nach unten beschränkt (0)

c

$$a_n = (-1)^n$$
$$a_1 = -1;\ a_2 = 1;\ a_3 = -1;\ a_4 = 1;\ a_5 = -1$$

nicht monoton
nach oben beschränkt (1); nach unten beschränkt (-1)

d

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$
$$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{2}{3};\ a_4 = \frac{5}{4};\ a_5 = \frac{4}{5}$$

nicht monoton
nach oben beschränkt ($\frac{3}{2}$); nach unten beschränkt (0)

e

$$a_n = \frac{8n}{n^2 + 1}$$
$$a_1 = 4;\ a_2 = \frac{16}{5};\ a_3 = \frac{12}{5};\ a_4 = \frac{32}{17};\ a_5 = \frac{20}{13}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt (4); nach unten beschränkt (0)

18/2

a_n	n	$(-1)^n \cdot n$	$(-1)^n : n$	$1 + 1 : n$
↑ beschränkt	✗	✗	✓	✓
↓ beschränkt	✓	✗	✓	✓
beschränkt	✗	✗	✓	✓
monoton	✓	✗	✗	✓

0.5 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion

Der Grenzwert g ist eine reelle Zahl, der sich die Folgenwerte (Funktionswerte) annähern, sodass die Folgenwerte (Funktionswerte) vom Grenzwert praktisch nicht mehr unterschieden werden können.
z. B.

$$a_n = n^{-1}$$
$$a_n = \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n}$$

a_n hat den Grenzwert $g = 0$, da a_n auch streng monoton fallend ist, ist $s = 0$ die größte untere Schranke (=„Infimum“).

Vorgehen
Ich gebe eine Genauigkeitsschranke, z. B. $\epsilon = 10^{-3}$ vor (kleine positive Zahl). Zu ϵ finde ich ein $n_\epsilon = 1001$. Alle Folgenwerte mit $n \geqslant n_\epsilon = 1001$ (also $a_{1001},\ a_{1002},\ \ldots$) liegen näher beim Grenzwert $g = 0$ als $\epsilon = 10^{-3}$ angibt. Finde ich zu jeder möglichen Genauigkeitsschranke ϵ solch ein n_ϵ, so ist g der Grenzwert. Ist diese Bedingung erfüllt, so notiert man
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ hier: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} = 0$

22/2 (Abweichung $< \epsilon = 0.1$)

a

$$a_n = \frac{1+n}{n}$$
$$|\frac{1+n}{n} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 10$$

b

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$$
$$|\frac{n^2-1}{n^2} - 1| < 0.1$$
$$\epsilon > \sqrt{10} \approx 3.162 \quad \text{(ab 4)}$$

c

$$a_n = 1 - \frac{100}{n}$$
$$|1 - \frac{100}{n} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 1000$$

d

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}$$
$$|\frac{n-1}{n+2} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 28$$

e

$$a_n = \frac{2n^2-3}{3n^2}$$
$$|\frac{2n^2-3}{3n^2} - 1| < 0.1$$
$\rightarrow$ keine Lösung

zu e

$$|\frac{2n^2-3}{3n^2}-1|<0.1$$
$$1-\frac{2n^2-3}{3n^2}<0.1 \qquad |-0.1+\frac{2n^2-3}{3n^2}$$
$$0.9<\frac{2n^2-3}{3n^2} \qquad |\cdot 3n^2$$
$$2.7n^2<2n^2-3 \qquad |-2n^2$$
$$0.7n^2<-3 \qquad |:0.7$$
$$n^2<-\frac{30}{7} \qquad |\sqrt{}$$
$$n<\sqrt{-\frac{30}{7}} \text{ und } n<-\sqrt{-\frac{30}{7}}$$
$\Rightarrow$ nicht lösbar

0.5.1 Grenzwerte

Eine Zahlenfolge mit Grenzwert ist eine konvergente Folge. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert ist eine divergente Folge. Eine Nullfolge hat den Grenzwert $g=0$.
$a_n=\frac{n}{n+1} \quad g=1 \quad \rightarrow \quad a_n^*=\frac{n}{n+1}-1 \quad g=0$ (Nullfolge)

22/4

a

$$|(\frac{3n-2}{n+2})-3|<\epsilon$$
$$|\frac{-8}{n+2}|<\epsilon \qquad |x^{-1}$$
$$\frac{n+2}{8}>\frac{1}{\epsilon} \qquad |\cdot 8$$
$$n+2>\frac{8}{\epsilon} \qquad |-2$$
$$n>\frac{8}{\epsilon}-2$$

b

$$|(\frac{n^2+n}{5n^2})-0.2|<\epsilon$$
$$\frac{n}{5n^2}<\epsilon \qquad |\cdot 5$$
$$n^{-1}<5\epsilon \qquad |x^{-1}$$
$$n>\frac{1}{5\epsilon}$$

c

$$|(\frac{2^{n+1}}{2^n+1})-2|<\epsilon$$
$$|\frac{-2}{2^n+1}|<\epsilon \qquad |:2;\ x^{-1}$$
$$2^n+1>\frac{2}{\epsilon} \qquad |-1$$
$$2^n>\frac{2}{\epsilon}-1 \qquad |\log;\ :\log(2)$$
$$n>\frac{\log(\frac{2}{\epsilon}-1)}{\log(2)}$$

d

$$|(\frac{3\cdot 2^n+2}{2^{n+1}})-\frac{3}{2}|<\epsilon$$
$$|\frac{3\cdot 2^n+2-3\cdot 2^n}{2^{n+1}}|<\epsilon$$
$$\frac{2}{2[n+1]}<\epsilon$$
$$\frac{1}{2^n}<\epsilon \qquad |x^{-1}$$
$$2^n>\frac{1}{\epsilon} \qquad |\log\ :\log(2)$$
$$n>\frac{-\log(\epsilon)}{\log(2)}$$

24/2

a

$$a_n = \frac{1+2n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{1}{n}+n}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

b

$$a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10} = \frac{7+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n^3}}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^3}} = \frac{7+0}{1-0} = 7$$

f

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} = (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}) : (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}) = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

g

$$a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} = (\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1})^4$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}))^4 = (\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1})^4 = (\frac{0-1}{0+1})^4 = 1$$

24/3

a

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

b

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{0.5}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 0.5} = \frac{1-0}{0.5} = 2$$

c

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{1+4^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4^n}}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

d

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^{n+1}}{2^n+3^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}-1}{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}+1}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^{n+1}}{2\cdot 3^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{(\frac{2}{3})^n+3}{2}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n + \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

0.5.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim\limits_{x\to\infty}$; $\lim\limits_{x\to a}$

$f(x) = y = \frac{3x^2-3}{(x+1)(x-4)}$ D $= \mathbb{R}\backslash\{\underbrace{-1;4}_{\text{Nullstellen des Nenners}}\}$

$x = -1 \rightarrow$ Nullstelle des Zählers und Nenners
$x = 4 \rightarrow$ Nullstelle des Nenners

$$f(x) = y = \frac{3(x^2-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-3}{x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-3}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\cdots = \lim_{x\to-\infty}\cdots = \lim_{x\to-\infty}\cdots = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$$

$\lim_{x\to\infty} \neq \lim_{x\to-\infty}$

Beispiel $f(x) = 2^x$

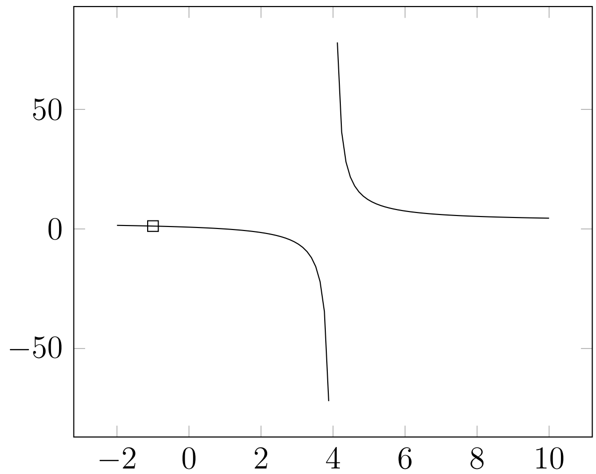
$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty;\ \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

$$\lim_{x\to-1} \frac{3x-3}{x-4} = \frac{3(-1)-3}{-1-4} = \frac{-6}{-5} = 1.2$$

$$\lim_{x\to4} \frac{3x-3}{x-4} = ?$$

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	-87	-897	-8997	93	903	9003

$\lim_{x\nearrow4} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\searrow4} f(x) = +\infty$



$x = 4 \rightarrow$ Unendlichkeitsstelle, ein Pol mit Vorzeichenwechsel
Der Punkt $(-1|1.2)$ gehört nicht zum Graphen. Es ergibt sich ein Loch im Graphen.

28/6

a

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 1$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	1	1	1	1

b

$$f(x) = \frac{x^3}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	-0.01	-0.0001	0.0001	0.01

c

$$f(x) = \frac{x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	100	10000	10000	100

d

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2^0}{3^0} = 1$$

e

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2^0 - 1}{3^0} = 0$$

0.6 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit

$$D = \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < -5 \\ x^2 + 10 & \text{für } -5 \leqslant x < 1 \\ -x & \text{für } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Abschnittsweise definierte Funktionen → Für verschiedene Abschnitte der Zahlengeraden von $\mathbb{R}$ sollen unterschiedliche Funktionsterme gelten.

Einschub: Ganzrationale Funktionen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

z. B. $f(x) = 3x^4 + 5x - 7$

$n = 4$ (Grad $n \in \mathbb{N}$)

$a_4 = 4$

$a_3 = a_2 = 0$

$a_1 = 5$

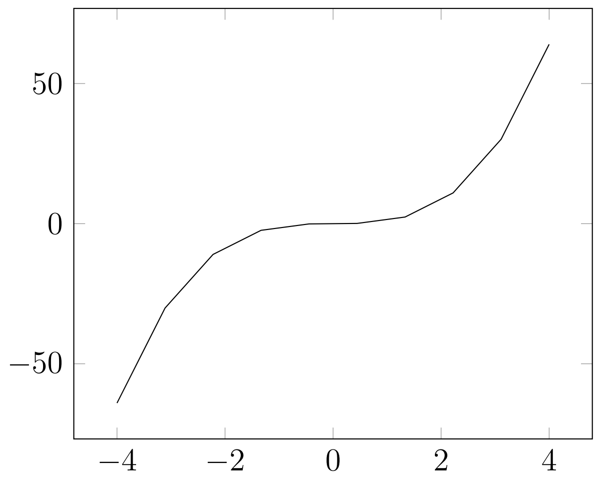
$a_0 = -7$

Grad der ganzrationalen Funktion ist die höchste Potenz, bspw. 4

Funktionsterm = Polynom

Die Stetigkeit einer Funktion beschreibt die Tatsache, ob man den Graph der Funktion ohne abzusetzen zeichnen kann.

Beispiel: $f(x) = x^3$



$f(x)$ ist überall stetig

Allgemein gilt:
Ganzrationale Funktionen sind überall, d. h. $-\infty < x < \infty$, stetig.

Untersuche $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$x_1 = -5;\ x_2 = 1$

$\lim\limits_{x \nearrow -5} f(x) = -10$

$\lim\limits_{x \searrow -5} f(x) = -35$

$\Rightarrow$ unterschiedliche Grenzwerte bedeuten $f(x)$ ist bei $x = -5$ unstetig

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 11$

$\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = -1$

$\Rightarrow$ unstetig bei $x = 11$

28/9

a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqslant 3 \\ 12 - x & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = 3^2 = 9$

$\lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = 12 - 3 = 9$

$\Rightarrow$ stetig

b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{für } x \leqslant -1 \\ 2^x - 3 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$

$\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = 2^{-1} - 3 = -2.5$

$\Rightarrow$ unstetig

28/11

-
$$f(x) = sin(\frac{1}{x}) \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \sin(\infty) = -1 \text{ bis } +1 \quad \Rightarrow \text{kein Grenzwert}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \sin(0) = 0$$

0.6.1 Die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0

Eine Funktion ist stetig bei $x = x_0$, wenn Folgendes gilt:
$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim_{x\searrow x_0} f(x) = f(x_0)$

29/4

a $a_n = \frac{n^2-7n-1}{10n^2-7n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{10}$

b $a_n = \frac{n^3-3n^2+3n-1}{5n^3-8n+5} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5}$

f $a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

g $a_n = \frac{3^n+1}{5^n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

29/5

a $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+100} - \sqrt{n}) = 0$

b $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+10} - \sqrt{n})) = 5$

c $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n} - 2n) = \frac{3}{4}$

30/10

a $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0$

b $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{8}$

30/11

a

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = x - 1 = 0$$

c

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^1 + 1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1; -1\}$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1^2 + 1 = 2$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2$$

29/6 $a_n = 0.95^n$

a $a_5 = 0.95^5 = 0.77$

b $0.5 = 0.95^n \Rightarrow n = \frac{\log(0.5)}{\log(0.95)} \approx 13.5 \quad n = 13$

c

$$s(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_k$$
$$s(5) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$
$$= 1 + 1.9 + 1.805 + 1.71475 + 1.6290125 = 8.0487625$$

0.6.2 Polynomdivision

30/11d

$$f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$
$$(x^6 - 1) : (x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^6 \qquad\qquad\quad - 1\big) \div \big(x^2 - 1\big) = x^4 + x^2 + 1 \\ \underline{-\,x^6 + x^4} \\ \qquad\quad x^4 \\ \qquad \underline{-\,x^4 + x^2} \\ \qquad\qquad\quad x^2 - 1 \\ \qquad\qquad \underline{-\,x^2 + 1} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$
$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$$

0.7 Funktionen - Eigenschaften

0.7.1 Punktbrobe

(erfüllt ein Punkt eine Gleichung)
z. B. $P(2|3)$
$f(x) = y = 2x^2 - 5x + 3$
Setze für x die Zahl 2 ein
$f(x) = 8 - 10 + 3 = 1 \neq 3$
$\Rightarrow P$ gehört nicht zum Graphen von f

38/4

a Höhenmeter: 250m
  Streckenkilometer: 10km

b Gesamtanstieg: 750m

c Bei Streckenkilometer 25: Achsensymmetrie zur y-Achse

39/7

a 1.8m

b $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 7.42\}$

c $f(2.5) = 2.425$

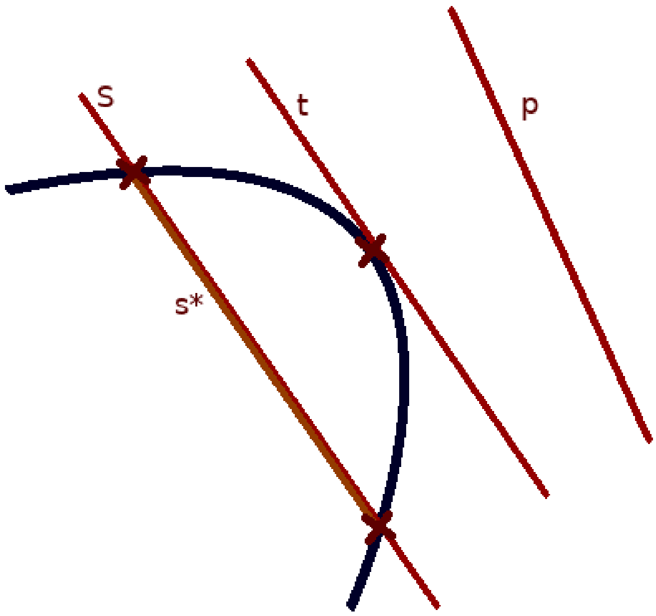
39/11

a $f(x) = 1.9879 \cdot 10^{-4} + 86$

b $f(-995.5) = f(995.5) = 283$
$f(0) = 86$

c $D = \{x \in \mathbb{R} | -995.5 \leqslant x \leqslant 995.5\}$

0.8 Mittlere Änderungsrate



Eine **Sekante s** ist eine Gerade, die eine Kurve in 2 (oder mehr) Punkten schneidet.
Eine **Sehne s***, Teil einer Sekante, ist eine Strecke, die zwei Kurvenpunkte verbindet.
Eine **Tangente t** ist eine Gerade, die die Kurve in einem Punkt berührt.
Eine **Passante p** ist eine Gerade, die die Kurve nicht schneidet.

$P(1|3);\ Q(10|8)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{9}$ (Steigung der Sekante durch P und Q)

Die Sekantensteigung m heißt mittlere Änderungsrate der Funktion f zwischen den Punkten P und Q.

$$P(1|3)\ f(1) = 3$$
$$Q(10|8)\ f(10) = 8$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 10 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = h = 9$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Differenzenquotient}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Beispielrechnung$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$
$$x_1 = 2;\ x_2 = 10$$
$$h = x_2 - x_1 = 8$$
$$m = \frac{f(10) - f(2)}{8} = \frac{175 - 7}{8} = 21$$

41/2

t [d]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h [mm]	0	0	0	0	1	2	4	6	7

a $m = \frac{h(9)-h(1)}{8} = \frac{7}{8}$

b $m = \frac{h(3)-h(1)}{2} = 0$

d $m = \frac{h(6)-h(4)}{2} = 1$

c $m = \frac{h(9)-h(7)}{2} = \frac{3}{2}$

41/1 $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

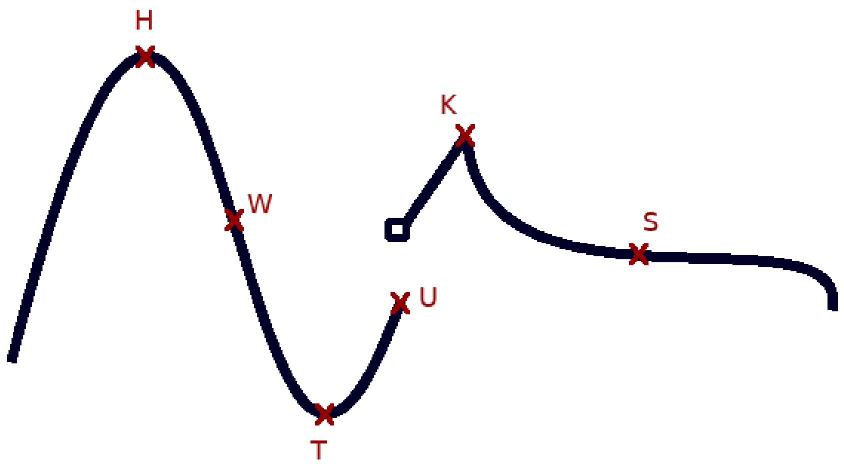
a $m = \frac{f(1)-f(0.1)}{0.9} = -10$

b $m = \frac{f(12)-f(2)}{10} = -\frac{1}{24}$

c $m = \frac{f(0.02)-f(0.01)}{0.01} = -5000$

d $m = \frac{f(1000)-f(100)}{900} = -100000^{-1}$

0.9 Tangentensteigung, Ableitung



H Hochpunkt (waagerechte Tangente)

W Wendepunkt (maximale/minimale Steigung)

T Tiefpunkt (waagerechte Tangente)

U Unstetigkeit (keine Tangentensteigung)

K Knickstelle (keine Tangentensteigung)

S Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

0.9.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

$$f(x) = y = x^2 \quad x_0 = 2$$
$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \quad \text{(Sekante)}$$
$$m = \lim_{h \to 0} (4+h) = 4 \quad \text{(Tangente)}$$

0.9.2 Ableitungsfunktion

$$f(x) = 2x^3 \quad x_0 = 4$$
$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \frac{2(4+h)^3 - 2 \cdot 4^3}{h}$$
$$= \frac{128 + 96h + 24h^2 + 2h^3 - 128}{h}$$
$$= 96 + 24h + 2h^2$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(6|f(6)) \Rightarrow h = 2$
$m = 96 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 152$
Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(-1|f(-1)) \Rightarrow h = -5$
$m = 96 + 24 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5)^2 = 26$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $h \to 0$.
$m_{\text{Tangente}} = \lim\limits_{h \to 0} m_{\text{Sekante}} = \lim\limits_{h \to 0} 96 + 24h + 2h^2 = 96$
Die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3$ bei $x = 4$ ist 96.
$f'(4) = 96$ (Tangentensteigung)
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

46/6

a 10.15 Uhr: $m = \frac{500m}{15min} = 33.\overline{3}\frac{m}{min}$

10.45 Uhr: $m = \frac{-500m}{15min} = -33.\overline{3}\frac{m}{min}$

11.15 Uhr: $m = \frac{-1000m}{15min} = -66.\overline{6}\frac{m}{min}$

b am größten: ~10.05 Uhr
am kleinsten: ~11.20 Uhr

48/3

a $x_0 = 4$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = 8$

b $x_0 = 3$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{-2(3+h)^2 - (-2) \cdot 3^2}{h} = -12$

e $x_0 = -1$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(-1+h)^{-1} - (-1)^{-1}}{h} = -1$

h $x_0 = 3$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(-3+h+2) - (-3+2)}{h} = -1$

i $x_0 = 7$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{4-4}{h} = 0$

0.10 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung

$f(x) = 5x^3 \qquad P_1(2|f(2)) \quad P_2(4|f(4))$

Sekantengleichung

$$
\begin{aligned}
&y = m \cdot x + b \\
&m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{320 - 40}{2} = 140 \\
&b = -m \cdot x + y = -140 \cdot 2 + 40 = -240 \\
&s(x) = 140x - 240
\end{aligned}
$$

Tangentengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$
\begin{aligned}
&y = m \cdot x + b \\
&m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{0 \to h} \frac{5(2+h)^3 - 40}{h} = 60 \\
&b = -m \cdot x + y = -60 \cdot 2 + 40 = -80 \\
&t(x) = 60x - 80
\end{aligned}
$$

Normalengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$
\begin{aligned}
&y = m \cdot x + b \\
&m_n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -(\frac{\Delta y}{\Delta x})^{-1} = \frac{-1}{m_t} \\
&m_n \cdot m_t = -1 \\
&m_t = 60 \\
&m_n = -\frac{1}{60} \\
&b = -m \cdot x + y = 40\frac{1}{30} \\
&n(x) = -\frac{1}{60}x + 40\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

Zwei Geraden mit m_1 und m_2 sind orthogonal, wenn gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$

49/14

a

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 0.5x^2 \qquad P(1|f(1) = 0.5) \\
&m_t = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}(1 + \frac{1}{2}h) = 1 \\
&b_t = -m_t \cdot x + y = -\frac{1}{2} \\
&y_t = x - \frac{1}{2} \\
&m_n = -\frac{1}{m_t} = -1 \\
&b_n = -m_n \cdot x + y = 1.5 \\
&y_n = -x + 1.5
\end{aligned}
$$

b

$$f(x) = 2x^2 - 4 \qquad P(-2|f(-2) = 4)$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{2(-2+h)^2 - 4 - 4}{h} = -8$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = -12$$
$$y_t = -8x - 12$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{8}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = 4\frac{1}{4}$$
$$y_n = \frac{1}{8}x + 4\frac{1}{4}$$

c

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad P(0.5|f(0.5) = \sqrt{0.5})$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0.5+h} - \sqrt{0.5}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$y_t = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = \sqrt{2}$$
$$y_n = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x + \sqrt{2}$$

d

$$f(x) = -x^3 + 2 \qquad P(2|f(2) = -6)$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{-(2+h)^3 + 2 + 6}{h} = -12$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = 18$$
$$y_t = -12x + 18$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{12}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = -6\frac{1}{6}$$
$$y_n = \frac{1}{12}x - 6\frac{1}{6}$$

49/13 $f(x) = -\frac{1}{x}$

a

$$P(-1|f(-1) = 1)$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{-1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h + h^2} = 1$$
$$\alpha = atan(m_t) = 45^\circ$$

b

$$P(2|f(2) = -\frac{1}{2})$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{2h + h^2} = \frac{1}{4}$$
$$\alpha = atan(m_t) = 14.04^\circ$$

c

$$P(0.1|f(0.1) = -10)$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{0.1+h} + 10}{h} = 100$$
$$\alpha = atan(m_t) = 89.43^\circ$$

49/12c

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -3\sqrt{x} \qquad x_0 = 8 \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{-3\sqrt{8+h} - (-3\sqrt{8})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(-\sqrt{72+9h} + \sqrt{72})(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}{h(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9}{-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72}} \\
&= \frac{9}{-2\sqrt{72}} = \frac{3}{-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{32}}
\end{aligned}
$$

0.11 Ableitungsfunktion

Die Ableitung von $f(x)$ bei x_0 ist eine lokale Eigenschaft der Funktion $f(x)$, also einer Stelle x_0. Allerdings sind unsere Funktionen fast überall differenzierbar. Ausnahmen sind Unstetigkeitsstellen und Knickstellen. Es gibt eine Funktion $f'(x) = m_t(x)$ für alle Stellen x. Sie heißt Ableitungsfunktion.

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
$$

z. B. $f(x) = x^4$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4x^2 + h^3 \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

z. B. $f'(5) = 500$

$$
\begin{aligned}
&g(x) = x^2 \\
&\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + xh + h^2 - x^2}{h} = 2x \\
&h(x) = x^3 \\
&\quad h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 \\
&i(x) = a \cdot x^2 \\
&\quad i'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + 2xh + ah^2 - ax^2}{h} = 2ax \\
&j(x) = \sqrt{x} \\
&\quad j'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&k(x) = \frac{1}{x^2} \\
&\quad k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^{-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^{-1} - x^{-1}}{h} = -2x^-3
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = ax^n \qquad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}
$$

54/2

a

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f'(x) &= 2ax + b
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a}{x} + c \\
f'(x) &= -ax^{-2}
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{c+1} \\
f'(x) &= (c+1)x^c
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
f(x) &= t^2 + 3t \\
f'(x) &= 2t + 3
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - t \\
f'(x) &= 1
\end{aligned}
$$

f

$$
\begin{aligned}
f(t) &= x - t \\
f'(t) &= -1
\end{aligned}
$$

55/7

c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 3x^2 + 3 \\
&f'(x) = 6x \\
&P(0.5|f(0.5) = 3.75) \\
&m = f'(0.5) = 3 \\
&b = -m \cdot x + y = 2.25 \\
&y = 3x + 2.25
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -x^3 + 2 \\
&f'(x) = -3x^2 \\
&P(2|f(2) = -6) \\
&m = f'(2) = -12 \\
&b = -m \cdot x + y = 18 \\
&y = -12x + 18
\end{aligned}
$$

59/6 $g(x) = 10 - 3x \Rightarrow m = -3$

c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -\frac{1}{100}x^3 \\
&f'(x) = -\frac{3}{100}x^2 \\
&-3 = -\frac{3}{100}x^2 \\
&x = 10 \\
&P(10|f(10) = -20)
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&f(x) = bx^3 + c \\
&f'(x) = 3bx^2 \\
&-3 = 3bx^2 \\
&x = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} \\
&P(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}|f(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}) = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} + c) \qquad b < 0
\end{aligned}
$$

60/12

$$
H(t) = \begin{cases} 3.2 & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 3.2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 \leqslant t \leqslant 1.8 \\ 0 & \text{für } 1.8 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}
$$

a

$$
\begin{aligned}
&H'(0.5) = 0 \\
&H'(1.5) = -10t + 10 = -5 \\
&H'(2.5) = 0
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&H'(1) = 0 = -10t + 10 \\
&H'(1.8) = -10t + 10 = -8 \neq H'(1.8) = 0
\end{aligned}
$$

67/3

a

$$x^5 - 20x^3 + 64x = 0 \qquad |:x \Rightarrow x = 0$$
$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - 20t + 64 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{0; \pm 2; \pm 4\}$$

b

$$x^5 - 17x^3 + 16x = 0 \qquad |:x \Rightarrow x = 0$$
$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - 17t + 16 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = 8.5 \pm \sqrt{72.25 - 16} = 8.5 \pm 7.5 \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{0; \pm 1; \pm 4\}$$

c

$$(x - \frac{2}{3})(x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1) = 0$$
$$x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
$$x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - \frac{13}{6}t + 1 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{\frac{2}{3}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\}$$

d

$$
\begin{aligned}
&(x^3-8)(x^4-\frac{14}{3}x^2+5)=0\\
&x^3-8=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2\\
&x^4-\frac{14}{3}x^2+5=0 \qquad |t=x^2\\
&t^2-\frac{14}{3}t+5=0 \qquad |pq\\
&t_{1/2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}-5}=\frac{7}{3}\pm\frac{2}{3} \qquad |\text{resubst.}\\
&x_{1/2/3/4}=\pm\sqrt{t_1 1/2}\\
&L=\{2;\pm\sqrt{\frac{5}{3}};\pm\sqrt{3}\}
\end{aligned}
$$

0.12 Nullstellen

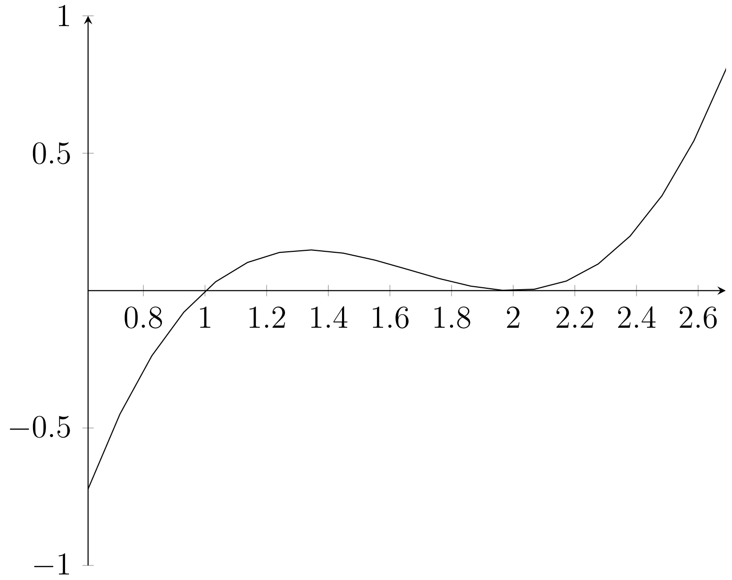
Annahme: $f(x)=0$ habe $x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=1$ als Lösungen,
$f(x)$ hat Grad 3.

$$
\begin{aligned}
&f(x)=x(x-2)(x+3)(x-1)\\
&=x^3-7x+6 \text{ für } c=1
\end{aligned}
$$

Würde ich die zusätzliche Nullstelle $x_4=4$ als Linearfaktor in die Funktionsgleichung einfügen, so hätte ich eine Funktion 4. Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion mit Grad n hat maximal n Nullstellen. Funktionen mit ungeradzahligen Graden $n=1,3,5,7$ ... haben mindestens eine Nullstelle. Solche mit geradzahligen Graden $n=2,4,6,8$ ... haben keine Mindestzahl an Nullstellen.

0.12.1 Mehrfache Nullstellen

Beispiel $f(x)$ habe $x_1 = x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ als Nullstellen (Grad 3).



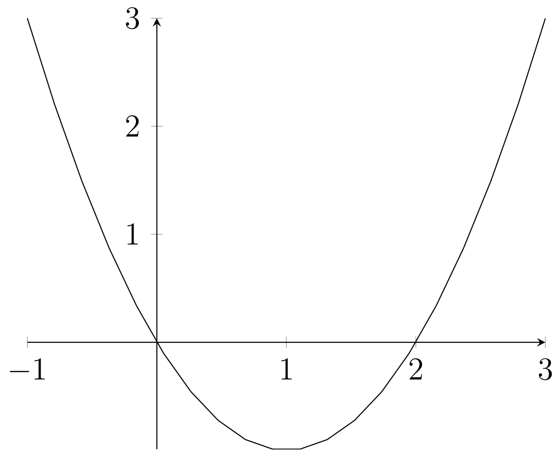
Berührpunkt bei $x = 2$, außerdem Extrempunkt.

Finde ich eine doppelte Nullstelle, so liegt gleichzeitig an der Stelle ein Extrempunkt vor. Eine dreifache Nullstelle ist zusätzlich ein Sattelpunkt mit waagerechter Tangente.

67/5

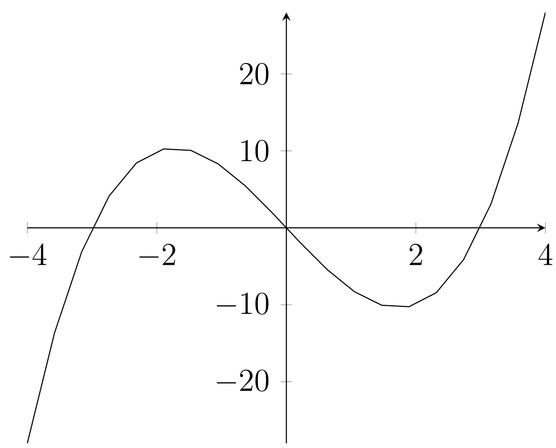
a

$$f(x) = x^2 - 2x$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{0; 2\}$$



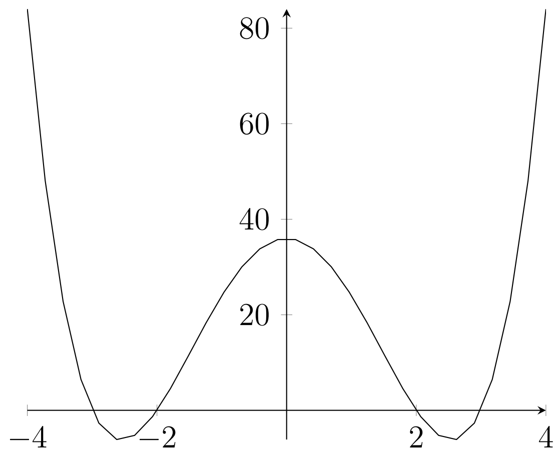
c

$$f(x) = x(x^2 - 9)$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{0; \pm 3\}$$



f

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$
$$f(0) = 36$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{\pm 2; \pm 3\}$$



68/13 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a

NS: $0; -4; \frac{4}{5}$

$a = 5$

$f(x) = a(x-0)(x+4)(x-\frac{4}{5}) = a(x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 - 3\frac{1}{5}x)$

$= 5x^3 + 16x^2 - 16x$

b

NS: $-\frac{1}{3}; 3; \frac{10}{3}$

$a = 9$

$f(x) = a(x+\frac{1}{3})(x-3)(x-\frac{10}{3}) = a(x^3 - 6x^2 - \frac{1}{9}x + 3\frac{1}{3})$

$= 9x^3 - 72x^2 - x + 30$

c

NS: $0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$

$a = 1$

$f(x) = a(x-0)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = a(x^3 - 2x)$

$= x^3 - 2x$

d

NS: $0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$
$a = 5$
$f(x) = a(x-0)(x+\frac{1}{\sqrt{5}})(x-\frac{1}{\sqrt{5}}) = a(x^3 - \frac{1}{5}x)$
$= 5x^3 - x$

68/2 $f(x) = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$

a

$0 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$
$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 4(-0.08) \cdot 1.44}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.88}{-0.16}$
$(x_1 = -2) \quad x_2 = 9$

b

$1.44 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$
$0 = -0.08x^2 + 0.56x$
$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.56}{-0.16}$
$(x_1 = 0) \quad x_2 = 7$

68/11

$f(x) = ax^2 + c$
$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$
$f(5) = f(-5) = 1$
$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2$
$f(x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{50}$
Breite: $2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$

68/15

$s = 1000m$
$s(t) = 30t - 0.4t^2$
$v(t) = 30 - 0.8t$

a

$$v(t) = 0 = 30 - 0.8t \Rightarrow t = 37.5$$
$$s(37.5) = 30(37.5) - 0.4(37.5)^2 = 565.5$$

b

$$s(t) = v_0 \cdot t - 0.4t^2 < 1000$$
$$v(t) = v_0 - 0.8t \Rightarrow t = \frac{v_0}{0.8}$$
$$s(t) = \frac{v_0^2}{0.8} - 0.4(\frac{v_o}{0.8})^2 = \frac{5}{8}v_0^2 < 1000$$
$$v_0 < \sqrt{1600} = 40$$

0.13 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

Hochpunkt: $f(x_H) \geqslant f(x)$ in der Nähe
Tiefpunkt: $f(x_T) \leqslant f(x)$ in der Nähe

$$f'(x_H) = f'(x_T) = f'(x_S) = 0$$

Daraus folgt ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Stellen x mit $f'(x) = 0$.

z. B. $f(x) = x^3 - 2x^2$
$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$
x_1 und x_2 sind Kandidaten für Extrema.

Umgebungsuntersuchung
für Hochpunkte gilt: $f'(x_l) > 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) < 0$
für Tiefpunkte gilt: $f'(x_l) < 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) > 0$

zu: $x_1 = 0 \quad x_l = -1 \quad x_r = 1$
$f'(x_l) = f'(-1) = 7$
$f'(x_1) = f'(0) = 0$
$f'(x_r) = f'(1) = -1$
$\Rightarrow H(0|0)$

zu: $x_2 = \frac{4}{3} \quad x_l = 1 \quad x_r = 2$
$f'(x_l) = f'(1) = -1$
$f'(x_1) = f'(0) = 0$
$f'(x_r) = f'(2) = 4$
$\Rightarrow T(\frac{4}{3}| - 1.2)$

Sonderfall Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$f'(x_l) < 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) < 0$ oder
$f'(x_l) > 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) > 0$

73/2

e

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$$
$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$
$$0 = -x^2 + 3x \qquad | : x \Rightarrow x_2 = 0$$
$$0 = -x + 3 \qquad | - 3; \cdot(-1)$$
$$3 = x$$
$$L = \{0; 3\}$$

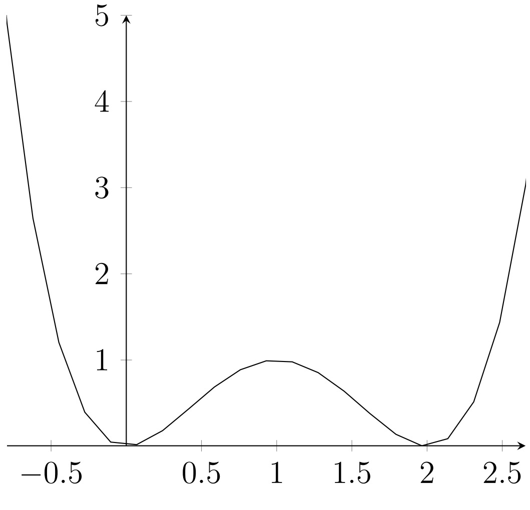
$f'(-1) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt $S(0|f(0) = -4)$
$f'(2) = 4 \quad f'(3) = 0 \quad f'(4) = -16 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $H(3|f(3) = 2\frac{3}{4})$

74/6

b

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\
&f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \\
&0 = 4x^3 - 12x^2 + 8x \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0 \\
&0 = 4x^2 - 12x + 8 \qquad |abc \\
&x_{2/3} = \frac{12 \pm 4}{8} \\
&x_2 = 1 \quad x_3 = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f'(-1) = -24 \quad f'(x_1) = 0 \quad f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad \Rightarrow T(0|0) \\
&f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad f'(x_2) = 0 \quad f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad \Rightarrow H(1|1) \\
&f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad f'(x_3) = 0 \quad f'(3) = 24 \quad \Rightarrow T(2|0)
\end{aligned}
$$



0.14 2. Ableitungsfunktion

$$f'(x) = (f'(x))''$$

Die 2. Ableitungsfunktion $f''(x)$ beschreibt das Krümmungsverhalten der Ursprungsfunktion $f(x)$.

$f''(x) > 0$ links gekrümmt
$f''(x) < 0$ rechts gekrümmt
$f''(x) = 0$ Wendepunkt

80/1

b

$$f(x) = 2x - 3x^2$$
$$f'(x) = 2 - 6x$$
$$f''(x) = -6$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\frac{1}{3}\}$$
$$f''(\frac{1}{3}) = -6 < 0 \quad H(\frac{1}{3}|\frac{1}{3})$$

d

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$
$$f'(x) = 2 - 6x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 8$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{2}; 0\}$$
$$f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad T(\pm\sqrt{2}| - 1)$$
$$f''(0) = -8 < 0 \quad H(0|3)$$

e

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$$
$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$
$$f''(x) = 16x^3 - 20x$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}\}$$
$$f''(\frac{1}{2}) = -8 < 0 \quad H(\frac{1}{2}|\frac{11}{15})$$
$$f''(-\frac{1}{2}) = 8 > 0 \quad H(-\frac{1}{2}| - \frac{11}{15})$$
$$f''(\frac{3}{2}) = 24 > 0 \quad T(\frac{3}{2}| - \frac{9}{5})$$
$$f''(-\frac{3}{2}) = -24 < 0 \quad T(-\frac{3}{2}|\frac{9}{5})$$

0.15 Wendepunkte

Wendepunkte eines Graphen sind Punkte an denen die Krümmung wendet. Am Wendepunkt selbst ist das Krümmungsverhalten gleich 0. Außerdem sind Wendepunkte Punkte mit maximaler bzw. minimaler Steigung.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

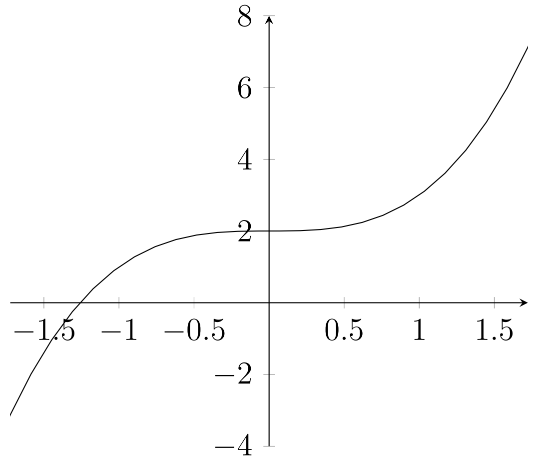
Hinreichende Bedingung (I): Umgebungsuntersuchung
$f''(x_l) > 0$ $f''(x_r) < 0$ Wechsel im Krümmungsverhalten
$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP(x|f(x))$ (links-rechts)

Hinreichende Bedingung (II): $f'''(x) \neq 0$
für $f'''(x) < 0$ LRWP
für $f'''(x) > 0$ RLWP
für $f'''(x) = 0$ keine Entscheidung

84/1

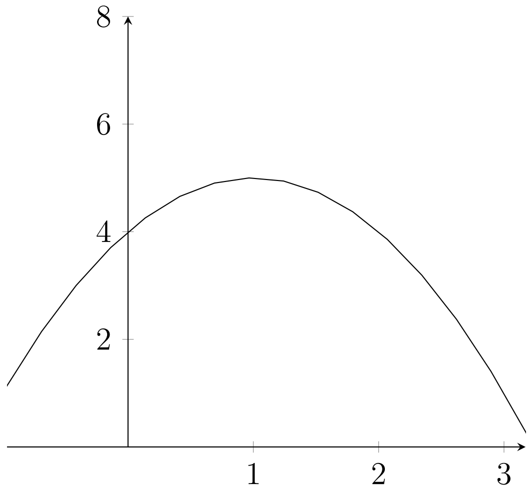
a

$$f(x) = x^3 + 2$$
$$f''(x) = 6x = 0 \quad L = \{0\}$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow RLWP(0|2)$$
rechts: $x \in \,]-\infty; 0]$
links: $x \in [0; \infty[$



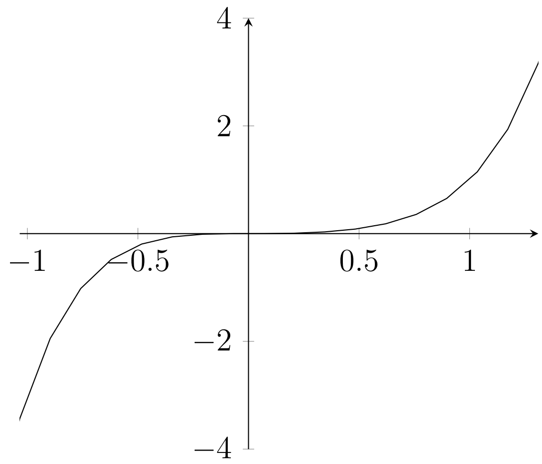
b

$$f(x) = 4 + 2x - x^2$$
$$f''(x) = -2 = 0 \quad L = \{\}$$
rechts: $x \in \,]-\infty;\infty[$



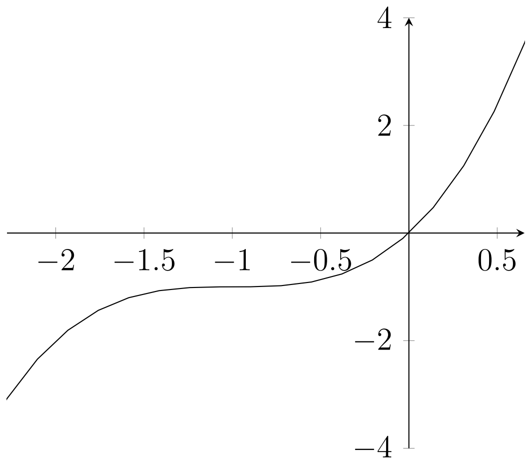
d

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3$$
$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \quad L = \{0\}$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$
$$f'''(0) = 6 \Rightarrow RLWP(0|0)$$
rechts: $x \in \,]-\infty;0]$
links: $x \in [0;\infty[$



84/2b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x + 6$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f''(x) = 0 \quad L = \{-1\}$$
$$f'''(-1) = 6 \Rightarrow RLWP(-1|f(-1) = -1)$$
$$f'(-1) = 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$



85/12

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$$
$$f''(x) = 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}b$$
$$f'(x) = 3(-\frac{1}{3}b)^2 + 2b(-\frac{1}{3}b) + c = -\frac{1}{3}b^2 + c = 0$$
$$\Rightarrow c = \frac{b^2}{3}$$

85/14

a

$$f_a(x) = x^3 - ax^2$$
$$f_a''(x) = 6x - 2a = 0 \quad L = \{\frac{a}{3}\}$$
$$f_a'''(x) = 6 \quad f_a'''(\frac{a}{3}) = 6 \Rightarrow RLWP(\frac{a}{3}|f_a(\frac{a}{3}))$$

b

$$f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$$
$$f_a''(x) = 12x^2 - 4a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$$
$$f_a'''(x) = 24x$$
$$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(\sqrt{\frac{a}{3}}) > 0 \Rightarrow RLWP(\sqrt{\frac{a}{3}}|f_a(\sqrt{\frac{a}{3}}))$$
$$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < 0 \Rightarrow LRWP(-\sqrt{\frac{a}{3}}|f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

89/2

A wahr, die Steigung ist negativ, d. h. die Werte werden kleiner

B falsch, die Funktion hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt, die Steigung ist davor und danach positiv

C wahr, einen Tiefpunkt bei $x = 2$ und einen Hochpunkt bei $x = 0$

D ?, die Funktionswerte sind an der Ableitungsfunktion nicht erkennbar

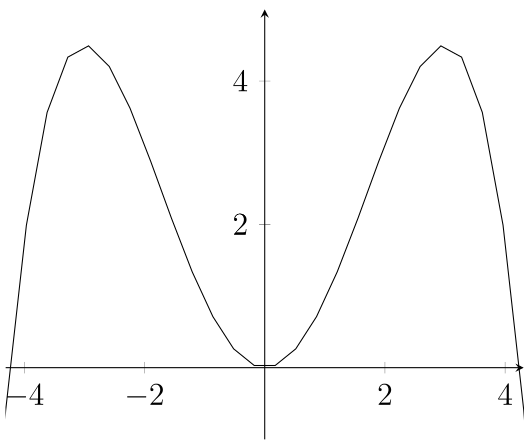
89/1

c

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^4 + x^2$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$
$$f(x) = 0 \quad L = \{0; \pm\sqrt{18}\} \Rightarrow S(0|0), S(\sqrt{18}|0), S(-\sqrt{18}|0)$$
$$f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$
$$f''(0) = 2 \Rightarrow T(0|f(0) = 0)$$
$$f''(3) = 4 \Rightarrow T(3|f(3) = \frac{9}{2})$$
$$f''(-3) = -4 \Rightarrow T(-3|f(-3) = \frac{9}{2})$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0 : \left]-\infty; -3\right], [0; 3]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0 : [3; 0], [3; \infty[$

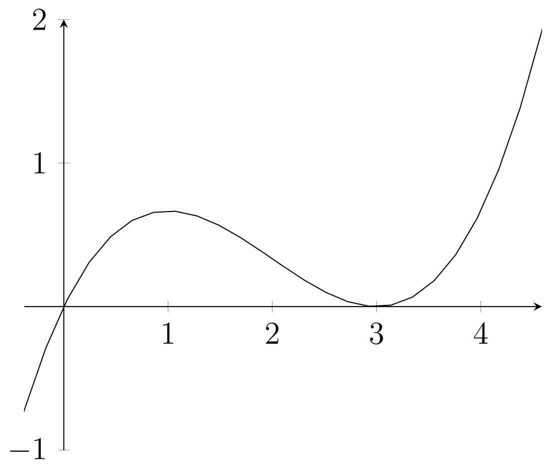


d

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$
$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x = 0 \quad L = \{0; 3\} \Rightarrow S(0|0), S(3|0)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.5 = 0 \quad L = \{1; 3\}$$
$$f''(x) = x - 2$$
$$f''(1) = -1 \Rightarrow H(1|f(1) = 0.\overline{6})$$
$$f''(3) = 1 \Rightarrow T(3|f(3) = 0)$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0 : [-\infty; 1], [3; \infty]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0 : [1; 3]$



f

$$f(x) = x + \frac{5}{x} \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \text{(kein Schnittpunkt mit y-Achse)}$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{\} \quad \text{(kein Schnittpunkt mit x-Achse)}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{5}\}$$

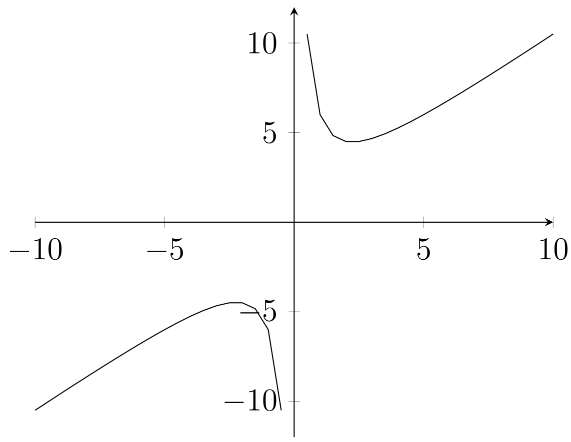
$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

$$f''(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(\sqrt{5}|f(\sqrt{5}) = \sqrt{20})$$

$$f''(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(-\sqrt{5}|f(-\sqrt{5}) = -\sqrt{20})$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0 : \left]-\infty; -\sqrt{5}\right], \left[\sqrt{5}; \infty\right]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0 : \left[-\sqrt{5}; 0\right[, \left]0; \sqrt{5}\right]$



0.16 Nullstellen: Polynomdivision

97/2

b $\left(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12\right) \div \left(x + 4\right) = 2x^2 - 6x + 3$

$$\begin{array}{l} -\ 2x^3 - 8x^2 \\ \hline \quad -\ 6x^2 - 21x \\ \quad\ \ 6x^2 + 24x \\ \hline \qquad\qquad 3x + 12 \\ \qquad\quad -\ 3x - 12 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

c $\left(\quad 2x^3 - 7x^2 \quad - x + 2 \right) \div \left(2x - 1 \right) = x^2 - 3x - 2$

$$\begin{array}{rrrr}
\underline{-2x^3} & \underline{+x^2} & & \\
 & -6x^2 & -x & \\
 & \underline{6x^2} & \underline{-3x} & \\
 & & -4x & +2 \\
 & & \underline{4x} & \underline{-2} \\
 & & & 0
\end{array}$$

d $\left(\quad x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2 \right) \div \left(x + 2 \right) = x^3 - 4x - 1$

$$\begin{array}{rrrrr}
\underline{-x^4} & \underline{-2x^3} & & & \\
 & & -4x^2 & -9x & \\
 & & \underline{4x^2} & \underline{+8x} & \\
 & & & -x & -2 \\
 & & & \underline{x} & \underline{+2} \\
 & & & & 0
\end{array}$$

98/4

a $x_1 = 1$

$\left(\quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \right) \div \left(x - 1 \right) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{rrrr}
\underline{-x^3} & \underline{+x^2} & & \\
 & -5x^2 & +11x & \\
 & \underline{5x^2} & \underline{-5x} & \\
 & & 6x & -6 \\
 & & \underline{-6x} & \underline{+6} \\
 & & & 0
\end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

b $x_1 = 2$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \quad + x^2 - 4x - 4\big) \div \big(x-2\big) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 4x \\
\qquad \underline{-\,3x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -1$$

$$f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)$$

c $x_1 = -2$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^3 \qquad\quad - 13x + 6\big) \div \big(x+2\big) = 4x^2 - 8x + 3 \\
\underline{-\,4x^3 - 8x^2} \\
\qquad\quad -\,8x^2 - 13x \\
\qquad\quad \underline{\quad 8x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{8 \pm 4}{8}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = (x+2)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})$$

d $x_1 = 3$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^3 \quad - 8x^2 - 11x - 3\big) \div \big(x-3\big) = 4x^2 + 4x + 1 \\
\underline{- 4x^3 + 12x^2} \\
\qquad\qquad 4x^2 - 11x \\
\qquad\quad \underline{- 4x^2 + 12x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$
$$x_{2/3} = -\frac{1}{2}$$
$$f(x) = (x-3)(x+\frac{1}{2})$$

98/11 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \qquad S(-2|0) \Rightarrow x_1 = -2$

a
$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 3x + 10\big) \div \big(x+2\big) = x^2 - 4x + 5 \\
\underline{- x^3 - 2x^2} \\
\qquad - 4x^2 - 3x \\
\qquad\quad \underline{4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\quad 5x + 10 \\
\qquad\qquad \underline{- 5x - 10} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$\Rightarrow$ keine Lösung

b

$$g(x) = mx + b \quad m = 2 \quad S(-2|0)$$
$$0 = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4$$
$$\Rightarrow g(x) = 2x + 4$$

$$f(x) = g(x)x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 2x + 4$$
$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = -2$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) \div \big(x + 2\big) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad -\,4x^2 - 5x \\
\qquad \underline{\quad 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x_{2/3} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$x_2 = 1 \quad S(1|6)$

$x_3 = 3 \quad S(3|10)$

98/12 $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$

a

$f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x \qquad |:x$

$0 = 2x^2 - 2x + 8$

$x_{2/3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-60}}{4}$ keine Lösung

$L = \{0\}$

$f_{10}(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x \qquad |:x$

$0 = 2x^2 - 10x + 8$

$x_{2/3} = \dfrac{10 \pm 6}{4}$

$L = \{0; 1; 4\}$

$f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x \qquad |:x$

$0 = 2x^2 + 10x + 8$

$x_{2/3} = \dfrac{-10 \pm 6}{4}$

$L = \{0; -1; -4\}$

b

Diskriminante > 0

$|t| > 8$

c

$t = 8$
$f_8(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$
Nullstellen: $\{0; 2\}$

0.17 Verhalten für $x \to \pm\infty$

z. B. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \approx \lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \approx \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3) = +\infty$
$\Rightarrow$ unterschiedlich für ungeradzahligen Grad

z. B. $g(x) = 2x^4 - 5x$
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \approx \lim\limits_{x\to\infty}(2x^4) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \approx \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4) = +\infty$
$\Rightarrow$ unterschiedlich für geradzahligen Grad

0.18 Symmetrie

Bsp. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 7$
$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten vorkommen.
Bsp. $g(x) = x^5 - 7x^3 + x$
$g(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.

allgemein:
achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$
ansonsten: Symmetrie nicht erkennbar

Anwendung:
Bsp. $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+5}$
$h(-x) = \frac{3(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+5} = -\frac{3x^2+2x}{x^2+5} = -h(x)$
$\Rightarrow$ punktsymmetrisch

100/2

a $f(x) = -\boldsymbol{3x^4} - 0.2x^2 + 10$

b $f(x) = 3x + 4x^3 - x^2 = \boldsymbol{4x^3} - x^2 + 3x$

c $f(x) = 2(x-1) \cdot x^2 = \boldsymbol{2x^3} - 2x^2$

d $f(x) = (x+1)(x^3+1) = \boldsymbol{x^4} + x^3 + x + 1$

e $f(x) = -2(x^4 - x^3 - x^2) = -\boldsymbol{2x^4} + 2x^3 + 2x^2$

f $f(x) = x^2 \cdot (-6x - x^2) = -\boldsymbol{x^4} - 6x^3$

102/1

d $f(x) = x(x^2-5) = x^3 - 5x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

e $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$ nicht erkennbar

f $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

0.19 Kurvendiskussion

105/1

c

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

Ableitungen

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$

$f''(x) = 3x - 8$

$f'''(x) = 3$

Symmetrie

$f(-x) \neq f(x)$

$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

$f(-x) \neq -f(x)$

$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$

Nullstellen

$f(x) = 0 = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$

$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$

$L = \{0; 4\}$

Grenzverhalten

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x^3 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$

Extremstellen

$f'(x) = 0 = \dfrac{3}{2}x^2 - 8x + 8$

$x_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \dfrac{8 \pm 4}{3}$

$L = \{\dfrac{4}{3}; 4\}$

$f''(x_1) = f''(\dfrac{4}{3}) = -4 < 0 \quad HP(\dfrac{4}{3}|f(\dfrac{4}{3}))$

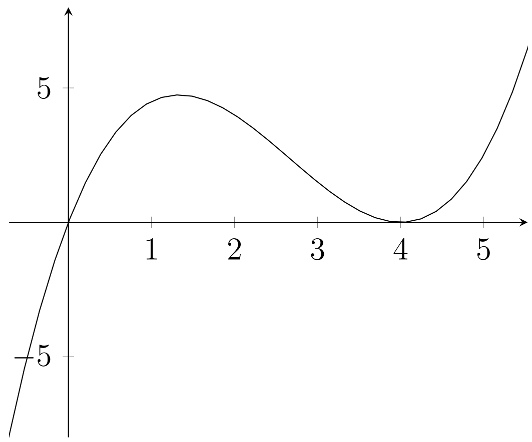
$f''(x_2) = f''(4) = 4 > 0 \quad TP(4|f(4))$

Wendestellen

$f''(x) = 0 = 3x - 8$

$L = \{\dfrac{8}{3}\}$

$f'''(x_1) = f'''(\dfrac{8}{3}) = 3 > 0 \quad RLWP(\dfrac{8}{3}|f(\dfrac{8}{3}))$



d

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 - 16$
Ableitungen
$f'(x) = 3x^2 + 12x$
$f''(x) = 6x + 12$
$f'''(x) = 6$
Symmetrie
$f(-x) \neq f(x)$
$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq x^3 + 6x^2 - 16$
$f(-x) \neq -f(x)$
$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq -x^3 - 6x^2 + 16$
Nullstellen
$f(x) = 0 = x^3 + 6x^2 - 16$
$x_1 = -2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 6x^2 \qquad\quad - 16\big) \div \big(x + 2\big) = x^2 + 4x - 8 \\
\underline{\;-x^3 - 2x^2\;} \\
\qquad\qquad 4x^2 \\
\qquad\quad \underline{-4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad\quad -8x - 16 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\;\; 8x + 16} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x_{2/3} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-8)}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{48}}{2}$
$L = \{-2; -5.46; 1.46\}$
Grenzverhalten
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Extremstellen

$f'(x) = 0 = 3x^2 + 12x \qquad | : x \Rightarrow x_1 = 0$

$3x + 12 = 0$

$L = \{0; -4\}$

$f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0 \quad TP(0|f(0))$

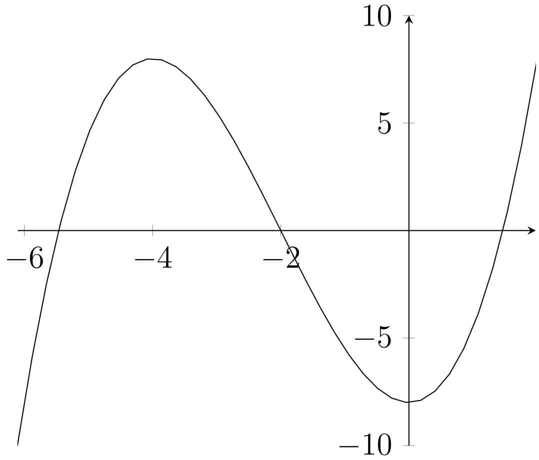
$f''(x_2) = f''(-4) = -12 < 0 \quad HP(-4|f(-4))$

Wendestellen

$f''(x) = 0 = 6x + 12$

$L = \{-2\}$

$f'''(x_1) = f'''(-2) = 6 > 0 \quad RLWP(-2|f(-2))$



106/5

$$f(x) = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.988 \cdot 190^{-6} \cdot x^4$$

a

Höhe
$f(0) = 187.5$
Breite
$f(x) = 0$
subst. $t = x^2$
$0 = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot t - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$
$t_{1/2} = \dfrac{1.579 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{(1.579 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6}) \cdot 187.5}}{2 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6})}$
$t_1 < 0 \qquad t_2 = 6520.923541$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{t_2} \approx \pm 80$
$2 \cdot 80 = 160$

b

$f'(x) = -3.158 \cdot 10^{-2} \cdot x - 7.952 \cdot 10^{-6} \cdot x^3$
$f'(80) = -2.5264 - 4.071424 \approx -6.6$
$atan(-6.6) \approx -81°$

c

$f(19) = 187.5 - 5.70019 - 0.259078148 \approx 181$
vertikaler Abstand: $187.5 - 181 = 6.5 < 10$
$f(9) - 10 = 177.5 - 1.579 - 0.01988 \approx 176.2$

0.19.1 Tangente und Anwendungen

Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung

$f(x) = y = m \cdot x + b$
Stelle $u \qquad f'(u) = m \qquad f(u) = y$
$f(u) = f'(u) \cdot u + b \quad \Rightarrow \quad b = f(u) - f'(u) \cdot u$
$t(x) = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$
$= f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
$n(x) = -\dfrac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

108/5

a

$$f(x) = x^2 - x; \quad B(-2|6) \quad u = -2$$
$$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(u) = -5$$
$$t(x) = -5 \cdot (x + 2) + 6 = -5x - 4$$
$$n(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 2) + 6 = \frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$$

b

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2; \quad B(4|3) \quad u = 4$$
$$f'(x) = -4x^{-2} \quad f'(u) = -\frac{1}{4}$$
$$t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 3 = -\frac{1}{4}x + 4$$
$$n(x) = 4 \cdot (x - 4) + 3 = 4x - 13$$

Exkurs: Quadratische Ergänzung

führt auf die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

z. B. $f(x) = x^2 - x$
$= x^2 - x + 0.25 - 0.25$
$= (x - 0.5)^2 - 0.25$
Scheitelpunkt $S(0.5| - 0.25)$

z. B. $g(x) = 4x^2 - 3x + 8$
$= 4(x^2 - \frac{3}{4}x) + 8$
$= 4(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}) + 8$
$= 4(x - \frac{3}{8})^2 - 4(\frac{9}{64}) + 8$
$= 4(x - \frac{3}{8})^2 + \frac{137}{16}$
Scheitelpunkt $S(\frac{3}{8}|\frac{137}{16})$

nimm den Koeffizienten (-1), halbiere ihn (-0.5) und quadriere anschließend (0.25).

109/10

$$f(x) = y = 4 - \frac{1}{2}x^2$$
$$Y(0|6)$$
$$f'(x) = -x$$
$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} - x \cdot x_0 + 4$$
$$0 = \frac{1}{2}x_0^2 - 2 \qquad x_0 = \pm 2$$

109/11

$$f(x) = -0.002x^4 + 0.122x^2 - 1.8$$
Tiefster Punkt: $T(0|-1.8)$
Augen: $P(x_0|1.6)$
$$f'(x) = -0.008x^3 + 0.244x$$
$$t(x) = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 0.008u^3x + 0.224ux - 1.8$$
$$t(0) = -1.8 = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 1.8 \qquad L = \{0; \pm\sqrt{\frac{61}{3}}\}$$
$$t(x) = 0.366752x - 1.8 \quad fuer\ u = \sqrt{\frac{61}{3}}$$
$$1.6 = 0.366752x_0 - 1.8$$
$$x_0 = 9.2706$$

112/7

$$S(t) = -0.08t^3 + 3.5t^2 + 10.6t + 237$$

a

$$S'(t) = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

Die Ableitung gibt an, wie stark die Schulden ansteigen, also die Neuverschuldung pro Jahr.

b

$$S''(t) = -0.48t + 7$$
$$S''(t_0) = 0$$
$$t_0 = 14.58\overline{3} \quad (um\ 1994)$$

c

$$S'(t_0) = 0 = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$
$$t_0 = \frac{1}{12}(175 + \sqrt{36985}) \approx 30.6 \quad (um\ 2010)$$
$$S''(t_0) \approx -7.69 < 0 \quad \Rightarrow \quad Hochpunkt$$

d Nicht die Staatsschulden, sondern die Neuverschuldung, nahm ab.

111/3

$$f(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

a

$$f(t) = 0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t \qquad L = \{0; 24\}$$

$$f'(t) = 0 = 0.75t^2 - 24t + 144 \qquad L = \{8; 24\}$$
$$f''(t) = 1.5t - 24$$
$$f''(8) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad HP$$
$$f''(24) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

$$f''(t) = 0 = 1.5t - 24 \qquad L = \{16\}$$
$$f'''(t) = 1.5 > 0 \quad \Rightarrow \quad RLWP$$

b

$$\text{Hälfte d. Maximalwerts} = \frac{f(8)}{2} = \frac{512}{2} = 256$$
$$f(t) = 256 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$
$$0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$\begin{array}{l}
\left(\tfrac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 256\right) \div (t - 16) = \tfrac{1}{4}t^2 - 8t + 16 \\
\underline{-\tfrac{1}{4}t^3 + 4t^2} \\
\qquad -8t^2 + 144t \\
\qquad \underline{8t^2 - 128t} \\
\qquad\qquad 16t - 256 \\
\qquad\qquad \underline{-16t + 256} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$L = \{2.1436; 16; (29.856)\}$$

$f_2(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$
$f_2'(t) = f'(t) = 0.75t^2 - 24t + 144$
$f_2'(2.1436) \approx 96 > 0$
$f_2'(16) = -48 < 0$
$(f_2'(29.856) \approx 96 > 0)$

Zeitraum: 2.1436 bis 16

Teil II

11/2

112/5

$$O(t) = -\frac{1}{300}(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700) \qquad t \in [0; 24]$$

a

$$O'(t) = \frac{1}{100}(-t^2 + 24t - 108) = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{-2} = \frac{-24 \pm 12}{-2} = 12 \pm 6$$
$$t_1 = 6 \qquad t_2 = 18$$

$$O''(t) = \frac{12 - t}{50}$$
$$O''(t_1) = \frac{6}{50} > 0 \quad \Rightarrow \quad TP(6|O(6) = 16.12)$$
$$O''(t_2) = \frac{-6}{50} < 0 \quad \Rightarrow \quad HP(18|O(18) = 19)$$

b Die Steigung der Wendetangente gibt an, wie sich die Temperaturänderung ändert (Beschleunigung).