

Mathe LK Rh

Tim D.

MSS 2017-20

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>11/1</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Terme, Gleichungen, Ungleichungen</b>	<b>5</b>
1.1	Pascalsches Dreieck . . . . .	5
1.2	pq-Formel . . . . .	5
1.3	abc-Formel . . . . .	6
1.4	Satz von Vieta . . . . .	6
1.5	Binomischer Lehrsatz . . . . .	7
1.6	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	7
1.6.1	Gleichung lösen durch Substitution . . . . .	7
1.7	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen . . . . .	8
1.7.1	Potenz- und Wurzelgesetze . . . . .	8
1.7.2	Logarithmengesetze . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Funktion - Relation - Zahlenfolge</b>	<b>10</b>
2.1	Zahlenfolgen . . . . .	10
2.2	Monotonie, Beschränktheit . . . . .	12
2.3	Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion . . . . .	14
2.3.1	Grenzwerte . . . . .	16
2.3.2	Grenzwerte von Funktionen: $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ; $\lim_{x \rightarrow a}$ . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Analysis</b>	<b>22</b>
3.1	Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit . . . . .	22
3.2	Stetigkeit einer Funktion an der Stelle $x_0$ . . . . .	24
3.3	Polynomdivision . . . . .	26
3.4	Punktprobe . . . . .	26
3.5	Mittlere Änderungsrate . . . . .	27
3.6	Tangentensteigung, Ableitung . . . . .	29
3.6.1	Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten . . . . .	29
3.6.2	Ableitung . . . . .	30
3.7	Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung . . . . .	31
3.8	Ableitungsfunktion . . . . .	34

3.9	Nullstellen . . . . .	39
3.9.1	Mehrfache Nullstellen . . . . .	40
3.10	Hoch-, Tief- und Sattelpunkte . . . . .	44
3.11	2. Ableitungsfunktion . . . . .	47
3.12	Wendepunkte . . . . .	48
3.13	Nullstellen: Polynomdivision . . . . .	55
3.14	Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .	60
3.15	Symmetrie . . . . .	60
3.16	Kurvendiskussion . . . . .	62
3.17	Tangente und Anwendungen . . . . .	67
3.17.1	Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung . . . . .	67
<b>II</b>	<b>11/2</b>	<b>71</b>
3.18	Optimieren unter Nebenbedingungen . . . . .	72
3.19	Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .	76
3.19.1	Anwendungen des Newton-Verfahrens . . . . .	78
3.20	AB Kurvenuntersuchungen . . . . .	85
3.20.1	Ortslinie . . . . .	87
3.21	Wiederholung . . . . .	90
3.22	Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	91
3.22.1	Vielfachheit der Lösungen von (geniometrischen) Gleichungen . . . . .	91
3.22.2	Die allgemeine Sinusfunktion . . . . .	93
3.22.3	AB Die Funktionen $f: x \mapsto a \cdot \sin(b(x - c))$ und ihre Graphen . . . . .	94
3.22.4	Ableitung der Sinusfunktion . . . . .	95
3.23	Neue Funktionen aus alten Funktionen . . . . .	99
3.23.1	Ableitungsregeln . . . . .	99
3.24	Exponentialfunktionen - Ableitung . . . . .	106
3.24.1	Basis $\neq e$ . . . . .	109
3.25	Wiederholung . . . . .	114
3.25.1	Sinusfunktionen und Newton-Verfahren . . . . .	114
3.25.2	Produktregel . . . . .	115
3.25.3	Quotientenregel . . . . .	116
3.25.4	Kurvendiskussion . . . . .	117
3.26	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	120
3.26.1	Gauß-Verfahren . . . . .	121
3.26.2	Matrix-Schreibweise . . . . .	123
3.26.3	Steckbriefaufgaben . . . . .	124
3.26.4	Funktionenschar . . . . .	127

<b>4</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>131</b>
4.1	Untersumme - Obersumme . . . . .	132
4.1.1	Obersumme/Untersumme $\rightarrow \lim \rightarrow$ Integral . . . . .	134
4.2	Das bestimmte Integral . . . . .	135
4.3	Berechnung von Integralen, Hauptsatz . . . . .	136
4.3.1	Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) . . . . .	136
4.4	Integrale lösen - Anwendung . . . . .	137
<b>III</b>	<b>12/1</b>	<b>140</b>
4.5	Stammfunktion bilden, integrieren . . . . .	141
4.6	bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral . . .	141
4.6.1	Integralfunktion . . . . .	143
4.7	Rechenregeln für Integrale . . . . .	143
4.8	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	146
4.9	Integral und Flächeninhalt . . . . .	148
4.9.1	Flächeninhalt, uneigentliche Integrale . . . . .	150
4.10	Integration von Produkten: partielle Integration . . . . .	154
4.11	Integration durch Substitution . . . . .	157
4.11.1	Wiederholung . . . . .	161
4.12	Rotationskörper . . . . .	163
4.12.1	Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern . . . . .	163
<b>5</b>	<b>Analytische Geometrie</b>	<b>167</b>
5.1	Punkte und Vektoren . . . . .	167
5.1.1	Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem . . . . .	167
5.2	Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren . . . . .	169
5.2.1	Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl . . . . .	169
5.2.2	Vektorzüge und Linearkombinationen . . . . .	174
5.3	Geraden in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	177
5.3.1	Kollinearität . . . . .	182
5.3.2	Lage zweier Geraden . . . . .	182
5.3.3	Parameterpunkte und -geraden . . . . .	187
5.4	Abstand zweier Punkte, Vektorlänge, Streckenlänge . . . . .	188
5.4.1	Einheitsvektor . . . . .	190
5.5	Produkte zweier Vektoren . . . . .	193
5.5.1	Skalarprodukt . . . . .	193
5.6	Vektorräume . . . . .	202
5.6.1	Basis . . . . .	204
5.7	Lineare Abhängigkeit, Unabhängigkeit . . . . .	206

Teil I

11/1

# Kapitel 1

## Terme, Gleichungen, Ungleichungen

### 1.1 Pascalsches Dreieck

$n = 0:$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

### 1.2 pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## 1.3 abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 1.4 Satz von Vieta

$$0 = x^2 + px + q$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{\text{Diskriminante}}}$$

\*Diskriminante:

$> 0 \Rightarrow$  zwei Lösungen

$= 0 \Rightarrow$  eine Lösung

$< 0 \Rightarrow$  keine Lösung

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\dots} - \frac{p}{2} - \sqrt{\dots} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\dots}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\dots}\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = \frac{1}{9}\left(x^2 \underbrace{-6}_{x_1+x_2} x \underbrace{-72}_{x_1 \cdot x_2}\right)$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -6$$

$$0 = \frac{1}{9} \underbrace{(x - 12)(x + 6)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

## 1.5 Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

### Beispiele

$$n = 2$$

$$(a + b)^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k}$$

Drei Summanden:  $k = 0$ ;  $k = 1$ ;  $k = 2$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\binom{5}{0} a^2}_{k=0} + \underbrace{\binom{5}{1} ab}_{k=1} + \underbrace{\binom{5}{2} b^2}_{k=2} \\ &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$n = 5$$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} \cdot b^k \\ &= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

## 1.6 Gleichungen und Ungleichungen

### 1.6.1 Gleichung lösen durch Substitution

**Beispiel**  $0 = 2x^4 - 3x^2 - 5$

Lösungsmenge der Gleichung = Menge der Nullstellen (Schnitte mit der x-Achse) der Funktion mit gleichem Funktionsterm



substituiere  $x^2 = t$

$$0 = 2t^2 - 3t - 5$$

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 2.5, \quad t_2 = -1$$

resubstituiere

$$t_1 = x^2 = 2.5 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$x_1 = \sqrt{2.5}; \quad x_2 = -\sqrt{2.5}$$

$$t_2 = x^2 = -1 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

keine Lösung

$$L = \{\sqrt{2.5}; -\sqrt{2.5}\}$$

## 1.7 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

### 1.7.1 Potenz- und Wurzelgesetze

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$$

### 1.7.2 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = \log_a(x) \cdot y$$

$$a^x = 10^{\log(a) \cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

# Kapitel 2

## Funktion - Relation - Zahlenfolge

Eine Funktion ist eine Zuordnung (Zahlen  $x \rightarrow$  Zahlen  $y$ ), die jeder Zahl  $x$  der Definitionsmenge genau eine Zahl  $y$  der Wertemenge zuordnet.

Darstellung:

- Funktionsgleichung, z. B.  $f(x) = y = \underbrace{2x^2 + 5}_{\text{Funktionsterm}}$
- Graph
- Wertetabelle

Eine Relation ist eine allgemeine Zuordnung von  $x$  zu  $y$ ,  
z. B.  $x = 3$  (senkrechte Gerade),  $x^2y = y^2 + x^3$

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit  $x \in \mathbb{N}$

### 2.1 Zahlenfolgen

Definitionsmenge  $D = \mathbb{N}_0$

Wertemenge  $W = \mathbb{R}$

$a_n = y = \dots \leftarrow \text{Funktionsterm}$

Angabe eines Funktionsterms für alle Zahlen nennt man explizite Darstellung der Zahlenfolge.

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad \dots; \quad a_{100} = 2^{-100}$$

Berechnung der Folgezahlen Schritt für Schritt nennt man implizite Darstellung der Zahlenfolge. (Rekursion)

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5; \quad a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$$

**16/1**

a

$$a_n = \frac{2n}{5}$$

$$a_1 = \frac{2}{5}; \quad a_2 = \frac{4}{5}; \quad a_3 = 1\frac{1}{5}; \quad a_4 = 1\frac{2}{5}; \quad a_5 = 2;$$

$$a_6 = 2\frac{2}{5}; \quad a_7 = 2\frac{4}{5}; \quad a_8 = 3\frac{1}{5}; \quad a_9 = 3\frac{3}{5}; \quad a_{10} = 4$$

d

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad a_4 = \frac{1}{16}; \quad a_5 = \frac{1}{32};$$

$$a_6 = \frac{1}{64}; \quad a_7 = \frac{1}{128}; \quad a_8 = \frac{1}{256}; \quad a_9 = \frac{1}{512}; \quad a_{10} = \frac{1}{1024}$$

f

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -1; \quad a_4 = 0; \quad a_5 = 1;$$

$$a_6 = 0; \quad a_7 = -1; \quad a_8 = 0; \quad a_9 = 1; \quad a_{10} = 0$$

16/2

a

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 + a_n$$

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 5; a_4 = 7; a_5 = 9;$$

$$a_6 = 11; a_7 = 13; a_8 = 15; a_9 = 17; a_{10} = 19$$

$$a_n = 2n - 1$$

b

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 4; a_4 = 8; a_5 = 16;$$

$$a_6 = 32; a_7 = 64; a_8 = 128; a_9 = 512; a_{10} = 1024$$

$$a_n = 2^{n-1}$$

d

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (\text{Fibonacci})$$

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = 2; a_5 = 3;$$

$$a_6 = 5; a_7 = 8; a_8 = 13; a_9 = 21; a_{10} = 34$$

$$a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

## 2.2 Monotonie, Beschränktheit

16/5

$$a_n = 200000\text{€} \cdot 0.98^n$$

16/7

a

$$V_0 = 1^3 = 1$$

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{8}V_0 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V_0\right) = \frac{9}{8} + \frac{1}{64} = \frac{73}{64}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V_0\right)\right) = \frac{73}{64} + \frac{1}{512} = \frac{585}{512}$$

b

$$V_n = \sum_{k=0}^n 8^{-k}$$

Streng monoton fallende Zahlenfolge

z. B.  $a_n$  von  $16/5$  ist eine Folge mit der Eigenschaft  $a_n < a_{n-1}$

Streng monoton steigende Zahlenfolge

z. B.  $V_n$  von  $16/7$  ist eine Folge mit der Eigenschaft  $a_n > a_{n-1}$

Ohne „streng“entsprechend  $\leq$  bzw.  $\geq$

18/1

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 2; a_2 = 1\frac{1}{2}; a_3 = 1\frac{1}{3}; a_4 = 1\frac{1}{4}; a_5 = 1\frac{1}{5}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt (2); nach unten beschränkt (1)

b

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{3}{4}; a_2 = \frac{9}{16}; a_3 = \frac{27}{64}; a_4 = \frac{81}{256}; a_5 = \frac{243}{1024}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt ( $\frac{3}{4}$ ); nach unten beschränkt (0)

c

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_1 = -1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = 1; a_5 = -1$$

nicht monoton

nach oben beschränkt (1); nach unten beschränkt (-1)

d

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = 0; a_2 = \frac{3}{2}; a_3 = \frac{2}{3}; a_4 = \frac{5}{4}; a_5 = \frac{4}{5}$$

nicht monoton

nach oben beschränkt ( $\frac{3}{2}$ ); nach unten beschränkt (0)

e

$$a_n = \frac{8n}{n^2 + 1}$$

$$a_1 = 4; a_2 = \frac{16}{5}; a_3 = \frac{12}{5}; a_4 = \frac{32}{17}; a_5 = \frac{20}{13}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt (4); nach unten beschränkt (0)

		$a_n$	$n$	$(-1)^n \cdot n$	$(-1)^n : n$	$1 + 1 : n$
18/2	↑ beschränkt	✗	✗	✓	✓	
	↓ beschränkt	✓	✗	✓	✓	
	beschränkt	✗	✗	✓	✓	
	monoton	✓	✗	✗	✓	

## 2.3 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion

Der Grenzwert  $g$  ist eine reelle Zahl, der sich die Folgenwerte (Funktionswerte) annähern, sodass die Folgenwerte (Funktionswerte) vom Grenzwert praktisch nicht mehr unterschieden werden können.

z. B.

$$a_n = n^{-1}$$

$$a_n = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}$$

$a_n$  hat den Grenzwert  $g = 0$ , da  $a_n$  auch streng monoton fallend ist, ist  $s = 0$  die größte untere Schranke (=„Infimum“).

Vorgehen

Ich gebe eine Genauigkeitsschranke, z. B.  $\epsilon = 10^{-3}$  vor (kleine positive Zahl). Zu  $\epsilon$  finde ich ein  $n_\epsilon = 1001$ . Alle Folgenwerte mit  $n \geq n_\epsilon = 1001$  (also  $a_{1001}, a_{1002}, \dots$ ) liegen näher beim Grenzwert  $g = 0$  als  $\epsilon = 10^{-3}$  angibt. Finde ich zu jeder möglichen Genauigkeitsschranke  $\epsilon$  solch ein  $n_\epsilon$ , so ist  $g$  der Grenzwert. Ist diese Bedingung erfüllt, so notiert man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{hier: } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$$

22/2 (Abweichung  $< \epsilon = 0.1$ )

a

$$a_n = \frac{1+n}{n}$$
$$\left| \frac{1+n}{n} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 10$$

b

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$$
$$\left| \frac{n^2 - 1}{n^2} - 1 \right| < 0.1$$
$$\epsilon > \sqrt{10} \approx 3.162 \quad (\text{ab } 4)$$

c

$$a_n = 1 - \frac{100}{n}$$
$$\left| 1 - \frac{100}{n} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 1000$$

d

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}$$
$$\left| \frac{n-1}{n+2} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 28$$

e

$$a_n = \frac{2n^2 - 3}{3n^2}$$
$$\left| \frac{2n^2 - 3}{3n^2} - 1 \right| < 0.1$$

→ keine Lösung



zu e

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{2n^2 - 3}{3n^2} - 1 \right| < 0.1 \\
 & 1 - \frac{2n^2 - 3}{3n^2} < 0.1 \quad | - 0.1 + \frac{2n^2 - 3}{3n^2} \\
 & 0.9 < \frac{2n^2 - 3}{3n^2} \quad | \cdot 3n^2 \\
 & 2.7n^2 < 2n^2 - 3 \quad | - 2n^2 \\
 & 0.7n^2 < -3 \quad | \div 0.7 \\
 & n^2 < -\frac{30}{7} \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\
 & n < \sqrt{-\frac{30}{7}} \quad \text{und} \quad n < -\sqrt{-\frac{30}{7}} \\
 & \Rightarrow \text{nicht lösbar}
 \end{aligned}$$

### 2.3.1 Grenzwerte

Eine Zahlenfolge mit Grenzwert ist eine konvergente Folge. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert ist eine divergente Folge. Eine Nullfolge hat den Grenzwert  $g = 0$ .

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad g = 1 \quad \rightarrow \quad a_n^* = \frac{n}{n+1} - 1 \quad g = 0 \quad (\text{Nullfolge})$$

22/4

a

$$\begin{aligned}
 & \left| \left( \frac{3n-2}{n+2} \right) - 3 \right| < \epsilon \\
 & \left| \frac{-8}{n+2} \right| < \epsilon \quad | x^{-1} \\
 & \frac{n+2}{8} > \frac{1}{\epsilon} \quad | \cdot 8 \\
 & n+2 > \frac{8}{\epsilon} \quad | - 2 \\
 & n > \frac{8}{\epsilon} - 2
 \end{aligned}$$

b

$$|(\frac{n^2 + n}{5n^2}) - 0.2| < \epsilon$$

$$\frac{n}{5n^2} < \epsilon \quad | \cdot 5$$

$$n^{-1} < 5\epsilon \quad | x^{-1}$$

$$n > \frac{1}{5\epsilon}$$

c

$$|(\frac{2^{n+1}}{2^n + 1}) - 2| < \epsilon$$

$$|\frac{-2}{2^n + 1}| < \epsilon \quad | \div 2; x^{-1}$$

$$2^n + 1 > \frac{2}{\epsilon} \quad | - 1$$

$$2^n > \frac{2}{\epsilon} - 1 \quad | \log; \div \log(2)$$

$$n > \frac{\log(\frac{2}{\epsilon} - 1)}{\log(2)}$$

d

$$|(\frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1}}) - \frac{3}{2}| < \epsilon$$

$$|\frac{3 \cdot 2^n + 2 - 3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}| < \epsilon$$

$$\frac{2}{2^{[n+1]}} < \epsilon$$

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon \quad | x^{-1}$$

$$2^n > \frac{1}{\epsilon} \quad | \log \div \log(2)$$

$$n > \frac{-\log(\epsilon)}{\log(2)}$$

24/2

a

$$a_n = \frac{1+2n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{1}{n}+n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

b

$$a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10} = \frac{7+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n^3}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n^3}} = \frac{7+0}{1-0} = 7$$

f

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) \div \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

g

$$a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} = \left(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}\right)^4$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}\right)\right)^4 = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1}\right)^4 = \left(\frac{0-1}{0+1}\right)^4 = 1$$

24/3

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{0.5} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 0.5} = \frac{1 - 0}{0.5} = 2$$

c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n}{1 + 4^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - 1}{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + 1} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(\frac{2}{3})^n + 3}{2} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$$

### 2.3.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ; $\lim_{x \rightarrow a}$

$$f(x) = y = \frac{3x^2 - 3}{(x+1)(x-4)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{-1; 4\}}_{\text{Nullstellen des Nenners}}$$

$x = -1 \rightarrow$  Nullstelle des Zählers und Nenners

$x = 4 \rightarrow$  Nullstelle des Nenners

$$f(x) = y = \frac{3(x^2 - 1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-3}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \neq \lim_{x \rightarrow -\infty}$$

**Beispiel**  $f(x) = 2^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 3}{x - 4} = \frac{3(-1) - 3}{-1 - 4} = \frac{-6}{-5} = 1.2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 3}{x - 4} = ?$$

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	-87	-897	-8997	93	903	9003

$$\lim_{x \nearrow 4} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \searrow 4} f(x) = +\infty$$



$x = 4 \rightarrow$  Unendlichkeitsstelle, ein Pol mit Vorzeichenwechsel

Der Punkt  $(-1|1.2)$  gehört nicht zum Graphen. Es ergibt sich ein Loch im Graphen.

28/6

a

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	1	1	1	1

b

$$f(x) = \frac{x^3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	-0.01	-0.0001	0.0001	0.01

c

$$f(x) = \frac{x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	100	10000	10000	100

d

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^0}{3^0} = 1$$

e

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^0 - 1}{3^0} = 0$$

# Kapitel 3

## Analysis

### 3.1 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit

$$D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < -5 \\ x^2 + 10 & \text{für } -5 \leq x < 1 \\ -x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Abschnittsweise definierte Funktionen  $\rightarrow$  Für verschiedene Abschnitte der Zahlengeraden von  $\mathbb{R}$  sollen unterschiedliche Funktionsterme gelten.

#### Einschub: Ganzrationale Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

**z. B.**  $f(x) = 3x^4 + 5x - 7$

$$n = 4 \quad (\text{Grad } n \in \mathbb{N})$$

$$a_4 = 4$$

$$a_3 = a_2 = 0$$

$$a_1 = 5$$

$$a_0 = -7$$

Grad der ganzrationalen Funktion ist die höchste Potenz, bspw. 4

Funktionsterm = Polynom

Die Stetigkeit einer Funktion beschreibt die Tatsache, ob man den Graph der Funktion ohne abzusetzen zeichnen kann.

**Beispiel:**  $f(x) = x^3$



$f(x)$  ist überall stetig

Allgemein gilt:

Ganzrationale Funktionen sind überall, d. h.  $-\infty < x < \infty$ , stetig.

Untersuche  $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$  auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$$x_1 = -5; x_2 = 1$$

$$\lim_{x \nearrow -5} f(x) = -10$$

$$\lim_{x \searrow -5} f(x) = -35$$

$\Rightarrow$  unterschiedliche Grenzwerte bedeuten  $f(x)$  ist bei  $x = -5$  unstetig

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 11$$

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = -1$$

$\Rightarrow$  unstetig bei  $x = 1$



28/9

a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 3 \\ 12 - x & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 3} f(x) = 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \searrow 3} f(x) = 12 - 3 = 9$$

$\Rightarrow$  stetig

b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{für } x \leq -1 \\ 2^x - 3 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$$

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = 2^{-1} - 3 = -2.5$$

$\Rightarrow$  unstetig

28/11

•

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sin(\infty) = -1 \text{ bis } +1 \quad \Rightarrow \text{kein Grenzwert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sin(0) = 0$$

### 3.2 Stetigkeit einer Funktion an der Stelle $x_0$

Eine Funktion ist stetig bei  $x = x_0$ , wenn Folgendes gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

29/4

a  $a_n = \frac{n^2 - 7n - 1}{10n^2 - 7n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{10}$

b  $a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{5n^3 - 8n + 5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$

$$\text{f } a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\text{g } a_n = \frac{3^n+1}{5^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**29/5**

$$\text{a } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+100} - \sqrt{n}) = 0$$

$$\text{b } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+10} - \sqrt{n})) = 5$$

$$\text{c } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n) = \frac{3}{4}$$

**30/10**

$$\text{a } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^4-16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{8}$$

**30/11**

**a**

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = x-1 = 0$$

**c**

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2$$

**29/6**  $a_n = 0.95^n$

$$\text{a } a_5 = 0.95^5 = 0.77$$

$$\text{b } 0.5 = 0.95^n \Rightarrow n = \frac{\log(0.5)}{\log(0.95)} \approx 13.5 \quad n = 13$$

**c**

$$s(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_k$$

$$s(5) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$

$$= 1 + 1.9 + 1.805 + 1.71475 + 1.6290125 = 8.0487625$$

### 3.3 Polynomdivision

30/11

d

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} \\ (x^6 - 1) \div (x^2 - 1) & \\ \begin{array}{r} ( \quad x^6 \quad \quad \quad - 1 ) \div (x^2 - 1) = x^4 + x^2 + 1 \\ - x^6 + x^4 \\ \hline x^4 \\ - x^4 + x^2 \\ \hline x^2 - 1 \\ - x^2 + 1 \\ \hline 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$$

### 3.4 Punktprobe

(erfüllt ein Punkt eine Gleichung)

z. B.  $P(2|3)$

$$f(x) = y = 2x^2 - 5x + 3$$

Setze für  $x$  die Zahl 2 ein

$$f(x) = 8 - 10 + 3 = 1 \neq 3$$

$\Rightarrow P$  gehört nicht zum Graphen von  $f$

38/4

a Höhenmeter: 250m

Streckenkilometer: 10km

b Gesamtanstieg: 750m

c Bei Streckenkilometer 25: Achsensymmetrie zur y-Achse

39/7

a 1.8m

b  $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 7.42\}$

c  $f(2.5) = 2.425$

39/11

a  $f(x) = 1.9879 \cdot 10^{-4} + 86$

b  $f(-995.5) = f(995.5) = 283$   
 $f(0) = 86$

c  $D = \{x \in \mathbb{R} | -995.5 \leq x \leq 995.5\}$

### 3.5 Mittlere Änderungsrate



Eine **Sekante**  $s$  ist eine Gerade, die eine Kurve in 2 (oder mehr) Punkten schneidet.

Eine **Sehne**  $s^*$ , Teil einer Sekante, ist eine Strecke, die zwei Kurvenpunkte verbindet.

Eine **Tangente**  $t$  ist eine Gerade, die die Kurve in einem Punkt berührt.

Eine **Passante**  $p$  ist eine Gerade, die die Kurve nicht schneidet.

$$P(1|3) \quad Q(10|8)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{9} \text{ (Steigung der Sekante durch } P \text{ und } Q)$$

Die Sekantensteigung  $m$  heißt mittlere Änderungsrate der Funktion  $f$  zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$ .

$$P(1|3) \quad f(1) = 3$$

$$Q(10|8) \quad f(10) = 8$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 10 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = h = 9$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{\underbrace{x_2 - x_1}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Differenzenquotient

$$\text{Beispielrechnung } f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 10$$

$$h = x_2 - x_1 = 8$$

$$m = \frac{f(10) - f(2)}{8} = \frac{175 - 7}{8} = 21$$

$$41/2 \quad \begin{array}{c|cccccccc} t \text{ [d]} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ h \text{ [mm]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

$$a \quad m = \frac{h(9) - h(1)}{8} = \frac{7}{8}$$

$$b \quad m = \frac{h(3) - h(1)}{2} = 0$$

$$d \quad m = \frac{h(6) - h(4)}{2} = 1$$

$$c \quad m = \frac{h(9) - h(7)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$41/1 \quad f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

$$a \quad m = \frac{f(1) - f(0.1)}{0.9} = -10$$

$$b \quad m = \frac{f(12) - f(2)}{10} = -\frac{1}{24}$$

$$c \quad m = \frac{f(0.02) - f(0.01)}{0.01} = -5000$$

$$d \quad m = \frac{f(1000) - f(100)}{900} = -100000^{-1}$$

## 3.6 Tangentensteigung, Ableitung



**H** Hochpunkt (waagerechte Tangente)

**W** Wendepunkt (maximale/minimale Steigung)

**T** Tiefpunkt (waagerechte Tangente)

**U** Unstetigkeit (keine Tangentensteigung)

**K** Knickstelle (keine Tangentensteigung)

**S** Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

### 3.6.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

$$f(x) = y = x^2 \quad x_0 = 2$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \quad (\text{Sekante})$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \quad (\text{Tangente})$$

### 3.6.2 Ableitung

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 \quad x_0 = 4 \\m_{\text{Sekante}} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\&= \frac{2(4 + h)^3 - 2 \cdot 4^3}{h} \\&= \frac{128 + 96h + 24h^2 + 2h^3 - 128}{h} \\&= 96 + 24h + 2h^2\end{aligned}$$

Sekante durch  $P(4|f(4))$ ,  $Q(6|f(6)) \Rightarrow h = 2$

$$m = 96 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 152$$

Sekante durch  $P(4|f(4))$ ,  $Q(-1|f(-1)) \Rightarrow h = -5$

$$m = 96 + 24 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5)^2 = 26$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für  $h \rightarrow 0$ .

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{Sekante}} = \lim_{h \rightarrow 0} 96 + 24h + 2h^2 = 96$$

Die Ableitung der Funktion  $f(x) = 2x^3$  bei  $x = 4$  ist 96.

$$f'(4) = 96 \text{ (Tangentensteigung)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

46/6

$$\text{a } 10.15 \text{ Uhr: } m = \frac{500m}{15min} = 33.\bar{3} \frac{m}{min}$$

$$10.45 \text{ Uhr: } m = \frac{-500m}{15min} = -33.\bar{3} \frac{m}{min}$$

$$11.15 \text{ Uhr: } m = \frac{-1000m}{15min} = -66.\bar{6} \frac{m}{min}$$

b am größten:  $\sim 10.05$  Uhr  
am kleinsten:  $\sim 11.20$  Uhr

48/3

$$\begin{aligned}\text{a } x_0 &= 4 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b } x_0 &= 3 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(3+h)^2 - (-2) \cdot 3^2}{h} &= -12\end{aligned}$$

$$\text{e } x_0 = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^{-1} - (-1)^{-1}}{h} = -1$$

$$\text{h } x_0 = 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h+2) - (-3+2)}{h} = -1$$

$$\text{i } x_0 = 7$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-4}{h} = 0$$

### 3.7 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung

$$f(x) = 5x^3 \quad P_1(2|f(2)) \quad P_2(4|f(4))$$

Sekantengleichung

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{320 - 40}{2} = 140$$

$$b = -m \cdot x + y = -140 \cdot 2 + 40 = -240$$

$$s(x) = 140x - 240$$

Tangentengleichung im Punkt  $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(2+h)^3 - 40}{h} = 60$$

$$b = -m \cdot x + y = -60 \cdot 2 + 40 = -80$$

$$t(x) = 60x - 80$$

Normalengleichung im Punkt  $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \frac{-1}{m_t}$$

$$m_n \cdot m_t = -1$$

$$m_t = 60$$

$$m_n = -\frac{1}{60}$$

$$b = -m \cdot x + y = 40 \frac{1}{30}$$

$$n(x) = -\frac{1}{60}x + 40 \frac{1}{30}$$



Zwei Geraden mit  $m_1$  und  $m_2$  sind orthogonal, wenn gilt  $m_1 \cdot m_2 = -1$

49/14

a

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.5x^2 & P(1|f(1) = 0.5) \\m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{2}h) = 1 \\b_t &= -m_t \cdot x + y = -\frac{1}{2} \\y_t &= x - \frac{1}{2} \\m_n &= -\frac{1}{m_t} = -1 \\b_n &= -m_n \cdot x + y = 1.5 \\y_n &= -x + 1.5\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - 4 & P(-2|f(-2) = 4) \\m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2+h)^2 - 4 - 4}{h} = -8 \\b_t &= -m_t \cdot x + y = -12 \\y_t &= -8x - 12 \\m_n &= -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{8} \\b_n &= -m_n \cdot x + y = 4\frac{1}{4} \\y_n &= \frac{1}{8}x + 4\frac{1}{4}\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x} & P(0.5|f(0.5) = \sqrt{0.5}) \\
 m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0.5+h} - \sqrt{0.5}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 b_t &= -m_t \cdot x + y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 y_t &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 m_n &= -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \\
 b_n &= -m_n \cdot x + y = \sqrt{2} \\
 y_n &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^3 + 2 & P(2|f(2) = -6) \\
 m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)^3 + 2 + 6}{h} = -12 \\
 b_t &= -m_t \cdot x + y = 18 \\
 y_t &= -12x + 18 \\
 m_n &= -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{12} \\
 b_n &= -m_n \cdot x + y = -6\frac{1}{6} \\
 y_n &= \frac{1}{12}x - 6\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

**49/13**  $f(x) = -\frac{1}{x}$

a

$$\begin{aligned}
 &P(-1|f(-1) = 1) \\
 m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{-1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h + h^2} = 1 \\
 \alpha &= \text{atan}(m_t) = 45^\circ
 \end{aligned}$$

b

$$P(2|f(2) = -\frac{1}{2})$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2}}{2h + h^2} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 14.04^\circ$$

c

$$P(0.1|f(0.1) = -10)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{0.1+h} + 10}{h} = 100$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 89.43^\circ$$

49/12c

$$f(x) = -3\sqrt{x} \quad x_0 = 8$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3\sqrt{8+h} - (-3\sqrt{8})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\sqrt{72+9h} + \sqrt{72})(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}{h(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9}{-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72}}$$

$$= \frac{9}{-2\sqrt{72}} = \frac{3}{-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{32}}$$

## 3.8 Ableitungsfunktion

Die Ableitung von  $f(x)$  bei  $x_0$  ist eine lokale Eigenschaft der Funktion  $f(x)$ , also einer Stelle  $x_0$ . Allerdings sind unsere Funktionen fast überall differenzierbar. Ausnahmen sind Unstetigkeitsstellen und Knickstellen. Es gibt eine Funktion  $f'(x) = m_t(x)$  für alle Stellen  $x$ . Sie heißt Ableitungsfunktion.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{z. B. } f(x) = x^4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

$$\text{z. B. } f'(5) = 500$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$h(x) = x^3$$

$$h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

$$i(x) = a \cdot x^2$$

$$i'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2xh + ah^2 - ax^2}{h} = 2ax$$

$$j(x) = \sqrt{x}$$

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^{-1} - x^{-2}}{h} = -2x^{-3}$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

54/2

a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

b

$$f(x) = \frac{a}{x} + c$$
$$f'(x) = -ax^{-2}$$

c

$$f(x) = x^{c+1}$$
$$f'(x) = (c+1)x^c$$

d

$$f(x) = t^2 + 3t$$
$$f'(x) = 2t + 3$$

e

$$f(x) = x - t$$
$$f'(x) = 1$$

f

$$f(t) = x - t$$
$$f'(t) = -1$$

55/7

c

$$f(x) = 3x^2 + 3$$
$$f'(x) = 6x$$
$$P(0.5|f(0.5) = 3.75)$$
$$m = f'(0.5) = 3$$
$$b = -m \cdot x + y = 2.25$$
$$y = 3x + 2.25$$

d

$$f(x) = -x^3 + 2$$

$$f'(x) = -3x^2$$

$$P(2|f(2) = -6)$$

$$m = f'(2) = -12$$

$$b = -m \cdot x + y = 18$$

$$y = -12x + 18$$

$$\mathbf{59/6} \quad g(x) = 10 - 3x \Rightarrow m = -3$$

c

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^3$$

$$f'(x) = -\frac{3}{100}x^2$$

$$-3 = -\frac{3}{100}x^2$$

$$x = 10$$

$$P(10|f(10) = -20)$$

d

$$f(x) = bx^3 + c$$

$$f'(x) = 3bx^2$$

$$-3 = 3bx^2$$

$$x = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}|f(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}) = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} + c) \quad b < 0$$

**60/12**

$$H(t) = \begin{cases} 3.2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 3.2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 \leq t \leq 1.8 \\ 0 & \text{für } 1.8 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

a

$$H'(0.5) = 0$$

$$H'(1.5) = -10t + 10 = -5$$

$$H'(2.5) = 0$$

b

$$H'(1) = 0 = -10t + 10$$

$$H'(1.8) = -10t + 10 = -8 \neq H'(1.8) = 0$$

**67/3**

a

$$x^5 - 20x^3 + 64x = 0 \quad | \div x \Rightarrow x = 0$$

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \quad | t = x^2$$

$$t^2 - 20t + 64 = 0 \quad | pq$$

$$t_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 \quad | \text{resubst.}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{0; \pm 2; \pm 4\}$$

b

$$x^5 - 17x^3 + 16x = 0 \quad | \div x \Rightarrow x = 0$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \quad | t = x^2$$

$$t^2 - 17t + 16 = 0 \quad | pq$$

$$t_{1/2} = 8.5 \pm \sqrt{72.25 - 16} = 8.5 \pm 7.5 \quad | \text{resubst.}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{0; \pm 1; \pm 4\}$$

c

$$(x - \frac{2}{3})(x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1) = 0$$

$$x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1 = 0 \quad | t = x^2$$

$$t^2 - \frac{13}{6}t + 1 = 0 \quad | pq$$

$$t_{1/2} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{\frac{2}{3}; \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\}$$

d

$$\begin{aligned}
 (x^3 - 8)(x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5) &= 0 \\
 x^3 - 8 = 0 &\Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \\
 x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5 = 0 &\quad |t = x^2 \\
 t^2 - \frac{14}{3}t + 5 = 0 &\quad |pq \\
 t_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - 5} = \frac{7}{3} \pm \frac{2}{3} &\quad | \text{resubst.} \\
 x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}} \\
 L = \{2; \pm \sqrt{\frac{5}{3}}; \pm \sqrt{3}\}
 \end{aligned}$$

### 3.9 Nullstellen

Annahme:  $f(x) = 0$  habe  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3$ ;  $x_3 = 1$  als Lösungen,  $f(x)$  hat Grad 3.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x(x - 2)(x + 3)(x - 1) \\
 &= x^3 - 7x + 6 \text{ für } c = 1
 \end{aligned}$$

Würde ich die zusätzliche Nullstelle  $x_4 = 4$  als Linearfaktor in die Funktionsgleichung einfügen, so hätte ich eine Funktion 4. Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion mit Grad  $n$  hat maximal  $n$  Nullstellen. Funktionen mit ungeradzahigen Graden  $n = 1, 3, 5, 7 \dots$  haben mindestens eine Nullstelle. Solche mit geradzahigen Graden  $n = 2, 4, 6, 8 \dots$  haben keine Mindestzahl an Nullstellen.



### 3.9.1 Mehrfache Nullstellen

Beispiel  $f(x)$  habe  $x_1 = x_2 = 2$  und  $x_3 = 1$  als Nullstellen (Grad 3).



Berührungspunkt bei  $x = 2$ , außerdem Extrempunkt.

Finde ich eine doppelte Nullstelle, so liegt gleichzeitig an der Stelle ein Extrempunkt vor. Eine dreifache Nullstelle ist zusätzlich ein Sattelpunkt mit waagerechter Tangente.

67/5

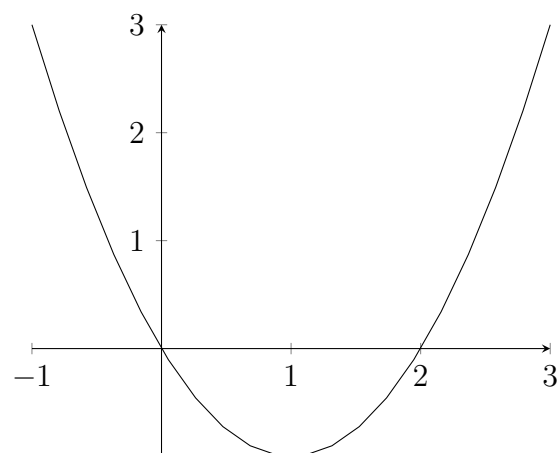
a

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{0; 2\}$$



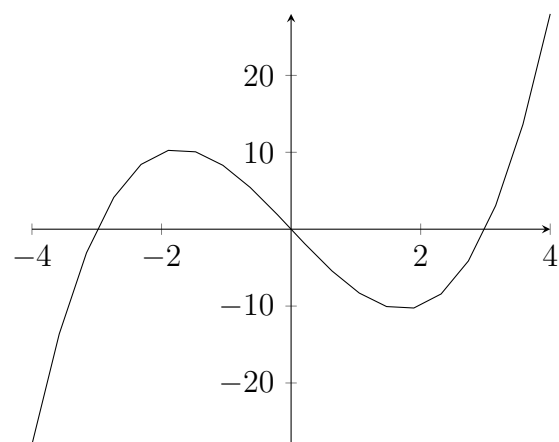
c

$$f(x) = x(x^2 - 9)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{0; \pm 3\}$$



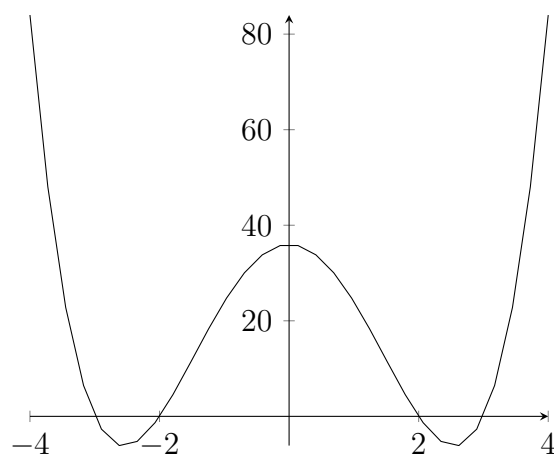
f

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$f(0) = 36$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{\pm 2; \pm 3\}$$



**68/13**  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a

$$\text{NS: } 0; -4; \frac{4}{5}$$

$$a = 5$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 0)(x + 4)(x - \frac{4}{5}) = a(x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 - 3\frac{1}{5}x) \\ &= 5x^3 + 16x^2 - 16x \end{aligned}$$

b

$$\text{NS: } -\frac{1}{3}; 3; \frac{10}{3}$$

$$a = 9$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x + \frac{1}{3})(x - 3)(x - \frac{10}{3}) = a(x^3 - 6x^2 - \frac{1}{9}x + 3\frac{1}{3}) \\ &= 9x^3 - 72x^2 - x + 30 \end{aligned}$$

c

$$\text{NS: } 0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$$

$$a = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-0)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = a(x^3 - 2x) \\ &= x^3 - 2x \end{aligned}$$

d

$$\text{NS: } 0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a = 5$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-0)(x+\frac{1}{\sqrt{5}})(x-\frac{1}{\sqrt{5}}) = a(x^3 - \frac{1}{5}x) \\ &= 5x^3 - x \end{aligned}$$

$$\mathbf{68/12} \quad f(x) = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

a

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 4(-0.08) \cdot 1.44}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.88}{-0.16}$$

$$(x_1 = -2) \quad x_2 = 9$$

b

$$1.44 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x$$

$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.56}{-0.16}$$

$$(x_1 = 0) \quad x_2 = 7$$

$$\mathbf{68/11}$$

$$f(x) = ax^2 + c$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(5) = f(-5) = 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2$$

$$f(x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{50}$$

$$\text{Breite: } 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$$

68/15

$$s = 1000m$$

$$s(t) = 30t - 0.4t^2$$

$$v(t) = 30 - 0.8t$$

a

$$v(t) = 0 = 30 - 0.8t \Rightarrow t = 37.5$$

$$s(37.5) = 30(37.5) - 0.4(37.5)^2 = 565.5$$

b

$$s(t) = v_0 \cdot t - 0.4t^2 < 1000$$

$$v(t) = v_0 - 0.8t \Rightarrow t = \frac{v_0}{0.8}$$

$$s(t) = \frac{v_0^2}{0.8} - 0.4\left(\frac{v_0}{0.8}\right)^2 = \frac{5}{8}v_0^2 < 1000$$

$$v_0 < \sqrt{1600} = 40$$

### 3.10 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

Hochpunkt:  $f(x_H) \geq f(x)$  in der Nähe

Tiefpunkt:  $f(x_T) \leq f(x)$  in der Nähe

$$f'(x_H) = f'(x_T) = f'(x_S) = 0$$

Daraus folgt ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Stellen  $x$  mit  $f'(x) = 0$ .

$$\text{z. B. } f(x) = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

$x_1$  und  $x_2$  sind Kandidaten für Extrema.

### Umgebungsuntersuchung

für Hochpunkte gilt:  $f'(x_l) > 0$   $f'(x) = 0$   $f'(x_r) < 0$

für Tiefpunkte gilt:  $f'(x_l) < 0$   $f'(x) = 0$   $f'(x_r) > 0$

$$\text{zu: } x_1 = 0 \quad x_l = -1 \quad x_r = 1$$

$$f'(x_l) = f'(-1) = 7$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 0$$

$$f'(x_r) = f'(1) = -1$$

$$\Rightarrow H(0|0)$$

$$\text{zu: } x_2 = \frac{4}{3} \quad x_l = 1 \quad x_r = 2$$

$$f'(x_l) = f'(1) = -1$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 0$$

$$f'(x_r) = f'(2) = 4$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{4}{3} \mid -1.2\right)$$

Sonderfall Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$$f'(x_l) < 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) < 0 \quad \text{oder}$$

$$f'(x_l) > 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) > 0$$

73/2

e

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = -x^2 + 3x \quad | \div x \Rightarrow x_2 = 0$$

$$0 = -x + 3 \quad | -3; \cdot(-1)$$

$$3 = x$$

$$L = \{0; 3\}$$

$$f'(-1) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt } S(0|f(0) = -4)$$

$$f'(2) = 4 \quad f'(3) = 0 \quad f'(4) = -16 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(3|f(3) = 2\frac{3}{4})$$

74/6

b

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 8x \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = 4x^2 - 12x + 8 \quad | abc$$

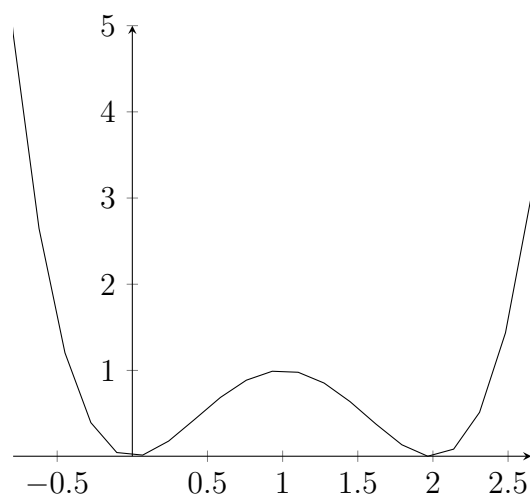
$$x_{2/3} = \frac{12 \pm 4}{8}$$

$$x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$f'(-1) = -24 \quad f'(x_1) = 0 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5 \quad \Rightarrow T(0|0)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5 \quad f'(x_2) = 0 \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1.5 \quad \Rightarrow H(1|1)$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1.5 \quad f'(x_3) = 0 \quad f'(3) = 24 \quad \Rightarrow T(2|0)$$



## 3.11 2. Ableitungsfunktion

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Die 2. Ableitungsfunktion  $f''(x)$  beschreibt das Krümmungsverhalten der Ursprungsfunktion  $f(x)$ .

$f''(x) > 0$  links gekrümmt

$f''(x) < 0$  rechts gekrümmt

$f''(x) = 0$  Wendepunkt

80/1

b

$$f(x) = 2x - 3x^2$$

$$f'(x) = 2 - 6x$$

$$f''(x) = -6$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -6 < 0 \quad H\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$$

d

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) = 2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{2}; 0\}$$

$$f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad T(\pm\sqrt{2} \mid -1)$$

$$f''(0) = -8 < 0 \quad H(0 \mid 3)$$



e

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f''(x) = 16x^3 - 20x$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\}$$

$$f''(\frac{1}{2}) = -8 < 0 \quad H(\frac{1}{2} | \frac{11}{15})$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = 8 > 0 \quad H(-\frac{1}{2} | -\frac{11}{15})$$

$$f''(\frac{3}{2}) = 24 > 0 \quad T(\frac{3}{2} | -\frac{9}{5})$$

$$f''(-\frac{3}{2}) = -24 < 0 \quad T(-\frac{3}{2} | \frac{9}{5})$$

### 3.12 Wendepunkte

Wendepunkte eines Graphen sind Punkte, an denen die Krümmung wendet. Am Wendepunkt selbst ist das Krümmungsverhalten gleich 0. Außerdem sind Wendepunkte Punkte mit maximaler bzw. minimaler Steigung.

Notwendige Bedingung:  $f''(x) = 0$

Hinreichende Bedingung (I): Umgebungsuntersuchung

$f''(x_l) > 0$   $f''(x_r) < 0$  Wechsel im Krümmungsverhalten

$\Rightarrow$  Wendepunkt  $WP(x|f(x))$  (links-rechts)

Hinreichende Bedingung (II):  $f'''(x) \neq 0$

für  $f'''(x) < 0$  LRWP

für  $f'''(x) > 0$  RLWP

für  $f'''(x) = 0$  keine Entscheidung

84/1

a

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f''(x) = 6x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow RLWP(0|2)$$

rechts:  $x \in ]-\infty; 0]$

links:  $x \in [0; \infty[$

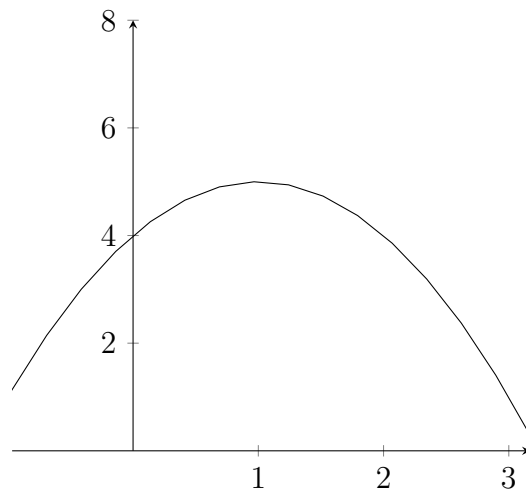


b

$$f(x) = 4 + 2x - x^2$$

$$f''(x) = -2 = 0 \quad L = \{\}$$

rechts:  $x \in ]-\infty; \infty[$



d

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3$$

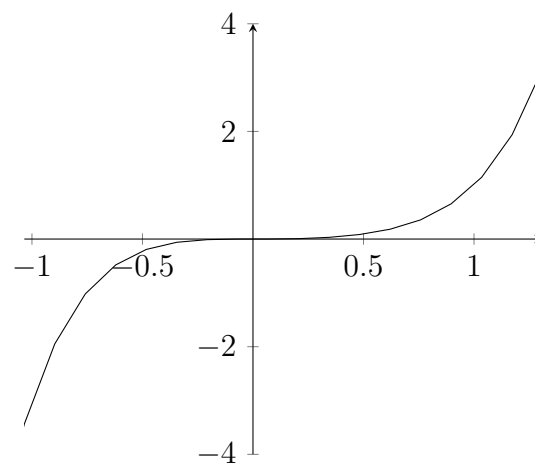
$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$

$$f'''(0) = 6 \Rightarrow RLWP(0|0)$$

rechts:  $x \in ]-\infty; 0]$

links:  $x \in [0; \infty[$



84/2b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

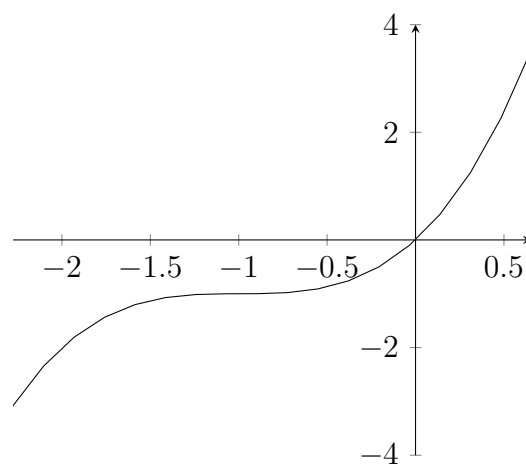
$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 0 \quad L = \{-1\}$$

$$f'''(-1) = 6 \Rightarrow RLWP(-1|f(-1) = -1)$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$



85/12

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$$

$$f''(x) = 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}b$$

$$f'(-\frac{1}{3}b) = 3(-\frac{1}{3}b)^2 + 2b(-\frac{1}{3}b) + c = -\frac{1}{3}b^2 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{b^2}{3}$$

85/14

a

$$f_a(x) = x^3 - ax^2$$

$$f_a''(x) = 6x - 2a = 0 \quad L = \left\{\frac{a}{3}\right\}$$

$$f_a'''(x) = 6 \quad f_a'''(\frac{a}{3}) = 6 \Rightarrow RLWP(\frac{a}{3} | f_a(\frac{a}{3}))$$

b

$$f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$$

$$f_a''(x) = 12x^2 - 4a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$$

$$f_a'''(x) = 24x$$

$$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(\sqrt{\frac{a}{3}}) > 0 \Rightarrow RLWP(\sqrt{\frac{a}{3}} | f_a(\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

$$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < 0 \Rightarrow LRWP(-\sqrt{\frac{a}{3}} | f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

89/2

- A wahr, die Steigung ist negativ, d. h. die Werte werden kleiner
- B falsch, die Funktion hat bei  $x = -1$  einen Sattelpunkt, die Steigung ist davor und danach positiv
- C wahr, einen Tiefpunkt bei  $x = 2$  und einen Hochpunkt bei  $x = 0$
- D ?, die Funktionswerte sind an der Ableitungsfunktion nicht erkennbar

89/1

c

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^4 + x^2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{0; \pm\sqrt{18}\} \Rightarrow S(0|0), S(\sqrt{18}|0), S(-\sqrt{18}|0)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$

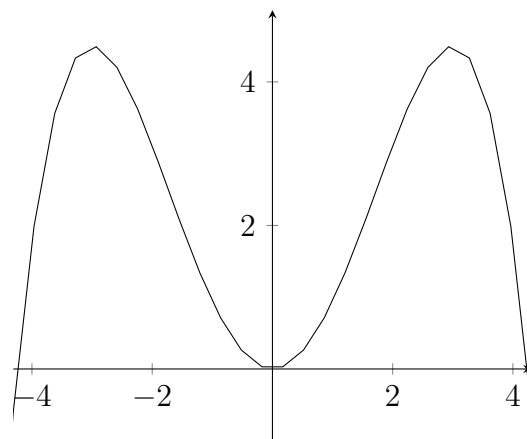
$$f''(0) = 2 \Rightarrow T(0|f(0) = 0)$$

$$f''(3) = 4 \Rightarrow T(3|f(3) = \frac{9}{2})$$

$$f''(-3) = -4 \Rightarrow T(-3|f(-3) = \frac{9}{2})$$

monoton steigend  $f'(x) \geq 0$ :  $] -\infty; -3]$ ,  $[0; 3]$

monoton fallend  $f'(x) \leq 0$ :  $[3; 0]$ ,  $[3; \infty[$



d

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x = 0 \quad L = \{0; 3\} \Rightarrow S(0|0), S(3|0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.5 = 0 \quad L = \{1; 3\}$$

$$f''(x) = x - 2$$

$$f''(1) = -1 \Rightarrow H(1|f(1) = 0.\overline{6})$$

$$f''(3) = 1 \Rightarrow T(3|f(3) = 0)$$

monoton steigend  $f'(x) \geq 0$ :  $[-\infty; 1], [3; \infty]$

monoton fallend  $f'(x) \leq 0$ :  $[1; 3]$



f

$$f(x) = x + \frac{5}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{kein Schnittpunkt mit y-Achse})$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{\} \quad (\text{kein Schnittpunkt mit x-Achse})$$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{5}\}$$

$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

$$f''(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(\sqrt{5}|f(\sqrt{5})) = \sqrt{20}$$

$$f''(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(-\sqrt{5}|f(-\sqrt{5})) = -\sqrt{20}$$

$$\text{monoton steigend } f'(x) \geq 0: \quad ]-\infty; -\sqrt{5}] , [\sqrt{5}; \infty[$$

$$\text{monoton fallend } f'(x) \leq 0: \quad [-\sqrt{5}; 0[ , ]0; \sqrt{5}]$$



### 3.13 Nullstellen: Polynomdivision

97/2

$$\begin{array}{r} \text{b } ( \quad 2x^3 + 2x^2 - 21x + 12 ) \div (x + 4) = 2x^2 - 6x + 3 \\ \underline{- 2x^3 - 8x^2} \phantom{+ 12} \\ \quad - 6x^2 - 21x \phantom{+ 12} \\ \quad \underline{6x^2 + 24x} \phantom{+ 12} \\ \qquad \quad 3x + 12 \\ \qquad \quad \underline{- 3x - 12} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \text{c } \left( \begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 - x + 2 \\ -2x^3 + x^2 \end{array} \right) \div (2x - 1) = x^2 - 3x - 2 \\ \hline \begin{array}{r} -6x^2 - x \\ 6x^2 - 3x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -4x + 2 \\ 4x - 2 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d } \left( \begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2 \\ -x^4 - 2x^3 \end{array} \right) \div (x + 2) = x^3 - 4x - 1 \\ \hline \begin{array}{r} -4x^2 - 9x \\ 4x^2 + 8x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -x - 2 \\ x + 2 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

**98/4**

$$\begin{array}{r} \text{a } x_1 = 1 \\ \left( \begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ -x^3 + x^2 \end{array} \right) \div (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ \hline \begin{array}{r} -5x^2 + 11x \\ 5x^2 - 5x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 6x - 6 \\ -6x + 6 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{l} \text{b } x_1 = 2 \\ \left( \begin{array}{r} x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ -x^3 + 2x^2 \end{array} \right) \div (x - 2) = x^2 + 3x + 2 \\ \hline \begin{array}{r} 3x^2 - 4x \\ -3x^2 + 6x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 2x - 4 \\ -2x + 4 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{-3 \pm 1}{2} \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= -1 \\ f(x) &= (x - 2)(x + 2)(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{c } x_1 = -2 \\ \left( \begin{array}{r} 4x^3 - 13x + 6 \\ -4x^3 - 8x^2 \end{array} \right) \div (x + 2) = 4x^2 - 8x + 3 \\ \hline \begin{array}{r} -8x^2 - 13x \\ 8x^2 + 16x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 3x + 6 \\ -3x - 6 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{8 \pm 4}{8} \\ x_2 &= \frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{3}{2} \\ f(x) &= (x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{d } x_1 = 3 \\ (4x^3 - 8x^2 - 11x - 3) \div (x - 3) = 4x^2 + 4x + 1 \\ \underline{-4x^3 + 12x^2} \phantom{-11x - 3} \\ 4x^2 - 11x \phantom{-3} \\ \underline{-4x^2 + 12x} \phantom{-3} \\ x - 3 \phantom{-3} \\ \underline{-x + 3} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{-4 \pm 0}{8} \\ x_{2/3} &= -\frac{1}{2} \\ f(x) &= (x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

**98/11**  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \quad S(-2|0) \Rightarrow x_1 = -2$

$$\begin{array}{r} \text{a } (x^3 - 2x^2 - 3x + 10) \div (x + 2) = x^2 - 4x + 5 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{-3x + 10} \\ -4x^2 - 3x \phantom{+ 10} \\ \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 10} \\ 5x + 10 \\ \underline{-5x - 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &\Rightarrow \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

**b**

$$\begin{aligned} g(x) &= mx + b \quad m = 2 \quad S(-2|0) \\ 0 &= 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4 \\ &\Rightarrow g(x) = 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 2x + 4 \\ 0 &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\
 -4x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\
 \underline{4x^2 + 8x} \phantom{+ 6} \\
 3x + 6 \\
 \underline{-3x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_2 = 1 \quad S(1|6)$$

$$x_3 = 3 \quad S(3|10)$$

**98/12**  $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$

a

$$f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x \quad | \div x$$

$$0 = 2x^2 - 2x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{-60}}{4} \quad \text{keine Lösung}$$

$$L = \{0\}$$

$$f_{10}(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x \quad | \div x$$

$$0 = 2x^2 - 10x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{10 \pm 6}{4}$$

$$L = \{0; 1; 4\}$$

$$f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x \quad | \div x$$

$$0 = 2x^2 + 10x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{-10 \pm 6}{4}$$

$$L = \{0; -1; -4\}$$

b

$$\text{Diskriminante} > 0$$

$$|t| > 8$$

c

$$t = 8$$

$$f_8(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$$

$$\text{Nullstellen: } \{0; 2\}$$

### 3.14 Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{z. B. } f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

$\Rightarrow$  unterschiedlich für ungeradzahliges Grad

$$\text{z. B. } g(x) = 2x^4 - 5x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4) = +\infty$$

$\Rightarrow$  gleich für geradzahliges Grad

### 3.15 Symmetrie

$$\text{Bsp. } f(x) = x^4 + 5x^2 - 7$$

$f(x)$  ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten vorkommen.

$$\text{Bsp. } g(x) = x^5 - 7x^3 + x$$

$g(x)$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.

allgemein:

achsensymmetrisch zur y-Achse:  $f(x) = f(-x)$

punktsymmetrisch zum Ursprung:  $f(x) = -f(-x)$

ansonsten: Symmetrie nicht erkennbar

Anwendung:

Bsp.  $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+5}$

$$h(-x) = \frac{3(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+5} = -\frac{3x^2+2x}{x^2+5} = -h(x)$$

$\Rightarrow$  punktsymmetrisch

100/2

a  $f(x) = -\mathbf{3x^4} - 0.2x^2 + 10$

b  $f(x) = 3x + 4x^3 - x^2 = \mathbf{4x^3} - x^2 + 3x$

c  $f(x) = 2(x-1) \cdot x^2 = \mathbf{2x^3} - 2x^2$

d  $f(x) = (x+1)(x^3+1) = \mathbf{x^4} + x^3 + x + 1$

e  $f(x) = -2(x^4 - x^3 - x^2) = -\mathbf{2x^4} + 2x^3 + 2x^2$

f  $f(x) = x^2 \cdot (-6x - x^2) = -\mathbf{x^4} - 6x^3$

102/1

d  $f(x) = x(x^2 - 5) = x^3 - 5x \Rightarrow$  punktsymmetrisch

e  $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$  nicht erkennbar

f  $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x \Rightarrow$  punktsymmetrisch

## 3.16 Kurvendiskussion

105/1

c

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$f''(x) = 3x - 8$$

$$f'''(x) = 3$$

Symmetrie

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$$L = \{0; 4\}$$

Grenzverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$$

### Extremstellen

$$f'(x) = 0 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm 4}{3}$$

$$L = \{\frac{4}{3}; 4\}$$

$$f''(x_1) = f''(\frac{4}{3}) = -4 < 0 \quad HP(\frac{4}{3} | f(\frac{4}{3}))$$

$$f''(x_2) = f''(4) = 4 > 0 \quad TP(4 | f(4))$$

### Wendestellen

$$f''(x) = 0 = 3x - 8$$

$$L = \{\frac{8}{3}\}$$

$$f'''(x_1) = f'''(\frac{8}{3}) = 3 > 0 \quad RLWP(\frac{8}{3} | f(\frac{8}{3}))$$





d

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 - 16$$

Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f'''(x) = 6$$

Symmetrie

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq x^3 + 6x^2 - 16$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq -x^3 - 6x^2 + 16$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 = x^3 + 6x^2 - 16$$

$$x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r} \left( \begin{array}{r} x^3 + 6x^2 \\ -x^3 - 2x^2 \end{array} - 16 \right) \div (x + 2) = x^2 + 4x - 8 \\ \hline 4x^2 \\ -4x^2 - 8x \\ \hline -8x - 16 \\ 8x + 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-8)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$L = \{-2; -5.46; 1.46\}$$

Grenzverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

### Extremstellen

$$f'(x) = 0 = 3x^2 + 12x \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3x + 12 = 0$$

$$L = \{0; -4\}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0 \quad TP(0|f(0))$$

$$f''(x_2) = f''(-4) = -12 < 0 \quad HP(-4|f(-4))$$

### Wendestellen

$$f''(x) = 0 = 6x + 12$$

$$L = \{-2\}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-2) = 6 > 0 \quad RLWP(-2|f(-2))$$



106/5

$$f(x) = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot x^4$$

a

Höhe

$$f(0) = 187.5$$

Breite

$$f(x) = 0$$

$$\text{subst. } t = x^2$$

$$0 = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot t - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$$

$$t_{1/2} = \frac{1.579 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{(1.579 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6}) \cdot 187.5}}{2 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6})}$$

$$t_1 < 0 \quad t_2 = 6520.923541$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{t_2} \approx \pm 80$$

$$2 \cdot 80 = 160$$

b

$$f'(x) = -3.158 \cdot 10^{-2} \cdot x - 7.952 \cdot 10^{-6} \cdot x^3$$

$$f'(80) = -2.5264 - 4.071424 \approx -6.6$$

$$\text{atan}(-6.6) \approx -81^\circ$$

c

$$f(19) = 187.5 - 5.70019 - 0.259078148 \approx 181$$

$$\text{vertikaler Abstand: } 187.5 - 181 = 6.5 < 10$$

$$f(9) - 10 = 177.5 - 1.579 - 0.01988 \approx 176.2$$

## 3.17 Tangente und Anwendungen

### 3.17.1 Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung

$$f(x) = y = m \cdot x + b$$

$$\text{Stelle } u \quad f'(u) = m \quad f(u) = y$$

$$f(u) = f'(u) \cdot u + b \Rightarrow b = f(u) - f'(u) \cdot u$$

$$t(x) = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$$

$$= f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

108/5

a

$$f(x) = x^2 - x; \quad B(-2|6) \quad u = -2$$

$$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(u) = -5$$

$$t(x) = -5 \cdot (x + 2) + 6 = -5x - 4$$

$$n(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 2) + 6 = \frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$$

b

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2; \quad B(4|3) \quad u = 4$$

$$f'(x) = -4x^{-2} \quad f'(u) = -\frac{1}{4}$$

$$t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 3 = -\frac{1}{4}x + 4$$

$$n(x) = 4 \cdot (x - 4) + 3 = 4x - 13$$

### Exkurs: Quadratische Ergänzung

führt auf die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

$$\text{z. B. } f(x) = x^2 - x$$

$$= x^2 - x + 0.25 - 0.25$$

$$= (x - 0.5)^2 - 0.25$$

$$\text{Scheitelpunkt } S(0.5 | -0.25)$$

$$\begin{aligned}
\text{z. B. } g(x) &= 4x^2 - 3x + 8 \\
&= 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) + 8 \\
&= 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}\right) + 8 \\
&= 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - 4\left(\frac{9}{64}\right) + 8 \\
&= 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{137}{16} \\
\text{Scheitelpunkt } S\left(\frac{3}{8} \mid \frac{137}{16}\right)
\end{aligned}$$

nimm den Koeffizienten (-1), halbiere ihn (-0.5) und quadriere anschließend (0.25).

**109/10**

$$\begin{aligned}
f(x) = y &= 4 - \frac{1}{2}x^2 \\
Y(0|6) \\
f'(x) &= -x \\
t(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} - x \cdot x_0 + 4 \\
0 &= \frac{1}{2}x_0^2 - 2 \quad x_0 = \pm 2
\end{aligned}$$

**109/11**

$$\begin{aligned}
f(x) &= -0.002x^4 + 0.122x^2 - 1.8 \\
\text{Tiefster Punkt: } T(0 \mid -1.8) \\
\text{Augen: } P(x_0 \mid 1.6) \\
f'(x) &= -0.008x^3 + 0.244x \\
t(x) &= 0.006u^4 - 0.122u^3 - 0.008u^3x + 0.224ux - 1.8 \\
t(0) &= -1.8 = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 1.8 \quad L = \{0; \pm\sqrt{\frac{61}{3}}\} \\
t(x) &= 0.366752x - 1.8 \quad \text{für } u = \sqrt{\frac{61}{3}} \\
1.6 &= 0.366752x_0 - 1.8 \\
x_0 &= 9.2706
\end{aligned}$$

112/7

$$S(t) = -0.08t^3 + 3.5t^2 + 10.6t + 237$$

a

$$S'(t) = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

Die Ableitung gibt an, wie stark die Schulden ansteigen, also die Neuverschuldung pro Jahr.

b

$$S''(t) = -0.48t + 7$$

$$S''(t_0) = 0$$

$$t_0 = 14.58\bar{3} \quad (\text{um } 1994)$$

c

$$S'(t_0) = 0 = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

$$t_0 = \frac{1}{12}(175 + \sqrt{36985}) \approx 30.6 \quad (\text{um } 2010)$$

$$S''(t_0) \approx -7.69 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

d Nicht die Staatsschulden, sondern die Neuverschuldung, nahm ab.

111/3

$$f(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

a

$$f(t) = 0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t \quad L = \{0; 24\}$$

$$f'(t) = 0 = 0.75t^2 - 24t + 144 \quad L = \{8; 24\}$$

$$f''(t) = 1.5t - 24$$

$$f''(8) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad HP$$

$$f''(24) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

$$f''(t) = 0 = 1.5t - 24 \quad L = \{16\}$$

$$f'''(t) = 1.5 > 0 \quad \Rightarrow \quad RLWP$$

b

$$\text{Hälfte d. Maximalwerts} = \frac{f(8)}{2} = \frac{512}{2} = 256$$

$$f(t) = 256 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

$$0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$\begin{array}{r} \left( \begin{array}{r} \frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 256 \\ - \frac{1}{4}t^3 + 4t^2 \end{array} \right) \div (t - 16) = \frac{1}{4}t^2 - 8t + 16 \\ \hline \phantom{\left( \right)} - 8t^2 + 144t \\ \phantom{\left( \right)} \phantom{-} 8t^2 - 128t \\ \hline \phantom{\left( \right)} \phantom{\phantom{-}} 16t - 256 \\ \phantom{\left( \right)} \phantom{\phantom{-}} - 16t + 256 \\ \hline \phantom{\left( \right)} \phantom{\phantom{-}} 0 \end{array}$$

$$L = \{2.1436; 16; (29.856)\}$$

$$f_2(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$f'_2(t) = f'(t) = 0.75t^2 - 24t + 144$$

$$f'_2(2.1436) \approx 96 > 0$$

$$f'_2(16) = -48 < 0$$

$$(f'_2(29.856) \approx 96 > 0)$$

Zeitraum: 2.1436 bis 16

Teil II

11/2



112/5

$$O(t) = -\frac{1}{300}(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700) \quad t \in [0; 24]$$

a

$$O'(t) = \frac{1}{100}(-t^2 + 24t - 108) = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{-2} = \frac{-24 \pm 12}{-2} = 12 \pm 6$$

$$t_1 = 6 \quad t_2 = 18$$

$$O''(t) = \frac{12 - t}{50}$$

$$O''(t_1) = \frac{6}{50} > 0 \Rightarrow TP(6|O(6) = 16.12)$$

$$O''(t_2) = \frac{-6}{50} < 0 \Rightarrow HP(18|O(18) = 19)$$

b Die Steigung der Wendetangente gibt an, wie sich die Temperaturänderung ändert (Beschleunigung).

### 3.18 Optimieren unter Nebenbedingungen

Tunnelquerschnitt:



Länge der Randlinie (Umfang) ist  $5m$ ;  $A$  ist maximal

Hauptbedingung HB

$$A(r, h) = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$$

( $A(r)$  heißt Zielfunktion ZF)

Nebenbedingung NB

$$U = 5 = 2h + 2r + \pi r \quad | - 2r - \pi r$$

$$h = \frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r$$

setze  $h$  in  $A(r, h)$  ein

$$A(r) = 2r\left(\frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= 5r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right) \cdot r^2 + 5r$$

$$A'(r) = 5 - 7.14159r$$

$$A'(r) = 0 \quad L = \{0.7\}$$

$$h = 0.7 \quad \text{für } r = 0.7$$

$$A(r) = 1.75m^2$$

**114/3**

$$A(l, b) = l \cdot b$$

$$U = 50 = 2(l + b) \Rightarrow b = 25 - l$$

$$A(l) = 2l \cdot (25 - l) = -2l^2 + 50l$$

$$A'(l) = -4l + 50$$

$$A'(l) = 0 \quad L = \{12.5\}$$

$$l = b = 12.5cm$$

**114/4**

$$U(l, b) = 2(l + b)$$

$$A = 400 = l \cdot b \Rightarrow b = \frac{400}{l}$$

$$U(l) = 2l + \frac{800}{l}$$

$$U'(l) = 2 - 800l^{-2}$$

$$U'(l) = 0 \quad L = \{\pm 20\}$$

$$l = b = 20cm$$

**115/7**

a

$$V(x) = (16 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$V'(x) = 0 \quad L = \{2; (\frac{20}{3})\}$$

$$V(2cm) = 144cm^3$$

**115/8**

$$U(r, h) = \pi r + 2r + 2h$$

$$A = 45 = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh \Rightarrow h = \frac{45 - \frac{1}{2}\pi r^2}{2r}$$

$$U(r) = \frac{1}{2}\pi r + 2r + \frac{45}{r}$$

$$U'(r) = -45r^{-2} + \frac{1}{2}\pi + 2$$

$$U'(r) = 0 \quad L = \{\pm 3.55\}$$

$$r = 3.55m$$

$$h = 3.55m \quad fuer \quad r = 3.55m$$

115/11

$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

$$12^2 = (2r)^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{36 - \frac{h^2}{4}}$$

$$V(h) = \pi \cdot \left(36 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h = 36h\pi - \frac{h^3\pi}{4}$$

$$V'(h) = -\frac{3}{4}\pi h^2 + 36\pi$$

$$V'(h) = 0 \quad L = \{\pm 6.93\}$$

$$h = 6.93 \text{ cm}$$

$$r = 4.9 \text{ cm} \quad \text{fuer } h = 6.93 \text{ cm}$$

115/14

$a$  ... Kantenlänge der Grundfläche

$$V(a, h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$2.4^2 = 5.76 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V_2(a) = V(a)^2 = \frac{1}{9} \cdot a^4 \cdot \left(5.76 - \frac{a^2}{2}\right) = -\frac{1}{18}a^6 + 0.64a^4$$

$$V_2'(a) = -\frac{1}{3}a^5 + 2.56a^3$$

$$V_2'(a) = 0 \quad L = \{0; \pm 2.771\}$$

$$V(2.771 \text{ m}) \approx 3.55 \text{ m}^3$$

115/13

Tragfähigkeit  $T \sim b$

Tragfähigkeit  $T \sim h^2$

a

$$r = 50cm$$

$$T(b, h) = b \cdot h^2$$

$$h^2 + b^2 = (2r)^2 \Rightarrow h^2 = 10000 - b^2 \Rightarrow h = \sqrt{10000 - b^2}$$

$$T(b) = b \cdot (10000 - b^2) = -b^3 + 10000b$$

$$T'(b) = -3b^2 + 10000$$

$$T'(b) = 0 \quad L = \{\pm \frac{100}{\sqrt{3}}\}$$

$$T(\frac{100}{\sqrt{3}}) \approx 384900$$

$$b \approx 57.74cm$$

$$h = \sqrt{10000 - (\frac{100}{\sqrt{3}})^2} \approx 81.65cm$$

### 3.19 Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung

z. B.  $f(x) = x^3 + 5x - 10$

probeweise:

$$f(1) = -4$$

$$f(2) = 8$$

$\Rightarrow$  Nullstelle zwischen 1 und 2

Vermutung  $x_0 = 1.5$



Zum Rechenverfahren

Tangentengleichung  $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$t(x_1) = 0 \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

allgemeine Näherungsformel nach Newton (und Raphson)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n$  beginnend bei 0

Abbruchbedingung: Nullstelle auf 3 Dezimalen genau. Das bedeutet, dass beim nächsten Schritt sich die 3. Dezimale nicht mehr ändern darf

Beispiel  $f(x) = x^3 + 5x - 10$

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 1.5 - \frac{1.5^3 + 5 \cdot 1.5 - 10}{3 \cdot 1.5^2 + 5} \approx 1.4255$$

$$x_2 = \dots \approx 1.4233$$

$$x_3 = \dots \approx 1.42331$$

Nullstelle auf 3 Dezimalen genau:  $x = 1.423$

118/1

a

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{2} = 0.5$$

$$x_2 = \frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

$$x_3 = \frac{1581}{3487} \approx 0.453398\dots$$

$$x_4 = \frac{50302634185}{110945952227} \approx 0.453397\dots$$

$$x^* = 0.453$$

### 3.19.1 Anwendungen des Newton-Verfahrens

Mögliche Fragestellungen:

- Nullstellen eines Funktionsgraphen  $f(x) = 0$ , auch  $f(x) = a$
- Nullstellen der Ableitungsfunktion  $f'(x) = 0$ , auch  $f'(x) = m$
- Schnittstellen zweier Funktionsgraphen  $f(x) = g(x)$
- zu Zielfunktion Lösungen finden

118/2

a

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1.8889$$

$$x_2 = 1.8795$$

$$x_3 = 1.8794$$

$$x_4 = 1.8794$$

$$x_1^* = 1.879$$

...

$$x_2^* = -1.532$$

$$x_3^* = -0.347$$

b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 0.8889$$

$$x_2 = 0.8795$$

$$x_3 = 0.8794$$

$$x_4 = 0.8794$$

$$x_1^* = 0.879$$

...

$$x_2^* = -2.532$$

$$x_3^* = -1.347$$



c

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 10x$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = 0.4271$$

$$x_2 = 0.4203$$

$$x_3 = 0.4204$$

$$x_4 = 0.4204$$

$$x_1^* = 0.420$$

...

$$x_2^* = -1.332$$

$$x_3^* = -0.521$$

$$x_4^* = 3.432$$

d

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 0.5$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x + 1$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = 0.6071$$

$$x_2 = 0.6030$$

$$x_3 = 0.6030$$

$$x_1^* = 0.603$$

...

$$x_2^* = -2.635$$

$$x_3^* = -0.246$$

$$x_4^* = 1.278$$

**118/3**

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -0.8750$$

$$x_2 = -0.8400$$

$$x_3 = -0.8376$$

$$x_4 = -0.8376$$

$$x^* = -0.838$$

**118/4**

a

$$g(x) = x^2; \quad h(x) = x^3 - 1$$

$$f(x) = g(x) - h(x) = -x^3 + x^2 + 1$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x$$

$$x_0 = 1.5$$

...

$$x^* = 1.466$$

b

$$g(x) = x^3; \quad h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2$$

$$f(x) = g(x) - h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$x_0 = 1$$

...

$$x^* = 0.848$$

118/5

a

$$f(x) = 0.1x^4 - x^2 - x + 1; \quad m = 1$$

$$f'(x) = 0.4x^3 - 2x - 1 = 1$$

$$0.4x^3 - 2x - 2 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.627$$

b

$$f(x) = -0.1x^4 - x^3 + x^2 + 3; \quad m = -18$$

$$f'(x) = -0.4x^3 - 3x^2 + 2x = -18$$

$$-0.4x^3 - 3x^2 + 2x + 18 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.400$$

c

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{x}; \quad m = 4$$

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} = 4$$

$$\frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.418$$

d

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^3 + 3; \quad m = -10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 = -10$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 + 10 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.622$$

**118/6**

a

$$f(x) = x^5 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

Die Funktion ist streng monoton steigend, d. h. sie hat genau eine Nullstelle.

b

$$x_0 = -1$$

...

$$x^* \approx -0.755$$

118/7

$$r = 9cm$$

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_Z = h\pi R^2 = \frac{1}{4}V_K = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$hR^2 = \frac{1}{3}r^3$$

$$R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$h\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right) = hr^2 - \frac{h^3}{4} = \frac{1}{3}r^3$$

$$81h - \frac{h^3}{4} = 243$$

$$-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243\right)' = -\frac{3}{4}h^2 + 81$$

...

$$(h_1 \approx -19.345)$$

$$h_2 \approx 3.091$$

$$h_3 \approx 16.25$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 - \frac{h_2^2}{4}} \approx 8.87$$

$$R_3 = \sqrt{r^2 - \frac{h_3^2}{4}} \approx 3.87$$

## 3.20 AB Kurvenuntersuchungen

AB/1

a

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$$

$$a \in \mathbb{R}, a > 0$$

**Symmetrie**

$$f_a(-x) = x^2 + 2ax + 1 \neq f_a(x)$$

$$-f_a(x) = -x^2 + 2ax - 1 \neq f_a(-x)$$

$\Rightarrow$  keine Symmetrie erkennbar

**Nullstellen**

$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

**Extrema**

$$f'_a(x) = 2x - 2a = 0 \quad L = \{a\}$$

$$f''_a(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow TP(a|f_a(a) = -a^2 + 1)$$

**Wendepunkte**

$$f''_a(x) = 0 \quad L = \{\}$$

b



$$a = 1, 1.5, 0.5$$

c

$$f'_a(4) = 2 \cdot 4 - 2a = 1 \Rightarrow a = 3.5$$

d

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$$a^2 - 1 < 0 \quad \text{fuer } a < 1 \Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{fuer } a = 1 \Rightarrow 1 \text{ Nullstelle}$$

$$a^2 - 1 > 0 \quad \text{fuer } a > 1 \Rightarrow 2 \text{ Nullstellen}$$

### 3.20.1 Ortslinie

Der Graph, auf dem alle Tiefpunkte zu unterschiedlichen  $a$  liegen, heißt Ortslinie der Tiefpunkte:

$$T(a | -a^2 + 1)$$

$$x = a$$

$$y = -a^2 + 1$$

setze  $a$  aus  $x$ -Koordinate in  $y$  ein

$$f(x) = y = -x^2 + 1$$

Funktionsgleichung der Ortskurve der Tiefpunkte





AB/5

a

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2$$

$$a > 0$$

### Symmetrie

$$f_a(-x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 = f_a(x)$$

$\Rightarrow$  Achsensymmetrie

$$-f_a(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 \neq f_a(-x)$$

$\Rightarrow$  keine Punktsymmetrie erkennbar

### Nullstellen

$$\frac{1}{2}x^4 - ax^2 = 0 \quad | \div x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - a = 0$$

$$L = \{0; \pm\sqrt{2a}\}$$

### Extrema

$$f'_a(x) = 2x^3 - 2ax = 0 \quad | \div x$$

$$2x^2 - 2a = 0$$

$$x = \pm\sqrt{a}$$

$$f''_a(x) = 6x^2 - 2a$$

$$f''_a(\pm\sqrt{a}) = 4a > 0 \Rightarrow TP$$

$$f''_a(0) = -2a < 0 \Rightarrow HP$$

### Wendepunkte

$$f''_a(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$$

$$f'''_a(x) = 12x$$

$$f'''_a(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 12\sqrt{\frac{a}{3}} > 0 \Rightarrow RLWP$$

$$f'''_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = -12\sqrt{\frac{a}{3}} < 0 \Rightarrow LRWP$$

b

$$T(\pm\sqrt{a} - \frac{1}{2}a^2)$$

$$f_T(x) = -\frac{1}{2}x^4$$

$$W(\pm\sqrt{\frac{a}{3}} - \frac{5a^2}{18})$$

$$f_W(x) = -\frac{5}{2}x^4$$



**AB/4**

a

$$f_a(x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) \quad WP(1|f_a(1))$$

$$f_a(-x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) = f_a(x)$$

$\Rightarrow$  Achsensymmetrie  $\Rightarrow$  zweiter Wendepunkt bei  $x = -1$

$$f_a''(\pm 1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad \Rightarrow a = 6$$

$$f_6(\pm 1) = \frac{1}{4}(1^4 - 6 \cdot 1^2) = -\frac{5}{4}$$

b

$$f_a''(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\}$$

$$t_1(x) = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$

$$t_2(x) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$

### 3.21 Wiederholung

115/9

$$O(a, h) = a^2 + 4ah$$

$$V(a, h) = a^2 \cdot h = 40dm^3 \Rightarrow h = \frac{40dm^3}{a^2}$$

$$O(a) = a^2 + 160dm^3 \cdot a^{-1}$$

$$O'(a) = 2a - 160dm^3 \cdot a^{-2}$$

$$a = \sqrt[3]{80dm^3} \approx 4.309dm$$

$$h = \frac{40dm^3}{\sqrt[3]{80dm^3}^2} = \sqrt[3]{10} \approx 2.154dm$$

119/8

$$h(0) = 400m$$

$$h(370) = 0$$

- a  $h'$  beschreibt das Gefälle des Flusses und gibt den Höhenverlust des Wassers pro Kilometer an
- b ein Stausee hat einen waagerechten Abschnitt des Graphen zur Folge, ein Wasserfall eine Sprungstelle
- c  $h'$  ist nicht positiv, da das Wasser ausschließlich nach unten fließt; die Einheit ist  $\frac{m}{km}$

## 3.22 Sinus- und Kosinusfunktion

$$f(\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{U} \quad U = 2\pi r$$

$$x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360^\circ} \quad \alpha = \frac{x \cdot 360^\circ}{2\pi}$$

wichtige x-Koordinaten

$$x = 3.14\dots = \pi \quad x = 6.28\dots = 2\pi$$

$$x = 1.57\dots = \frac{\pi}{2} \quad x = 4.71\dots = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

### 3.22.1 Vielfachheit der Lösungen von (geometrischen) Gleichungen

$$\sin(x) = 0.7$$

$$x = \arcsin(0.7) \approx 0.775$$

$$x_n \approx 0.775 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 0.775 + m \cdot 2\pi$$

$$n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0.3$$

$$x = \arccos(0.3) \approx 1.266$$

$$x_n \approx 1.266 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -1.266 + n \cdot 2\pi$$

$$n, m \in \mathbb{Z}$$

128/6

a

$$\sin(x) = 0.9396$$

$$x = \arcsin(0.9396) \approx 1.221$$

$$x_n \approx 1.221 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 1.221 + m \cdot 2\pi$$

b

$$\sin(x) = 0.5519$$

$$x = \arcsin(0.5519) \approx 0.585$$

$$x_n \approx 0.585 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 0.585 + m \cdot 2\pi$$

c

$$\cos(x) = 0.6294$$

$$x = \arcsin(0.6294) \approx 0.890$$

$$x_n \approx 0.890 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -0.890 + m \cdot 2\pi$$

d

$$\cos(x) = -0.8870$$

$$x = \arcsin(-0.8870) \approx 2.662$$

$$x_n \approx 2.662 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -2.662 + m \cdot 2\pi$$

128/7

a

$$\sin(x) = 0.63$$

$$x = \arcsin(0.63) \approx 0.682$$

$$x_n \approx 0.682 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 0.682 + m \cdot 2\pi$$

b

$$\cos(x) = -0.55$$

$$x = \arcsin(-0.55) \approx 2.153$$

$$x_n \approx 2.153 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -2.153 + m \cdot 2\pi$$

c

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.524$$

$$x_n \approx -0.524 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi + 0.524 + m \cdot 2\pi$$

d

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 2.356$$

$$x_n \approx 2.356 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -2.356 + m \cdot 2\pi$$

### 3.22.2 Die allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

a Streckung entlang der y-Achse (Amplitude)

b Streckung entlang der x-Achse (Perioden pro  $2\pi$ , Periodenlänge  $p = \frac{2\pi}{b}$ )

c Verschiebung in x-Richtung (für  $c > 0$  nach rechts)

d Verschiebung in y-Richtung

### 3.22.3 AB Die Funktionen $f: x \mapsto a \cdot \sin(b(x - c))$ und ihre Graphen

AB/3

a

$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right)$$

$$p = 4\pi$$

$$3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right)$$

$$x_H = 2\pi + n \cdot p$$

$$x_T = n \cdot p$$

$$x_W = \pi + \frac{n}{2} \cdot p$$

b

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$p = 3\pi$$

$$x_H = \frac{3}{4}\pi + n \cdot p$$

$$x_T = 2\frac{1}{4}\pi + n \cdot p$$

$$x_W = \frac{n}{2} \cdot p$$

c

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$p = 2\pi$$

$$x_H = \frac{2}{3}\pi + n \cdot p$$

$$x_T = \frac{5}{3}\pi + n \cdot p$$

$$x_W = \frac{\pi}{6} + \frac{p}{2}$$

AB/5

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + e)$$

a

$$f(x) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$$

b

$$f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)$$

c

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$$

AB/6

$$f(t) = a \cdot \sin(b(t - c)) \quad -2 \leq t \leq 13$$

a Die Sonne bewegt sich aus Sicht der Aufnahmen periodisch auf und ab.  
Ihr Höhenverlauf lässt sich daher über eine Sinuskurve modellieren.

b

$$f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 6)\right)$$

### 3.22.4 Ableitung der Sinusfunktion



$\sin(x)$ ,  $\cos(x)$



## Annäherung mit Taylorreihe

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$a = x_0 = 0$$

$$f(x_0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin(x) = 0 + x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(\sin(x))' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \dots = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

...

130/1

a

$$f(x) = 12 \cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = 12 \cdot \cos(x)$$

b

$$f(x) = -2 \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = -2 \cdot (-\sin(x))$$

c

$$f(x) = \sqrt{5} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = \sqrt{5} \cdot (-\sin(x))$$

d

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos(x)$$

e

$$f(x) = 5x^3 - \sin(x)$$
$$f'(x) = 15x^2 - \cos(x)$$

f

$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$$
$$f'(x) = 2 \cdot (-\sin(x)) - \cos(x)$$

130/3

b

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$$
$$P\left(\frac{5\pi}{3} | ?\right)$$
$$y = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx -2.598$$
$$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$$
$$m_t = f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1.5$$
$$b_t = -2.598 - 1.5 \cdot \frac{5\pi}{3} \approx -10.452$$
$$t(x) = 1.5x - 10.452$$

130/4

c

$$\begin{aligned}f(x) &= 2 \cdot \sin(x) - \cos(x); \quad x \in [0; 2\pi] \\f'(x) &= 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x) \\2 &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{atan}(-2) \\L &= \{\operatorname{atan}(-2) + n\pi\} \quad n \in \{1; 2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) \\f''(\operatorname{atan}(-2) + \pi) &\approx -2.23 < 0 \\HP(\operatorname{atan}(-2) + \pi | f(\operatorname{atan}(-2) + \pi)) &= HP(2.034 | 2.236) \\f''(\operatorname{atan}(-2) + 2\pi) &\approx 2.23 > 0 \\TP(\operatorname{atan}(-2) + 2\pi | f(\operatorname{atan}(-2) + 2\pi)) &= TP(5.176 | -2.236)\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= 4 \cdot \cos(x) + 2x; \quad x \in [0; 2\pi] \\f'(x) &= -4 \cdot \sin(x) + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 = -4 \cdot \sin(x) + 2 \\0.5 &= \sin(x) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{asin}(0.5) \\L &= \{\operatorname{asin}(0.5); \pi - \operatorname{asin}(0.5)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= -4 \cdot \cos(x) \\f''(\operatorname{asin}(0.5)) &\approx -3.46 < 0 \\HP(\operatorname{asin}(0.5) | f(\operatorname{asin}(0.5))) &= HP(0.524 | 4.51) \\f''(\pi - \operatorname{asin}(0.5)) &\approx 3.46 > 0 \\TP(\pi - \operatorname{asin}(0.5) | f(\pi - \operatorname{asin}(0.5))) &= TP(2.618 | 1.772)\end{aligned}$$

## 3.23 Neue Funktionen aus alten Funktionen

gegeben sind

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$h(x) = x^2 + 5$$

Produkt

$$i(x) = f(x) \cdot g(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$$

$$j(x) = h(x) \cdot f(x) = (x^2 + 5) \cdot \sin(x)$$

Quotient

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$$

$$l(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x}}$$

Verkettung

$$m(x) = f(g(x)) = \sin(\sqrt{x})$$

$$n(x) = g(f(x)) = \sqrt{\sin(x)}$$

$$o(x) = f(g(h(x))) = \sin(\sqrt{x^2 + 5})$$

### 3.23.1 Ableitungsregeln

Produktregel

$$k(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - \cancel{f(x) \cdot g(x+h)} + \cancel{f(x) \cdot g(x+h)} - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \mathbf{f'(x)} \cdot \mathbf{g(x)} + \mathbf{f(x)} \cdot \mathbf{g'(x)}$$

## Kettenregel

$$\begin{aligned}k(x) &= f(g(x)) \\k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+i) - f(z)}{i} \cdot g'(x) \\&= f'(z) \cdot g'(x) \\&= \mathbf{f'(g(x)) \cdot g'(x)}\end{aligned}$$

$$g(x) = z \quad g(x+h) = z+i$$

## Beispiele

$$\begin{aligned}k(x) &= (x^2 + 2x - 7) \cdot \sin(x) \\k'(x) &= (2x + 2) \cdot \sin(x) + (x^2 + 2x - 7) \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(x) &= \sin(x^3 - 5x) \\k'(x) &= \cos(x^3 - 5x) \cdot (3x^2 - 5)\end{aligned}$$

135/1

a

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+2)^4 \\f'(x) &= 4(x+2)^3\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= (8x+2)^3 \\f'(x) &= 3(8x+2)^2 \cdot 8 = 24(8x+2)^2\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{1}{2} - 5x\right)^3 \\f'(x) &= 3\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2 \cdot (-5) = -15\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2\end{aligned}$$

d

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5)^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5) \cdot 2x = x^3 - 5x$$

135/2

a

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(x-1)^{-3}$$

b

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(3x-1)^{-3} \cdot 3 = -6(3x-1)^{-3}$$

e

$$f(x) = \sin(2x)$$
$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

f

$$f(x) = \sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = \cos(2x + \pi) \cdot 2 = 2\cos(2x + \pi) = -2\cos(2x)$$

138/1

g

$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = -2x^{-2} \cdot \cos(x) - \frac{2}{x} \cdot \sin(x)$$

h

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = \cos(2x)$$

i

$$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$
$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

j

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{x^3}} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

k

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin(x) \cdot (2 - x)$$
$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \cos(x) \cdot (2 - x) - \frac{\pi}{4} \cdot \sin(x)$$

l

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

135/4

a

$$f(x) = 0.25 \cdot \sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = 0.25 \cdot \cos(2x + \pi) \cdot 2 = -0.5 \cdot \cos(2x)$$

b

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(\pi - 3x)$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \cos(\pi - 3x) \cdot (-3) = 2 \cdot \cos(3x)$$

c

$$f(x) = -\cos(x^2 + 1)$$
$$f'(x) = \sin(x^2 + 1) \cdot 2x$$

d

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (\cos(x))^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = -\frac{2}{3} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

e

$$f(x) = \sqrt{3x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

f

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+x}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

g

$$f(x) = \sqrt{7x-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x-5}} \cdot 7 = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{7x-5}}$$

h

$$f(x) = \sqrt{7x^2-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x^2-5}} \cdot 14x = \frac{7x}{\sqrt{7x^2-5}}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{(\sin(x))^2} \cdot \cos(x) = -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$$



## Ableitungen mit mehr als zwei Funktionen

$$\begin{aligned}l &= g \cdot [h \cdot k] \\l' &= g' \cdot h \cdot k + g \cdot [h' \cdot k + h \cdot k'] \\&= g' \cdot h \cdot k + g \cdot h' \cdot k + g \cdot h \cdot k'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= g(h(k)) \\l' &= g'(h(k)) \cdot h'(k) \cdot k'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= g \cdot h(k) \\l' &= g' \cdot h(k) + g \cdot h'(k) \cdot k'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= g(h \cdot k) \\l' &= g'(h \cdot k) \cdot [h' \cdot k + h \cdot k']\end{aligned}$$

## Quotientenregel

$$\begin{aligned}l &= \frac{g}{h} = g \cdot h^{-1} \\l' &= g' \cdot h^{-1} + g \cdot [-h^{-2} \cdot h'] \\&= g' \cdot h^{-1} - g \cdot h^{-2} \cdot h' \\&= \frac{g'}{h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} = \frac{g' \cdot h}{h \cdot h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} \\&= \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}\end{aligned}$$

138/2

e

$$\begin{aligned}f(x) &= (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2} \\f'(x) &= 3(5 - 4x)^2 \cdot (-4) \cdot x^{-2} + (5 - 4x)^3 \cdot (-2x^{-3}) \\&= -\frac{2 \cdot (5 - 4x)^2 \cdot (2x + 5)}{x^3}\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x \cdot \cos(2x) \\f'(x) &= 3 \cdot \cos(2x) + 3x \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 \\&= 3 \cdot (\cos(2x) - 2x \cdot \sin(2x))\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x \cdot (\sin(x))^2 \\f'(x) &= 3 \cdot (\sin(x))^2 + 3x \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\&= 3 \cdot \sin(x) \cdot (\sin(x) + 2x \cdot \cos(x))\end{aligned}$$

h

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x - 1)^2 \cdot \sqrt{x} \\f'(x) &= 2(2x - 1) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + (2x - 1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\&= \frac{(2x - 1) \cdot (10x - 1)}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.5x^2 \cdot \sqrt{4 - x} \\f'(x) &= x \cdot \sqrt{4 - x} + 0.5x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} \cdot (-1) \\&= \frac{(4 - 1.25x) \cdot x}{\sqrt{4 - x}}\end{aligned}$$

**140/2**

a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1 - x^2}{3x + 5} \\f'(x) &= \frac{-2x \cdot (3x + 5) - (1 - x^2) \cdot 3}{(3x + 5)^2} \\&= -\frac{(3x + 1) \cdot (x + 3)}{(3x + 5)^2}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x + 2} \\g'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x + 2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x + 2)^2} \\&= \frac{2 - x}{2\sqrt{x} \cdot (x + 2)^2}\end{aligned}$$

c

$$h(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{6x - 1}$$

$$h'(x) = \frac{3 \cdot \cos(x) \cdot (6x - 1) - 3 \cdot \sin(x) \cdot 6}{(6x - 1)^2}$$

d

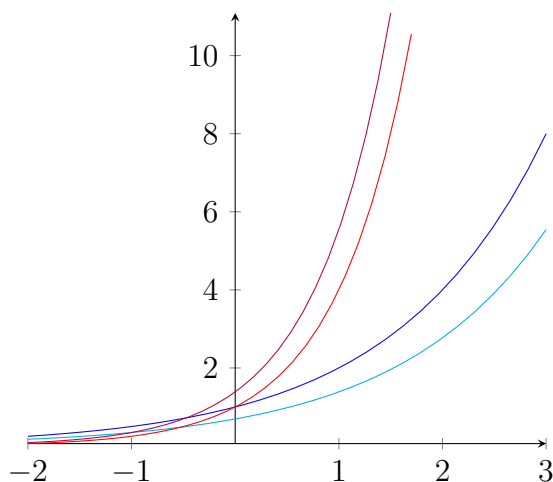
$$k(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$k'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + (\tan(x))^2$$

### 3.24 Exponentialfunktionen - Ableitung

$$f(x) = 2^x \quad f'(x) \quad g(x) = 4^x \quad g'(x)$$



Zwischen  $2^x$  und  $4^x$  liegt eine Exponentialfunktion, deren Ableitungsfunktion genau der Ursprungsfunktion entspricht. Sie wird natürliche Exponentialfunktion genannt.

$$f(x) = e^x$$

$$\text{Eulersche Zahl } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

$$\dots$$

$$e^x \leftrightarrow \log_e(x) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$$

$$2^x = 5^{x \cdot \frac{\log(2)}{\log(5)}} = 5^{x \cdot \log_5(2)}$$

$$2^x = e^{x \cdot \ln(2)}$$

$$10^x = e^{x \cdot \ln(10)}$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln(2)} = 2^x$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2) \approx 2^x \cdot 0.7$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln(4)} = 4^x$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(4)} \cdot \ln(4) = 4^x \cdot \ln(4) \approx 4^x \cdot 1.4$$

142/3

a

$$f(x) = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x e^x = e^x \cdot (x + 1)$$

b

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2}$$

c

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1 - x}{e^x}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1) \cdot e^x \\f'(x) &= 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x \cdot (x+2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{e^{-0.5x}} \\f'(x) &= \frac{1 \cdot e^{-0.5x} - x \cdot (-0.5) \cdot e^{-0.5x}}{(e^{-0.5x})^2} = e^{0.5x} \cdot (1 + 0.5x)\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x + 1}{x} \\f'(x) &= \frac{e^x \cdot x - (e^x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) - 1}{x^2}\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x}{x-1} \\f'(x) &= \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

h

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^{3x}}{x+2} \\f'(x) &= \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot (x+2) - e^{3x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^{3x} \cdot (3x+5)}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + x \cdot e^{0.1x} = x^2 \cdot \left(1 + \frac{e^{0.1x}}{x}\right) \\f'(x) &= 2x \cdot \left(1 + \frac{e^{0.1x}}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{e^{0.1x} \cdot (0.1x - 1)}{x^2} = e^{0.1x} \cdot (0.1x + 1) + 2x\end{aligned}$$

j

$$\begin{aligned}f(x) &= x \cdot e^{-2x+1} \\f'(x) &= 1 \cdot e^{-2x+1} + x \cdot (-2e^{-2x+1}) = e^{1-2x} \cdot (1-2x)\end{aligned}$$

k

$$f(x) = x^2 \cdot e^{ax}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{ax} + x^2 \cdot a \cdot e^{ax} = x \cdot e^{ax} \cdot (2 + ax)$$

l

$$f(x) = x \cdot e^{2x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x^2+1} + x \cdot e^{2x^2+1} \cdot 4x = e^{2x^2+1} \cdot (4x^2 + 1)$$

### 3.24.1 Basis $\neq e$

$$f(x) = 10^x = (e^z)^x = e^{ln(10) \cdot x}$$

$$e^z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = ln(10)$$

$$\Rightarrow \quad b^x = e^{ln(b) \cdot x}$$

$$f'(x) = e^{ln(10) \cdot x} \cdot ln(10)$$

$$= 10^x \cdot ln(10)$$

$$\Rightarrow \quad b^x \cdot ln(b)$$

145/8

f

$$e^{2x} + 10 = 6.5 \cdot e^x \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$z^2 + 10 = 6.5z \quad | - 6.5z$$

$$z^2 - 6.5z + 10 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{6.5 \pm \sqrt{42.25 - 40}}{2}$$

$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2.5 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \quad | ln$$

$$x_1 = ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2.5 = e^x \quad | ln$$

$$x_2 = ln(2.5) \approx 0.916$$

a

$$e^{2x} - 6 \cdot e^x + 8 = 0 \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$z^2 - 6z + 8 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \quad | \ln$$

$$x_1 = \ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2 \quad | \ln$$

$$x_2 = \ln(2) \approx 0.693$$

b

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$z - 2 - \frac{15}{z} = 0 \quad | \cdot z$$

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$z_1 = 5 \quad (z_2 = -3) \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 5 = e^x \quad | \ln$$

$$x_1 = \ln(5) \approx 1.609$$

g

$$(e^{2x} - 6) \cdot (5 - e^{3x}) = 0 \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$(z^2 - 6) \cdot (5 - z^3) = 0$$

$$z^2 - 6 = 0 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$z_1 = \sqrt{6} \approx 2.449 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = \sqrt{6} = e^x \quad | \ln$$

$$x_1 = \ln(\sqrt{6}) \approx 0.896$$

$$5 - z^3 = 0 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{5} \approx 1.710 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{5} = e^x \quad | \ln$$

$$x_2 = \ln(\sqrt[3]{5}) \approx 0.536$$

h

$$2 \cdot e^x + 15 = 8 \cdot e^{-x} \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$2z + 15 = \frac{8}{z} \quad | - \frac{8}{z}$$

$$2z + 15 - \frac{8}{z} = 0 \quad | \cdot z$$

$$2z^2 + 15z - 8 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4}$$

$$z_1 = 0.5 \quad (z_2 = -8) \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 0.5 = e^x \quad | \ln$$

$$x = \ln(0.5) \approx -0.693$$

146/9

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{kt}$$

a

$$h(0) = 0.02$$



b

$$h(6) = 0.02 \cdot e^{6k} = 0.4$$

$$e^{6k} = 20$$

$$6k = \ln(20)$$

$$k = \frac{\ln(20)}{6} \approx 0.499$$

c

$$h(9) = 0.02 \cdot e^{0.499 \cdot 9} \approx 1.784$$

d

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{0.499t} = 3$$

$$e^{0.499t} = 150$$

$$0.499t = \ln(150)$$

$$t = \frac{\ln(150)}{0.499} \approx 10.041$$

e

$$h(t+1) - h(t) = 1.5$$

$$0.02 \cdot e^{k \cdot (t+1)} - 0.02 \cdot e^{k \cdot t} = 1.5$$

$$0.02e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 1.5$$

$$e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 75$$

$$0.647e^{0.499t} = 75$$

$$e^{0.499t} = 115.92$$

$$0.499t = \ln(115.92)$$

$$t = \frac{\ln(115.92)}{0.499} \approx 9.525$$

f

$$h'(t) = 0.02k \cdot e^{kt} = 1$$

$$0.02 \cdot 0.499 \cdot e^{0.499t} = 1$$

$$e^{0.499t} = 100.2$$

$$0.499t = \ln(100.2)$$

$$t = \frac{\ln(100.2)}{0.499} \approx 9.233$$

g

$$t \geq 9$$

$$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t}$$

$$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 3$$

$$e^{-0.175t} \approx 0.061$$

$$-0.175t \approx \ln(0.061)$$

$$t \approx \frac{\ln(0.061)}{-0.175} \approx 15.982$$

$$k(t+1) - k(t) = 0.2$$

$$3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175 \cdot (t+1)} - 3.5 + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$$

$$-8.2 \cdot e^{-0.175 \cdot (t+1)} + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$$

$$-8.2 \cdot e^{-0.175t} \cdot (e^{-0.175} - 1) = 0.2$$

$$1.316 \cdot e^{-0.175t} \approx 0.2$$

$$e^{-0.175t} \approx 0.152$$

$$-0.175t \approx \ln(0.152)$$

$$t \approx \frac{\ln(0.152)}{-0.175} \approx 10.765$$

## 3.25 Wiederholung

### 3.25.1 Sinusfunktionen und Newton-Verfahren

130/8

$$P(x_0|f(x_0)) \quad Q(x_0|g(x_0)) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot \sin(x) & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2 \cdot \cos(x) & g'(x) &= 2x \\ h(x) &= f'(x) - g'(x) = 2 \cdot \cos(x) - 2x = 0 \\ h'(x) &= -2 \cdot \sin(x) - 2 \end{aligned}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.75036$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.73911$$

$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.73908$$

$$x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.73909$$

$$x^* \approx 0.7391$$

$$P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.7391|1.3472)$$

$$Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.7391|0.5463)$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) & g(x) &= x^3 \\f'(x) &= \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) & g'(x) &= 3x^2 \\h(x) &= f'(x) - g'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) - 3x^2 = 0 \\h'(x) &= -\sin(x) - 2 \cdot \cos(x) - 6x\end{aligned}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.34120$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.32336$$

$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.32311$$

$$x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.32311$$

$$x^* \approx 0.3231$$

$$P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.3231|2.2140)$$

$$Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.3231|0.0337)$$

### 3.25.2 Produktregel

138/3

a

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x - 8) \cdot \sin(x) & f'(x) &= 2 \cdot \cos(x) \\f(x) &= a \cdot b & f'(x) &= a' \cdot b + a \cdot b' \neq a' \cdot b' \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 \cdot \sin(x) + (2x - 8) \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}g(x) &= (2x - 3) \cdot (8 - x)^2 \\g'(x) &= 2 \cdot (8 - x)^2 + (2x - 3) \cdot (16 - 2x)\end{aligned}$$

### 3.25.3 Quotientenregel

140/11

a

$$f(x) = \sin(x) + \tan(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$f'(x) = \cos(x) + (\cos(x))^{-2}$$

b

$$f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x) = \frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)}$$
$$f'(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}$$

c

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\tan(x)} = \frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}$$
$$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) - \frac{(\cos(x))^3}{(\sin(x))^2}$$

d

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2 \cdot \cos(x)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot (\cos(x))^2}$$

e

$$f(x) = \tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$
$$f'(x) = \frac{2}{(\cos(2x))^2}$$

f

$$f(x) = \tan(x^2) = \frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(\cos(x^2))^2}$$

g

$$f(x) = (\tan(x))^2 = \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^3}$$

h

$$f(x) = \frac{2}{\tan(x)} = \frac{2 \cdot \cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(\sin(x))^2}$$

### 3.25.4 Kurvendiskussion

146/13

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x}$$

$$0 \hat{=} 01.10.2002$$

a

$$92 \hat{=} 01.01.2003$$

$$f(92) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 92} \approx 96161.27$$

$$457 \hat{=} 01.01.2004$$

$$f(457) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 457} \approx 199542.38$$

b

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000$$

$$e^{0.002x} = 12.5$$

$$x = \frac{\ln(12.5)}{0.002} \approx 1262.86 \hat{=} 17.03.2006$$

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000000$$

$$e^{0.002x} = 12500$$

$$x = \frac{\ln(12500)}{0.002} \approx 4716.74 \hat{=} 31.08.2015$$

c

$$\begin{aligned}
 2 \cdot f(x_1) &= f(x_2) \\
 2 \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} &= 80000 \cdot e^{0.002x_2} \\
 2 \cdot e^{0.002x_1} &= e^{0.002x_2} \\
 \ln(2) + 0.002x_1 &= 0.002x_2 \\
 x_2 - x_1 &= \frac{\ln(2)}{0.002} \approx 346.57
 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
 p \cdot f(x_1) &= f(x_1 + 365) \\
 p \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} &= 80000 \cdot e^{0.002 \cdot (x_1 + 365)} \\
 p \cdot e^{0.002x_1} &= e^{0.002x_1} \cdot e^{0.002 \cdot 365} \\
 p &= e^{0.002 \cdot 365} \approx 2.08 = 208\%
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 365 &\hat{=} 01.10.2003 \\
 f(365) - f(364) &= 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 365} - 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 364} \approx 331.68 \\
 f'(x) &= 80000 \cdot 0.002 \cdot e^{0.002x} = 160 \cdot e^{0.002x} \\
 f(364.5) &\approx 331.68
 \end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}
 f(x+1) - f(x) &= 400 \\
 80000 \cdot e^{0.002 \cdot (x+1)} - 80000 \cdot e^{0.002x} &= 400 \\
 80000 \cdot e^{0.002x} \cdot (e^{0.002} - 1) &= 400 \\
 x = \ln\left(\frac{400}{80000 \cdot (e^{0.002} - 1)}\right) \cdot \frac{1}{0.002} &\approx 457.65 \hat{=} 02.01.2004 \\
 f'(x) &= 160 \cdot e^{0.002x} = 400 \\
 x = \ln\left(\frac{400}{160}\right) \cdot \frac{1}{0.002} &\approx 458.15 \hat{=} 03.01.2004
 \end{aligned}$$

146/10

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$

a

$$v(0) = 0$$

$$v(10) \approx 1.58$$

b



c

$$v(t) = 2$$

$$t = -\frac{\ln(0.2)}{0.1} \approx 16.09$$

d

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 2.5$$



e

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$

$$v(t+1) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)})$$

$$v(t) < v(t+1)$$

$$2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t}) < 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)}) \quad | \div 2.5$$

$$1 - e^{-0.1t} < 1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)} \quad | -1; \cdot (-1)$$

$$e^{-0.1t} > e^{-0.1 \cdot (t+1)} \quad | \ln()$$

$$-0.1t > -0.1 \cdot (t+1) \quad | \cdot (-10)$$

$$t < t+1$$

f

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$$

$$= v(5) - v(2) \approx 0.98 - 0.45 = 0.53$$

g

$$v'(t) = 0.25 \cdot e^{-0.1t}$$

$$v'(2) = 0.20$$

h Die Beschleunigung ist bei  $t = 0$  am größten, da sie ständig kleiner wird.

## 3.26 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

$$\text{z. B. } \begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{vmatrix} \quad 2 \times 3 \text{ LGS}$$

### LGS in Stufenform

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_1 = 5 \\ 4x_2 = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  einfach zu lösen

$$\text{III } 4x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 2$$

eingesetzt in II

$$x_1 + 3 \cdot 2 = 5 \rightarrow x_1 = -1$$

eingesetzt in I

$$4 \cdot (-1) - 2 + 3x_3 = 2 \rightarrow x_3 = \frac{8}{3}$$

$$L = \left\{(-1|2|\frac{8}{3})\right\}$$

### 3.26.1 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren dient dazu, ein LGS in Stufenform zu überführen und dann zu lösen.

256/4

a

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{vmatrix}$$

Eliminiere  $x_1$  aus 2 der 3 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ III - 2 \cdot I \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 18x_2 & - & 1x_3 & = & 17 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ 2 \cdot II - 3 \cdot I \\ \end{matrix}$$

Eliminiere  $x_2$  aus 1 der 2 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 38x_3 & = & 38 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ II - 3 \cdot III \\ \end{matrix}$$

Löse LGS in Stufenform

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ & & & & 38x_3 & = & 38 \\ & & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix}$$

$$II \quad 38x_3 = 38 \rightarrow x_3 = 1$$

eingesetzt in III

$$6x_2 - 13 \cdot 1 = -7 \rightarrow x_2 = 1$$

eingesetzt in I

$$2x_1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_1 = 1$$

$$L = \{(1|1|1)\}$$

### 3.26.2 Matrix-Schreibweise

256/4

b

$$\begin{vmatrix} -x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & -2 \end{vmatrix} \quad II + I; \quad III - II$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 12 & 0 & \vdots & 12 \end{vmatrix} \quad II - 3 \cdot III$$

...

$$L = \{0|1|2\}$$

c

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \\
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 0 & -3.6 & -6 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| II - 2 \cdot I \\
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 2.1 & 0 & 0 & -2.4 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| II + 3.6 \cdot III \\
 2.1x_1 = -2.4 \rightarrow x_1 = -\frac{8}{7} \\
 0.5 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) + x_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{11}{7} \\
 0.6x_2 + 1.8 \cdot \frac{11}{7} = 3 \rightarrow x_2 = \frac{2}{7} \\
 L = \left\{ -\frac{8}{7} \mid \frac{2}{7} \mid \frac{11}{7} \right\}
 \end{array}$$

### Beispiel einer Sonderfall-Lösung

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{array} \right| \\
 \left| \begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & = & 50 \end{array} \right| I + 3 \cdot II
 \end{array}$$

Eine Variable ist frei wählbar und wird  $a$  bezeichnet

$$x_3 = a$$

$$II - x_2 + 12a = 50 \rightarrow x_2 = 12a - 50$$

$$I - 3x_1 + 2(12a - 50) - 3a = 5 \rightarrow x_1 = -7a + 35$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a + 35 \\ 12a - 50 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a \\ 12a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung im  $\mathbb{R}^3$

### 3.26.3 Steckbriefaufgaben

**Beispiel** Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Funktion zweiten Grades

$$y = ax^2 + bx + c$$

Merkmale:

1. verläuft durch  $P(2|5)$

$$f(2) = 5$$

$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad 5 = 4a + 2b + c$$

2. hat bei  $x = 3$  die Steigung 10

$$f'(x) = 2ax + b = 10$$

$$10 = 6a + b$$

3. schneidet die y-Achse bei 5

$$f(0) = 5$$

$$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$5 = c$$

$$c = 5$$

$$10 = 6a + b \quad \Rightarrow \quad b = 10 - 6a$$

$$5 = 4a + 2(10 - 6a) + 5 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$$

$$b = 10 - 6 \cdot 2.5 = -5$$

Die gesuchte Funktion heißt  $f(x) = 2.5x^2 - 5x + 5$

### Beispiele für Bedingungen

- hat bei  $P(1|3)$  einen Wendepunkt

$$f(1) = 3$$

$$f''(1) = 0$$

- verläuft bei  $P(-2|3)$  parallel zur Geraden  $g(x) = 4x - 1$

$$f'(-2) = 4$$

- hat an der Stelle  $x = 3$  einen Sattelpunkt

$$f'(3) = 0$$

$$f''(3) = 0$$

- ist eine achsensymmetrische Funktion 4. Grades / punktsymmetrische Funktion 5. Grades

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\Rightarrow b = d = 0$$

$$g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$\Rightarrow b = d = f = 0$$

262/1

c

$$A(1|3) \quad B(-1|2) \quad C(3|2)$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$3 = a + b + c$$

$$2 = a - b + c$$

$$2 = 9a + 3b + c$$

$$a - b + c = 9a + 3b + c \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{2}b + c = -\frac{3}{2} + c + 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 2\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 2\frac{3}{4}$$

262/4

a

$$A(0|1) \quad B(1|0) \quad C(-1|4) \quad D(2|-5)$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$1 = d$$

$$0 = a + b + c + d$$

$$4 = -a + b - c + d$$

$$-5 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$a + b + c = a + b - c + d + 8a + 4b + 2c + d \Rightarrow c = 2a + b$$

$$4 = -a + b - 2a - b + d \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b + c = 0$$

$$c = 2a + b \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$y = -x^3 + x^2 - x + 1$$

### 3.26.4 Funktionenschar

262/3

b

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$A(2|0) \quad B(-2|0)$$

$$\begin{vmatrix} 4a + 2b + c & = & 0 \\ 4a - 2b + c & = & 0 \end{vmatrix}$$

2x3 LGS unterbestimmt  $\Rightarrow$  eine Variable ist frei wählbar

$$\begin{vmatrix} 4a + 2b + c & = & 0 \\ 4b & = & 0 \end{vmatrix} \quad I - II$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$4a + c = 0$$

setze  $a = k$

$$4k + c = 0 \Rightarrow c = -4k$$

$$f_k(x) = kx^2 - 4k \quad \text{Funktionenschar, Parameterfunktion}$$



c

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ A(-4|0) \quad B(0|-4) \\ \left| \begin{array}{ccc} 16a & -4b & +c = 0 \\ & & c = -4 \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = -4$$

$$16a - 4b - 4 = 0$$

$$a = k$$

$$16k - 4b = 4 \Rightarrow b = 4k - 1$$

$$f_k(x) = kx^2 + 4kx - x - 4$$

262/8

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow b = d = 0$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow e = -1$$

$$f(1) = -3 \quad f'(1) = 0 \quad f''(1) < 0$$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 - 1$$

$$f(1) = a + b - 1 = -3 \Rightarrow a + b = -2$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f'(1) = 4a + 2b = 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$$

$$f''(x) = 24x^2 - 8$$

$$f''(1) = 16 > 0$$

$\Rightarrow$  keine Lösung

263/10

c

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P(-3|3) \quad Q(3|0)$$

$$f(-3) = 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 3$$

$$f(3) = 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0$$

$$9a_2 - 3a_1 + a_0 = 9a_2 + 3a_1 + a_0 + 3$$

$$-a_1 = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$9a_2 + 1.5 + a_0 = 3 \Rightarrow a_0 = 1.5 - 9a_2$$

$$a_2 = k$$

$$f_k(x) = kx^2 - 0.5x + 1.5 - 9k$$

schwarz

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 2.625$$

rot

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 3 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3.75$$

blau

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 0.75$$

263/11

$$f(\pm \frac{1624}{2}) = f(\pm 812) = 254 - 65 = 189$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow b = 0$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f(812) = ax^2 = 659344a = 189 \Rightarrow a \approx 2.8665 \cdot 10^{-4}$$

$$f(x) = 2.8665 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$$

263/12

$$SP(-1|-1) \quad SP(1|1) \Rightarrow f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0$$

$$WP(0|0) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f(1) = a + b + c = 1$$

$$f'(1) = 5a + 3b + c = 0$$

$$f''(1) = 20a + 6b = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad II - I$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad III - 3 \cdot II$$

$$8a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{2} + 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{4} + c = 1 \Rightarrow \frac{15}{8}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

# Kapitel 4

## Integralrechnung

$$s = v \cdot t \quad \text{für } v = \text{const.}$$

$$\text{Rechtecksfläche } A = 5s \cdot 15 \frac{m}{s} = 75m$$

Es gilt  $A = s =$  zurückgelegter Weg



$$s(t) = v(t) \cdot t$$

$s$  = Summe von Rechteckstreifen als Näherung für den Flächeninhalt



Durch Grenzwertbildung erhält man

$$s = \int_0^5 v(t) \cdot dt$$

## 4.1 Untersumme - Obersumme

Beispiel  $f(x) = y = x^2 \quad x \in [0; 1]$



### Untersumme

$$U_5 = 0.2 \cdot (0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64) = 0.24FE$$

Der wahre Flächeninhalt ist sicher größer als  $0.24FE$

### Obersumme

$$O_5 = 0.2 \cdot (0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1) = 0.44FE$$

Der wahre Flächeninhalt ist sicher kleiner als  $0.44FE$

5 → Intervall in 5 gleiche Abschnitte:

$I = [0; 1] \Rightarrow$  Intervallbreite 0.2 → Breite der Rechtecke

$(0 + \dots + 0.64)$  bzw.  $(0.04 + \dots + 1)$  → Höhen der Rechtecke

$FE \rightarrow$  Flächeneinheiten

$$\begin{aligned} U_{10} &= 0.1 \cdot (0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81) \\ &= 0.285FE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_{10} &= 0.1 \cdot (0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1) \\ &= 0.385FE \end{aligned}$$

#### 4.1.1 Obersumme/Untersumme $\rightarrow \lim \rightarrow \text{Integral}$

$$f(x) = x^2$$

Teile das Intervall in  $n$  Teile

$\rightarrow$  Jeder Teil ist  $\frac{b}{n}$  (da  $b = 1 \rightarrow \frac{1}{n}$ ) Längeneinheiten breit

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2(n+1)-1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{1}{3}$$

Der wahre Flächeninhalt ist  $A = \frac{1}{3}FE$

$$\text{Wenn gilt, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \text{Zahl} = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Existiert ein gemeinsamer Grenzwert ( $n \rightarrow \infty$ ) von Untersumme und Obersumme, so nennt man den Grenzwert Integralwert des bestimmten Integrals.

**160/3**

a  $1FE \hat{=} 1000000m^3$  Wasser

- b Am schnellsten zwischen  $2h$  und  $4h$ .  
Am langsamsten zwischen  $8h$  und  $10h$ .  
Nach  $12h$  wiederholt sich der Graph periodisch.
- c Der Graph wird um 25% gestreckt, die Fläche wächst also um 25%.

## 4.2 Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

$a, b$  ... linke bzw. rechte Intervallgrenze

$f(x)$  ... Integrand, zu integrierende Funktion

$x$  ... Integrationsvariable

$dx$  ... Differenzial  $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta x = dx$

$f(x) \cdot dx$  ... Fläche eines infinitesimal schmalen Rechteckstreifens mit Breite  $dx$  und Höhe  $f(x)$

$\int$  ... Integralzeichen meint eine Summation

liegt  $f(x)$  unterhalb der  $x$ -Achse ( $< 0$ ) im Intervall  $[a; b]$ , so gilt  $\int_a^b f(x) \cdot dx < 0$

Das Integral ist die Differenz oberhalb der  $x$ -Achse und unterhalb der  $x$ -Achse liegender Flächenstücke



## 4.3 Berechnung von Integralen, Hauptsatz

Gesucht: Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f(x) = y = \frac{2}{5}x^3$  im Intervall  $[0; b]$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx$$

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left( \frac{1}{5} \left( \frac{b}{n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{2b}{n} \right)^3 + \dots + \frac{1}{5} \left( \frac{(n-1) \cdot b}{n} \right)^3 + \frac{1}{5} b^3 \right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{4} n^2 \cdot (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{20} b^4$$

Betrachte den Flächeninhalt zu linker Grenze  $a$  und rechter Grenze  $b$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \frac{1}{20} a^4 \quad \text{fuer } [0; a] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \frac{1}{20} b^4 \quad \text{fuer } [0; b] \\ A &= \frac{1}{20} b^4 - \frac{1}{20} a^4 \quad \text{fuer } [a; b] \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{20} b^4 - \frac{1}{20} a^4 = \int_a^b \frac{1}{5} x^3 \cdot dx = \left[ \frac{1}{20} x^4 \right]_a^b$$

### 4.3.1 Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dabei gilt  $F'(x) = f(x)$

$F(x)$  heißt Aufleitungsfunktion oder Stammfunktion von  $f(x)$ .

$$\text{im Beispiel: } F(x) = \frac{1}{20}x^4 \rightarrow \left(\frac{1}{20}x^4\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{20}x^4\right) = \frac{1}{5}x^3$$

**167/3**

a

$$f(x) = x^2 \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3$$
$$\int_0^4 x^2 \cdot dx = F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 \quad F(x) = \frac{1}{40}x^5$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{8}x^4 \cdot dx = F(-1) - F(-2) = 0.775$$

j

$$f(x) = 0.5x^2 \quad F(x) = \frac{1}{6}x^3$$
$$\int_{-4}^4 0.5x^2 \cdot dx = F(4) - F(-4) = \frac{64}{3}$$

k

$$f(x) = x^5 \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6$$
$$\int_{-1}^1 x^5 \cdot dx = F(1) - F(-1) = 0$$

## 4.4 Integrale lösen - Anwendung

**168/11**

$$v(t) = 9.81 \cdot t \quad V(t) = s(t) = 4.905 \cdot t^2$$
$$\int_0^3 v(t) \cdot dt = V(3) - V(0) = 44.145$$

**168/13**

a

$$\begin{aligned}f(x) &= x & F(x) &= 0.5x^2 \\ \int_0^z x \cdot dx &= 18 = F(z) - F(0) = F(z) - 0 \\ F(z) &= 18 \quad \Rightarrow \quad z = 6\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x & F(x) &= 2x^2 \\ \int_1^z 4x \cdot dx &= 30 = F(z) - F(1) = F(z) - 2 \\ F(z) &= 32 \quad \Rightarrow \quad z = 4\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x & F(x) &= x^2 \\ \int_z^{10} 2x \cdot dx &= 19 = F(10) - F(z) = 100 - F(z) \\ F(z) &= 81 \quad \Rightarrow \quad z = 9\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.4 & F(x) &= 0.4x \\ \int_0^{2z} 0.4 \cdot dx &= 8 = F(2z) - F(0) = F(2z) - 0 \\ F(2z) &= 8 \quad \Rightarrow \quad 2z = 20 \quad \Rightarrow \quad z = 10\end{aligned}$$

**168/15**

a

$$\begin{aligned}f(x) &= -2x^2 + 8x + 1 = 0 \\ x_{1/2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{72}}{-4} \\ x_1 &\approx -0.1213 & x_2 &\approx 4.1213\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+3)^2 \cdot (x+1) = 0 \\(x+3)^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3 \\(x+1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2 \cdot (x^2 - 10) + 4x^2 = 8x^4 - 40x^2 = 0 \\x_1 &= 0 \\(x^2 - 10) &= -1 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 3\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= 4 \cdot (x - 0.5)^4 - 4 = 0 \\(x - 0.5)^4 &= 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.5 \quad x_2 = -0.5\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x - e^2 = 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.2e^{2x} - 1 = 0 \\e^{2x} &= 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log(5)}{2} \approx 0.8047\end{aligned}$$

Teil III

12/1

## 4.5 Stammfunktion bilden, integrieren

$$\int_a^b x^7 \cdot dx = \left[ \frac{1}{8} x^8 \right]_a^b$$

$$\int \frac{1}{(x+4)^3} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-2} + c$$

$$\int \frac{5}{(3x-2)^5} \cdot dx = -\frac{5}{4 \cdot 3} \cdot (3x-2)^{-4} + c$$

$$\int \frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot e^{2x} + c$$

## 4.6 bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx = [\ln(|x|)]_a^b$$

sofern  $a, b > 0$  oder  $a, b < 0$  kein Problem

wenn eines größer und eines kleiner 0 ist, dann muss man genauer untersuchen (Polstelle!)

$$a = -1 \quad b = 2$$

$$\int_a^b \frac{1}{2x-5} \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln(|2x-5|) \right]_a^b$$

171/3

a

$$\int_0^2 (2+x)^3 \cdot dx = \left[ \frac{1}{4} \cdot (2+x)^4 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot ((2+2)^4 - (2+0)^4) = 60$$

b

$$\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx = \left[ x - \frac{1}{x} \right]_2^3 = \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

c

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[ -(x+1)^{-1} \right]_0^2 = -(2+1)^{-1} + (0+1)^{-1} = \frac{2}{3}$$

d

$$\int_0^9 \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \left[ \frac{4}{15} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = \frac{4}{15} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot 0^{\frac{3}{2}} = 7.2$$

e

$$\int_{-0.5}^0 e^{2x+1} \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_{-0.5}^0 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0 + 1} - \frac{1}{2} e^{2 \cdot (-0.5) + 1} \approx 0.8591$$

f

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(3x - \pi) \cdot dx &= \left[ -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x - \pi) \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \cos(3\pi - \pi) + \frac{1}{3} \cdot \cos(3 \cdot 0 - \pi) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

g

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[ \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2}x} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2} \cdot 1} - \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2} \cdot (-1)} = \frac{2e - 2}{5 \cdot \sqrt{e}} \approx 0.4169$$

h

$$\int_{-\pi}^\pi \cos(3x) \cdot dx = \left[ -\frac{1}{3} \sin(3x) \right]_{-\pi}^\pi = -\frac{1}{3} \sin(3\pi) + \frac{1}{3} \sin(3 \cdot (-\pi)) = 0$$

**171/4**

c

$$\int_3^4 \frac{1}{2(x+1)} \cdot dx = \left[ \frac{\ln(x+1)}{2} \right]_3^4 = \frac{\ln(4+1)}{2} - \frac{\ln(3+1)}{2} \approx 0.1116$$

### 4.6.1 Integralfunktion

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = J$$

$$J_a(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Integralfunktion zur unteren (linken) Grenze  $a$ . Sie gibt zu jedem später eingesetzten Wert  $x$  ( $= b$ ) den bestimmten Integralwert an.

$$\int f(x) \cdot dx = [F(x)]^x = F(x) + c$$

unbestimmtes Integral

175/2

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad J_a(x) = \int_a^x \frac{1}{2}t \cdot dt$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ J_{-4}(x) & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ J_0(x) & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ J_2(x) & 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & 8 \end{array}$$

## 4.7 Rechenregeln für Integrale

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \pm \int_a^b g(x) \cdot dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \cdot dx$$



172/15

a

$$\int_{-1}^{3.3} 5x^2 \cdot dx - 10 \cdot \int_{-1}^{3.3} \frac{1}{2}x^2 \cdot dx = 0$$

b

$$\int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2 + 4}) \cdot dx + 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4} \cdot dx = \int_0^1 x \cdot dx = 0.5$$

c

$$\int_3^{3.7} \frac{1}{x} \cdot dx + \int_{3.7}^4 \frac{1}{x} \cdot dx = \int_3^4 \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(4) - \ln(3) \approx 0.2877$$

176/10

$$f(t) = 50t^4 \cdot e^{-t}$$

a Die Integralfunktion gibt die Anzahl der Telefonanrufe bis zum Zeitpunkt  $x$  an.

$$J_0(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt$$
$$J_0(4) = \int_0^4 f(t) \approx 445$$

b

$$J_4(8) = J_0(8) - J_0(4) \approx 1080 - 445 = 635$$

Die Anzahl der Anrufer in der Warteschleife ist zu dem Zeitpunkt am höchsten, an dem die Anrufer pro Minute wieder unter 200 sinken (bei  $t \approx 5$ ).

176/9

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 12)\right)$$
$$g(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 6)\right)$$

- a Zunahme ( $f(t) > 0$ ) zwischen 6 und 18 Uhr  
 Abnahme ( $f(t) < 0$ ) zwischen 18 und 6 Uhr

Zunahme ( $g(t) > 0$ ) zwischen 0 und 12 Uhr  
 Abnahme ( $g(t) < 0$ ) zwischen 12 und 24 Uhr

- b Am schnellsten um 12 Uhr (Hochpunkt)  
 Am langsamsten um 0/24 Uhr (Tiefpunkt)

Am schnellsten um 6 Uhr (Hochpunkt)  
 Am langsamsten um 18 Uhr (Tiefpunkt)

- c Maximal um 18 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)  
 Minimal um 6 Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

Maximal um 12 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)  
 Minimal um 0/24 Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

d

$$F(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + c$$

$$c = 20 - F_{c=0}(12) = 20$$

$$F(18) \approx 23.82 \quad F(6) \approx 16.18$$

$$G(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + c$$

$$c = 20 - G_{c=0}(12) \approx 16.1803$$

$$G(12) = 20 \quad G(0) = G(24) \approx 12.36$$

## 4.8 Ableitung der Umkehrfunktion



$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \sqrt{y}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)}$$

### Beispiele

$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = y = e^x \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \ln(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{y}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = y = \sin(x) \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \operatorname{asin}(y)$$

$$\begin{aligned}\overline{f'(y)} &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{asin}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{asin}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = y = \cos(x) \Leftrightarrow f(y) = x = \operatorname{acos}(y)$$

$$\begin{aligned}\overline{f'(y)} &= \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{1}{-\sin(\operatorname{acos}(y))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{acos}(y))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

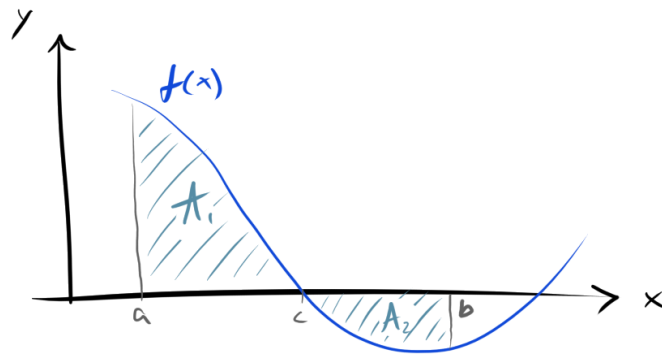
$$f(x) = y = \tan(x) \Leftrightarrow f(y) = x = \operatorname{atan}(y)$$

$$\begin{aligned}\overline{f'(y)} &= \cos^2(x) = \cos^2(\operatorname{atan}(y)) \\ &= 1 - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(\operatorname{atan}(y)) = 1 - \frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}\end{aligned}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

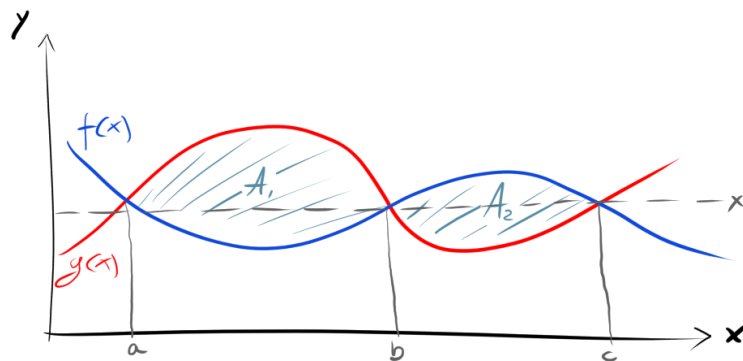
## 4.9 Integral und Flächeninhalt



$$A = A_1 + A_2$$

$$A \neq \int_a^b f(x) \cdot dx = I$$

$$A = \left| \int_a^c f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_c^b f(x) \cdot dx \right|$$



$$A = A_1 + A_2$$

1. Berechne die Schnittstellen  $a, b, c$

$$2. A = \left| \int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx \right| + \left| \int_b^c (g(x) - f(x)) \cdot dx \right|$$

Wie die Flächen zur  $x$ -Achse liegen ist unwichtig, weil ich gedanklich beide Graphen gemeinsam soweit nach oben schieben kann dass die Flächen komplett oberhalb der  $x$ -Achse liegen.

$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow f(x) + d \\ g(x) &\longrightarrow g(x) + d \end{aligned}$$

Durch Differenzialbildung fallen die gedanklich eingeführten Verschiebungen wieder weg.

$$\int_a^b ((f(x) + d) - (g(x) + d)) \cdot dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

179/2

a

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.5x^2 + 0.5 & g(x) &= -1.5 \\ F(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + 0.5x & G(x) &= -1.5x \end{aligned}$$

I  $A_2 + A_3$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \right| \\ &= |F(1) - F(-1)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

II  $A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) \cdot dx \right| \\ &= |(F(2) - F(-2)) - (G(2) - G(-2))| = 5\frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

III  $A_3$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 f(x) \cdot dx \right| \\ &= |F(1) - F(0)| = \frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

IV  $A_1$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{-1} f(x) \cdot dx \right| \\ &= |F(-1) - F(-2)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

180/5

a

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = -x^2 + 4x$$

$$f(x) = g(x) \quad L = \{0; 2\}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x$$

$$A = \left| \int_0^2 (2x^2 - 4x) \cdot dx \right| = \left| \left[ \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 2\frac{2}{3}FE$$

b

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad g(x) = 2.5x - 5.25$$

$$f(x) = g(x) \quad L = \{2; \sim -0.4; \sim 0.5\}$$

$$f(x) - g(x) = -2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} A &\approx \left| \int_{0.5}^2 \left( -2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx \right| \\ &= \left| \left[ -1.25x^2 + 5.25x + \frac{1}{x} \right]_{0.5}^2 \right| \approx 1.7FE \end{aligned}$$

#### 4.9.1 Flächeninhalt, uneigentliche Integrale

180/8

$$f_t(x) = \frac{t}{x^2} \quad [1; 2]$$

$$F_t(x) = -\frac{t}{x}$$

$$A(t) = \int_1^2 -\frac{t}{x} \cdot dx = \frac{t}{2}$$

$$A(16) = 8$$

180/10

$$f_a(x) = a \cdot \sin(x) \quad g_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot \sin(x) \quad x \in [0; \pi]$$

$$f_a(x) - g_a(x) = \sin(x) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$A(a) = \int_0^\pi \sin(x) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot dx = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot [-\cos(x)]_0^\pi = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot 2$$

$$A'(a) = -\frac{2}{a^2} + 2$$

$$A''(a) = \frac{4}{a^3}$$

$$A'(a) = 0 \quad L = \{\pm 1\}$$

$$A''(1) = 4 > 0 \Rightarrow TP$$

$$\text{Minimaler Flächeninhalt: } A(1) = 4FE$$

$$\text{Beispiel } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad [3; \infty[$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_3^z \frac{1}{x^2} \cdot dx = \lim_{z \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_3^z$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}FE$$

183/1

Fig. 1

$$y = \frac{1}{(x+1)^2} \quad [1; z]$$

$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^z = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = \frac{1}{2}$$

Fig. 2

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \quad [2; z]$$

$$A(z) = \int_2^z e^{-\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^z = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{e}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = \frac{2}{e} \approx 0.736$$



Fig. 3

$$y = \frac{2}{x^3} \quad [z; 1]$$

$$A(z) = \int_z^1 \frac{2}{x^3} \cdot dx = \left[ -\frac{1}{x^2} \right] = -1 + \frac{1}{z^2}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} A(z) = \infty$$

Fig. 4

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad [z; 4]$$

$$A(z) = \int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot dx = [8 \cdot \sqrt{x}] = 16 - 8 \cdot \sqrt{z}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} A(z) = 16$$

**183/7**

$$W = \int_{h_1}^{h_2} F(s) \cdot ds$$

$$F(s) = \gamma \frac{m \cdot M}{s^2}$$

$$c = \gamma \cdot m \cdot M \approx 3.982 \cdot 10^{17} \cdot \frac{m \cdot kg}{s^2}$$

$$F(s) = c \cdot s^{-2}$$

$$W = \int_{h_1}^{h_2} c \cdot s^{-2} \cdot ds = [-c \cdot s^{-1}]_{h_1}^{h_2}$$

**a**

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \quad h_2 = 4.22 \cdot 10^7 m$$

$$W = [-c \cdot s^{-1}]_{6.37 \cdot 10^6 m}^{4.22 \cdot 10^7 m} \approx 1.333 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 5.308 \cdot 10^{10} Nm$$

**b**

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \quad h_2 \rightarrow \infty$$

$$W = \lim_{h_2 \rightarrow \infty} [-c \cdot s^{-1}]_{6.37 \cdot 10^6 m}^{h_2} \approx 1.570 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 6.252 \cdot 10^{10} Nm$$

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & f(x) = \frac{1}{x^3} \quad F(x) = -\frac{1}{2 \cdot x^2} \\
\text{II} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad F(x) = -\frac{1}{x} \\
\text{III} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad F(x) = 2 \cdot \sqrt{x}
\end{array}$$

a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^z$$

$$\text{I} = \frac{1}{2}$$

$$\text{II} = 1$$

$$\text{III} = \infty$$

b

$$\lim_{z \rightarrow 1} \int_z^0 f(x) \cdot dx = [F(x)]_z^1$$

$$\text{I} = \infty$$

$$\text{II} = \infty$$

$$\text{III} = 2$$

180/11

$$f(x) = x^2$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(a) = 2a$$

$$f(a) = a^2 \Rightarrow b = a^2 - 2a \cdot a = -a^2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2a \cdot x - a^2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a (f(x) - t(x)) \cdot dx &= \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) \cdot dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\
&= \frac{1}{3}a^3
\end{aligned}$$

## 4.10 Integration von Produkten: partielle Integration

Ableitungs-Produktregel:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad | - u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v' \quad | \int$$

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

**Beispiel**

$$\int \sin(x) \cdot x \cdot dx = -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 \cdot dx$$

$$= -\cos(x) \cdot x + \sin(x) + c$$

$$(-\cos(x)) \cdot x + \sin(x))' = \sin(x) \cdot x$$

$$\int e^{2x} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \left( \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1 \cdot dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$= e^{2x} \cdot \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right)$$

**Spezialfälle**

$$\int 1 \cdot \ln(x) \cdot dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - x$$

(Stammfunktion von  $\ln(x)$ )

$$\begin{aligned}
\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx &= -\cos(x) \cdot \cos(x) - \int \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot dx \\
&= -\cos^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx \quad | + \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx \\
2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx &= -\cos^2(x) \quad | \div 2 \\
\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx &= -\frac{\cos^2(x)}{2}
\end{aligned}$$

**188/1**

a

$$\int_{-1}^1 e^x \cdot x \cdot dx = [e^x \cdot x]_{-1}^1 - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = [e^x \cdot x - e^x]_{-1}^1 = \frac{2}{e}$$

d

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.5} e^{2x+2} \cdot 4x \cdot dx &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4x \right]_0^{0.5} - \int \frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4 \cdot dx \\
&= [2e^{2x+2} \cdot x - e^{2x+2}]_0^{0.5} = e^2
\end{aligned}$$

**188/2**

b

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(x) \cdot x \cdot dx &= [\sin(x) \cdot x]_0^\pi - \int \sin(x) \cdot 1 \cdot dx \\
&= [\sin(x) \cdot x + \cos(x)]_0^\pi = -2
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(0.5x) \cdot 2x \cdot dx &= [-2\cos(0.5x) \cdot 2x]_0^{2\pi} - \int -2\cos(0.5x) \cdot 2 \cdot dx \\
&= [-2\cos(0.5x) \cdot 2x + 8\sin(0.5x)]_0^{2\pi} = 8\pi
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\sin(x))^2 \cdot dx &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int -\cos(x) \cdot \cos(x) \cdot dx \\
&= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int (-\sin^2(x) - 1) \cdot dx \\
&= [-\cos(x) \cdot \sin(x) + x]_0^\pi - \int \sin^2(x) \cdot dx \quad | + \int_0^\pi \sin^2(x) \cdot dx; \quad \div 2 \\
&= \left[ \frac{-\cos(x) \cdot \sin(x) + x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 e^x \cdot \cos(x) \cdot dx &= [\sin(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int \sin(x) \cdot e^x \cdot dx \\
&= [\sin(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - ([-\cos(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int -\cos(x) \cdot e^x \cdot dx) \\
&= [\sin(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int \cos(x) \cdot e^x \cdot dx \\
&= \left[ \frac{(\sin(x) + \cos(x)) \cdot e^x}{2} \right]_{-2}^2 \approx 1.912
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sin(\pi x) \cdot e^{2x} \cdot dx &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot dx \\
&= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^2 - \left( \left[ \frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) \right]_0^2 - \int -\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot dx \right) \\
&= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^2 - \left( \left[ \frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) + \frac{1}{4} \pi^2 \right]_0^2 - \int e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \cdot dx \right) \\
&= \left[ \frac{2e^{2x} \cdot \sin(\pi x) - \pi \cdot e^{2x} \cdot \cos(\pi x)}{\pi^2 + 4} \right]_0^2 = \frac{\pi}{\pi^2 + 4} - \frac{e^4 \cdot \pi}{\pi^2 + 4} \approx -12.140
\end{aligned}$$

## 4.11 Integration durch Substitution

Kettenregel:  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned}\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx &= \int (f(g(x)))' \cdot dx \\ &= f(g(x)) \quad \text{Dabei ist } f \text{ die Stammfunktion von } f' \\ \Rightarrow \text{Benenne um } f' &\rightarrow f \quad f \rightarrow F\end{aligned}$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = F(g(x))$$

Substitution 1

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx &\quad \text{ersetze } z = g(x) \quad \frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dz = g'(x) \cdot dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)}\end{aligned}$$

Resubstitution

$$= [F(g(x))]_a^b$$

Beispiel

$$\int_1^2 \frac{5x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$$

$$\begin{aligned}\text{subst. } z &= 1 + 3x^2 \quad \frac{dz}{dx} = (1 + 3x^2)' = 6x \quad dz = 6x \cdot dx \\ &= \frac{5}{6} \int_1^2 \frac{6x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx = \frac{5}{6} \int_4^{13} z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz \\ &= \frac{5}{6} \left[ 2z^{\frac{1}{2}} \right]_4^{13} = \frac{5}{6} \left[ 2 \cdot (1 + 3x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 \approx 2.676\end{aligned}$$

191/1

a

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx; \quad g(x) = 1 + 2x^2 \\ \text{subst. } z &= g(x) \quad dz = g'(x) \cdot dx \\ &= \int_{g(0)}^{g(2)} \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot dz = [2 \cdot \sqrt{z}]_1^9 = 4 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{-2x}{(4-3x^2)^2} \cdot dx; \quad g(x) = 4 - 3x^2 \\ \text{subst. } z &= g(x) \quad dz = g'(x) \cdot dx \\ &= \int_{g(-1)}^{g(1)} \frac{1}{3z^2} \cdot dz = \left[ -\frac{1}{3z} \right]_1^1 = 0 \end{aligned}$$

191/3

e

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \\ \text{subst. } z &= 1 + x^2 \quad dz = 2x \cdot dx \\ &= \int_1^{10} \frac{1}{z} \cdot dz = [\ln(z)]_1^{10} \\ \text{resubst.} \\ &= [\ln(1+x^2)]_0^3 = \ln(10) \approx 2.3026 \end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \frac{e^x}{2+e^x} \cdot dx \\ \text{subst. } z &= 2 + e^x \quad dz = e^x \cdot dx \\ &= \int_{2+e^{-1}}^{2+e^2} \frac{1}{z} \cdot dz = [\ln(z)]_{2+e^{-1}}^{2+e^2} \\ \text{resubst.} \\ &= [\ln(2+e^x)]_{-1}^2 \approx 1.3775 \end{aligned}$$

g

$$\int_e^{e^2} \frac{4}{x \cdot \ln(x)} \cdot dx$$

$$\text{subst. } z = \ln(x) \quad dz = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \frac{4}{z} \cdot dz = [4 \cdot \ln(z)]_1^2$$

resubst.

$$= [4 \cdot \ln(\ln(x))]_e^{e^2} = 4 \cdot \ln(2) \approx 2.7726$$

h

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi \cdot \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \cdot dx$$

$$\text{subst. } z = \sin(\pi x) \quad dz = \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot dx$$

$$= \int_{\sin(\frac{\pi}{3})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{z} \cdot dz = [\ln(z)]_{\sin(\frac{\pi}{3})}^{\sin(\frac{\pi}{2})}$$

resubst.

$$= [\ln(\sin(\pi x))]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \approx 0.1438$$

191/8

a

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} \cdot dx \quad t = e^{2x} + 3 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 2e^{2x} \quad dx = \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt \\ &= \int_{t(0)}^{t(\ln(2))} \frac{e^{4x}}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(\ln(2))} \frac{e^{2x}}{2t} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(\ln(2))} \frac{t-3}{2t} \cdot dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \cdot \ln(t) \right]_4^7 \approx 0.6606 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{2x+3}{(x+2)^2} \cdot dx \quad t = x+2 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 1 \quad dx = dt \\ &= \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2x+3}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2t-1}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} \left( \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) \cdot dt \\ &= \left[ 2 \cdot \ln(t) + \frac{1}{t} \right]_3^4 \approx 0.4920 \end{aligned}$$



c

$$\begin{aligned}
& \int_{0.5}^7 \frac{x}{\sqrt{4x-1}} \cdot dx \quad t = 4x - 1 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 4 \quad dx = \frac{dt}{4} \\
&= \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{4} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{4 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{t+1}{16 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt \\
&= \left[ \left( \frac{1}{16}t + \frac{1}{16} \right) \cdot 2 \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{1}{8} \cdot \sqrt{t} \cdot dt \\
&= \left[ \left( \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} \right) \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \left[ \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} \\
&= \left[ \frac{1}{8} \cdot (t \cdot \sqrt{t} + \sqrt{t} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3}) \right]_1^{27} \approx 6.3285
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
& \int_0^4 \frac{4}{1+2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx \quad t = 1 + 2 \cdot \sqrt{x} \quad t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad dx = \sqrt{x} \cdot dt \\
&= \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \sqrt{x} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \frac{t-1}{2} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4t-4}{2t} \cdot dt \\
&= \left[ \frac{1}{2t} \cdot (2t^2 - 4t) \right]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} -\frac{1}{2t^2} \cdot (2t^2 - 4t) \cdot dt \\
&= [t-2]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} \left( \frac{2}{t} - 1 \right) \cdot dt \\
&= [t-2 - (2 \cdot \ln(t) - t)]_{t(0)}^{t(4)} = [2 \cdot (t-1 - \ln(t))]_1^5 \approx 4.7811
\end{aligned}$$

## Substitution 2

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{ersetze } x = g(z) \\
&= \int_a^b f(g(z)) \cdot dx = \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= g(z) & z &= \bar{g}(x) \\
\frac{dx}{dz} &= g'(z) & dx &= g'(z) \cdot dz
\end{aligned}$$

$$= [F(g(z))]_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} = [F(x)]_a^b$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx & \quad x = \sin(z) \quad dx = \cos(z) \cdot dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(z)}{\sqrt{1-\sin^2(z)}} \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \cdot dz = [z]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \approx 0.524 \end{aligned}$$

AB/23

a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^x \cdot \sqrt{e^x + 1} \cdot dx \\ x(t) = \ln(t) & \quad t = e^x \quad dx = \frac{1}{t} \cdot dt \\ &= \int_{e^0}^{e^1} e^{\ln(t)} \cdot \sqrt{e^{\ln(t)} + 1} \cdot \frac{1}{t} \cdot dz = \int_1^e \sqrt{t+1} \cdot dz \\ &= \left[ \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(t+1)^3} \right]_1^e \approx 2.8943 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \ln(x^2) \cdot dx \\ x(t) = e^t & \quad t = \ln(x) \quad dx = e^t \cdot dt \\ &= \int_{\ln(1)}^{\ln(3)} \frac{1}{e^t} \cdot \ln(e^{t^2}) \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{\ln(3)} \ln(e^{2t}) \cdot dt = \int_0^{\ln(3)} 2t \cdot dt \\ &= [t^2]_0^{\ln(3)} = (\ln(3))^2 \approx 1.2069 \end{aligned}$$

### 4.11.1 Wiederholung

1. Ersetze  $g(x)$  durch  $z$

$$\begin{aligned} \int_a^b &= f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz \\ &= [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_a^b \\ z &= g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= g'(x) \\ dz &= g'(x) \cdot dx \end{aligned}$$

2. Ersetze  $x$  durch  $g(z)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot dx &= \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz \\ &= [F(g(z))]_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} = [F(x)]_a^b\end{aligned}$$

$$x = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{g}(x)$$

$$\frac{dx}{dz} = g'(z)$$

$$dx = g'(z) \cdot dz$$

AB/23

d

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot (1 - \ln(x))} \cdot dx \\ x(t) = e^t \quad t = \ln(x) \quad dx = e^t \cdot dt\end{aligned}$$

$$= \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{1 + \ln(e^t)}{e^t \cdot (1 - \ln(e^t))} \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{\ln(2)} \frac{1 + t}{1 - t} \cdot dt$$

$$z = 1 - t \quad \frac{dz}{dt} = -1 \quad dz = -dt$$

$$\begin{aligned}&= - \int_{1-0}^{1-\ln(2)} \frac{2 - z}{z} \cdot dz = - \int_{1-0}^{1-\ln(2)} \left( \frac{2}{z} - 1 \right) \cdot dz \\ &= - [2 \cdot \ln(z) - z]_1^{1-\ln(2)} \approx 1.6696\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot dx \\ x(t) = 2 \cdot \sin(t) \quad t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \quad dx = 2 \cdot \cos(t) \cdot dt\end{aligned}$$

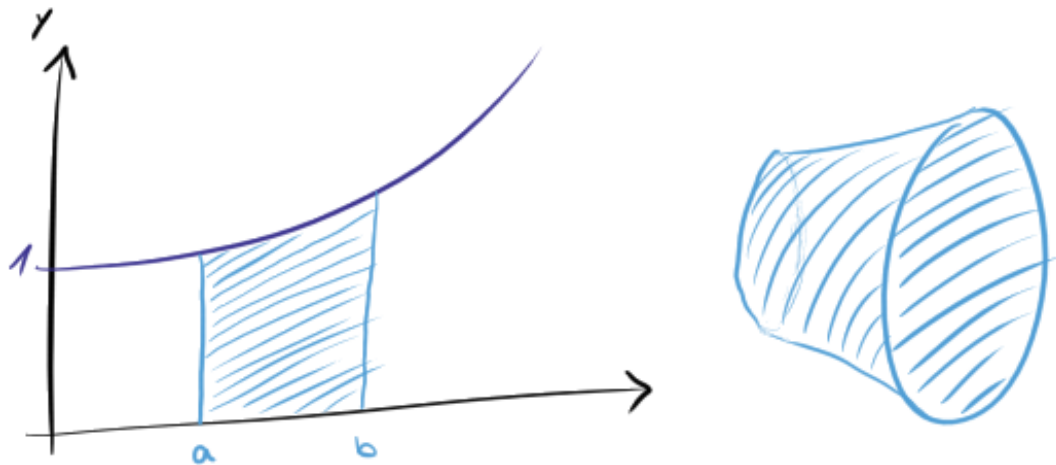
$$\begin{aligned}&= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot \cos(t)}{\sqrt{4 - (2 \cdot \sin(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot \cos(t)}{2 \cdot \sqrt{1 - (\sin(t))^2}} \cdot dt \\ &= \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot \cos(t)}{2 \cdot \sqrt{(\cos(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} 1 \cdot dt = [t]_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

## 4.12 Rotationskörper

Rotationssymmetrische Körper, die man sich dadurch entstanden vorstellen kann, dass eine Fläche um eine Achse ( $x$ -Achse) rotiert.

### 4.12.1 Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$



$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) \cdot dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{13}{6}FE \approx 2.17FE$$

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{293\pi}{60}VE \approx 15.34VE$$

196/1

a

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{x+1} \\V &= \pi \cdot \int_{-1}^2 (\sqrt{x+1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{-1}^2 (x+1) \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[ \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 = \pi \cdot 4.5VE \approx 14.1372VE\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{x} \\V &= \pi \cdot \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_1^3 x^{-2} \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[ -x^{-1} \right]_1^3 = \pi \cdot \frac{2}{3}VE \approx 2.0944VE\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 6x + 8 \\y &= 0 \quad L = \{2; 4\} \\V &= \pi \cdot \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_2^4 (x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64) \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[ \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{52}{3}x^3 - 48x^2 + 64x \right]_2^4 = \pi \cdot \frac{16}{15}VE \approx 3.3510VE\end{aligned}$$

197/8

$$f(x) = 0.5x + 1 \quad g(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x-1} \quad [0; 4]$$

a

$$\begin{aligned}V_W &= \pi \cdot \int_1^4 (1.5 \cdot \sqrt{x-1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_1^4 (2.25x - 2.25) \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[ 1.125x^2 - 2.25x \right]_1^4 = 10.125\pi \approx 31.8086 \\[V_W] &= cm^3\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \cdot \int_0^4 (0.5x + 1)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^4 (0.25x^2 + x + 1) \cdot dx \\
 &= \pi \cdot \left[ \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^4 = \frac{52\pi}{3} \approx 54.4543 \\
 V_G &= V - V_W = 10.125\pi - \frac{52\pi}{3} = 22.6456 \\
 [V] &= [V_G] = cm^3
 \end{aligned}$$

**197/9**

b

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2 - x^3 & g(x) &= x^2 \\
 f(x) &= g(x) & L &= \{0; 2\} \\
 V &= \pi \cdot ((3x^2 - x^3)^2 - (x^2)^2) \cdot dx = \pi \cdot (9x^4 - 6x^5 + x^6 - x^4) \cdot dx \\
 &= \pi \left[ \frac{8}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7 \right]_0^2 = \frac{192\pi}{35} \approx 17.2339
 \end{aligned}$$

**188/4**

b

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x \cdot \sin(x) \\
 \int f(x) \cdot dx &= -\cos(x) \cdot 2x - \int -\cos(x) \cdot 2 \cdot dx = -\cos(x) \cdot 2x + \sin(x) \cdot 2
 \end{aligned}$$

**188/9**

b

$$\begin{aligned}
 &\int_1^e x \cdot \ln(2x) \cdot dx \\
 &= \left[ \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(2x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(2x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x \cdot dx \\
 &= \left[ \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(2x) - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e \approx 4.3115
 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & \int_1^{e^2} x^2 \cdot \ln(x) \cdot dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^{e^2} \approx 224.2382 \end{aligned}$$

# Kapitel 5

## Analytische Geometrie

### 5.1 Punkte und Vektoren

Jeder Punkt im Raum  $\mathbb{R}^3$  ist durch 3 Koordinaten  $(x|y|z)$  oder  $(x_1|x_2|x_3)$  festgelegt, sofern zuvor der Ursprung  $O$  des Koordinatensystems festgelegt wird.

Den Vektor, der vom Ursprung  $O$  zum Punkt  $A(x|y|z)$  führt, nennt man Ortsvektor von  $A$  und notiert man

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor ist eine Steck (mit Länge) mit Orientierung (Pfeil).



#### 5.1.1 Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem

$A(2|3|4)$      $B(-3|1|-2)$      $C(3|0|2)$

Alle Punkte mit  $(-2|1|z)$  liegen auf einer Geraden parallel zur  $z$ -Achse.





275/2

a+c



b

$$D(-2|-1|0) \quad E(-2|0|3) \quad F(1|0|3) \quad H(-2|-1|3)$$

276/3

$$\begin{array}{ll} P(2|3|0) & Q(4|4|0) \\ R(0|3|1) & S(0|-2|-1) \\ T(2|0|2) & U(3|0|-1) \end{array}$$

276/10

$$A(2|0|0) \quad B(-1|2|-1) \quad C(-2|3|4) \quad D(3|4|-2)$$

a

$$A'(2|0|0) \quad B'(-1|2|\textcolor{red}{1}) \quad C'(-2|3|\textcolor{red}{-4}) \quad D'(3|4|\textcolor{red}{2})$$

b

$$A'(-2|0|0) \quad B'(1|2|-1) \quad C'(2|3|4) \quad D'(-3|4|-2)$$

c

$$A'(2|0|0) \quad B'(-1|-2|-1) \quad C'(-2|-3|4) \quad D'(3|-4|-2)$$

## 5.2 Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren

$\overrightarrow{OA}$  ist der Ortsvektor des Punktes  $A$ . Der Vektor führt vom Ursprung  $O$  zum Punkt  $A$ .  $\overrightarrow{BC}$  ist ein Verschiebungsvektor, der Punkt  $B$  auf Punkt  $C$  verschiebt, bzw.  $B$  mit  $C$  verbindet und auf  $C$  zeigt. Mit Hilfe des Vektors  $\overrightarrow{BC}$  lassen sich auch andere Punkte in gleicher Weise verschieben wie Punkt  $B$  auf Punkt  $C$ .

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P(0|1) \quad Q(4|3) \quad R(1.5|0.5)$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP'} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$



### 5.2.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



- $$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \text{ (Gegenvektor von } \vec{b} \text{)}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



- $$\vec{f} = 3 \cdot \vec{a}$$

$$\vec{f} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

**Darstellung eines Vektors durch andere Vektoren (Bsp. Verbindungsvektor)**

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

279/6

a

$$\begin{aligned} & A(-2|2|3) \quad B(5|5|5) \quad C(9|6|5) \quad D(2|3|3) \\ & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \text{Parallelogramm} \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} & A(2|0|3) \quad B(4|4|4) \quad C(11|7|9) \quad D(9|3|8) \\ & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \text{Parallelogramm} \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & A(2|-2|7) \quad B(6|5|1) \quad C(1|-1|1) \quad D(8|0|8) \\ & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \\ & \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC} \Rightarrow \text{kein Parallelogramm} \end{aligned}$$

279/7

a

$$A(21|-11|43) \quad B(3|7|-8) \quad C(0|4|5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -51 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -14 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 22 \\ -46 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 30 \end{pmatrix}$$



b

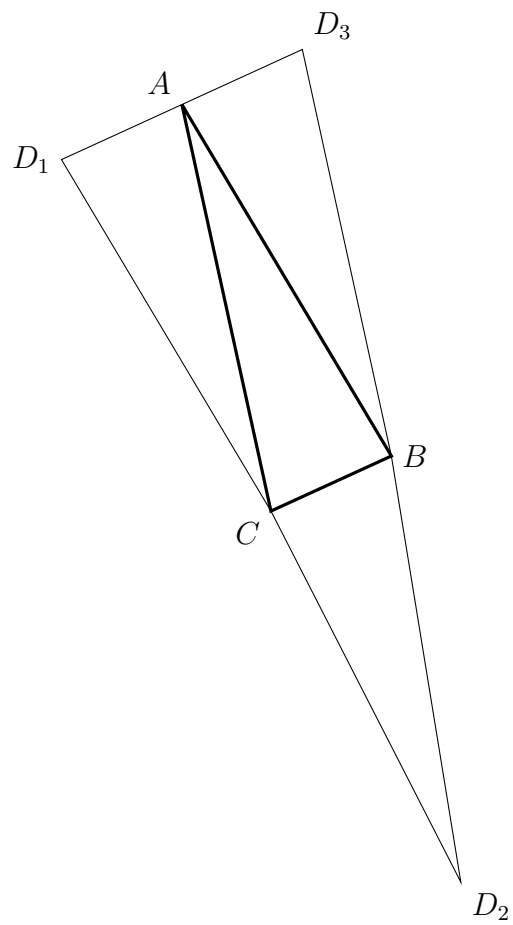
$$A(-75|199|-67) \quad B(35|0|-81) \quad C(1|2|3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 110 \\ -199 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -34 \\ 2 \\ 84 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -109 \\ 201 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 111 \\ -197 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -41 \\ 197 \\ -151 \end{pmatrix}$$



## 5.2.2 Vektorzüge und Linearkombinationen

(zu 279/6)

$M_1$  ... Mittelpunkt von  $\overline{AB}$

$M_2$  ... Mittelpunkt des Parallelogramms (mit  $D_1$ )

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

zu 6a

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu 6b

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

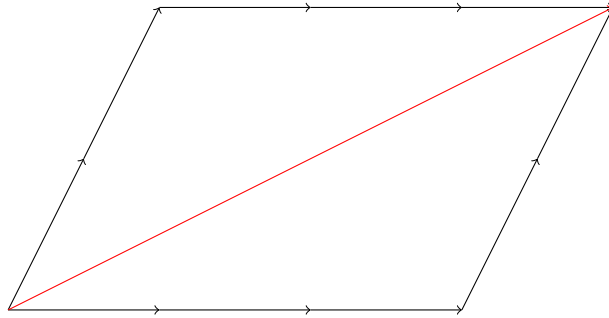
$$\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3.5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Setze ich mehrere Vektorpfeile, mit Koeffizienten multipliziert, aneinander, so nennt man das einen Vektorzug. Die rechnerische Summe solcher Vektoren heißt Linearkombination.

283/5

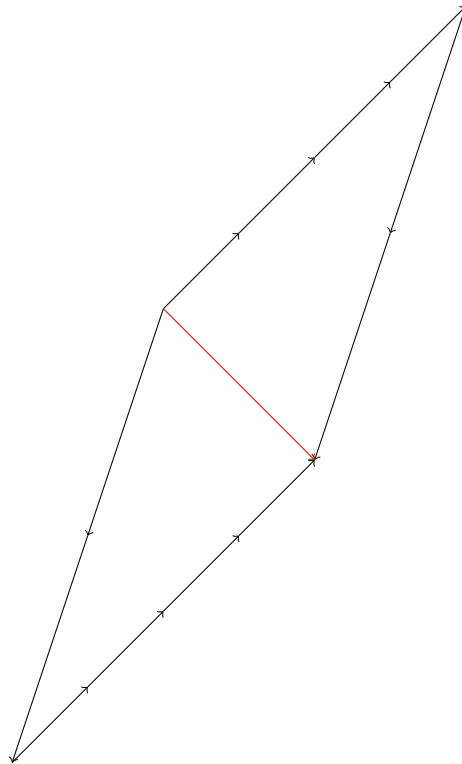
a

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$



b

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$





c

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$



**283/7**

d

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

f

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 30 \\ 17 \end{pmatrix}$$

284/11

f  $-(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$

g  $2(2\vec{a} + 4\vec{b}) = 4\vec{a} + 8\vec{b}$

h  $-4(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} + \vec{a} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$

i  $3(\vec{a} + 2(\vec{a} + \vec{b})) = 9\vec{a} + 6\vec{b}$

j  $6(\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b}) = 10\vec{a} - 2\vec{b}$

k  $7\vec{u} + 5(\vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{v})) = 2\vec{u} - 10\vec{v}$

284/12

a  $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b  $\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

c  $\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d  $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

### 5.3 Geraden in $\mathbb{R}^3$

$O$

$$\begin{array}{ccccccc} S_5 & A & S_2 & S_1 & S_3 & B & S_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_4} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_5} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Gerade durch die Punkte  $A$  und  $B$ :

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} \quad s \in \mathbb{R}$$

Parametergleichung einer Geraden  $g$ :

$g$  Name der Geraden

$\vec{x}$  Ortsvektor eines unbestimmten Punktes

$\overrightarrow{OA}$  Ortsvektor eines bestimmten Punktes  $A$  (heißt auch Stützvektor)

$s$  Parameter  $s \in \mathbb{R}$

Beim Durchlaufen aller Zahlen von  $\mathbb{R}$  werden nacheinander alle Punkte der Geraden  $g$  dargestellt

$\overrightarrow{AB}$  Richtungsvektor von  $g$  gibt die Richtung von  $g$  an

$$h: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiele für Punkte auf  $h$

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r = 0$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r = 1$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \quad r = 2$$

$$\overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = -1$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \in h$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gibt es ein  $r$ , das alle 3 Gleichungen löst?

$$3 = 1 - 3r \Rightarrow r = -\frac{2}{3}$$

$$7 = 5r \Rightarrow r = \frac{7}{5}$$

$$-1 = 2 + 2r \Rightarrow r = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow Q \notin h$$

287/2

a

$$A(1|2|2) \quad B(5|-4|7)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b

$$A(-3|-2|9) \quad B(0|0|3)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c

$$A(7|-2|7) \quad B(1|1|1)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**287/3**

c

$$X(2|3|-1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 = 7 + t \cdot 5 \Rightarrow t = -1$$

$$3 = t \cdot -3 \Rightarrow t = -1$$

$$-1 = 4 + t \cdot 5 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow X \in g$$

d

$$X(2|-1|-1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 = 1 + t \Rightarrow t = 1$$

$$-1 = t \cdot 3 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow X \notin g$$

**288/12**

a  $g$

$$P_1(2|9|0) \quad P_2(-4|1|0) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h$

$$H(-4|1|3) \quad P(2|5|-3) \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$i$

$$P_1(-4|5|3) \quad P_2(-4|9|0) \quad i: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$j$

$$P_1(-1|1|0) \quad P_2(-1|5|3) \quad j: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**b**  $g$

$$C(-8|11|0) \quad P(-2|5|3) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$h$

$$P_1(-2|5|3) \quad P_2(-6|9|3) \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i$

$$B(0|11|0) \quad P(-6|5|3) \quad i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$j$

$$M(-4|7|0) \quad P(-6|5|3) \quad j: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### 5.3.1 Kollinearität

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b} \quad t \in \mathbb{R}$$

für  $\vec{b}$  gilt:  $\vec{b}$  kann durch  $\vec{b}' = s \cdot \vec{b}$  ersetzt werden  $s \in \mathbb{R} \quad s \neq 0$

$\vec{b}' \parallel \vec{b}$   $\vec{b}'$  und  $\vec{b}$  sind kollinear

Sonderfall: Gerade durch  $O$

$$\text{z. B. } g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

hier ist  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , d. h.  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind kollinear ( $\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$ )

### 5.3.2 Lage zweier Geraden

4 Möglichkeiten unterschiedlicher Lage:

- Schnitt (Schnittpunkt)
- parallel
- identisch
- windschief

**Verfahren um festzustellen, welche Lage zwei Geraden  $g$  und  $h$  haben**

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

$$h: \vec{x} = \vec{c} + t \cdot \vec{d}$$

$$\vec{b} \stackrel{?}{=} r \cdot \vec{d}$$

- wahr:

$$\vec{a} \stackrel{?}{=} \vec{c} + t \cdot \vec{d} \quad \text{oder} \quad \vec{c} \stackrel{?}{=} \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

- wenn wahr, dann sind  $g$  und  $h$  identisch
- wenn nicht wahr, dann sind  $g$  und  $h$  parallel

- nicht wahr:

$$\vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c} + t \cdot \vec{d}$$

- finde ich ein  $s$  und ein  $t$ , sodass das LGS gelöst wird, so schneiden sich  $g$  und  $h$  in einem Punkt  $S$
- ansonsten sind  $g$  und  $h$  windschief

292/1

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r = 2$$

$\Rightarrow$  identisch oder parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  identisch



292/2

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9 + 3r = 7 + s$$

$$2r = -2 + s$$

$$6 + r = 2 + 2s$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad s = 2$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$S(9|0|6)$$

292/4

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r = -3$$

$\Rightarrow$  identisch oder parallel

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$5 = 7 + t \cdot (-6) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

$$0 = 1 + t \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

$$1 = 2 + t \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$  parallel

b

$$g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  nicht parallel

$$t_g \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t_h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_g \cdot 2 = 2 + t_h \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad t_g = 1$$

$$t_g \cdot 0 = 3 + t_h \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad t_h = -1$$

$$t_g \cdot 1 \neq 4 + t_h \cdot (-1)$$

$\Rightarrow$  windschief

293/8

b

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$i: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### 5.3.3 Parameterpunkte und -geraden

$$\overrightarrow{OA_b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b \cdot 0 \\ 5 + b \cdot 0 \\ 0 + b \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC_d} = \begin{pmatrix} 2d \\ 1 - 5d \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + d \cdot 2 \\ 1 + d \cdot (-5) \\ 7 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

293/10

a

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$3 - r = 1 + 2s$$

$$a + 5r = -22s$$

$$3 + 7r = a - 29s$$

$$a = 2 \quad r = 4 \quad s = -1$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 31 \end{pmatrix}$$

b

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3 + 10r = a + 6s$$

$$2 + 7r = -1 + 2s$$

$$a = 3 - s$$

$$a = 5 \quad r = -1 \quad s = -2$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

293/16

$$G = 10cm^2 \quad h = 15cm$$

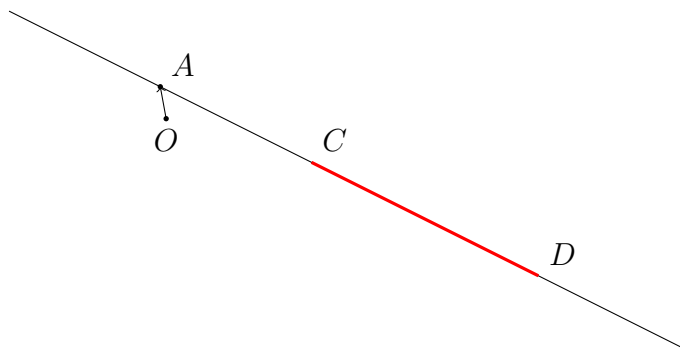
$$V_Z = G \cdot h = 150cm^3$$

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 50cm^3$$

$$V_Z - V_K = 100cm^3 = 0.1L$$

## 5.4 Abstand zweier Punkte, Vektorlänge, Streckenlänge

$$\text{Bsp. } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}: [2; 5]$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \overrightarrow{OD} &= \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{CD}| &= |\overrightarrow{OD}| = \text{Abstand } C \leftrightarrow D \\ \overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### Seitenlängen des Segels (Bsp. S. 294)

unten:  $4m$

links:  $\sqrt{(5m)^2 + (3m)^2}$  (Satz des Pythagoras)

rechts:  $\sqrt{(\sqrt{34}m)^2 + (4m)^2} = \sqrt{(5m)^2 + (3m)^2 + (4m)^2}$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{45} \approx 6.71LE$$

Die Länge eines Vektors  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  ist  $\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

297/2

a

$$A(0|0|0) \quad B(2|3|-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3.74LE$$

b

$$A(2|2|-2) \quad B(0|-1|5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{62} \approx 7.87LE$$

c

$$A(1|5|6) \quad B(1|6|7)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.41LE$$

### 5.4.1 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor hat die Länge 1LE

Einheitsvektor zu z. B.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \sqrt{30}$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

297/8

a

$$A(1|-2|2) \quad B(3|2|1) \quad C(3|0|3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \text{nicht gleichschenkelig}$$

b

$$\begin{aligned}
 & A(7|0|-1) \quad B(5|-3|-1) \quad C(4|0|1) \\
 & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13} \\
 & \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\
 & \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} \\
 & |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow \text{gleichschenkelig}
 \end{aligned}$$

297/9

a

$$\begin{aligned}
 & A(4|2|-1) \quad B(10|-8|9) \quad C(4|0|1) \\
 & \overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & \overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 & |\overrightarrow{AM_a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9 \\
 & |\overrightarrow{BM_b}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{198} \approx 14.07 \\
 & |\overrightarrow{CM_c}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} \approx 5.20
 \end{aligned}$$



b

$$\begin{aligned}
& A(1|2|-1) \quad B(-1|10|15) \quad C(9|6|-5) \\
\overrightarrow{OM_a} &= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OM_b} &= \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OM_c} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\
|\overrightarrow{AM_a}| &= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9 \\
|\overrightarrow{BM_b}| &= \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -18 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-18)^2} = \sqrt{396} \approx 19.90 \\
|\overrightarrow{CM_c}| &= \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15
\end{aligned}$$

c

zu a

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AM_a}| = 6 \\
|\overrightarrow{BS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{BM_b}| \approx 9.38 \\
|\overrightarrow{CS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{CM_c}| \approx 3.46
\end{aligned}$$

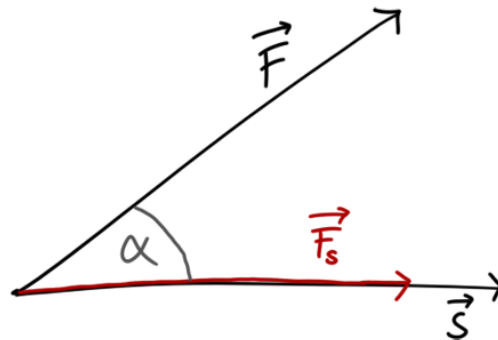
zu b

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AM_a}| = 6 \\
|\overrightarrow{BS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{BM_b}| \approx 13.27 \\
|\overrightarrow{CS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{CM_c}| = 10
\end{aligned}$$

## 5.5 Produkte zweier Vektoren

### 5.5.1 Skalarprodukt

Beispiel aus der Physik:



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha) \quad \vec{F}_s \dots \vec{F} \text{ in Richtung } \vec{s}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha) \cdot |\vec{s}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 7$$

Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$7 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{14} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}}\right) \approx 1.025 \approx 58.73^\circ$$

Spezialfall:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{z. B. } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

321/1

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow g \not\perp h$$

b

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g \perp h$$

zu 297/8

a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 11 \quad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{9}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{11}{3\sqrt{21}}\right) \approx 0.64 \approx 36.86^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \quad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{8}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{8}}\right) \approx 0.69 \approx 39.51^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \quad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-2}{3\sqrt{8}}\right) \approx 1.81 \approx 103.63^\circ$$

b

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \quad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{13}\right) \approx 1.09 \approx 62.51^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{14}$$

$$\beta = \gamma = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 1.03 \approx 58.74^\circ$$

zu 297/9

a

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 40 & |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| &= \sqrt{236} \cdot \sqrt{8} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{236} \cdot \sqrt{8}}\right) \approx 0.40 \approx 22.99^\circ \\ \vec{BA} \cdot \vec{BC} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = 196 & |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| &= \sqrt{236} \cdot \sqrt{164} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{196}{\sqrt{236} \cdot \sqrt{164}}\right) \approx 0.09 \approx 4.95^\circ \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = -32 & |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| &= \sqrt{8} \cdot \sqrt{164} \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{-32}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{164}}\right) \approx 2.65 \approx 152.06^\circ\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -48 & |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| &= \sqrt{324} \cdot \sqrt{96} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{-48}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{96}}\right) \approx 1.85 \approx 105.79^\circ \\ \vec{BA} \cdot \vec{BC} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = 372 & |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| &= \sqrt{324} \cdot \sqrt{516} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{372}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{516}}\right) \approx 0.43 \approx 24.52^\circ \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} = 144 & |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| &= \sqrt{96} \cdot \sqrt{516} \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{144}{\sqrt{96} \cdot \sqrt{516}}\right) \approx 0.87 \approx 49.68^\circ\end{aligned}$$

**321/2**

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2b_1 - 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 6$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2 - a_2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$-3 + 0 + 2b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = 1.5$$

**321/3**

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = 0$$

$$7a_1 + 17a_2 + 2a_3 = 0$$

$$\text{z. B. } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

322/8

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 1c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 2c_1 + 0c_2 + 3c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{3}{2}c_3$$

wähle willkürlich  $c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = -3$

setze  $c_1$  und  $c_3$  in I ein

$$-3 + 2c_2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 2c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 5c_1 - c_2 - 2c_3 = 0$$

$$\text{I} = \frac{1}{2} \cdot \text{II} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 7c_2$$

wähle willkürlich  $c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 7$

setze  $c_1$  und  $c_2$  in I ein

$$14 + 3 - c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 17$$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 4c_1 - c_2 + 5c_3 = 0$$

$$\text{I} = \text{II} \Rightarrow c_1 = c_2$$

wähle willkürlich  $c_1 = 5 \Rightarrow c_2 = 5$

setze  $c_1$  und  $c_2$  in I ein

$$5 + 10 + 5c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -3$$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

322/9

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 0 + 8 = 0 \Rightarrow c_1 = -8$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 0 + 2b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = -1.5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = -24 + b_2 - 6 = 0 \Rightarrow b_2 = 30$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 30 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 2 - 5 = 0 \Rightarrow c_1 = 3$$

$$\text{I } \vec{a} \cdot \vec{b} = b_1 + b_2 + 1 = 0$$

$$\text{II } \vec{b} \cdot \vec{c} = 3b_1 + 2b_2 - 5 = 0$$

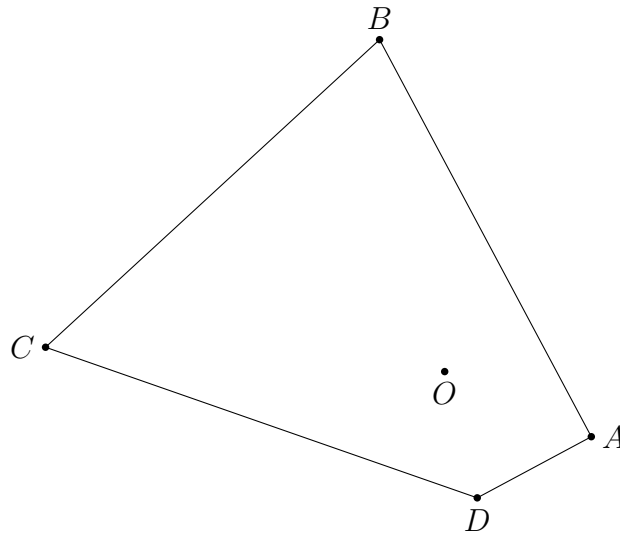
$$\Rightarrow b_1 = 7 \quad b_2 = -8 \quad (\text{Einsetzungsverfahren})$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

366/7

a

$$A(2|-2|-2) \quad B(-2|5.5|-2) \quad C(-6|2|4) \quad D(1|-2|1)$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3.5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{72.25} \cdot \sqrt{10}}\right) \approx 1.42 \approx 81.44^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|}\right) = \arccos\left(\frac{10.25}{\sqrt{64.25} \cdot \sqrt{72.25}}\right) \approx 1.42 \approx 81.35^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{CD} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CD}| \cdot |\vec{CB}|}\right) = \arccos\left(\frac{32}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{64.25}}\right) \approx 1.09 \approx 62.35^\circ$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{\vec{DA} \cdot \vec{DC}}{|\vec{DA}| \cdot |\vec{DC}|}\right) = \arccos\left(\frac{-16}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{74}}\right) \approx 2.20 \approx 126.03^\circ$$

b

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \approx 351^\circ$$

Die Summe der Innenwinkel ist nicht  $360^\circ$ , da das Viereck nicht auf einer Ebene liegt.

**366/3**

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 2a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 30^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3 + b^2}$$

$$\alpha = 30^\circ = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{3 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 3$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{c}{2} \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{1 + c^2}$$

$$\alpha = 30^\circ = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{c}{2 \cdot \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{1 + c^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$$

366/4

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{b} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 13 & |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \\ \alpha_{a,b} = \alpha_{-a,-b} &= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}}\right) &= 45^\circ \\ \alpha_{-a,b} = \alpha_{a,-b} &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

## 5.6 Vektorräume

Beispiel

$$\text{Vektorraum } V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{Prüfe } \vec{a} + \vec{b} \in V_1: \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nullvektor} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gegenvektor} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \left( \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Abgeschlossenheit:

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ a + b \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_2$$

$$\text{z. B. } a = 3, b = 5 \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_2$$

$$\left[ \begin{pmatrix} (a+b)^2 \\ a+b \\ c \end{pmatrix} \right] \in V_2$$

$\Rightarrow V_2$  ist kein Vektorraum, da er nicht abgeschlossen ist

300/1

b

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2(a+b) \\ 3(a+b) \end{pmatrix} \in V \quad k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak \\ 2ak \\ 3ak \end{pmatrix} \in V$$

$\Rightarrow V$  ist ein Vektorraum

c

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a^2+b^2 \\ a^3+b^3 \end{pmatrix} \notin V$$

$\Rightarrow V$  ist kein Vektorraum

### 5.6.1 Basis

Die Basis eines Vektorraums ist ein Satz von Vektoren mit den Eigenschaften:

- Jeder Vektor muss als Linearkombination der Vektoren der Basis darstellbar sein
- Die Anzahl der Basisvektoren muss minimal sein

Beispiel

$$V = \mathbb{R}^3 \quad Basis_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{z. B. } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Basis_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad M \text{ ist keine Basis}$$

Die Mindestzahl von Vektoren der Basis heißt Dimension des Vektorraums.  $\mathbb{R}^3$  ist ein 3-dimensionaler Vektorraum.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \quad Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad (1\text{-dim.})$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \quad Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (1\text{-dim.})$$

301/3

a

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & br \\ -br & ar \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$  ist ein Vektorraum

$$Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & br \\ 0 & cr \end{pmatrix}$$

$$ar + br + cr = r(a + b + c) = 0$$

$\Rightarrow N$  ist ein Vektorraum

$$Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$  ist kein Vektorraum

## 5.7 Lineare Abhängigkeit, Unabhängigkeit

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$$
$$-4\vec{a} = \vec{b} \quad \text{oder} \quad 4\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

$\vec{a}, \vec{b}$  sind linear abhängig; geometrisch formuliert:  $\vec{a}, \vec{b}$  sind kollinear

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c})$  sind jeweils linear unabhängig

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  sind linear abhängig, denn  $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$  oder  $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Allgemein gilt für 3 Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

gilt mindestens eine der Gleichungen

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c} \quad \text{oder}$$

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{oder}$$

$$r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

dann heißt die Vektormenge  $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$  linear abhängig

einfachere Prüfung:

gilt

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad r \neq 0 \vee s \neq 0 \vee t \neq 0$$

dann sind  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linear abhängig, andernfalls linear unabhängig

Prüfe auf lineare Abhängigkeit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\text{I} \quad r - 2s + 3t = 0$$

$$\text{II} \quad 2r + 2s - t = 0$$

$$\text{III} \quad 3r + s + t = 0$$

$$L = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\} \text{ ist linear unabhängig}$$

Ist  $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?

Das meint:

Lässt sich jeder Vektor des  $\mathbb{R}^3$  durch eine Linearkombination von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  darstellen?

Löse dazu:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

304/2

b

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$7r + s + 3t = 0$$

$$-r - 2s - 6t = 0$$

$$3r + s + 3t = 0$$

$$L = \{(0, 0, 0); (0, k, -\frac{k}{3})\} \Rightarrow \text{linear abhängig}$$

Die letzten beiden Vektoren sind kollinear. Der erste Vektor, der nicht kollinear zu den anderen beiden ist, lässt sich daher nicht durch eine Linearkombination der anderen beiden darstellen.