

Mathe LK Rh

Tim D.

MSS 2017-20

Inhaltsverzeichnis

I	11/1	6
1	Terme, Gleichungen, Ungleichungen	7
1.1	Pascalsches Dreieck	7
1.2	pq-Formel	7
1.3	abc-Formel	8
1.4	Satz von Vieta	8
1.5	Binomischer Lehrsatz	9
1.6	Gleichungen und Ungleichungen	9
1.6.1	Gleichung lösen durch Substitution	9
1.7	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	10
1.7.1	Potenz- und Wurzelgesetze	10
1.7.2	Logarithmengesetze	11
2	Funktion - Relation - Zahlenfolge	12
2.1	Zahlenfolgen	12
2.2	Monotonie, Beschränktheit	14
2.3	Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion	16
2.3.1	Grenzwerte	18
2.3.2	Grenzwerte von Funktionen: $\lim_{x \rightarrow \infty}$; $\lim_{x \rightarrow a}$	21
3	Analysis	24
3.1	Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit	24
3.2	Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0	26
3.3	Polynomdivision	28
3.4	Punktprobe	28
3.5	Mittlere Änderungsrate	29
3.6	Tangentensteigung, Ableitung	31
3.6.1	Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten	31
3.6.2	Ableitung	32
3.7	Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung	33
3.8	Ableitungsfunktion	36

3.9	Nullstellen	41
3.9.1	Mehrfache Nullstellen	42
3.10	Hoch-, Tief- und Sattelpunkte	46
3.11	2. Ableitungsfunktion	49
3.12	Wendepunkte	50
3.13	Nullstellen: Polynomdivision	57
3.14	Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$	62
3.15	Symmetrie	62
3.16	Kurvendiskussion	64
3.17	Tangente und Anwendungen	69
3.17.1	Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung	69
II	11/2	73
3.18	Optimieren unter Nebenbedingungen	74
3.19	Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung	78
3.19.1	Anwendungen des Newton-Verfahrens	80
3.20	AB Kurvenuntersuchungen	87
3.20.1	Ortslinie	89
3.21	Wiederholung	92
3.22	Sinus- und Kosinusfunktion	93
3.22.1	Vielfachheit der Lösungen von (geniometrischen) Gleichungen	93
3.22.2	Die allgemeine Sinusfunktion	95
3.22.3	AB Die Funktionen $f: x \mapsto a \cdot \sin(b(x - c))$ und ihre Graphen	96
3.22.4	Ableitung der Sinusfunktion	97
3.23	Neue Funktionen aus alten Funktionen	101
3.23.1	Ableitungsregeln	101
3.24	Exponentialfunktionen - Ableitung	108
3.24.1	Basis $\neq e$	111
3.25	Wiederholung	116
3.25.1	Sinusfunktionen und Newton-Verfahren	116
3.25.2	Produktregel	117
3.25.3	Quotientenregel	118
3.25.4	Kurvendiskussion	119
3.26	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	122
3.26.1	Gauß-Verfahren	123
3.26.2	Matrix-Schreibweise	125
3.26.3	Steckbriefaufgaben	126
3.26.4	Funktionenschar	129

4	Integralrechnung	133
4.1	Untersumme - Obersumme	134
4.1.1	Obersumme/Untersumme $\rightarrow \lim \rightarrow$ Integral	136
4.2	Das bestimmte Integral	137
4.3	Berechnung von Integralen, Hauptsatz	138
4.3.1	Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)	138
4.4	Integrale lösen - Anwendung	139
III	12/1	142
4.5	Stammfunktion bilden, integrieren	143
4.6	bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral . . .	143
4.6.1	Integralfunktion	145
4.7	Rechenregeln für Integrale	145
4.8	Ableitung der Umkehrfunktion	148
4.9	Integral und Flächeninhalt	150
4.9.1	Flächeninhalt, uneigentliche Integrale	152
4.10	Integration von Produkten: partielle Integration	156
4.11	Integration durch Substitution	159
4.11.1	Wiederholung	163
4.12	Rotationskörper	165
4.12.1	Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern	165
5	Analytische Geometrie	169
5.1	Punkte und Vektoren	169
5.1.1	Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem	169
5.2	Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren	171
5.2.1	Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl . . .	171
5.2.2	Vektorzüge und Linearkombinationen	176
5.3	Geraden in \mathbb{R}^3	179
5.3.1	Kollinearität	184
5.3.2	Lage zweier Geraden	184
5.3.3	Parameterpunkte und -geraden	189
5.4	Abstand zweier Punkte, Vektorlänge, Streckenlänge	190
5.4.1	Einheitsvektor	192
5.5	Produkte zweier Vektoren	195
5.5.1	Skalarprodukt	195
5.6	Vektorräume	204
5.6.1	Basis	206
5.7	Lineare Abhängigkeit, Unabhängigkeit	208

5.8	Wiederholung: Geometrie, Geraden	211
5.9	Parametergleichung einer Ebene	213
5.10	Sonderfälle	215
5.11	Kreuzprodukt	216
5.12	Spatprodukt	219
IV	12/2	220
5.13	Abstand eines Punktes von einer Geraden	221
5.14	Ebenendarstellung	222
5.14.1	Normalenform	222
5.14.2	Koordinatenform	224
5.14.3	Ebenen zeichnen	226
5.15	Lage Ebene \leftrightarrow Gerade	229
5.15.1	Schnittwinkel	233
5.16	Wiederholung	233
5.17	Lage Ebene \leftrightarrow Ebene	236
5.18	Abstand Ebene \leftrightarrow Punkt	239
5.18.1	HNF - Koordinatenform	243
5.19	Abstand Gerade \leftrightarrow Punkt	247
5.19.1	Abstandsbestimmung als Optimierungsaufgabe	247
5.20	Abstand windschiefer Geraden	252
5.21	Kreise und Kugeln	255
5.21.1	Kugeln, Geraden, Ebenen, Abstände	257
5.21.2	Kugel \leftrightarrow Kugel, Tangentialebene	261
6	Stochastik	263
6.1	Begriffe	263
6.2	Mehrstufige Zufallsversuche - Baumdiagramme	265
6.2.1	Baumdiagramme - Wahrscheinlichkeiten	267
V	13/1	269
6.3	Wiederholung	270
6.4	Abzählverfahren	272
6.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	277
6.5.1	Statistische Unabhängigkeit	278
6.5.2	Der Satz von Bayes	280
6.6	Zufallsgrößen - Erwartungswert, Standardabweichung	282
6.7	Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung	285
6.7.1	Anwendungen der Binomialverteilung	291

6.7.2	Erwartungswert μ , Standardabweichung σ	293
6.7.3	σ -Umgebung	295

Teil I

11/1

Kapitel 1

Terme, Gleichungen, Ungleichungen

1.1 Pascalsches Dreieck

$n = 0:$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1.2 pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.3 abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4 Satz von Vieta

$$0 = x^2 + px + q$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{\text{Diskriminante}}}$$

*Diskriminante:

$> 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen

$= 0 \Rightarrow$ eine Lösung

$< 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\dots} - \frac{p}{2} - \sqrt{\dots} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\dots}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\dots}\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Beispiel

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = \frac{1}{9}\left(x^2 \underbrace{-6}_{x_1+x_2} x \underbrace{-72}_{x_1 \cdot x_2}\right)$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -6$$

$$0 = \frac{1}{9} \underbrace{(x - 12)(x + 6)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

1.5 Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Beispiele

$$n = 2$$

$$(a + b)^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k}$$

Drei Summanden: $k = 0$; $k = 1$; $k = 2$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\binom{5}{0} a^2}_{k=0} + \underbrace{\binom{5}{1} ab}_{k=1} + \underbrace{\binom{5}{2} b^2}_{k=2} \\ &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$n = 5$$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} \cdot b^k \\ &= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.6 Gleichungen und Ungleichungen

1.6.1 Gleichung lösen durch Substitution

Beispiel $0 = 2x^4 - 3x^2 - 5$

Lösungsmenge der Gleichung = Menge der Nullstellen (Schnitte mit der x-Achse) der Funktion mit gleichem Funktionsterm

substituiere $x^2 = t$

$$0 = 2t^2 - 3t - 5$$

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 2.5, \quad t_2 = -1$$

resubstituiere

$$t_1 = x^2 = 2.5 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = \sqrt{2.5}; \quad x_2 = -\sqrt{2.5}$$

$$t_2 = x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$$

keine Lösung

$$L = \{\sqrt{2.5}; -\sqrt{2.5}\}$$

1.7 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

1.7.1 Potenz- und Wurzelgesetze

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$$

1.7.2 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = \log_a(x) \cdot y$$

$$a^x = 10^{\log(a) \cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Kapitel 2

Funktion - Relation - Zahlenfolge

Eine Funktion ist eine Zuordnung (Zahlen $x \rightarrow$ Zahlen y), die jeder Zahl x der Definitionsmenge genau eine Zahl y der Wertemenge zuordnet.

Darstellung:

- Funktionsgleichung, z. B. $f(x) = y = \underbrace{2x^2 + 5}_{\text{Funktionsterm}}$
- Graph
- Wertetabelle

Eine Relation ist eine allgemeine Zuordnung von x zu y ,
z. B. $x = 3$ (senkrechte Gerade), $x^2y = y^2 + x^3$

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit $x \in \mathbb{N}$

2.1 Zahlenfolgen

Definitionsmenge $D = \mathbb{N}_0$

Wertemenge $W = \mathbb{R}$

$a_n = y = \dots \leftarrow \text{Funktionsterm}$

Angabe eines Funktionsterms für alle Zahlen nennt man explizite Darstellung der Zahlenfolge.

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad \dots; \quad a_{100} = 2^{-100}$$

Berechnung der Folgezahlen Schritt für Schritt nennt man implizite Darstellung der Zahlenfolge. (Rekursion)

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5; \quad a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$$

16/1

a

$$a_n = \frac{2n}{5}$$

$$a_1 = \frac{2}{5}; \quad a_2 = \frac{4}{5}; \quad a_3 = 1\frac{1}{5}; \quad a_4 = 1\frac{2}{5}; \quad a_5 = 2;$$

$$a_6 = 2\frac{2}{5}; \quad a_7 = 2\frac{4}{5}; \quad a_8 = 3\frac{1}{5}; \quad a_9 = 3\frac{3}{5}; \quad a_{10} = 4$$

d

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad a_4 = \frac{1}{16}; \quad a_5 = \frac{1}{32};$$

$$a_6 = \frac{1}{64}; \quad a_7 = \frac{1}{128}; \quad a_8 = \frac{1}{256}; \quad a_9 = \frac{1}{512}; \quad a_{10} = \frac{1}{1024}$$

f

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -1; \quad a_4 = 0; \quad a_5 = 1;$$

$$a_6 = 0; \quad a_7 = -1; \quad a_8 = 0; \quad a_9 = 1; \quad a_{10} = 0$$

16/2

a

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 + a_n$$

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 5; a_4 = 7; a_5 = 9;$$

$$a_6 = 11; a_7 = 13; a_8 = 15; a_9 = 17; a_{10} = 19$$

$$a_n = 2n - 1$$

b

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 4; a_4 = 8; a_5 = 16;$$

$$a_6 = 32; a_7 = 64; a_8 = 128; a_9 = 512; a_{10} = 1024$$

$$a_n = 2^{n-1}$$

d

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (\text{Fibonacci})$$

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = 2; a_5 = 3;$$

$$a_6 = 5; a_7 = 8; a_8 = 13; a_9 = 21; a_{10} = 34$$

$$a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

2.2 Monotonie, Beschränktheit

16/5

$$a_n = 200000\text{€} \cdot 0.98^n$$

16/7

a

$$V_0 = 1^3 = 1$$

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{8}V_0 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V_0\right) = \frac{9}{8} + \frac{1}{64} = \frac{73}{64}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V_0\right)\right) = \frac{73}{64} + \frac{1}{512} = \frac{585}{512}$$

b

$$V_n = \sum_{k=0}^n 8^{-k}$$

Streng monoton fallende Zahlenfolge

z. B. a_n von $16/5$ ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n < a_{n-1}$

Streng monoton steigende Zahlenfolge

z. B. V_n von $16/7$ ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n > a_{n-1}$

Ohne „streng“entsprechend \leq bzw. \geq

18/1

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 2; a_2 = 1\frac{1}{2}; a_3 = 1\frac{1}{3}; a_4 = 1\frac{1}{4}; a_5 = 1\frac{1}{5}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt (2); nach unten beschränkt (1)

b

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{3}{4}; a_2 = \frac{9}{16}; a_3 = \frac{27}{64}; a_4 = \frac{81}{256}; a_5 = \frac{243}{1024}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt ($\frac{3}{4}$); nach unten beschränkt (0)

c

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_1 = -1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = 1; a_5 = -1$$

nicht monoton

nach oben beschränkt (1); nach unten beschränkt (-1)

d

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = 0; a_2 = \frac{3}{2}; a_3 = \frac{2}{3}; a_4 = \frac{5}{4}; a_5 = \frac{4}{5}$$

nicht monoton

nach oben beschränkt ($\frac{3}{2}$); nach unten beschränkt (0)

e

$$a_n = \frac{8n}{n^2 + 1}$$

$$a_1 = 4; a_2 = \frac{16}{5}; a_3 = \frac{12}{5}; a_4 = \frac{32}{17}; a_5 = \frac{20}{13}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt (4); nach unten beschränkt (0)

		a_n	n	$(-1)^n \cdot n$	$(-1)^n : n$	$1 + 1 : n$
18/2	↑ beschränkt	✗	✗	✓	✓	
	↓ beschränkt	✓	✗	✓	✓	
	beschränkt	✗	✗	✓	✓	
	monoton	✓	✗	✗	✓	

2.3 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion

Der Grenzwert g ist eine reelle Zahl, der sich die Folgenwerte (Funktionswerte) annähern, sodass die Folgenwerte (Funktionswerte) vom Grenzwert praktisch nicht mehr unterschieden werden können.

z. B.

$$a_n = n^{-1}$$

$$a_n = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}$$

a_n hat den Grenzwert $g = 0$, da a_n auch streng monoton fallend ist, ist $s = 0$ die größte untere Schranke (=„Infimum“).

Vorgehen

Ich gebe eine Genauigkeitsschranke, z. B. $\epsilon = 10^{-3}$ vor (kleine positive Zahl). Zu ϵ finde ich ein $n_\epsilon = 1001$. Alle Folgenwerte mit $n \geq n_\epsilon = 1001$ (also $a_{1001}, a_{1002}, \dots$) liegen näher beim Grenzwert $g = 0$ als $\epsilon = 10^{-3}$ angibt. Finde ich zu jeder möglichen Genauigkeitsschranke ϵ solch ein n_ϵ , so ist g der Grenzwert. Ist diese Bedingung erfüllt, so notiert man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{hier: } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$$

22/2 (Abweichung $< \epsilon = 0.1$)

a

$$a_n = \frac{1+n}{n}$$
$$\left| \frac{1+n}{n} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 10$$

b

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$$
$$\left| \frac{n^2 - 1}{n^2} - 1 \right| < 0.1$$
$$\epsilon > \sqrt{10} \approx 3.162 \quad (\text{ab } 4)$$

c

$$a_n = 1 - \frac{100}{n}$$
$$\left| 1 - \frac{100}{n} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 1000$$

d

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}$$
$$\left| \frac{n-1}{n+2} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 28$$

e

$$a_n = \frac{2n^2 - 3}{3n^2}$$
$$\left| \frac{2n^2 - 3}{3n^2} - 1 \right| < 0.1$$

→ keine Lösung

zu e

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{2n^2 - 3}{3n^2} - 1 \right| < 0.1 \\
 & 1 - \frac{2n^2 - 3}{3n^2} < 0.1 \quad | - 0.1 + \frac{2n^2 - 3}{3n^2} \\
 & 0.9 < \frac{2n^2 - 3}{3n^2} \quad | \cdot 3n^2 \\
 & 2.7n^2 < 2n^2 - 3 \quad | - 2n^2 \\
 & 0.7n^2 < -3 \quad | \div 0.7 \\
 & n^2 < -\frac{30}{7} \quad | \sqrt{} \\
 & n < \sqrt{-\frac{30}{7}} \quad \text{und} \quad n < -\sqrt{-\frac{30}{7}} \\
 & \Rightarrow \text{nicht lösbar}
 \end{aligned}$$

2.3.1 Grenzwerte

Eine Zahlenfolge mit Grenzwert ist eine konvergente Folge. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert ist eine divergente Folge. Eine Nullfolge hat den Grenzwert $g = 0$.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad g = 1 \quad \rightarrow \quad a_n^* = \frac{n}{n+1} - 1 \quad g = 0 \quad (\text{Nullfolge})$$

22/4

a

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\frac{3n-2}{n+2} \right) - 3 \right| < \epsilon \\
 & \left| \frac{-8}{n+2} \right| < \epsilon \quad | x^{-1} \\
 & \frac{n+2}{8} > \frac{1}{\epsilon} \quad | \cdot 8 \\
 & n+2 > \frac{8}{\epsilon} \quad | - 2 \\
 & n > \frac{8}{\epsilon} - 2
 \end{aligned}$$

b

$$|\left(\frac{n^2 + n}{5n^2}\right) - 0.2| < \epsilon$$

$$\frac{n}{5n^2} < \epsilon \quad | \cdot 5$$

$$n^{-1} < 5\epsilon \quad | x^{-1}$$

$$n > \frac{1}{5\epsilon}$$

c

$$|\left(\frac{2^{n+1}}{2^n + 1}\right) - 2| < \epsilon$$

$$\left|\frac{-2}{2^n + 1}\right| < \epsilon \quad | \div 2; x^{-1}$$

$$2^n + 1 > \frac{2}{\epsilon} \quad | - 1$$

$$2^n > \frac{2}{\epsilon} - 1 \quad | \log; \div \log(2)$$

$$n > \frac{\log(\frac{2}{\epsilon} - 1)}{\log(2)}$$

d

$$|\left(\frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1}}\right) - \frac{3}{2}| < \epsilon$$

$$\left|\frac{3 \cdot 2^n + 2 - 3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}\right| < \epsilon$$

$$\frac{2}{2^{[n+1]}} < \epsilon$$

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon \quad | x^{-1}$$

$$2^n > \frac{1}{\epsilon} \quad | \log \div \log(2)$$

$$n > \frac{-\log(\epsilon)}{\log(2)}$$

24/2

a

$$a_n = \frac{1+2n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{1}{n}+n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

b

$$a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10} = \frac{7+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n^3}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n^3}} = \frac{7+0}{1-0} = 7$$

f

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) \div \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

g

$$a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} = \left(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}\right)^4$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}\right)\right)^4 = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1}\right)^4 = \left(\frac{0-1}{0+1}\right)^4 = 1$$

24/3

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{0.5} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 0.5} = \frac{1 - 0}{0.5} = 2$$

c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 + 4^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - 1}{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + 1} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\frac{2}{3})^n + 3}{2} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$$

2.3.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim_{x \rightarrow \infty}$; $\lim_{x \rightarrow a}$

$$f(x) = y = \frac{3x^2 - 3}{(x+1)(x-4)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{-1; 4\}}_{\text{Nullstellen des Nenners}}$$

$x = -1 \rightarrow$ Nullstelle des Zählers und Nenners

$x = 4 \rightarrow$ Nullstelle des Nenners

$$f(x) = y = \frac{3(x^2 - 1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-3}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \neq \lim_{x \rightarrow -\infty}$$

Beispiel $f(x) = 2^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 3}{x - 4} = \frac{3(-1) - 3}{-1 - 4} = \frac{-6}{-5} = 1.2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 3}{x - 4} = ?$$

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	-87	-897	-8997	93	903	9003

$$\lim_{x \nearrow 4} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \searrow 4} f(x) = +\infty$$



$x = 4 \rightarrow$ Unendlichkeitsstelle, ein Pol mit Vorzeichenwechsel

Der Punkt $(-1|1.2)$ gehört nicht zum Graphen. Es ergibt sich ein Loch im Graphen.

28/6

a

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	1	1	1	1

b

$$f(x) = \frac{x^3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	-0.01	-0.0001	0.0001	0.01

c

$$f(x) = \frac{x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	100	10000	10000	100

d

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^0}{3^0} = 1$$

e

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^0 - 1}{3^0} = 0$$

Kapitel 3

Analysis

3.1 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit

$$D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < -5 \\ x^2 + 10 & \text{für } -5 \leq x < 1 \\ -x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Abschnittsweise definierte Funktionen \rightarrow Für verschiedene Abschnitte der Zahlengeraden von \mathbb{R} sollen unterschiedliche Funktionsterme gelten.

Einschub: Ganzrationale Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

z. B. $f(x) = 3x^4 + 5x - 7$

$n = 4$ (Grad $n \in \mathbb{N}$)

$$a_4 = 4$$

$$a_3 = a_2 = 0$$

$$a_1 = 5$$

$$a_0 = -7$$

Grad der ganzrationalen Funktion ist die höchste Potenz, bspw. 4

Funktionsterm = Polynom

Die Stetigkeit einer Funktion beschreibt die Tatsache, ob man den Graph der Funktion ohne abzusetzen zeichnen kann.

Beispiel: $f(x) = x^3$



$f(x)$ ist überall stetig

Allgemein gilt:

Ganzrationale Funktionen sind überall, d. h. $-\infty < x < \infty$, stetig.

Untersuche $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$$x_1 = -5; x_2 = 1$$

$$\lim_{x \nearrow -5} f(x) = -10$$

$$\lim_{x \searrow -5} f(x) = -35$$

\Rightarrow unterschiedliche Grenzwerte bedeuten $f(x)$ ist bei $x = -5$ unstetig

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 11$$

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = -1$$

\Rightarrow unstetig bei $x = 1$

28/9

a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 3 \\ 12 - x & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 3} f(x) = 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \searrow 3} f(x) = 12 - 3 = 9$$

\Rightarrow stetig

b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{für } x \leq -1 \\ 2^x - 3 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$$

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = 2^{-1} - 3 = -2.5$$

\Rightarrow unstetig

28/11

•

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sin(\infty) = -1 \text{ bis } +1 \quad \Rightarrow \text{kein Grenzwert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sin(0) = 0$$

3.2 Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0

Eine Funktion ist stetig bei $x = x_0$, wenn Folgendes gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

29/4

a $a_n = \frac{n^2 - 7n - 1}{10n^2 - 7n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{10}$

b $a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{5n^3 - 8n + 5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$

$$\text{f } a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\text{g } a_n = \frac{3^n+1}{5^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

29/5

$$\text{a } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+100} - \sqrt{n}) = 0$$

$$\text{b } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+10} - \sqrt{n})) = 5$$

$$\text{c } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n) = \frac{3}{4}$$

30/10

$$\text{a } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^4-16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{8}$$

30/11

a

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = x-1 = 0$$

c

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2$$

29/6 $a_n = 0.95^n$

$$\text{a } a_5 = 0.95^5 = 0.77$$

$$\text{b } 0.5 = 0.95^n \Rightarrow n = \frac{\log(0.5)}{\log(0.95)} \approx 13.5 \quad n = 13$$

c

$$s(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_k$$

$$s(5) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$

$$= 1 + 1.9 + 1.805 + 1.71475 + 1.6290125 = 8.0487625$$

3.3 Polynomdivision

30/11

d

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} \\ (x^6 - 1) \div (x^2 - 1) & \\ \begin{array}{r} x^6 \\ - x^6 + x^4 \\ \hline x^4 \\ - x^4 + x^2 \\ \hline x^2 - 1 \\ - x^2 + 1 \\ \hline 0 \end{array} & \\ (x^6 - 1) \div (x^2 - 1) &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$$

3.4 Punktprobe

(erfüllt ein Punkt eine Gleichung)

z. B. $P(2|3)$

$$f(x) = y = 2x^2 - 5x + 3$$

Setze für x die Zahl 2 ein

$$f(x) = 8 - 10 + 3 = 1 \neq 3$$

$\Rightarrow P$ gehört nicht zum Graphen von f

38/4

a Höhenmeter: 250m

Streckenkilometer: 10km

b Gesamtanstieg: 750m

c Bei Streckenkilometer 25: Achsensymmetrie zur y-Achse

39/7

a 1.8m

b $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 7.42\}$

c $f(2.5) = 2.425$

39/11

a $f(x) = 1.9879 \cdot 10^{-4} + 86$

b $f(-995.5) = f(995.5) = 283$
 $f(0) = 86$

c $D = \{x \in \mathbb{R} | -995.5 \leq x \leq 995.5\}$

3.5 Mittlere Änderungsrate



Eine **Sekante** s ist eine Gerade, die eine Kurve in 2 (oder mehr) Punkten schneidet.

Eine **Sehne** s^* , Teil einer Sekante, ist eine Strecke, die zwei Kurvenpunkte verbindet.

Eine **Tangente** t ist eine Gerade, die die Kurve in einem Punkt berührt.

Eine **Passante** p ist eine Gerade, die die Kurve nicht schneidet.

$$P(1|3) \quad Q(10|8)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{9} \text{ (Steigung der Sekante durch } P \text{ und } Q)$$

Die Sekantensteigung m heißt mittlere Änderungsrate der Funktion f zwischen den Punkten P und Q .

$$P(1|3) \quad f(1) = 3$$

$$Q(10|8) \quad f(10) = 8$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 10 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = h = 9$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{Differenzenquotient}}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\text{Beispielrechnung } f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 10$$

$$h = x_2 - x_1 = 8$$

$$m = \frac{f(10) - f(2)}{8} = \frac{175 - 7}{8} = 21$$

$$41/2 \quad \begin{array}{c|cccccccc} t \text{ [d]} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ h \text{ [mm]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

$$a \quad m = \frac{h(9) - h(1)}{8} = \frac{7}{8}$$

$$b \quad m = \frac{h(3) - h(1)}{2} = 0$$

$$d \quad m = \frac{h(6) - h(4)}{2} = 1$$

$$c \quad m = \frac{h(9) - h(7)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$41/1 \quad f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

$$a \quad m = \frac{f(1) - f(0.1)}{0.9} = -10$$

$$b \quad m = \frac{f(12) - f(2)}{10} = -\frac{1}{24}$$

$$c \quad m = \frac{f(0.02) - f(0.01)}{0.01} = -5000$$

$$d \quad m = \frac{f(1000) - f(100)}{900} = -100000^{-1}$$

3.6 Tangentensteigung, Ableitung



H Hochpunkt (waagerechte Tangente)

W Wendepunkt (maximale/minimale Steigung)

T Tiefpunkt (waagerechte Tangente)

U Unstetigkeit (keine Tangentensteigung)

K Knickstelle (keine Tangentensteigung)

S Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

3.6.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

$$f(x) = y = x^2 \quad x_0 = 2$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \quad (\text{Sekante})$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \quad (\text{Tangente})$$

3.6.2 Ableitung

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 \quad x_0 = 4 \\m_{\text{Sekante}} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\&= \frac{2(4 + h)^3 - 2 \cdot 4^3}{h} \\&= \frac{128 + 96h + 24h^2 + 2h^3 - 128}{h} \\&= 96 + 24h + 2h^2\end{aligned}$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(6|f(6)) \Rightarrow h = 2$

$$m = 96 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 152$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(-1|f(-1)) \Rightarrow h = -5$

$$m = 96 + 24 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5)^2 = 26$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $h \rightarrow 0$.

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{Sekante}} = \lim_{h \rightarrow 0} 96 + 24h + 2h^2 = 96$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3$ bei $x = 4$ ist 96.

$$f'(4) = 96 \text{ (Tangentensteigung)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

46/6

$$\text{a } 10.15 \text{ Uhr: } m = \frac{500m}{15min} = 33.\bar{3} \frac{m}{min}$$

$$10.45 \text{ Uhr: } m = \frac{-500m}{15min} = -33.\bar{3} \frac{m}{min}$$

$$11.15 \text{ Uhr: } m = \frac{-1000m}{15min} = -66.\bar{6} \frac{m}{min}$$

b am größten: ~ 10.05 Uhr
am kleinsten: ~ 11.20 Uhr

48/3

$$\begin{aligned}\text{a } x_0 &= 4 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b } x_0 &= 3 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(3+h)^2 - (-2) \cdot 3^2}{h} &= -12\end{aligned}$$

$$\text{e } x_0 = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^{-1} - (-1)^{-1}}{h} = -1$$

$$\text{h } x_0 = 3 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h+2) - (-3+2)}{h} = -1$$

$$\text{i } x_0 = 7 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-4}{h} = 0$$

3.7 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung

$$f(x) = 5x^3 \quad P_1(2|f(2)) \quad P_2(4|f(4))$$

Sekantengleichung

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{320 - 40}{2} = 140$$

$$b = -m \cdot x + y = -140 \cdot 2 + 40 = -240$$

$$s(x) = 140x - 240$$

Tangentengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(2+h)^3 - 40}{h} = 60$$

$$b = -m \cdot x + y = -60 \cdot 2 + 40 = -80$$

$$t(x) = 60x - 80$$

Normalengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \frac{-1}{m_t}$$

$$m_n \cdot m_t = -1$$

$$m_t = 60$$

$$m_n = -\frac{1}{60}$$

$$b = -m \cdot x + y = 40\frac{1}{30}$$

$$n(x) = -\frac{1}{60}x + 40\frac{1}{30}$$

Zwei Geraden mit m_1 und m_2 sind orthogonal, wenn gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$

49/14

a

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.5x^2 & P(1|f(1) = 0.5) \\m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{2}h) = 1 \\b_t &= -m_t \cdot x + y = -\frac{1}{2} \\y_t &= x - \frac{1}{2} \\m_n &= -\frac{1}{m_t} = -1 \\b_n &= -m_n \cdot x + y = 1.5 \\y_n &= -x + 1.5\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - 4 & P(-2|f(-2) = 4) \\m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2+h)^2 - 4 - 4}{h} = -8 \\b_t &= -m_t \cdot x + y = -12 \\y_t &= -8x - 12 \\m_n &= -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{8} \\b_n &= -m_n \cdot x + y = 4\frac{1}{4} \\y_n &= \frac{1}{8}x + 4\frac{1}{4}\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x} & P(0.5|f(0.5) = \sqrt{0.5}) \\
 m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0.5+h} - \sqrt{0.5}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 b_t &= -m_t \cdot x + y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 y_t &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 m_n &= -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \\
 b_n &= -m_n \cdot x + y = \sqrt{2} \\
 y_n &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^3 + 2 & P(2|f(2) = -6) \\
 m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)^3 + 2 + 6}{h} = -12 \\
 b_t &= -m_t \cdot x + y = 18 \\
 y_t &= -12x + 18 \\
 m_n &= -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{12} \\
 b_n &= -m_n \cdot x + y = -6\frac{1}{6} \\
 y_n &= \frac{1}{12}x - 6\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

49/13 $f(x) = -\frac{1}{x}$

a

$$\begin{aligned}
 &P(-1|f(-1) = 1) \\
 m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{-1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h + h^2} = 1 \\
 \alpha &= \text{atan}(m_t) = 45^\circ
 \end{aligned}$$

b

$$P(2|f(2) = -\frac{1}{2})$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2}}{2h + h^2} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 14.04^\circ$$

c

$$P(0.1|f(0.1) = -10)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{0.1+h} + 10}{h} = 100$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 89.43^\circ$$

49/12c

$$f(x) = -3\sqrt{x} \quad x_0 = 8$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3\sqrt{8+h} - (-3\sqrt{8})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\sqrt{72+9h} + \sqrt{72})(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}{h(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9}{-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72}}$$

$$= \frac{9}{-2\sqrt{72}} = \frac{3}{-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{32}}$$

3.8 Ableitungsfunktion

Die Ableitung von $f(x)$ bei x_0 ist eine lokale Eigenschaft der Funktion $f(x)$, also einer Stelle x_0 . Allerdings sind unsere Funktionen fast überall differenzierbar. Ausnahmen sind Unstetigkeitsstellen und Knickstellen. Es gibt eine Funktion $f'(x) = m_t(x)$ für alle Stellen x . Sie heißt Ableitungsfunktion.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{z. B. } f(x) = x^4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

$$\text{z. B. } f'(5) = 500$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$h(x) = x^3$$

$$h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

$$i(x) = a \cdot x^2$$

$$i'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2xh + ah^2 - ax^2}{h} = 2ax$$

$$j(x) = \sqrt{x}$$

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^{-1} - x^{-2}}{h} = -2x^{-3}$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

54/2

a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

b

$$f(x) = \frac{a}{x} + c$$
$$f'(x) = -ax^{-2}$$

c

$$f(x) = x^{c+1}$$
$$f'(x) = (c+1)x^c$$

d

$$f(x) = t^2 + 3t$$
$$f'(x) = 2t + 3$$

e

$$f(x) = x - t$$
$$f'(x) = 1$$

f

$$f(t) = x - t$$
$$f'(t) = -1$$

55/7

c

$$f(x) = 3x^2 + 3$$
$$f'(x) = 6x$$
$$P(0.5|f(0.5) = 3.75)$$
$$m = f'(0.5) = 3$$
$$b = -m \cdot x + y = 2.25$$
$$y = 3x + 2.25$$

d

$$f(x) = -x^3 + 2$$

$$f'(x) = -3x^2$$

$$P(2|f(2) = -6)$$

$$m = f'(2) = -12$$

$$b = -m \cdot x + y = 18$$

$$y = -12x + 18$$

$$\mathbf{59/6} \quad g(x) = 10 - 3x \Rightarrow m = -3$$

c

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^3$$

$$f'(x) = -\frac{3}{100}x^2$$

$$-3 = -\frac{3}{100}x^2$$

$$x = 10$$

$$P(10|f(10) = -20)$$

d

$$f(x) = bx^3 + c$$

$$f'(x) = 3bx^2$$

$$-3 = 3bx^2$$

$$x = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}|f(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}) = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} + c) \quad b < 0$$

60/12

$$H(t) = \begin{cases} 3.2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 3.2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 \leq t \leq 1.8 \\ 0 & \text{für } 1.8 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

a

$$H'(0.5) = 0$$

$$H'(1.5) = -10t + 10 = -5$$

$$H'(2.5) = 0$$

b

$$H'(1) = 0 = -10t + 10$$

$$H'(1.8) = -10t + 10 = -8 \neq H'(1.8) = 0$$

67/3

a

$$x^5 - 20x^3 + 64x = 0 \quad | \div x \Rightarrow x = 0$$

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \quad | t = x^2$$

$$t^2 - 20t + 64 = 0 \quad | pq$$

$$t_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 \quad | \text{resubst.}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{0; \pm 2; \pm 4\}$$

b

$$x^5 - 17x^3 + 16x = 0 \quad | \div x \Rightarrow x = 0$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \quad | t = x^2$$

$$t^2 - 17t + 16 = 0 \quad | pq$$

$$t_{1/2} = 8.5 \pm \sqrt{72.25 - 16} = 8.5 \pm 7.5 \quad | \text{resubst.}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{0; \pm 1; \pm 4\}$$

c

$$(x - \frac{2}{3})(x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1) = 0$$

$$x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1 = 0 \quad | t = x^2$$

$$t^2 - \frac{13}{6}t + 1 = 0 \quad | pq$$

$$t_{1/2} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{\frac{2}{3}; \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\}$$

d

$$(x^3 - 8)(x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5) = 0$$

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5 = 0 \quad |t = x^2$$

$$t^2 - \frac{14}{3}t + 5 = 0 \quad |pq$$

$$t_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - 5} = \frac{7}{3} \pm \frac{2}{3} \quad | \text{resubst.}$$

$$x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}}$$

$$L = \{2; \pm \sqrt{\frac{5}{3}}; \pm \sqrt{3}\}$$

3.9 Nullstellen

Annahme: $f(x) = 0$ habe $x_1 = 2$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1$ als Lösungen, $f(x)$ hat Grad 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-2)(x+3)(x-1) \\ &= x^3 - 7x + 6 \text{ für } c = 1 \end{aligned}$$

Würde ich die zusätzliche Nullstelle $x_4 = 4$ als Linearfaktor in die Funktionsgleichung einfügen, so hätte ich eine Funktion 4. Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion mit Grad n hat maximal n Nullstellen. Funktionen mit ungeradzahligem Grad $n = 1, 3, 5, 7 \dots$ haben mindestens eine Nullstelle. Solche mit geradzahligem Grad $n = 2, 4, 6, 8 \dots$ haben keine Mindestzahl an Nullstellen.

3.9.1 Mehrfache Nullstellen

Beispiel $f(x)$ habe $x_1 = x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ als Nullstellen (Grad 3).



Berührungspunkt bei $x = 2$, außerdem Extrempunkt.

Finde ich eine doppelte Nullstelle, so liegt gleichzeitig an der Stelle ein Extrempunkt vor. Eine dreifache Nullstelle ist zusätzlich ein Sattelpunkt mit waagerechter Tangente.

67/5

a

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{0; 2\}$$



c

$$f(x) = x(x^2 - 9)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{0; \pm 3\}$$



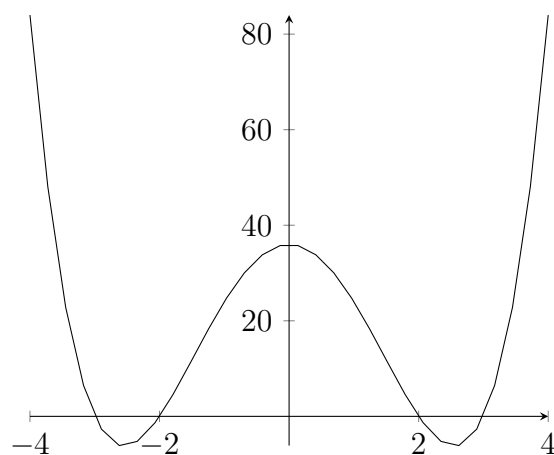
f

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$f(0) = 36$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{\pm 2; \pm 3\}$$



68/13 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a

$$\text{NS: } 0; -4; \frac{4}{5}$$

$$a = 5$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 0)(x + 4)\left(x - \frac{4}{5}\right) = a\left(x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 - 3\frac{1}{5}x\right) \\ &= 5x^3 + 16x^2 - 16x \end{aligned}$$

b

$$\text{NS: } -\frac{1}{3}; 3; \frac{10}{3}$$

$$a = 9$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 3)\left(x - \frac{10}{3}\right) = a\left(x^3 - 6x^2 - \frac{1}{9}x + 3\frac{1}{3}\right) \\ &= 9x^3 - 72x^2 - x + 30 \end{aligned}$$

c

$$\text{NS: } 0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$$

$$a = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-0)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = a(x^3 - 2x) \\ &= x^3 - 2x \end{aligned}$$

d

$$\text{NS: } 0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a = 5$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-0)\left(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = a\left(x^3 - \frac{1}{5}x\right) \\ &= 5x^3 - x \end{aligned}$$

$$\mathbf{68/12} \quad f(x) = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

a

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 4(-0.08) \cdot 1.44}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.88}{-0.16}$$

$$(x_1 = -2) \quad x_2 = 9$$

b

$$1.44 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x$$

$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.56}{-0.16}$$

$$(x_1 = 0) \quad x_2 = 7$$

$$\mathbf{68/11}$$

$$f(x) = ax^2 + c$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(5) = f(-5) = 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2$$

$$f(x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{50}$$

$$\text{Breite: } 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$$

68/15

$$s = 1000m$$

$$s(t) = 30t - 0.4t^2$$

$$v(t) = 30 - 0.8t$$

a

$$v(t) = 0 = 30 - 0.8t \Rightarrow t = 37.5$$

$$s(37.5) = 30(37.5) - 0.4(37.5)^2 = 565.5$$

b

$$s(t) = v_0 \cdot t - 0.4t^2 < 1000$$

$$v(t) = v_0 - 0.8t \Rightarrow t = \frac{v_0}{0.8}$$

$$s(t) = \frac{v_0^2}{0.8} - 0.4\left(\frac{v_0}{0.8}\right)^2 = \frac{5}{8}v_0^2 < 1000$$

$$v_0 < \sqrt{1600} = 40$$

3.10 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

Hochpunkt: $f(x_H) \geq f(x)$ in der Nähe

Tiefpunkt: $f(x_T) \leq f(x)$ in der Nähe

$$f'(x_H) = f'(x_T) = f'(x_S) = 0$$

Daraus folgt ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Stellen x mit $f'(x) = 0$.

$$\text{z. B. } f(x) = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

x_1 und x_2 sind Kandidaten für Extrema.

Umgebungsuntersuchung

für Hochpunkte gilt: $f'(x_l) > 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) < 0$

für Tiefpunkte gilt: $f'(x_l) < 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) > 0$

$$\text{zu: } x_1 = 0 \quad x_l = -1 \quad x_r = 1$$

$$f'(x_l) = f'(-1) = 7$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 0$$

$$f'(x_r) = f'(1) = -1$$

$$\Rightarrow H(0|0)$$

$$\text{zu: } x_2 = \frac{4}{3} \quad x_l = 1 \quad x_r = 2$$

$$f'(x_l) = f'(1) = -1$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 0$$

$$f'(x_r) = f'(2) = 4$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{4}{3} \mid -1.2\right)$$

Sonderfall Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$$f'(x_l) < 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) < 0 \quad \text{oder}$$

$$f'(x_l) > 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) > 0$$

73/2

e

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = -x^2 + 3x \quad | \div x \Rightarrow x_2 = 0$$

$$0 = -x + 3 \quad | -3; \cdot(-1)$$

$$3 = x$$

$$L = \{0; 3\}$$

$$f'(-1) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt } S(0|f(0) = -4)$$

$$f'(2) = 4 \quad f'(3) = 0 \quad f'(4) = -16 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(3|f(3) = 2\frac{3}{4})$$

74/6

b

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 8x \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = 4x^2 - 12x + 8 \quad | abc$$

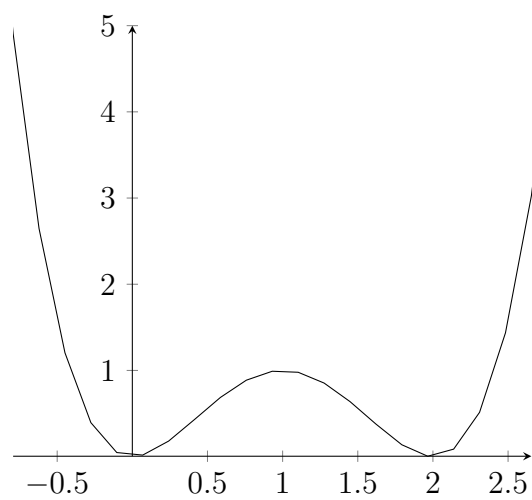
$$x_{2/3} = \frac{12 \pm 4}{8}$$

$$x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$f'(-1) = -24 \quad f'(x_1) = 0 \quad f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad \Rightarrow T(0|0)$$

$$f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad f'(x_2) = 0 \quad f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad \Rightarrow H(1|1)$$

$$f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad f'(x_3) = 0 \quad f'(3) = 24 \quad \Rightarrow T(2|0)$$



3.11 2. Ableitungsfunktion

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Die 2. Ableitungsfunktion $f''(x)$ beschreibt das Krümmungsverhalten der Ursprungsfunktion $f(x)$.

$f''(x) > 0$ links gekrümmt

$f''(x) < 0$ rechts gekrümmt

$f''(x) = 0$ Wendepunkt

80/1

b

$$f(x) = 2x - 3x^2$$

$$f'(x) = 2 - 6x$$

$$f''(x) = -6$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -6 < 0 \quad H\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$$

d

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) = 2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{2}; 0\}$$

$$f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad T(\pm\sqrt{2} \mid -1)$$

$$f''(0) = -8 < 0 \quad H(0 \mid 3)$$

e

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f''(x) = 16x^3 - 20x$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\}$$

$$f''(\frac{1}{2}) = -8 < 0 \quad H(\frac{1}{2} | \frac{11}{15})$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = 8 > 0 \quad H(-\frac{1}{2} | -\frac{11}{15})$$

$$f''(\frac{3}{2}) = 24 > 0 \quad T(\frac{3}{2} | -\frac{9}{5})$$

$$f''(-\frac{3}{2}) = -24 < 0 \quad T(-\frac{3}{2} | \frac{9}{5})$$

3.12 Wendepunkte

Wendepunkte eines Graphen sind Punkte, an denen die Krümmung wendet. Am Wendepunkt selbst ist das Krümmungsverhalten gleich 0. Außerdem sind Wendepunkte Punkte mit maximaler bzw. minimaler Steigung.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

Hinreichende Bedingung (I): Umgebungsuntersuchung
 $f''(x_l) > 0$ $f''(x_r) < 0$ Wechsel im Krümmungsverhalten
 \Rightarrow Wendepunkt $WP(x|f(x))$ (links-rechts)

Hinreichende Bedingung (II): $f'''(x) \neq 0$

für $f'''(x) < 0$ LRWP

für $f'''(x) > 0$ RLWP

für $f'''(x) = 0$ keine Entscheidung

84/1

a

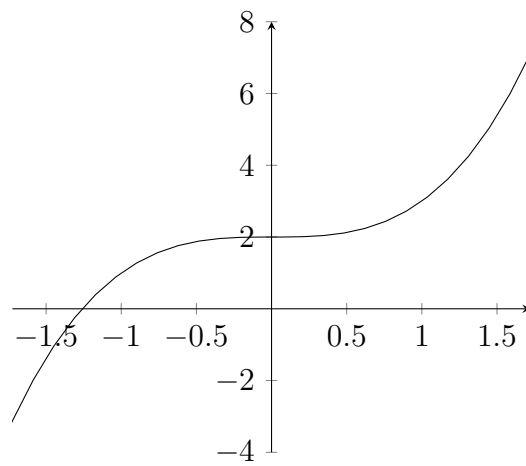
$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f''(x) = 6x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow RLWP(0|2)$$

rechts: $x \in]-\infty; 0]$

links: $x \in [0; \infty[$

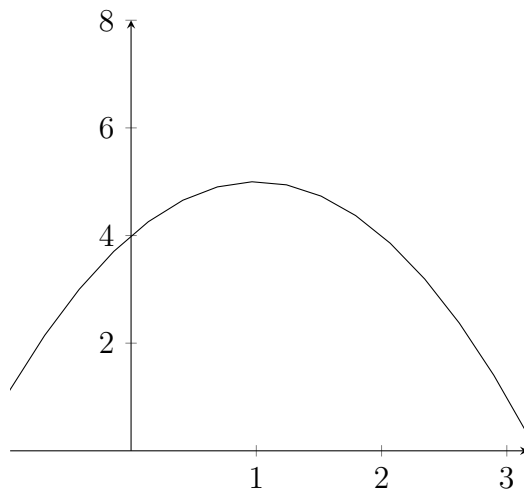


b

$$f(x) = 4 + 2x - x^2$$

$$f''(x) = -2 = 0 \quad L = \{\}$$

rechts: $x \in]-\infty; \infty[$



d

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3$$

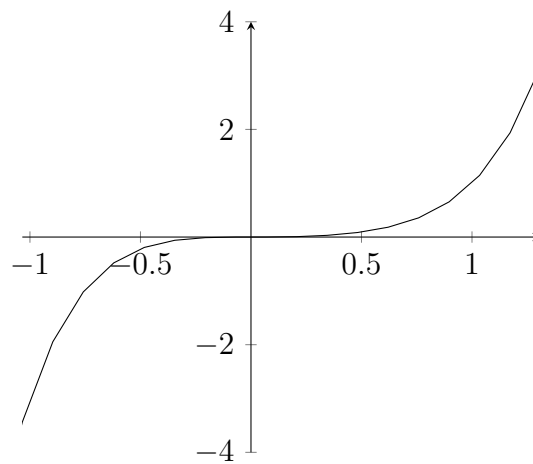
$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$

$$f'''(0) = 6 \Rightarrow RLWP(0|0)$$

rechts: $x \in]-\infty; 0]$

links: $x \in [0; \infty[$



84/2b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

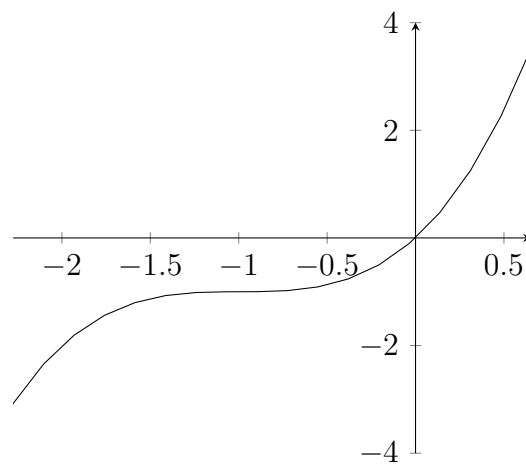
$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 0 \quad L = \{-1\}$$

$$f'''(-1) = 6 \Rightarrow RLWP(-1|f(-1) = -1)$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$



85/12

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$$

$$f''(x) = 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}b$$

$$f'(-\frac{1}{3}b) = 3(-\frac{1}{3}b)^2 + 2b(-\frac{1}{3}b) + c = -\frac{1}{3}b^2 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{b^2}{3}$$

85/14

a

$$f_a(x) = x^3 - ax^2$$

$$f_a''(x) = 6x - 2a = 0 \quad L = \left\{\frac{a}{3}\right\}$$

$$f_a'''(x) = 6 \quad f_a'''(\frac{a}{3}) = 6 \Rightarrow RLWP(\frac{a}{3} | f_a(\frac{a}{3}))$$

b

$$f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$$

$$f_a''(x) = 12x^2 - 4a = 0 \quad L = \left\{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\right\}$$

$$f_a'''(x) = 24x$$

$$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(\sqrt{\frac{a}{3}}) > 0 \Rightarrow RLWP(\sqrt{\frac{a}{3}} | f_a(\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

$$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < 0 \Rightarrow LRWP(-\sqrt{\frac{a}{3}} | f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

89/2

- A wahr, die Steigung ist negativ, d. h. die Werte werden kleiner
- B falsch, die Funktion hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt, die Steigung ist davor und danach positiv
- C wahr, einen Tiefpunkt bei $x = 2$ und einen Hochpunkt bei $x = 0$
- D ?, die Funktionswerte sind an der Ableitungsfunktion nicht erkennbar

89/1

c

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^4 + x^2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{0; \pm\sqrt{18}\} \Rightarrow S(0|0), S(\sqrt{18}|0), S(-\sqrt{18}|0)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$

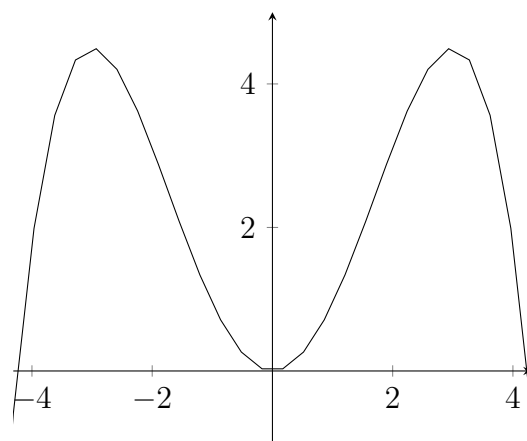
$$f''(0) = 2 \Rightarrow T(0|f(0) = 0)$$

$$f''(3) = 4 \Rightarrow T(3|f(3) = \frac{9}{2})$$

$$f''(-3) = -4 \Rightarrow T(-3|f(-3) = \frac{9}{2})$$

monoton steigend $f'(x) \geq 0$: $] -\infty; -3]$, $[0; 3]$

monoton fallend $f'(x) \leq 0$: $[3; 0]$, $[3; \infty[$



d

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x = 0 \quad L = \{0; 3\} \Rightarrow S(0|0), S(3|0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.5 = 0 \quad L = \{1; 3\}$$

$$f''(x) = x - 2$$

$$f''(1) = -1 \Rightarrow H(1|f(1) = 0.\overline{6})$$

$$f''(3) = 1 \Rightarrow T(3|f(3) = 0)$$

monoton steigend $f'(x) \geq 0$: $[-\infty; 1], [3; \infty]$

monoton fallend $f'(x) \leq 0$: $[1; 3]$



f

$$f(x) = x + \frac{5}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{kein Schnittpunkt mit y-Achse})$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{\} \quad (\text{kein Schnittpunkt mit x-Achse})$$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{5}\}$$

$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

$$f''(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(\sqrt{5}|f(\sqrt{5})) = \sqrt{20}$$

$$f''(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(-\sqrt{5}|f(-\sqrt{5})) = -\sqrt{20}$$

$$\text{monoton steigend } f'(x) \geq 0: \quad]-\infty; -\sqrt{5}] , [\sqrt{5}; \infty[$$

$$\text{monoton fallend } f'(x) \leq 0: \quad [-\sqrt{5}; 0[,]0; \sqrt{5}]$$



3.13 Nullstellen: Polynomdivision

97/2

$$\begin{array}{r} \text{b } (\quad 2x^3 + 2x^2 - 21x + 12) \div (x + 4) = 2x^2 - 6x + 3 \\ \underline{-2x^3 - 8x^2} \\ \quad -6x^2 - 21x \\ \quad \underline{6x^2 + 24x} \\ 3x + 12 \\ \underline{-3x - 12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c } \left(\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 - x + 2 \\ -2x^3 + x^2 \end{array} \right) \div (2x - 1) = x^2 - 3x - 2 \\ \hline \begin{array}{r} -6x^2 - x \\ 6x^2 - 3x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -4x + 2 \\ 4x - 2 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d } \left(\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2 \\ -x^4 - 2x^3 \end{array} \right) \div (x + 2) = x^3 - 4x - 1 \\ \hline \begin{array}{r} -4x^2 - 9x \\ 4x^2 + 8x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -x - 2 \\ x + 2 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

98/4

$$\begin{array}{r} \text{a } x_1 = 1 \\ \left(\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ -x^3 + x^2 \end{array} \right) \div (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ \hline \begin{array}{r} -5x^2 + 11x \\ 5x^2 - 5x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 6x - 6 \\ -6x + 6 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{l} \text{b } x_1 = 2 \\ (x^3 + x^2 - 4x - 4) \div (x - 2) = x^2 + 3x + 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ 3x^2 - 4x \\ \underline{-3x^2 + 6x} \\ 2x - 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -1$$

$$f(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$$

$$\begin{array}{l} \text{c } x_1 = -2 \\ (4x^3 - 13x + 6) \div (x + 2) = 4x^2 - 8x + 3 \\ \underline{-4x^3 - 8x^2} \\ -8x^2 - 13x \\ \underline{8x^2 + 16x} \\ 3x + 6 \\ \underline{-3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{8 \pm 4}{8}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = (x + 2)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})$$

$$\begin{array}{r} \text{d } x_1 = 3 \\ (4x^3 - 8x^2 - 11x - 3) \div (x - 3) = 4x^2 + 4x + 1 \\ \underline{-4x^3 + 12x^2} \\ 4x^2 - 11x \\ \underline{-4x^2 + 12x} \\ x - 3 \\ \underline{-x + 3} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{-4 \pm 0}{8} \\ x_{2/3} &= -\frac{1}{2} \\ f(x) &= (x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{98/11} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \quad S(-2|0) \Rightarrow x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r} \text{a } (x^3 - 2x^2 - 3x + 10) \div (x + 2) = x^2 - 4x + 5 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ -4x^2 - 3x \\ \underline{4x^2 + 8x} \\ 5x + 10 \\ \underline{-5x - 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &\Rightarrow \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} g(x) &= mx + b \quad m = 2 \quad S(-2|0) \\ 0 &= 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4 \\ &\Rightarrow g(x) = 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 2x + 4 \\ 0 &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 -4x^2 - 5x \\
 \underline{4x^2 + 8x} \\
 3x + 6 \\
 \underline{-3x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_2 = 1 \quad S(1|6)$$

$$x_3 = 3 \quad S(3|10)$$

98/12 $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$

a

$$f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x \quad | \div x$$

$$0 = 2x^2 - 2x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{-60}}{4} \quad \text{keine Lösung}$$

$$L = \{0\}$$

$$f_{10}(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x \quad | \div x$$

$$0 = 2x^2 - 10x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{10 \pm 6}{4}$$

$$L = \{0; 1; 4\}$$

$$f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x \quad | \div x$$

$$0 = 2x^2 + 10x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{-10 \pm 6}{4}$$

$$L = \{0; -1; -4\}$$

b

$$\text{Diskriminante} > 0$$

$$|t| > 8$$

c

$$t = 8$$

$$f_8(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$$

$$\text{Nullstellen: } \{0; 2\}$$

3.14 Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{z. B. } f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

\Rightarrow unterschiedlich für ungeradzahliges Grad

$$\text{z. B. } g(x) = 2x^4 - 5x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4) = +\infty$$

\Rightarrow gleich für geradzahliges Grad

3.15 Symmetrie

$$\text{Bsp. } f(x) = x^4 + 5x^2 - 7$$

$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten vorkommen.

$$\text{Bsp. } g(x) = x^5 - 7x^3 + x$$

$g(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.

allgemein:

achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

ansonsten: Symmetrie nicht erkennbar

Anwendung:

Bsp. $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+5}$

$$h(-x) = \frac{3(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+5} = -\frac{3x^2+2x}{x^2+5} = -h(x)$$

\Rightarrow punktsymmetrisch

100/2

a $f(x) = -\mathbf{3x^4} - 0.2x^2 + 10$

b $f(x) = 3x + 4x^3 - x^2 = \mathbf{4x^3} - x^2 + 3x$

c $f(x) = 2(x-1) \cdot x^2 = \mathbf{2x^3} - 2x^2$

d $f(x) = (x+1)(x^3+1) = \mathbf{x^4} + x^3 + x + 1$

e $f(x) = -2(x^4 - x^3 - x^2) = -\mathbf{2x^4} + 2x^3 + 2x^2$

f $f(x) = x^2 \cdot (-6x - x^2) = -\mathbf{x^4} - 6x^3$

102/1

d $f(x) = x(x^2 - 5) = x^3 - 5x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

e $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$ nicht erkennbar

f $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

3.16 Kurvendiskussion

105/1

c

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$f''(x) = 3x - 8$$

$$f'''(x) = 3$$

Symmetrie

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$$L = \{0; 4\}$$

Grenzverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$$

Extremstellen

$$f'(x) = 0 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm 4}{3}$$

$$L = \{\frac{4}{3}; 4\}$$

$$f''(x_1) = f''(\frac{4}{3}) = -4 < 0 \quad HP(\frac{4}{3}|f(\frac{4}{3}))$$

$$f''(x_2) = f''(4) = 4 > 0 \quad TP(4|f(4))$$

Wendestellen

$$f''(x) = 0 = 3x - 8$$

$$L = \{\frac{8}{3}\}$$

$$f'''(x_1) = f'''(\frac{8}{3}) = 3 > 0 \quad RLWP(\frac{8}{3}|f(\frac{8}{3}))$$



d

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 - 16$$

Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f'''(x) = 6$$

Symmetrie

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq x^3 + 6x^2 - 16$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq -x^3 - 6x^2 + 16$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 = x^3 + 6x^2 - 16$$

$$x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 \\ -x^3 - 2x^2 \end{array} - 16 \right) \div (x + 2) = x^2 + 4x - 8 \\ \hline 4x^2 \\ -4x^2 - 8x \\ \hline -8x - 16 \\ 8x + 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-8)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$L = \{-2; -5.46; 1.46\}$$

Grenzverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Extremstellen

$$f'(x) = 0 = 3x^2 + 12x \quad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3x + 12 = 0$$

$$L = \{0; -4\}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0 \quad TP(0|f(0))$$

$$f''(x_2) = f''(-4) = -12 < 0 \quad HP(-4|f(-4))$$

Wendestellen

$$f''(x) = 0 = 6x + 12$$

$$L = \{-2\}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-2) = 6 > 0 \quad RLWP(-2|f(-2))$$



106/5

$$f(x) = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot x^4$$

a

Höhe

$$f(0) = 187.5$$

Breite

$$f(x) = 0$$

$$\text{subst. } t = x^2$$

$$0 = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot t - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$$

$$t_{1/2} = \frac{1.579 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{(1.579 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6}) \cdot 187.5}}{2 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6})}$$

$$t_1 < 0 \quad t_2 = 6520.923541$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{t_2} \approx \pm 80$$

$$2 \cdot 80 = 160$$

b

$$f'(x) = -3.158 \cdot 10^{-2} \cdot x - 7.952 \cdot 10^{-6} \cdot x^3$$

$$f'(80) = -2.5264 - 4.071424 \approx -6.6$$

$$\text{atan}(-6.6) \approx -81^\circ$$

c

$$f(19) = 187.5 - 5.70019 - 0.259078148 \approx 181$$

$$\text{vertikaler Abstand: } 187.5 - 181 = 6.5 < 10$$

$$f(9) - 10 = 177.5 - 1.579 - 0.01988 \approx 176.2$$

3.17 Tangente und Anwendungen

3.17.1 Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung

$$f(x) = y = m \cdot x + b$$

$$\text{Stelle } u \quad f'(u) = m \quad f(u) = y$$

$$f(u) = f'(u) \cdot u + b \Rightarrow b = f(u) - f'(u) \cdot u$$

$$t(x) = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$$

$$= f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

108/5

a

$$f(x) = x^2 - x; \quad B(-2|6) \quad u = -2$$

$$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(u) = -5$$

$$t(x) = -5 \cdot (x + 2) + 6 = -5x - 4$$

$$n(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 2) + 6 = \frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$$

b

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2; \quad B(4|3) \quad u = 4$$

$$f'(x) = -4x^{-2} \quad f'(u) = -\frac{1}{4}$$

$$t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 3 = -\frac{1}{4}x + 4$$

$$n(x) = 4 \cdot (x - 4) + 3 = 4x - 13$$

Exkurs: Quadratische Ergänzung

führt auf die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

$$\text{z. B. } f(x) = x^2 - x$$

$$= x^2 - x + 0.25 - 0.25$$

$$= (x - 0.5)^2 - 0.25$$

$$\text{Scheitelpunkt } S(0.5 | -0.25)$$

$$\begin{aligned}
\text{z. B. } g(x) &= 4x^2 - 3x + 8 \\
&= 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) + 8 \\
&= 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}\right) + 8 \\
&= 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - 4\left(\frac{9}{64}\right) + 8 \\
&= 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{137}{16} \\
\text{Scheitelpunkt } S &\left(\frac{3}{8} \mid \frac{137}{16}\right)
\end{aligned}$$

nimm den Koeffizienten (-1), halbiere ihn (-0.5) und quadriere anschließend (0.25).

109/10

$$\begin{aligned}
f(x) = y &= 4 - \frac{1}{2}x^2 \\
Y(0|6) \\
f'(x) &= -x \\
t(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} - x \cdot x_0 + 4 \\
0 &= \frac{1}{2}x_0^2 - 2 \quad x_0 = \pm 2
\end{aligned}$$

109/11

$$\begin{aligned}
f(x) &= -0.002x^4 + 0.122x^2 - 1.8 \\
\text{Tiefster Punkt: } T(0| -1.8) \\
\text{Augen: } P(x_0|1.6) \\
f'(x) &= -0.008x^3 + 0.244x \\
t(x) &= 0.006u^4 - 0.122u^3 - 0.008u^3x + 0.224ux - 1.8 \\
t(0) &= -1.8 = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 1.8 \quad L = \{0; \pm\sqrt{\frac{61}{3}}\} \\
t(x) &= 0.366752x - 1.8 \quad \text{für } u = \sqrt{\frac{61}{3}} \\
1.6 &= 0.366752x_0 - 1.8 \\
x_0 &= 9.2706
\end{aligned}$$

112/7

$$S(t) = -0.08t^3 + 3.5t^2 + 10.6t + 237$$

a

$$S'(t) = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

Die Ableitung gibt an, wie stark die Schulden ansteigen, also die Neuverschuldung pro Jahr.

b

$$S''(t) = -0.48t + 7$$

$$S''(t_0) = 0$$

$$t_0 = 14.58\bar{3} \quad (\text{um } 1994)$$

c

$$S'(t_0) = 0 = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

$$t_0 = \frac{1}{12}(175 + \sqrt{36985}) \approx 30.6 \quad (\text{um } 2010)$$

$$S''(t_0) \approx -7.69 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

d Nicht die Staatsschulden, sondern die Neuverschuldung, nahm ab.

111/3

$$f(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

a

$$f(t) = 0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t \quad L = \{0; 24\}$$

$$f'(t) = 0 = 0.75t^2 - 24t + 144 \quad L = \{8; 24\}$$

$$f''(t) = 1.5t - 24$$

$$f''(8) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad HP$$

$$f''(24) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

$$f''(t) = 0 = 1.5t - 24 \quad L = \{16\}$$

$$f'''(t) = 1.5 > 0 \quad \Rightarrow \quad RLWP$$

b

$$\text{Hälfte d. Maximalwerts} = \frac{f(8)}{2} = \frac{512}{2} = 256$$

$$f(t) = 256 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

$$0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} \frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 256 \\ - \frac{1}{4}t^3 + 4t^2 \end{array} \right) \div (t - 16) = \frac{1}{4}t^2 - 8t + 16 \\ \hline - 8t^2 + 144t \\ 8t^2 - 128t \\ \hline \phantom{} 16t - 256 \\ \phantom{} - 16t + 256 \\ \hline \phantom{} 0 \end{array}$$

$$L = \{2.1436; 16; (29.856)\}$$

$$f_2(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$f_2'(t) = f'(t) = 0.75t^2 - 24t + 144$$

$$f_2'(2.1436) \approx 96 > 0$$

$$f_2'(16) = -48 < 0$$

$$(f_2'(29.856) \approx 96 > 0)$$

Zeitraum: 2.1436 bis 16

Teil II

11/2

112/5

$$O(t) = -\frac{1}{300}(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700) \quad t \in [0; 24]$$

a

$$O'(t) = \frac{1}{100}(-t^2 + 24t - 108) = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{-2} = \frac{-24 \pm 12}{-2} = 12 \pm 6$$

$$t_1 = 6 \quad t_2 = 18$$

$$O''(t) = \frac{12 - t}{50}$$

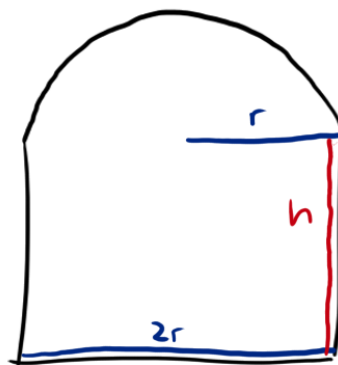
$$O''(t_1) = \frac{6}{50} > 0 \Rightarrow TP(6|O(6) = 16.12)$$

$$O''(t_2) = \frac{-6}{50} < 0 \Rightarrow HP(18|O(18) = 19)$$

b Die Steigung der Wendetangente gibt an, wie sich die Temperaturänderung ändert (Beschleunigung).

3.18 Optimieren unter Nebenbedingungen

Tunnelquerschnitt:



Länge der Randlinie (Umfang) ist $5m$; A ist maximal

Hauptbedingung HB

$$A(r, h) = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$$

($A(r)$ heißt Zielfunktion ZF)

Nebenbedingung NB

$$U = 5 = 2h + 2r + \pi r \quad | - 2r - \pi r$$

$$h = \frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r$$

setze h in $A(r, h)$ ein

$$A(r) = 2r\left(\frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= 5r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right) \cdot r^2 + 5r$$

$$A'(r) = 5 - 7.14159r$$

$$A'(r) = 0 \quad L = \{0.7\}$$

$$h = 0.7 \quad \text{für } r = 0.7$$

$$A(r) = 1.75m^2$$

114/3

$$A(l, b) = l \cdot b$$

$$U = 50 = 2(l + b) \Rightarrow b = 25 - l$$

$$A(l) = 2l \cdot (25 - l) = -2l^2 + 50l$$

$$A'(l) = -4l + 50$$

$$A'(l) = 0 \quad L = \{12.5\}$$

$$l = b = 12.5cm$$

114/4

$$U(l, b) = 2(l + b)$$

$$A = 400 = l \cdot b \Rightarrow b = \frac{400}{l}$$

$$U(l) = 2l + \frac{800}{l}$$

$$U'(l) = 2 - 800l^{-2}$$

$$U'(l) = 0 \quad L = \{\pm 20\}$$

$$l = b = 20cm$$

115/7

a

$$V(x) = (16 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$V'(x) = 0 \quad L = \{2; (\frac{20}{3})\}$$

$$V(2cm) = 144cm^3$$

115/8

$$U(r, h) = \pi r + 2r + 2h$$

$$A = 45 = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh \Rightarrow h = \frac{45 - \frac{1}{2}\pi r^2}{2r}$$

$$U(r) = \frac{1}{2}\pi r + 2r + \frac{45}{r}$$

$$U'(r) = -45r^{-2} + \frac{1}{2}\pi + 2$$

$$U'(r) = 0 \quad L = \{\pm 3.55\}$$

$$r = 3.55m$$

$$h = 3.55m \quad fuer \ r = 3.55m$$

115/11

$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

$$12^2 = (2r)^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{36 - \frac{h^2}{4}}$$

$$V(h) = \pi \cdot \left(36 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h = 36h\pi - \frac{h^3\pi}{4}$$

$$V'(h) = -\frac{3}{4}\pi h^2 + 36\pi$$

$$V'(h) = 0 \quad L = \{\pm 6.93\}$$

$$h = 6.93 \text{ cm}$$

$$r = 4.9 \text{ cm} \quad \text{fuer } h = 6.93 \text{ cm}$$

115/14

a ... Kantenlänge der Grundfläche

$$V(a, h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$2.4^2 = 5.76 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V_2(a) = V(a)^2 = \frac{1}{9} \cdot a^4 \cdot \left(5.76 - \frac{a^2}{2}\right) = -\frac{1}{18}a^6 + 0.64a^4$$

$$V_2'(a) = -\frac{1}{3}a^5 + 2.56a^3$$

$$V_2'(a) = 0 \quad L = \{0; \pm 2.771\}$$

$$V(2.771 \text{ m}) \approx 3.55 \text{ m}^3$$

115/13

Tragfähigkeit $T \sim b$

Tragfähigkeit $T \sim h^2$

a

$$r = 50cm$$

$$T(b, h) = b \cdot h^2$$

$$h^2 + b^2 = (2r)^2 \Rightarrow h^2 = 10000 - b^2 \Rightarrow h = \sqrt{10000 - b^2}$$

$$T(b) = b \cdot (10000 - b^2) = -b^3 + 10000b$$

$$T'(b) = -3b^2 + 10000$$

$$T'(b) = 0 \quad L = \{\pm \frac{100}{\sqrt{3}}\}$$

$$T(\frac{100}{\sqrt{3}}) \approx 384900$$

$$b \approx 57.74cm$$

$$h = \sqrt{10000 - (\frac{100}{\sqrt{3}})^2} \approx 81.65cm$$

3.19 Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung

z. B. $f(x) = x^3 + 5x - 10$

probeweise:

$$f(1) = -4$$

$$f(2) = 8$$

\Rightarrow Nullstelle zwischen 1 und 2

Vermutung $x_0 = 1.5$



Zum Rechenverfahren

Tangentengleichung $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$t(x_1) = 0 \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

allgemeine Näherungsformel nach Newton (und Raphson)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

n beginnend bei 0

Abbruchbedingung: Nullstelle auf 3 Dezimalen genau. Das bedeutet, dass beim nächsten Schritt sich die 3. Dezimale nicht mehr ändern darf

Beispiel $f(x) = x^3 + 5x - 10$

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = 1.5 - \frac{1.5^3 + 5 \cdot 1.5 - 10}{3 \cdot 1.5^2 + 5} \approx 1.4255$$

$$x_2 = \dots \approx 1.4233$$

$$x_3 = \dots \approx 1.42331$$

Nullstelle auf 3 Dezimalen genau: $x = 1.423$

118/1

a

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{2} = 0.5$$

$$x_2 = \frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

$$x_3 = \frac{1581}{3487} \approx 0.453398\dots$$

$$x_4 = \frac{50302634185}{110945952227} \approx 0.453397\dots$$

$$x^* = 0.453$$

3.19.1 Anwendungen des Newton-Verfahrens

Mögliche Fragestellungen:

- Nullstellen eines Funktionsgraphen $f(x) = 0$, auch $f(x) = a$
- Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 0$, auch $f'(x) = m$
- Schnittstellen zweier Funktionsgraphen $f(x) = g(x)$
- zu Zielfunktion Lösungen finden

118/2

a

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1.8889$$

$$x_2 = 1.8795$$

$$x_3 = 1.8794$$

$$x_4 = 1.8794$$

$$x_1^* = 1.879$$

...

$$x_2^* = -1.532$$

$$x_3^* = -0.347$$

b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 0.8889$$

$$x_2 = 0.8795$$

$$x_3 = 0.8794$$

$$x_4 = 0.8794$$

$$x_1^* = 0.879$$

...

$$x_2^* = -2.532$$

$$x_3^* = -1.347$$

c

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 10x$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = 0.4271$$

$$x_2 = 0.4203$$

$$x_3 = 0.4204$$

$$x_4 = 0.4204$$

$$x_1^* = 0.420$$

...

$$x_2^* = -1.332$$

$$x_3^* = -0.521$$

$$x_4^* = 3.432$$

d

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 0.5$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x + 1$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = 0.6071$$

$$x_2 = 0.6030$$

$$x_3 = 0.6030$$

$$x_1^* = 0.603$$

...

$$x_2^* = -2.635$$

$$x_3^* = -0.246$$

$$x_4^* = 1.278$$

118/3

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -0.8750$$

$$x_2 = -0.8400$$

$$x_3 = -0.8376$$

$$x_4 = -0.8376$$

$$x^* = -0.838$$

118/4

a

$$g(x) = x^2; \quad h(x) = x^3 - 1$$

$$f(x) = g(x) - h(x) = -x^3 + x^2 + 1$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x$$

$$x_0 = 1.5$$

...

$$x^* = 1.466$$

b

$$g(x) = x^3; \quad h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2$$

$$f(x) = g(x) - h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$x_0 = 1$$

...

$$x^* = 0.848$$

118/5

a

$$f(x) = 0.1x^4 - x^2 - x + 1; \quad m = 1$$

$$f'(x) = 0.4x^3 - 2x - 1 = 1$$

$$0.4x^3 - 2x - 2 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.627$$

b

$$f(x) = -0.1x^4 - x^3 + x^2 + 3; \quad m = -18$$

$$f'(x) = -0.4x^3 - 3x^2 + 2x = -18$$

$$-0.4x^3 - 3x^2 + 2x + 18 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.400$$

c

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{x}; \quad m = 4$$

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} = 4$$

$$\frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.418$$

d

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^3 + 3; \quad m = -10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 = -10$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 + 10 = 0$$

$$x_0 = 2.5$$

...

$$x^* = 2.622$$

118/6

a

$$f(x) = x^5 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

Die Funktion ist streng monoton steigend, d. h. sie hat genau eine Nullstelle.

b

$$x_0 = -1$$

...

$$x^* \approx -0.755$$

118/7

$$r = 9cm$$

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_Z = h\pi R^2 = \frac{1}{4}V_K = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$hR^2 = \frac{1}{3}r^3$$

$$R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$h\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right) = hr^2 - \frac{h^3}{4} = \frac{1}{3}r^3$$

$$81h - \frac{h^3}{4} = 243$$

$$-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243\right)' = -\frac{3}{4}h^2 + 81$$

...

$$(h_1 \approx -19.345)$$

$$h_2 \approx 3.091$$

$$h_3 \approx 16.25$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 - \frac{h_2^2}{4}} \approx 8.87$$

$$R_3 = \sqrt{r^2 - \frac{h_3^2}{4}} \approx 3.87$$

3.20 AB Kurvenuntersuchungen

AB/1

a

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$$

$$a \in \mathbb{R}, a > 0$$

Symmetrie

$$f_a(-x) = x^2 + 2ax + 1 \neq f_a(x)$$

$$-f_a(x) = -x^2 + 2ax - 1 \neq f_a(-x)$$

\Rightarrow keine Symmetrie erkennbar

Nullstellen

$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Extrema

$$f'_a(x) = 2x - 2a = 0 \quad L = \{a\}$$

$$f''_a(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow TP(a|f_a(a) = -a^2 + 1)$$

Wendepunkte

$$f''_a(x) = 0 \quad L = \{\}$$

b



$$a = 1, 1.5, 0.5$$

c

$$f'_a(4) = 2 \cdot 4 - 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3.5$$

d

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$$a^2 - 1 < 0 \quad \text{fuer } a < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Nullstelle}$$

$$a^2 - 1 = 0 \quad \text{fuer } a = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ Nullstelle}$$

$$a^2 - 1 > 0 \quad \text{fuer } a > 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ Nullstellen}$$

3.20.1 Ortslinie

Der Graph, auf dem alle Tiefpunkte zu unterschiedlichen a liegen, heißt Ortslinie der Tiefpunkte:

$$T(a | -a^2 + 1)$$

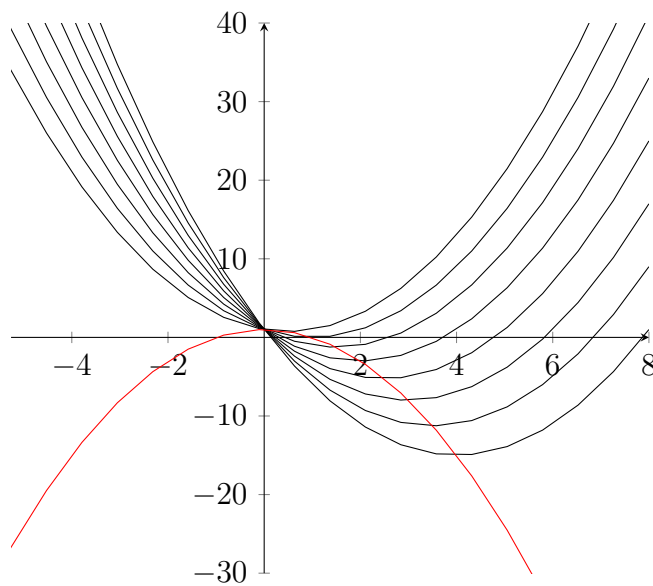
$$x = a$$

$$y = -a^2 + 1$$

setze a aus x -Koordinate in y ein

$$f(x) = y = -x^2 + 1$$

Funktionsgleichung der Ortskurve der Tiefpunkte



AB/5

a

$$f_a(x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2$$

$$a > 0$$

Symmetrie

$$f_a(-x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 = f_a(x)$$

\Rightarrow Achsensymmetrie

$$-f_a(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 \neq f_a(-x)$$

\Rightarrow keine Punktsymmetrie erkennbar

Nullstellen

$$\frac{1}{2}x^4 - ax^2 = 0 \quad | \div x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - a = 0$$

$$L = \{0; \pm\sqrt{2a}\}$$

Extrema

$$f'_a(x) = 2x^3 - 2ax = 0 \quad | \div x$$

$$2x^2 - 2a = 0$$

$$x = \pm\sqrt{a}$$

$$f''_a(x) = 6x^2 - 2a$$

$$f''_a(\pm\sqrt{a}) = 4a > 0 \Rightarrow TP$$

$$f''_a(0) = -2a < 0 \Rightarrow HP$$

Wendepunkte

$$f''_a(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$$

$$f'''_a(x) = 12x$$

$$f'''_a(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 12\sqrt{\frac{a}{3}} > 0 \Rightarrow RLWP$$

$$f'''_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = -12\sqrt{\frac{a}{3}} < 0 \Rightarrow LRWP$$

b

$$T(\pm\sqrt{a} - \frac{1}{2}a^2)$$

$$f_T(x) = -\frac{1}{2}x^4$$

$$W(\pm\sqrt{\frac{a}{3}} - \frac{5a^2}{18})$$

$$f_W(x) = -\frac{5}{2}x^4$$



AB/4

a

$$f_a(x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) \quad WP(1|f_a(1))$$

$$f_a(-x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) = f_a(x)$$

\Rightarrow Achsensymmetrie \Rightarrow zweiter Wendepunkt bei $x = -1$

$$f_a''(\pm 1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad \Rightarrow a = 6$$

$$f_6(\pm 1) = \frac{1}{4}(1^4 - 6 \cdot 1^2) = -\frac{5}{4}$$

b

$$f_a''(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\}$$

$$t_1(x) = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$

$$t_2(x) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$

3.21 Wiederholung

115/9

$$O(a, h) = a^2 + 4ah$$

$$V(a, h) = a^2 \cdot h = 40dm^3 \quad \Rightarrow h = \frac{40dm^3}{a^2}$$

$$O(a) = a^2 + 160dm^3 \cdot a^{-1}$$

$$O'(a) = 2a - 160dm^3 \cdot a^{-2}$$

$$a = \sqrt[3]{80dm^3} \approx 4.309dm$$

$$h = \frac{40dm^3}{\sqrt[3]{80dm^3}^2} = \sqrt[3]{10} \approx 2.154dm$$

119/8

$$h(0) = 400m$$

$$h(370) = 0$$

- a h' beschreibt das Gefälle des Flusses und gibt den Höhenverlust des Wassers pro Kilometer an
- b ein Stausee hat einen waagerechten Abschnitt des Graphen zur Folge, ein Wasserfall eine Sprungstelle
- c h' ist nicht positiv, da das Wasser ausschließlich nach unten fließt; die Einheit ist $\frac{m}{km}$

3.22 Sinus- und Kosinusfunktion

$$f(\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{U} \quad U = 2\pi r$$

$$x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360^\circ} \quad \alpha = \frac{x \cdot 360^\circ}{2\pi}$$

wichtige x-Koordinaten

$$x = 3.14\dots = \pi \quad x = 6.28\dots = 2\pi$$

$$x = 1.57\dots = \frac{\pi}{2} \quad x = 4.71\dots = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

3.22.1 Vielfachheit der Lösungen von (geometrischen) Gleichungen

$$\sin(x) = 0.7$$

$$x = \arcsin(0.7) \approx 0.775$$

$$x_n \approx 0.775 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 0.775 + m \cdot 2\pi$$

$$n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0.3$$

$$x = \arccos(0.3) \approx 1.266$$

$$x_n \approx 1.266 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -1.266 + m \cdot 2\pi$$

$$n, m \in \mathbb{Z}$$

128/6

a

$$\sin(x) = 0.9396$$

$$x = \arcsin(0.9396) \approx 1.221$$

$$x_n \approx 1.221 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 1.221 + m \cdot 2\pi$$

b

$$\sin(x) = 0.5519$$

$$x = \arcsin(0.5519) \approx 0.585$$

$$x_n \approx 0.585 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 0.585 + m \cdot 2\pi$$

c

$$\cos(x) = 0.6294$$

$$x = \arcsin(0.6294) \approx 0.890$$

$$x_n \approx 0.890 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -0.890 + m \cdot 2\pi$$

d

$$\cos(x) = -0.8870$$

$$x = \arcsin(-0.8870) \approx 2.662$$

$$x_n \approx 2.662 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -2.662 + m \cdot 2\pi$$

128/7

a

$$\sin(x) = 0.63$$

$$x = \arcsin(0.63) \approx 0.682$$

$$x_n \approx 0.682 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi - 0.682 + m \cdot 2\pi$$

b

$$\cos(x) = -0.55$$

$$x = \arcsin(-0.55) \approx 2.153$$

$$x_n \approx 2.153 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -2.153 + m \cdot 2\pi$$

c

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.524$$

$$x_n \approx -0.524 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx \pi + 0.524 + m \cdot 2\pi$$

d

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 2.356$$

$$x_n \approx 2.356 + n \cdot 2\pi$$

$$x_m \approx -2.356 + m \cdot 2\pi$$

3.22.2 Die allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

a Streckung entlang der y-Achse (Amplitude)

b Streckung entlang der x-Achse (Perioden pro 2π , Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$)

c Verschiebung in x-Richtung (für $c > 0$ nach rechts)

d Verschiebung in y-Richtung

3.22.3 AB Die Funktionen $f: x \mapsto a \cdot \sin(b(x - c))$ und ihre Graphen

AB/3

a

$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right)$$

$$p = 4\pi$$

$$3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right)$$

$$x_H = 2\pi + n \cdot p$$

$$x_T = n \cdot p$$

$$x_W = \pi + \frac{n}{2} \cdot p$$

b

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$p = 3\pi$$

$$x_H = \frac{3}{4}\pi + n \cdot p$$

$$x_T = 2\frac{1}{4}\pi + n \cdot p$$

$$x_W = \frac{n}{2} \cdot p$$

c

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$p = 2\pi$$

$$x_H = \frac{2}{3}\pi + n \cdot p$$

$$x_T = \frac{5}{3}\pi + n \cdot p$$

$$x_W = \frac{\pi}{6} + \frac{p}{2}$$

AB/5

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + e)$$

a

$$f(x) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$$

b

$$f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)$$

c

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$$

AB/6

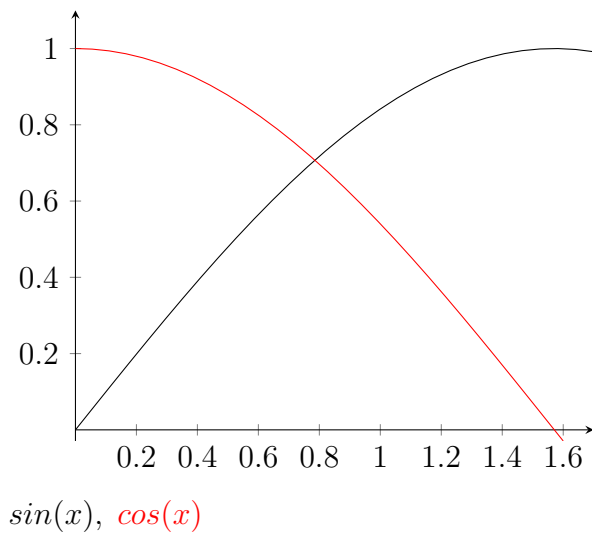
$$f(t) = a \cdot \sin(b(t - c)) \quad -2 \leq t \leq 13$$

a Die Sonne bewegt sich aus Sicht der Aufnahmen periodisch auf und ab.
Ihr Höhenverlauf lässt sich daher über eine Sinuskurve modellieren.

b

$$f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 6)\right)$$

3.22.4 Ableitung der Sinusfunktion



Annäherung mit Taylorreihe

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$a = x_0 = 0$$

$$f(x_0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin(x) = 0 + x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$(\sin(x))' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \dots = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

...

130/1

a

$$f(x) = 12 \cdot \sin(x)$$

$$f'(x) = 12 \cdot \cos(x)$$

b

$$f(x) = -2 \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = -2 \cdot (-\sin(x))$$

c

$$f(x) = \sqrt{5} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = \sqrt{5} \cdot (-\sin(x))$$

d

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos(x)$$

e

$$f(x) = 5x^3 - \sin(x)$$
$$f'(x) = 15x^2 - \cos(x)$$

f

$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$$
$$f'(x) = 2 \cdot (-\sin(x)) - \cos(x)$$

130/3

b

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$$
$$P\left(\frac{5\pi}{3} | ?\right)$$
$$y = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx -2.598$$
$$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$$
$$m_t = f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1.5$$
$$b_t = -2.598 - 1.5 \cdot \frac{5\pi}{3} \approx -10.452$$
$$t(x) = 1.5x - 10.452$$

130/4

c

$$\begin{aligned}f(x) &= 2 \cdot \sin(x) - \cos(x); \quad x \in [0; 2\pi] \\f'(x) &= 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x) \\2 &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{atan}(-2) \\L &= \{\operatorname{atan}(-2) + n\pi\} \quad n \in \{1; 2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) \\f''(\operatorname{atan}(-2) + \pi) &\approx -2.23 < 0 \\HP(\operatorname{atan}(-2) + \pi | f(\operatorname{atan}(-2) + \pi)) &= HP(2.034 | 2.236) \\f''(\operatorname{atan}(-2) + 2\pi) &\approx 2.23 > 0 \\TP(\operatorname{atan}(-2) + 2\pi | f(\operatorname{atan}(-2) + 2\pi)) &= TP(5.176 | -2.236)\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= 4 \cdot \cos(x) + 2x; \quad x \in [0; 2\pi] \\f'(x) &= -4 \cdot \sin(x) + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 = -4 \cdot \sin(x) + 2 \\0.5 &= \sin(x) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{asin}(0.5) \\L &= \{\operatorname{asin}(0.5); \pi - \operatorname{asin}(0.5)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= -4 \cdot \cos(x) \\f''(\operatorname{asin}(0.5)) &\approx -3.46 < 0 \\HP(\operatorname{asin}(0.5) | f(\operatorname{asin}(0.5))) &= HP(0.524 | 4.51) \\f''(\pi - \operatorname{asin}(0.5)) &\approx 3.46 > 0 \\TP(\pi - \operatorname{asin}(0.5) | f(\pi - \operatorname{asin}(0.5))) &= TP(2.618 | 1.772)\end{aligned}$$

3.23 Neue Funktionen aus alten Funktionen

gegeben sind

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$h(x) = x^2 + 5$$

Produkt

$$i(x) = f(x) \cdot g(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$$

$$j(x) = h(x) \cdot f(x) = (x^2 + 5) \cdot \sin(x)$$

Quotient

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$$

$$l(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x}}$$

Verkettung

$$m(x) = f(g(x)) = \sin(\sqrt{x})$$

$$n(x) = g(f(x)) = \sqrt{\sin(x)}$$

$$o(x) = f(g(h(x))) = \sin(\sqrt{x^2 + 5})$$

3.23.1 Ableitungsregeln

Produktregel

$$k(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - \cancel{f(x) \cdot g(x+h)} + \cancel{f(x) \cdot g(x+h)} - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \mathbf{f'(x)} \cdot \mathbf{g(x)} + \mathbf{f(x)} \cdot \mathbf{g'(x)}$$

Kettenregel

$$\begin{aligned}k(x) &= f(g(x)) \\k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+i) - f(z)}{i} \cdot g'(x) \\&= f'(z) \cdot g'(x) \\&= \mathbf{f'(g(x)) \cdot g'(x)}\end{aligned}$$

$$g(x) = z \quad g(x+h) = z+i$$

Beispiele

$$\begin{aligned}k(x) &= (x^2 + 2x - 7) \cdot \sin(x) \\k'(x) &= (2x + 2) \cdot \sin(x) + (x^2 + 2x - 7) \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(x) &= \sin(x^3 - 5x) \\k'(x) &= \cos(x^3 - 5x) \cdot (3x^2 - 5)\end{aligned}$$

135/1

a

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+2)^4 \\f'(x) &= 4(x+2)^3\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= (8x+2)^3 \\f'(x) &= 3(8x+2)^2 \cdot 8 = 24(8x+2)^2\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{1}{2} - 5x\right)^3 \\f'(x) &= 3\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2 \cdot (-5) = -15\left(\frac{1}{2} - 5x\right)^2\end{aligned}$$

d

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5)^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5) \cdot 2x = x^3 - 5x$$

135/2

a

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(x-1)^{-3}$$

b

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(3x-1)^{-3} \cdot 3 = -6(3x-1)^{-3}$$

e

$$f(x) = \sin(2x)$$
$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

f

$$f(x) = \sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = \cos(2x + \pi) \cdot 2 = 2\cos(2x + \pi) = -2\cos(2x)$$

138/1

g

$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = -2x^{-2} \cdot \cos(x) - \frac{2}{x} \cdot \sin(x)$$

h

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = \cos(2x)$$

i

$$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$
$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

j

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{x^3}} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

k

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin(x) \cdot (2 - x)$$
$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \cos(x) \cdot (2 - x) - \frac{\pi}{4} \cdot \sin(x)$$

l

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

135/4

a

$$f(x) = 0.25 \cdot \sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = 0.25 \cdot \cos(2x + \pi) \cdot 2 = -0.5 \cdot \cos(2x)$$

b

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(\pi - 3x)$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \cos(\pi - 3x) \cdot (-3) = 2 \cdot \cos(3x)$$

c

$$f(x) = -\cos(x^2 + 1)$$
$$f'(x) = \sin(x^2 + 1) \cdot 2x$$

d

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (\cos(x))^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = -\frac{2}{3} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

e

$$f(x) = \sqrt{3x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

f

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+x}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

g

$$f(x) = \sqrt{7x-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x-5}} \cdot 7 = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{7x-5}}$$

h

$$f(x) = \sqrt{7x^2-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x^2-5}} \cdot 14x = \frac{7x}{\sqrt{7x^2-5}}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{(\sin(x))^2} \cdot \cos(x) = -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$$

Ableitungen mit mehr als zwei Funktionen

$$\begin{aligned}l &= g \cdot [h \cdot k] \\l' &= g' \cdot h \cdot k + g \cdot [h' \cdot k + h \cdot k'] \\&= g' \cdot h \cdot k + g \cdot h' \cdot k + g \cdot h \cdot k'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= g(h(k)) \\l' &= g'(h(k)) \cdot h'(k) \cdot k'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= g \cdot h(k) \\l' &= g' \cdot h(k) + g \cdot h'(k) \cdot k'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l &= g(h \cdot k) \\l' &= g'(h \cdot k) \cdot [h' \cdot k + h \cdot k']\end{aligned}$$

Quotientenregel

$$\begin{aligned}l &= \frac{g}{h} = g \cdot h^{-1} \\l' &= g' \cdot h^{-1} + g \cdot [-h^{-2} \cdot h'] \\&= g' \cdot h^{-1} - g \cdot h^{-2} \cdot h' \\&= \frac{g'}{h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} = \frac{g' \cdot h}{h \cdot h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} \\&= \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}\end{aligned}$$

138/2

e

$$\begin{aligned}f(x) &= (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2} \\f'(x) &= 3(5 - 4x)^2 \cdot (-4) \cdot x^{-2} + (5 - 4x)^3 \cdot (-2x^{-3}) \\&= -\frac{2 \cdot (5 - 4x)^2 \cdot (2x + 5)}{x^3}\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x \cdot \cos(2x) \\f'(x) &= 3 \cdot \cos(2x) + 3x \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 \\&= 3 \cdot (\cos(2x) - 2x \cdot \sin(2x))\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x \cdot (\sin(x))^2 \\f'(x) &= 3 \cdot (\sin(x))^2 + 3x \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\&= 3 \cdot \sin(x) \cdot (\sin(x) + 2x \cdot \cos(x))\end{aligned}$$

h

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x - 1)^2 \cdot \sqrt{x} \\f'(x) &= 2(2x - 1) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + (2x - 1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\&= \frac{(2x - 1) \cdot (10x - 1)}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.5x^2 \cdot \sqrt{4 - x} \\f'(x) &= x \cdot \sqrt{4 - x} + 0.5x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} \cdot (-1) \\&= \frac{(4 - 1.25x) \cdot x}{\sqrt{4 - x}}\end{aligned}$$

140/2

a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1 - x^2}{3x + 5} \\f'(x) &= \frac{-2x \cdot (3x + 5) - (1 - x^2) \cdot 3}{(3x + 5)^2} \\&= -\frac{(3x + 1) \cdot (x + 3)}{(3x + 5)^2}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x + 2} \\g'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x + 2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x + 2)^2} \\&= \frac{2 - x}{2\sqrt{x} \cdot (x + 2)^2}\end{aligned}$$

c

$$h(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{6x - 1}$$

$$h'(x) = \frac{3 \cdot \cos(x) \cdot (6x - 1) - 3 \cdot \sin(x) \cdot 6}{(6x - 1)^2}$$

d

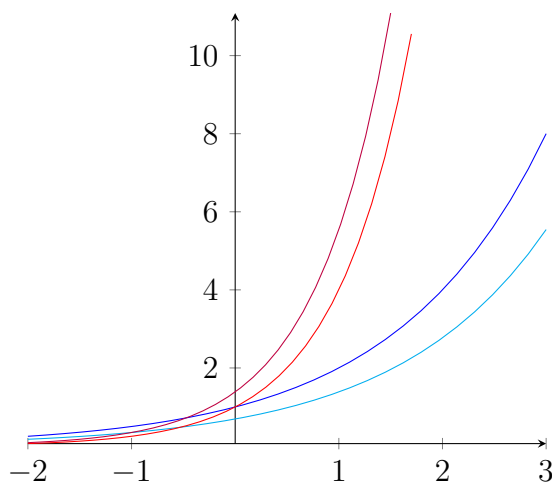
$$k(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$k'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + (\tan(x))^2$$

3.24 Exponentialfunktionen - Ableitung

$$f(x) = 2^x \quad f'(x) \quad g(x) = 4^x \quad g'(x)$$



Zwischen 2^x und 4^x liegt eine Exponentialfunktion, deren Ableitungsfunktion genau der Ursprungsfunktion entspricht. Sie wird natürliche Exponentialfunktion genannt.

$$f(x) = e^x$$

$$\text{Eulersche Zahl } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

...

$$e^x \leftrightarrow \log_e(x) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$$

$$2^x = 5^{x \cdot \frac{\log(2)}{\log(5)}} = 5^{x \cdot \log_5(2)}$$

$$2^x = e^{x \cdot \ln(2)}$$

$$10^x = e^{x \cdot \ln(10)}$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln(2)} = 2^x$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2) \approx 2^x \cdot 0.7$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln(4)} = 4^x$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(4)} \cdot \ln(4) = 4^x \cdot \ln(4) \approx 4^x \cdot 1.4$$

142/3

a

$$f(x) = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x e^x = e^x \cdot (x + 1)$$

b

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2}$$

c

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1 - x}{e^x}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1) \cdot e^x \\f'(x) &= 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x \cdot (x+2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{e^{-0.5x}} \\f'(x) &= \frac{1 \cdot e^{-0.5x} - x \cdot (-0.5) \cdot e^{-0.5x}}{(e^{-0.5x})^2} = e^{0.5x} \cdot (1 + 0.5x)\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x + 1}{x} \\f'(x) &= \frac{e^x \cdot x - (e^x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) - 1}{x^2}\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x}{x-1} \\f'(x) &= \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

h

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^{3x}}{x+2} \\f'(x) &= \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot (x+2) - e^{3x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^{3x} \cdot (3x+5)}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + x \cdot e^{0.1x} = x^2 \cdot \left(1 + \frac{e^{0.1x}}{x}\right) \\f'(x) &= 2x \cdot \left(1 + \frac{e^{0.1x}}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{e^{0.1x} \cdot (0.1x - 1)}{x^2} = e^{0.1x} \cdot (0.1x + 1) + 2x\end{aligned}$$

j

$$\begin{aligned}f(x) &= x \cdot e^{-2x+1} \\f'(x) &= 1 \cdot e^{-2x+1} + x \cdot (-2e^{-2x+1}) = e^{1-2x} \cdot (1-2x)\end{aligned}$$

k

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \cdot e^{ax} \\f'(x) &= 2x \cdot e^{ax} + x^2 \cdot a \cdot e^{ax} = x \cdot e^{ax} \cdot (2 + ax)\end{aligned}$$

l

$$\begin{aligned}f(x) &= x \cdot e^{2x^2+1} \\f'(x) &= 1 \cdot e^{2x^2+1} + x \cdot e^{2x^2+1} \cdot 4x = e^{2x^2+1} \cdot (4x^2 + 1)\end{aligned}$$

3.24.1 Basis $\neq e$

$$\begin{aligned}f(x) &= 10^x = (e^z)^x = e^{\ln(10) \cdot x} \\e^z &= 10 \quad \Rightarrow \quad z = \ln(10) \\ \Rightarrow \quad b^x &= e^{\ln(b) \cdot x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{\ln(10) \cdot x} \cdot \ln(10) \\ &= 10^x \cdot \ln(10) \\ \Rightarrow \quad b^x \cdot \ln(b) &\end{aligned}$$

145/8

f

$$\begin{aligned}e^{2x} + 10 &= 6.5 \cdot e^x && | \text{subst. } e^x = z \\ z^2 + 10 &= 6.5z && | - 6.5z \\ z^2 - 6.5z + 10 &= 0 \\ z_{1/2} &= \frac{6.5 \pm \sqrt{42.25 - 40}}{2} \\ z_1 = 4 \quad z_2 = 2.5 && | \text{resubst.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 = 4 &= e^x && | \ln \\ x_1 &= \ln(4) \approx 1.386\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 = 2.5 &= e^x && | \ln \\ x_2 &= \ln(2.5) \approx 0.916\end{aligned}$$

a

$$e^{2x} - 6 \cdot e^x + 8 = 0 \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$z^2 - 6z + 8 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \quad | \ln$$

$$x_1 = \ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2 \quad | \ln$$

$$x_2 = \ln(2) \approx 0.693$$

b

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$z - 2 - \frac{15}{z} = 0 \quad | \cdot z$$

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$z_1 = 5 \quad (z_2 = -3) \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 5 = e^x \quad | \ln$$

$$x_1 = \ln(5) \approx 1.609$$

g

$$(e^{2x} - 6) \cdot (5 - e^{3x}) = 0 \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$(z^2 - 6) \cdot (5 - z^3) = 0$$

$$z^2 - 6 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$z_1 = \sqrt{6} \approx 2.449 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = \sqrt{6} = e^x \quad | \ln$$

$$x_1 = \ln(\sqrt{6}) \approx 0.896$$

$$5 - z^3 = 0 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{5} \approx 1.710 \quad | \text{resubst.}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{5} = e^x \quad | \ln$$

$$x_2 = \ln(\sqrt[3]{5}) \approx 0.536$$

h

$$2 \cdot e^x + 15 = 8 \cdot e^{-x} \quad | \text{subst. } e^x = z$$

$$2z + 15 = \frac{8}{z} \quad | - \frac{8}{z}$$

$$2z + 15 - \frac{8}{z} = 0 \quad | \cdot z$$

$$2z^2 + 15z - 8 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4}$$

$$z_1 = 0.5 \quad (z_2 = -8) \quad | \text{resubst.}$$

$$z_1 = 0.5 = e^x \quad | \ln$$

$$x = \ln(0.5) \approx -0.693$$

146/9

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{kt}$$

a

$$h(0) = 0.02$$

b

$$h(6) = 0.02 \cdot e^{6k} = 0.4$$

$$e^{6k} = 20$$

$$6k = \ln(20)$$

$$k = \frac{\ln(20)}{6} \approx 0.499$$

c

$$h(9) = 0.02 \cdot e^{0.499 \cdot 9} \approx 1.784$$

d

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{0.499t} = 3$$

$$e^{0.499t} = 150$$

$$0.499t = \ln(150)$$

$$t = \frac{\ln(150)}{0.499} \approx 10.041$$

e

$$h(t+1) - h(t) = 1.5$$

$$0.02 \cdot e^{k \cdot (t+1)} - 0.02 \cdot e^{k \cdot t} = 1.5$$

$$0.02e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 1.5$$

$$e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 75$$

$$0.647e^{0.499t} = 75$$

$$e^{0.499t} = 115.92$$

$$0.499t = \ln(115.92)$$

$$t = \frac{\ln(115.92)}{0.499} \approx 9.525$$

f

$$h'(t) = 0.02k \cdot e^{kt} = 1$$

$$0.02 \cdot 0.499 \cdot e^{0.499t} = 1$$

$$e^{0.499t} = 100.2$$

$$0.499t = \ln(100.2)$$

$$t = \frac{\ln(100.2)}{0.499} \approx 9.233$$

g

$$t \geq 9$$

$$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t}$$

$$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 3$$

$$e^{-0.175t} \approx 0.061$$

$$-0.175t \approx \ln(0.061)$$

$$t \approx \frac{\ln(0.061)}{-0.175} \approx 15.982$$

$$k(t+1) - k(t) = 0.2$$

$$3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175 \cdot (t+1)} - 3.5 + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$$

$$-8.2 \cdot e^{-0.175 \cdot (t+1)} + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$$

$$-8.2 \cdot e^{-0.175t} \cdot (e^{-0.175} - 1) = 0.2$$

$$1.316 \cdot e^{-0.175t} \approx 0.2$$

$$e^{-0.175t} \approx 0.152$$

$$-0.175t \approx \ln(0.152)$$

$$t \approx \frac{\ln(0.152)}{-0.175} \approx 10.765$$

3.25 Wiederholung

3.25.1 Sinusfunktionen und Newton-Verfahren

130/8

$$P(x_0|f(x_0)) \quad Q(x_0|g(x_0)) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot \sin(x) & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2 \cdot \cos(x) & g'(x) &= 2x \\ h(x) &= f'(x) - g'(x) = 2 \cdot \cos(x) - 2x = 0 \\ h'(x) &= -2 \cdot \sin(x) - 2 \end{aligned}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.75036$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.73911$$

$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.73908$$

$$x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.73909$$

$$x^* \approx 0.7391$$

$$P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.7391|1.3472)$$

$$Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.7391|0.5463)$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) & g(x) &= x^3 \\f'(x) &= \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) & g'(x) &= 3x^2 \\h(x) &= f'(x) - g'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) - 3x^2 = 0 \\h'(x) &= -\sin(x) - 2 \cdot \cos(x) - 6x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 0.5 \\x_2 &= x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.34120 \\x_3 &= x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.32336 \\x_4 &= x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.32311 \\x_5 &= x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.32311 \\x^* &\approx 0.3231\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(x^*|f(x^*)) &\approx P(0.3231|2.2140) \\Q(x^*|g(x^*)) &\approx Q(0.3231|0.0337)\end{aligned}$$

3.25.2 Produktregel

138/3

a

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x - 8) \cdot \sin(x) & f'(x) &= 2 \cdot \cos(x) \\f(x) &= a \cdot b & f'(x) &= a' \cdot b + a \cdot b' \neq a' \cdot b' \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 \cdot \sin(x) + (2x - 8) \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}g(x) &= (2x - 3) \cdot (8 - x)^2 \\g'(x) &= 2 \cdot (8 - x)^2 + (2x - 3) \cdot (16 - 2x)\end{aligned}$$

3.25.3 Quotientenregel

140/11

a

$$f(x) = \sin(x) + \tan(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$f'(x) = \cos(x) + (\cos(x))^{-2}$$

b

$$f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x) = \frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)}$$
$$f'(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}$$

c

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\tan(x)} = \frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}$$
$$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) - \frac{(\cos(x))^3}{(\sin(x))^2}$$

d

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2 \cdot \cos(x)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot (\cos(x))^2}$$

e

$$f(x) = \tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$
$$f'(x) = \frac{2}{(\cos(2x))^2}$$

f

$$f(x) = \tan(x^2) = \frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(\cos(x^2))^2}$$

g

$$f(x) = (\tan(x))^2 = \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^3}$$

h

$$f(x) = \frac{2}{\tan(x)} = \frac{2 \cdot \cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(\sin(x))^2}$$

3.25.4 Kurvendiskussion

146/13

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x}$$

$$0 \hat{=} 01.10.2002$$

a

$$92 \hat{=} 01.01.2003$$

$$f(92) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 92} \approx 96161.27$$

$$457 \hat{=} 01.01.2004$$

$$f(457) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 457} \approx 199542.38$$

b

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000$$

$$e^{0.002x} = 12.5$$

$$x = \frac{\ln(12.5)}{0.002} \approx 1262.86 \hat{=} 17.03.2006$$

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000000$$

$$e^{0.002x} = 12500$$

$$x = \frac{\ln(12500)}{0.002} \approx 4716.74 \hat{=} 31.08.2015$$

c

$$\begin{aligned}
 2 \cdot f(x_1) &= f(x_2) \\
 2 \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} &= 80000 \cdot e^{0.002x_2} \\
 2 \cdot e^{0.002x_1} &= e^{0.002x_2} \\
 \ln(2) + 0.002x_1 &= 0.002x_2 \\
 x_2 - x_1 &= \frac{\ln(2)}{0.002} \approx 346.57
 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
 p \cdot f(x_1) &= f(x_1 + 365) \\
 p \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} &= 80000 \cdot e^{0.002 \cdot (x_1 + 365)} \\
 p \cdot e^{0.002x_1} &= e^{0.002x_1} \cdot e^{0.002 \cdot 365} \\
 p &= e^{0.002 \cdot 365} \approx 2.08 = 208\%
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 365 &\hat{=} 01.10.2003 \\
 f(365) - f(364) &= 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 365} - 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 364} \approx 331.68 \\
 f'(x) &= 80000 \cdot 0.002 \cdot e^{0.002x} = 160 \cdot e^{0.002x} \\
 f(364.5) &\approx 331.68
 \end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}
 f(x+1) - f(x) &= 400 \\
 80000 \cdot e^{0.002 \cdot (x+1)} - 80000 \cdot e^{0.002x} &= 400 \\
 80000 \cdot e^{0.002x} \cdot (e^{0.002} - 1) &= 400 \\
 x = \ln\left(\frac{400}{80000 \cdot (e^{0.002} - 1)}\right) \cdot \frac{1}{0.002} &\approx 457.65 \hat{=} 02.01.2004 \\
 f'(x) &= 160 \cdot e^{0.002x} = 400 \\
 x = \ln\left(\frac{400}{160}\right) \cdot \frac{1}{0.002} &\approx 458.15 \hat{=} 03.01.2004
 \end{aligned}$$

146/10

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$

a

$$v(0) = 0$$

$$v(10) \approx 1.58$$

b



c

$$v(t) = 2$$

$$t = -\frac{\ln(0.2)}{0.1} \approx 16.09$$

d

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 2.5$$

e

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$

$$v(t+1) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)})$$

$$v(t) < v(t+1)$$

$$2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t}) < 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)}) \quad | \div 2.5$$

$$1 - e^{-0.1t} < 1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)} \quad | -1; \cdot (-1)$$

$$e^{-0.1t} > e^{-0.1 \cdot (t+1)} \quad | \ln()$$

$$-0.1t > -0.1 \cdot (t+1) \quad | \cdot (-10)$$

$$t < t+1$$

f

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$$

$$= v(5) - v(2) \approx 0.98 - 0.45 = 0.53$$

g

$$v'(t) = 0.25 \cdot e^{-0.1t}$$

$$v'(2) = 0.20$$

h Die Beschleunigung ist bei $t = 0$ am größten, da sie ständig kleiner wird.

3.26 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

$$\text{z. B. } \begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{vmatrix} \quad 2 \times 3 \text{ LGS}$$

LGS in Stufenform

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_1 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_1 = 5 \\ 4x_2 = 8 \end{cases}$$

\Rightarrow einfach zu lösen

$$\text{III } 4x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 2$$

eingesetzt in II

$$x_1 + 3 \cdot 2 = 5 \rightarrow x_1 = -1$$

eingesetzt in I

$$4 \cdot (-1) - 2 + 3x_3 = 2 \rightarrow x_3 = \frac{8}{3}$$

$$L = \{(-1|2|\frac{8}{3})\}$$

3.26.1 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren dient dazu, ein LGS in Stufenform zu überführen und dann zu lösen.

256/4

a

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{vmatrix}$$

Eliminiere x_1 aus 2 der 3 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ \textcolor{red}{0}x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ III - 2 \cdot I \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ \textcolor{red}{0}x_1 & + & 18x_2 & - & 1x_3 & = & 17 \\ \textcolor{red}{0}x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ 2 \cdot II - 3 \cdot I \\ \end{matrix}$$

Eliminiere x_2 aus 1 der 2 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ \textcolor{red}{0}x_1 & + & \textcolor{red}{0}x_2 & + & 38x_3 & = & 38 \\ \textcolor{red}{0}x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ II - 3 \cdot III \\ \end{matrix}$$

Löse LGS in Stufenform

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ & & & & 38x_3 & = & 38 \\ & & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{vmatrix}$$

$$II \quad 38x_3 = 38 \rightarrow x_3 = 1$$

eingesetzt in III

$$6x_2 - 13 \cdot 1 = -7 \rightarrow x_2 = 1$$

eingesetzt in I

$$2x_1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_1 = 1$$

$$L = \{(1|1|1)\}$$

3.26.2 Matrix-Schreibweise

256/4

b

$$\begin{vmatrix} -x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & -2 \end{vmatrix} \quad II + I; \quad III - II$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 12 & 0 & \vdots & 12 \end{vmatrix} \quad II - 3 \cdot III$$

...

$$L = \{0|1|2\}$$

c

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \\
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 0 & -3.6 & -6 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| II - 2 \cdot I \\
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 2.1 & 0 & 0 & -2.4 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| II + 3.6 \cdot III \\
 2.1x_1 = -2.4 \rightarrow x_1 = -\frac{8}{7} \\
 0.5 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) + x_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{11}{7} \\
 0.6x_2 + 1.8 \cdot \frac{11}{7} = 3 \rightarrow x_2 = \frac{2}{7} \\
 L = \left\{ -\frac{8}{7} \mid \frac{2}{7} \mid \frac{11}{7} \right\}
 \end{array}$$

Beispiel einer Sonderfall-Lösung

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{array} \right| \\
 \left| \begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & = & 50 \end{array} \right| I + 3 \cdot II
 \end{array}$$

Eine Variable ist frei wählbar und wird a bezeichnet

$$x_3 = a$$

$$II \quad -x_2 + 12a = 50 \rightarrow x_2 = 12a - 50$$

$$I \quad 3x_1 + 2(12a - 50) - 3a = 5 \rightarrow x_1 = -7a + 35$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a + 35 \\ 12a - 50 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a \\ 12a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung im \mathbb{R}^3

3.26.3 Steckbriefaufgaben

Beispiel Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Funktion zweiten Grades

$$y = ax^2 + bx + c$$

Merkmale:

1. verläuft durch $P(2|5)$

$$f(2) = 5$$

$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad 5 = 4a + 2b + c$$

2. hat bei $x = 3$ die Steigung 10

$$f'(x) = 2ax + b = 10$$

$$10 = 6a + b$$

3. schneidet die y-Achse bei 5

$$f(0) = 5$$

$$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$5 = c$$

$$c = 5$$

$$10 = 6a + b \quad \Rightarrow \quad b = 10 - 6a$$

$$5 = 4a + 2(10 - 6a) + 5 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$$

$$b = 10 - 6 \cdot 2.5 = -5$$

Die gesuchte Funktion heißt $f(x) = 2.5x^2 - 5x + 5$

Beispiele für Bedingungen

- hat bei $P(1|3)$ einen Wendepunkt

$$f(1) = 3$$

$$f''(1) = 0$$

- verläuft bei $P(-2|3)$ parallel zur Geraden $g(x) = 4x - 1$

$$f'(-2) = 4$$

- hat an der Stelle $x = 3$ einen Sattelpunkt

$$f'(3) = 0$$

$$f''(3) = 0$$

- ist eine achsensymmetrische Funktion 4. Grades / punktsymmetrische Funktion 5. Grades

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\Rightarrow b = d = 0$$

$$g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$\Rightarrow b = d = f = 0$$

262/1

c

$$A(1|3) \quad B(-1|2) \quad C(3|2)$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$3 = a + b + c$$

$$2 = a - b + c$$

$$2 = 9a + 3b + c$$

$$a - b + c = 9a + 3b + c \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{2}b + c = -\frac{3}{2} + c + 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 2\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 2\frac{3}{4}x$$

262/4

a

$$A(0|1) \quad B(1|0) \quad C(-1|4) \quad D(2|-5)$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$1 = d$$

$$0 = a + b + c + d$$

$$4 = -a + b - c + d$$

$$-5 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$a + b + c = a + b - c + d + 8a + 4b + 2c + d \Rightarrow c = 2a + b$$

$$4 = -a + b - 2a - b + d \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b + c = 0$$

$$c = 2a + b \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$y = -x^3 + x^2 - x + 1$$

3.26.4 Funktionenschar

262/3

b

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$A(2|0) \quad B(-2|0)$$

$$\begin{vmatrix} 4a + 2b + c & = & 0 \\ 4a - 2b + c & = & 0 \end{vmatrix}$$

2x3 LGS unterbestimmt \Rightarrow eine Variable ist frei wählbar

$$\begin{vmatrix} 4a + 2b + c & = & 0 \\ 4b & = & 0 \end{vmatrix} \quad I - II$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$4a + c = 0$$

setze $a = k$

$$4k + c = 0 \Rightarrow c = -4k$$

$$f_k(x) = kx^2 - 4k \quad \text{Funktionenschar, Parameterfunktion}$$

c

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$A(-4|0) \quad B(0|-4)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 16a & -4b & +c = 0 \\ & & c = -4 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow c = -4$$

$$16a - 4b - 4 = 0$$

$$a = k$$

$$16k - 4b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4k - 1$$

$$f_k(x) = kx^2 + 4kx - x - 4$$

262/8

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad b = d = 0$$

$$f(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad e = -1$$

$$f(1) = -3 \quad f'(1) = 0 \quad f''(1) < 0$$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 - 1$$

$$f(1) = a + b - 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a + b = -2$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f'(1) = 4a + 2b = 2a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -4$$

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$$

$$f''(x) = 24x^2 - 8$$

$$f''(1) = 16 > 0$$

\Rightarrow keine Lösung

263/10

c

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P(-3|3) \quad Q(3|0)$$

$$f(-3) = 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 3$$

$$f(3) = 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0$$

$$9a_2 - 3a_1 + a_0 = 9a_2 + 3a_1 + a_0 + 3$$

$$-a_1 = a_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$9a_2 + 1.5 + a_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.5 - 9a_2$$

$$a_2 = k$$

$$f_k(x) = kx^2 - 0.5x + 1.5 - 9k$$

schwarz

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{8}$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 2.625$$

rot

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3.75$$

blau

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = -1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 0.75$$

263/11

$$f\left(\pm\frac{1624}{2}\right) = f(\pm 812) = 254 - 65 = 189$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow b = 0$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f(812) = ax^2 = 659344a = 189 \Rightarrow a \approx 2.8665 \cdot 10^{-4}$$

$$f(x) = 2.8665 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$$

263/12

$$SP(-1|-1) \quad SP(1|1) \Rightarrow f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0$$

$$WP(0|0) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f(1) = a + b + c = 1$$

$$f'(1) = 5a + 3b + c = 0$$

$$f''(1) = 20a + 6b = 0$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad II - I \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right| \quad III - 3 \cdot II \end{array}$$

$$8a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{2} + 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{4} + c = 1 \Rightarrow \frac{15}{8}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

Kapitel 4

Integralrechnung

$$s = v \cdot t \quad \text{für } v = \text{const.}$$

$$\text{Rechtecksfläche } A = 5s \cdot 15 \frac{m}{s} = 75m$$

Es gilt $A = s =$ zurückgelegter Weg



$$s(t) = v(t) \cdot t$$

s = Summe von Rechteckstreifen als Näherung für den Flächeninhalt



Durch Grenzwertbildung erhält man

$$s = \int_0^5 v(t) \cdot dt$$

4.1 Untersumme - Obersumme

Beispiel $f(x) = y = x^2 \quad x \in [0; 1]$



Untersumme

$$U_5 = 0.2 \cdot (0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64) = 0.24FE$$

Der wahre Flächeninhalt ist sicher größer als $0.24FE$

Obersumme

$$O_5 = 0.2 \cdot (0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1) = 0.44FE$$

Der wahre Flächeninhalt ist sicher kleiner als $0.44FE$

5 → Intervall in 5 gleiche Abschnitte:

$I = [0; 1] \Rightarrow$ Intervallbreite 0.2 → Breite der Rechtecke

$(0 + \dots + 0.64)$ bzw. $(0.04 + \dots + 1)$ → Höhen der Rechtecke

$FE \rightarrow$ Flächeneinheiten

$$\begin{aligned} U_{10} &= 0.1 \cdot (0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81) \\ &= 0.285FE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_{10} &= 0.1 \cdot (0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1) \\ &= 0.385FE \end{aligned}$$

4.1.1 Obersumme/Untersumme $\rightarrow \lim \rightarrow \text{Integral}$

$$f(x) = x^2$$

Teile das Intervall in n Teile

\rightarrow Jeder Teil ist $\frac{b}{n}$ (da $b = 1 \rightarrow \frac{1}{n}$) Längeneinheiten breit

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2(n+1)-1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{1}{3}$$

Der wahre Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{3}FE$

$$\text{Wenn gilt, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \text{Zahl} = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Existiert ein gemeinsamer Grenzwert ($n \rightarrow \infty$) von Untersumme und Obersumme, so nennt man den Grenzwert Integralwert des bestimmten Integrals.

160/3

a $1FE \hat{=} 1000000m^3$ Wasser

- b Am schnellsten zwischen $2h$ und $4h$.
Am langsamsten zwischen $8h$ und $10h$.
Nach $12h$ wiederholt sich der Graph periodisch.
- c Der Graph wird um 25% gestreckt, die Fläche wächst also um 25%.

4.2 Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

a, b ... linke bzw. rechte Intervallgrenze

$f(x)$... Integrand, zu integrierende Funktion

x ... Integrationsvariable

dx ... Differenzial $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta x = dx$

$f(x) \cdot dx$... Fläche eines infinitesimal schmalen Rechteckstreifens mit Breite dx und Höhe $f(x)$

\int ... Integralzeichen meint eine Summation

liegt $f(x)$ unterhalb der x -Achse (< 0) im Intervall $[a; b]$, so gilt $\int_a^b f(x) \cdot dx < 0$

Das Integral ist die Differenz oberhalb der x -Achse und unterhalb der x -Achse liegender Flächenstücke

4.3 Berechnung von Integralen, Hauptsatz

Gesucht: Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x) = y = \frac{2}{5}x^3$ im Intervall $[0; b]$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx$$

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{1}{5} \left(\frac{b}{n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2b}{n} \right)^3 + \dots + \frac{1}{5} \left(\frac{(n-1) \cdot b}{n} \right)^3 + \frac{1}{5} b^3 \right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{4} n^2 \cdot (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{20} b^4$$

Betrachte den Flächeninhalt zu linker Grenze a und rechter Grenze b .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \frac{1}{20} a^4 \quad \text{fuer} \quad [0; a] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \frac{1}{20} b^4 \quad \text{fuer} \quad [0; b] \\ A &= \frac{1}{20} b^4 - \frac{1}{20} a^4 \quad \text{fuer} \quad [a; b] \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{20} b^4 - \frac{1}{20} a^4 = \int_a^b \frac{1}{5} x^3 \cdot dx = \left[\frac{1}{20} x^4 \right]_a^b$$

4.3.1 Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dabei gilt $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ heißt Aufleitungsfunktion oder Stammfunktion von $f(x)$.

$$\text{im Beispiel: } F(x) = \frac{1}{20}x^4 \rightarrow \left(\frac{1}{20}x^4\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{20}x^4\right) = \frac{1}{5}x^3$$

167/3

a

$$f(x) = x^2 \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3$$
$$\int_0^4 x^2 \cdot dx = F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 \quad F(x) = \frac{1}{40}x^5$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{8}x^4 \cdot dx = F(-1) - F(-2) = 0.775$$

j

$$f(x) = 0.5x^2 \quad F(x) = \frac{1}{6}x^3$$
$$\int_{-4}^4 0.5x^2 \cdot dx = F(4) - F(-4) = \frac{64}{3}$$

k

$$f(x) = x^5 \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6$$
$$\int_{-1}^1 x^5 \cdot dx = F(1) - F(-1) = 0$$

4.4 Integrale lösen - Anwendung

168/11

$$v(t) = 9.81 \cdot t \quad V(t) = s(t) = 4.905 \cdot t^2$$
$$\int_0^3 v(t) \cdot dt = V(3) - V(0) = 44.145$$

168/13

a

$$\begin{aligned}f(x) &= x & F(x) &= 0.5x^2 \\ \int_0^z x \cdot dx &= 18 = F(z) - F(0) = F(z) - 0 \\ F(z) &= 18 & \Rightarrow & z = 6\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x & F(x) &= 2x^2 \\ \int_1^z 4x \cdot dx &= 30 = F(z) - F(1) = F(z) - 2 \\ F(z) &= 32 & \Rightarrow & z = 4\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x & F(x) &= x^2 \\ \int_z^{10} 2x \cdot dx &= 19 = F(10) - F(z) = 100 - F(z) \\ F(z) &= 81 & \Rightarrow & z = 9\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.4 & F(x) &= 0.4x \\ \int_0^{2z} 0.4 \cdot dx &= 8 = F(2z) - F(0) = F(2z) - 0 \\ F(2z) &= 8 & \Rightarrow & 2z = 20 \quad \Rightarrow \quad z = 10\end{aligned}$$

168/15

a

$$\begin{aligned}f(x) &= -2x^2 + 8x + 1 = 0 \\ x_{1/2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{72}}{-4} \\ x_1 &\approx -0.1213 & x_2 &\approx 4.1213\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+3)^2 \cdot (x+1) = 0 \\(x+3)^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3 \\(x+1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2 \cdot (x^2 - 10) + 4x^2 = 8x^4 - 40x^2 = 0 \\x_1 &= 0 \\(x^2 - 10) &= -1 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 3\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}f(x) &= 4 \cdot (x - 0.5)^4 - 4 = 0 \\(x - 0.5)^4 &= 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.5 \quad x_2 = -0.5\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x - e^2 = 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned}f(x) &= 0.2e^{2x} - 1 = 0 \\e^{2x} &= 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log(5)}{2} \approx 0.8047\end{aligned}$$

Teil III

12/1

4.5 Stammfunktion bilden, integrieren

$$\int_a^b x^7 \cdot dx = \left[\frac{1}{8} x^8 \right]_a^b$$

$$\int \frac{1}{(x+4)^3} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-2} + c$$

$$\int \frac{5}{(3x-2)^5} \cdot dx = -\frac{5}{4 \cdot 3} \cdot (3x-2)^{-4} + c$$

$$\int \frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot e^{2x} + c$$

4.6 bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx = [\ln(|x|)]_a^b$$

sofern $a, b > 0$ oder $a, b < 0$ kein Problem

wenn eines größer und eines kleiner 0 ist, dann muss man genauer untersuchen (Polstelle!)

$$a = -1 \quad b = 2$$

$$\int_a^b \frac{1}{2x-5} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(|2x-5|) \right]_a^b$$

171/3

a

$$\int_0^2 (2+x)^3 \cdot dx = \left[\frac{1}{4} \cdot (2+x)^4 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot ((2+2)^4 - (2+0)^4) = 60$$

b

$$\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx = \left[x - \frac{1}{x} \right]_2^3 = \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

c

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-(x+1)^{-1} \right]_0^2 = -(2+1)^{-1} + (0+1)^{-1} = \frac{2}{3}$$

d

$$\int_0^9 \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \left[\frac{4}{15} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = \frac{4}{15} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot 0^{\frac{3}{2}} = 7.2$$

e

$$\int_{-0.5}^0 e^{2x+1} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_{-0.5}^0 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0 + 1} - \frac{1}{2} e^{2 \cdot (-0.5) + 1} \approx 0.8591$$

f

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(3x - \pi) \cdot dx &= \left[-\frac{1}{3} \cdot \cos(3x - \pi) \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \cos(3\pi - \pi) + \frac{1}{3} \cdot \cos(3 \cdot 0 - \pi) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

g

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[\frac{2}{5} e^{\frac{1}{2}x} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2} \cdot 1} - \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2} \cdot (-1)} = \frac{2e - 2}{5 \cdot \sqrt{e}} \approx 0.4169$$

h

$$\int_{-\pi}^\pi \cos(3x) \cdot dx = \left[-\frac{1}{3} \sin(3x) \right]_{-\pi}^\pi = -\frac{1}{3} \sin(3\pi) + \frac{1}{3} \sin(3 \cdot (-\pi)) = 0$$

171/4

c

$$\int_3^4 \frac{1}{2(x+1)} \cdot dx = \left[\frac{\ln(x+1)}{2} \right]_3^4 = \frac{\ln(4+1)}{2} - \frac{\ln(3+1)}{2} \approx 0.1116$$

4.6.1 Integralfunktion

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = J$$

$$J_a(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Integralfunktion zur unteren (linken) Grenze a . Sie gibt zu jedem später eingesetzten Wert x ($= b$) den bestimmten Integralwert an.

$$\int f(x) \cdot dx = [F(x)]^x = F(x) + c$$

unbestimmtes Integral

175/2

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad J_a(x) = \int_a^x \frac{1}{2}t \cdot dt$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ J_{-4}(x) & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ J_0(x) & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ J_2(x) & 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & 8 \end{array}$$

4.7 Rechenregeln für Integrale

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \pm \int_a^b g(x) \cdot dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \cdot dx$$

172/15

a

$$\int_{-1}^{3.3} 5x^2 \cdot dx - 10 \cdot \int_{-1}^{3.3} \frac{1}{2}x^2 \cdot dx = 0$$

b

$$\int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2 + 4}) \cdot dx + 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4} \cdot dx = \int_0^1 x \cdot dx = 0.5$$

c

$$\int_3^{3.7} \frac{1}{x} \cdot dx + \int_{3.7}^4 \frac{1}{x} \cdot dx = \int_3^4 \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(4) - \ln(3) \approx 0.2877$$

176/10

$$f(t) = 50t^4 \cdot e^{-t}$$

a Die Integralfunktion gibt die Anzahl der Telefonanrufe bis zum Zeitpunkt x an.

$$J_0(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt$$
$$J_0(4) = \int_0^4 f(t) \approx 445$$

b

$$J_4(8) = J_0(8) - J_0(4) \approx 1080 - 445 = 635$$

Die Anzahl der Anrufer in der Warteschleife ist zu dem Zeitpunkt am höchsten, an dem die Anrufer pro Minute wieder unter 200 sinken (bei $t \approx 5$).

176/9

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 12)\right)$$
$$g(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 6)\right)$$

- a Zunahme ($f(t) > 0$) zwischen 6 und 18 Uhr
 Abnahme ($f(t) < 0$) zwischen 18 und 6 Uhr

Zunahme ($g(t) > 0$) zwischen 0 und 12 Uhr
 Abnahme ($g(t) < 0$) zwischen 12 und 24 Uhr

- b Am schnellsten um 12 Uhr (Hochpunkt)
 Am langsamsten um 0/24 Uhr (Tiefpunkt)

Am schnellsten um 6 Uhr (Hochpunkt)
 Am langsamsten um 18 Uhr (Tiefpunkt)

- c Maximal um 18 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)
 Minimal um 6 Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

Maximal um 12 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)
 Minimal um 0/24 Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

d

$$F(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + c$$

$$c = 20 - F_{c=0}(12) = 20$$

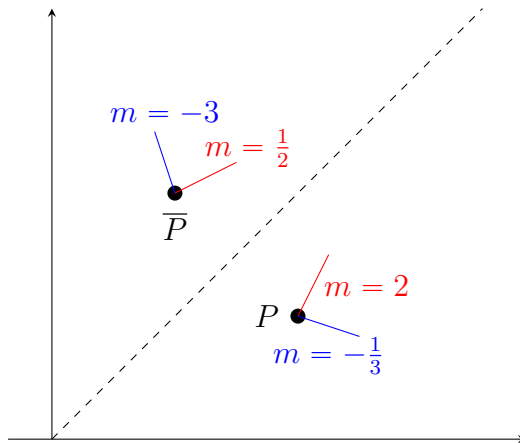
$$F(18) \approx 23.82 \quad F(6) \approx 16.18$$

$$G(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + c$$

$$c = 20 - G_{c=0}(12) \approx 16.1803$$

$$G(12) = 20 \quad G(0) = G(24) \approx 12.36$$

4.8 Ableitung der Umkehrfunktion



$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \sqrt{y}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)}$$

Beispiele

$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = y = e^x \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \ln(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{y}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = y = \sin(x) \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \operatorname{asin}(y)$$

$$\begin{aligned}\overline{f'(y)} &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{asin}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{asin}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = y = \cos(x) \Leftrightarrow f(y) = x = \operatorname{acos}(y)$$

$$\begin{aligned}\overline{f'(y)} &= \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{1}{-\sin(\operatorname{acos}(y))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{acos}(y))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

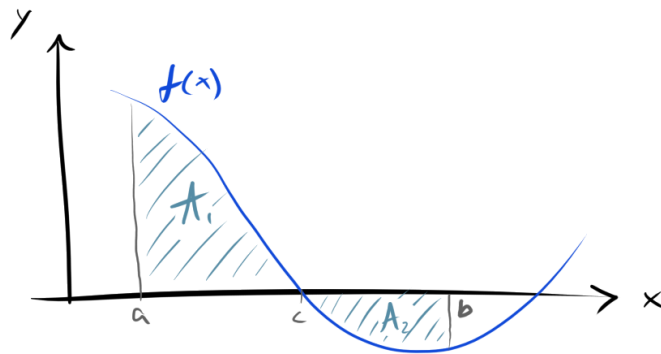
$$f(x) = y = \tan(x) \Leftrightarrow f(y) = x = \operatorname{atan}(y)$$

$$\begin{aligned}\overline{f'(y)} &= \cos^2(x) = \cos^2(\operatorname{atan}(y)) \\ &= 1 - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(\operatorname{atan}(y)) = 1 - \frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}\end{aligned}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

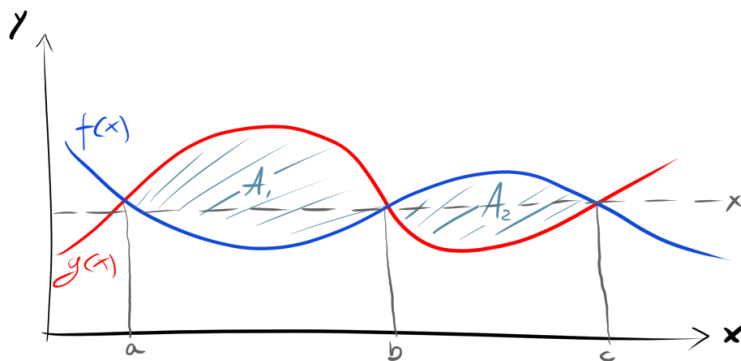
4.9 Integral und Flächeninhalt



$$A = A_1 + A_2$$

$$A \neq \int_a^b f(x) \cdot dx = I$$

$$A = \left| \int_a^c f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_c^b f(x) \cdot dx \right|$$



$$A = A_1 + A_2$$

1. Berechne die Schnittstellen a , b , c

$$2. A = \left| \int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx \right| + \left| \int_b^c (g(x) - f(x)) \cdot dx \right|$$

Wie die Flächen zur x -Achse liegen ist unwichtig, weil ich gedanklich beide Graphen gemeinsam soweit nach oben schieben kann dass die Flächen komplett oberhalb der x -Achse liegen.

$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow f(x) + d \\ g(x) &\longrightarrow g(x) + d \end{aligned}$$

Durch Differenzialbildung fallen die gedanklich eingeführten Verschiebungen wieder weg.

$$\int_a^b ((f(x) + d) - (g(x) + d)) \cdot dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

179/2

a

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.5x^2 + 0.5 & g(x) &= -1.5 \\ F(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + 0.5x & G(x) &= -1.5x \end{aligned}$$

I $A_2 + A_3$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \right| \\ &= |F(1) - F(-1)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

II $A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) \cdot dx \right| \\ &= |(F(2) - F(-2)) - (G(2) - G(-2))| = 5\frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

III A_3

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 f(x) \cdot dx \right| \\ &= |F(1) - F(0)| = \frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

IV A_1

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{-1} f(x) \cdot dx \right| \\ &= |F(-1) - F(-2)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

180/5

a

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = -x^2 + 4x$$

$$f(x) = g(x) \quad L = \{0; 2\}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x$$

$$A = \left| \int_0^2 (2x^2 - 4x) \cdot dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 2\frac{2}{3}FE$$

b

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad g(x) = 2.5x - 5.25$$

$$f(x) = g(x) \quad L = \{2; \sim -0.4; \sim 0.5\}$$

$$f(x) - g(x) = -2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} A &\approx \left| \int_{0.5}^2 \left(-2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx \right| \\ &= \left| \left[-1.25x^2 + 5.25x + \frac{1}{x} \right]_{0.5}^2 \right| \approx 1.7FE \end{aligned}$$

4.9.1 Flächeninhalt, uneigentliche Integrale

180/8

$$f_t(x) = \frac{t}{x^2} \quad [1; 2]$$

$$F_t(x) = -\frac{t}{x}$$

$$A(t) = \int_1^2 -\frac{t}{x} \cdot dx = \frac{t}{2}$$

$$A(16) = 8$$

180/10

$$f_a(x) = a \cdot \sin(x) \quad g_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot \sin(x) \quad x \in [0; \pi]$$

$$f_a(x) - g_a(x) = \sin(x) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$A(a) = \int_0^\pi \sin(x) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot dx = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot [-\cos(x)]_0^\pi = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot 2$$

$$A'(a) = -\frac{2}{a^2} + 2$$

$$A''(a) = \frac{4}{a^3}$$

$$A'(a) = 0 \quad L = \{\pm 1\}$$

$$A''(1) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

$$\text{Minimaler Flächeninhalt: } A(1) = 4FE$$

$$\text{Beispiel } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad [3; \infty[$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_3^z \frac{1}{x^2} \cdot dx = \lim_{z \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_3^z$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}FE$$

183/1

Fig. 1

$$y = \frac{1}{(x+1)^2} \quad [1; z]$$

$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^z = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = \frac{1}{2}$$

Fig. 2

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \quad [2; z]$$

$$A(z) = \int_2^z e^{-\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^z = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{e}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = \frac{2}{e} \approx 0.736$$

Fig. 3

$$y = \frac{2}{x^3} \quad [z; 1]$$

$$A(z) = \int_z^1 \frac{2}{x^3} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x^2} \right] = -1 + \frac{1}{z^2}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} A(z) = \infty$$

Fig. 4

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad [z; 4]$$

$$A(z) = \int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot dx = [8 \cdot \sqrt{x}] = 16 - 8 \cdot \sqrt{z}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} A(z) = 16$$

183/7

$$W = \int_{h_1}^{h_2} F(s) \cdot ds$$

$$F(s) = \gamma \frac{m \cdot M}{s^2}$$

$$c = \gamma \cdot m \cdot M \approx 3.982 \cdot 10^{17} \cdot \frac{m \cdot kg}{s^2}$$

$$F(s) = c \cdot s^{-2}$$

$$W = \int_{h_1}^{h_2} c \cdot s^{-2} \cdot ds = [-c \cdot s^{-1}]_{h_1}^{h_2}$$

a

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \quad h_2 = 4.22 \cdot 10^7 m$$

$$W = [-c \cdot s^{-1}]_{6.37 \cdot 10^6 m}^{4.22 \cdot 10^7 m} \approx 1.333 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 5.308 \cdot 10^{10} Nm$$

b

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \quad h_2 \rightarrow \infty$$

$$W = \lim_{h_2 \rightarrow \infty} [-c \cdot s^{-1}]_{6.37 \cdot 10^6 m}^{h_2} \approx 1.570 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 6.252 \cdot 10^{10} Nm$$

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & f(x) = \frac{1}{x^3} \quad F(x) = -\frac{1}{2 \cdot x^2} \\
\text{II} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad F(x) = -\frac{1}{x} \\
\text{III} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad F(x) = 2 \cdot \sqrt{x}
\end{array}$$

a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^z$$

$$\text{I} = \frac{1}{2}$$

$$\text{II} = 1$$

$$\text{III} = \infty$$

b

$$\lim_{z \rightarrow 1} \int_z^0 f(x) \cdot dx = [F(x)]_z^1$$

$$\text{I} = \infty$$

$$\text{II} = \infty$$

$$\text{III} = 2$$

180/11

$$f(x) = x^2$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad m = f'(a) = 2a$$

$$f(a) = a^2 \quad \Rightarrow \quad b = a^2 - 2a \cdot a = -a^2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2a \cdot x - a^2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a (f(x) - t(x)) \cdot dx &= \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) \cdot dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\
&= \frac{1}{3}a^3
\end{aligned}$$

4.10 Integration von Produkten: partielle Integration

Ableitungs-Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad | - u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v' \quad | \int$$

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Beispiel

$$\int \sin(x) \cdot x \cdot dx = -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 \cdot dx$$

$$= -\cos(x) \cdot x + \sin(x) + c$$

$$(-\cos(x)) \cdot x + \sin(x))' = \sin(x) \cdot x$$

$$\int e^{2x} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \left(\frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1 \cdot dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$= e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right)$$

Spezialfälle

$$\int 1 \cdot \ln(x) \cdot dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - x$$

(Stammfunktion von $\ln(x)$)

$$\begin{aligned}
\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx &= -\cos(x) \cdot \cos(x) - \int \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot dx \\
&= -\cos^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx \quad | + \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx \\
2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx &= -\cos^2(x) \quad | \div 2 \\
\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx &= -\frac{\cos^2(x)}{2}
\end{aligned}$$

188/1

a

$$\int_{-1}^1 e^x \cdot x \cdot dx = [e^x \cdot x]_{-1}^1 - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = [e^x \cdot x - e^x]_{-1}^1 = \frac{2}{e}$$

d

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.5} e^{2x+2} \cdot 4x \cdot dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4x \right]_0^{0.5} - \int \frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4 \cdot dx \\
&= [2e^{2x+2} \cdot x - e^{2x+2}]_0^{0.5} = e^2
\end{aligned}$$

188/2

b

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(x) \cdot x \cdot dx &= [\sin(x) \cdot x]_0^\pi - \int \sin(x) \cdot 1 \cdot dx \\
&= [\sin(x) \cdot x + \cos(x)]_0^\pi = -2
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(0.5x) \cdot 2x \cdot dx &= [-2\cos(0.5x) \cdot 2x]_0^{2\pi} - \int -2\cos(0.5x) \cdot 2 \cdot dx \\
&= [-2\cos(0.5x) \cdot 2x + 8\sin(0.5x)]_0^{2\pi} = 8\pi
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\sin(x))^2 \cdot dx &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int -\cos(x) \cdot \cos(x) \cdot dx \\
&= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_0^\pi - \int (-\sin^2(x) - 1) \cdot dx \\
&= [-\cos(x) \cdot \sin(x) + x]_0^\pi - \int \sin^2(x) \cdot dx \quad | + \int_0^\pi \sin^2(x) \cdot dx; \quad \div 2 \\
&= \left[\frac{-\cos(x) \cdot \sin(x) + x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 e^x \cdot \cos(x) \cdot dx &= [\sin(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int \sin(x) \cdot e^x \cdot dx \\
&= [\sin(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - ([-\cos(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int -\cos(x) \cdot e^x \cdot dx) \\
&= [\sin(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x]_{-2}^2 - \int \cos(x) \cdot e^x \cdot dx \\
&= \left[\frac{(\sin(x) + \cos(x)) \cdot e^x}{2} \right]_{-2}^2 \approx 1.912
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sin(\pi x) \cdot e^{2x} \cdot dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot dx \\
&= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^2 - \left(\left[\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) \right]_0^2 - \int -\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot dx \right) \\
&= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^2 - \left(\left[\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) + \frac{1}{4} \pi^2 \right]_0^2 - \int e^{2x} \cdot \sin(\pi x) \cdot dx \right) \\
&= \left[\frac{2e^{2x} \cdot \sin(\pi x) - \pi \cdot e^{2x} \cdot \cos(\pi x)}{\pi^2 + 4} \right]_0^2 = \frac{\pi}{\pi^2 + 4} - \frac{e^4 \cdot \pi}{\pi^2 + 4} \approx -12.140
\end{aligned}$$

4.11 Integration durch Substitution

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx &= \int (f(g(x)))' \cdot dx \\ &= f(g(x)) \quad \text{Dabei ist } f \text{ die Stammfunktion von } f' \\ \Rightarrow \text{Benenne um } f' &\rightarrow f \quad f \rightarrow F \end{aligned}$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = F(g(x))$$

Substitution 1

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx \quad \text{ersetze } z &= g(x) \quad \frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dz = g'(x) \cdot dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} \end{aligned}$$

Resubstitution

$$= [F(g(x))]_a^b$$

Beispiel

$$\int_1^2 \frac{5x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \text{subst. } z &= 1 + 3x^2 \quad \frac{dz}{dx} = (1 + 3x^2)' = 6x \quad dz = 6x \cdot dx \\ &= \frac{5}{6} \int_1^2 \frac{6x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx = \frac{5}{6} \int_4^{13} z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz \\ &= \frac{5}{6} \left[2z^{\frac{1}{2}} \right]_4^{13} = \frac{5}{6} \left[2 \cdot (1 + 3x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 \approx 2.676 \end{aligned}$$

191/1

a

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx; \quad g(x) = 1 + 2x^2 \\ \text{subst. } z &= g(x) \quad dz = g'(x) \cdot dx \\ &= \int_{g(0)}^{g(2)} \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot dz = [2 \cdot \sqrt{z}]_1^9 = 4 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{-2x}{(4-3x^2)^2} \cdot dx; \quad g(x) = 4 - 3x^2 \\ \text{subst. } z &= g(x) \quad dz = g'(x) \cdot dx \\ &= \int_{g(-1)}^{g(1)} \frac{1}{3z^2} \cdot dz = \left[-\frac{1}{3z} \right]_1^1 = 0 \end{aligned}$$

191/3

e

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \\ \text{subst. } z &= 1 + x^2 \quad dz = 2x \cdot dx \\ &= \int_1^{10} \frac{1}{z} \cdot dz = [\ln(z)]_1^{10} \\ \text{resubst.} \\ &= [\ln(1+x^2)]_0^3 = \ln(10) \approx 2.3026 \end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \frac{e^x}{2+e^x} \cdot dx \\ \text{subst. } z &= 2 + e^x \quad dz = e^x \cdot dx \\ &= \int_{2+e^{-1}}^{2+e^2} \frac{1}{z} \cdot dz = [\ln(z)]_{2+e^{-1}}^{2+e^2} \\ \text{resubst.} \\ &= [\ln(2+e^x)]_{-1}^2 \approx 1.3775 \end{aligned}$$

g

$$\int_e^{e^2} \frac{4}{x \cdot \ln(x)} \cdot dx$$

$$\text{subst. } z = \ln(x) \quad dz = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \frac{4}{z} \cdot dz = [4 \cdot \ln(z)]_1^2$$

resubst.

$$= [4 \cdot \ln(\ln(x))]_e^{e^2} = 4 \cdot \ln(2) \approx 2.7726$$

h

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi \cdot \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \cdot dx$$

$$\text{subst. } z = \sin(\pi x) \quad dz = \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot dx$$

$$= \int_{\sin(\frac{\pi}{3})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{z} \cdot dz = [\ln(z)]_{\sin(\frac{\pi}{3})}^{\sin(\frac{\pi}{2})}$$

resubst.

$$= [\ln(\sin(\pi x))]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \approx 0.1438$$

191/8

a

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} \cdot dx \quad t = e^{2x} + 3 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 2e^{2x} \quad dx = \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt \\ &= \int_{t(0)}^{t(\ln(2))} \frac{e^{4x}}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(\ln(2))} \frac{e^{2x}}{2t} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(\ln(2))} \frac{t-3}{2t} \cdot dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{3}{2} \cdot \ln(t) \right]_4^7 \approx 0.6606 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{2x+3}{(x+2)^2} \cdot dx \quad t = x+2 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 1 \quad dx = dt \\ &= \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2x+3}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2t-1}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) \cdot dt \\ &= \left[2 \cdot \ln(t) + \frac{1}{t} \right]_3^4 \approx 0.4920 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
& \int_{0.5}^7 \frac{x}{\sqrt{4x-1}} \cdot dx \quad t = 4x - 1 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 4 \quad dx = \frac{dt}{4} \\
&= \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{4} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{4 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{t+1}{16 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt \\
&= \left[\left(\frac{1}{16}t + \frac{1}{16} \right) \cdot 2 \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{1}{8} \cdot \sqrt{t} \cdot dt \\
&= \left[\left(\frac{1}{8}t + \frac{1}{8} \right) \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} \\
&= \left[\frac{1}{8} \cdot (t \cdot \sqrt{t} + \sqrt{t} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3}) \right]_1^{27} \approx 6.3285
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
& \int_0^4 \frac{4}{1+2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx \quad t = 1 + 2 \cdot \sqrt{x} \quad t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad dx = \sqrt{x} \cdot dt \\
&= \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \sqrt{x} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \frac{t-1}{2} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4t-4}{2t} \cdot dt \\
&= \left[\frac{1}{2t} \cdot (2t^2 - 4t) \right]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} -\frac{1}{2t^2} \cdot (2t^2 - 4t) \cdot dt \\
&= [t-2]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} \left(\frac{2}{t} - 1 \right) \cdot dt \\
&= [t-2 - (2 \cdot \ln(t) - t)]_{t(0)}^{t(4)} = [2 \cdot (t-1 - \ln(t))]_1^5 \approx 4.7811
\end{aligned}$$

Substitution 2

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{ersetze } x = g(z) \\
&= \int_a^b f(g(z)) \cdot dx = \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= g(z) & z &= \bar{g}(x) \\
\frac{dx}{dz} &= g'(z) & dx &= g'(z) \cdot dz
\end{aligned}$$

$$= [F(g(z))]_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} = [F(x)]_a^b$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx & \quad x = \sin(z) \quad dx = \cos(z) \cdot dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(z)}{\sqrt{1-\sin^2(z)}} \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \cdot dz = [z]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \approx 0.524 \end{aligned}$$

AB/23

a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^x \cdot \sqrt{e^x + 1} \cdot dx \\ x(t) = \ln(t) & \quad t = e^x \quad dx = \frac{1}{t} \cdot dt \\ &= \int_{e^0}^{e^1} e^{\ln(t)} \cdot \sqrt{e^{\ln(t)} + 1} \cdot \frac{1}{t} \cdot dz = \int_1^e \sqrt{t+1} \cdot dz \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(t+1)^3} \right]_1^e \approx 2.8943 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \ln(x^2) \cdot dx \\ x(t) = e^t & \quad t = \ln(x) \quad dx = e^t \cdot dt \\ &= \int_{\ln(1)}^{\ln(3)} \frac{1}{e^t} \cdot \ln(e^{t^2}) \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{\ln(3)} \ln(e^{2t}) \cdot dt = \int_0^{\ln(3)} 2t \cdot dt \\ &= [t^2]_0^{\ln(3)} = (\ln(3))^2 \approx 1.2069 \end{aligned}$$

4.11.1 Wiederholung

1. Ersetze $g(x)$ durch z

$$\begin{aligned} \int_a^b &= f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz \\ &= [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_a^b \\ z &= g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= g'(x) \\ dz &= g'(x) \cdot dx \end{aligned}$$

2. Ersetze x durch $g(z)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot dx &= \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz \\ &= [F(g(z))]_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} = [F(x)]_a^b\end{aligned}$$

$$x = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{g}(x)$$

$$\frac{dx}{dz} = g'(z)$$

$$dx = g'(z) \cdot dz$$

AB/23

d

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot (1 - \ln(x))} \cdot dx \\ x(t) = e^t \quad t = \ln(x) \quad dx = e^t \cdot dt \\ = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{1 + \ln(e^t)}{e^t \cdot (1 - \ln(e^t))} \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{\ln(2)} \frac{1 + t}{1 - t} \cdot dt \\ z = 1 - t \quad \frac{dz}{dt} = -1 \quad dz = -dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= - \int_{1-0}^{1-\ln(2)} \frac{2 - z}{z} \cdot dz = - \int_{1-0}^{1-\ln(2)} \left(\frac{2}{z} - 1\right) \cdot dz \\ &= - [2 \cdot \ln(z) - z]_1^{1-\ln(2)} \approx 1.6696\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot dx \\ x(t) = 2 \cdot \sin(t) \quad t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \quad dx = 2 \cdot \cos(t) \cdot dt \\ = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot \cos(t)}{\sqrt{4 - (2 \cdot \sin(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot \cos(t)}{2 \cdot \sqrt{1 - (\sin(t))^2}} \cdot dt \\ = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot \cos(t)}{2 \cdot \sqrt{(\cos(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} 1 \cdot dt = [t]_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

4.12 Rotationskörper

Rotationssymmetrische Körper, die man sich dadurch entstanden vorstellen kann, dass eine Fläche um eine Achse (x -Achse) rotiert.

4.12.1 Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$



$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) \cdot dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{13}{6}FE \approx 2.17FE$$

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{293\pi}{60}VE \approx 15.34VE$$

196/1

a

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{x+1} \\V &= \pi \cdot \int_{-1}^2 (\sqrt{x+1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{-1}^2 (x+1) \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 = \pi \cdot 4.5VE \approx 14.1372VE\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{x} \\V &= \pi \cdot \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_1^3 x^{-2} \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[-x^{-1} \right]_1^3 = \pi \cdot \frac{2}{3}VE \approx 2.0944VE\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 6x + 8 \\y &= 0 \quad L = \{2; 4\} \\V &= \pi \cdot \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_2^4 (x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64) \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{52}{3}x^3 - 48x^2 + 64x \right]_2^4 = \pi \cdot \frac{16}{15}VE \approx 3.3510VE\end{aligned}$$

197/8

$$f(x) = 0.5x + 1 \quad g(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x-1} \quad [0; 4]$$

a

$$\begin{aligned}V_W &= \pi \cdot \int_1^4 (1.5 \cdot \sqrt{x-1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_1^4 (2.25x - 2.25) \cdot dx \\&= \pi \cdot \left[1.125x^2 - 2.25x \right]_1^4 = 10.125\pi \approx 31.8086 \\[V_W] &= cm^3\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \cdot \int_0^4 (0.5x + 1)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^4 (0.25x^2 + x + 1) \cdot dx \\
 &= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^4 = \frac{52\pi}{3} \approx 54.4543 \\
 V_G &= V - V_W = 10.125\pi - \frac{52\pi}{3} = 22.6456 \\
 [V] &= [V_G] = cm^3
 \end{aligned}$$

197/9

b

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2 - x^3 & g(x) &= x^2 \\
 f(x) &= g(x) & L &= \{0; 2\} \\
 V &= \pi \cdot ((3x^2 - x^3)^2 - (x^2)^2) \cdot dx = \pi \cdot (9x^4 - 6x^5 + x^6 - x^4) \cdot dx \\
 &= \pi \left[\frac{8}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7 \right]_0^2 = \frac{192\pi}{35} \approx 17.2339
 \end{aligned}$$

188/4

b

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x \cdot \sin(x) \\
 \int f(x) \cdot dx &= -\cos(x) \cdot 2x - \int -\cos(x) \cdot 2 \cdot dx = -\cos(x) \cdot 2x + \sin(x) \cdot 2
 \end{aligned}$$

188/9

b

$$\begin{aligned}
 &\int_1^e x \cdot \ln(2x) \cdot dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(2x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(2x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x \cdot dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(2x) - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e \approx 4.3115
 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} & \int_1^{e^2} x^2 \cdot \ln(x) \cdot dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^{e^2} \approx 224.2382 \end{aligned}$$

Kapitel 5

Analytische Geometrie

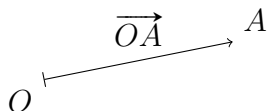
5.1 Punkte und Vektoren

Jeder Punkt im Raum \mathbb{R}^3 ist durch 3 Koordinaten $(x|y|z)$ oder $(x_1|x_2|x_3)$ festgelegt, sofern zuvor der Ursprung O des Koordinatensystems festgelegt wird.

Den Vektor, der vom Ursprung O zum Punkt $A(x|y|z)$ führt, nennt man Ortsvektor von A und notiert man

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

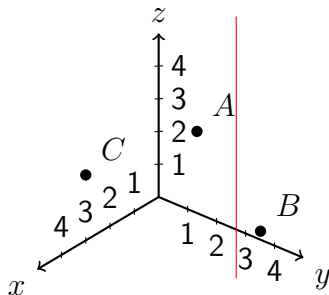
Ein Vektor ist eine Steck (mit Länge) mit Orientierung (Pfeil).



5.1.1 Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem

$$A(2|3|4) \quad B(-3|1|-2) \quad C(3|0|2)$$

Alle Punkte mit $(-2|1|z)$ liegen auf einer Geraden parallel zur z -Achse.



275/2

a+c



b

$$D(-2|-1|0) \quad E(-2|0|3) \quad F(1|0|3) \quad H(-2|-1|3)$$

276/3

$$\begin{array}{ll} P(2|3|0) & Q(4|4|0) \\ R(0|3|1) & S(0|-2|-1) \\ T(2|0|2) & U(3|0|-1) \end{array}$$

276/10

$$A(2|0|0) \quad B(-1|2|-1) \quad C(-2|3|4) \quad D(3|4|-2)$$

a

$$A'(2|0|0) \quad B'(-1|2|\textcolor{red}{1}) \quad C'(-2|3|\textcolor{red}{-4}) \quad D'(3|4|\textcolor{red}{2})$$

b

$$A'(-2|0|0) \quad B'(1|2|-1) \quad C'(2|3|4) \quad D'(-3|4|-2)$$

c

$$A'(2|0|0) \quad B'(-1|-2|-1) \quad C'(-2|-3|4) \quad D'(3|-4|-2)$$

5.2 Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren

\overrightarrow{OA} ist der Ortsvektor des Punktes A . Der Vektor führt vom Ursprung O zum Punkt A . \overrightarrow{BC} ist ein Verschiebungsvektor, der Punkt B auf Punkt C verschiebt, bzw. B mit C verbindet und auf C zeigt. Mit Hilfe des Vektors \overrightarrow{BC} lassen sich auch andere Punkte in gleicher Weise verschieben wie Punkt B auf Punkt C .

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P(0|1) \quad Q(4|3) \quad R(1.5|0.5)$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP'} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$



5.2.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



- $$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \text{ (Gegenvektor von } \vec{b})$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



- $$\vec{f} = 3 \cdot \vec{a}$$

$$\vec{f} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Darstellung eines Vektors durch andere Vektoren (Bsp. Verbindungsvektor)

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

279/6

a

$$\begin{array}{llll} A(-2|2|3) & B(5|5|5) & C(9|6|5) & D(2|3|3) \\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & & \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} & \Rightarrow & \text{Parallelogramm} & \end{array}$$

b

$$\begin{array}{llll} A(2|0|3) & B(4|4|4) & C(11|7|9) & D(9|3|8) \\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} & \Rightarrow & \text{Parallelogramm} & \end{array}$$

c

$$\begin{array}{llll} A(2| - 2|7) & B(6|5|1) & C(1| - 1|1) & D(8|0|8) \\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} & \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} & & \\ \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC} & \Rightarrow & \text{kein Parallelogramm} & \end{array}$$

279/7

a

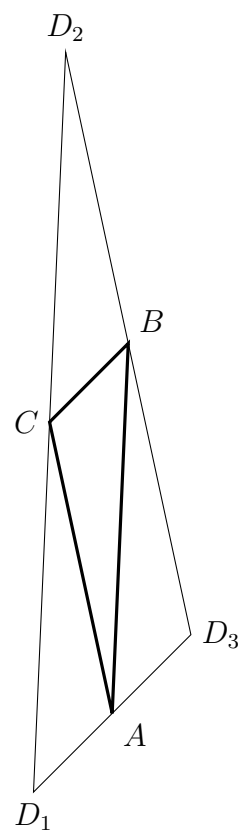
$$A(21|-11|43) \qquad B(3|7|-8) \qquad C(0|4|5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -51 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -14 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 22 \\ -46 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 30 \end{pmatrix}$$



b

$$A(-75|199|-67) \quad B(35|0|-81) \quad C(1|2|3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 110 \\ -199 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -34 \\ 2 \\ 84 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -109 \\ 201 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 111 \\ -197 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -41 \\ 197 \\ -151 \end{pmatrix}$$



5.2.2 Vektorzüge und Linearkombinationen

(zu 279/6)

M_1 ... Mittelpunkt von \overline{AB}

M_2 ... Mittelpunkt des Parallelogramms (mit D_1)

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

zu 6a

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu 6b

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

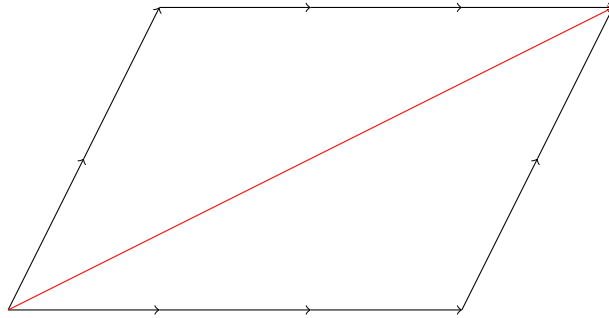
$$\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3.5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Setze ich mehrere Vektorpfeile, mit Koeffizienten multipliziert, aneinander, so nennt man das einen Vektorzug. Die rechnerische Summe solcher Vektoren heißt Linearkombination.

283/5

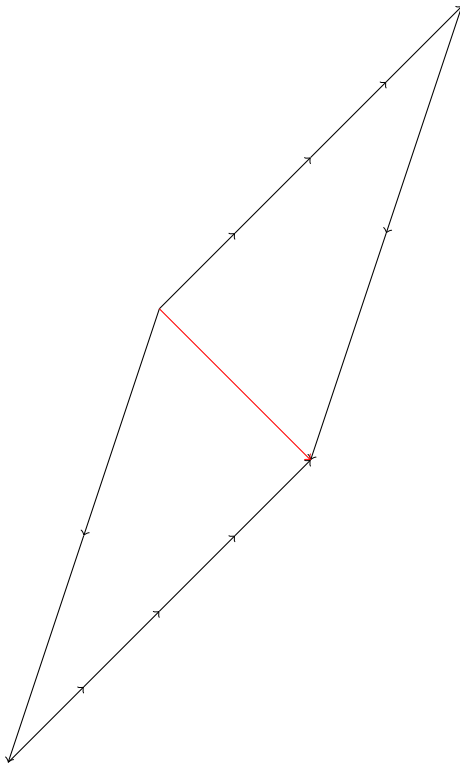
a

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$



b

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



c

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$



283/7

d

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

f

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 30 \\ 17 \end{pmatrix}$$

284/11

f $-(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$

g $2(2\vec{a} + 4\vec{b}) = 4\vec{a} + 8\vec{b}$

h $-4(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} + \vec{a} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$

i $3(\vec{a} + 2(\vec{a} + \vec{b})) = 9\vec{a} + 6\vec{b}$

j $6(\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b}) = 10\vec{a} - 2\vec{b}$

k $7\vec{u} + 5(\vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{v})) = 2\vec{u} - 10\vec{v}$

284/12

a $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b $\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

c $\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

5.3 Geraden in \mathbb{R}^3

O

$$\begin{array}{ccccccc} S_5 & A & S_2 & S_1 & S_3 & B & S_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_4} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS_5} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Gerade durch die Punkte A und B :

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} \quad s \in \mathbb{R}$$

Parametergleichung einer Geraden g :

g Name der Geraden

\vec{x} Ortsvektor eines unbestimmten Punktes

\overrightarrow{OA} Ortsvektor eines bestimmten Punktes A (heißt auch Stützvektor)

s Parameter $s \in \mathbb{R}$

Beim Durchlaufen aller Zahlen von \mathbb{R} werden nacheinander alle Punkte der Geraden g dargestellt

\overrightarrow{AB} Richtungsvektor von g gibt die Richtung von g an

$$h: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiele für Punkte auf h

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r = 0$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r = 1$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \quad r = 2$$

$$\overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = -1$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \in h$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gibt es ein r , das alle 3 Gleichungen löst?

$$3 = 1 - 3r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{2}{3}$$

$$7 = 5r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{7}{5}$$

$$-1 = 2 + 2r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow Q \notin h$$

287/2

a

$$A(1|2|2) \quad B(5|-4|7)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b

$$A(-3|-2|9) \quad B(0|0|3)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c

$$A(7|-2|7) \quad B(1|1|1)$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

287/3

c

$$X(2|3|-1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 = 7 + t \cdot 5 \Rightarrow t = -1$$

$$3 = t \cdot -3 \Rightarrow t = -1$$

$$-1 = 4 + t \cdot 5 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow X \in g$$

d

$$X(2|-1|-1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 = 1 + t \Rightarrow t = 1$$

$$-1 = t \cdot 3 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow X \notin g$$

288/12

a g

$$P_1(2|9|0) \quad P_2(-4|1|0) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h

$$H(-4|1|3) \quad P(2|5|-3) \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i

$$P_1(-4|5|3) \quad P_2(-4|9|0) \quad i: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

j

$$P_1(-1|1|0) \quad P_2(-1|5|3) \quad j: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b g

$$C(-8|11|0) \quad P(-2|5|3) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

h

$$P_1(-2|5|3) \quad P_2(-6|9|3) \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$B(0|11|0) \quad P(-6|5|3) \quad i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

j

$$M(-4|7|0) \quad P(-6|5|3) \quad j: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.3.1 Kollinearität

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b} \quad t \in \mathbb{R}$$

für \vec{b} gilt: \vec{b} kann durch $\vec{b}' = s \cdot \vec{b}$ ersetzt werden $s \in \mathbb{R} \quad s \neq 0$

$$\vec{b}' \parallel \vec{b} \quad \vec{b}' \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear}$$

Sonderfall: Gerade durch O

$$\text{z. B. } g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

hier ist $\vec{a} \parallel \vec{b}$, d. h. \vec{a} und \vec{b} sind kollinear ($\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$)

5.3.2 Lage zweier Geraden

4 Möglichkeiten unterschiedlicher Lage:

- Schnitt (Schnittpunkt)
- parallel
- identisch
- windschief

Verfahren um festzustellen, welche Lage zwei Geraden g und h haben

$$g: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

$$h: \vec{x} = \vec{c} + t \cdot \vec{d}$$

$$\vec{b} \stackrel{?}{=} r \cdot \vec{d}$$

- wahr:

$$\vec{a} \stackrel{?}{=} \vec{c} + t \cdot \vec{d} \text{ oder } \vec{c} \stackrel{?}{=} \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

- wenn wahr, dann sind g und h identisch
- wenn nicht wahr, dann sind g und h parallel

- nicht wahr:

$$\vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c} + t \cdot \vec{d}$$

- finde ich ein s und ein t , sodass das LGS gelöst wird, so schneiden sich g und h in einem Punkt S
- ansonsten sind g und h windschief

292/1

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r = 2$$

\Rightarrow identisch oder parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

\Rightarrow identisch

292/2

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9 + 3r = 7 + s$$

$$2r = -2 + s$$

$$6 + r = 2 + 2s$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad s = 2$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$S(9|0|6)$$

292/4

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r = -3$$

\Rightarrow identisch oder parallel

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$5 = 7 + t \cdot (-6) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

$$0 = 1 + t \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

$$1 = 2 + t \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

\Rightarrow parallel

b

$$g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow nicht parallel

$$t_g \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t_h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_g \cdot 2 = 2 + t_h \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad t_g = 1$$

$$t_g \cdot 0 = 3 + t_h \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad t_h = -1$$

$$t_g \cdot 1 \neq 4 + t_h \cdot (-1)$$

\Rightarrow windschief

293/8

b

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$i: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.3.3 Parameterpunkte und -geraden

$$\overrightarrow{OA_b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b \cdot 0 \\ 5 + b \cdot 0 \\ 0 + b \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC_d} = \begin{pmatrix} 2d \\ 1 - 5d \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + d \cdot 2 \\ 1 + d \cdot (-5) \\ 7 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

293/10

a

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$3 - r = 1 + 2s$$

$$a + 5r = -22s$$

$$3 + 7r = a - 29s$$

$$a = 2 \quad r = 4 \quad s = -1$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 31 \end{pmatrix}$$

b

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3 + 10r = a + 6s$$

$$2 + 7r = -1 + 2s$$

$$a = 3 - s$$

$$a = 5 \quad r = -1 \quad s = -2$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

293/16

$$G = 10cm^2 \quad h = 15cm$$

$$V_Z = G \cdot h = 150cm^3$$

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 50cm^3$$

$$V_Z - V_K = 100cm^3 = 0.1L$$

5.4 Abstand zweier Punkte, Vektorlänge, Streckenlänge

$$\text{Bsp. } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}: [2; 5]$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \overrightarrow{OD} &= \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{CD}| &= |\overrightarrow{CD}| = \text{Abstand } C \leftrightarrow D \\ \overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Seitenlängen des Segels (Bsp. S. 294)

unten: $4m$

links: $\sqrt{(5m)^2 + (3m)^2}$ (Satz des Pythagoras)

rechts: $\sqrt{(\sqrt{34}m)^2 + (4m)^2} = \sqrt{(5m)^2 + (3m)^2 + (4m)^2}$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{45} \approx 6.71LE$$

Die Länge eines Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist $\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

297/2

a

$$A(0|0|0) \quad B(2|3|-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3.74LE$$

b

$$A(2|2|-2) \quad B(0|-1|5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{62} \approx 7.87LE$$

c

$$A(1|5|6) \quad B(1|6|7)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.41LE$$

5.4.1 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor hat die Länge $1LE$

Einheitsvektor zu z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \sqrt{30}$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

297/8

a

$$A(1|-2|2) \quad B(3|2|1) \quad C(3|0|3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \text{nicht gleichschenkelig}$$

b

$$\begin{array}{lll}
 A(7|0|-1) & B(5|-3|-1) & C(4|0|1) \\
 \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} & |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13} & \\
 \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13} & \\
 \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} & \\
 |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| & \Rightarrow \text{gleichschenkelig} &
 \end{array}$$

297/9

a

$$\begin{array}{lll}
 A(4|2|-1) & B(10|-8|9) & C(4|0|1) \\
 \overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 |\overrightarrow{AM_a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9 \\
 |\overrightarrow{BM_b}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{198} \approx 14.07 \\
 |\overrightarrow{CM_c}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} \approx 5.20
 \end{array}$$

b

$$\begin{aligned}
& A(1|2|-1) \quad B(-1|10|15) \quad C(9|6|-5) \\
\overrightarrow{OM_a} &= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OM_b} &= \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OM_c} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\
|\overrightarrow{AM_a}| &= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9 \\
|\overrightarrow{BM_b}| &= \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -18 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-18)^2} = \sqrt{396} \approx 19.90 \\
|\overrightarrow{CM_c}| &= \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15
\end{aligned}$$

c

zu a

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AM_a}| = 6 \\
|\overrightarrow{BS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{BM_b}| \approx 9.38 \\
|\overrightarrow{CS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{CM_c}| \approx 3.46
\end{aligned}$$

zu b

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AM_a}| = 6 \\
|\overrightarrow{BS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{BM_b}| \approx 13.27 \\
|\overrightarrow{CS}| &= \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{CM_c}| = 10
\end{aligned}$$

5.5 Produkte zweier Vektoren

5.5.1 Skalarprodukt

Beispiel aus der Physik:



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha) \quad \vec{F}_s \dots \vec{F} \text{ in Richtung } \vec{s}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha) \cdot |\vec{s}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 7$$

Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} :

$$7 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{14} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}}\right) \approx 1.025 \approx 58.73^\circ$$

Spezialfall:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{z. B. } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

321/1

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow g \not\perp h$$

b

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g \perp h$$

zu 297/8

a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 11 \quad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{9}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{11}{3\sqrt{21}}\right) \approx 0.64 \approx 36.86^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \quad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{8}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{8}}\right) \approx 0.69 \approx 39.51^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \quad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-2}{3\sqrt{8}}\right) \approx 1.81 \approx 103.63^\circ$$

b

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \quad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{13}\right) \approx 1.09 \approx 62.51^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{14}$$

$$\beta = \gamma = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 1.03 \approx 58.74^\circ$$

zu 297/9

a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 40 \quad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{236} \cdot \sqrt{8}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{236} \cdot \sqrt{8}}\right) \approx 0.40 \approx 22.99^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = 196 \quad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{236} \cdot \sqrt{164}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{196}{\sqrt{236} \cdot \sqrt{164}}\right) \approx 0.09 \approx 4.95^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = -32 \quad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{164}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-32}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{164}}\right) \approx 2.65 \approx 152.06^\circ$$

b

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -48 \quad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{324} \cdot \sqrt{96}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-48}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{96}}\right) \approx 1.85 \approx 105.79^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = 372 \quad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{324} \cdot \sqrt{516}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{372}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{516}}\right) \approx 0.43 \approx 24.52^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} = 144 \quad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{96} \cdot \sqrt{516}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{144}{\sqrt{96} \cdot \sqrt{516}}\right) \approx 0.87 \approx 49.68^\circ$$

321/2

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$2b_1 - 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 6$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$2 - a_2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$-3 + 0 + 2b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = 1.5$$

321/3

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = 0$$
$$7a_1 + 17a_2 + 2a_3 = 0$$

z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

322/8

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 1c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 2c_1 + 0c_2 + 3c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{3}{2}c_3$$

wähle willkürlich $c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = -3$

setze c_1 und c_3 in I ein

$$-3 + 2c_2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 2c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 5c_1 - c_2 - 2c_3 = 0$$

$$\text{I} = \frac{1}{2} \cdot \text{II} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 7c_2$$

wähle willkürlich $c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 7$

setze c_1 und c_2 in I ein

$$14 + 3 - c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 17$$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 4c_1 - c_2 + 5c_3 = 0$$

$$\text{I} = \text{II} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2$$

wähle willkürlich $c_1 = 5 \Rightarrow c_2 = 5$

setze c_1 und c_2 in I ein

$$5 + 10 + 5c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -3$$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

322/9

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 0 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -8$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 0 + 2b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = -1.5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = -24 + b_2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 30$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 30 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 2 - 5 = 0 \Rightarrow c_1 = 3$$

$$\text{I} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = b_1 + b_2 + 1 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3b_1 + 2b_2 - 5 = 0$$

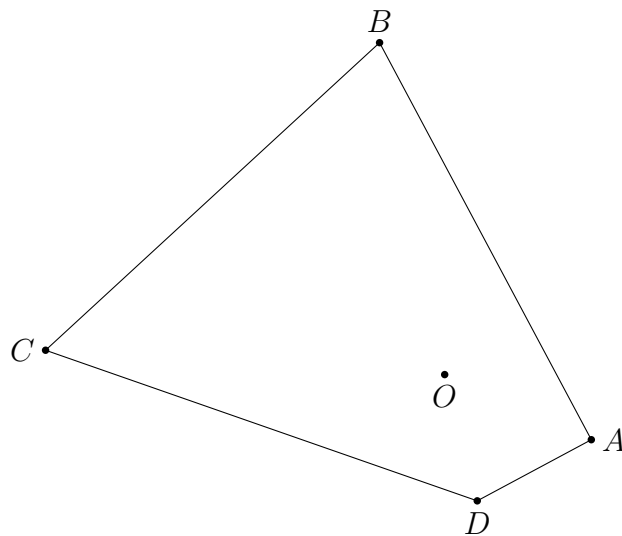
$$\Rightarrow b_1 = 7 \quad b_2 = -8 \quad (\text{Einsetzungsverfahren})$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

366/7

a

$$A(2|-2|-2) \quad B(-2|5.5|-2) \quad C(-6|2|4) \quad D(1|-2|1)$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3.5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{72.25} \cdot \sqrt{10}}\right) \approx 1.42 \approx 81.44^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|}\right) = \arccos\left(\frac{10.25}{\sqrt{64.25} \cdot \sqrt{72.25}}\right) \approx 1.42 \approx 81.35^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{CD} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CD}| \cdot |\vec{CB}|}\right) = \arccos\left(\frac{32}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{64.25}}\right) \approx 1.09 \approx 62.35^\circ$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{\vec{DA} \cdot \vec{DC}}{|\vec{DA}| \cdot |\vec{DC}|}\right) = \arccos\left(\frac{-16}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{74}}\right) \approx 2.20 \approx 126.03^\circ$$

b

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \approx 351^\circ$$

Die Summe der Innenwinkel ist nicht 360° , da das Viereck nicht auf einer Ebene liegt.

366/3

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 2a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 30^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3 + b^2}$$

$$\alpha = 30^\circ = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{3 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 3$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{c}{2} \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{1 + c^2}$$

$$\alpha = 30^\circ = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{c}{2 \cdot \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{1 + c^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$$

366/4

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{b} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 13 & |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \\ \alpha_{a,b} = \alpha_{-a,-b} &= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}}\right) &= 45^\circ \\ \alpha_{-a,b} = \alpha_{a,-b} &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

5.6 Vektorräume

Beispiel

$$\text{Vektorraum } V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{Prüfe } \vec{a} + \vec{b} \in V_1: \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nullvektor} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gegenvektor} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Abgeschlossenheit:

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ a + b \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_2$$

$$\text{z. B. } a = 3, b = 5 \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_2$$

$$\left[\begin{pmatrix} (a+b)^2 \\ a+b \\ c \end{pmatrix} \right] \in V_2$$

$\Rightarrow V_2$ ist kein Vektorraum, da er nicht abgeschlossen ist

300/1

b

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2(a+b) \\ 3(a+b) \end{pmatrix} \in V \quad k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak \\ 2ak \\ 3ak \end{pmatrix} \in V$$

$\Rightarrow V$ ist ein Vektorraum

c

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a^2+b^2 \\ a^3+b^3 \end{pmatrix} \notin V$$

$\Rightarrow V$ ist kein Vektorraum

5.6.1 Basis

Die Basis eines Vektorraums ist ein Satz von Vektoren mit den Eigenschaften:

- Jeder Vektor muss als Linearkombination der Vektoren der Basis darstellbar sein
- Die Anzahl der Basisvektoren muss minimal sein

Beispiel

$$V = \mathbb{R}^3 \quad Basis_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{z. B. } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Basis_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad M \text{ ist keine Basis}$$

Die Mindestzahl von Vektoren der Basis heißt Dimension des Vektorraums. \mathbb{R}^3 ist ein 3-dimensionaler Vektorraum.

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} & Basis &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} & (1\text{-dim.}) \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} & Basis &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & (1\text{-dim.}) \end{aligned}$$

301/3

a

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & br \\ -br & ar \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$ ist ein Vektorraum

$$Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & br \\ 0 & cr \end{pmatrix}$$

$$ar + br + cr = r(a + b + c) = 0$$

$\Rightarrow N$ ist ein Vektorraum

$$Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$ ist kein Vektorraum

5.7 Lineare Abhängigkeit, Unabhängigkeit

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$$
$$-4\vec{a} = \vec{b} \quad \text{oder} \quad 4\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

\vec{a}, \vec{b} sind linear abhängig; geometrisch formuliert: \vec{a}, \vec{b} sind kollinear

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c})$ sind jeweils linear unabhängig

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sind linear abhängig, denn $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$ oder $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Allgemein gilt für 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

gilt mindestens eine der Gleichungen

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c} \quad \text{oder}$$

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{oder}$$

$$r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

dann heißt die Vektormenge $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ linear abhängig

einfachere Prüfung:

gilt

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad r \neq 0 \vee s \neq 0 \vee t \neq 0$$

dann sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, andernfalls linear unabhängig

Prüfe auf lineare Abhängigkeit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\text{I} \quad r - 2s + 3t = 0$$

$$\text{II} \quad 2r + 2s - t = 0$$

$$\text{III} \quad 3r + s + t = 0$$

$$L = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\} \text{ ist linear unabhängig}$$

Ist $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 ?

Das meint:

Lässt sich jeder Vektor des \mathbb{R}^3 durch eine Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} darstellen?

Löse dazu:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

304/2

b

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$7r + s + 3t = 0$$

$$-r - 2s - 6t = 0$$

$$3r + s + 3t = 0$$

$$L = \{(0, 0, 0); (0, k, -\frac{k}{3})\} \Rightarrow \text{linear abhängig}$$

Die letzten beiden Vektoren sind kollinear. Der erste Vektor, der nicht kollinear zu den anderen beiden ist, lässt sich daher nicht durch eine Linearkombination der anderen beiden darstellen.

Prüfe auf lineare Abhängigkeit

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$r = s = t = 0$ ist immer eine Lösung (triviale Lösung)

Findet man weitere Lösungen, so sind $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ linear abhängig und komplanar. Andernfalls (nur triviale Lösung) sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Da $\left| \left\{ \vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \right\} \right| = 3$ ist der \mathbb{R}^3 dreidimensional.

304/4

c

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$r - 4s - 7t = 0$$

$$r - 2s - 2t = 0$$

$$r + 2s + 8t = 0$$

$$L = \{(0, 0, 0); (-6k, -5k, 2k)\} \Rightarrow \text{linear abhängig}$$

d

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$4r + s - 2t = 0$$

$$-r + 4s + 3t = 0$$

$$2r + s - t = 0$$

$$L = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \text{linear unabhängig}$$

304/6

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$2r - s = a$$

$$3r + s = 2$$

$$-2r + 2s = -8$$

$$a = 5.5$$

$$r = 1.5 \quad s = -2.5$$

5.8 Wiederholung: Geometrie, Geraden

307/10 1

$$r = 1.5cm$$

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = 7.069cm^2$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot r^2 = 1.125cm^2$$

$$A = A_{Kreis} - A_{Dreieck} = 5.944cm^2$$

2

$$A_{Parall.} = 4cm \cdot 2cm = 8cm^2$$

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (1cm + 2.5cm) \cdot 2cm = 3.5cm^2$$

$$A = A_{Parall.} - A_{Trapez} = 4.5cm^2$$

307/11

a Parallelogramme

b Dreiecke

309/13

a

$$x_3 = 0$$

b

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

x_1 - x_2 -Ebene

$$x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 7$$

$$R(-12|38|0)$$

x_2 - x_3 -Ebene

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

$$S(0|8|6)$$

x_1 - x_3 -Ebene

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{3}{5}$$

$$T(3.2|0|7.6)$$

c

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.9 Parametergleichung einer Ebene

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

E ... Name der Ebene

\vec{a} ... Stützvektor, Ortsvektor eines bestimmten Punktes A

\vec{b}, \vec{c} ... Spannvektoren

r, s ... Parameter, die durchlaufen gedanklich alle Werte von \mathbb{R}

\vec{x} ... allgemeiner, unbestimmter Ortsvektor aller Punkte X der Ebene E

Ich erhalte eine Ebenengleichung, wenn

- Stütz- und 2 Spannvektoren
- 3 Punkte (nicht auf einer Geraden)
- 1 Gerade und 1 Punkt
- 2 sich schneidende Geraden
- 2 echt parallele Geraden

Punktprobe:

$$P \in E ?$$

\vec{p} ist Ortsvektor von P

$$\vec{p} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \Rightarrow 3 \times 2 \text{ LGS}$$

wenn eindeutig lösbar, dann $P \in E$

318/5

a

$$A(0|1|-1) \quad B(2|3|5) \quad C(-1|3|-1) \quad D(2|2|2)$$

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \in E ?$$

$$\text{I} \quad 2 = 2r - s$$

$$\text{II} \quad 2 = 1 + 2r + 2s$$

$$\text{III} \quad 2 = -1 + 6r$$

$$L = \{ \} \Rightarrow \text{keine Ebene}$$

b

$$A(3|0|2) \quad B(5|1|9) \quad C(6|2|7) \quad D(8|3|14)$$

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$D \in E ?$$

$$\text{I} \quad 8 = 3 + 2r + 3s$$

$$\text{II} \quad 3 = r + 2s$$

$$\text{III} \quad 14 = 2 + 7r + 5s$$

$$L = \{(1, 1)\} \Rightarrow \text{Ebene}$$

319/10

a

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

319/12

a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2t = 3 + s$$

$$1 + 3t = 4$$

$$2 + t = 3 + s$$

$$L = \{(0; 1)\}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.10 Sonderfälle

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ sind in der Regel linear unabhängig, d. h. nicht komplanar. Im Sonderfall sind $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ komplanar. Das bedeutet, dass E durch den Ursprung O verläuft. Im Sonderfall darf ich E so schreiben:

$$E: \vec{x} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

$$g: \vec{x} = \vec{d} + r \cdot \vec{e} \quad r \in \mathbb{R}$$

$\{\vec{d}; \vec{e}\}$ sind normalerweise nicht kollinear. Im Sonderfall, g verläuft durch O , sind sie kollinear:

$$g: \vec{x} = r \cdot \vec{e}$$

322/14

a

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & g: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow & \text{orthogonal} \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} & g: \vec{x} &= t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} &= 4 \\ \Rightarrow & \text{nicht orthogonal} \end{aligned}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$2x - y + 5z = x + z = 0 \quad L = \{(k; -3k; -k)\}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k \\ -3k \\ -k \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für } k = 1$$

5.11 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \quad | \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{x} = 0 \quad || \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

$$b_1 \cdot | - a_1 \cdot ||$$

$$| a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

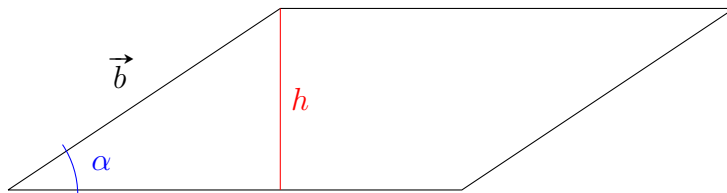
$$|| 0 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) x_2 + (b_1 a_3 - a_1 b_3) x_3 = 0$$

$$\text{willkürlich } x_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$\Rightarrow x_3 = -(a_2 b_1 - a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\Rightarrow x_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$



$$\sin(\alpha) = \frac{h}{|\vec{b}|}$$

$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

$$A_P = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt einen Vektor als Ergebnis. Die Länge des Vektors \vec{c} ist $|\vec{c}|$ und entspricht dem Flächeninhalt A_P des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

373/1

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

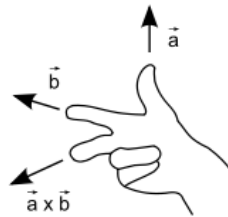
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 5 \\ -1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} bilden ein Rechtssystem (rechte Hand)



373/3

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$A_P = \sqrt{3}FE \approx 1.732FE$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) - 2 \cdot 9 \\ 2 \cdot 8 - 5 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 9 - (-2) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 26 \\ 61 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -14 \\ 26 \\ 61 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-14)^2 + 26^2 + 61^2} = \sqrt{4593}$$

$$A_P = \sqrt{4593}FE \approx 67.772FE$$

Wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$, also kollinear, dann gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$

5.12 Spatprodukt

$$\begin{aligned} V_{Spat} &= G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\alpha) \\ &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (\text{Spatprodukt}) \end{aligned}$$

Anwendung: Berechne das Volumen von Spat und Pyramiden

$$\begin{aligned} V_{Spat} &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \\ V_{Pyramide} &= \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (\text{Grundseite: Parallelogramm des Spats}) \\ V_{Pyramide, dreiseitig} &= \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \end{aligned}$$

374/6

a

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ V_S &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 49 \\ -42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 196 \\ V_P &= \frac{1}{6} \cdot 196 = 32.\bar{6} \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ V_S &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 118 \\ -26 \\ 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 902 \\ V_P &= \frac{1}{6} \cdot 902 = 150.\bar{3} \end{aligned}$$

Teil IV

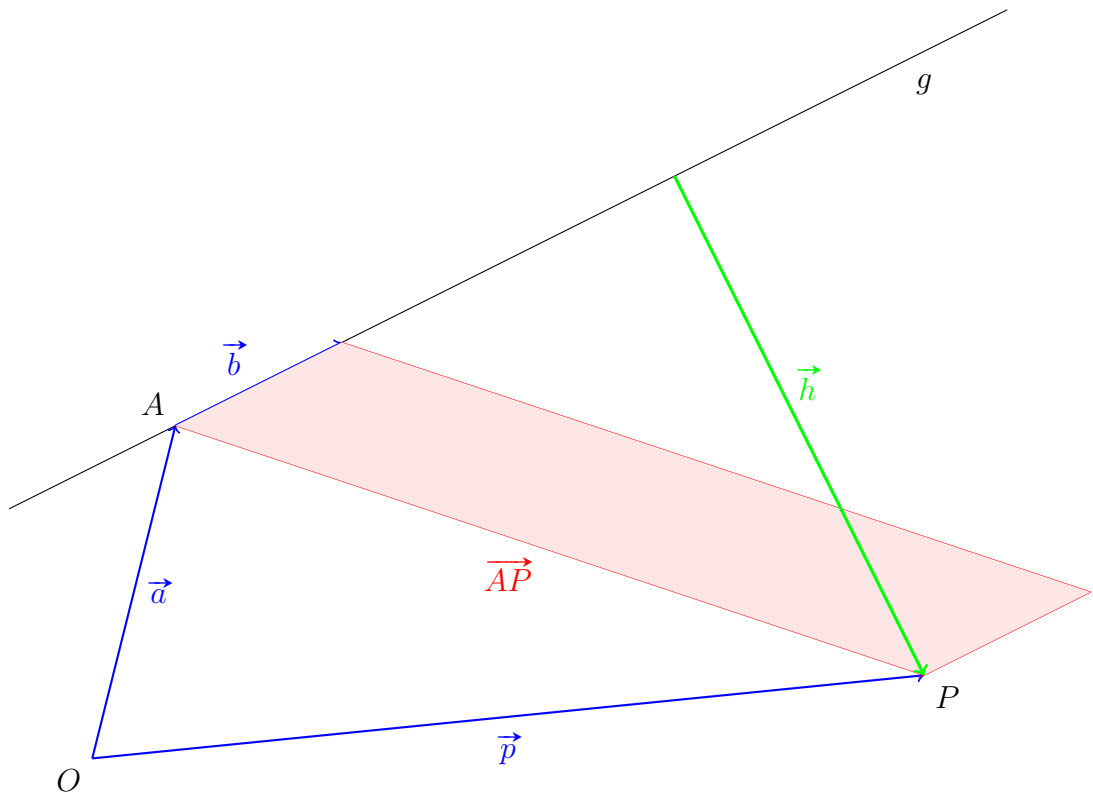
12/2

5.13 Abstand eines Punktes von einer Geraden

gegeben:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$P: \vec{p}$$



$$\text{Bilde } |\vec{b} \times \overrightarrow{AP}| = A_{\text{Parallelogramm}}$$

$$|\vec{b}| \cdot |\vec{h}| = A_{\text{Parallelogramm}}$$

$$|\vec{b} \times \overrightarrow{AP}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{h}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{b} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{b}|} = |\vec{h}|$$

$|\vec{h}|$ ist der gesuchte Abstand von Punkt P zur Geraden g .

373/5

c

$$\begin{aligned}
 g: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & R(-2|-1|1) \\
 \overrightarrow{PR} &= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 |\vec{h}| &= \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{PR}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} & R(1|2|-3) \\
 \overrightarrow{PR} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} & \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \\
 |\vec{h}| &= \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{PR}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -9 \\ -16 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{362}}{\sqrt{49}} \approx 2.7180
 \end{aligned}$$

5.14 Ebenendarstellung

5.14.1 Normalenform

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$$

\vec{n} ... Normalenvektor der Ebene

\vec{a} ... Stützvektor, Ortsvektor eines bestimmten Punktes

\vec{x} ... allgemeiner Ortsvektor aller Punkte der Ebene

\overrightarrow{AX} ... Verbindungsvektor, der in der Ebene liegt

Punkte X der Ebene sind diejenigen, deren Verbindungsvektoren \overrightarrow{AX} orthogonal zu \vec{n} stehen.

z. B.

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Beispiellösung } x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Punktprobe $P(2|1|1)$ $P \in E$?

$$\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad -1 + 0 - 8 = -9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P \notin E$$

Normalengleichung aus $A(1|0|5)$, $B(0|2|1)$, $C(4|5|6)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = 0$$

5.14.2 Koordinatenform

Berechne das Skalarprodukt in der Normalengleichung mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3) - (a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2 + a_3 \cdot n_3) = 0$$

$$\text{z. B. } 22x_1 - 11x_2 - 11x_3 = -33$$

$$\text{Beispiellösungen } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \dots$$

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Betrachte die Koordinatenform als eine Gleichung für drei Variablen x_1, x_2, x_3 . Die Lösungen der Gleichung sind Dreiertupel $L = \{(\dots, \dots, \dots), \dots\}$. Notiere ich die Dreiertupel als Spaltenvektoren, so stellen sie die Ortsvektoren der Punkte der Ebene E dar. Die Koeffizienten a, b, c der Koordinatenform sind die Koordinaten von \vec{n} , des Normalenvektors.

Koordinatenform \rightarrow Normalenform

$$\text{z. B. } 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$$

$$1. \text{ Lies ab } \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Finde eine Lösung } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ z. B. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Sonderfälle

•

$$E: x_3 = 5 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkte der Ebene haben $x_3 = 5$; x_1, x_2 sind beliebige Koordinaten.

$$\text{z. B. } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \dots$$

x_1 und x_2 sind nicht erwähnt, also frei wählbar.

•

$$E: 2x_1 - 4x_2 = 0$$

Der Ursprung O ist Teil der Ebene E . Der Verbindungsvektor $\vec{O} - \vec{a}$, also der Ortsvektor \vec{a} liegt in der Ebene E und steht orthogonal zu \vec{n} . Daher sind $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ und damit $d = 0$.

325/3

$$D(-7|1|3)$$

a

$$A(1|1|1) \quad B(1|0|1) \quad C(0|1|1)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: -x_3 = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$D \in E? \quad -x_3 = -3 \neq -1 \quad \Rightarrow \quad D \notin E$$

b

$$A(-1|2|0) \quad B(-3|1|1) \quad C(1|-1|-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: 4x_1 + 8x_3 = -4 + 0 + 0 = -4$$

$$D \in E? \quad 4x_1 + 8x_3 = -28 + 24 = -4 \quad \Rightarrow \quad D \in E$$

5.14.3 Ebenen zeichnen

Zeichne Ebene $E: 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 12$

Schnitt mit der ...

x_1 -Achse:

$$x_2 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 12 \quad x_1 = 6 \quad P(6|0|0)$$

x_2 -Achse:

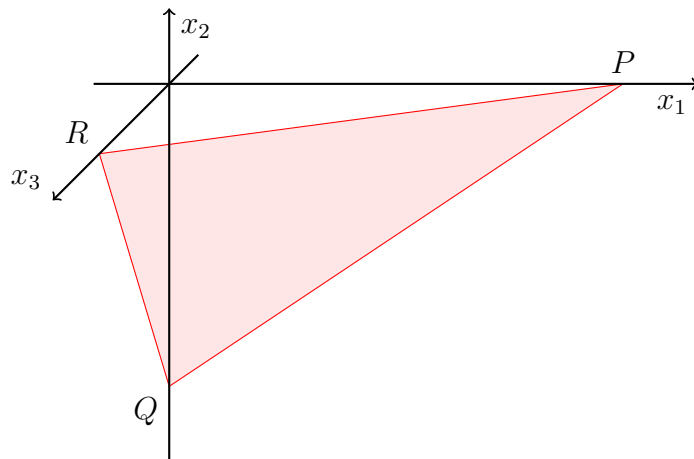
$$x_1 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x_2 = 12 \quad x_2 = -4 \quad Q(0|-4|0)$$

x_3 -Achse:

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x_3 = 12 \quad x_3 = 2.4 \quad R(0|0|2.4)$$

P, Q, R heißen Spurpunkte.

Gerade durch P und Q (bzw. Q und R , P und R) heißt Spurgerade.



Spurgerade (PQ):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

•

$$3x_1 + 6x_3 = 18 \quad P(6|0|0) \quad R(0|0|3) \quad Q(0|\infty|0)$$

Kein Schnitt mit der x_2 -Achse, verläuft parallel zur x_2 -Achse.

•

$$2x_1 = 5 \quad P(2.5|0|0)$$

Kein Schnitt mit der x_2 - und x_3 -Achse, verläuft parallel zur x_2x_3 -Ebene.

328/3 Fig. 1

$$\begin{array}{lll} P(2|0|0) & Q(0|5|0) & R(0|0|3) \\ 15x_1 = 30 & 6x_2 = 30 & 10x_3 = 30 \\ E: 15x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 30 \end{array}$$

Fig. 2

$$\begin{array}{lll} P(1|0|0) & Q(0|4|0) & R(0|0|-1.5) \\ 12x_1 = 12 & 3x_2 = 12 & -8x_3 = 12 \\ E: 12x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 12 \end{array}$$

328/5

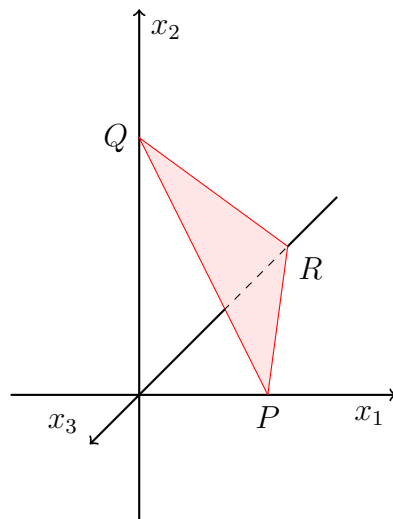
a

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 6$$

$$E: 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$P(1|0|0) \quad Q(0|2|0) \quad R(0|0|-3)$$



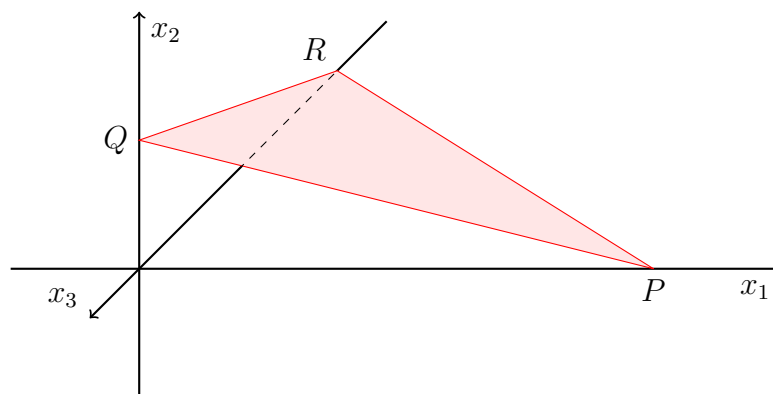
b

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = -20$$

$$E: -5x_1 - 20x_2 + 5x_3 = -20$$

$$P(4|0|0) \quad Q(0|1|0) \quad R(0|0|-4)$$



328/6 Fig. 3

$$P(0|3|0)$$

$$E: x_2 = 3$$

parallel zur x_1x_3 -Ebene

Fig. 4

$$P(1|0|0) \quad Q(0|5|0)$$

$$5x_1 = 5 \quad x_2 = 5$$

$$E: 5x_1 + x_2 = 5$$

parallel zur x_3 -Ebene

5.15 Lage Ebene \leftrightarrow Gerade

- schneiden sich
- verlaufen parallel
- Gerade ist Teil der Ebene

Beispiel:

$$E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 16$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2r \\ 2-r \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

g in E eingesetzt

$$2 \cdot (1 + 2r) - (2 - r) + 3 \cdot 3 = 16$$

$$\Rightarrow r = \frac{7}{5}$$

$$\text{Schnittpunkt } \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.8 \\ 0.6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- eindeutige Lösung für $r \Rightarrow$ schneiden sich
- kein r erfüllt die Gleichung \Rightarrow kein Schnittpunkt, parallele Lage
- für jedes r ein möglicher gemeinsamer Punkt \Rightarrow Gerade liegt in der Ebene

330/1

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a

$$E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$$

$$2 \cdot (4 + t) + 4 \cdot (6 + 2t) + 6 \cdot (2 + 3t) = 16$$

$$\Rightarrow t = -1$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S(3|4|-1)$$

b

$$E: 5x_2 - 7x_3 = 13$$

$$5 \cdot (6 + 2t) - 7 \cdot (2 + 3t) = 13$$

$$t = \frac{3}{11}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.\overline{27} \\ 6.\overline{54} \\ 2.\overline{81} \end{pmatrix}$$

$$S(4.\overline{27}|6.\overline{54}|2.\overline{81})$$

330/2

a

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2 + 7t = 1 + s$$

$$1 + 8t = 4 - r$$

$$4 + 6t = 3 + r + 3s$$

$$t = 1 \quad r = -5 \quad s = 4$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$S(5|9|10)$$

b

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$22 + 4t = 2 + 4r$$

$$-18 + t = 1 - 7r + 4s$$

$$-7 - 5t = r - 3s$$

$$t = r - 5 \quad s = 2r - 6$$

$$g \in E$$

c

$$g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-t = 2r$$

$$-t = 2s$$

$$-t = 2$$

$$t = -2 \quad r = 1 \quad s = 1$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S(2|2|2)$$

5.15.1 Schnittwinkel

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} \quad h: \vec{x} = \vec{c} + s \cdot \vec{d}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{b}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{d}|}\right) \quad \alpha < 90^\circ$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{b}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{b}|}\right) \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{b}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{b}|}\right) \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

5.16 Wiederholung

344/7

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2a \\ -1 + 5a \\ 1 + 3a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$P(1|0|2), Q(2|0|3), R(0|2|2) \in E$$

a

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 2$$

$$E: -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_0 = E \quad -2(2+4t) - (7-t) + 2(3+t) = 2 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{7}{5}$$

$$g_1 = E \quad -2(2+6t) - (7+4t) + 2(3+4t) = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-7}{8}$$

$$\overrightarrow{OS_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.6 \\ 8.4 \\ 1.6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.25 \\ 3.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_0S_1} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ -4.9 \\ -2.1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3.6 \\ 8.4 \\ 1.6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.35 \\ -4.9 \\ -2.1 \end{pmatrix}$$

b

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0.35 \\ -4.9 \\ -2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2a \\ -1 + 5a \\ 1 + 3a \end{pmatrix}$$

$$0.35t = 4 + 2a$$

$$-4.9t = -1 + 5a$$

$$-2.1t = 1 + 3a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{3} \quad (t \approx 1.905)$$

326/15

a

$$2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 0$$

b

$$t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$t^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1$$

$$t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$$\Rightarrow \quad t = \pm 1$$

374/7

b

$$\begin{aligned}
 & A(1|-2|12) \quad B(11|3|5) \quad C(3|5|8) \quad D(19|4|4) \\
 & \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \\
 & V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right| \\
 & = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |198| = 33
 \end{aligned}$$

5.17 Lage Ebene \leftrightarrow Ebene

3 Fälle sind möglich:

- 2 Ebenen schneiden sich in einer Geraden (Normalenvektoren sind nicht kollinear)

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 &= 7 & \vec{n} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 5x_2 + x_3 &= 5 & \vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- 2 Ebenen sind parallel (kollineare Normalenvektoren)

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 &= 7 & \vec{n} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 10x_1 - 5x_2 &= 1 & \vec{n} &= \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- 2 Ebenen sind identisch (Koordinatengleichungen lassen sich ineinander umformen)

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 &= 7 & | \cdot 5 \\
 10x_1 - 5x_2 &= 35
 \end{aligned}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ 2+r \\ 3+3r+5s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$F: \vec{x} = x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$

setze E in F ein

$$1-s-(2+r)+3 \cdot (3+3r+5s) = 5$$

$$8r+14s = -3$$

$$r = -\frac{3}{8} - \frac{14}{8}s$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1-s \\ 2-\frac{3}{8}-\frac{14}{8}s \\ 3+3 \cdot (-\frac{3}{8}-\frac{14}{8}s)+5s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{8} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

333/2

a

$$E_1: x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \quad E_2: 6x_1 + x_2 - x_3 = -7$$

$$x_3 = 3.5 - 0.5x_1 + 0.5x_2$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 3.5 - 0.5r + 0.5s \end{pmatrix}$$

E_1 in E_2 einsetzen:

$$6r + s - (3.5 - 0.5r + 0.5s) = -7$$

$$s = -7 - 13r$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ -7 - 13r \\ -7r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$$

334/3

a

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$$

E_1 in E_2 einsetzen:

$$1 + r + s + 2s - 2 \cdot 3 = 4$$

$$r = 9 - 3s$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 2s \\ s \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.18 Abstand Ebene \leftrightarrow Punkt

Fußlotpunkt-Methode

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad P(8|-3|0)$$

orthogonale Gerade durch Punkt P

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt $g \leftrightarrow E$

$$g \text{ in } E \quad \begin{pmatrix} 8+r-1 \\ -3-2 \\ 0+4r-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \frac{141}{17} \\ -3 \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix} \quad r = \frac{5}{17}$$

Abstand $P \leftrightarrow E$ ist $|\overrightarrow{PS}|$

$$d(P, E) = 1.21LE$$

Hessesche Normalenform (HNF)

$$E_0: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Normaleneinheitsvektor } \vec{n}_0^* \quad |\vec{n}_0^*| = 1} = 0$$

setze P für \vec{x} in E_0 ein

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = d$$

$$d(P, E) = 1.21LE$$



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \\ &= |\vec{a}_b| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0 &= |\overrightarrow{AP_{\vec{n}}}| \cdot |\vec{n}_0| \\ &= |\overrightarrow{AP_{\vec{n}}}| \cdot 1 \\ &= d \end{aligned}$$

353/1

a

$$E: 3x_2 + 4x_3 = 0 \quad A(3|-1|7) \quad B(6|8|19) \quad C(-3|-3|-4)$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$g_A: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + 3r \\ 7 + 4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r = -1 \quad |\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ -4 + 1 \\ -3 + 7 \end{pmatrix} \right| = 5$$

$$g_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 8 + 3r \\ 19 + 4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r = -4 \quad |\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ -4 - 8 \\ 3 - 19 \end{pmatrix} \right| = 20$$

$$g_C: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 + 3r \\ -4 + 4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = 1 \quad |\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} -3 + 3 \\ 0 + 3 \\ 0 + 4 \end{pmatrix} \right| = 5$$

b

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$A(-2|0|3) \quad B(13|8.5|-0.5) \quad C(-33|-20|14.25)$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad E_0: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left| \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 3.5$$

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 13 \\ 8.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 14$$

$$\left| \left(\begin{pmatrix} -33 \\ -20 \\ 14.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \approx 41.857$$

c

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$A(2|4|13) \quad B(8|-6|-11) \quad C(3|-2|9)$$

$$\vec{n}_0 = \sqrt{26} \quad E_0: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \approx 15.297$$

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \approx 10.198$$

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \approx 10.198$$

5.18.1 HNF - Koordinatenform

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - \underbrace{(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_b = 0$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$$

HNF:

$$E: \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - b) = 0 \quad d(P, E) = \left| (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = d$$
$$\left| \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - b) \right| = d$$

Beispiel

$$E: 3x_1 + 4x_3 = 15$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = 5$$

$$E: \frac{1}{5} \cdot (3x_1 + 4x_3) = \frac{1}{5} \cdot 15$$

$$\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_3 = 3$$

Abstand von E zum Ursprung O

$$d(O, E) = \left| \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot 0 - 3 \right| = |-3| = 3$$

Sind \vec{n} und \vec{p} im gleichen Halbraum, so gilt $\vec{n} \cdot \vec{p} > 0$, sonst $\vec{n} \cdot \vec{p} < 0$

Ausnahme: $\vec{p} \in E \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{p} = 0$

Parallele Ebenen zu E im Abstand $5LE$

$$F: \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_3 = -2$$

$$G: \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_3 = 8$$

357/5

$$A(3|2|-1) \quad B(4|4|0) \quad C(7|3|2)$$

a

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad E_0: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$d(A, E) = \left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{3}$$

$$d(B, E) = \left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$d(C, E) = \left| \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 3$$

b

$$E: 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 20 \quad |\vec{n}| = \sqrt{35}$$

$$d(A, E) = \left| \frac{1}{\sqrt{35}} \cdot (3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) - 20) \right| = 0$$

$$d(B, E) = \left| \frac{1}{\sqrt{35}} \cdot (3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 - 1 \cdot 0 - 20) \right| \approx 2.0284$$

$$d(C, E) = \left| \frac{1}{\sqrt{35}} \cdot (3 \cdot 7 + 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 20) \right| \approx 2.3664$$

c

$$E: x_1 = 4$$

$$d(A, E) = |a_1 - x_1| = |3 - 4| = 1$$

$$d(B, E) = |b_1 - x_1| = |4 - 4| = 0$$

$$d(C, E) = |c_1 - x_1| = |7 - 4| = 3$$

357/7

$$E: 10x_1 + 2x_2 - 11x_3 = 30$$

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{15} \cdot (10p_1 + 2p_2 - 11p_3 - 30) \right| = 5$$

x_1 -Achse:

$$p_2 = p_3 = 0$$

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{15} \cdot (10p_1 - 30) \right| = 5$$

$$p_{1,1} = 10.5 \quad p_{1,2} = -4.5$$

$$P_1(10.5|0|0) \quad P_2(-4.5|0|0)$$

x_2 -Achse:

$$p_1 = p_3 = 0$$

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{15} \cdot (2p_2 - 30) \right| = 5$$

$$p_{2,1} = 52.5 \quad p_{2,2} = -22.5$$

$$P_3(0|52.5|0) \quad P_4(0|-22.5|0)$$

x_3 -Achse:

$$p_1 = p_2 = 0$$

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{15} \cdot (-11p_3 - 30) \right| = 5$$

$$p_{3,1} = \frac{45}{11} = 4.\overline{09} \quad p_{3,2} = -\frac{105}{11} = -9.\overline{54}$$

$$P_5(0|0|4.\overline{09}) \quad P_6(0|0|-9.\overline{54})$$

357/9

$$\begin{array}{ccccc} A(2|0|0) & B(0|2|0) & C(-2|0|0) & D(0|-2|0) & S(0|0|6) \\ M(0|0|d) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} E_{ABCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & E_{ABCD}: x_3 = 0 \\ E_{ABS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} & E_{ABS}: 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{array}$$

$$d(M, E_{ABCD}) = |m_3| \quad d(M, E_{ABS}) = \left| \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (m_3 - 6) \right|$$

$$|m_3| = \left| \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (m_3 - 6) \right|$$

$$m_{3,1} \approx 1.1196 \quad (m_{3,2} \approx -1.7863)$$

$$M(0|0|1.1196)$$

5.19 Abstand Gerade \leftrightarrow Punkt

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P(0|1|4) \quad P \notin g$$

Hilfsebene E orthogonal zu g durch P

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad x_1 - x_2 = -1$$

Suche Schnittpunkt S von E und g

S ist der nächstliegende Punkt auf g , von P aus gesehen

g in E eingesetzt

$$1 + r - 2 + r = -1 \quad \Rightarrow \quad r = 0$$

$$S(1|2|3)$$

$|\overrightarrow{SP}|$ ist der gesuchte Abstand d zwischen P und g

$$d = \sqrt{3}$$

5.19.1 Abstandsbestimmung als Optimierungsaufgabe

HB: $f = |\overrightarrow{XP}| = \min.$ (Koordinante von P , Parameter r , ...)

$$\text{NB: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 2-r \\ 3 \end{pmatrix} \quad P(0|1|4)$$

$$\text{ZF: } f(r) = |\overrightarrow{XP}| = (-1-r)^2 + (-1+r)^2 + 1^2 = 2r^2 + 3$$

$$f'(r) = 4r \quad f''(r) = 4$$

$$\text{n. B.: } f'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0$$

$$\text{h. B.: } f''(0) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

setze $r = 0$ in g ein

$$S(1|2|3)$$

359/1

b

$$R(-2|-6|1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -16$$

$$3(5+3t) + 2(9+2t) + 2(1+2t) = -16 \quad \Rightarrow \quad t = -3$$

$$S(-4|3|-5)$$

$$|\overrightarrow{SR}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 11$$

359/2

a

$$A(1|1|1) \quad B(7|4|7) \quad C(5|6|-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -36 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = 27$$

359/3

a

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} & \vec{x} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 & -x_1 + 2x_3 &= 21 \\ -(6-t) + 2(1+2t) &= 21 & \Rightarrow & t = 5 \\ S(1|4|11) \\ P(-5|6|8) \quad |\overrightarrow{SP}| &= \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \approx 7\end{aligned}$$

zu 359/1 Spiegelpunkt R' bei Spiegelung an der Geraden g

b

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} & \overrightarrow{SR} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OR'} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 3-(-9) \\ -5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix} \\ R' &(-6|12|-11)\end{aligned}$$

zu 356/1 Spiegelpunkt A' bei Spiegelung an der Ebene E

a

$$\begin{aligned}E: 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 &= 0 & A(1|1|-2) \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix} & |\vec{n}| = 15 & \vec{n}_0 &= \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix} \\ d(A, E) &= \left| \frac{1}{15} \cdot (2 \cdot 1 + (-10) \cdot 1 + 11 \cdot (-2)) \right| = \left| \frac{1}{15} \cdot (-30) \right| = 2 \\ \overrightarrow{OA'} &= \overrightarrow{OA} + 2 \cdot 2 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5\bar{3} \\ -1.\bar{6} \\ 0.9\bar{3} \end{pmatrix} \\ A' &(1.5\bar{3}|-1.\bar{6}|0.9\bar{3})\end{aligned}$$

360/11

a

$$A(2|11|-5)$$

$$d(A, x_1\text{-Achse}) = \sqrt{11^2 + (-5)^2} = 12.0830$$

$$d(A, x_2\text{-Achse}) = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = 5.3852$$

$$d(A, x_3\text{-Achse}) = \sqrt{2^2 + 11^2} = 11.1803$$

b

$$d(P, x_1\text{-Achse}) = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \quad (\text{andere Achsen analog})$$

360/12

$$A(5|7|9) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a

$$R(-7|-3|14)$$

$$\overrightarrow{AF} = r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 12r \\ 4r \\ 3r \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 5 + 12r \\ 7 + 4r \\ 9 + 3r \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FR} = \begin{pmatrix} -7 - (5 + 12r) \\ -3 - (7 + 4r) \\ 14 - (9 + 3r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 12r \\ -10 + 4r \\ 5 + 3r \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FR} = 0$$

$$12r \cdot (-12 + 12r) + 4r \cdot (-10 + 4r) + 3r \cdot (5 + 3r) = 169r^2 - 169r = 0$$

$$(r_0 = 0) \quad r_1 = 1$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 5 + 12 \\ 7 + 4 \\ 9 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \quad F(17|11|12)$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{FR}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 65$$

b

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot |\overrightarrow{FR}|^2 \cdot |\overrightarrow{AF}| = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 13 = 1361.3568$$

360/9

$$\begin{array}{llll} A(1.5|-1.5|0) & B(1.5|1.5|0) & C(-1.5|1.5|0) & D(-1.5|-1.5|0) \\ S(0|0|4) \end{array}$$

$$P(1.5|0.5|0) \quad (\text{Schnittpunkt von } g \text{ mit Kante } \overline{AB})$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad -x_1 + x_2 = 0$$

$$-(1.5 - r) + (0.5 + r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0.5$$

$$d(P, g) = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{18} \approx 4.2426 \quad [d] = cm$$

5.20 Abstand windschiefer Geraden

Beispiel

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad g \leftrightarrow h \text{ windschief}$$

$$\text{Hilfsebene } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Abstand $d(g, h)$ ist der Abstand $d((-3|0|5), E)$

$$E: 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 113 \quad |\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 11$$

$$d((-3|0|5), E) = \left| \frac{1}{11} \cdot (6 \cdot (-3) + 9 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 113) \right| = 11$$

363/6

$$A(-9|3|-3) \quad B(-3|-6|0) \quad C(-7|5|5) \quad D(4|8|0)$$

$$g_{AC}: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$g_{BD}: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -8x_1 + 4x_2 + x_3 = 81 \quad |\vec{n}| = 9$$

$$d(g_{AC}, g_{BD}) = d(B, E) = \left| \frac{1}{9} \cdot (-8 \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) + 1 \cdot 0 - 81) \right| = 9$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 5.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{TU}: \vec{x} = \overrightarrow{OU} + r \cdot \overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5.5 \\ -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 6.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{RS}: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + s \cdot \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5.5 \\ -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$E: 17.5x_1 - 8.75x_2 + 33.25x_3 = -141.75 \quad |\vec{n}| = \sqrt{1488.375}$$

$$d(g_{TU}, g_{RS}) = d(R, E) = \left| \frac{1}{\sqrt{1488.375}} \cdot (17.5 \cdot 0.5 - 8.75 + 141.75) \right|$$

364/12

$$A(5|0|0) \quad B(5|6|0) \quad D(0|3|6)$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_s(5s|0|0)$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad H_t(5 - 5t|6 - 3t|6t)$$

$$\overrightarrow{G_s H_t} = \begin{pmatrix} 5 - 5t - 5s \\ 6 - 3t \\ 6t \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{G_s H_t} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \overrightarrow{G_s H_t} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$5 \cdot (5 - 5t - 5s) = 25 - 25t - 25s = 0$$

$$-5 \cdot (5 - 5t - 5s) - 3 \cdot (6 - 3t) + 6 \cdot 6t = -43 + 70t + 25s = 0$$

$$\Rightarrow \quad s = 0.6 \quad t = 0.4$$

$$G_3(3|0|0) \quad H_{-2}(3|4.8|2.4) \quad |\overrightarrow{G_3 H_{-2}}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4.8 \\ 2.4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{28.8} \approx 5.3666$$

364/10

$$A(1|-2|-7) \quad B(-8|-2|5) \quad C(17|-2|5) \quad D(1|6|-7)$$

a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} & \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} & \overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 & \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ \Rightarrow & \text{alle rechtwinklig zueinander} \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} E_{ABC}: \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\ d(D, E_{ABC}) &= |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{64} = 8 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150 \\ V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot |\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot 8 = 400 \end{aligned}$$

d

$$P(-3.5|-2|-1) \quad Q(4.5|-2|5) \quad S(-3.5|2|-1) \quad T(1|2|-7)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad G_s(-3.5 + 8s|-2|-1 + 6s)$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad H_t(-3.5 + 4.5t|2|-1 - 6t)$$

$$\overrightarrow{G_s H_t} = \begin{pmatrix} -3.5 + 4.5t + 3.5 - 8s \\ 2 + 2 \\ -1 - 6t + 1 - 6s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5t - 8s \\ 4 \\ -6t - 6s \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{G_s H_t} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \overrightarrow{G_s H_t} \cdot \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$8 \cdot (4.5t - 8s) + 6 \cdot (-6t - 6s) = -100s = 0$$

$$4.5 \cdot (4.5t - 8s) - 6 \cdot (-6t - 6s) = 56.25t = 0$$

$$\Rightarrow s = 0 \quad t = 0$$

$$G_0(-3.5|-2|-1) \quad H_0(-3.5|2|-1) \quad |\overrightarrow{G_0 H_0}| = 4 \quad (= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AD}|)$$

5.21 Kreise und Kugeln

$$f(x) = y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{Definitionsbereich: } D = [-4; 4]$$

$$\text{Ableitung: } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$\text{Extrema: } f'(x) = 0 \quad L = \{0\} \quad P(0|4)$$

$$\text{Steigung am Rand von } D: \lim_{x \rightarrow -4} f'(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 4} f'(x) = -\infty$$



$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{16 - (x - 2)^2} + 1 & | - 1 \\
y - 1 &= \sqrt{16 - (x - 2)^2} & | ()^2 \\
(y - 1)^2 &= 16 - (x - 2)^2 & | + (x - 2)^2 \\
(x - 2)^2 + (y - 1)^2 &= 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix} \right)^2 &= r^2 & \text{(Kreisgleichung in } \mathbb{R}^2) \\
\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \right)^2 &= r^2 & \text{(Kugelgleichung in } \mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$$

$$\text{z. B. } \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 = 25$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1|2|3)$ und Radius $r = 5$

376/3

a

$$A(4|1|3) \quad B(3|0|10) \quad C(-1|1|1) \quad M(1|1|7) \quad r = 5$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 5 = r \Rightarrow \text{auf der Kugel}$$

$$|\overrightarrow{BM}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14} < r \Rightarrow \text{innerhalb der Kugel}$$

$$|\overrightarrow{CM}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{40} > r \Rightarrow \text{außerhalb der Kugel}$$

376/4

a

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 4 &= 0 \\x_1^2 + 4x_1 + 4 + x_2^2 - 8x_2 + 16 + x_3^2 + 6x_3 + 9 &= -4 + 4 + 16 + 9 \\(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 + 3)^2 &= 25 \\M(-2|4|-3) \quad r &= 5\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 10x_3 + 31 &= 0 \\x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 + x_3^2 + 10x_3 + 25 &= -31 + 1 + 25 \\(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 + 5)^2 &= -5 \\&\Rightarrow \text{keine Kugel}\end{aligned}$$

5.21.1 Kugeln, Geraden, Ebenen, Abstände

$$\begin{aligned}K_a: (\vec{x} - \vec{m}_a)^2 &= r_a^2 \\K_b: (\vec{x} - \vec{m}_b)^2 &= r_b^2\end{aligned}$$

Berührungspunkt:

$$|\vec{m}_a - \vec{m}_b| = r_a + r_b$$

Schnitt:

$$|\vec{m}_a - \vec{m}_b| < r_a + r_b \quad \text{wenn } |\vec{m}_a - \vec{m}_b| > r_a \text{ und } > r_b$$

(Mittelpunkte liegen außerhalb der jeweils anderen Kugel)

$$|\vec{m}_a - \vec{m}_b| > |r_a - r_b| \quad \text{wenn } |\vec{m}_a - \vec{m}_b| < r_a \text{ oder } < r_b$$

(mindestens ein Mittelpunkt liegt innerhalb der anderen Kugel)

377/7

a

$$K_1: x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 4x_2 = 12 \quad K_2: x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 18x_2 + 86 = 0$$

$$K_1: (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25 \quad M_1(-3|2) \quad r_1 = 5$$

$$K_2: (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 9)^2 = 4 \quad M_2(-3|9) \quad r_2 = 2$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = r_1 + r_2 = 7$$

$$\Rightarrow \text{Berührungspunkt bei } (-3|7)$$

b

$$K_1: x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 8x_2 = 0 \quad K_2: x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 = -9$$

$$K_1: (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 4)^2 = 25 \quad M_1(3|-4) \quad r_1 = 5$$

$$K_2: (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 = 4 \quad M_2(2|-3) \quad r_2 = 2$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{2} < r_1 \text{ und } < r_2$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{2} < |r_1 - r_2| = 3$$

$\Rightarrow K_2$ liegt vollständig innerhalb von K_1

c

$$K_1: x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 19 \quad K_2: x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 8x_2 = -21$$

$$K_1: (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 20 \quad M_1(-1|0) \quad r_1 = \sqrt{20}$$

$$K_2: (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 4 \quad M_2(3|4) \quad r_2 = 2$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{32} > r_1 \text{ und } > r_2$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{32} < r_1 + r_2 = \sqrt{20} + 2$$

\Rightarrow Schnitt

377/10

a

$$M(0|8|4) \quad E: \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 5 = 0 \quad |\vec{n}| = 7$$

$$r = d(M, E) = \left| \frac{1}{7} \cdot (6 \cdot 0 - 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 5) \right| = 3$$

377/11

$$A(-8|5|7) \quad B(-12|8|10)$$

$$g_{AB}: \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a

$$K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 - r^2 = 0$$

b

$$K: \left(-\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 - 36 = 0$$

$$(8 - 4s)^2 + (-5 + 3s)^2 + (-7 + 3s)^2 - 36 = 34s^2 - 136s + 102 = 0$$

$$s_{1/2} = \frac{136 \pm \sqrt{(-136)^2 - 4 \cdot 34 \cdot 102}}{2 \cdot 34} \quad s_1 = 1 \quad s_2 = 3$$

$$K_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^2 - 36 = 0 \quad K_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^2 - 36 = 0$$

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{m}_1 - \vec{m}_2| = 2 \cdot \sqrt{34} > r_1 = r_2 = 6$$

$$|\vec{m}_1 - \vec{m}_2| = 2 \cdot \sqrt{34} < r_1 + r_2 = 12$$

Kugel \leftrightarrow Gerade

$$K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)^2 = 36 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

setze g in K ein

$$\begin{pmatrix} 3 + r - 2 \\ -9 + 4r + 1 \\ 10 - r - 5 \end{pmatrix}^2 = 36$$

$$(r + 1)^2 + (4r - 8)^2 + (-r + 5)^2 - 36 = 0$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 1$$

$$Q(6|3|7) \quad R(4|-1|9) \Rightarrow 2 \text{ Schnittpunkte}$$

Kugel \leftrightarrow Ebene

$$K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 = 64 \quad E: -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 19$$

Abstand $M \leftrightarrow E$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$d(M, E) = \frac{1}{3} \cdot |(-2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 19)| = 6$$

$$d = 6 < r = 8 \Rightarrow \text{Schnittkreis}$$

Radius des Schnittkreises r'

$$r' = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} \approx 5.2915$$

Mittelpunkt des Schnittkreises M'

= Fußlotpunkt des Mittelpunkts M auf der Ebene E

5.21.2 Kugel \leftrightarrow Kugel, Tangentialebene

$$K_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right)^2 = 49 \quad K_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)^2 = 16$$

$$|r_1 - r_2| = |7 - 4| < |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{33} < r_1 + r_2 = 7 + 4 \Rightarrow \text{Schnitt}$$

$$K_1: x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 6x_2 + 9 + x_3^2 - 18x_3 + 81 = 49$$

$$K_2: x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_3^2 - 10x_3 + 25 = 16$$

$$K_1 - K_2: 2x_1 - 3 - 8x_2 + 8 - 8x_3 + 56 = 33$$

$$\text{Schnittebene } E: 2x_1 - 8x_2 - 8x_3 = -28$$

$$\text{Schnittkreismittelpunkt } M^*(2|-1|5)$$

$$\text{Schnittkreisradius } r^* = 4$$

spezielle Darstellung einer Tangentialebene an die Kugel K im Berührungspunkt B

$$K: (\vec{x} - \vec{m})^2 = (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) = r^2$$

$$\text{Tangentialebene in } B: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$$

386/22

a

$$P(5|2|1) \quad Q(6|2|-1) \quad K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = 9$$

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 4b_1 - 4 + b_3 = 9$$

$$\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 5b_1 - 5 - b_3 = 9$$

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = b_1^2 - 2b_1 + 1 + b_2^2 - 4b_2 + 4 + b_3^2 = 9$$

$$L = \{(3, 0, 1), (3, 4, 1)\} \quad B_1(3|0|1) \quad B_2(3|4|1)$$

$$E_1: \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP} \right) \cdot \overrightarrow{MB_1} = \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$E_2: \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP} \right) \cdot \overrightarrow{MB_2} = \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

386/20

b

$$K_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^2 = 625 \quad K_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^2 = 625$$

$$K_1: x_1^2 - 14x_1 + 49 + x_2^2 + 4x_2 + 4 + x_3^2 - 4x_3 + 4 = 625$$

$$K_2: x_1^2 + 10x_1 + 25 + x_2^2 - 8x_2 + 16 + x_3^2 + 4x_3 + 4 = 625$$

$$K_1 - K_2: -24x_1 + 12x_2 - 8x_3 + 12 = 0$$

$$E: -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$-6 \cdot (7 - 6r) + 3 \cdot (-2 + 3r) - 2 \cdot (2 - 2r) + 3 = 49r - 49 = 0$$

$$\Rightarrow r = 1$$

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$d(M_1, E) = \frac{1}{7} \cdot |-6 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 + 3| = 7$$

$$r' = \sqrt{625 - 7^2} = 24$$

Kapitel 6

Stochastik

6.1 Begriffe

- Zufallsversuche haben ein Ergebnis e
- alle möglichen Ergebnisse bilden die Ergebnismenge $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
- Anzahl der Elemente $|S| = n$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel
600 Versuche, 104 Sechsen

- absolute Häufigkeit $h = 104$
- relative Häufigkeit $h_{rel} = \frac{104}{600} = \frac{\text{Treffer}}{\text{Versuche}}$
- Wahrscheinlichkeit $P(\text{Sechs}) = \frac{1}{6}$
 - Aussage über die zu erwartende relative Häufigkeit. Meist werden hierbei Modellannahmen zu Hilfe genommen (z. B. idealer Würfel).
- Ereignisse fassen ein oder mehrere Ergebnisse zusammen
 - E_1 Würfle eine Primzahl (e_2, e_3, e_5) $P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 - E_2 Augenzahl ≤ 2 (e_1, e_2) $P(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 - E_3 gerade Augenzahl (e_2, e_4, e_6) $P(E_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 - E_4 Augenzahl > 7 () $P(E_4) = 0$
 - ∴ Die Anzahl möglicher Ereignisse ist unbegrenzt

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

$$|S| = 36$$

$$E: \text{Augensumme } (2, 3, 4, \dots)$$

$$P(\text{Summe} = 2) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{Summe} = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(\text{Summe} = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{Summe} = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{Summe} = 6) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Summe} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{Summe} = 8) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Summe} = 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{Summe} = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{Summe} = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

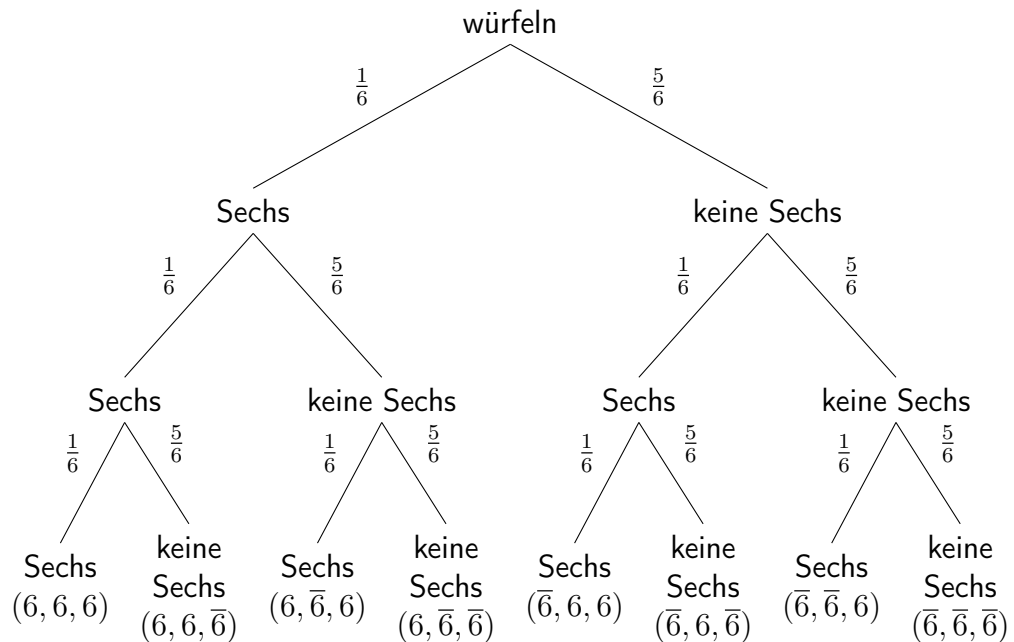
$$P(\text{Summe} = 12) = \frac{1}{36}$$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\text{Summe} = 1) + P(\text{Summe} = 2) + \dots = 1$

→ Die Wahrscheinlichkeit $W = 1$ ist verteilt auf die einzelnen Ereignisse.

6.2 Mehrstufige Zufallsversuche - Baumdiagramme

Beispiel: "Mensch ärgere dich nicht", ich sitze im Haus (mit Zurücklegen)



$$S = \{(6, 6, 6), (6, 6, \bar{6}), \dots\} \quad (\text{Ergebnismenge})$$

$$|S| = 2^3 = 8$$

Jeder Pfad führt zu einem Ergebnis e
 Jeder Pfad besteht hier aus 3 Zweigen (dreistufig)

Die Pfadwahrscheinlichkeit ist das Produkt der Zweige w entlang des Pfades,
 z. B. $P((6, \bar{6}, \bar{6})) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

E_1 : genau zwei Sechsen bei drei Würfeln

Ereignis E_1 besteht aus drei Ergebnissen $((6, 6, \bar{6}), (6, \bar{6}, 6), (\bar{6}, 6, 6))$

Die Wahrscheinlichkeit von E_1 ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse $P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

Beispiel: 3 Züge ohne Zurücklegen (anfangs 2 rote, 3 gelbe Kugeln)



455/1

a

$$\text{m. Z. } P((r, r)) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$$

$$\text{o. Z. } P((r, r)) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

b

$$\text{m. Z. } P((r, b)) = 2 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{24}{49}$$

$$\text{o. Z. } P((r, b)) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7}$$

c

$$\text{m. Z. } P((r, r), (r, b)) = \frac{16}{49} + \frac{24}{49} = \frac{40}{49}$$

$$\text{o. Z. } P((r, r), (r, b)) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

d

$$\text{m. Z. } P((r, r), (r, b)) = \frac{40}{49}$$

$$\text{o. Z. } P((r, r), (r, b)) = \frac{6}{7}$$

6.2.1 Baumdiagramme - Wahrscheinlichkeiten

(Würfeln)

$$p(1) = p(2) = \frac{1}{6} \quad \text{Einzel-/Zweigwahrscheinlichkeit}$$

$$P(1, 1, 2) = P((1 \ 1 \ 2), (1 \ 2 \ 1), (2 \ 1 \ 1)) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

455/3

$$p(0) = \frac{1}{4} \quad p(1) = \frac{3}{4}$$

a

$$P(0, 0, 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \approx 0.02$$

\Leftrightarrow mindestens ein Patient wird geheilt

b

$$P(1, 0, 0) = P((1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64} \approx 0.14$$

\Leftrightarrow kein Patient oder mehr als ein Patient werden geheilt

c

$$P(1, 1, 0) = P((1 \ 1 \ 0), (1 \ 0 \ 1), (0 \ 1 \ 1)) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} \approx 0.42$$

\Leftrightarrow alle Patienten oder weniger als zwei Patienten werden geheilt

d

$$P((0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0.58$$

\Leftrightarrow alle Patienten werden geheilt

455/4

$$P(1) = P((1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)) = \frac{11}{36}$$

$$P(2) = P((2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(3) = P((3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)) = \frac{7}{36}$$

$$P(4) = P((4, 4), (4, 5), (4, 6)) = \frac{5}{36}$$

$$P(5) = P((5, 5), (5, 6)) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(6) = P((6, 6)) = \frac{1}{36}$$

Teil V

13/1

6.3 Wiederholung

- relative Häufigkeit: Aussage über ein schon durchgeführtes Zufallsexperiment
- Wahrscheinlichkeit: Aussage über zukünftige Zufallsversuche

456/5

$$F = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

a

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

F : Die zweite Kugel trägt eine 1

$E \Leftrightarrow$ Die Summe der Zahlen ist größer als 3

$$P(E) = \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) = \frac{2}{9} = 0.\bar{2}$$

$$P(F) = \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) = P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.\bar{3}$$

b

$$E \cap F = \{(1, 1), (2, 1)\}$$

$$P(E \cap F) = \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$$

c

$$E \cup F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$P(E \cup F) = \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) = \frac{7}{18} = 0.3\bar{8}$$

456/7

a

Gegenwahrscheinlichkeit (keine Sechs werfen): $P(\neg E) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.40$

$$P(E) = 1 - P(\neg E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.60$$

b

$$P = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \approx 0.09$$

c

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.08$$

456/9

a

$$P = \frac{1}{13983816} \approx 7.15 \cdot 10^{-8}$$

Bemerkung: Ein Zufallsversuch heißt Laplace-Versuch, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad |S| = n \quad P(e_i) = \frac{1}{n}$$

$$E = \{e_1, \dots\} \quad |E| = k \quad P(E) = \frac{k}{n}$$

⇒ Gleichverteilung

b

$$E = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 4, 5, 6, 7), \dots, (44, 45, 46, 47, 48, 49)\}$$

$$|E| = 44$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{44}{13983816} \approx 3.15 \cdot 10^{-6}$$

c

$$P = \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{40}{46} \cdot \frac{39}{45} \cdot \frac{38}{44} \approx 0.436$$

456/10

a

$$\text{Anteil nach 10 Tagen: } 0.85^{10} \approx 0.197$$

$$0.85^t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = \log_{0.85}(0.5) \approx 4.265$$

b

$$(1-p)^8 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad p = 1 - \sqrt[8]{(0.5)} \approx 0.083$$

6.4 Abzählverfahren

Bis auf Weiteres gilt: Die Zufallsversuche sind Laplace-Versuche.

Anzahl der Ergebnisse $N \Rightarrow P = \frac{1}{N}$ (Ergebniswahrscheinlichkeit)

Ziehe k mal aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln:

- mit Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge

$$N = n^k$$

- ohne Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \underbrace{(n-k+1)}_{\text{übrige Kugeln vor dem } k\text{-ten Zug}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Es werden jeweils $k!$ (Permutationen) Ergebnisse zu einem Ereignis zusammengefasst:

$$N = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \text{ (Binomialkoeffizient)}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen 6er im Lotto:

$$p = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{14000000}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen 4er im Lotto ("Lottoproblem"):

$$p = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{1000}$$

(Wähle 4 aus den 6 Richtigen und 2 aus den 43 Falschen)

460/1

a

$$n = 2 \quad k = 6 \quad N = 2^6 = 64$$

b

$$n = 4 \quad k = 4 \quad N = \frac{4!}{(4-4)!} = 4! = 24$$

c

$$n = 3 \quad k = 5 \quad N = 3^5 = 243$$

d

$$n = 10 \quad k = 2 \quad N = \binom{10}{2} = 45$$

460/2

a

$$n = 4 \quad k = 4 \quad N = 4^4 = 256$$

b

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{512}$$

$$p_2 = \frac{4!}{p_1} = \frac{3}{64}$$

$$p_3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$$

460/3

a Die Reihenfolge der Ziffern entspricht der Reihenfolge der Spiele.

b

$$p = \left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \frac{1}{177147} \approx 5.65 \cdot 10^{-6}$$

Annahme: Heimsieg, Gastspiel und Unentschieden sind jeweils gleich wahrscheinlich.

c

$$N = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \cdot 3^{11} = 2^{11} = 2048$$

460/5

$$N = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$$

461/8

a

$$N = 5! = 120$$

b

$$p = \frac{1}{5}$$

c

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

461/11

a

$$p = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{43}{45} \cdot \frac{42}{44} \approx 6.46 \cdot 10^{-5}$$

b

rrrrff, rrrfrf, rrfrrf, rfrrrf, frrrrf,
rrrf fr, rrf rfr, rfrrfr, frrrfr,
rrffrr, rfrfrr, frrfrr,
rfrrrr, frfrrr,
ffrrrr

c

$$p_4 \approx 15 \cdot 6.46 \cdot 10^{-5} \approx 9.69 \cdot 10^{-4}$$

d

$$p_2 = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{43}{47} \cdot \frac{42}{46} \cdot \frac{41}{45} \cdot \frac{40}{44} \right) \approx 0.13$$

e

$$p_0 = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{40}{46} \cdot \frac{39}{45} \cdot \frac{38}{44} \right) \approx 0.44$$

$$p_1 = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{6}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot \frac{42}{47} \cdot \frac{41}{46} \cdot \frac{40}{45} \cdot \frac{39}{44} \right) \approx 0.41$$

$$p_{\geq 3} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) \approx 1.86 \cdot 10^{-2}$$

$$p_{50Sp.} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2)^{50} \approx 0.61$$

$$p_{100Sp.} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2)^{100} \approx 0.85$$

$$p_{1000Sp.} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2)^{1000} \approx 1.00$$

461/10

a

$$p = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{6}{45} \cdot \frac{5}{44} \cdot \frac{4}{43} \cdot \frac{3}{42} \cdot \frac{2}{41} \cdot \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{\binom{45}{6}} \approx 1.23 \cdot 10^{-7}$$

b

$$N = \binom{5}{2} = 10$$

c

$$N = \binom{1000}{2} = 4.995 \cdot 10^5$$

AB Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

AB/12

$$p = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \approx 0.46$$

AB/17

a

$$N = \binom{16}{3} \cdot \binom{8}{2} = 39200$$

b

$$N = \binom{24}{5} - \binom{16}{5} = 38136$$

AB/20

$$p_{3r} = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{15}{5}}{\binom{20}{8}} \approx 0.2384$$

$$p_{\geq 4r} = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{15}{4}}{\binom{20}{8}} + \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{15}{3}}{\binom{20}{8}} \approx 0.0578$$

AB/21

$$p_2 = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} \approx 0.0702$$

$$\begin{aligned} p_{\geq 3} &= p_3 + p_4 + p_5 \\ &= \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{90}{2} + \binom{10}{4} \cdot \binom{90}{1} + \binom{10}{5} \cdot \binom{90}{0}}{\binom{100}{5}} \approx 0.0066 \end{aligned}$$

AB/11

a

$$N = (4 + 5 + 3)! = 479001600$$

b

$$N = 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3! = 103680$$

AB/13

$$t = \frac{26!}{10^6} \approx 4.0329 \cdot 10^{20} ms \approx 1.2780 \cdot 10^{10} y \approx 0.93 \cdot \text{Alter des Universums}$$

AB/23

$$p_3 = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1}}{\binom{16}{4}} \approx 2.6374 \cdot 10^{-2}$$

$$p_4 = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{12}{0}}{\binom{16}{4}} \approx 5.4945 \cdot 10^{-4}$$

$$Erw = 1 - (10 \cdot p_3 + 1000 \cdot p_4) \approx 0.19$$

6.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aus einer Urne mit 6 roten und 4 blauen Kugeln werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



$$E: \text{rot im ersten Zug} \quad P(E) = \frac{6}{10}$$

$$F: \text{rot im zweiten Zug} \quad P(F) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3}{5}$$

$$P_E(F) = \frac{5}{9}$$

Wahrscheinlichkeit für Ereignis F , unter der Voraussetzung, dass Ereignis E zuvor eingetreten ist

6.5.1 Statistische Unabhängigkeit

Wenn gilt, dass $P_E(F) = P(F)$, dann sagt man die Ereignisse E und F sind statistisch unabhängig.

$$\begin{aligned} E: \text{rot im ersten Zug} & \quad P(E) = \frac{6}{10} \\ F: \text{rot im zweiten Zug} & \quad P(F) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$P_E(F) = \frac{5}{9} \neq P(F) = \frac{3}{5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass rot im zweiten Zug gezogen wird unter der Bedingung, dass rot schon im ersten Zug gezogen wurde, ist ungleich der Wahrscheinlichkeit, dass allgemein rot im zweiten Zug gezogen wird.

E und F sind statistisch abhängig.

\overline{E} : blau im ersten Zug

\overline{F} : blau im zweiten Zug

$$P_{\overline{E}}(F) = \frac{6}{9} \neq P(F) = \frac{3}{5}$$

$$P_E(\overline{F}) = \frac{4}{9} \neq P(\overline{F}) = \frac{2}{5}$$

$$P_{\overline{E}}(\overline{F}) = \frac{3}{9} \neq P(\overline{F}) = \frac{2}{5}$$

475/1

a

$$P = 0.98^4 \approx 0.9224$$

- b Wenn bei einem Fahrzeug eine Panne auftritt, besteht die Möglichkeit, dass dies auf ein besonders anfälliges Fahrzeugteil oder einen Produktionsfehler zurückzuführen ist, welches/r sich auch in den anderen drei Fahrzeugen befindet.

475/2

a

$$P(E) = \frac{3}{5} \quad P(F) = \frac{2}{5}$$

$$E \cap F = \{(a_1, h_1), (a_1, h_2), (a_2, h_1), \dots, (a_3, h_2)\} \quad |E \cap F| = 6$$

$$P(E \cap F) = \frac{|E \cap F|}{5^2} = P(E) \cdot P(F) = \frac{6}{25}$$

b

$$P(E) = \frac{3}{5} \quad P(F) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.34$$

$$P(E \cap F) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.3 \neq P(E) \cdot P(F) = 0.204$$

$$P_E(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Vierfelder-Tafel

E : Raucher \overline{E} : Nichtraucher

F : mit Gewicht zufrieden \overline{F} : mit Gewicht unzufrieden

	F	\overline{F}	
E	$P(E \cap F)$	$P(E \cap \overline{F})$	$P(E)$
\overline{E}	$P(\overline{E} \cap F)$	$P(\overline{E} \cap \overline{F})$	$P(\overline{E})$
	$P(F)$	$P(\overline{F})$	100%

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

476/11

$$P(\text{V. h.} \cap \text{S. h.}) = \frac{471}{1000} = 47.1\%$$

$$P(\text{V. h.}) \cdot P(\text{S. h.}) = \frac{622}{1000} \cdot \frac{619}{1000} \approx 38.5\%$$

$$P(\text{V. h.} \cap \text{S. h.}) \neq P(\text{V. h.}) \cdot P(\text{S. h.}) \Rightarrow \text{statistisch abhängig}$$

6.5.2 Der Satz von Bayes



$P_K(T) = 0.90$: Sensitivität des Tests

$P_{\bar{K}}(\bar{T}) = 0.98$: Spezifität des Tests

K : krank T : positiver Test

$P_T(K)$: Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, wenn der Test positiv ausfällt

$$P_T(K) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{P(K) \cdot P_K(T)}{P(K) \cdot P_K(T) + P(\bar{K}) \cdot P_{\bar{K}}(T)}$$

$$P(K) \cdot P_K(T) = P(T) \cdot P_T(K)$$

$$P(T) = P(K) \cdot P_K(T) + P(\bar{K}) \cdot P_{\bar{K}}(T)$$

$$= 0.0001 \cdot 0.9 + 0.9999 \cdot 0.02$$

$$= 0.00009 + 0.02$$

$$= 0.02009$$

479/2

b

$$P_+(\text{krank}) = \frac{0.09}{0.1} = 90\%$$

c

$$P_-(\text{gesund}) = \frac{0.89}{0.9} = 98.\bar{8}\%$$

479/3

$$P(A) = 0.4 \quad P(\text{einwandfrei}) = 0.95$$

$$P(A \cap \text{einwandfrei}) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$$

	A	\bar{A}	
einwandfrei	0.36	$0.95 - 0.36 = 0.59$	0.95
defekt	$0.4 - 0.36 = 0.04$	$0.05 - 0.04 = 0.01$	$1 - 0.95 = 0.05$
	0.4	$1 - 0.4 = 0.6$	100%

$$P_{\text{defekt}}(A) = \frac{0.04}{0.05} = 80\%$$

479/4

$$P(\text{Bahn}) = 0.8 \quad P(\text{pünktlich}) = 0.6$$

$$P_{\text{Bahn}}(\text{pünktlich}) = 0.6$$

	Bahn	nicht Bahn	
pünktlich	$0.6 \cdot 0.8 = 0.53$	$0.6 - 0.53 = 0.06$	0.6
unpünktlich	$0.8 - 0.53 = 0.26$	$0.2 - 0.06 = 0.13$	$1 - 0.6 = 0.4$
	0.8	$1 - 0.8 = 0.2$	100%

$$P_{\text{pünktlich}}(\text{Bahn}) = \frac{0.53}{0.6} = 88.8\%$$

479/5

$$P_{\text{krank}}(\text{negativ}) = 0.0001 \quad P_{\text{gesund}}(\text{positiv}) = 0.001$$

$$P(\text{krank}) = \frac{100}{1100000} = 0.00009$$

	krank	gesund	
positiv	$9.09 \cdot 10^{-5}$	$9.9990 \cdot 10^{-4}$	0.001090809
negativ	$9.09 \cdot 10^{-9}$	0.99890918	0.98909109
	0.00009	0.99990	100%

$$P_{\text{positiv}}(\text{krank}) = \frac{P(\text{krank} \cap \text{positiv})}{P(\text{positiv})} = \frac{9.09 \cdot 10^{-5}}{0.001090809} \approx 8.33\%$$

479/6

a

$$B_1 = \{w_1, w_2, s_1, \dots, s_5\} \quad B_2 = \{w_1, \dots, w_4, s_1, \dots, s_4\}$$

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P_{B_1}(w) = \frac{2}{7} \quad P_{B_1}(s) = \frac{5}{7} \quad P_{B_2}(w) = P_{B_2}(s) = \frac{1}{2}$$

$$P(s) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(s) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(s) = \frac{17}{28}$$

$$P_s(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(s)}{P(s)} \approx 58.82\%$$

$$P_s(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(s)}{P(s)} \approx 41.18\%$$

b

$$P_{B_1}((s, s)) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21} \quad P_{B_2}((s, s)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

$$P((s, s)) = P(B_1) \cdot P_{B_1}((s, s)) + P(B_2) \cdot P_{B_2}((s, s)) = \frac{29}{84}$$

$$P_{(s,s)}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(s, s)}{P(s, s)} \approx 68.97\%$$

$$P_{(s,s)}(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(s, s)}{P(s, s)} \approx 31.03\%$$

6.6 Zufallsgrößen - Erwartungswert, Standardabweichung

Eine Zufallsgröße (eigentlich eine Funktion) weist jedem Element (Ergebnis) der Ergebnismenge S eine Zahl oder einen Wert zu.

Beispiel: Losbude. Die Urne enthält 1000 Lose, darunter 50 Trostpreise (Wert 1.50€), 5 größere Preise (Wert 4€) und 1 Hauptgewinn (Wert 10€). Jedes Los kostet 1€.

Die Zufallsgröße X hat vier Werte (Niete, Trostpreis, größerer Preis, Hauptgewinn) also x_1, x_2, x_3, x_4 . Die Zufallsgröße zerlegt die Ergebnismenge vollständig und ohne Überlappung in Ereignisse.

Wahrscheinlichkeitsverteilung: Notiere zu jedem Wert, den eine Zufallsgröße annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X = x_1) &= \frac{944}{1000} & P(X = x_2) &= \frac{50}{1000} \\ P(X = x_3) &= \frac{5}{1000} & P(X = x_4) &= \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Erwartungswert

durchschnittlicher Bruttogewinn ohne Lospreis (Sicht des Spielers):

$$\mu = 0\text{€} \cdot \frac{944}{1000} + 1.50\text{€} \cdot \frac{50}{1000} + 4\text{€} \cdot \frac{5}{1000} + 10\text{€} \cdot \frac{1}{1000} = 0.105\text{€}$$

durchschnittlicher Erlös, Nettogewinn inkl. Lospreis (Sicht der Losbude):

$$\mu = 1\text{€} \cdot 1 - 0\text{€} \cdot \frac{944}{1000} - 1.50\text{€} \cdot \frac{50}{1000} - 4\text{€} \cdot \frac{5}{1000} - 10\text{€} \cdot \frac{1}{1000} = 0.895\text{€}$$

allgemein:

$$\mu = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \dots = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \cdot x_i$$

Standardabweichung (mittl. Schwankungsbreite um den Erwartungswert herum)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{P(X = x_1) \cdot (x_1 - \mu)^2 + P(X = x_2) \cdot (x_2 - \mu)^2 + \dots} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n P(X = x_i) \cdot (x_i - \mu)^2} \\ &= \sqrt{\frac{944}{1000} \cdot (-0.105\text{€})^2 + \frac{50}{1000} \cdot (1.395\text{€})^2 + \frac{5}{1000} \cdot (3.895\text{€})^2 + \frac{1}{1000} \cdot (9.895\text{€})^2} \\ &\approx 0.5305\text{€} \end{aligned}$$

488/1

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4} \cdot (-10) + \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{5}{6} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{65}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{55}{6}\right)^2} \approx 6.7185 \end{aligned}$$

488/2

$$\begin{aligned}P(X = 0) &\approx 0.1176 & P(X = 1) &\approx 0.3674 \\P(X = 2) &\approx 0.3823 & P(X = 3) &\approx 0.1327\end{aligned}$$

$$\mu \approx 0.3674 \cdot 1 + 0.3823 \cdot 2 + 0.1327 \cdot 3 \approx 1.53 = 3 \cdot 0.51$$

$$\sigma \approx \sqrt{0.1176 \cdot (-1.53)^2 + 0.3674 \cdot (-0.53)^2 + 0.3823 \cdot (0.47)^2 + 0.1327 \cdot (1.47)^2} \approx 0.87$$

488/3

$$\begin{aligned}\mu &= 0 \cdot 0.436 + 1 \cdot 0.413 + 2 \cdot 0.132 + 3 \cdot 0.0177 + 4 \cdot 0.000969 \\&\quad + 5 \cdot 1.85 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 7.15 \cdot 10^{-8} \approx 0.7341\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{(-0.7341)^2 \cdot 0.436 + \dots + (5.2659)^2 \cdot 7.15 \cdot 10^{-8}} \approx 0.7598$$

488/4

$$P(X = 0.5 + 0.5 = 1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = 0.22$$

$$P(X = 1 + 0.5 = 1.5) = \frac{5}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} = 0.2$$

$$P(X = 1 + 1 = 2) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = 0.0\bar{3}$$

$$P(X = 2 + 0.5 = 2.5) = \frac{8}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} = 0.32$$

$$P(X = 2 + 1 = 3) = \frac{8}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{8}{24} = 0.1\bar{3}$$

$$P(X = 2 + 2 = 4) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = 0.09\bar{3}$$

$$\begin{aligned}m = \mu &= 0.22 \cdot 1 + 0.2 \cdot 1.5 + 0.0\bar{3} \cdot 2 + 0.32 \cdot 2.5 + 0.1\bar{3} \cdot 3 + 0.09\bar{3} \cdot 4 \\&= 2.16\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{0.22 \cdot (-1.16)^2 + 0.2 \cdot (-0.66)^2 + 0.0\bar{3} \cdot (-0.16)^2 + 0.32 \cdot (0.34)^2 + 0.1\bar{3} \cdot (0.84)^2 + 0.09\bar{3} \cdot (1.84)^2} \approx 0.9116$$

489/10

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= 0.2^3 = 0.008 & P(X = 1) &= 3 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 = 0.096 \\P(X = 2) &= 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.384 & P(X = 3) &= 0.8^3 = 0.512\end{aligned}$$

$$\mu = 0 \cdot 0.008 + 1 \cdot 0.096 + 2 \cdot 0.384 + 3 \cdot 0.512 = 2.4 = 3 \cdot 0.8$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{4} \quad P(X = 4) = \frac{3}{8} \quad P(X = 5) = \frac{3}{8}$$

$$\mu = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{3}{8} = 4.125$$

$$\sigma = \sqrt{(3 - 4.125)^2 \cdot \frac{1}{4} + (4 - 4.125)^2 \cdot \frac{3}{8} + (5 - 4.125)^2 \cdot \frac{3}{8}} \approx 0.781$$

6.7 Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung

Ein Bernoulli-Experiment hat 2 Versuchsausgänge (Treffer, Niete).

$$P(\text{Treffer}) = p \quad P(\text{Niete}) = q = 1 - p$$

Eine Folge von Bernoulli-Experimenten heißt Bernoulli-Kette.

Frage: Wie viele Treffer k kommen bei einer Bernoulli-Kette der Länge n vor?

Beispiel: Würfle 10 mal; wie wahrscheinlich sind 3 Sechser?

$$n = 10 \quad p = \frac{1}{6} \quad k = 3$$

$$P(\text{ein Pfad}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \quad \text{Anzahl der Pfade mit 3 Treffern: } \binom{10}{3}$$

$$P(3 \text{ Sechser, } 10 \text{ Würfe}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \binom{10}{3} \approx 0.1550$$

Allgemein gilt:

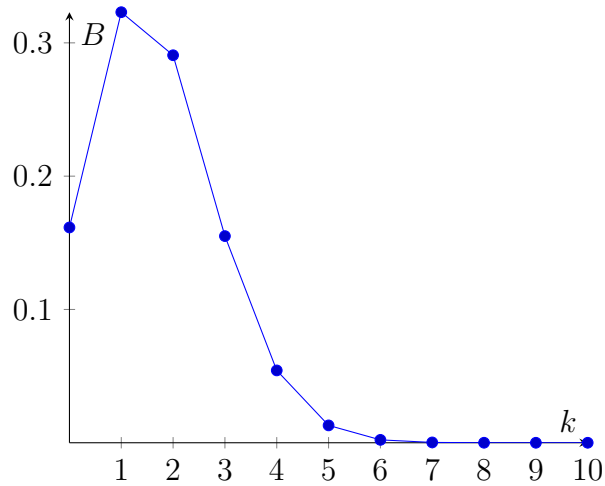
$$P(k, n, p) = p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

Schreibweise:

$$P(k, n, p) \quad \Rightarrow \quad B(n, p, k) \quad \text{oder} \quad B_{n;p}(k)$$

Notiere ich zu unserem Beispiel die Wahrscheinlichkeiten für $k = 0$ Treffer, $k = 1$ Treffer, ..., $k = 10$ Treffer, so ist das die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Bernoulli-Kette mit $n = 10$ Versuchen. Man nennt diese Wahrscheinlichkeitsverteilung Binomialverteilung.

$$\begin{aligned}
B(0, 10, \frac{1}{6}) &\approx 0.16151 & B(1, 10, \frac{1}{6}) &\approx 0.32301 \\
B(2, 10, \frac{1}{6}) &\approx 0.29071 & B(3, 10, \frac{1}{6}) &\approx 0.15504 \\
B(4, 10, \frac{1}{6}) &\approx 5.4265 \cdot 10^{-2} & B(5, 10, \frac{1}{6}) &\approx 1.3024 \cdot 10^{-2} \\
B(6, 10, \frac{1}{6}) &\approx 2.1706 \cdot 10^{-3} & B(7, 10, \frac{1}{6}) &\approx 2.4807 \cdot 10^{-4} \\
B(8, 10, \frac{1}{6}) &\approx 1.8605 \cdot 10^{-5} & B(9, 10, \frac{1}{6}) &\approx 8.2691 \cdot 10^{-7} \\
B(10, 10, \frac{1}{6}) &\approx 1.6538 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$



499/3

$$n = 8 \quad p = \frac{1}{3} \quad B(8, \frac{1}{3}, k) = (\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{2}{3})^{8-k} \cdot \binom{8}{k}$$

a

$$k = 4 \quad B(8, \frac{1}{3}, 4) \approx 17.07\%$$

b

$$k \geq 4 \quad \sum_{k=4}^8 B(8, \frac{1}{3}, k) \approx 25.86\%$$

c

$$k \leq 3 \quad \sum_{k=0}^3 B(8, \frac{1}{3}, k) \approx 74.14\%$$

d

$$k > 4 \quad \sum_{k=5}^8 B(8, \frac{1}{3}, k) \approx 8.79\%$$

500/6

$$n = 6 \quad p_G = \frac{3}{4} \quad p_R = \frac{1}{4}$$

a

$$k = 2, p_G \quad B(6, \frac{3}{4}, 2) \approx 3.30\%$$

b

$$k = 2, p_R \quad B(6, \frac{1}{4}, 2) \approx 29.66\%$$

c

$$k \leq 2, p_G \quad \sum_{k=0}^2 B(6, \frac{3}{4}, k) \approx 3.76\%$$

d

$$k \geq 2, p_R \quad \sum_{k=2}^6 B(6, \frac{1}{4}, k) \approx 46.61\%$$

500/7

a

$$n = 10 \quad p = 0.8 \quad k \geq 8$$

$$P = \sum_{k=8}^{10} B(10, 0.8, k) \approx 67.78\%$$

b

$$n = 7 \quad p = 0.75 \quad k = 5 \text{ oder } 6$$

$$P = B(7, 0.75, 5) + B(7, 0.75, 6) \approx 62.29\%$$

Arbeiten mit Tabellen

503/1

$$n = 15 \quad p = 0.2$$

a

$$P(X = 4) = 18.76\% \quad P(X \leq 4) = 83.58\%$$

- b $P(X \geq 3)$ ist die Wahrscheinlichkeit für alle k von 3 bis $n = 15$.
 $P(X \leq 2)$ ist die Wahrscheinlichkeit für die restlichen k von 0 bis 2.
 $P(X \geq 3)$ und $P(X \leq 2)$ sind daher die jeweiligen Gegenwahrscheinlichkeiten voneinander.

c

$$P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X = 0) = 93.89\% - 3.52\% = 90.37\%$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1 \wedge X \geq 5) &= P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4) \\ &= 16.71\% + 100\% - 83.58\% = 33.13\% \end{aligned}$$

503/2

a

$$n = 20 \quad p = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 4) \approx 0.09106$$

$$P(X \leq 4) \approx 0.15151$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.98241$$

$$P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X = 0) \approx 0.29691$$

$$P(X \leq 1 \wedge X \geq 5) = P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4) \approx 0.85180$$

b

$$n = 100 \quad p = 0.03$$

$$P(X = 4) \approx 0.17061$$

$$P(X \leq 4) \approx 0.81785$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.58022$$

$$P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X = 0) \approx 0.87161$$

$$P(X \leq 1 \wedge X \geq 5) = P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4) \approx 0.37677$$

503/3

$$p = 0.9 \quad n = 16$$

a

$$B_{16;0.9}(k) = 0.9^k \cdot 0.1^{16-k} \cdot \binom{16}{k}$$

b

$$\text{I: } B_{16;0.9}(X = 16) \approx 0.18530$$

$$\text{II: } B_{16;0.9}(X = 14) \approx 0.27452$$

$$\text{III: } B_{16;0.9}(X \geq 14) \approx 0.78924$$

$$\text{IV: } B_{16;0.9}(X \leq 13) \approx 0.21075$$

$$\text{V: } B_{16;0.9}(12 \leq X \leq 15) \approx 0.79769$$

504/5

$$p = 0.03$$

$$\text{A: } n = 10 \quad k = 0$$

$$B_{10;0.03}(X = 0) \approx 0.73742$$

$$\text{B: } n = 20 \quad k \geq 1$$

$$B_{20;0.03}(X \geq 1) = 1 - B_{20;0.03}(X = 0) \approx 0.45621$$

$$\text{C: } n = 50 \quad k > 1$$

$$B_{50;0.03}(X > 1) = 1 - (B_{50;0.03}(X = 0) + B_{50;0.03}(X = 1)) \approx 0.44472$$

504/6

$$n = 10 \quad p = 0.7$$

$$B_{10;0.7}(k) = 0.7^k \cdot 0.3^{10-k} \cdot \binom{10}{k}$$

a

$$P(X = 4) \approx 0.03676$$

$$P(X \leq 9) \approx 0.97175$$

$$P(X < 8) = P(X \leq 7) \approx 0.61722$$

b

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) \approx 0.14931$$

c

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0.38278$$

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 5) = 0.82148$$

508/6

$$n = 100 \quad p = \frac{1}{6}$$

$$B_{100; \frac{1}{6}}(k) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k} \cdot \binom{100}{k}$$

a

$$B_{100; \frac{1}{6}}(X = 15) \approx 0.10024$$

b

$$B_{100; \frac{1}{6}}(X > 25) \approx 0.01188$$

c

$$B_{100; \frac{1}{6}}(15 \leq X \leq 25) \approx 0.70070$$

508/7

$$p = 0.05 \quad n = 20 \quad k \geq 2$$

$$B_{20; 0.05}(X \geq 2) \approx 0.26416$$

508/8

$$p = \frac{1}{3} \quad n = 100 \quad k > 33$$

$$B_{100; \frac{1}{3}}(X > 33) \approx 0.48120$$

6.7.1 Anwendungen der Binomialverteilung

S. 509, Bsp. 2

$$P(k \geq 1) \geq 0.90$$

$$P(k = 0) < 0.10$$

$$0.96^n < 0.10 \quad | \log$$

$$n \cdot \log(0.96) < \log(0.10) \quad | : \log(0.96) < 0$$

$$n > \frac{\log(0.10)}{\log(0.96)}$$

$$n > 56.4... \quad \text{also } n = 57$$

510/3

$$n = 50 \quad p = 0.9$$

a

$$P(X > 48) \approx 0.03379$$

b

$$P(X \leq 46) \approx 0.74971$$

c

$$n = 51$$

$$P(X > 48) \approx 0.10393$$

\Rightarrow auch bei 51 Buchungen ist eine Überbuchung unwahrscheinlich

511/5

a

$$p = \frac{1}{6}$$

$$P(X \geq 1) \geq 0.99$$

$$P(X = 0) < 0.01$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.01 \quad | \log; : \log\left(\frac{5}{6}\right) < 0$$

$$n > \frac{\log(0.01)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 25.3$$

$$\Rightarrow n = 26$$

b

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
 P(X \geq 1) &\geq 0.99 \\
 P(X = 0) &< 0.01 \\
 \left(\frac{1}{2}\right)^n &< 0.01 \quad | \log; : \log\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \\
 n &> \frac{\log(0.01)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 6.6 \\
 \Rightarrow n &= 7
 \end{aligned}$$

511/6

a

$$\begin{aligned}
 n &= 5 \quad r = 1 \\
 P(X \geq 1) &\geq 0.75 \\
 P(X = 0) &< 0.25 \\
 (1 - p)^5 &< 0.25 \quad | \left(\right)^{\frac{1}{5}} \\
 1 - p &< 0.25^{\frac{1}{5}} \quad | - 1; \cdot (-1) \\
 p &> -(0.25^{\frac{1}{5}} - 1) \approx 0.24214
 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
 n &= 100 \quad r = 1 \\
 P(X \geq 1) &\geq 0.75 \\
 P(X = 0) &< 0.25 \\
 (1 - p)^{100} &< 0.25 \quad | \left(\right)^{\frac{1}{100}} \\
 1 - p &< 0.25^{\frac{1}{100}} \quad | - 1; \cdot (-1) \\
 p &> -(0.25^{\frac{1}{100}} - 1) \approx 0.01377
 \end{aligned}$$

511/7

$$p = 0.05$$

a

$$\begin{aligned}
 n &= 50 \quad k \leq 2 \\
 P(X \leq 2) &\approx 0.54053
 \end{aligned}$$

b

genau 2 von 50 Fahrgästen unzufrieden

c

$$P(X \geq 1) \geq 0.9$$

$$P(X = 0) < 0.1$$

$$0.95^n < 0.1 \quad | \log; : \log(0.95)$$

$$n > \frac{\log(0.1)}{\log(0.95)} \approx 44.89057$$

$$\Rightarrow n = 45$$

6.7.2 Erwartungswert μ , Standardabweichung σ

Für alle Binomialverteilungen gilt:

$$\mu = n \cdot p \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

515/6

a

$$n = 3 \quad p \text{ beliebig}$$

$$\mu = P(X = x_0) \cdot x_0 + P(X = x_1) \cdot x_1 + \dots$$

$$\sigma = \sqrt{P(X = x_1) \cdot (x_0 - \mu)^2 + P(X = x_1) \cdot (x_1 - \mu)^2 + \dots}$$

$$P(X = k) = p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} \mu &= P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 1) \cdot 1 + P(X = 2) \cdot 2 + P(X = 3) \cdot 3 \\ &= 0 + p \cdot (1 - p)^2 \cdot 3 + p^2 \cdot (1 - p) \cdot 6 + p^3 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot p \cdot ((1 - p)^2 + p \cdot (1 - p) \cdot 2 + p^2) \\ &= 3 \cdot p \cdot (p^2 - 2p + 1 + 2p - 2p^2 + p^2) \\ &= 3 \cdot p = n \cdot p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{P(X=0) \cdot (0-3p)^2 + P(X=1) \cdot (1-3p)^2} \\
&\quad + P(X=2) \cdot (2-3p)^2 + P(X=3) \cdot (3-3p)^2 \\
&= \sqrt{(1-p)^3 \cdot 9p^2 + 3p \cdot (1-p)^2 \cdot (1-3p)^2} \\
&\quad + 3p^2 \cdot (1-p) \cdot (2-3p)^2 + p^3 \cdot (3-3p)^2 \\
&= \sqrt{9p^2 \cdot (1-p)^3 + 27p^3 \cdot (1-p)^2 - 18p^2 \cdot (1-p)^2 + 3p \cdot (1-p)^2} \\
&\quad + 27p^4 \cdot (1-p) - 36p^3 \cdot (1-p) + 12p^2 \cdot (1-p) + 9p^5 - 18p^4 + 9p^3 \\
&= \sqrt{3 \cdot p \cdot (3p \cdot (1-p)^3 + 9p^2 \cdot (1-p)^2 - 6p \cdot (1-p)^2 + (1-p)^2} \\
&\quad + 9p^3 \cdot (1-p) - 12p^2 \cdot (1-p) + 4p \cdot (1-p) + 3p^4 - 6p^3 + 3p^2) \\
&= \sqrt{3 \cdot p \cdot (-3p^4 + 9p^3 - 9p^2 + 3p + 9p^4 - 18p^3 + 9p^2} \\
&\quad - 6p^3 + 12p^2 - 6p + p^2 - 2p + 1} \\
&\quad + 9p^3 - 9p^4 + 12p^3 - 12p^2 + 4p - 4p^2} \\
&\quad + 3p^4 - 6p^3 + 3p^2) \\
&= \sqrt{3 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}
\end{aligned}$$

514/2

a

$$n = 25 \quad p = 0.3$$

$$\mu = 25 \cdot 0.3 = 7.5 \quad \sigma = \sqrt{25 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3)} \approx 2.29129$$

$$P(X = 7) \approx 0.17119 \quad (P(X = 8) \approx 0.16508)$$

$$[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma] \approx [1; 14]$$

$$P(1 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X = 0) \approx 0.99809$$

b

$$n = 15 \quad p = 0.3$$

$$\mu = 15 \cdot 0.3 = 4.5 \quad \sigma = \sqrt{15 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3)} \approx 1.77482$$

$$P(X = 4) \approx 0.21862 \quad (P(X = 5) \approx 0.20613)$$

$$[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma] \approx [0; 9]$$

$$P(0 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) \approx 0.99634$$

c

$$n = 70 \quad p = 0.9$$

$$\mu = 70 \cdot 0.9 = 63 \quad \sigma = \sqrt{70 \cdot (1 - 0.9)} \approx 2.64575$$

$$P(X = 63) \approx 0.15704$$

$$[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma] \approx [56; 70]$$

$$P(56 \leq X \leq 70) = 1 - P(X \leq 55) \approx 0.99653$$

c

$$n = 100 \quad p = 0.9$$

$$\mu = 100 \cdot 0.9 = 90 \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot (1 - 0.9)} \approx 3.16228$$

$$P(X = 90) \approx 0.13187$$

$$[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma] \approx [81; 99]$$

$$P(81 \leq X \leq 99) = P(X \leq 99) - P(X \leq 80) \approx 0.99799$$

514/3

$$n = 100 \quad p = \frac{1}{6}$$

a

$$\mu = 100 \cdot \frac{1}{6} = 16.\bar{6} \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 3.72678$$

b

$$[10; 24]$$

$$P_{2\sigma} = P(10 \leq X \leq 24) = P(X \leq 24) - P(X \leq 9) \approx 0.95700$$

6.7.3 σ -Umgebung

Alle Binomialverteilungen sind ähnlich in dem Sinne:

- Der Erwartungswert μ wird mit größter Wahrscheinlichkeit getroffen.

- Die Wahrscheinlichkeit verteilt sich in der Nähe des Erwartungswerts μ in gleicher Weise.

Es gilt: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%$ (1σ -Umgebung um μ)

Beispiel

$$n = 100 \quad p = 0.5$$

$$\mu = 50 \quad \sigma = 5$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma} &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\% && (1\sigma\text{-Umgebung}) \\ &= P(45 \leq X \leq 55) \approx 72.87\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2\sigma} &= P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\% && (2\sigma\text{-Umgebung}) \\ &= P(40 \leq X \leq 60) \approx 96.8\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{3\sigma} &= P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\% && (3\sigma\text{-Umgebung}) \\ &= P(35 \leq X \leq 65) \approx 99.8\% \end{aligned}$$