Mathe LK Rh

Tim D.

MSS 2017-20

Inhaltsverzeichnis

I 11/1 5

1 Terme, Gleichungen, Ungleichungen 6
1.1 Pascalsches Dreieck . . . 6
1.2 pq-Formel . . . 6
1.3 abc-Formel . . . 7
1.4 Satz von Vieta . . . 7
1.5 Binomischer Lehrsatz . . . 8
1.6 Gleichungen und Ungleichungen . . . 8
1.6.1 Gleichung lösen durch Substitution . . . 8
1.7 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen . . . 9
1.7.1 Potenz- und Wurzelgesetze . . . 9
1.7.2 Logarithmengesetze . . . 10

2 Funktion - Relation - Zahlenfolge 11
2.1 Zahlenfolgen . . . 11
2.2 Monotonie, Beschränktheit . . . 13
2.3 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion . . . 15
2.3.1 Grenzwerte . . . 17
2.3.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim\limits_{x\to\infty}$; $\lim\limits_{x\to a}$ . . . 20

3 Analysis 23
3.1 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit . . . 23
3.2 Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0 . . . 25
3.3 Polynomdivision . . . 27
3.4 Punktbrobe . . . 27
3.5 Mittlere Änderungsrate . . . 28
3.6 Tangentensteigung, Ableitung . . . 30
3.6.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten . . . 30
3.6.2 Ableitung . . . 31
3.7 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung . . . 32
3.8 Ableitungsfunktion . . . 35

3.9 Nullstellen . . . 40
3.9.1 Mehrfache Nullstellen . . . 41
3.10 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte . . . 45
3.11 2. Ableitungsfunktion . . . 48
3.12 Wendepunkte . . . 49
3.13 Nullstellen: Polynomdivision . . . 56
3.14 Verhalten für $x \to \pm\infty$ . . . 61
3.15 Symmetrie . . . 61
3.16 Kurvendiskussion . . . 63
3.17 Tangente und Anwendungen . . . 68
3.17.1 Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung . . . 68

II 11/2 72

3.18 Optimieren unter Nebenbedingungen . . . 73
3.19 Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . 77
3.19.1 Anwendungen des Newton-Verfahrens . . . 79
3.20 AB Kurvenuntersuchungen . . . 86
3.20.1 Ortslinie . . . 88
3.21 Wiederholung . . . 91
3.22 Sinus- und Kosinusfunktion . . . 92
3.22.1 Vielfachheit der Lösungen von (geniometrischen) Gleichungen . . . 92
3.22.2 Die allgemeine Sinusfunktion . . . 94
3.22.3 AB Die Funktionen $f\colon x \mapsto a \cdot sin(b(x-c))$ und ihre Graphen . . . 95
3.22.4 Ableitung der Sinusfunktion . . . 96
3.23 Neue Funktionen aus alten Funktionen . . . 100
3.23.1 Ableitungsregeln . . . 100
3.24 Exponentialfunktionen - Ableitung . . . 107
3.24.1 Basis $\neq e$ . . . 110
3.25 Wiederholung . . . 115
3.25.1 Sinusfunktionen und Newton-Verfahren . . . 115
3.25.2 Produktregel . . . 116
3.25.3 Quotientenregel . . . 117
3.25.4 Kurvendiskussion . . . 118
3.26 Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . 121
3.26.1 Gauß-Verfahren . . . 122
3.26.2 Matrix-Schreibweise . . . 124
3.26.3 Steckbriefaufgaben . . . 125
3.26.4 Funktionenschar . . . 128

4 **Integralrechnung** **132**
4.1 Untersumme - Obersumme . . . 133
4.1.1 Obersumme/Untersumme $\rightarrow lim \rightarrow$ Integral . . . 135
4.2 Das bestimmte Integral . . . 136
4.3 Berechnung von Integralen, Hauptsatz . . . 137
4.3.1 Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) . . . 137
4.4 Integrale lösen - Anwendung . . . 138

III 12/1 **141**
4.5 Stammfunktion bilden, integrieren . . . 142
4.6 bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral . . . 142
4.6.1 Integralfunktion . . . 144
4.7 Rechenregeln für Integrale . . . 144
4.8 Ableitung der Umkehrfunktion . . . 147
4.9 Integral und Flächeninhalt . . . 149
4.9.1 Flächeninhalt, uneigentliche Integrale . . . 151
4.10 Integration von Produkten: partielle Integration . . . 155
4.11 Integration durch Substitution . . . 158
4.11.1 Wiederholung . . . 162
4.12 Rotationskörper . . . 164
4.12.1 Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern . . . 164

5 **Analytische Geometrie** **168**
5.1 Punkte und Vektoren . . . 168
5.1.1 Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem . . . 168
5.2 Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren . . . 170
5.2.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl . . . 170
5.2.2 Vektorzüge und Linearkombinationen . . . 175
5.3 Geraden in $\mathbb{R}^3$ . . . 178
5.3.1 Kollinearität . . . 183
5.3.2 Lage zweier Geraden . . . 183
5.3.3 Parameterpunkte und -geraden . . . 188
5.4 Abstand zweier Punkte, Vektorlänge, Streckenlänge . . . 189
5.4.1 Einheitsvektor . . . 191
5.5 Produkte zweier Vektoren . . . 194
5.5.1 Skalarprodukt . . . 194
5.6 Vektorräume . . . 203
5.6.1 Basis . . . 205
5.7 Lineare Abhängigkeit, Unabhängigkeit . . . 207

5.8 Wiederholung: Geometrie, Geraden 210
5.9 Parametergleichung einer Ebene 212
5.10 Sonderfälle 214

Teil I

11/1

Kapitel 1

Terme, Gleichungen, Ungleichungen

1.1 Pascalsches Dreieck

$n=0$:									1								
$n=1$:								1		1							
$n=2$:							1		2		1						
$n=3$:						1		3		3		1					
$n=4$:					1		4		6		4		1				
$n=5$:				1		5		10		10		5		1			
$n=6$:			1		6		15		20		15		6		1		
$n=7$:		1		7		21		35		35		21		7		1	
$n=8$:	1		8		28		56		70		56		28		8		1

1.2 pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

1.3 abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4 Satz von Vieta

$$0 = x^2 + px + q$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{(\frac{p}{2})^2 - q}_{\text{Diskriminante*}}}$$

*Diskriminante:
$> 0 \quad \Rightarrow$ zwei Lösungen
$= 0 \quad \Rightarrow$ eine Lösung
$< 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots} - \frac{p}{2} - \sqrt{\cdots} = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots})(-\frac{p}{2} - \sqrt{\cdots}) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$0 = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Beispiel

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = \frac{1}{9}(x^2 \underbrace{-6}_{x_1+x_2} x \underbrace{-72}_{x_1 \cdot x_2})$$
$$x_1 = 12; \ x_2 = -6$$
$$0 = \frac{1}{9}\underbrace{(x - 12)(x + 6)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

1.5 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Beispiele

$n = 2$

$$(a+b)^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^{2}}_{\text{Drei Summanden: k = 0; k = 1; k = 2}} \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k$$

$$= \underbrace{\binom{5}{0} a^2}_{\text{k = 0}} + \underbrace{\binom{5}{1} ab}_{\text{k = 1}} + \underbrace{\binom{5}{2} b^2}_{\text{k = 2}}$$

$$= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$n = 5$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} \cdot b^k$$

$$= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Binominialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.6 Gleichungen und Ungleichungen

1.6.1 Gleichung lösen durch Substitution

Beispiel $0 = 2x^4 - 3x^2 - 5$
Lösungsmenge der Gleichung = Menge der Nullstellen (Schnitte mit der x-Achse) der Funktion mit gleichem Funktionsterm

substituiere $x^2 = t$

$0 = 2t^2 - 3t - 5$

$t_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \dfrac{3 \pm 7}{4}$

$t_1 = 2.5, \quad t_2 = -1$

resubstituiere

$t_1 = x^2 = 2.5 \qquad |\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{2.5};\ x_2 = -\sqrt{2.5}$

$t_2 = x^2 = -1 \qquad |\sqrt{}$

keine Lösung

$L = \{\sqrt{2.5}; -\sqrt{2.5}\}$

1.7 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

1.7.1 Potenz- und Wurzelgesetze

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$

$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$

$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$

1.7.2 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = \log_a(x) \cdot y$$
$$a^x = 10^{\log(a) \cdot x}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Kapitel 2

Funktion - Relation - Zahlenfolge

Eine Funktion ist eine Zuordnung (Zahlen $x \rightarrow$ Zahlen y), die jeder Zahl x der Definitionsmenge genau eine Zahl y der Wertemenge zuordnet.

Darstellung:

- Funktionsgleichung, z. B. $f(x) = y = \underbrace{2x^2 + 5}_{\text{Funktionsterm}}$
- Graph
- Wertetabelle

Eine Relation ist eine allgemeine Zuordnung von x zu y,
z. B. $x = 3$ (senkrechte Gerade), $x^2y = y^2 + x^3$

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit $x \in \mathbb{N}$

2.1 Zahlenfolgen

Definitionsmenge $D = \mathbb{N}_0$
Wertemenge $W = \mathbb{R}$
$a_n = y = \ldots \leftarrow Funktionsterm$
Angabe eines Funktionsterms für alle Zahlen nennt man explizite Darstellung der Zahlenfolge.

$$a_n = (\frac{1}{2})^n$$
$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad \ldots; \quad a_{100} = 2^{-100}$$

Berechnung der Folgezahlen Schritt für Schritt nennt man implizite Darsteluung der Zahlenfolge. (Rekursion)

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$$
$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$$

16/1

a

$$a_n = \frac{2n}{5}$$
$$a_1 = \frac{2}{5};\ a_2 = \frac{4}{5};\ a_3 = 1\frac{1}{5};\ a_4 = 1\frac{2}{5};\ a_5 = 2;$$
$$a_6 = 2\frac{2}{5};\ a_7 = 2\frac{4}{5};\ a_8 = 3\frac{1}{5};\ a_9 = 3\frac{3}{5};\ a_{10} = 4$$

d

$$a_n = (\frac{1}{2})^n$$
$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = 1\frac{1}{8};\ a_4 = \frac{1}{16};\ a_5 = \frac{1}{32};$$
$$a_6 = \frac{1}{64};\ a_7 = \frac{1}{128};\ a_8 = \frac{1}{256};\ a_9 = \frac{1}{512};\ a_{10} = \frac{1}{1024}$$

f

$$a_n = \sin(\frac{\pi}{2}n)$$
$$a_1 = 1;\ a_2 = 0;\ a_3 = -1;\ a_4 = 0;\ a_5 = 1;$$
$$a_6 = 0;\ a_7 = -1;\ a_8 = 0;\ a_9 = 1;\ a_{10} = 0$$

16/2

a

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 + a_n \\
&a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 5;\ a_4 = 7;\ a_5 = 9; \\
&a_6 = 11;\ a_7 = 13;\ a_8 = 15;\ a_9 = 17;\ a_{10} = 19 \\
&a_n = 2n - 1
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n \\
&a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 4;\ a_4 = 8;\ a_5 = 16; \\
&a_6 = 32;\ a_7 = 64;\ a_8 = 128;\ a_9 = 512;\ a_{10} = 1024 \\
&a_n = 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \text{(Fibonacci)} \\
&a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3; \\
&a_6 = 5;\ a_7 = 8;\ a_8 = 13;\ a_9 = 21;\ a_{10} = 34 \\
&a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}
\end{aligned}
$$

2.2 Monotonie, Beschränktheit

16/5

$$a_n = 200000€ \cdot 0.98^n$$

16/7

a

$$
\begin{aligned}
&V_0 = 1^3 = 1 \\
&V_1 = V_0 + \frac{1}{8}V_0 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \\
&V_2 = V_1 + \frac{1}{8}(\frac{1}{8}V_0) = \frac{9}{8} + \frac{1}{64} = \frac{73}{64} \\
&V_3 = V_2 + \frac{1}{8}(\frac{1}{8}(\frac{1}{8}V_0)) = \frac{73}{64} + \frac{1}{512} = \frac{585}{512}
\end{aligned}
$$

b

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} 8^{-k}$$

Streng monoton fallende Zahlenfolge
z. B. a_n von 16/5 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n < a_{n-1}$
Streng monoton steigende Zahlenfolge
z. B. V_n von 16/7 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n > a_{n-1}$
Ohne „streng“entsprechend $\leqslant$ bzw. $\geqslant$

18/1

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$
$$a_1 = 2;\ a_2 = 1\frac{1}{2};\ a_3 = 1\frac{1}{3};\ a_4 = 1\frac{1}{4};\ a_5 = 1\frac{1}{5}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt (2); nach unten beschränkt (1)

b

$$a_n = (\frac{3}{4})^n$$
$$a_1 = \frac{3}{4};\ a_2 = \frac{9}{16};\ a_3 = \frac{27}{64};\ a_4 = \frac{81}{256};\ a_5 = \frac{243}{1024}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt $(\frac{3}{4})$; nach unten beschränkt (0)

c

$$a_n = (-1)^n$$
$$a_1 = -1;\ a_2 = 1;\ a_3 = -1;\ a_4 = 1;\ a_5 = -1$$

nicht monoton
nach oben beschränkt (1); nach unten beschränkt (-1)

d

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$
$$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{2}{3};\ a_4 = \frac{5}{4};\ a_5 = \frac{4}{5}$$

nicht monoton
nach oben beschränkt $(\frac{3}{2})$; nach unten beschränkt (0)

e

$$a_n = \frac{8n}{n^2+1}$$
$$a_1 = 4;\ a_2 = \frac{16}{5};\ a_3 = \frac{12}{5};\ a_4 = \frac{32}{17};\ a_5 = \frac{20}{13}$$

streng monoton fallend
nach oben beschränkt (4); nach unten beschränkt (0)

	a_n	n	$(-1)^n \cdot n$	$(-1)^n : n$	$1 + 1 : n$
	↑ beschränkt	✗	✗	✓	✓
18/2	↓ beschränkt	✓	✗	✓	✓
	beschränkt	✗	✗	✓	✓
	monoton	✓	✗	✗	✓

2.3 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion

Der Grenzwert g ist eine reelle Zahl, der sich die Folgenwerte (Funktionswerte) annähern, sodass die Folgenwerte (Funktionswerte) vom Grenzwert praktisch nicht mehr unterschieden werden können.
z. B.

$$a_n = n^{-1}$$
$$a_n = \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n}$$

a_n hat den Grenzwert $g = 0$, da a_n auch streng monoton fallend ist, ist $s = 0$ die größte untere Schranke (=„Infimum“).

Vorgehen
Ich gebe eine Genauigkeitsschranke, z. B. $\epsilon = 10^{-3}$ vor (kleine positive Zahl). Zu ϵ finde ich ein $n_\epsilon = 1001$. Alle Folgenwerte mit $n \geqslant n_\epsilon = 1001$ (also $a_{1001},\ a_{1002},\ \ldots$) liegen näher beim Grenzwert $g = 0$ als $\epsilon = 10^{-3}$ angibt. Finde ich zu jeder möglichen Genauigkeitsschranke ϵ solch ein n_ϵ, so ist g der Grenzwert. Ist diese Bedingung erfüllt, so notiert man
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ hier: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} = 0$

22/2 (Abweichung $< \epsilon = 0.1$)

a

$$a_n = \frac{1+n}{n}$$
$$|\frac{1+n}{n} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 10$$

b

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$$
$$|\frac{n^2-1}{n^2} - 1| < 0.1$$
$$\epsilon > \sqrt{10} \approx 3.162 \quad \text{(ab 4)}$$

c

$$a_n = 1 - \frac{100}{n}$$
$$|1 - \frac{100}{n} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 1000$$

d

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}$$
$$|\frac{n-1}{n+2} - 1| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 28$$

e

$$a_n = \frac{2n^2-3}{3n^2}$$
$$|\frac{2n^2-3}{3n^2} - 1| < 0.1$$
$\rightarrow$ keine Lösung

zu e

$$|\frac{2n^2-3}{3n^2}-1|<0.1$$
$$1-\frac{2n^2-3}{3n^2}<0.1 \qquad |-0.1+\frac{2n^2-3}{3n^2}$$
$$0.9<\frac{2n^2-3}{3n^2} \qquad |\cdot 3n^2$$
$$2.7n^2<2n^2-3 \qquad |-2n^2$$
$$0.7n^2<-3 \qquad |\div 0.7$$
$$n^2<-\frac{30}{7} \qquad |\sqrt{}$$
$$n<\sqrt{-\frac{30}{7}} \quad \text{und} \quad n<-\sqrt{-\frac{30}{7}}$$
$\Rightarrow$ nicht lösbar

2.3.1 Grenzwerte

Eine Zahlenfolge mit Grenzwert ist eine konvergente Folge. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert ist eine divergente Folge. Eine Nullfolge hat den Grenzwert $g=0$.
$a_n=\frac{n}{n+1} \quad g=1 \quad \rightarrow \quad a_n^*=\frac{n}{n+1}-1 \quad g=0$ (Nullfolge)

22/4

a

$$|(\frac{3n-2}{n+2})-3|<\epsilon$$
$$|\frac{-8}{n+2}|<\epsilon \qquad |x^{-1}$$
$$\frac{n+2}{8}>\frac{1}{\epsilon} \qquad |\cdot 8$$
$$n+2>\frac{8}{\epsilon} \qquad |-2$$
$$n>\frac{8}{\epsilon}-2$$

b

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{n^2+n}{5n^2}) - 0.2| < \epsilon \\
&\frac{n}{5n^2} < \epsilon \qquad | \cdot 5 \\
&n^{-1} < 5\epsilon \qquad |x^{-1} \\
&n > \frac{1}{5\epsilon}
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}) - 2| < \epsilon \\
&|\frac{-2}{2^n+1}| < \epsilon \qquad | \div 2;\ x^{-1} \\
&2^n + 1 > \frac{2}{\epsilon} \qquad | - 1 \\
&2^n > \frac{2}{\epsilon} - 1 \qquad | \log;\ \div \log(2) \\
&n > \frac{\log(\frac{2}{\epsilon} - 1)}{\log(2)}
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&|(\frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1}}) - \frac{3}{2}| < \epsilon \\
&|\frac{3 \cdot 2^n + 2 - 3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}| < \epsilon \\
&\frac{2}{2[n+1]} < \epsilon \\
&\frac{1}{2^n} < \epsilon \qquad |x^{-1} \\
&2^n > \frac{1}{\epsilon} \qquad | \log\ \div \log(2) \\
&n > \frac{-\log(\epsilon)}{\log(2)}
\end{aligned}
$$

24/2

a

$$a_n = \frac{1+2n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{1}{n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

b

$$a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10} = \frac{7+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^3}} = \frac{7+0}{1-0} = 7$$

f

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} = (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}) \div (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}) = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

g

$$a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} = (\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1})^4$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}))^4 = (\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1})^4 = (\frac{0-1}{0+1})^4 = 1$$

24/3

a

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

b

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{0.5}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 0.5} = \frac{1-0}{0.5} = 2$$

c

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{1+4^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4^n}}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

d

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^{n+1}}{2^n+3^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}-1}{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}+1}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^{n+1}}{2\cdot 3^n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{(\frac{2}{3})^n+3}{2}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n + \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

2.3.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim\limits_{x\to\infty}$; $\lim\limits_{x\to a}$

$f(x) = y = \frac{3x^2-3}{(x+1)(x-4)}$ D $= \mathbb{R}\backslash\{\underbrace{-1;4}_{\text{Nullstellen des Nenners}}\}$

$x = -1 \rightarrow$ Nullstelle des Zählers und Nenners
$x = 4 \rightarrow$ Nullstelle des Nenners

$$f(x) = y = \frac{3(x^2-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-3}{x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-3}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\cdots = \lim_{x\to-\infty}\cdots = \lim_{x\to-\infty}\cdots = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} \neq \lim_{x\to-\infty}$$

Beispiel $f(x) = 2^x$

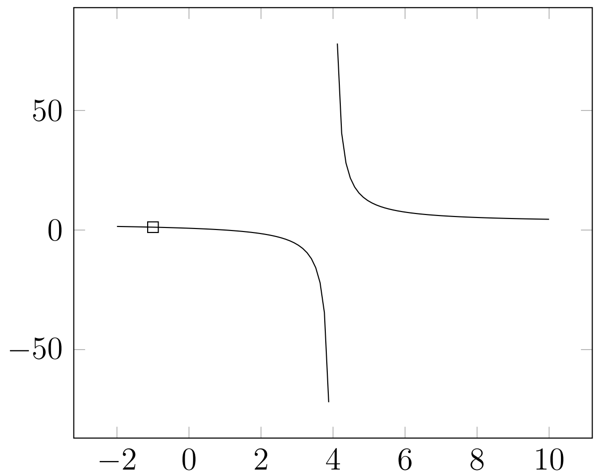
$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty; \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x-3}{x-4} = \frac{3(-1)-3}{-1-4} = \frac{-6}{-5} = 1.2$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x-3}{x-4} = ?$$

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	-87	-897	-8997	93	903	9003

$$\lim_{x\nearrow 4} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\searrow 4} f(x) = +\infty$$



$x = 4 \rightarrow$ Unendlichkeitsstelle, ein Pol mit Vorzeichenwechsel
Der Punkt $(-1|1.2)$ gehört nicht zum Graphen. Es ergibt sich ein Loch im Graphen.

28/6

a

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	1	1	1	1

b

$$f(x) = \frac{x^3}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	-0.01	-0.0001	0.0001	0.01

c

$$f(x) = \frac{x}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	100	10000	10000	100

d

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2^0}{3^0} = 1$$

e

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2^0 - 1}{3^0} = 0$$

Kapitel 3

Analysis

3.1 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit

$$D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < -5 \\ x^2 + 10 & \text{für } -5 \leqslant x < 1 \\ -x & \text{für } x \geqslant 1 \end{cases}$$

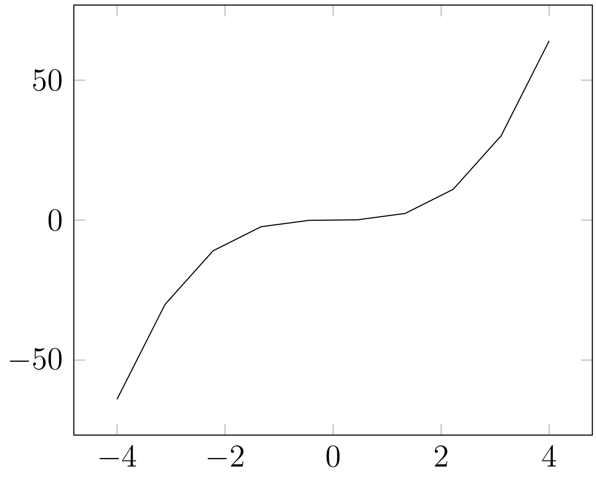
Abschnittsweise definierte Funktionen → Für verschiedene Abschnitte der Zahlengeraden von $\mathbb{R}$ sollen unterschiedliche Funktionsterme gelten.

Einschub: Ganzrationale Funktionen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
z. B. $f(x) = 3x^4 + 5x - 7$
$n = 4$ (Grad $n \in \mathbb{N}$)
$a_4 = 4$
$a_3 = a_2 = 0$
$a_1 = 5$
$a_0 = -7$
Grad der ganzrationalen Funktion ist die höchste Potenz, bspw. 4
Funktionsterm = Polynom

Die Stetigkeit einer Funktion beschreibt die Tatsache, ob man den Graph der Funktion ohne abzusetzen zeichnen kann.

Beispiel: $f(x) = x^3$



$f(x)$ ist überall stetig

Allgemein gilt:
Ganzrationale Funktionen sind überall, d. h. $-\infty < x < \infty$, stetig.

Untersuche $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$x_1 = -5;\ x_2 = 1$

$\lim\limits_{x \nearrow -5} f(x) = -10$

$\lim\limits_{x \searrow -5} f(x) = -35$

$\Rightarrow$ unterschiedliche Grenzwerte bedeuten $f(x)$ ist bei $x = -5$ unstetig

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 11$

$\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = -1$

$\Rightarrow$ unstetig bei $x = 11$

28/9

a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqslant 3 \\ 12 - x & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = 3^2 = 9$

$\lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = 12 - 3 = 9$

$\Rightarrow$ stetig

b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{für } x \leqslant -1 \\ 2^x - 3 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$

$\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = 2^{-1} - 3 = -2.5$

$\Rightarrow$ unstetig

28/11

-

$f(x) = sin(\frac{1}{x}) \qquad D_f = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \sin(\infty) = -1$ bis $+1 \quad \Rightarrow$ kein Grenzwert

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \sin(0) = 0$

3.2 Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0

Eine Funktion ist stetig bei $x = x_0$, wenn Folgendes gilt:
$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$

29/4

a $a_n = \frac{n^2-7n-1}{10n^2-7n} \quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{10}$

b $a_n = \frac{n^3-3n^2+3n-1}{5n^3-8n+5} \quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{5}$

f $a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

g $a_n = \frac{3^n+1}{5^n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

29/5

a $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+100} - \sqrt{n}) = 0$

b $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+10} - \sqrt{n})) = 5$

c $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n} - 2n) = \frac{3}{4}$

30/10

a $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0$

b $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{8}$

30/11

a

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = x-1 = 0$$

c

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1} = x^1+1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1;-1\}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1^2+1 = 2$$
$$\lim_{x\to -1} f(x) = (-1)^2+1 = 2$$

29/6 $a_n = 0.95^n$

a $a_5 = 0.95^5 = 0.77$

b $0.5 = 0.95^n \Rightarrow n = \frac{\log(0.5)}{\log(0.95)} \approx 13.5 \quad n = 13$

c

$$s(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_k$$
$$s(5) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$
$$= 1 + 1.9 + 1.805 + 1.71475 + 1.6290125 = 8.0487625$$

3.3 Polynomdivision

30/11

d

$$f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$
$$(x^6 - 1) \div (x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^6 \qquad\qquad\quad -1\big) \div \big(x^2 - 1\big) = x^4 + x^2 + 1 \\
\underline{\;-x^6 + x^4\;} \\
\qquad\quad x^4 \\
\qquad \underline{\;-x^4 + x^2\;} \\
\qquad\qquad\quad x^2 - 1 \\
\qquad\qquad \underline{\;-x^2 + 1\;} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$
$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$$

3.4 Punktbrobe

(erfüllt ein Punkt eine Gleichung)
z. B. $P(2|3)$
$f(x) = y = 2x^2 - 5x + 3$
Setze für x die Zahl 2 ein
$f(x) = 8 - 10 + 3 = 1 \neq 3$
$\Rightarrow P$ gehört nicht zum Graphen von f

38/4

a Höhenmeter: 250m
Streckenkilometer: 10km

b Gesamtanstieg: 750m

c Bei Streckenkilometer 25: Achsensymmetrie zur y-Achse

39/7

a 1.8m

b $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 7.42\}$

c $f(2.5) = 2.425$

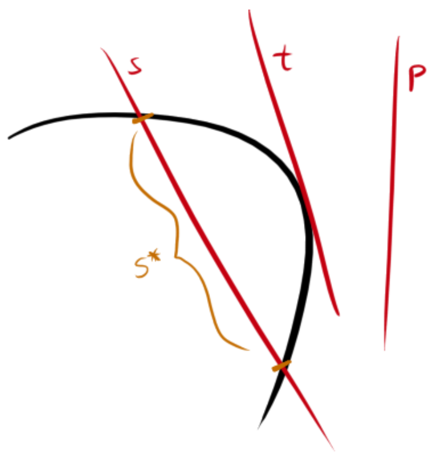
39/11

a $f(x) = 1.9879 \cdot 10^{-4} + 86$

b $f(-995.5) = f(995.5) = 283$
$f(0) = 86$

c $D = \{x \in \mathbb{R} | -995.5 \leqslant x \leqslant 995.5\}$

3.5 Mittlere Änderungsrate



Eine **Sekante s** ist eine Gerade, die eine Kurve in 2 (oder mehr) Punkten schneidet.
Eine **Sehne s***, Teil einer Sekante, ist eine Strecke, die zwei Kurvenpunkte verbindet.
Eine **Tangente t** ist eine Gerade, die die Kurve in einem Punkt berührt.
Eine **Passante p** ist eine Gerade, die die Kurve nicht schneidet.

$P(1|3) \qquad Q(10|8)$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5}{9}$ (Steigung der Sekante durch P und Q)

Die Sekantensteigung m heißt mittlere Änderungsrate der Funktion f zwischen den Punkten P und Q.

$P(1|3)\ f(1) = 3$

$Q(10|8)\ f(10) = 8$

$x_1 = 1;\ x_2 = 10 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = h = 9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Differenzenquotient}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Beispielrechnung $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$x_1 = 2;\ x_2 = 10$

$h = x_2 - x_1 = 8$

$m = \dfrac{f(10) - f(2)}{8} = \dfrac{175 - 7}{8} = 21$

41/2

t [d]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h [mm]	0	0	0	0	1	2	4	6	7

a $m = \frac{h(9)-h(1)}{8} = \frac{7}{8}$

b $m = \frac{h(3)-h(1)}{2} = 0$

d $m = \frac{h(6)-h(4)}{2} = 1$

c $m = \frac{h(9)-h(7)}{2} = \frac{3}{2}$

41/1 $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

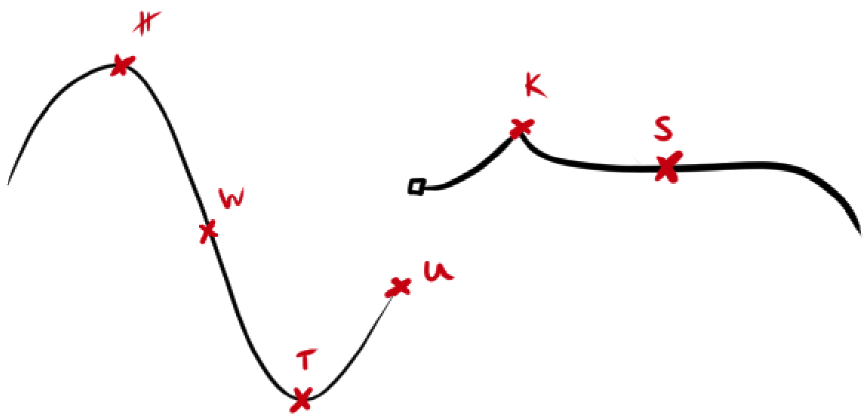
a $m = \frac{f(1)-f(0.1)}{0.9} = -10$

b $m = \frac{f(12)-f(2)}{10} = -\frac{1}{24}$

c $m = \frac{f(0.02)-f(0.01)}{0.01} = -5000$

d $m = \frac{f(1000)-f(100)}{900} = -100000^{-1}$

3.6 Tangentensteigung, Ableitung



H Hochpunkt (waagerechte Tangente)

W Wendepunkt (maximale/minimale Steigung)

T Tiefpunkt (waagerechte Tangente)

U Unstetigkeit (keine Tangentensteigung)

K Knickstelle (keine Tangentensteigung)

S Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

3.6.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

$$f(x) = y = x^2 \quad x_0 = 2$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \quad \text{(Sekante)}$$

$$m = \lim_{h \to 0}(4 + h) = 4 \quad \text{(Tangente)}$$

3.6.2 Ableitung

$$f(x) = 2x^3 \quad x_0 = 4$$
$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \frac{2(4+h)^3 - 2 \cdot 4^3}{h}$$
$$= \frac{128 + 96h + 24h^2 + 2h^3 - 128}{h}$$
$$= 96 + 24h + 2h^2$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(6|f(6)) \Rightarrow h = 2$
$m = 96 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 152$
Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(-1|f(-1)) \Rightarrow h = -5$
$m = 96 + 24 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5)^2 = 26$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $h \to 0$.
$m_{\text{Tangente}} = \lim\limits_{h\to 0} m_{\text{Sekante}} = \lim\limits_{h\to 0} 96 + 24h + 2h^2 = 96$
Die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3$ bei $x = 4$ ist 96.
$f'(4) = 96$ (Tangentensteigung)
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

46/6

a 10.15 Uhr: $m = \frac{500m}{15min} = 33.\overline{3}\frac{m}{min}$

10.45 Uhr: $m = \frac{-500m}{15min} = -33.\overline{3}\frac{m}{min}$

11.15 Uhr: $m = \frac{-1000m}{15min} = -66.\overline{6}\frac{m}{min}$

b am größten: ~10.05 Uhr
am kleinsten: ~11.20 Uhr

48/3

a $x_0 = 4$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = 8$

b $x_0 = 3$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{-2(3+h)^2-(-2)\cdot 3^2}{h} = -12$

e $x_0 = -1$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(-1+h)^{-1}-(-1)^{-1}}{h} = -1$

h $x_0 = 3$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(-3+h+2)-(-3+2)}{h} = -1$

i $x_0 = 7$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{4-4}{h} = 0$

3.7 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung

$f(x) = 5x^3 \qquad P_1(2|f(2)) \quad P_2(4|f(4))$

Sekantengleichung

$$y = m \cdot x + b$$
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4-2} = \frac{320-40}{2} = 140$$
$$b = -m \cdot x + y = -140 \cdot 2 + 40 = -240$$
$$s(x) = 140x - 240$$

Tangentengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(2+h)^3 - 40}{h} = 60$$
$$b = -m \cdot x + y = -60 \cdot 2 + 40 = -80$$
$$t(x) = 60x - 80$$

Normalengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$
$$m_n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -(\frac{\Delta y}{\Delta x})^{-1} = \frac{-1}{m_t}$$
$$m_n \cdot m_t = -1$$
$$m_t = 60$$
$$m_n = -\frac{1}{60}$$
$$b = -m \cdot x + y = 40\frac{1}{30}$$
$$n(x) = -\frac{1}{60}x + 40\frac{1}{30}$$

Zwei Geraden mit m_1 und m_2 sind orthogonal, wenn gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$

49/14

a

$$f(x) = 0.5x^2 \qquad P(1|f(1) = 0.5)$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}(1 + \frac{1}{2}h) = 1$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = -\frac{1}{2}$$
$$y_t = x - \frac{1}{2}$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -1$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = 1.5$$
$$y_n = -x + 1.5$$

b

$$f(x) = 2x^2 - 4 \qquad P(-2|f(-2) = 4)$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{2(-2+h)^2 - 4 - 4}{h} = -8$$
$$b_t = -m_t \cdot x + y = -12$$
$$y_t = -8x - 12$$
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{8}$$
$$b_n = -m_n \cdot x + y = 4\frac{1}{4}$$
$$y_n = \frac{1}{8}x + 4\frac{1}{4}$$

c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sqrt{x} \qquad P(0.5|f(0.5) = \sqrt{0.5}) \\
&m_t = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0.5+h} - \sqrt{0.5}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&b_t = -m_t \cdot x + y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&y_t = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \\
&b_n = -m_n \cdot x + y = \sqrt{2} \\
&y_n = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x + \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -x^3 + 2 \qquad P(2|f(2) = -6) \\
&m_t = \lim_{h \to 0} \frac{-(2+h)^3 + 2 + 6}{h} = -12 \\
&b_t = -m_t \cdot x + y = 18 \\
&y_t = -12x + 18 \\
&m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{12} \\
&b_n = -m_n \cdot x + y = -6\frac{1}{6} \\
&y_n = \frac{1}{12} x - 6\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

49/13 $f(x) = -\frac{1}{x}$

a

$$
\begin{aligned}
&P(-1|f(-1) = 1) \\
&m_t = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{-1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h + h^2} = 1 \\
&\alpha = atan(m_t) = 45^\circ
\end{aligned}
$$

b

$$P(2|f(2) = -\frac{1}{2})$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{2h+h^2} = \frac{1}{4}$$
$$\alpha = atan(m_t) = 14.04^\circ$$

c

$$P(0.1|f(0.1) = -10)$$
$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{0.1+h} + 10}{h} = 100$$
$$\alpha = atan(m_t) = 89.43^\circ$$

49/12c

$$f(x) = -3\sqrt{x} \qquad x_0 = 8$$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{-3\sqrt{8+h} - (-3\sqrt{8})}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-\sqrt{72+9h} + \sqrt{72})(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}{h(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9}{-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72}}$$
$$= \frac{9}{-2\sqrt{72}} = \frac{3}{-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{32}}$$

3.8 Ableitungsfunktion

Die Ableitung von $f(x)$ bei x_0 ist eine lokale Eigenschaft der Funktion $f(x)$, also einer Stelle x_0. Allerdings sind unsere Funktionen fast überall differenzierbar. Ausnahmen sind Unstetigkeitsstellen und Knickstellen. Es gibt eine Funktion $f'(x) = m_t(x)$ für alle Stellen x. Sie heißt Ableitungsfunktion.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

z. B. $f(x) = x^4$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4x^2 + h^3$$
$$= 4x^3$$

z. B. $f'(5) = 500$

$g(x) = x^2$
$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$
$h(x) = x^3$
$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$
$i(x) = a \cdot x^2$
$$i'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + 2xh + ah^2 - ax^2}{h} = 2ax$$
$j(x) = \sqrt{x}$
$$j'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$k(x) = \frac{1}{x^2}$
$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^{-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^{-1} - x^{-1}}{h} = -2x^-3$$

$$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

54/2

a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

b

$$f(x) = \frac{a}{x} + c$$
$$f'(x) = -ax^{-2}$$

c

$$f(x) = x^{c+1}$$
$$f'(x) = (c+1)x^c$$

d

$$f(x) = t^2 + 3t$$
$$f'(x) = 2t + 3$$

e

$$f(x) = x - t$$
$$f'(x) = 1$$

f

$$f(t) = x - t$$
$$f'(t) = -1$$

55/7

c

$$f(x) = 3x^2 + 3$$
$$f'(x) = 6x$$
$$P(0.5|f(0.5) = 3.75)$$
$$m = f'(0.5) = 3$$
$$b = -m \cdot x + y = 2.25$$
$$y = 3x + 2.25$$

d

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -x^3 + 2\\
&f'(x) = -3x^2\\
&P(2|f(2) = -6)\\
&m = f'(2) = -12\\
&b = -m \cdot x + y = 18\\
&y = -12x + 18
\end{aligned}
$$

59/6 $g(x) = 10 - 3x \Rightarrow m = -3$

c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -\frac{1}{100}x^3\\
&f'(x) = -\frac{3}{100}x^2\\
&-3 = -\frac{3}{100}x^2\\
&x = 10\\
&P(10|f(10) = -20)
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&f(x) = bx^3 + c\\
&f'(x) = 3bx^2\\
&-3 = 3bx^2\\
&x = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}}\\
&P(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}|f(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}) = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} + c) \qquad b < 0
\end{aligned}
$$

60/12

$$
H(t) = \begin{cases} 3.2 & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 3.2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 \leqslant t \leqslant 1.8 \\ 0 & \text{für } 1.8 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}
$$

a

$$
\begin{aligned}
&H'(0.5) = 0\\
&H'(1.5) = -10t + 10 = -5\\
&H'(2.5) = 0
\end{aligned}
$$

b

$$H'(1) = 0 = -10t + 10$$
$$H'(1.8) = -10t + 10 = -8 \neq H'(1.8) = 0$$

67/3

a

$$x^5 - 20x^3 + 64x = 0 \qquad | \div x \Rightarrow x = 0$$
$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - 20t + 64 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{0; \pm 2; \pm 4\}$$

b

$$x^5 - 17x^3 + 16x = 0 \qquad | \div x \Rightarrow x = 0$$
$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - 17t + 16 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = 8.5 \pm \sqrt{72.25 - 16} = 8.5 \pm 7.5 \qquad |\text{resubst.}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{0; \pm 1; \pm 4\}$$

c

$$(x - \frac{2}{3})(x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1) = 0$$
$$x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
$$x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1 = 0 \qquad |t = x^2$$
$$t^2 - \frac{13}{6}t + 1 = 0 \qquad |pq$$
$$t_{1/2} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$
$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{t_{1/2}}$$
$$L = \{\frac{2}{3}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\}$$

d

$$
\begin{aligned}
&(x^3-8)(x^4-\frac{14}{3}x^2+5)=0\\
&x^3-8=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2\\
&x^4-\frac{14}{3}x^2+5=0 \qquad |t=x^2\\
&t^2-\frac{14}{3}t+5=0 \qquad |pq\\
&t_{1/2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}-5}=\frac{7}{3}\pm\frac{2}{3} \qquad |\text{resubst.}\\
&x_{1/2/3/4}=\pm\sqrt{t_1 1/2}\\
&L=\{2;\pm\sqrt{\frac{5}{3}};\pm\sqrt{3}\}
\end{aligned}
$$

3.9 Nullstellen

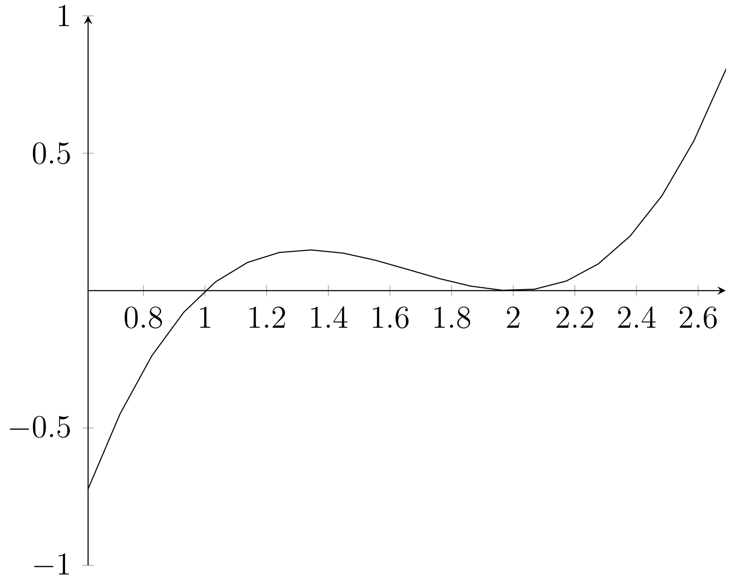
Annahme: $f(x)=0$ habe $x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=1$ als Lösungen,
$f(x)$ hat Grad 3.

$$
\begin{aligned}
&f(x)=x(x-2)(x+3)(x-1)\\
&=x^3-7x+6 \text{ für } c=1
\end{aligned}
$$

Würde ich die zusätzliche Nullstelle $x_4=4$ als Linearfaktor in die Funktionsgleichung einfügen, so hätte ich eine Funktion 4. Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion mit Grad n hat maximal n Nullstellen. Funktionen mit ungeradzahligen Graden $n=1,3,5,7$ ... haben mindestens eine Nullstelle. Solche mit geradzahligen Graden $n=2,4,6,8$ ... haben keine Mindestzahl an Nullstellen.

3.9.1 Mehrfache Nullstellen

Beispiel $f(x)$ habe $x_1 = x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ als Nullstellen (Grad 3).



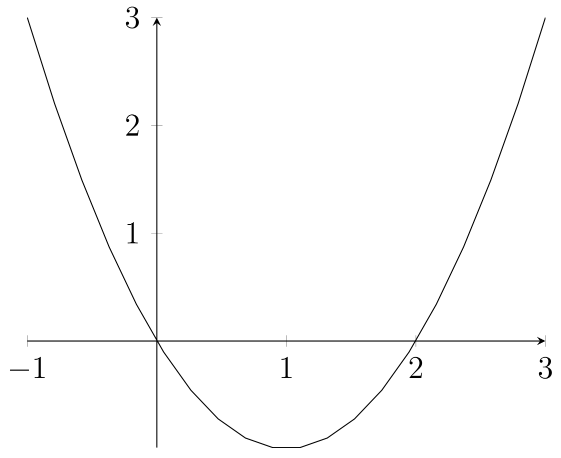
Berührpunkt bei $x = 2$, außerdem Extrempunkt.

Finde ich eine doppelte Nullstelle, so liegt gleichzeitig an der Stelle ein Extrempunkt vor. Eine dreifache Nullstelle ist zusätzlich ein Sattelpunkt mit waagerechter Tangente.

67/5

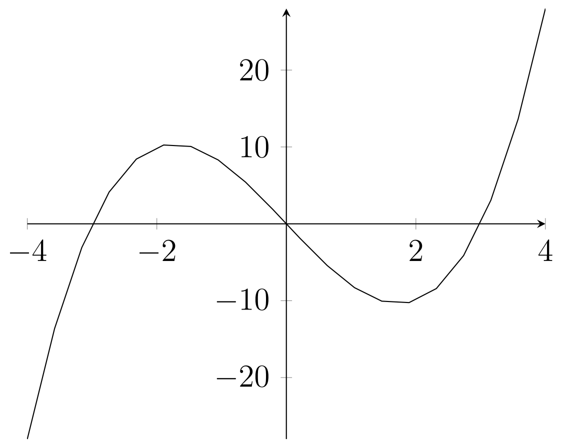
a

$$f(x) = x^2 - 2x$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{0; 2\}$$



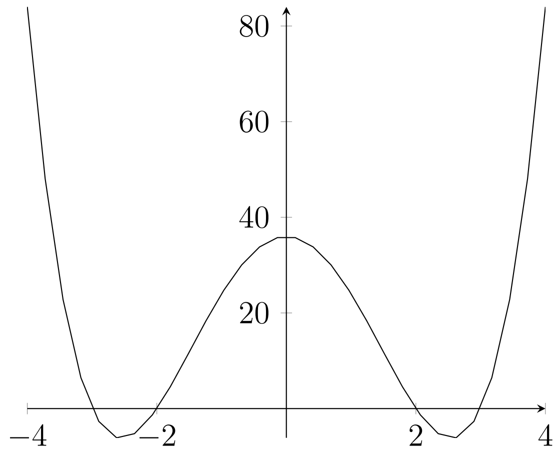
c

$$f(x) = x(x^2 - 9)$$
$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$L = \{0; \pm 3\}$$



f

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 \\
&f(0) = 36 \\
&f(x) = 0 \\
&L = \{\pm 2; \pm 3\}
\end{aligned}
$$



68/13 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a

$$
\begin{aligned}
&\text{NS}\colon 0; -4; \frac{4}{5} \\
&a = 5 \\
&f(x) = a(x-0)(x+4)(x-\frac{4}{5}) = a(x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 - 3\frac{1}{5}x) \\
&= 5x^3 + 16x^2 - 16x
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&\text{NS}\colon -\frac{1}{3}; 3; \frac{10}{3} \\
&a = 9 \\
&f(x) = a(x+\frac{1}{3})(x-3)(x-\frac{10}{3}) = a(x^3 - 6x^2 - \frac{1}{9}x + 3\frac{1}{3}) \\
&= 9x^3 - 72x^2 - x + 30
\end{aligned}
$$

c

$$\text{NS: } 0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$$
$$a = 1$$
$$f(x) = a(x-0)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = a(x^3-2x)$$
$$= x^3 - 2x$$

d

$$\text{NS: } 0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$a = 5$$
$$f(x) = a(x-0)(x+\frac{1}{\sqrt{5}})(x-\frac{1}{\sqrt{5}}) = a(x^3-\frac{1}{5}x)$$
$$= 5x^3 - x$$

68/12 $f(x) = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$

a

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$
$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 4(-0.08)\cdot 1.44}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.88}{-0.16}$$
$$(x_1 = -2) \quad x_2 = 9$$

b

$$1.44 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$
$$0 = -0.08x^2 + 0.56x$$
$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.56}{-0.16}$$
$$(x_1 = 0) \quad x_2 = 7$$

68/11

$$f(x) = ax^2 + c$$
$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$
$$f(5) = f(-5) = 1$$
$$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2$$
$$f(x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{50}$$
$$\text{Breite: } 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$$

68/15

$$s = 1000m$$
$$s(t) = 30t - 0.4t^2$$
$$v(t) = 30 - 0.8t$$

a

$$v(t) = 0 = 30 - 0.8t \Rightarrow t = 37.5$$
$$s(37.5) = 30(37.5) - 0.4(37.5)^2 = 565.5$$

b

$$s(t) = v_0 \cdot t - 0.4t^2 < 1000$$
$$v(t) = v_0 - 0.8t \Rightarrow t = \frac{v_0}{0.8}$$
$$s(t) = \frac{v_0^2}{0.8} - 0.4(\frac{v_o}{0.8})^2 = \frac{5}{8}v_0^2 < 1000$$
$$v_0 < \sqrt{1600} = 40$$

3.10 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

Hochpunkt: $f(x_H) \geqslant f(x)$ in der Nähe
Tiefpunkt: $f(x_T) \leqslant f(x)$ in der Nähe

$$f'(x_H) = f'(x_T) = f'(x_S) = 0$$

Daraus folgt ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Stellen x mit $f'(x) = 0$.

z. B. $f(x) = x^3 - 2x^2$
$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$
x_1 und x_2 sind Kandidaten für Extrema.

Umgebungsuntersuchung

für Hochpunkte gilt: $f'(x_l) > 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) < 0$
für Tiefpunkte gilt: $f'(x_l) < 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) > 0$

$$\begin{aligned}
&\text{zu}: x_1 = 0 \qquad x_l = -1 \quad x_r = 1\\
&f'(x_l) = f'(-1) = 7\\
&f'(x_1) = f'(0) = 0\\
&f'(x_r) = f'(1) = -1\\
&\Rightarrow H(0|0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{zu}: x_2 = \frac{4}{3} \qquad x_l = 1 \quad x_r = 2\\
&f'(x_l) = f'(1) = -1\\
&f'(x_1) = f'(0) = 0\\
&f'(x_r) = f'(2) = 4\\
&\Rightarrow T(\frac{4}{3}| - 1.2)
\end{aligned}$$

Sonderfall Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$$\begin{aligned}
&f'(x_l) < 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) < 0 \quad \text{oder}\\
&f'(x_l) > 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) > 0
\end{aligned}$$

73/2

e

$$\begin{aligned}
&f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4\\
&f'(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \qquad | \div x \Rightarrow x_1 = 0\\
&0 = -x^2 + 3x \qquad | \div x \Rightarrow x_2 = 0\\
&0 = -x + 3 \qquad | - 3; \cdot(-1)\\
&3 = x\\
&L = \{0; 3\}
\end{aligned}$$

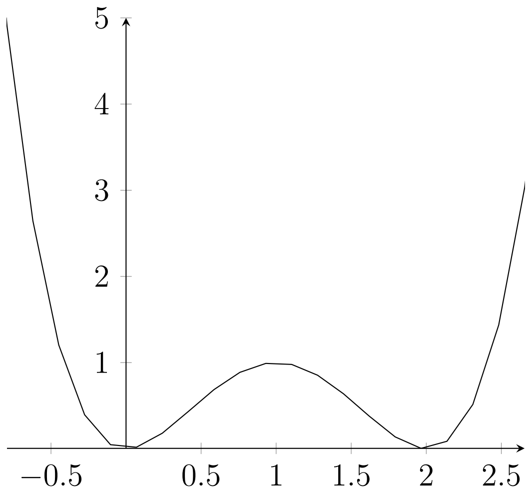
$$\begin{aligned}
&f'(-1) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt } S(0|f(0) = -4)\\
&f'(2) = 4 \quad f'(3) = 0 \quad f'(4) = -16 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(3|f(3) = 2\frac{3}{4})
\end{aligned}$$

74/6

b

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$
$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 8x \qquad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$$
$$0 = 4x^2 - 12x + 8 \qquad |abc$$
$$x_{2/3} = \frac{12 \pm 4}{8}$$
$$x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$f'(-1) = -24 \quad f'(x_1) = 0 \quad f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad \Rightarrow T(0|0)$$
$$f'(\frac{1}{2}) = 1.5 \quad f'(x_2) = 0 \quad f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad \Rightarrow H(1|1)$$
$$f'(\frac{3}{2}) = -1.5 \quad f'(x_3) = 0 \quad f'(3) = 24 \quad \Rightarrow T(2|0)$$



3.11 2. Ableitungsfunktion

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Die 2. Ableitungsfunktion $f''(x)$ beschreibt das Krümmungsverhalten der Ursprungsfunktion $f(x)$.
$f''(x) > 0$ links gekrümmt
$f''(x) < 0$ rechts gekrümmt
$f''(x) = 0$ Wendepunkt

80/1

b

$$f(x) = 2x - 3x^2$$
$$f'(x) = 2 - 6x$$
$$f''(x) = -6$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\frac{1}{3}\}$$
$$f''(\frac{1}{3}) = -6 < 0 \quad H(\frac{1}{3}|\frac{1}{3})$$

d

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$
$$f'(x) = 2 - 6x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 8$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{2}; 0\}$$
$$f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad T(\pm\sqrt{2}| - 1)$$
$$f''(0) = -8 < 0 \quad H(0|3)$$

e

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$$
$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$
$$f''(x) = 16x^3 - 20x$$
$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}\}$$
$$f''(\frac{1}{2}) = -8 < 0 \quad H(\frac{1}{2}|\frac{11}{15})$$
$$f''(-\frac{1}{2}) = 8 > 0 \quad H(-\frac{1}{2}|-\frac{11}{15})$$
$$f''(\frac{3}{2}) = 24 > 0 \quad T(\frac{3}{2}|-\frac{9}{5})$$
$$f''(-\frac{3}{2}) = -24 < 0 \quad T(-\frac{3}{2}|\frac{9}{5})$$

3.12 Wendepunkte

Wendepunkte eines Graphen sind Punkte, an denen die Krümmung wendet. Am Wendepunkt selbst ist das Krümmungsverhalten gleich 0. Außerdem sind Wendepunkte Punkte mit maximaler bzw. minimaler Steigung.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

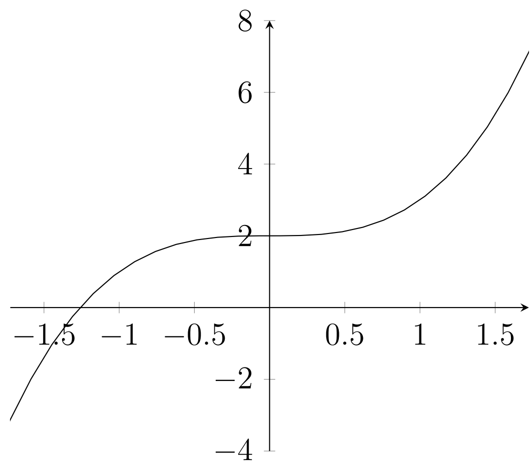
Hinreichende Bedingung (I): Umgebungsuntersuchung
$f''(x_l) > 0$ $f''(x_r) < 0$ Wechsel im Krümmungsverhalten
$\Rightarrow$ Wendepunkt $WP(x|f(x))$ (links-rechts)

Hinreichende Bedingung (II): $f'''(x) \neq 0$
für $f'''(x) < 0$ LRWP
für $f'''(x) > 0$ RLWP
für $f'''(x) = 0$ keine Entscheidung

84/1

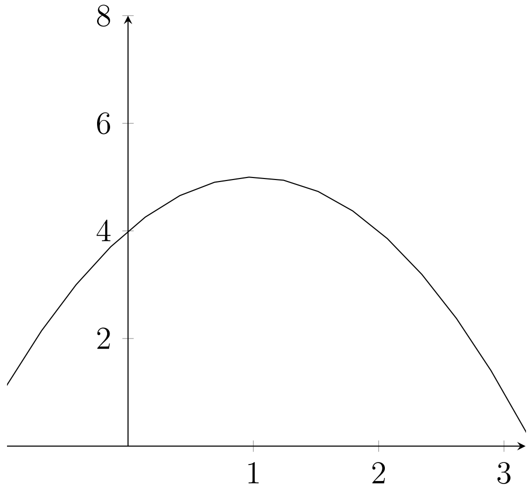
a

$$f(x) = x^3 + 2$$
$$f''(x) = 6x = 0 \quad L = \{0\}$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow RLWP(0|2)$$
rechts: $x \in \,]-\infty; 0]$
links: $x \in [0; \infty[$



b

$$f(x) = 4 + 2x - x^2$$
$$f''(x) = -2 = 0 \quad L = \{\}$$
rechts: $x \in \,]-\infty; \infty[$

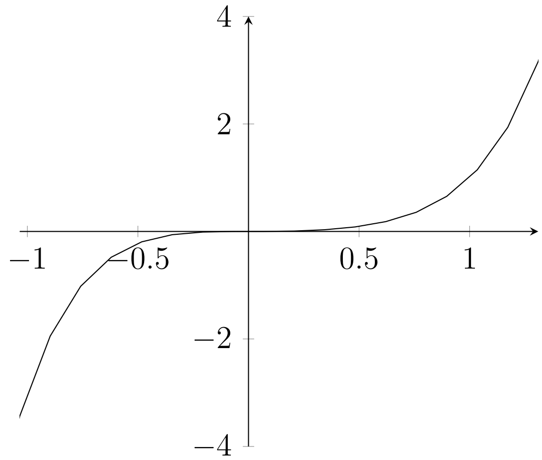


d

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3$$
$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \quad L = \{0\}$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$
$$f'''(0) = 6 \Rightarrow RLWP(0|0)$$

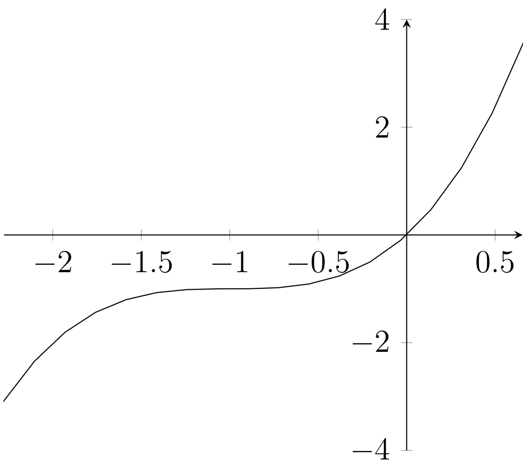
rechts: $x \in]-\infty; 0]$

links: $x \in [0; \infty[$



84/2b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x + 6$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f''(x) = 0 \quad L = \{-1\}$$
$$f'''(-1) = 6 \Rightarrow RLWP(-1|f(-1) = -1)$$
$$f'(-1) = 0 \Rightarrow Sattelpunkt$$



85/12

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$$
$$f''(x) = 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}b$$
$$f'(x) = 3(-\frac{1}{3}b)^2 + 2b(-\frac{1}{3}b) + c = -\frac{1}{3}b^2 + c = 0$$
$$\Rightarrow c = \frac{b^2}{3}$$

85/14

a

$$f_a(x) = x^3 - ax^2$$
$$f_a''(x) = 6x - 2a = 0 \quad L = \{\frac{a}{3}\}$$
$$f_a'''(x) = 6 \quad f_a'''(\frac{a}{3}) = 6 \Rightarrow RLWP(\frac{a}{3}|f_a(\frac{a}{3}))$$

b

$$f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$$
$$f_a''(x) = 12x^2 - 4a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$$
$$f_a'''(x) = 24x$$
$$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(\sqrt{\frac{a}{3}}) > 0 \Rightarrow RLWP(\sqrt{\frac{a}{3}}|f_a(\sqrt{\frac{a}{3}}))$$
$$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = 24(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < 0 \Rightarrow LRWP(-\sqrt{\frac{a}{3}}|f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}))$$

89/2

A wahr, die Steigung ist negativ, d. h. die Werte werden kleiner

B falsch, die Funktion hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt, die Steigung ist davor und danach positiv

C wahr, einen Tiefpunkt bei $x = 2$ und einen Hochpunkt bei $x = 0$

D ?, die Funktionswerte sind an der Ableitungsfunktion nicht erkennbar

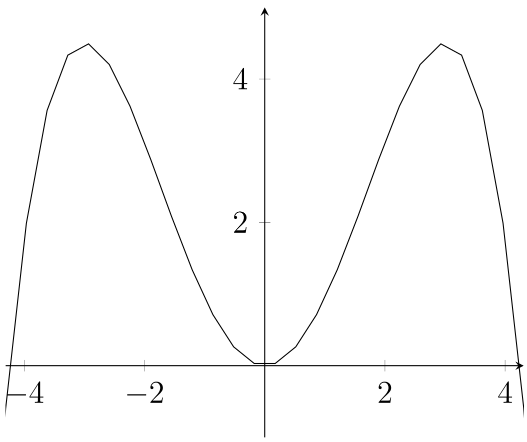
89/1

c

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^4 + x^2$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$
$$f(x) = 0 \quad L = \{0; \pm\sqrt{18}\} \Rightarrow S(0|0), S(\sqrt{18}|0), S(-\sqrt{18}|0)$$
$$f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$
$$f''(0) = 2 \Rightarrow T(0|f(0) = 0)$$
$$f''(3) = 4 \Rightarrow T(3|f(3) = \frac{9}{2})$$
$$f''(-3) = -4 \Rightarrow T(-3|f(-3) = \frac{9}{2})$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0\colon\ ]-\infty; -3], [0; 3]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0\colon\ [3; 0], [3; \infty[$

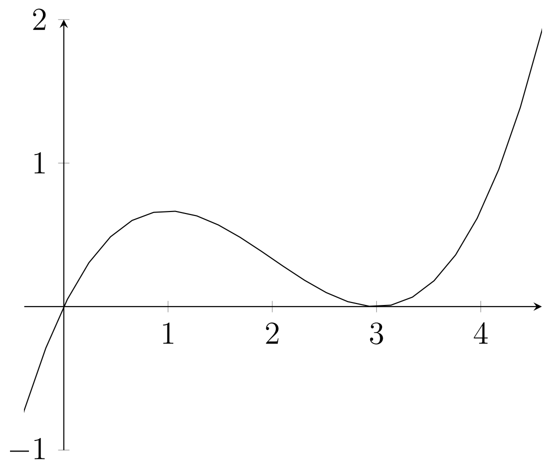


d

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$
$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x = 0 \quad L = \{0; 3\} \Rightarrow S(0|0), S(3|0)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.5 = 0 \quad L = \{1; 3\}$$
$$f''(x) = x - 2$$
$$f''(1) = -1 \Rightarrow H(1|f(1) = 0.\overline{6})$$
$$f''(3) = 1 \Rightarrow T(3|f(3) = 0)$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0\colon\ [-\infty; 1], [3; \infty]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0\colon\ [1; 3]$



f

$$f(x) = x + \frac{5}{x} \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \text{(kein Schnittpunkt mit y-Achse)}$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{\} \quad \text{(kein Schnittpunkt mit x-Achse)}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{5}\}$$

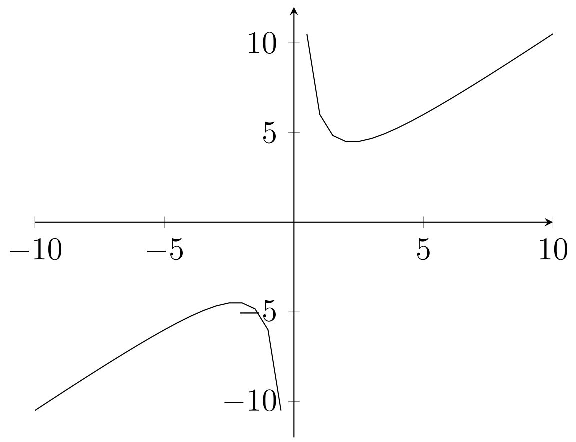
$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

$$f''(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(\sqrt{5}|f(\sqrt{5}) = \sqrt{20})$$

$$f''(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(-\sqrt{5}|f(-\sqrt{5}) = -\sqrt{20})$$

monoton steigend $f'(x) \geqslant 0\colon \left]-\infty; -\sqrt{5}\right], \left[\sqrt{5}; \infty\right]$

monoton fallend $f'(x) \leqslant 0\colon \left[-\sqrt{5}; 0\right[, \left]0; \sqrt{5}\right]$



3.13 Nullstellen: Polynomdivision

97/2

b
$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12\right) \div \left(x + 4\right) = 2x^2 - 6x + 3 \\
\underline{-2x^3 - 8x^2} \\
\quad -6x^2 - 21x \\
\quad \underline{6x^2 + 24x} \\
\qquad 3x + 12 \\
\qquad \underline{-3x - 12} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

c $\big(\quad 2x^3-7x^2 \quad -x+2\big)\div\big(2x-1\big)=x^2-3x-2$

$$\begin{array}{llll}
-2x^3 & +x^2 & & \\
\hline
& -6x^2 & -x & \\
& 6x^2 & -3x & \\
\hline
& & -4x & +2 \\
& & 4x & -2 \\
\hline
& & & 0
\end{array}$$

d $\big(\quad x^4+2x^3-4x^2-9x-2\big)\div\big(x+2\big)=x^3-4x-1$

$$\begin{array}{lllll}
-x^4 & -2x^3 & & & \\
\hline
& & -4x^2 & -9x & \\
& & 4x^2 & +8x & \\
\hline
& & & -x & -2 \\
& & & x & +2 \\
\hline
& & & & 0
\end{array}$$

98/4

a $x_1=1$

$\big(\quad x^3-6x^2+11x-6\big)\div\big(x-1\big)=x^2-5x+6$

$$\begin{array}{llll}
-x^3 & +x^2 & & \\
\hline
& -5x^2 & +11x & \\
& 5x^2 & -5x & \\
\hline
& & 6x & -6 \\
& & -6x & +6 \\
\hline
& & & 0
\end{array}$$

$$x_{2/3}=\frac{5\pm1}{2}$$

$x_2=2$

$x_3=3$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

b $x_1 = 2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 \ \ + x^2 - 4x - 4\big) \div \big(x - 2\big) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 4x \\
\qquad \underline{-\,3x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= \frac{-3 \pm 1}{2} \\
x_2 &= -2 \\
x_3 &= -1 \\
f(x) &= (x-2)(x+2)(x+1)
\end{aligned}
$$

c $x_1 = -2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ 4x^3 \qquad\quad - 13x + 6\big) \div \big(x + 2\big) = 4x^2 - 8x + 3 \\
\underline{-\,4x^3 - 8x^2} \\
\qquad\quad -\,8x^2 - 13x \\
\qquad\quad \underline{\ \ 8x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{\ -\,3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= \frac{8 \pm 4}{8} \\
x_2 &= \frac{1}{2} \\
x_3 &= \frac{3}{2} \\
f(x) &= (x+2)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})
\end{aligned}
$$

d $x_1 = 3$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^3 \quad - 8x^2 - 11x - 3\big) \div \big(x - 3\big) = 4x^2 + 4x + 1 \\
\underline{-\,4x^3 + 12x^2} \\
\qquad\qquad 4x^2 - 11x \\
\qquad\quad \underline{-\,4x^2 + 12x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\,x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = (x - 3)(x + \frac{1}{2})$$

98/11 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \qquad S(-2|0) \Rightarrow x_1 = -2$

a

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 3x + 10\big) \div \big(x + 2\big) = x^2 - 4x + 5 \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -\,4x^2 - 3x \\
\qquad\quad \underline{\quad 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad 5x + 10 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,5x - 10} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

b

$g(x) = mx + b \quad m = 2 \quad S(-2|0)$

$0 = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4$

$\Rightarrow g(x) = 2x + 4$

$f(x) = g(x)x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 2x + 4$

$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = -2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) \div \big(x+2\big) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -\,4x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\quad 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$x_2 = 1 \quad S(1|6)$

$x_3 = 3 \quad S(3|10)$

98/12 $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$

a

$f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x \qquad | \div x$

$0 = 2x^2 - 2x + 8$

$x_{2/3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-60}}{4}$ keine Lösung

$L = \{0\}$

$f_{10}(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x \qquad | \div x$

$0 = 2x^2 - 10x + 8$

$x_{2/3} = \dfrac{10 \pm 6}{4}$

$L = \{0; 1; 4\}$

$f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x \qquad | \div x$

$0 = 2x^2 + 10x + 8$

$x_{2/3} = \dfrac{-10 \pm 6}{4}$

$L = \{0; -1; -4\}$

b

Diskriminante > 0

$|t| > 8$

c

$t = 8$
$f_8(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$
Nullstellen: $\{0; 2\}$

3.14 Verhalten für $x \to \pm\infty$

z. B. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \approx \lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \approx \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3) = +\infty$
$\Rightarrow$ unterschiedlich für ungeradzahligen Grad

z. B. $g(x) = 2x^4 - 5x$
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \approx \lim\limits_{x\to\infty}(2x^4) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \approx \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4) = +\infty$
$\Rightarrow$ gleich für geradzahligen Grad

3.15 Symmetrie

Bsp. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 7$
$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten vorkommen.
Bsp. $g(x) = x^5 - 7x^3 + x$
$g(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.

allgemein:
achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$
ansonsten: Symmetrie nicht erkennbar

Anwendung:
Bsp. $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+5}$
$h(-x) = \frac{3(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+5} = -\frac{3x^2+2x}{x^2+5} = -h(x)$
$\Rightarrow$ punktsymmetrisch

100/2

- a $f(x) = -\boldsymbol{3x^4} - 0.2x^2 + 10$
- b $f(x) = 3x + 4x^3 - x^2 = \boldsymbol{4x^3} - x^2 + 3x$
- c $f(x) = 2(x-1) \cdot x^2 = \boldsymbol{2x^3} - 2x^2$
- d $f(x) = (x+1)(x^3+1) = \boldsymbol{x^4} + x^3 + x + 1$
- e $f(x) = -2(x^4 - x^3 - x^2) = -\boldsymbol{2x^4} + 2x^3 + 2x^2$
- f $f(x) = x^2 \cdot (-6x - x^2) = -\boldsymbol{x^4} - 6x^3$

102/1

- d $f(x) = x(x^2-5) = x^3 - 5x \Rightarrow$ punktsymmetrisch
- e $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$ nicht erkennbar
- f $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

3.16 Kurvendiskussion

105/1

c

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

Ableitungen

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$

$f''(x) = 3x - 8$

$f'''(x) = 3$

Symmetrie

$f(-x) \neq f(x)$

$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

$f(-x) \neq -f(x)$

$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$

Nullstellen

$f(x) = 0 = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$

$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$

$L = \{0; 4\}$

Grenzverhalten

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x^3 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$

Extremstellen

$f'(x) = 0 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$

$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm 4}{3}$

$L = \{\frac{4}{3}; 4\}$

$f''(x_1) = f''(\frac{4}{3}) = -4 < 0 \quad HP(\frac{4}{3}|f(\frac{4}{3}))$

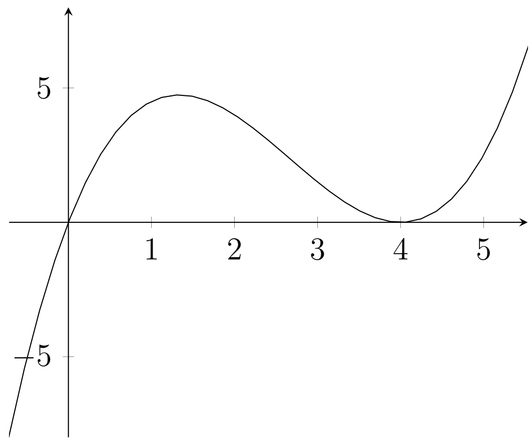
$f''(x_2) = f''(4) = 4 > 0 \quad TP(4|f(4))$

Wendestellen

$f''(x) = 0 = 3x - 8$

$L = \{\frac{8}{3}\}$

$f'''(x_1) = f'''(\frac{8}{3}) = 3 > 0 \quad RLWP(\frac{8}{3}|f(\frac{8}{3}))$



d

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 - 16$

Ableitungen

$f'(x) = 3x^2 + 12x$

$f''(x) = 6x + 12$

$f'''(x) = 6$

Symmetrie

$f(-x) \neq f(x)$

$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq x^3 + 6x^2 - 16$

$f(-x) \neq -f(x)$

$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq -x^3 - 6x^2 + 16$

Nullstellen

$f(x) = 0 = x^3 + 6x^2 - 16$

$x_1 = -2$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 6x^2 \qquad\quad - 16\big) \div \big(x + 2\big) = x^2 + 4x - 8 \\
\underline{\;-x^3 - 2x^2\;} \\
\qquad\quad 4x^2 \\
\qquad \underline{-4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad -8x - 16 \\
\qquad\qquad \underline{\;\;8x + 16} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-8)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$L = \{-2; -5.46; 1.46\}$

Grenzverhalten

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Extremstellen

$f'(x) = 0 = 3x^2 + 12x \qquad | \div x \Rightarrow x_1 = 0$

$3x + 12 = 0$

$L = \{0; -4\}$

$f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0 \quad TP(0|f(0))$

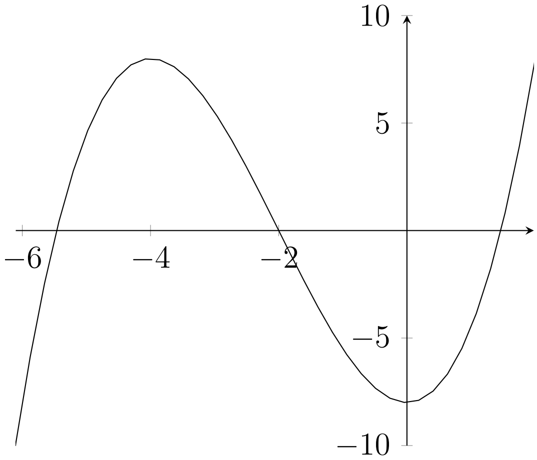
$f''(x_2) = f''(-4) = -12 < 0 \quad HP(-4|f(-4))$

Wendestellen

$f''(x) = 0 = 6x + 12$

$L = \{-2\}$

$f'''(x_1) = f'''(-2) = 6 > 0 \quad RLWP(-2|f(-2))$



106/5

$$f(x) = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.988 \cdot 190^{-6} \cdot x^4$$

a

Höhe
$f(0) = 187.5$
Breite
$f(x) = 0$
subst. $t = x^2$
$0 = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot t - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$
$t_{1/2} = \dfrac{1.579 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{(1.579 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6}) \cdot 187.5}}{2 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6})}$
$t_1 < 0 \qquad t_2 = 6520.923541$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{t_2} \approx \pm 80$
$2 \cdot 80 = 160$

b

$f'(x) = -3.158 \cdot 10^{-2} \cdot x - 7.952 \cdot 10^{-6} \cdot x^3$
$f'(80) = -2.5264 - 4.071424 \approx -6.6$
$atan(-6.6) \approx -81^\circ$

c

$f(19) = 187.5 - 5.70019 - 0.259078148 \approx 181$
vertikaler Abstand: $187.5 - 181 = 6.5 < 10$
$f(9) - 10 = 177.5 - 1.579 - 0.01988 \approx 176.2$

3.17 Tangente und Anwendungen

3.17.1 Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung

$f(x) = y = m \cdot x + b$
Stelle $u \qquad f'(u) = m \qquad f(u) = y$
$f(u) = f'(u) \cdot u + b \quad \Rightarrow \quad b = f(u) - f'(u) \cdot u$
$t(x) = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$
$= f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

108/5

a

$f(x) = x^2 - x; \quad B(-2|6) \quad u = -2$
$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(u) = -5$
$t(x) = -5 \cdot (x + 2) + 6 = -5x - 4$
$n(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 2) + 6 = \frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$

b

$f(x) = \frac{4}{x} + 2; \quad B(4|3) \quad u = 4$
$f'(x) = -4x^{-2} \quad f'(u) = -\frac{1}{4}$
$t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 3 = -\frac{1}{4}x + 4$
$n(x) = 4 \cdot (x - 4) + 3 = 4x - 13$

Exkurs: Quadratische Ergänzung

führt auf die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

z. B. $f(x) = x^2 - x$
$= x^2 - x + 0.25 - 0.25$
$= (x - 0.5)^2 - 0.25$
Scheitelpunkt $S(0.5| - 0.25)$

z. B. $g(x) = 4x^2 - 3x + 8$
$= 4(x^2 - \frac{3}{4}x) + 8$
$= 4(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}) + 8$
$= 4(x - \frac{3}{8})^2 - 4(\frac{9}{64}) + 8$
$= 4(x - \frac{3}{8})^2 + \frac{137}{16}$
Scheitelpunkt $S(\frac{3}{8}|\frac{137}{16})$

nimm den Koeffizienten (-1), halbiere ihn (-0.5) und quadriere anschließend (0.25).

109/10

$$
\begin{aligned}
&f(x) = y = 4 - \frac{1}{2}x^2 \\
&Y(0|6) \\
&f'(x) = -x \\
&t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} - x \cdot x_0 + 4 \\
&0 = \frac{1}{2}x_0^2 - 2 \qquad x_0 = \pm 2
\end{aligned}
$$

109/11

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -0.002x^4 + 0.122x^2 - 1.8 \\
&\text{Tiefster Punkt}: T(0| - 1.8) \\
&\text{Augen}: P(x_0|1.6) \\
&f'(x) = -0.008x^3 + 0.244x \\
&t(x) = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 0.008u^3x + 0.224ux - 1.8 \\
&t(0) = -1.8 = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 1.8 \qquad L = \{0; \pm\sqrt{\frac{61}{3}}\} \\
&t(x) = 0.366752x - 1.8 \quad fuer\ u = \sqrt{\frac{61}{3}} \\
&1.6 = 0.366752x_0 - 1.8 \\
&x_0 = 9.2706
\end{aligned}
$$

112/7

$$S(t) = -0.08t^3 + 3.5t^2 + 10.6t + 237$$

a

$$S'(t) = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

Die Ableitung gibt an, wie stark die Schulden ansteigen, also die Neuverschuldung pro Jahr.

b

$$\begin{aligned}
&S''(t) = -0.48t + 7 \\
&S''(t_0) = 0 \\
&t_0 = 14.58\overline{3} \quad (um\ 1994)
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
&S'(t_0) = 0 = -0.24t^2 + 7t + 10.6 \\
&t_0 = \frac{1}{12}(175 + \sqrt{36985}) \approx 30.6 \quad (um\ 2010) \\
&S''(t_0) \approx -7.69 < 0 \quad \Rightarrow \quad Hochpunkt
\end{aligned}$$

d Nicht die Staatsschulden, sondern die Neuverschuldung, nahm ab.

111/3

$$f(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

a

$$f(t) = 0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t \qquad L = \{0; 24\}$$

$$\begin{aligned}
&f'(t) = 0 = 0.75t^2 - 24t + 144 \qquad L = \{8; 24\} \\
&f''(t) = 1.5t - 24 \\
&f''(8) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad HP \\
&f''(24) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f''(t) = 0 = 1.5t - 24 \qquad L = \{16\} \\
&f'''(t) = 1.5 > 0 \quad \Rightarrow \quad RLWP
\end{aligned}$$

b

$$\text{Hälfte d. Maximalwerts } = \frac{f(8)}{2} = \frac{512}{2} = 256$$
$$f(t) = 256 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$
$$0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ \tfrac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 256\big) \div \big(t - 16\big) = \tfrac{1}{4}t^2 - 8t + 16 \\
\underline{\ - \tfrac{1}{4}t^3 \ \ + 4t^2} \\
\qquad\qquad - 8t^2 + 144t \\
\qquad\qquad \underline{\ \ \ 8t^2 - 128t} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 16t - 256 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- 16t + 256} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$L = \{2.1436; 16; (29.856)\}$$

$$f_2(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$
$$f_2'(t) = f'(t) = 0.75t^2 - 24t + 144$$
$$f_2'(2.1436) \approx 96 > 0$$
$$f_2'(16) = -48 < 0$$
$$(f_2'(29.856) \approx 96 > 0)$$

Zeitraum: 2.1436 bis 16

Teil II

11/2

112/5

$$O(t) = -\frac{1}{300}(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700) \qquad t \in [0; 24]$$

a

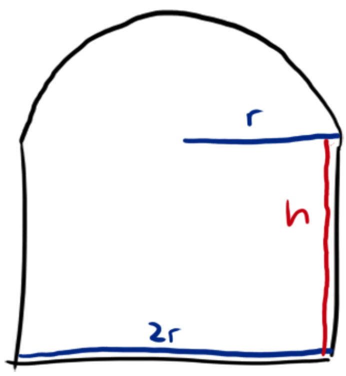
$$O'(t) = \frac{1}{100}(-t^2 + 24t - 108) = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{-2} = \frac{-24 \pm 12}{-2} = 12 \pm 6$$
$$t_1 = 6 \qquad t_2 = 18$$

$$O''(t) = \frac{12 - t}{50}$$
$$O''(t_1) = \frac{6}{50} > 0 \quad \Rightarrow \quad TP(6|O(6) = 16.12)$$
$$O''(t_2) = \frac{-6}{50} < 0 \quad \Rightarrow \quad HP(18|O(18) = 19)$$

b Die Steigung der Wendetangente gibt an, wie sich die Temperaturänderung ändert (Beschleunigung).

3.18 Optimieren unter Nebenbedingungen

Tunnelquerschnitt:



Länge der Randlinie (Umfang) ist $5m$; A ist maximal

Hauptbedingung HB

$A(r,h) = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$

($A(r)$ heißt Zielfunktion ZF)

Nebenbedingung NB

$U = 5 = 2h + 2r + \pi r \qquad | - 2r - \pi r$

$h = \frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r$

setze h in $A(r,h)$ ein

$A(r) = 2r(\frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r) + \frac{1}{2}\pi r^2$

$= 5r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$

$= (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot r^2 + 5r$

$A'(r) = 5 - 7.14159r$

$A'(r) = 0 \qquad L = \{0.7\}$

$h = 0.7 \quad fuer\ r = 0.7$

$A(r) = 1.75m^2$

114/3

$$A(l,b) = l \cdot b$$
$$U = 50 = 2(l + b) \Rightarrow b = 25 - l$$
$$A(l) = 2l \cdot (25 - l) = -2l^2 + 50l$$
$$A'(l) = -4l + 50$$
$$A'(l) = 0 \qquad L = \{12.5\}$$
$$l = b = 12.5cm$$

114/4

$$U(l,b) = 2(l+b)$$
$$A = 400 = l \cdot b \Rightarrow b = \frac{400}{l}$$
$$U(l) = 2l + \frac{800}{l}$$
$$U'(l) = 2 - 800l^{-2}$$
$$U'(l) = 0 \qquad L = \{\pm 20\}$$
$$l = b = 20cm$$

115/7

a

$$V(x) = (16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$
$$V'(x) = 0 \qquad L = \{2; (\frac{20}{3})\}$$
$$V(2cm) = 144cm^3$$

115/8

$$U(r,h) = \pi r + 2r + 2h$$
$$A = 45 = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh \Rightarrow h = \frac{45 - \frac{1}{2}\pi r^2}{2r}$$
$$U(r) = \frac{1}{2}\pi r + 2r + \frac{45}{r}$$
$$U'(r) = -45r^{-2} + \frac{1}{2}\pi + 2$$
$$U'(r) = 0 \qquad L = \{\pm 3.55\}$$
$$r = 3.55m$$
$$h = 3.55m \quad fuer\ r = 3.55m$$

115/11

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

$$12^2 = (2r)^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{36 - \frac{h^2}{4}}$$

$$V(h) = \pi \cdot (36 - \frac{h^2}{4}) \cdot h = 36h\pi - \frac{h^3\pi}{4}$$

$$V'(h) = -\frac{3}{4}\pi h^2 + 36\pi$$

$$V'(h) = 0 \qquad L = \{\pm 6.93\}$$

$$h = 6.93cm$$

$$r = 4.9cm \quad fuer\ h = 6.93cm$$

115/14

a ... Kantenlänge der Grundfläche

$$V(a,h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$2.4^2 = 5.76 = h_s^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$h_s^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{5.76 - \frac{a^2}{2}}$$

$$V_2(a) = V(a)^2 = \frac{1}{9} \cdot a^4 \cdot (5.76 - \frac{a^2}{2}) = -\frac{1}{18}a^6 + 0.64a^4$$

$$V_2'(a) = -\frac{1}{3}a^5 + 2.56a^3$$

$$V_2'(a) = 0 \qquad L = \{0; \pm 2.771\}$$

$$V(2.771m) \approx 3.55m^3$$

115/13

Tragfähigkeit $T \sim b$
Tragfähigkeit $T \sim h^2$

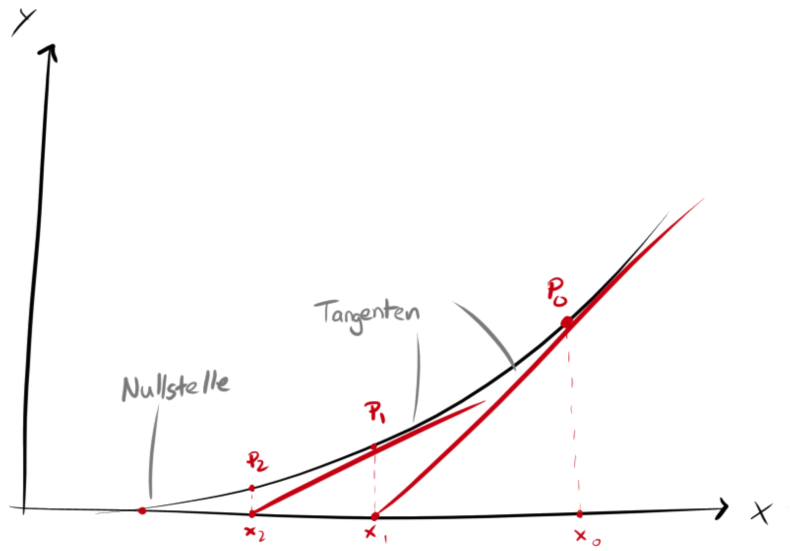
a

$r = 50cm$
$T(b,h) = b \cdot h^2$
$h^2 + b^2 = (2r)^2 \Rightarrow h^2 = 10000 - b^2 \Rightarrow h = \sqrt{10000 - b^2}$
$T(b) = b \cdot (10000 - b^2) = -b^3 + 10000b$
$T'(b) = -3b^2 + 10000$
$T'(b) = 0 \qquad L = \{\pm\frac{100}{\sqrt{3}}\}$
$T(\frac{100}{\sqrt{3}}) \approx 384900$

$b \approx 57.74cm$
$h = \sqrt{10000 - (\frac{100}{\sqrt{3}})^2} \approx 81.65cm$

3.19 Numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung

z. B. $f(x) = x^3 + 5x - 10$
probeweise:
$f(1) = -4$
$f(2) = 8$
$\Rightarrow$ Nullstelle zwischen 1 und 2
Vermutung $x_0 = 1.5$



Zum Rechenverfahren

Tangentengleichung $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$t(x_1) = 0 \qquad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$\rightarrow x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

allgemeine Näherungsformel nach Newton (und Raphson)

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

n beginnend bei 0

Abbruchbedingung: Nullstelle auf 3 Dezimalen genau. Das bedeutet, dass beim nächsten Schritt sich die 3. Dezimale nicht mehr ändern darf

Beispiel $f(x) = x^3 + 5x - 10$
$f'(x) = 3x^2 + 5$
$x_0 = 1.5$
$x_1 = 1.5 - \dfrac{1.5^3 + 5 \cdot 1.5 - 10}{3 \cdot 1.5^2 + 5} \approx 1.4255$
$x_2 = ... \approx 1.4233$
$x_3 = ... \approx 1.42331$
Nullstelle auf 3 Dezimalen genau: $x = 1.423$

118/1

a

$$
\begin{aligned}
&x^3 + 2x - 1 = 0\\
&f'(x) = 3x^2 + 2\\
&x_0 = 0\\
&x_1 = 0 - \frac{-1}{2} = 0.5\\
&x_2 = \frac{5}{11} = 0.\overline{45}\\
&x_3 = \frac{1581}{3487} \approx 0.453398...\\
&x_4 = \frac{50302634185}{110945952227} \approx 0.453397...\\
&x^* = 0.453
\end{aligned}
$$

3.19.1 Anwendungen des Newton-Verfahrens

Mögliche Fragestellungen:

- Nullstellen eines Funktionsgraphen $f(x) = 0$, auch $f(x) = a$
- Nullstellen der Ableitungsfunktion $f'(x) = 0$, auch $f'(x) = m$
- Schnittstellen zweier Funktionsgraphen $f(x) = g(x)$
- zu Zielfunktion Lösungen finden

118/2

a

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^3 - 3x - 1 \\
&f'(x) = 3x^2 - 3 \\
&x_0 = 2 \\
&x_1 = 1.8889 \\
&x_2 = 1.8795 \\
&x_3 = 1.8794 \\
&x_4 = 1.8794 \\
&x_1^* = 1.879 \\
&\ldots \\
&x_2^* = -1.532 \\
&x_3^* = -0.347
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^3 + 3x^2 - 3 \\
&f'(x) = 3x^2 + 6x \\
&x_0 = 1 \\
&x_1 = 0.8889 \\
&x_2 = 0.8795 \\
&x_3 = 0.8794 \\
&x_4 = 0.8794 \\
&x_1^* = 0.879 \\
&\ldots \\
&x_2^* = -2.532 \\
&x_3^* = -1.347
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1\\
&f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 10x\\
&x_0 = 0.5\\
&x_1 = 0.4271\\
&x_2 = 0.4203\\
&x_3 = 0.4204\\
&x_4 = 0.4204\\
&x_1^* = 0.420\\
&...\\
&x_2^* = -1.332\\
&x_3^* = -0.521\\
&x_4^* = 3.432
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 0.5\\
&f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x + 1\\
&x_0 = 0.5\\
&x_1 = 0.6071\\
&x_2 = 0.6030\\
&x_3 = 0.6030\\
&x_1^* = 0.603\\
&...\\
&x_2^* = -2.635\\
&x_3^* = -0.246\\
&x_4^* = 1.278
\end{aligned}
$$

118/3

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^5 + x^3 + 1 \\
&f'(x) = 5x^4 + 3x^2 \\
&x_0 = -1 \\
&x_1 = -0.8750 \\
&x_2 = -0.8400 \\
&x_3 = -0.8376 \\
&x_4 = -0.8376 \\
&x^* = -0.838
\end{aligned}
$$

118/4

a

$$
\begin{aligned}
&g(x) = x^2; \quad h(x) = x^3 - 1 \\
&f(x) = g(x) - h(x) = -x^3 + x^2 + 1 \\
&f'(x) = -3x^2 + 2x \\
&x_0 = 1.5 \\
&... \\
&x^* = 1.466
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&g(x) = x^3; \quad h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2 \\
&f(x) = g(x) - h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 2 \\
&f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2 \\
&x_0 = 1 \\
&... \\
&x^* = 0.848
\end{aligned}
$$

118/5

a

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 0.1x^4 - x^2 - x + 1; \quad m = 1 \\
&f'(x) = 0.4x^3 - 2x - 1 = 1 \\
&0.4x^3 - 2x - 2 = 0 \\
&x_0 = 2.5 \\
&... \\
&x^* = 2.627
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -0.1x^4 - x^3 + x^2 + 3; \quad m = -18 \\
&f'(x) = -0.4x^3 - 3x^2 + 2x = -18 \\
&-0.4x^3 - 3x^2 + 2x + 18 = 0 \\
&x_0 = 2.5 \\
&... \\
&x^* = 2.400
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{x}; \quad m = 4 \\
&f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} = 4 \\
&\frac{3}{10}x^2 + x - \frac{1}{x^2} - 4 = 0 \\
&x_0 = 2.5 \\
&... \\
&x^* = 2.418
\end{aligned}
$$

d

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^3 + 3; \quad m = -10$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 = -10$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^2 + 10 = 0$$
$$x_0 = 2.5$$
...
$$x^* = 2.622$$

118/6

a

$$f(x) = x^5 + x + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

Die Funktion ist streng monoton steigend, d. h. sie hat genau eine Nullstelle.

b

$$x_0 = -1$$
...
$$x^* \approx -0.755$$

118/7

$$r = 9cm$$

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_Z = h\pi R^2 = \frac{1}{4}V_K = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$hR^2 = \frac{1}{3}r^3$$

$$R^2 + (\frac{h}{2})^2 = r^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$h(r^2 - \frac{h^2}{4}) = hr^2 - \frac{h^3}{4} = \frac{1}{3}r^3$$

$$81h - \frac{h^3}{4} = 243$$

$$-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243 = 0$$

$$(-\frac{1}{4}h^3 + 81h - 243)' = -\frac{3}{4}h^2 + 81$$

...

$$(h_1 \approx -19.345)$$

$$h_2 \approx 3.091$$

$$h_3 \approx 16.25$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 - \frac{h_2^2}{4}} \approx 8.87$$

$$R_3 = \sqrt{r^2 - \frac{h_3^2}{4}} \approx 3.87$$

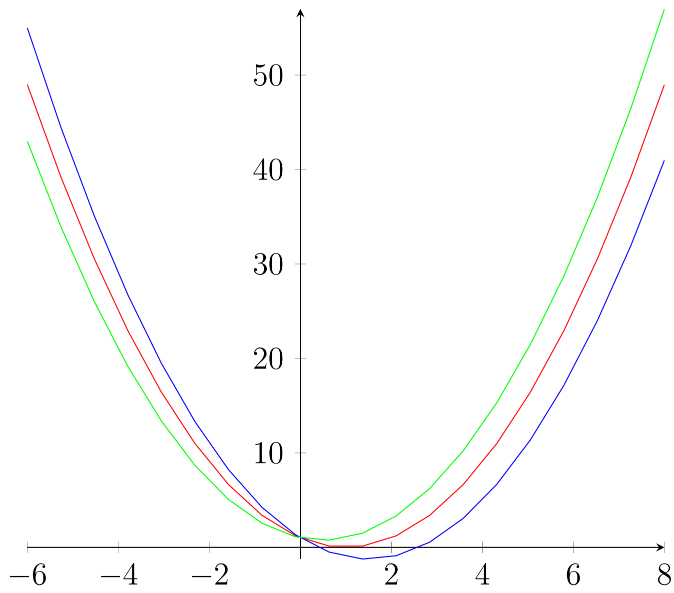
3.20 AB Kurvenuntersuchungen

AB/1

a

$f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$
$a \in \mathbb{R}, a > 0$
Symmetrie
$f_a(-x) = x^2 + 2ax + 1 \neq f_a(x)$
$-f_a(x) = -x^2 + 2ax - 1 \neq f_a(-x)$
$\Rightarrow$ keine Symmetrie erkennbar
Nullstellen
$x^2 - 2ax + 1 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$
Extrema
$f_a'(x) = 2x - 2a = 0 \quad L = \{a\}$
$f_a''(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow TP(a|f_a(a) = -a^2 + 1)$
Wendepunkte
$f_a''(x) = 0 \quad L = \{\}$

b



$a = 1,\ 1.5,\ 0.5$

c

$$f_a'(4) = 2 \cdot 4 - 2a = 1 \quad \Rightarrow a = 3.5$$

d

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$a^2 - 1 < 0 \quad fuer\ a < 1 \quad \Rightarrow$ keine Nullstelle

$a^2 - 1 = 0 \quad fuer\ a = 1 \quad \Rightarrow$ 1 Nullstelle

$a^2 - 1 > 0 \quad fuer\ a > 1 \quad \Rightarrow$ 2 Nullstellen

3.20.1 Ortslinie

Der Graph, auf dem alle Tiefpunkte zu unterschiedlichen a liegen, heißt Ortslinie der Tiefpunkte:

$T(a| - a^2 + 1)$

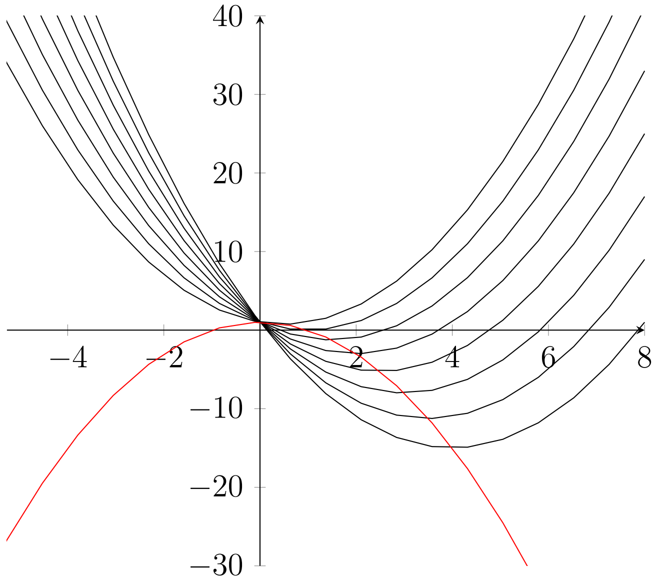
$x = a$

$y = -a^2 + 1$

setze a aus x-Koordinate in y ein

$f(x) = y = -x^2 + 1$

Funktionsgleichung der Ortskurve der Tiefpunkte



AB/5

a

$f_a(x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2$

$a > 0$

Symmetrie

$f_a(-x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 = f_a(x)$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie

$-f_a(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 \neq f_a(-x)$

$\Rightarrow$ keine Punktsymmetrie erkennbar

Nullstellen

$\frac{1}{2}x^4 - ax^2 = 0 \qquad | \div x^2$

$\frac{1}{2}x^2 - a = 0$

$L = \{0; \pm\sqrt{2a}\}$

Extrema

$f_a'(x) = 2x^3 - 2ax = 0 \qquad | \div x$

$2x^2 - 2a = 0$

$x = \pm\sqrt{a}$

$f_a''(x) = 6x^2 - 2a$

$f_a''(\pm\sqrt{a}) = 4a > 0 \Rightarrow TP$

$f_a''(0) = -2a < 0 \Rightarrow HP$

Wendepunkte

$f_a''(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\}$

$f_a'''(x) = 12x$

$f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 12\sqrt{\frac{a}{3}} > 0 \Rightarrow RLWP$

$f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = -12\sqrt{\frac{a}{3}} < 0 \Rightarrow LRWP$

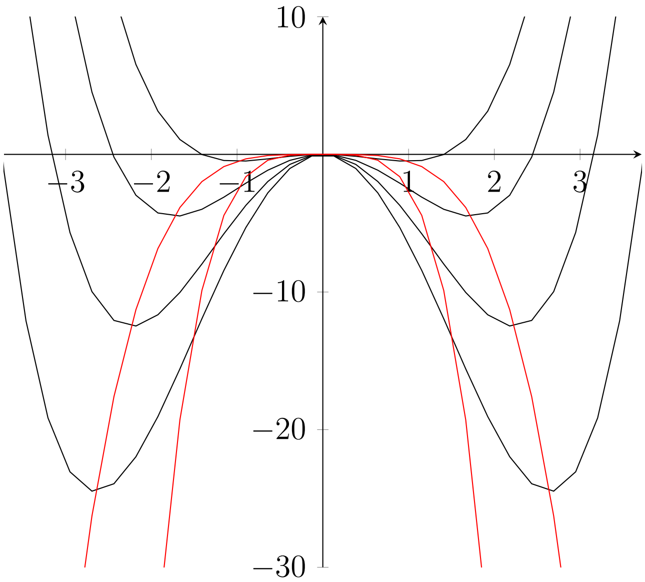
b

$$T(\pm\sqrt{a}| -\frac{1}{2}a^2)$$

$$f_T(x) = -\frac{1}{2}x^4$$

$$W(\pm\sqrt{\frac{a}{3}}| -\frac{5a^2}{18})$$

$$f_W(x) = -\frac{5}{2}x^4$$



AB/4

a

$$f_a(x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) \qquad WP(1|f_a(1))$$

$$f_a(-x) = \frac{1}{4}(x^4 - ax^2) = f_a(x)$$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie $\Rightarrow$ zweiter Wendepunkt bei $x = -1$

$$f''_a(\pm 1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad \Rightarrow a = 6$$

$$f_6(\pm 1) = \frac{1}{4}(1^4 - 6 \cdot 1^2) = -\frac{5}{4}$$

b

$$f_a''(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\}$$
$$t_1(x) = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$
$$t_2(x) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}x + \frac{a^2}{48}$$

3.21 Wiederholung

115/9

$$O(a,h) = a^2 + 4ah$$
$$V(a,h) = a^2 \cdot h = 40dm^3 \quad \Rightarrow h = \frac{40dm^3}{a^2}$$
$$O(a) = a^2 + 160dm^3 \cdot a^{-1}$$
$$O'(a) = 2a - 160dcm^3 \cdot a^{-2}$$
$$a = \sqrt[3]{80dm^3} \approx 4.309dm$$
$$h = \frac{40dm^3}{\sqrt[3]{80dm^3}^2} = \sqrt[3]{10} \approx 2.154dm$$

119/8

$$h(0) = 400m$$
$$h(370) = 0$$

a h' beschreibt das Gefälle des Flusses und gibt den Höhenverlust des Wassers pro Kilometer an

b ein Stausee hat einen waagerechten Abschnitt des Graphen zur Folge, ein Wasserfall eine Sprungstelle

c h' ist nicht positiv, da das Wasser ausschließlich nach unten fließt; die Einheit ist $\frac{m}{km}$

3.22 Sinus- und Kosinusfunktion

$f(\alpha) = sin(\alpha)$
$f(x) = sin(x)$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{U} \qquad U = 2\pi r$$

$$x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360^\circ} \qquad \alpha = \frac{x \cdot 360^\circ}{2\pi}$$

wichtige x-Koordinaten

$x = 3.14... = \pi \qquad x = 6.28... = 2\pi$

$x = 1.57... = \frac{\pi}{2} \qquad x = 4.71... = \frac{3\pi}{2}$

$$sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x) \qquad sin(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$$

3.22.1 Vielfachheit der Lösungen von (geniometrischen) Gleichungen

$sin(x) = 0.7$
$x = asin(0.7) \approx 0.775$
$x_n \approx 0.775 + n \cdot 2\pi$
$x_m \approx \pi - 0.775 + m \cdot 2\pi$
$n, m \in \mathbb{Z}$

$cos(x) = 0.3$
$x = acos(0.3) \approx 1.266$
$x_n \approx 1.266 + n \cdot 2\pi$
$x_m \approx -1.266 + n \cdot 2\pi$
$n, m \in \mathbb{Z}$

128/6

a

$$sin(x) = 0.9396$$
$$x = asin(0.9396) \approx 1.221$$
$$x_n \approx 1.221 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx \pi - 1.221 + m \cdot 2\pi$$

b

$$sin(x) = 0.5519$$
$$x = asin(0.5519) \approx 0.585$$
$$x_n \approx 0.585 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx \pi - 0.585 + m \cdot 2\pi$$

c

$$cos(x) = 0.6294$$
$$x = asin(0.6294) \approx 0.890$$
$$x_n \approx 0.890 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx -0.890 + m \cdot 2\pi$$

d

$$cos(x) = -0.8870$$
$$x = asin(-0.8870) \approx 2.662$$
$$x_n \approx 2.662 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx -2.662 + m \cdot 2\pi$$

128/7

a

$$sin(x) = 0.63$$
$$x = asin(0.63) \approx 0.682$$
$$x_n \approx 0.682 + n \cdot 2\pi$$
$$x_m \approx \pi - 0.682 + m \cdot 2\pi$$

b

$$
\begin{aligned}
&cos(x) = -0.55\\
&x = asin(-0.55) \approx 2.153\\
&x_n \approx 2.153 + n \cdot 2\pi\\
&x_m \approx -2.153 + m \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

c

$$
\begin{aligned}
&sin(x) = -\frac{1}{2}\\
&x = asin(-\frac{1}{2}) \approx -0.524\\
&x_n \approx -0.524 + n \cdot 2\pi\\
&x_m \approx \pi + 0.524 + m \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\
&x = asin(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) \approx 2.356\\
&x_n \approx 2.356 + n \cdot 2\pi\\
&x_m \approx -2.356 + m \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

3.22.2 Die allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = y = a \cdot sin(b(x-c)) + d$$

a Streckung entlang der y-Achse (Amplitude)

b Streckung entlang der x-Achse (Perioden pro 2π, Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$)

c Verschiebung in x-Richtung (für $c > 0$ nach rechts)

d Verschiebung in y-Richtung

3.22.3 AB Die Funktionen $f\colon x \mapsto a \cdot sin(b(x-c))$ und ihre Graphen

AB/3

a

$$f(x) = 3 \cdot sin(\frac{1}{2}(x-\pi))$$
$$p = 4\pi$$
$$3 \cdot sin(\frac{1}{2}(x-\pi))$$
$$x_H = 2\pi + n \cdot p$$
$$x_T = n \cdot p$$
$$x_W = \pi + \frac{n}{2} \cdot p$$

b

$$f(x) = 2 \cdot sin(\frac{2}{3}x)$$
$$p = 3\pi$$
$$x_H = \frac{3}{4}\pi + n \cdot p$$
$$x_T = 2\frac{1}{4}\pi + n \cdot p$$
$$x_W = \frac{n}{2} \cdot p$$

c

$$f(x) = 4 \cdot sin(x - \frac{\pi}{6})$$
$$p = 2\pi$$
$$x_H = \frac{2}{3}\pi + n \cdot p$$
$$x_T = \frac{5}{3}\pi + n \cdot p$$
$$x_W = \frac{\pi}{6} + \frac{p}{2}$$

AB/5

$$f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + e)$$

a

$$f(x) = 20 \cdot sin(\frac{\pi}{20} \cdot x - \frac{\pi}{2})$$

b

$$f(x) = 6 \cdot sin(\frac{\pi}{12} \cdot x + \frac{\pi}{4})$$

c

$$f(x) = 4 \cdot sin(\frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{\pi}{2})$$

AB/6

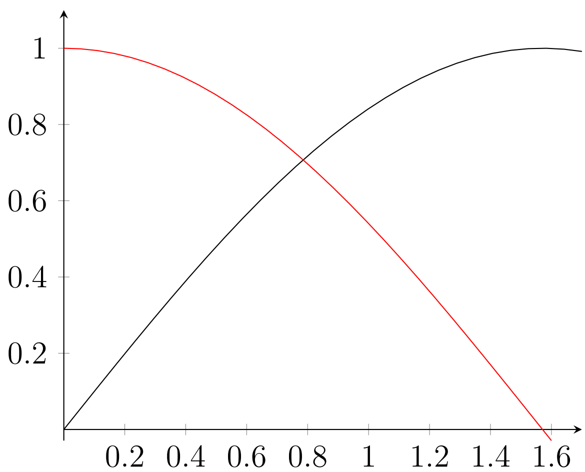
$$f(t) = a \cdot sin(b(t - c)) \qquad -2 \leqslant t \leqslant 13$$

a Die Sonne bewegt sich aus Sicht der Aufnahmen periodisch auf und ab. Ihr Höhenverlauf lässt sich daher über eine Sinuskurve modellieren.

b

$$f(x) = a \cdot sin(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 6))$$

3.22.4 Ableitung der Sinusfunktion



$sin(x)$, $cos(x)$

Annäherung mit Taylorreihe

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$
$$a = x_0 = 0$$
$$f(x_0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ...$$
$$sin(x) = 0 + x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$
$$(sin(x))' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = ... = cos(x)$$

$$f(x) = sin(x)$$
$$f'(x) = cos(x)$$
$$f''(x) = -sin(x)$$
$$f'''(x) = -cos(x)$$
$$f''''(x) = sin(x)$$
$$...$$

130/1

a

$$f(x) = 12 \cdot sin(x)$$
$$f'(x) = 12 \cdot cos(x)$$

b

$$f(x) = -2 \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = -2 \cdot (-sin(x))$$

c

$$f(x) = \sqrt{5} \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = \sqrt{5} \cdot (-sin(x))$$

d

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot sin(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot cos(x)$$

e

$$f(x) = 5x^3 - sin(x)$$
$$f'(x) = 15x^2 - cos(x)$$

f

$$f(x) = 2 \cdot cos(x) - sin(x)$$
$$f'(x) = 2 \cdot (-sin(x)) - cos(x)$$

130/3

b

$$f(x) = 3 \cdot sin(x)$$
$$P(\frac{5\pi}{3}|?)$$
$$y = f(\frac{5\pi}{3}) \approx -2.598$$
$$f'(x) = 3 \cdot cos(x)$$
$$m_t = f'(\frac{5\pi}{3}) = 1.5$$
$$b_t = -2.598 - 1.5 \cdot \frac{5\pi}{3} \approx -10.452$$
$$t(x) = 1.5x - 10.452$$

130/4

c

$$f(x) = 2 \cdot sin(x) - cos(x); \quad x \in [0; 2\pi]$$
$$f'(x) = 2 \cdot cos(x) + sin(x)$$

$$f'(x) = 0 = 2 \cdot cos(x) + sin(x)$$
$$2 = -\frac{sin(x)}{cos(x)} = -tan(x) \quad \Rightarrow \quad x = atan(-2)$$
$$L = \{atan(-2) + n\pi\} \quad n \in \{1; 2\}$$

$$f''(x) = cos(x) - 2 \cdot sin(x)$$
$$f''(atan(-2) + \pi) \approx -2.23 < 0$$
$$HP(atan(-2) + \pi | f(atan(-2) + \pi)) = HP(2.034|2.236)$$
$$f''(atan(-2) + 2\pi) \approx 2.23 > 0$$
$$TP(atan(-2) + 2\pi | f(atan(-2) + 2\pi)) = TP(5.176| - 2.236)$$

d

$$f(x) = 4 \cdot cos(x) + 2x; \quad x \in [0; 2\pi]$$
$$f'(x) = -4 \cdot sin(x) + 2$$

$$f'(x) = 0 = -4 \cdot sin(x) + 2$$
$$0.5 = sin(x) \quad \Rightarrow \quad x = asin(0.5)$$
$$L = \{asin(0.5); \pi - asin(0.5)\}$$

$$f''(x) = -4 \cdot cos(x)$$
$$f''(asin(0.5)) \approx -3.46 < 0$$
$$HP(asin(0.5)|f(asin(0.5))) = HP(0.524|4.51)$$
$$f''(\pi - asin(0.5)) \approx 3.46 > 0$$
$$TP(\pi - asin(0.5)|f(\pi - asin(0.5))) = TP(2.618|1.772)$$

3.23 Neue Funktionen aus alten Funktionen

gegeben sind

$f(x) = sin(x)$

$g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = x^2 + 5$

Produkt

$i(x) = f(x) \cdot g(x) = sin(x) \cdot \sqrt{x}$

$j(x) = h(x) \cdot f(x) = (x^2 + 5) \cdot sin(x)$

Quotient

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{sin(x)}$$

$$l(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x}}$$

Verkettung

$m(x) = f(g(x)) = sin(\sqrt{x})$

$n(x) = g(f(x)) = \sqrt{sin(x)}$

$o(x) = f(g(h(x))) = sin(\sqrt{x^2 + 5})$

3.23.1 Ableitungsregeln

Produktregel

$$k(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \boldsymbol{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Kettenregel

$$k(x) = f(g(x))$$
$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+i) - f(z)}{i} \cdot g'(x)$$
$$= f'(z) \cdot g'(x)$$
$$= \boldsymbol{f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$g(x) = z \qquad g(x+h) = z + i$$

Beispiele

$$k(x) = (x^2 + 2x - 7) \cdot sin(x)$$
$$k'(x) = (2x + 2) \cdot sin(x) + (x^2 + 2x - 7) \cdot cos(x)$$

$$k(x) = sin(x^3 - 5x)$$
$$k'(x) = cos(x^3 - 5x) \cdot (3x^2 - 5)$$

135/1

a

$$f(x) = (x+2)^4$$
$$f'(x) = 4(x+2)^3$$

b

$$f(x) = (8x+2)^3$$
$$f'(x) = 3(8x+2)^2 \cdot 8 = 24(8x+2)^2$$

c

$$f(x) = (\frac{1}{2} - 5x)^3$$
$$f'(x) = 3(\frac{1}{2} - 5x)^2 \cdot (-5) = -15(\frac{1}{2} - 5x)^2$$

d

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2-5)^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-5)\cdot 2x = x^3 - 5x$$

135/2

a

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(x-1)^{-3}$$

b

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$$
$$f'(x) = -2(3x-1)^{-3}\cdot 3 = -6(3x-1)^{-3}$$

e

$$f(x) = sin(2x)$$
$$f'(x) = cos(2x)\cdot 2 = 2cos(2x)$$

f

$$f(x) = sin(2x+\pi)$$
$$f'(x) = cos(2x+\pi)\cdot 2 = 2cos(2x+\pi) = -2cos(2x)$$

138/1

g

$$f(x) = \frac{2}{x}\cdot cos(x)$$
$$f'(x) = -2x^{-2}\cdot cos(x) - \frac{2}{x}\cdot sin(x)$$

h

$$f(x) = sin(x)\cdot cos(x)$$
$$f'(x) = (cos(x))^2 - (sin(x))^2 = cos(2x)$$

i

$$f(x) = x^2 \cdot sin(x)$$
$$f'(x) = 2x \cdot sin(x) + x^2 \cdot cos(x)$$

j

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot cos(x)$$
$$f'(x) = -\frac{cos(x)}{2\sqrt{x^3}} - \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$$

k

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot sin(x) \cdot (2 - x)$$
$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot cos(x) \cdot (2 - x) - \frac{\pi}{4} \cdot sin(x)$$

l

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

135/4

a

$$f(x) = 0.25 \cdot sin(2x + \pi)$$
$$f'(x) = 0.25 \cdot cos(2x + \pi) \cdot 2 = -0.5 \cdot cos(2x)$$

b

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot sin(\pi - 3x)$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot cos(\pi - 3x) \cdot (-3) = 2 \cdot cos(3x)$$

c

$$f(x) = -cos(x^2 + 1)$$
$$f'(x) = sin(x^2 + 1) \cdot 2x$$

d

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (cos(x))^2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot cos(x) \cdot (-sin(x)) = -\frac{2}{3} \cdot cos(x) \cdot sin(x)$$

e

$$f(x) = \sqrt{3x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

f

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+x}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

g

$$f(x) = \sqrt{7x-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x-5}} \cdot 7 = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{7x-5}}$$

h

$$f(x) = \sqrt{7x^2-5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7x^2-5}} \cdot 14x = \frac{7x}{\sqrt{7x^2-5}}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{sin(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{(sin(x))^2} \cdot cos(x) = -\frac{cos(x)}{(sin(x))^2}$$

Ableitungen mit mehr als zwei Funktionen

$$
\begin{aligned}
&l = g \cdot [h \cdot k] \\
&l' = g' \cdot h \cdot k + g \cdot [h' \cdot k + h \cdot k'] \\
&= g' \cdot h \cdot k + g \cdot h' \cdot k + g \cdot h \cdot k'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l = g(h(k)) \\
&l' = g'(h(k)) \cdot h'(k) \cdot k'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l = g \cdot h(k) \\
&l' = g' \cdot h(k) + g \cdot h'(k) \cdot k'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l = g(h \cdot k) \\
&l' = g'(h \cdot k) \cdot [h' \cdot k + h \cdot k']
\end{aligned}
$$

Quotientenregel

$$
\begin{aligned}
&l = \frac{g}{h} = g \cdot h^{-1} \\
&l' = g' \cdot h^{-1} + g \cdot [-h^{-2} \cdot h'] \\
&= g' \cdot h^{-1} - g \cdot h^{-2} \cdot h' \\
&= \frac{g'}{h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} = \frac{g' \cdot h}{h \cdot h} - \frac{g \cdot h'}{h^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}}
\end{aligned}
$$

138/2

e

$$
\begin{aligned}
&f(x) = (5-4x)^3 \cdot x^{-2} \\
&f'(x) = 3(5-4x)^2 \cdot (-4) \cdot x^{-2} + (5-4x)^3 \cdot (-2x^{-3}) \\
&= -\frac{2 \cdot (5-4x)^2 \cdot (2x+5)}{x^3}
\end{aligned}
$$

f

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 3x \cdot cos(2x) \\
&f'(x) = 3 \cdot cos(2x) + 3x \cdot (-sin(2x)) \cdot 2 \\
&= 3 \cdot (cos(2x) - 2x \cdot sin(2x))
\end{aligned}
$$

g

$$f(x) = 3x \cdot (sin(x))^2$$
$$f'(x) = 3 \cdot (sin(x))^2 + 3x \cdot 2 \cdot sin(x) \cdot cos(x)$$
$$= 3 \cdot sin(x) \cdot (sin(x) + 2x \cdot cos(x))$$

h

$$f(x) = (2x-1)^2 \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = 2(2x-1) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + (2x-1)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(2x-1) \cdot (10x-1)}{2\sqrt{x}}$$

i

$$f(x) = 0.5x^2 \cdot \sqrt{4-x}$$
$$f'(x) = x \cdot \sqrt{4-x} + 0.5x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \cdot (-1)$$
$$= \frac{(4-1.25x) \cdot x}{\sqrt{4-x}}$$

140/2

a

$$f(x) = \frac{1-x^2}{3x+5}$$
$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (3x+5) - (1-x^2) \cdot 3}{(3x+5)^2}$$
$$= -\frac{(3x+1) \cdot (x+3)}{(3x+5)^2}$$

b

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$$
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2-x}{2\sqrt{x} \cdot (x+2)^2}$$

c

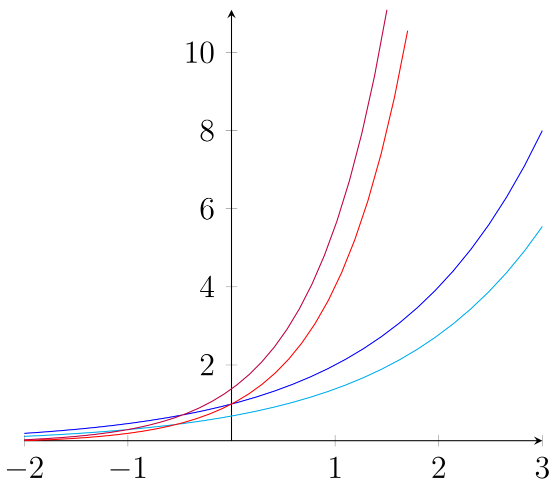
$$h(x) = \frac{3 \cdot sin(x)}{6x - 1}$$
$$h'(x) = \frac{3 \cdot cos(x) \cdot (6x-1) - 3 \cdot sin(x) \cdot 6}{(6x-1)^2}$$

d

$$k(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$
$$k'(x) = \frac{cos(x) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot (-sin(x))}{(cos(x))^2}$$
$$= 1 + (tan(x))^2$$

3.24 Exponentialfunktionen - Ableitung

$f(x) = 2^x$ $f'(x)$ $g(x) = 4^x$ $g'(x)$



Zwischen 2^x und 4^x liegt eine Exponentialfunktion, deren Ableitungsfunktion genau der Ursprungsfunktion entspricht. Sie wird natürliche Exponentialfunktion genannt.

$$f(x) = e^x$$

Eulersche Zahl $e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.71828$

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$
...

$e^x \leftrightarrow log_e(x) = ln(x)$
$\Rightarrow e^{ln(x)} = ln(e^x) = x$

$2^x = 5^{x \cdot \frac{log(2)}{log(5)}} = 5^{x \cdot log_5(2)}$
$2^x = e^{x \cdot ln(2)}$
$10^x = e^{x \cdot ln(10)}$

$f(x) = e^{x \cdot ln(2)} = 2^x$
$f'(x) = e^{x \cdot ln(2)} \cdot ln(2) = 2^x \cdot ln(2) \approx 2^x \cdot 0.7$

$f(x) = e^{x \cdot ln(4)} = 4^x$
$f'(x) = e^{x \cdot ln(4)} \cdot ln(4) = 4^x \cdot ln(4) \approx 4^x \cdot 1.4$

142/3

a

$$f(x) = x \cdot e^x$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x \cdot (x + 1)$$

b

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2}$$

c

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1 - x}{e^x}$$

d

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x \cdot (x+2)$$

e

$$f(x) = \frac{x}{e^{-0.5x}}$$
$$f(x) = \frac{1 \cdot e^{-0.5x} - x \cdot (-0.5) \cdot e^{-0.5x}}{(e^{-0.5x})^2} = e^{0.5x} \cdot (1 + 0.5x)$$

f

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) - 1}{x^2}$$

g

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$$

h

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot (x+2) - e^{3x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^{3x} \cdot (3x+5)}{(x+2)^2}$$

i

$$f(x) = x^2 + x \cdot e^{0.1x} = x^2 \cdot (1 + \frac{e^{0.1x}}{x})$$
$$f'(x) = 2x \cdot (1 + \frac{e^{0.1x}}{x}) + x^2 \cdot \frac{e^{0.1x} \cdot (0.1x - 1)}{x^2} = e^{0.1x} \cdot (0.1x + 1) + 2x$$

j

$$f(x) = x \cdot e^{-2x+1}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x+1} + x \cdot (-2e^{-2x+1}) = e^{1-2x} \cdot (1 - 2x)$$

k

$$f(x) = x^2 \cdot e^{ax}$$
$$f'(x) = 2x \cdot e^{ax} + x^2 \cdot a \cdot e^{ax} = x \cdot e^{ax} \cdot (2 + ax)$$

l

$$f(x) = x \cdot e^{2x^2+1}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x^2+1} + x \cdot e^{2x^2+1} \cdot 4x = e^{2x^2+1} \cdot (4x^2 + 1)$$

3.24.1 Basis $\neq e$

$$f(x) = 10^x = (e^z)^x = e^{ln(10) \cdot x}$$
$$e^z = 10 \quad \Rightarrow \quad z = ln(10)$$
$$\Rightarrow \quad b^x = e^{ln(b) \cdot x}$$

$$f'(x) = e^{ln(10) \cdot x} \cdot ln(10)$$
$$= 10^x \cdot ln(10)$$
$$\Rightarrow \quad b^x \cdot ln(b)$$

145/8

f

$$e^{2x} + 10 = 6.5 \cdot e^x \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$z^2 + 10 = 6.5z \qquad | - 6.5z$$
$$z^2 - 6.5z + 10 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{6.5 \pm \sqrt{42.25 - 40}}{2}$$
$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2.5 \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2.5 = e^x \qquad |ln$$
$$x_2 = ln(2.5) \approx 0.916$$

a

$$e^{2x} - 6 \cdot e^x + 8 = 0 \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$z^2 - 6z + 8 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$
$$z_1 = 4 \quad z_2 = 2 \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 4 = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(4) \approx 1.386$$

$$z_2 = 2 \qquad |ln$$
$$x_2 = ln(2) \approx 0.693$$

b

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \qquad |\text{subst. } e^x = z$$
$$z - 2 - \frac{15}{z} = 0 \qquad | \cdot z$$
$$z^2 - 2z - 15 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$
$$z_1 = 5 \quad (z_2 = -3) \qquad |\text{resubst.}$$

$$z_1 = 5 = e^x \qquad |ln$$
$$x_1 = ln(5) \approx 1.609$$

g

$(e^{2x}-6)\cdot(5-e^{3x})=0 \qquad |$subst. $e^x=z$
$(z^2-6)\cdot(5-z^3)=0$

$z^2-6=0 \qquad |\sqrt{}$
$z_1=\sqrt{6}\approx 2.449 \qquad |$resubst.
$z_1=\sqrt{6}=e^x \qquad |ln$
$x_1=ln(\sqrt{6})\approx 0.896$

$5-z^3=0 \qquad |\sqrt[3]{}$
$z_2=\sqrt[3]{5}\approx 1.710 \qquad |$resubst.
$z_2=\sqrt[3]{5}=e^x \qquad |ln$
$x_2=ln(\sqrt[3]{5})\approx 0.536$

h

$2\cdot e^x+15=8\cdot e^{-x} \qquad |$subst. $e^x=z$
$2z+15=\frac{8}{z} \qquad |-\frac{8}{z}$
$2z+15-\frac{8}{z}=0 \qquad |\cdot z$
$2z^2+15z-8=0$
$z_{1/2}=\frac{-15\pm\sqrt{225+64}}{4}$
$z_1=0.5 \quad (z_2=-8) \qquad |$resubst.

$z_1=0.5=e^x \qquad |ln$
$x=ln(0.5)\approx -0.693$

146/9

$h(t)=0.02\cdot e^{kt}$

a

$h(0)=0.02$

b

$$h(6) = 0.02 \cdot e^{6k} = 0.4$$
$$e^{6k} = 20$$
$$6k = ln(20)$$
$$k = \frac{ln(20)}{6} \approx 0.499$$

c

$$h(9) = 0.02 \cdot e^{0.499 \cdot 9} \approx 1.784$$

d

$$h(t) = 0.02 \cdot e^{0.499t} = 3$$
$$e^{0.499t} = 150$$
$$0.499t = ln(150)$$
$$t = \frac{ln(150)}{0.499} \approx 10.041$$

e

$$h(t+1) - h(t) = 1.5$$
$$0.02 \cdot e^{k \cdot (t+1)} - 0.02 \cdot e^{k \cdot t} = 1.5$$
$$0.02e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 1.5$$
$$e^{kt} \cdot (e^k - 1) = 75$$
$$0.647e^{0.499t} = 75$$
$$e^{0.499t} = 115.92$$
$$0.499t = ln(115.92)$$
$$t = \frac{ln(115.92)}{0.499} \approx 9.525$$

f

$$h'(t) = 0.02k \cdot e^{kt} = 1$$
$$0.02 \cdot 0.499 \cdot e^{0.499t} = 1$$
$$e^{0.499t} = 100.2$$
$$0.499t = ln(100.2)$$
$$t = \frac{ln(100.2)}{0.499} \approx 9.233$$

g

$$t \geqslant 9$$
$$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t}$$

$$k(t) = 3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 3$$
$$e^{-0.175t} \approx 0.061$$
$$-0.175t \approx ln(0.061)$$
$$t \approx \frac{ln(0.061)}{-0.175} \approx 15.982$$

$$k(t+1) - k(t) = 0.2$$
$$3.5 - 8.2 \cdot e^{-0.175 \cdot (t+1)} - 3.5 + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$$
$$-8.2 \cdot e^{-0.175 \cdot (t+1)} + 8.2 \cdot e^{-0.175t} = 0.2$$
$$-8.2 \cdot e^{-0.175t} \cdot (e^{-0.175} - 1) = 0.2$$
$$1.316 \cdot e^{-0.175t} \approx 0.2$$
$$e^{-0.175t} \approx 0.152$$
$$-0.175t \approx ln(0.152)$$
$$t \approx \frac{ln(0.152)}{-0.175} \approx 10.765$$

3.25 Wiederholung

3.25.1 Sinusfunktionen und Newton-Verfahren

130/8

$$P(x_0|f(x_0)) \qquad Q(x_0|g(x_0)) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

a

$$\begin{aligned}
&f(x) = 2 \cdot sin(x) \qquad g(x) = x^2 \\
&f'(x) = 2 \cdot cos(x) \qquad g'(x) = 2x \\
&h(x) = f'(x) - g'(x) = 2 \cdot cos(x) - 2x = 0 \\
&h'(x) = -2 \cdot sin(x) - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0 \\
&x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1 \\
&x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.75036 \\
&x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.73911 \\
&x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.73908 \\
&x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.73909 \\
&x^* \approx 0.7391
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.7391|1.3472) \\
&Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.7391|0.5463)
\end{aligned}$$

b

$$
\begin{aligned}
&f(x) = sin(x) + 2 \cdot cos(x) \qquad g(x) = x^3 \\
&f'(x) = cos(x) - 2 \cdot sin(x) \qquad g'(x) = 3x^2 \\
&h(x) = f'(x) - g'(x) = cos(x) - 2 \cdot sin(x) - 3x^2 = 0 \\
&h'(x) = -sin(x) - 2 \cdot cos(x) - 6x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0 \\
&x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 0.5 \\
&x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0.34120 \\
&x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \approx 0.32336 \\
&x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} \approx 0.32311 \\
&x_5 = x_4 - \frac{h(x_4)}{h'(x_4)} \approx 0.32311 \\
&x^* \approx 0.3231
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(x^*|f(x^*)) \approx P(0.3231|2.2140) \\
&Q(x^*|g(x^*)) \approx Q(0.3231|0.0337)
\end{aligned}
$$

3.25.2 Produktregel

138/3

a

$$
\begin{aligned}
&f(x) = (2x-8) \cdot sin(x) \qquad f'(x) = 2 \cdot cos(x) \\
&f(x) = a \cdot b \qquad f'(x) = a' \cdot b + a \cdot b' \neq a' \cdot b' \\
&\Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot sin(x) + (2x-8) \cdot cos(x)
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
&g(x) = (2x-3) \cdot (8-x)^2 \\
&g'(x) = \mathbf{2} \cdot (8-x)^2 + (2x-3) \cdot \mathbf{(16\ \text{-}\ 2x)}
\end{aligned}
$$

3.25.3 Quotientenregel

140/11

a

$$f(x) = sin(x) + tan(x) = sin(x) + \frac{sin(x)}{cos(x)}$$
$$f'(x) = cos(x) + (cos(x))^{-2}$$

b

$$f(x) = sin(x) \cdot tan(x) = \frac{(sin(x))^2}{cos(x)}$$
$$f'(x) = sin(x) + \frac{sin(x)}{(cos(x))^2}$$

c

$$f(x) = \frac{cos(x)}{tan(x)} = \frac{(cos(x))^2}{sin(x)}$$
$$f'(x) = -2 \cdot cos(x) - \frac{(cos(x))^3}{(sin(x))^2}$$

d

$$f(x) = \frac{tan(x)}{2} = \frac{sin(x)}{2 \cdot cos(x)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot (cos(x))^2}$$

e

$$f(x) = tan(2x) = \frac{sin(2x)}{cos(2x)}$$
$$f'(x) = \frac{2}{(cos(2x))^2}$$

f

$$f(x) = tan(x^2) = \frac{sin(x^2)}{cos(x^2)}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(cos(x^2))^2}$$

g

$$f(x) = (tan(x))^2 = \frac{(sin(x))^2}{(cos(x))^2}$$
$$f'(x) = \frac{2 \cdot sin(x)}{(cos(x))^3}$$

h

$$f(x) = \frac{2}{tan(x)} = \frac{2 \cdot cos(x)}{sin(x)}$$
$$f'(x) = -\frac{2}{(sin(x))^2}$$

3.25.4 Kurvendiskussion

146/13

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x}$$
$$0 \mathrel{\hat{=}} 01.10.2002$$

a

$$92 \mathrel{\hat{=}} 01.01.2003$$
$$f(92) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 92} \approx 96161.27$$
$$457 \mathrel{\hat{=}} 01.01.2004$$
$$f(457) = 80000 \cdot e^{0.002 \cdot 457} \approx 199542.38$$

b

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000$$
$$e^{0.002x} = 12.5$$
$$x = \frac{ln(12.5)}{0.002} \approx 1262.86 \mathrel{\hat{=}} 17.03.2006$$

$$f(x) = 80000 \cdot e^{0.002x} = 1000000000$$
$$e^{0.002x} = 12500$$
$$x = \frac{ln(12500)}{0.002} \approx 4716.74 \mathrel{\hat{=}} 31.08.2015$$

c

$$2 \cdot f(x_1) = f(x_2)$$
$$2 \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} = 80000 \cdot e^{0.002x_2}$$
$$2 \cdot e^{0.002x_1} = e^{0.002x_2}$$
$$ln(2) + 0.002x_1 = 0.002x_2$$
$$x_2 - x_1 = \frac{ln(2)}{0.002} \approx 346.57$$

d

$$p \cdot f(x_1) = f(x_1 + 365)$$
$$p \cdot 80000 \cdot e^{0.002x_1} = 80000 \cdot e^{0.002\cdot(x_1+365)}$$
$$p \cdot e^{0.002x_1} = e^{0.002x_1} \cdot e^{0.002\cdot 365}$$
$$p = e^{0.002\cdot 365} \approx 2.08 = 208\%$$

e

$$365 \,\hat{=}\, 01.10.2003$$
$$f(365) - f(364) = 80000 \cdot e^{0.002\cdot 365} - 80000 \cdot e^{0.002\cdot 364} \approx 331.68$$

$$f'(x) = 80000 \cdot 0.002 \cdot e^{0.002x} = 160 \cdot e^{0.002x}$$
$$f(364.5) \approx 331.68$$

f

$$f(x+1) - f(x) = 400$$
$$80000 \cdot e^{0.002\cdot(x+1)} - 80000 \cdot e^{0.002x} = 400$$
$$80000 \cdot e^{0.002x} \cdot (e^{0.002} - 1) = 400$$
$$x = ln(\frac{400}{80000 \cdot (e^{0.002} - 1)}) \cdot \frac{1}{0.002} \approx 457.65 \,\hat{=}\, 02.01.2004$$

$$f'(x) = 160 \cdot e^{0.002x} = 400$$
$$x = ln(\frac{400}{160}) \cdot \frac{1}{0.002} \approx 458.15 \,\hat{=}\, 03.01.2004$$

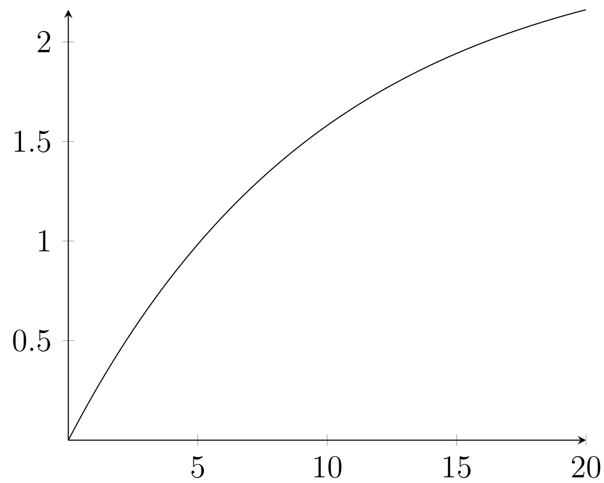
146/10

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$

a

$$v(0) = 0$$
$$v(10) \approx 1.58$$

b



c

$$v(t) = 2$$
$$t = -\frac{ln(0.2)}{0.1} \approx 16.09$$

d

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 2.5$$

e

$$v(t) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t})$$
$$v(t+1) = 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)})$$

$$v(t) < v(t+1)$$
$$2.5 \cdot (1 - e^{-0.1t}) < 2.5 \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)}) \qquad | \div 2.5$$
$$1 - e^{-0.1t} < 1 - e^{-0.1 \cdot (t+1)} \qquad | -1; \cdot(-1)$$
$$e^{-0.1t} > e^{-0.1 \cdot (t+1)} \qquad |ln()$$
$$-0.1t > -0.1 \cdot (t+1) \qquad | \cdot (-10)$$
$$t < t+1$$

f

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$$
$$= v(5) - v(2) \approx 0.98 - 0.45 = 0.53$$

g

$$v'(t) = 0.25 \cdot e^{-0.1t}$$
$$v'(2) = 0.20$$

h Die Beschleunigung ist bei $t = 0$ am größten, da sie ständig kleiner wird.

3.26 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

z. B. $\begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{vmatrix}$ 2x3 LGS

LGS in Stufenform

$$\begin{vmatrix} -x_2 & + & 4x_1 & + & 3x_3 & = 2 \\ 3x_2 & + & x_1 & & & = 5 \\ 4x_2 & & & & & = 8 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ einfach zu lösen

III $4x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 2$

eingesetzt in II

$x_1 + 3 \cdot 2 = 5 \rightarrow x_1 = -1$

eingesetzt in I

$4 \cdot (-1) - 2 + 3x_3 = 2 \rightarrow x_3 = \dfrac{8}{3}$

$L = \{(-1|2|\dfrac{8}{3})\}$

3.26.1 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren dient dazu, ein LGS in Stufenform zu überführen und dann zu lösen.

256/4

a

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{array}\right|$$

Eliminiere x_1 aus 2 der 3 Gleichungen

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 13 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{array}\right| \quad III - 2 \cdot I$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 18x_2 & - & 1x_3 & = & 17 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{array}\right| \quad 2 \cdot II - 3 \cdot I$$

Eliminiere x_2 aus 1 der 2 Gleichungen

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 38x_3 & = & 38 \\ 0x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{array}\right| \quad II - 3 \cdot III$$

Löse LGS in Stufenform

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ & & & & 38x_3 & = & 38 \\ & & 6x_2 & - & 13x_3 & = & -7 \end{array}\right|$$

II $38x_3 = 38 \rightarrow x_3 = 1$

eingesetzt in III

$6x_2 - 13 \cdot 1 = -7 \rightarrow x_2 = 1$

eingesetzt in I

$2x_1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_1 = 1$

$L = \{(1|1|1)\}$

3.26.2 Matrix-Schreibweise

256/4

b

$$\left|\begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccccc} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 5 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & -2 \end{array}\right| \qquad II + I; \quad III - II$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} -1 & 7 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 6 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 12 & 0 & \vdots & 12 \end{array}\right| \qquad II - 3 \cdot III$$

...

$L = \{0|1|2\}$

c

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 0.3 & 0 & -3.6 & -6 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} II - 2 \cdot I$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 1.8 & 3 \\ 2.1 & 0 & 0 & -2.4 \\ 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} II + 3.6 \cdot III$$

$2.1x_1 = -2.4 \rightarrow x_1 = -\frac{8}{7}$

$0.5 \cdot (-\frac{8}{7}) + x_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{11}{7}$

$0.6x_2 + 1.8 \cdot \frac{11}{7} = 3 \rightarrow x_2 = \frac{2}{7}$

$L = \{-\frac{8}{7}|\frac{2}{7}|\frac{11}{7}\}$

Beispiel einer Sonderfall-Lösung

$$\begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 5 \\ & - & x_2 & + & 12x_3 & = 50 \end{vmatrix} I + 3 \cdot II$$

Eine Variable ist frei wählbar und wird a bezeichnet

$x_3 = a$

$II \quad -x_2 + 12a = 50 \rightarrow x_2 = 12a - 50$

$I \quad 3x_1 + 2(12a - 50) - 3a = 5 \rightarrow x_1 = -7a + 35$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a + 35 \\ 12a - 50 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a \\ 12a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung im $\mathbb{R}^3$

3.26.3 Steckbriefaufgaben

Beispiel Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Funktion zweiten Grades $y = ax^2 + bx + c$
Merkmale:

1. verläuft durch $P(2|5)$

$$f(2) = 5$$
$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c5 = 4a + 2b + c$$

2. hat bei $x = 3$ die Steigung 10

$$f'(x) = 2ax + b = 10$$
$$10 = 6a + b$$

3. schneidet die y-Achse bei 5

$$f(0) = 5$$
$$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$5 = c$$

$$c = 5$$
$$10 = 6a + b \quad \Rightarrow \quad b = 10 - 6a$$
$$5 = 4a + 2(10 - 6a) + 5 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$$
$$b = 10 - 6 \cdot 2.5 = -5$$

Die gesuchte Funktion heißt $f(x) = 2.5x^2 - 5x + 5$

Beispiele für Bedingungen

- hat bei $P(1|3)$ einen Wendepunkt

$$f(1) = 3$$
$$f''(1) = 0$$

- verläuft bei $P(-2|3)$ parallel zur Geraden $g(x) = 4x - 1$

$$f'(-2) = 4$$

- hat an der Stelle $x = 3$ einen Sattelpunkt

$$f'(3) = 0$$
$$f''(3) = 0$$

- ist eine achsensymmetrische Funktion 4. Grades / punktsymmetrische Funktion 5. Grades

$$
\begin{aligned}
&f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\
&\Rightarrow \quad b = d = 0 \\
&g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \\
&\Rightarrow \quad b = d = f = 0
\end{aligned}
$$

262/1

c

$$
\begin{aligned}
&A(1|3) \qquad B(-1|2) \qquad C(3|2) \\
&y = ax^2 + bx + c \\
&3 = a + b + c \\
&2 = a - b + c \\
&2 = 9a + 3b + c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a - b + c = 9a + 3b + c \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}b \\
&\frac{1}{2}b + c = -\frac{3}{2} + c + 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4} \\
&3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = 2\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
y = -\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 2\frac{3}{4}x
$$

262/4

a

$A(0|1) \quad B(1|0) \quad C(-1|4) \quad D(2|-5)$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$1 = d$
$0 = a + b + c + d$
$4 = -a + b - c + d$
$-5 = 8a + 4b + 2c + d$

$a + b + c = a + b - c + d + 8a + 4b + 2c + d \quad \Rightarrow \quad c = 2a + b$
$4 = -a + b - 2a - b + d \quad \Rightarrow \quad a = -1 \quad \Rightarrow \quad b + c = 0$
$c = 2a + b \quad \Rightarrow \quad c = -1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

$y = -x^3 + x^2 - x + 1$

3.26.4 Funktionenschar

262/3

b

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$A(2|0) \quad B(-2|0)$

$$\begin{vmatrix} 4a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 4a & - & 2b & + & c & = & 0 \end{vmatrix}$$

2x3 LGS unterbestimmt $\Rightarrow$ eine Variable ist frei wählbar

$$\begin{vmatrix} 4a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 4b & & & & & = & 0 \end{vmatrix} \qquad I - II$$

$\Rightarrow \quad b = 0$
$4a + c = 0$

setze $a = k$
$4k + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4k$

$f_k(x) = kx^2 - 4k$ Funktionenschar, Parameterfunktion

c

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$A(-4|0) \qquad B(0|-4)$

$$\begin{vmatrix} 16a & - & 4b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & -4 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad c = -4$

$16a - 4b - 4 = 0$

$a = k$

$16k - 4b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4k - 1$

$f_k(x) = kx^2 + 4kx - x - 4$

262/8

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad b = d = 0$

$f(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad e = -1$

$f(1) = -3 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) < 0$

$f(x) = ax^4 + bx^2 - 1$

$f(1) = a + b - 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a + b = -2$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f'(1) = 4a + 2b = 2a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -4$

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$

$f''(x) = 24x^2 - 8$

$f''(1) = 16 > 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

263/10

c

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$P(-3|3) \qquad Q(3|0)$$

$$f(-3) = 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 3$$
$$f(3) = 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0$$

$$9a_2 - 3a_1 + a_0 = 9a_2 + 3a_1 + a_0 + 3$$
$$-a_1 = a_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$
$$9a_2 + 1.5 + a_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.5 - 9a_2$$

$$a_2 = k$$
$$f_k(x) = kx^2 - 0.5x + 1.5 - 9k$$

schwarz

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{8}$$
$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 2.625$$

rot

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{4}$$
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3.75$$

blau

$$f_k(1) = k - 0.5 + 1.5 - 9k = -1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$
$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 0.75$$

263/11

$$f(\pm\frac{1624}{2}) = f(\pm 812) = 254 - 65 = 189$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad b = 0$$
$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$f(812) = ax^2 = 659344a = 189 \quad \Rightarrow \quad a \approx 2.8665 \cdot 10^{-4}$$
$$f(x) = 2.8665 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$$

263/12

$$SP(-1|-1) \qquad SP(1|1) \quad \Rightarrow \quad f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0$$
$$WP(0|0) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$
$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f(1) = a + b + c = 1$$
$$f'(1) = 5a + 3b + c = 0$$
$$f''(1) = 20a + 6b = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad II - I$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad III - 3 \cdot II$$

$$8a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8}$$
$$\frac{3}{2} + 2b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{4}$$
$$\frac{3}{8} - \frac{5}{4} + c = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{8}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

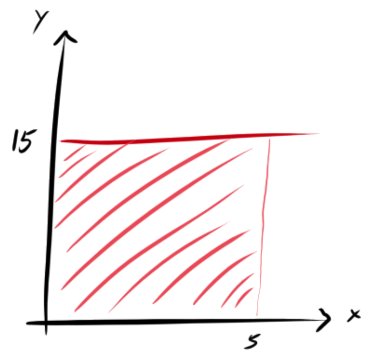
Kapitel 4

Integralrechnung

$s = v \cdot t \qquad$ fuer $v = const.$

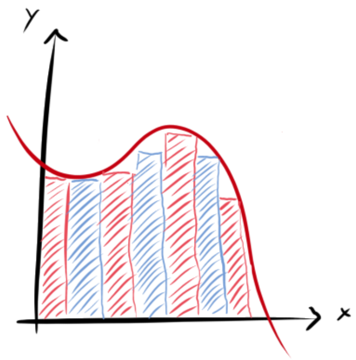
Rechtecksfläche $A = 5s \cdot 15\dfrac{m}{s} = 75m$

Es gilt $A = s =$ zurückgelegter Weg



$s(t) = v(t) \cdot t$

$s =$ Summe von Rechtecksstreifen als Näherung für den Flächeninhalt

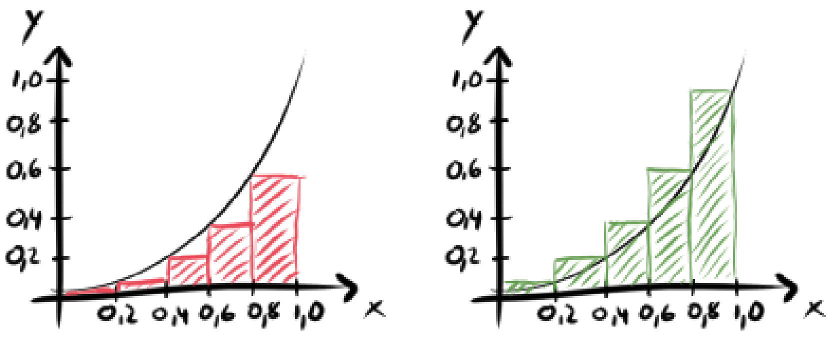


Durch Grenzwertbildung erhält man

$$s = \int_0^5 v(t) \cdot dt$$

4.1 Untersumme - Obersumme

Beispiel $f(x) = y = x^2 \qquad x \in [0; 1]$



Untersumme

$U_5 = 0.2 \cdot (0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64) = 0.24FE$
Der wahre Flächeninhalt ist sicher größer als $0.24FE$

Obersumme

$O_5 = 0.2 \cdot (0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + 1) = 0.44FE$
Der wahre Flächeninhalt ist sicher kleiner als $0.44FE$

$5 \rightarrow$ Intervall in 5 gleiche Abschnitte:
$I = [0; 1] \Rightarrow$ Intervallbreite $0.2 \rightarrow$ Breite der Rechtecke
$(0 + ... + 0.64)$ bzw. $(0.04 + ... + 1) \rightarrow$ Höhen der Rechtecke
$FE \rightarrow$ Flächeneinheiten

$U_{10} = 0.1 \cdot (0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81)$
$= 0.285FE$
$O_{10} = 0.1 \cdot (0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1)$
$= 0.385FE$

4.1.1 Obersumme/Untersumme → lim → Integral

$$f(x) = x^2$$

Teile das Intervall in n Teile
→ Jeder Teil ist $\frac{b}{n}$ (da $b = 1 \rightarrow \frac{1}{n}$) Längeneinheiten breit

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot (0 + (\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + (\frac{3}{n})^2 + ... + (\frac{n-1}{n})^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot ((\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + (\frac{3}{n})^2 + ... + (\frac{n-1}{n})^2 + (\frac{n}{n})^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2(n+1)-1)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{n}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}$$

Der wahre Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{3}FE$

Wenn gilt, dass $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n =$ Zahl $= \int_a^b f(x) \cdot dx$

Existiert ein gemeinsamer Grenzwert ($n \rightarrow \infty$) von Untersumme und Obersumme, so nennt man den Grenzwert Integralwert des bestimmten Integrals.

160/3

a $1FE \mathrel{\hat{=}} 1000000m^3$ Wasser

b Am schnellsten zwischen $2h$ und $4h$.
Am langsamsten zwischen $8h$ und $10h$.
Nach $12h$ wiederholt sich der Graph periodisch.

c Der Graph wird um 25% gestreckt, die Fläche wächst also um 25%.

4.2 Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

a, b ... linke bzw. rechte Intervallgrenze
$f(x)$ ... Integrand, zu integrierende Funktion
x ... Integrationsvariable
dx ... Differenzial $\quad \lim\limits_{x \to 0} \Delta x = dx$
$f(x) \cdot dx$ ... Fläche eines infinitesimal schmalen Rechteckstreifens mit Breite dx und Höhe $f(x)$
$\int$ ... Integralzeichen meint eine Summation

liegt $f(x)$ unterhalb der x-Achse (< 0) im Intervall $[a; b]$, so gilt $\int_a^b f(x) \cdot dx < 0$

Das Integral ist die Differenz oberhalb der x-Achse und unterhalb der x-Achse liegender Flächenstücke

4.3 Berechnung von Integralen, Hauptsatz

Gesucht: Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x) = y = \frac{2}{5}x^3$ im Intervall $[0; b]$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{b}{n} \cdot (\frac{1}{5}(\frac{b}{n})^3 + \frac{1}{5}(\frac{2b}{n})^3 + ... + \frac{1}{5}(\frac{(n-1)\cdot b}{n})^3 + \frac{1}{5}b^3) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot (1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{1}{4}n^2 \cdot (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

$$\int_0^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}) = \frac{1}{20}b^4$$

Betrachte den Flächeninhalt zu linker Grenze a und rechter Grenze b.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{20}a^4 \qquad fuer \quad [0; a] \\
&\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{20}b^4 \qquad fuer \quad [0; b] \\
&A = \frac{1}{20}b^4 - \frac{1}{20}a^4 \qquad fuer \quad [a; b]
\end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{20}b^4 - \frac{1}{20}a^4 = \int_a^b \frac{1}{5}x^3 \cdot dx = \left[\frac{1}{20}x^4\right]_a^b$$

4.3.1 Verallgemeinerung (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dabei gilt $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ heißt Aufleitungsfunktion oder Stammfunktion von $f(x)$.

$$\text{im Beispiel: } F(x) = \frac{1}{20}x^4 \quad \rightarrow \quad (\frac{1}{20}x^4)' = \frac{d}{dx}(\frac{1}{20}x^4) = \frac{1}{5}x^3$$

167/3

a

$$f(x) = x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{3}x^3$$
$$\int_0^4 x^2 \cdot dx = F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$$

i

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 \qquad F(x) = \frac{1}{40}x^5$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{8}x^4 \cdot dx = F(-1) - F(-2) = 0.775$$

j

$$f(x) = 0.5x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{6}x^3$$
$$\int_{-4}^{4} 0.5x^2 \cdot dx = F(4) - F(-4) = \frac{64}{3}$$

k

$$f(x) = x^5 \qquad F(x) = \frac{1}{6}x^6$$
$$\int_{-1}^{1} x^5 \cdot dx = F(1) - F(-1) = 0$$

4.4 Integrale lösen - Anwendung

168/11

$$v(t) = 9.81 \cdot t \qquad V(t) = s(t) = 4.905 \cdot t^2$$
$$\int_0^3 v(t) \cdot dt = V(3) - V(0) = 44.145$$

168/13

a

$$f(x) = x \qquad F(x) = 0.5x^2$$
$$\int_0^z x \cdot dx = 18 = F(z) - F(0) = F(z) - 0$$
$$F(z) = 18 \quad \Rightarrow \quad z = 6$$

b

$$f(x) = 4x \qquad F(x) = 2x^2$$
$$\int_1^z 4x \cdot dx = 30 = F(z) - F(1) = F(z) - 2$$
$$F(z) = 32 \quad \Rightarrow \quad z = 4$$

c

$$f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$$
$$\int_z^{10} 2x \cdot dx = 19 = F(10) - F(z) = 100 - F(z)$$
$$F(z) = 81 \quad \Rightarrow \quad z = 9$$

d

$$f(x) = 0.4 \qquad F(x) = 0.4x$$
$$\int_0^{2z} 0.4 \cdot dx = 8 = F(2z) - F(0) = F(2z) - 0$$
$$F(2z) = 8 \quad \Rightarrow \quad 2z = 20 \quad \Rightarrow \quad z = 10$$

168/15

a

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{72}}{-4}$$
$$x_1 \approx -0.1213 \qquad x_2 \approx 4.1213$$

b

$$f(x) = (x+3)^2 \cdot (x+1) = 0$$
$$(x+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3$$
$$(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$$

c

$$f(x) = 4x^2 \cdot (x^2 - 10) + 4x^2 = 8x^4 - 40x^2 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$(x^2 - 10) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 3$$

d

$$f(x) = 4 \cdot (x - 0.5)^4 - 4 = 0$$
$$(x - 0.5)^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.5 \qquad x_2 = -0.5$$

e

$$f(x) = e^x - e^2 = 0$$
$$x = 2$$

f

$$f(x) = 0.2e^{2x} - 1 = 0$$
$$e^{2x} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{log(5)}{2} \approx 0.8047$$

Teil III

12/1

4.5 Stammfunktion bilden, integrieren

$$\int_a^b x^7 \cdot dx = \left[\frac{1}{8}x^8\right]_a^b$$

$$\int \frac{1}{(x+4)^3} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-2} + c$$

$$\int \frac{5}{(3x-2)^5} \cdot dx = -\frac{5}{4 \cdot 3} \cdot (3x-2)^{-4} + c$$

$$\int \frac{1}{5} \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot e^{2x} + c$$

4.6 bestimmtes Integral, Integralfunktion, unbestimmtes Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x} \cdot dx = [ln(|x|)]_a^b$$

sofern $a, b > 0$ oder $a, b < 0$ kein Problem
wenn eines größer und eines kleiner 0 ist, dann muss man genauer untersuchen (Polstelle!)

$a = -1 \qquad b = 2$

$$\int_a^b \frac{1}{2x-5} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot ln(|2x-5|)\right]_a^b$$

171/3

a

$$\int_0^2 (2+x)^3 \cdot dx = \left[\frac{1}{4} \cdot (2+x)^4\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot ((2+2)^4 - (2+0)^4) = 60$$

b

$$\int_2^3 (1 + \frac{1}{x^2}) \cdot dx = \left[x - \frac{1}{x}\right]_2^3 = (3 - \frac{1}{3}) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{6}$$

c

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-(x+1)^{-1}\right]_0^2 = -(2+1)^{-1} + (0+1)^{-1} = \frac{2}{3}$$

d

$$\int_0^9 \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x} \cdot dx = [\frac{4}{15} \cdot x^{\frac{3}{2}}]_0^9 = \frac{4}{15} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot 0^{\frac{3}{2}} = 7.2$$

e

$$\int_{-0.5}^0 e^{2x+1} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1}\right]_{-0.5}^0 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0+1} - \frac{1}{2} e^{2 \cdot (-0.5)+1} \approx 0.8591$$

f

$$\int_0^\pi sin(3x-\pi) \cdot dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot cos(3x-\pi)\right]_0^\pi =$$
$$-\frac{1}{3} \cdot cos(3\pi - \pi) + \frac{1}{3} \cdot cos(3 \cdot 0 - \pi) = -\frac{2}{3}$$

g

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{5} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[\frac{2}{5} e^{\frac{1}{2}x}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2} \cdot 1} - \frac{2}{5} e^{\frac{1}{2} \cdot (-1)} = \frac{2e-2}{5 \cdot \sqrt{e}} \approx 0.4169$$

h

$$\int_{-\pi}^\pi cos(3x) \cdot dx = [-3 \cdot sin(3x)]_{-\pi}^\pi = -3 \cdot sin(3\pi) + 3 \cdot sin(3 \cdot (-\pi)) = 0$$

171/4

c

$$\int_3^4 \frac{1}{2(x+1)} \cdot dx = \left[\frac{ln(x+1)}{2}\right]_3^4 = \frac{ln(4+1)}{2} - \frac{ln(3+1)}{2} \approx 0.1116$$

4.6.1 Integralfunktion

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = J$$

$$J_a(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Integralfunktion zur unteren (linken) Grenze a. Sie gibt zu jedem später eingesetzten Wert x $(= b)$ den bestimmten Integralwert an.

$$\int f(x) \cdot dx = [F(x)]^x = F(x) + c$$

unbestimmtes Integral

175/2

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad J_a(x) = \int_a^x \frac{1}{2}t \cdot dt$$

x	-4	-2	0	2	4	6
$J_{-4}(x)$	0	-3	-4	-3	0	5

x	-4	-2	0	2	4	6
$J_0(x)$	4	1	0	1	4	9

x	-4	-2	0	2	4	6
$J_2(x)$	3	0	-1	0	3	8

4.7 Rechenregeln für Integrale

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = -\int_b^a f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \pm \int_a^b g(x) \cdot dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \cdot dx$$

172/15

a

$$\int_{-1}^{3.3} 5x^2 \cdot dx - 10 \cdot \int_{-1}^{3.3} \frac{1}{2}x^2 \cdot dx = 0$$

b

$$\int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2+4}) \cdot dx + 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{x^2+4} \cdot dx = \int_0^1 x \cdot dx = 0.5$$

c

$$\int_3^{3.7} \frac{1}{x} \cdot dx + \int_{3.7}^4 \frac{1}{x} \cdot dx = \int_3^4 \frac{1}{x} \cdot dx = ln(4) - ln(3) \approx 0.2877$$

176/10

$$f(t) = 50t^4 \cdot e^{-t}$$

a Die Integralfunktion gibt die Anzahl der Telefonanrufe bis zum Zeitpunkt x an.

$$J_0(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt$$
$$J_0(4) = \int_0^4 f(t) \approx 445$$

b

$$J_4(8) = J_0(8) - J_0(4) \approx 1080 - 445 = 635$$

Die Anzahl der Anrufer in der Warteschleife ist zu dem Zeitpunkt am höchsten, an dem die Anrufer pro Minute wieder unter 200 sinken (bei $t \approx 5$).

176/9

$$f(t) = cos(\frac{2\pi}{24}(t-12))$$
$$g(t) = cos(\frac{2\pi}{24}(t-6))$$

a Zunahme ($f(t) > 0$) zwischen 6 und 18 Uhr
Abnahme ($f(t) < 0$) zwischen 18 und 6 Uhr

Zunahme ($g(t) > 0$) zwischen 0 und 12 Uhr
Abnahme ($g(t) < 0$) zwischen 12 und 24 Uhr

b Am schnellsten um 12 Uhr (Hochpunkt)
Am langsamsten um $0/24$ Uhr (Tiefpunkt)

Am schnellsten um 6 Uhr (Hochpunkt)
Am langsamsten um 18 Uhr (Tiefpunkt)

c Maximal um 18 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)
Minimal um 6 Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

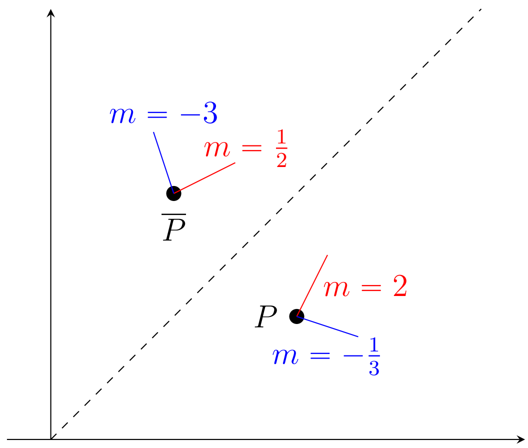
Maximal um 12 Uhr (Rechts-Links-Wendepunkt)
Minimal um $0/24$ Uhr (Links-Rechts-Wendepunkt)

d

$$F(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot sin(\frac{\pi}{12}t) + c$$
$$c = 20 - F_{c=0}(12) = 20$$
$$F(18) \approx 23.82 \qquad F(6) \approx 16.18$$

$$G(t) = -\frac{12}{\pi} \cdot cos(\frac{\pi}{12}t) + c$$
$$c = 20 - G_{c=0}(12) \approx 16.1803$$
$$G(12) = 20 \qquad G(0) = G(24) \approx 12.36$$

4.8 Ableitung der Umkehrfunktion



$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = \sqrt{y}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)}$$

Beispiele

$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = y = e^x \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = ln(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{ln(x)}} = \frac{1}{y}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = y = sin(x) \Leftrightarrow \overline{f(y)} = x = asin(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{cos(asin(y))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(asin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = y = cos(x) \Leftrightarrow f(y) = x = acos(y)$$

$$\overline{f'(y)} = \frac{1}{-sin(x)} = \frac{1}{-sin(acos(y))}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(acos(y))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = y = tan(x) \Leftrightarrow f(y) = x = atan(y)$$

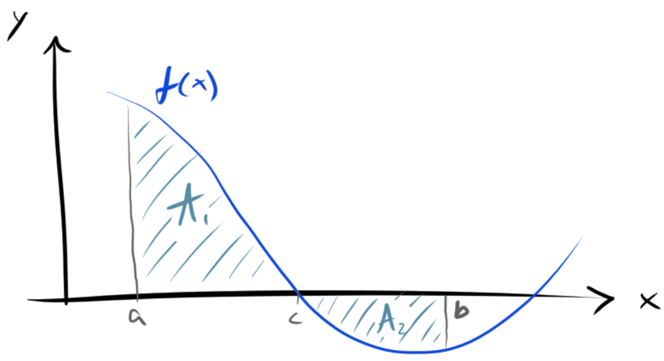
$$\overline{f'(y)} = cos^2(x) = cos^2(atan(y))$$

$$= 1 - sin^2(x) = 1 - sin^2(atan(y)) = 1 - \frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}$$

umbenennen

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

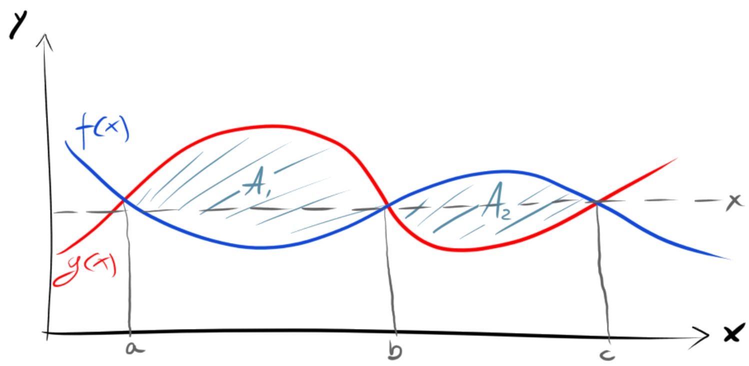
4.9 Integral und Flächeninhalt



$$A = A_1 + A_2$$

$$A \neq \int_a^b f(x) \cdot dx = I$$

$$A = |\int_a^c f(x) \cdot dx| + |\int_c^b f(x) \cdot dx|$$



$$A = A_1 + A_2$$

1. Berechne die Schnittstellen a, b, c
2. $A = |\int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx| + |\int_b^c (g(x) - f(x)) \cdot dx|$

Wie die Flächen zur x-Achse liegen ist unwichtig, weil ich gedanklich beide Graphen gemeinsam soweit nach oben schieben kann dass die Flächen komplett oberhalb der x-Achse liegen.

$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow f(x)+d \\ g(x) &\longrightarrow g(x)+d \end{aligned}$$

Durch Differenzialbildung fallen die gedanklich eingeführten Verschiebungen wieder weg.

$$\int_a^b ((f(x)+d)-(g(x)+d))\cdot dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\cdot dx$$

179/2

a

$$f(x) = -0.5x^2 + 0.5 \qquad g(x) = -1.5$$
$$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 0.5x \qquad G(x) = -1.5x$$

I $A_2 + A_3$

$$\begin{aligned} A &= |\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx| \\ &= |F(1) - F(-1)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

II $A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$$\begin{aligned} A &= |\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\cdot dx| \\ &= |(F(2) - F(-2)) - (G(2) - G(-2))| = 5\frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

III A_3

$$\begin{aligned} A &= |\int_{0}^{1} f(x)\cdot dx| \\ &= |F(1) - F(0)| = \frac{1}{3}FE \end{aligned}$$

IV A_1

$$\begin{aligned} A &= |\int_{-2}^{-1} f(x)\cdot dx| \\ &= |F(-1) - F(-2)| = \frac{2}{3}FE \end{aligned}$$

180/5

a

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -x^2 + 4x$$
$$f(x) = g(x) \qquad L = \{0; 2\}$$
$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x$$
$$A = |\int_0^2 (2x^2 - 4x) \cdot dx| = |[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2]_0^2| = 2\frac{2}{3}FE$$

b

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad g(x) = 2.5x - 5.25$$
$$f(x) = g(x) \qquad L = \{2; \sim -0.4; \sim 0.5\}$$
$$f(x) - g(x) = -2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2}$$
$$A \approx |\int_{0.5}^2 (-2.5x + 5.25 - \frac{1}{x^2}) \cdot dx|$$
$$= |[-1.25x^2 + 5.25x + \frac{1}{x}]_{0.5}^2| \approx 1.7FE$$

4.9.1 Flächeninhalt, uneigentliche Integrale

180/8

$$f_t(x) = \frac{t}{x^2} \qquad [1; 2]$$
$$F_t(x) = -\frac{t}{x}$$
$$A(t) = \int_1^2 -\frac{t}{x} \cdot dx = \frac{t}{2}$$
$$A(16) = 8$$

180/10

$$f_a(x) = a \cdot sin(x) \qquad g_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot sin(x) \qquad x \in [0;\pi]$$
$$f_a(x) - g_a(x) = sin(x) \cdot (a + \frac{1}{a})$$
$$A(a) = \int_0^\pi sin(x) \cdot (a + \frac{1}{a}) \cdot dx = (a + \frac{1}{a}) \cdot [-cos(x)]_0^\pi = (a + \frac{1}{a}) \cdot 2$$

$$A'(a) = -\frac{2}{a^2} + 2$$
$$A''(a) = \frac{4}{a^3}$$
$$A'(a) = 0 \qquad L = \{\pm 1\}$$
$$A''(1) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$
Minimaler Flächeninhalt: $A(1) = 4FE$

Beispiel $f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad [3;\infty[$
$$A = \lim_{z\to\infty} \int_3^z \frac{1}{x^2} \cdot dx = \lim_{z\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_3^z$$
$$= \lim_{z\to\infty} (-\frac{1}{z} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}FE$$

183/1

Fig. 1

$$y = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad [1;z]$$
$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^z = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}$$
$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \frac{1}{2}$$

Fig. 2

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad [2;z]$$
$$A(z) = \int_2^z e^{-\frac{1}{2}x} \cdot dx = \left[-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^z = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{e}$$
$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \frac{2}{e} \approx 0.736$$

Fig. 3

$$y = \frac{2}{x^3} \qquad [z;1]$$
$$A(z) = \int_z^1 \frac{2}{x^3} \cdot dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right] = -1 + \frac{1}{z^2}$$
$$A = \lim_{z \to 0} A(z) = \infty$$

Fig. 4

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} \qquad [z;4]$$
$$A(z) = \int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot dx = \left[8 \cdot \sqrt{x}\right] = 16 - 8 \cdot \sqrt{z}$$
$$A = \lim_{z \to 0} A(z) = 16$$

183/7

$$W = \int_{h_1}^{h_2} F(s) \cdot ds$$
$$F(s) = \gamma \frac{m \cdot M}{s^2}$$
$$c = \gamma \cdot m \cdot M \approx 3.982 \cdot 10^{17} \cdot \frac{m \cdot kg}{s^2}$$
$$F(s) = c \cdot s^{-2}$$
$$W = \int_{h_1}^{h_2} c \cdot s^{-2} \cdot ds = \left[-c \cdot s^{-1}\right]_{h_1}^{h_2}$$

a

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \qquad h_2 = 4.22 \cdot 10^7 m$$
$$W = \left[-c \cdot s^{-1}\right]_{6.37 \cdot 10^6 m}^{4.22 \cdot 10^7 m} \approx 1.333 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 5.308 \cdot 10^{10} Nm$$

b

$$h_1 = 6.37 \cdot 10^6 m \qquad h_2 \to \infty$$
$$W = \lim_{h_2 \to \infty} \left[-c \cdot s^{-1}\right]_{6.37 \cdot 10^6 m}^{h_2} \approx 1.570 \cdot 10^{-7} \cdot c \approx 6.252 \cdot 10^{10} Nm$$

183/5 I $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $F(x) = -\frac{1}{2 \cdot x^2}$

II $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $F(x) = -\frac{1}{x}$

III $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $F(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$

a

$$\lim_{z \to \infty} \int_1^z f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^z$$

I $= \frac{1}{2}$

II $= 1$

III $= \infty$

b

$$\lim_{z \to 1} \int_z^0 f(x) \cdot dx = [F(x)]_z^1$$

I $= \infty$

II $= \infty$

III $= 2$

180/11

$$f(x) = x^2$$
$$t(x) = m \cdot x + b$$
$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad m = f'(a) = 2a$$
$$f(a) = a^2 \quad \Rightarrow \quad b = a^2 - 2a \cdot a = -a^2$$
$$\Rightarrow t(x) = 2a \cdot x - a^2$$

$$\int_0^a (f(x) - t(x)) \cdot dx = \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) \cdot dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{3}a^3$$

4.10 Integration von Produkten: partielle Integration

Ableitungs-Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad | - u \cdot v'$$
$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v' \qquad | \int$$
$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$
$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Beispiel

$$\int sin(x) \cdot x \cdot dx = -cos(x) \cdot x - \int -cos(x) \cdot 1 \cdot dx$$
$$= -cos(x) \cdot x + sin(x) + c$$
$$(-cos(x)) \cdot x + sin(x))' = sin(x) \cdot x$$

$$\int e^{2x} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - (\frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1 \cdot dx)$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x + \frac{1}{4}e^{2x}$$
$$= e^{2x} \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$$

Spezialfälle

$$\int 1 \cdot ln(x) \cdot dx = x \cdot ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$= x \cdot ln(x) - x$$

(Stammfunktion von $ln(x)$)

$$\int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -cos(x) \cdot cos(x) - \int cos(x) \cdot (-sin(x)) \cdot dx$$
$$= -cos^2(x) - \int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx \qquad | + \int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx$$
$$2 \cdot \int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -cos^2(x) \qquad | \div 2$$
$$\int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -\frac{cos^2(x)}{2}$$

188/1

a

$$\int_{-1}^{1} e^x \cdot x \cdot dx = [e^x \cdot x]_{-1}^{1} - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = [e^x \cdot x - e^x]_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

d

$$\int_{0}^{0.5} e^{2x+2} \cdot 4x \cdot dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+2} \cdot 4x\right]_0^{0.5} - \int \frac{1}{2}e^{2x+2} \cdot 4 \cdot dx$$
$$= \left[2e^{2x+2} \cdot x - e^{2x+2}\right]_0^{0.5} = e^2$$

188/2

b

$$\int_{0}^{\pi} cos(x) \cdot x \cdot dx = [sin(x) \cdot x]_0^{\pi} - \int sin(x) \cdot 1 \cdot dx$$
$$= [sin(x) \cdot x + cos(x)]_0^{\pi} = -2$$

d

$$\int_{0}^{2\pi} sin(0.5x) \cdot 2x \cdot dx = [-2cos(0.5x) \cdot 2x]_0^{2\pi} - \int -2cos(0.5x) \cdot 2 \cdot dx$$
$$= [-2cos(0.5x) \cdot 2x + 8sin(0.5x)]_0^{2\pi} = 8\pi$$

188/8

a

$$\int_0^{\pi} (sin(x))^2 \cdot dx = [-cos(x) \cdot sin(x)]_0^{\pi} - \int -cos(x) \cdot cos(x) \cdot dx$$
$$= [-cos(x) \cdot sin(x)]_0^{\pi} - \int (-sin^2(x) - 1) \cdot dx$$
$$= [-cos(x) \cdot sin(x) + x]_0^{\pi} - \int sin^2(x) \cdot dx \qquad | + \int_0^{\pi} sin^2(x) \cdot dx; \quad \div 2$$
$$= \left[\frac{-cos(x) \cdot sin(x) + x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

c

$$\int_{-2}^{2} e^x \cdot cos(x) \cdot dx = [sin(x) \cdot e^x]_{-2}^{2} - \int sin(x) \cdot e^x \cdot dx$$
$$= [sin(x) \cdot e^x]_{-2}^{2} - ([-cos(x) \cdot e^x]_{-2}^{2} - \int -cos(x) \cdot e^x \cdot dx)$$
$$= [sin(x) \cdot e^x + cos(x) \cdot e^x]_{-2}^{2} - \int cos(x) \cdot e^x \cdot dx$$
$$= \left[\frac{(sin(x) + cos(x)) \cdot e^x}{2} \right]_{-2}^{2} \approx 1.912$$

d

$$\int_0^2 sin(\pi x) \cdot e^{2x} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot sin(\pi x) \right]_0^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \pi \cdot cos(\pi x) \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot sin(\pi x) \right]_0^2 - (\left[\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi \cdot cos(\pi x) \right]_0^2 - \int -\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi^2 \cdot sin(\pi x) \cdot dx)$$
$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot sin(\pi x) \right]_0^2 - (\left[\frac{1}{4} e^{2x} \cdot \pi \cdot cos(\pi x) + \frac{1}{4} \pi^2 \right]_0^2 - \int e^{2x} \cdot sin(\pi x) \cdot dx)$$
$$= \left[\frac{2e^{2x} \cdot sin(\pi x) - \pi \cdot e^{2x} \cdot cos(\pi x)}{\pi^2 + 4} \right]_0^2 = \frac{\pi}{\pi^2 + 4} - \frac{e^4 \cdot \pi}{\pi^2 + 4} \approx -12.140$$

4.11 Integration durch Substitution

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int (f(g(x)))' \cdot dx$$

$= f(g(x))$ Dabei ist f die Stammfunktion von f'

$\Rightarrow$ Benenne um $f' \to f \quad f \to F$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = F(g(x))$$

Substitution 1

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx \qquad \text{ersetze } z = g(x) \qquad \frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dz = g'(x) \cdot dx$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)}$$

Resubstitution

$$= [F(g(x))]_a^b$$

Beispiel

$$\int_1^2 \frac{5x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$$

subst. $z = 1 + 3x^2 \qquad \frac{dz}{dx} = (1+3x^2)' = 6x \qquad dz = 6x \cdot dx$

$$= \frac{5}{6} \int_1^2 \frac{6x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx = \frac{5}{6} \int_4^{13} z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz$$

$$= \frac{5}{6} \left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_4^{13} = \frac{5}{6} \left[2 \cdot (1+3x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 \approx 2.676$$

191/1

a

$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx; \qquad g(x) = 1 + 2x^2$$

subst. $z = g(x) \qquad dz = g'(x) \cdot dx$

$$= \int_{g(0)}^{g(2)} \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot dz = \left[2 \cdot \sqrt{z}\right]_1^9 = 4$$

b

$$\int_{-1}^{1} \frac{-2x}{(4-3x^2)^2} \cdot dx; \qquad g(x) = 4 - 3x^2$$

subst. $z = g(x) \qquad dz = g'(x) \cdot dx$

$$= \int_{g(-1)}^{g(1)} \frac{1}{3z^2} \cdot dz = \left[-\frac{1}{3z}\right]_1^1 = 0$$

191/3

e

$$\int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx$$

subst. $z = 1 + x^2 \qquad dz = 2x \cdot dx$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{z} \cdot dz = [ln(z)]_1^{10}$$

resubst.

$$= \left[ln(1+x^2)\right]_0^3 = ln(10) \approx 2.3026$$

f

$$\int_{-1}^{2} \frac{e^x}{2+e^x} \cdot dx$$

subst. $z = 2 + e^x \qquad dz = e^x \cdot dx$

$$= \int_{2+e^{-1}}^{2+e^2} \frac{1}{z} \cdot dz = [ln(z)]_{2+e^{-1}}^{2+e^2}$$

resubst.

$$= [ln(2+e^x)]_{-1}^2 \approx 1.3775$$

g

$$\int_{e}^{e^2} \frac{4}{x \cdot ln(x)} \cdot dx$$

subst. $z = ln(x) \qquad dz = \frac{1}{x} \cdot dx$

$$= \int_{1}^{2} \frac{4}{z} \cdot dz = [4 \cdot ln(z)]_1^2$$

resubst.

$$= [4 \cdot ln(ln(x))]_e^{e^2} = 4 \cdot ln(2) \approx 2.7726$$

h

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi \cdot cos(\pi x)}{sin(\pi x)} \cdot dx$$

subst. $z = sin(\pi x) \qquad dz = \pi \cdot cos(\pi x) \cdot dx$

$$= \int_{sin(\frac{\pi}{3})}^{sin(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{z} \cdot dz = [ln(z)]_{sin(\frac{\pi}{3})}^{sin(\frac{\pi}{2})}$$

resubst.

$$= [ln(sin(\pi x))]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \approx 0.1438$$

191/8

a

$$\int_{0}^{ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} \cdot dx \qquad t = e^{2x} + 3 \qquad t' = \frac{dt}{dx} = 2e^{2x} \qquad dx = \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt$$

$$= \int_{t(0)}^{t(ln(2))} \frac{e^{4x}}{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(ln(2))} \frac{e^{2x}}{2t} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(ln(2))} \frac{t-3}{2t} \cdot dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{3}{2} \cdot ln(t)\right]_4^7 \approx 0.6606$$

b

$$\int_{1}^{2} \frac{2x+3}{(x+2)^2} \cdot dx \qquad t = x + 2 \qquad t' = \frac{dt}{dx} = 1 \qquad dx = dt$$

$$= \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2x+3}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{2t-1}{t^2} \cdot dt = \int_{t(1)}^{t(2)} (\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}) \cdot dt$$

$$= \left[2 \cdot ln(t) + \frac{1}{t}\right]_3^4 \approx 0.4920$$

c

$$\int_{0.5}^{7} \frac{x}{\sqrt{4x-1}} \cdot dx \qquad t = 4x-1 \quad t' = \frac{dt}{dx} = 4 \quad dx = \frac{dt}{4}$$

$$= \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{4} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{4 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt = \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{t+1}{16 \cdot \sqrt{t}} \cdot dt$$

$$= \left[(\frac{1}{16}t + \frac{1}{16}) \cdot 2 \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \int_{t(0.5)}^{t(7)} \frac{1}{8} \cdot \sqrt{t} \cdot dt$$

$$= \left[(\frac{1}{8}t + \frac{1}{8}) \cdot \sqrt{t} \right]_{t(0.5)}^{t(7)} - \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \right]_{t(0.5)}^{t(7)}$$

$$= \left[\frac{1}{8} \cdot (t \cdot \sqrt{t} + \sqrt{t} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3}) \right]_{1}^{27} \approx 6.3285$$

d

$$\int_{0}^{4} \frac{4}{1 + 2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx \qquad t = 1 + 2 \cdot \sqrt{x} \quad t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad dx = \sqrt{x} \cdot dt$$

$$= \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \sqrt{x} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4}{t} \cdot \frac{t-1}{2} \cdot dt = \int_{t(0)}^{t(4)} \frac{4t-4}{2t} \cdot dt$$

$$= \left[\frac{1}{2t} \cdot (2t^2 - 4t) \right]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} -\frac{1}{2t^2} \cdot (2t^2 - 4t) \cdot dt$$

$$= [t-2]_{t(0)}^{t(4)} - \int_{t(0)}^{t(4)} (\frac{2}{t} - 1) \cdot dt$$

$$= [t - 2 - (2 \cdot ln(t) - t)]_{t(0)}^{t(4)} = [2 \cdot (t - 1 - ln(t))]_{1}^{5} \approx 4.7811$$

Substitution 2

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot dx \qquad \text{ersetze } x = g(z)$$

$$= \int_{a}^{b} f(g(z)) \cdot dx = \int_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz$$

$$x = g(z) \qquad z = \overline{g}(x)$$

$$\frac{dx}{dz} = g'(z) \qquad dx = g'(z) \cdot dz$$

$$= [F(g(z))]_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} = [F(x)]_{a}^{b}$$

Beispiel

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \qquad x = sin(z) \qquad dx = cos(z) \cdot dz$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{cos(z)}{\sqrt{1-sin^2(z)}} \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \cdot dz = [z]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \approx 0.524$$

AB/23

a

$$\int_0^1 e^x \cdot \sqrt{e^x+1} \cdot dx$$
$$x(t) = ln(t) \qquad t = e^x \qquad dx = \frac{1}{t} \cdot dt$$
$$= \int_{e^0}^{e^1} e^{ln(t)} \cdot \sqrt{e^{ln(t)}+1} \cdot \frac{1}{t} \cdot dz = \int_1^e \sqrt{t+1} \cdot dz$$
$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(t+1)^3}\right]_1^e \approx 2.8943$$

c

$$\int_1^3 \frac{1}{x} \cdot ln(x^2) \cdot dx$$
$$x(t) = e^t \qquad t = ln(x) \qquad dx = e^t \cdot dt$$
$$= \int_{ln(1)}^{ln(3)} \frac{1}{e^t} \cdot ln(e^{t^2}) \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{ln(3)} ln(e^{2t}) \cdot dt = \int_0^{ln(3)} 2t \cdot dt$$
$$= \left[t^2\right]_0^{ln(3)} = (ln(3))^2 \approx 1.2069$$

4.11.1 Wiederholung

1. Ersetze $g(x)$ durch z

$$\int_a^b = f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \cdot dz$$
$$= [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_a^b$$
$$z = g(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = g'(x)$$
$$dz = g'(x) \cdot dx$$

2. Ersetze x durch $g(z)$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} f(g(z)) \cdot g'(z) \cdot dz$$
$$= [F(g(z))]_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} = [F(x)]_a^b$$

$$x = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{g}(x)$$
$$\frac{dx}{dz} = g'(z)$$
$$dx = g'(z) \cdot dz$$

AB/23

d

$$\int_1^2 \frac{1 + ln(x)}{x \cdot (1 - ln(x))} \cdot dx$$
$$x(t) = e^t \qquad t = ln(x) \qquad dx = e^t \cdot dt$$

$$= \int_{ln(1)}^{ln(2)} \frac{1 + ln(e^t)}{e^t \cdot (1 - ln(e^t))} \cdot e^t \cdot dt = \int_0^{ln(2)} \frac{1 + t}{1 - t} \cdot dt$$
$$z = 1 - t \qquad \frac{dz}{dt} = -1 \qquad dz = -dt$$

$$= -\int_{1-0}^{1-ln(2)} \frac{2 - z}{z} \cdot dz = -\int_{1-0}^{1-ln(2)} (\frac{2}{z} - 1) \cdot dz$$
$$= -[2 \cdot ln(z) - z]_1^{1-ln(2)} \approx 1.6696$$

g

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot dx$$
$$x(t) = 2 \cdot sin(t) \qquad t = asin(\frac{x}{2}) \qquad dx = 2 \cdot cos(t) \cdot dt$$

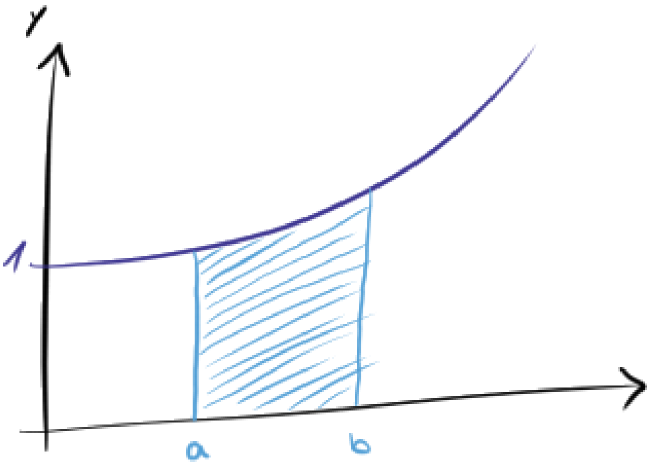
$$= \int_{asin(\frac{0}{2})}^{asin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot cos(t)}{\sqrt{4 - (2 \cdot sin(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{asin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot cos(t)}{2 \cdot \sqrt{1 - (sin(t))^2}} \cdot dt$$
$$= \int_0^{asin(\frac{1}{2})} \frac{2 \cdot cos(t)}{2 \cdot \sqrt{(cos(t))^2}} \cdot dt = \int_0^{asin(\frac{1}{2})} 1 \cdot dt = [t]_0^{asin(\frac{1}{2})} = \frac{\pi}{6}$$

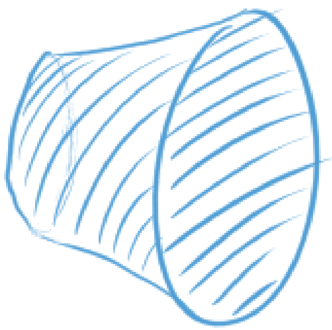
4.12 Rotationskörper

Rotationssymetrische Körper, die man sich dadurch entstanden vorstellen kann, dass eine Fläche um eine Achse (x-Achse) rotiert.

4.12.1 Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$





$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x) \cdot dx \\ &= \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 + 1) \cdot dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{13}{6}FE \approx 2.17FE \\ V &= \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx \\ &= \pi \cdot \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 + 1)^2 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \frac{293\pi}{60}VE \approx 15.34VE \end{aligned}$$

196/1

a

$$y = \sqrt{x+1}$$
$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{-1}^{2} (x+1) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \pi \cdot 4.5VE \approx 14.1372VE$$

b

$$y = \frac{1}{x}$$
$$V = \pi \cdot \int_{1}^{3} (\frac{1}{x})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{1}^{3} x^{-2} \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[-x^{-1}\right]_{1}^{3} = \pi \cdot \frac{2}{3}VE \approx 2.0944VE$$

c

$$y = x^2 - 6x + 8$$
$$y = 0 \qquad L = \{2; 4\}$$
$$V = \pi \cdot \int_{2}^{4} (x^2 - 6x + 8)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{2}^{4} (x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{52}{3}x^3 - 48x^2 + 64x\right]_{2}^{4} = \pi \cdot \frac{16}{15}VE \approx 3.3510VE$$

197/8

$$f(x) = 0.5x + 1 \qquad g(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x-1} \qquad [0; 4]$$

a

$$V_W = \pi \cdot \int_{1}^{4} (1.5 \cdot \sqrt{x-1})^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{1}^{4} (2.25x - 2.25) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[1.125x^2 - 2.25x\right]_{1}^{4} = 10.125\pi \approx 31.8086$$
$$[V_W] = cm^3$$

b

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (0.5x+1)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^4 (0.25x^2+x+1) \cdot dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^4 = \frac{52\pi}{3} \approx 54.4543$$
$$V_G = V - V_W = 10.125\pi - \frac{52\pi}{3} = 22.6456$$
$$[V] = [V_G] = cm^3$$

197/9

b

$$f(x) = 3x^2 - x^3 \qquad g(x) = x^2$$
$$f(x) = g(x) \qquad L = \{0; 2\}$$

$$V = \pi \cdot ((3x^2 - x^3)^2 - (x^2)^2) \cdot dx = \pi \cdot (9x^4 - 6x^5 + x^6 - x^4) \cdot dx$$
$$= \pi \left[\frac{8}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^2 = \frac{192\pi}{35} \approx 17.2339$$

188/4

b

$$f(x) = 2x \cdot sin(x)$$
$$\int f(x) \cdot dx = -cos(x) \cdot 2x - \int -cos(x) \cdot 2 \cdot dx = -cos(x) \cdot 2x + sin(x) \cdot 2$$

188/9

b

$$\int_1^e x \cdot ln(2x) \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot ln(2x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot ln(2x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot ln(2x) - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e \approx 4.3115$$

c

$$\int_1^{e^2} x^2 \cdot ln(x) \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot ln(x) - \frac{1}{9}x^3\right]_1^{e^2} \approx 224.2382$$

Kapitel 5

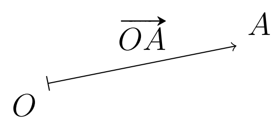
Analytische Geometrie

5.1 Punkte und Vektoren

Jeder Punkt im Raum $\mathbb{R}^3$ ist durch 3 Koordinaten $(x|y|z)$ oder $(x_1|x_2|x_3)$ festgelegt, sofern zuvor der Ursprung O des Koordinatensystems festgelegt wird.
Den Vektor, der vom Ursprung O zum Punkt $A(x|y|z)$ führt, nennt man Ortsvektor von A und notiert man

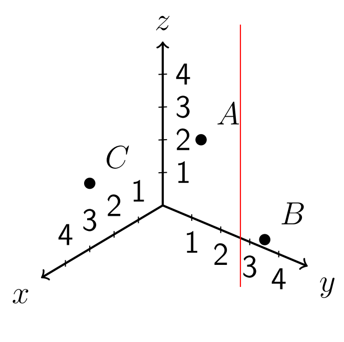
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor ist eine Stecke (mit Länge) mit Orientierung (Pfeil).



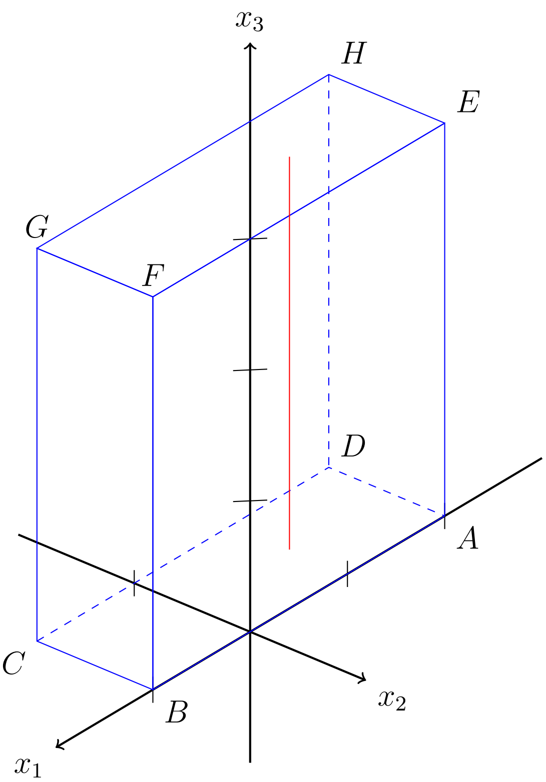
5.1.1 Darstellung im 3-dimensionalen Koordinatensystem

$A(2|3|4)$ $\quad B(-3|1|-2)$ $\quad C(3|0|2)$
Alle Punkte mit $(-2|1|z)$ liegen auf einer Geraden parallel zur z-Achse.



275/2

a+c



b

$D(-2|-1|0)$ $E(-2|0|3)$ $F(1|0|3)$ $H(-2|-1|3)$

276/3

$P(2|3|0)$ $Q(4|4|0)$
$R(0|3|1)$ $S(0|-2|-1)$
$T(2|0|2)$ $U(3|0|-1)$

276/10

$A(2|0|0)$ $B(-1|2|-1)$ $C(-2|3|4)$ $D(3|4|-2)$

a

$A'(2|0|0)$ $B'(-1|2|1)$ $C'(-2|3|-4)$ $D'(3|4|2)$

b

$$A'(-2|0|0) \qquad B'(1|2|-1) \qquad C'(2|3|4) \qquad D'(-3|4|-2)$$

c

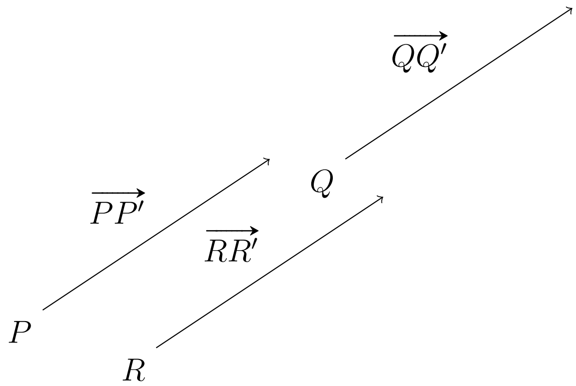
$$A'(2|0|0) \qquad B'(-1|-2|-1) \qquad C'(-2|-3|4) \qquad D'(3|-4|-2)$$

5.2 Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren

$\overrightarrow{OA}$ ist der Ortsvektor des Punktes A. Der Vektor führt vom Ursprung O zum Punkt A. $\overrightarrow{BC}$ ist ein Verschiebungsvektor, der Punkt B auf Punkt C verschiet, bzw. B mit C verbindet und auf C zeigt. Mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{BC}$ lassen sich auch andere Punkte in gleicher Weise verschieben wie Punkt B auf Punkt C.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P(0|1) \quad Q(4|3) \quad R(1.5|0.5)$$

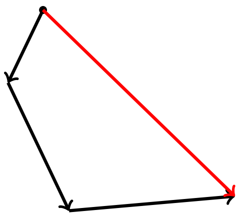
$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP'} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$



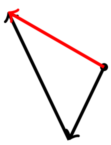
5.2.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
  $$\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\\5\end{pmatrix}$$

- $$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})\ \text{(Gegenvektor von } \vec{b}\text{)}$$
  $$\vec{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$$

- $$\vec{f} = 3 \cdot \vec{a}$$
  $$\vec{f} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\15\end{pmatrix}$$

Darstellung eines Vektors durch andere Vektoren (Bsp. Verbindungsvektor)

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\2\end{pmatrix}$$

279/6

a

$$A(-2|2|3) \qquad B(5|5|5) \qquad C(9|6|5) \qquad D(2|3|3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \text{Parallelogramm}$$

b

$$A(2|0|3) \qquad B(4|4|4) \qquad C(11|7|9) \qquad D(9|3|8)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \text{Parallelogramm}$$

c

$$A(2|-2|7) \qquad B(6|5|1) \qquad C(1|-1|1) \qquad D(8|0|8)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \text{kein Parallelogramm}$$

279/7

a

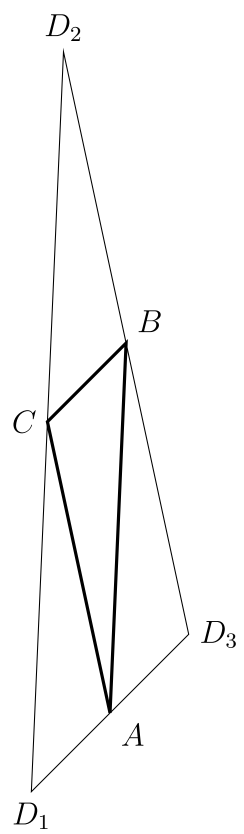
$A(21|-11|43) \qquad B(3|7|-8) \qquad C(0|4|5)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -51 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -14 \\ 56 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 22 \\ -46 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 30 \end{pmatrix}$



b

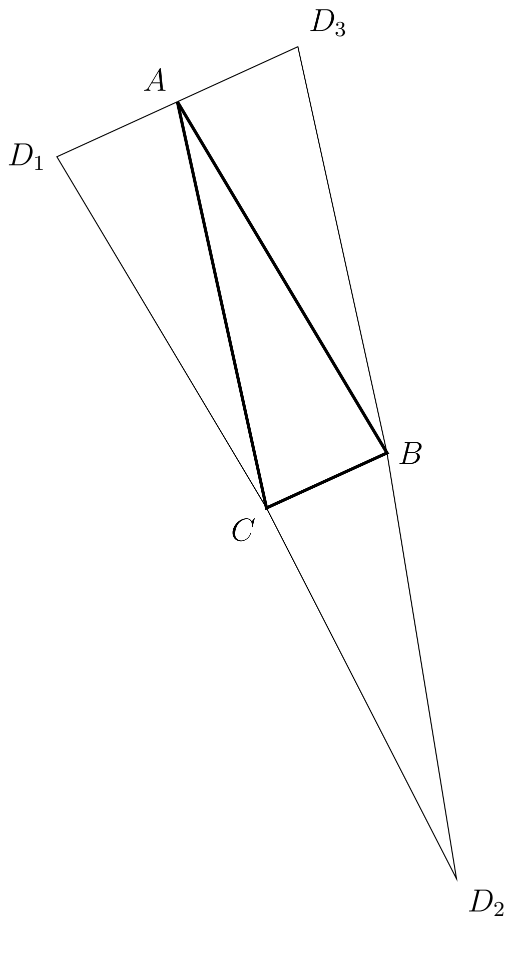
$$A(-75|199|-67) \qquad B(35|0|-81) \qquad C(1|2|3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 110 \\ -199 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -34 \\ 2 \\ 84 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -109 \\ 201 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 111 \\ -197 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -41 \\ 197 \\ -151 \end{pmatrix}$$



5.2.2 Vektorzüge und Linearkombinationen

(zu 279/6)

M_1 ... Mittelpunkt von $\overline{AB}$
M_2 ... Mittelpunkt des Parallelogramms (mit D_1)

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

zu 6a

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu 6b

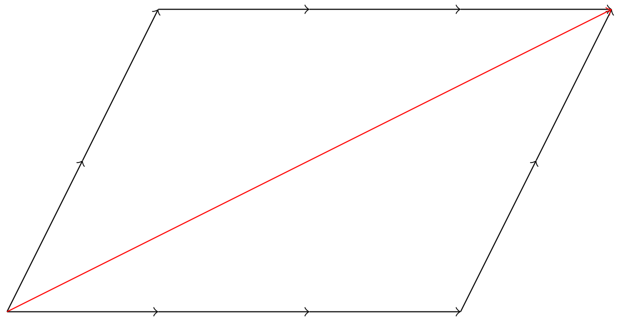
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3.5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Setze ich mehrere Vektorpfeile, mit Koeffizienten multipliziert, aneinander, so nennt man das einen Vektorzug. Die rechnerische Summe solcher Vektoren heißt Linearkombination.

283/5

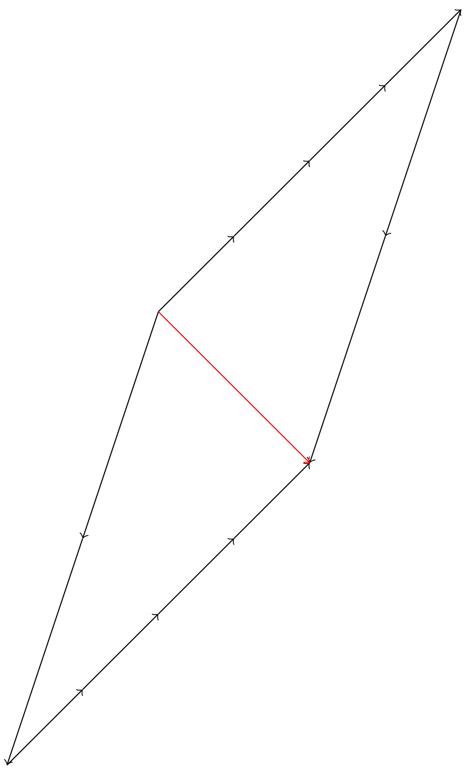
a

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$



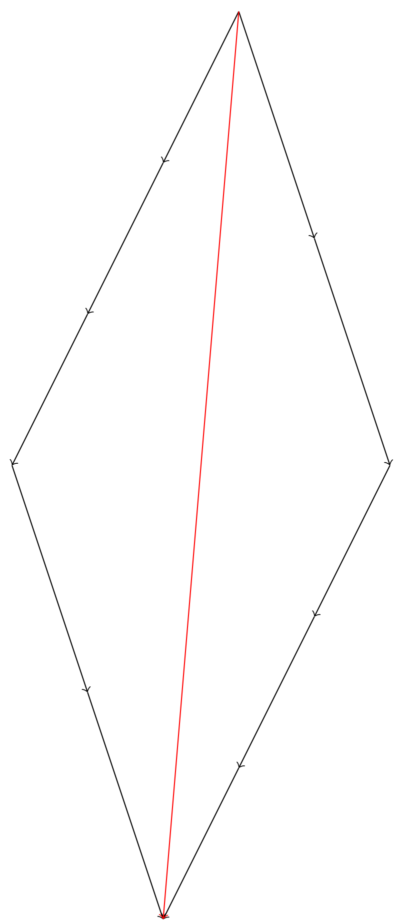
b

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



c

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$



283/7

d

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

f

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 30 \\ 17 \end{pmatrix}$$

284/11

f $-(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$

g $2(2\vec{a} + 4\vec{b}) = 4\vec{a} + 8\vec{b}$

h $-4(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} + \vec{a} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$

i $3(\vec{a} + 2(\vec{a} + \vec{b})) = 9\vec{a} + 6\vec{b}$

j $6(\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b}) = 10\vec{a} - 2\vec{b}$

k $7\vec{u} + 5(\vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{v})) = 2\vec{u} - 10\vec{v}$

284/12

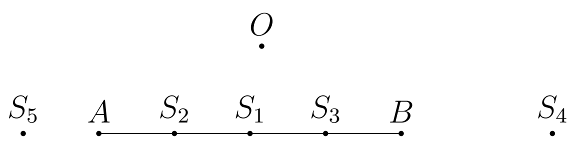
a $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b $\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

c $\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

5.3 Geraden in $\mathbb{R}^3$



$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OS_4} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OS_5} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Gerade durch die Punkte A und B:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Parametergleichung einer Geraden g:

g Name der Geraden

$\vec{x}$ Ortsvektor eines unbestimmten Punktes

$\overrightarrow{OA}$ Ortsvektor eines bestimmten Punktes A (heißt auch Stützvektor)

s Parameter $s \in \mathbb{R}$
Beim Durchlaufen aller Zahlen von $\mathbb{R}$ werden nacheinander alle Punkte der Geraden g dargestellt

$\overrightarrow{AB}$ Richtungsvektor von g gibt die Richtung von g an

$$h\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiele für Punkte auf h

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r = 0$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad r = 1$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad r = 2$$

$$\overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r = -1$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \in h$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gibt es ein r, das alle 3 Gleichungen löst?

$$3 = 1 - 3r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{2}{3}$$

$$7 = 5r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{7}{5}$$

$$-1 = 2 + 2r \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad Q \notin h$$

287/2

a

$$A(1|2|2) \qquad B(5|-4|7)$$

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b

$$A(-3|-2|9) \qquad B(0|0|3)$$

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c

$$A(7|-2|7) \qquad B(1|1|1)$$

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

287/3

c

$$X(2|3|-1) \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 = 7 + t \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$$3 = t \cdot -3 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$$-1 = 4 + t \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$$\Rightarrow \quad X \in g$$

d

$$X(2|-1|-1) \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 = 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$-1 = t \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad X \notin g$$

288/12

a g

$$P_1(2|9|0) \qquad P_2(-4|1|0) \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h

$$H(-4|1|3) \qquad P(2|5|-3) \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i

$$P_1(-4|5|3) \qquad P_2(-4|9|0) \qquad i\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

j

$$P_1(-1|1|0) \qquad P_2(-1|5|3) \qquad j\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b g

$$C(-8|11|0) \qquad P(-2|5|3) \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

h

$$P_1(-2|5|3) \qquad P_2(-6|9|3) \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$B(0|11|0) \qquad P(-6|5|3) \qquad i\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

j

$$M(-4|7|0) \qquad P(-6|5|3) \qquad j\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.3.1 Kollinearität

$g\colon \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b} \qquad t \in \mathbb{R}$

für $\vec{b}$ gilt: $\vec{b}$ kann durch $\vec{b}\,' = s \cdot \vec{b}$ ersetzt werden $\qquad s \in \mathbb{R} \quad s \neq 0$

$\vec{b}\,' \parallel \vec{b} \qquad \vec{b}\,'$ und $\vec{b}$ sind kollinear

Sonderfall: Gerade durch O

z. B. $g\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

hier ist $\vec{a} \parallel \vec{b}$, d. h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear ($\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$)

5.3.2 Lage zweier Geraden

4 Möglichkeiten unterschiedlicher Lage:

- Schnitt (Schnittpunkt)
- parallel
- identisch
- windschief

Verfahren um festzustellen, welche Lage zwei Geraden g und h haben

$g\colon \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

$h\colon \vec{x} = \vec{c} + t \cdot \vec{d}$

$\vec{b} \stackrel{?}{=} r \cdot \vec{d}$

- wahr:

  $\vec{a} \stackrel{?}{=} \vec{c} + t \cdot \vec{d}$ oder $\vec{c} \stackrel{?}{=} \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

  - wenn wahr, dann sind g und h identisch
  - wenn nicht wahr, dann sind g und h parallel

- nicht wahr:

$$\vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c} + t \cdot \vec{d}$$

  - finde ich ein s und ein t, sodass das LGS gelöst wird, so schneiden sich g und h in einem Punkt S
  - ansonsten sind g und h windschief

292/1

a

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$
$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$
$r = 2$
$\Rightarrow$ identisch oder parallel

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$
$t = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ identisch

292/2

a

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9 + 3r = 7 + s$$
$$2r = -2 + s$$
$$6 + r = 2 + 2s$$
$$\Rightarrow \qquad r = 0 \qquad s = 2$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$S(9|0|6)$

292/4

a

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$r = -3$

$\Rightarrow$ identisch oder parallel

$$\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$5 = 7 + t \cdot (-6) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

$$0 = 1 + t \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

$$1 = 2 + t \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ parallel

b

$$g\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht parallel

$$t_g \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t_h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_g \cdot 2 = 2 + t_h \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad t_g = 1$$

$$t_g \cdot 0 = 3 + t_h \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad t_h = -1$$

$$t_g \cdot 1 \neq 4 + t_h \cdot (-1)$$

$\Rightarrow$ windschief

293/8

b

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$i\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.3.3 Parameterpunkte und -geraden

$$\overrightarrow{OA_b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b \cdot 0 \\ 5 + b \cdot 0 \\ 0 + b \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC_d} = \begin{pmatrix} 2d \\ 1 - 5d \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + d \cdot 2 \\ 1 + d \cdot (-5) \\ 7 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_a \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

293/10

a

$$g_a \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad h_a \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$3 - r = 1 + 2s$

$a + 5r = -22s$

$3 + 7r = a - 29s$

$a = 2 \qquad r = 4 \qquad s = -1$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 31 \end{pmatrix}$$

b

$$g_a\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\a\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}10\\7\\0\end{pmatrix} \qquad h_a\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}a\\-1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10\\7\\0\end{pmatrix} \neq t\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht parallel

$$\begin{pmatrix}3\\2\\a\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}10\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$3 + 10r = a + 6s$

$2 + 7r = -1 + 2s$

$a = 3 - s$

$a = 5 \qquad r = -1 \qquad s = -2$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-5\\5\end{pmatrix}$$

293/16

$G = 10cm^2 \qquad h = 15cm$

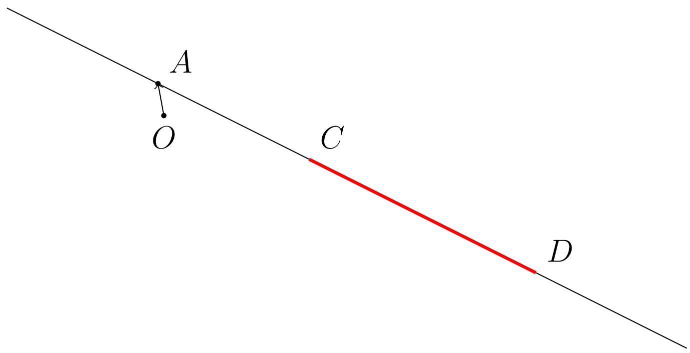
$V_Z = G\cdot h = 150cm^3$

$V_K = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = 50cm^3$

$V_Z - V_K = 100cm^3 = 0.1L$

5.4 Abstand zweier Punkte, Vektorlänge, Streckenlänge

Bsp. $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad r\in\mathbb{R}\colon\ [2;5]$



$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$|\overline{CD}| = |\overrightarrow{CD}| =$ Abstand $C \leftrightarrow D$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seitenlängen des Segels (Bsp. S. 294)

unten: $4m$

links: $\sqrt{(5m)^2 + (3m)^2}$ (Satz des Pythagoras)

rechts: $\sqrt{(\sqrt{34}m)^2 + (4m)^2} = \sqrt{(5m)^2 + (3m)^2 + (4m)^2}$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{45} \approx 6.71LE$$

Die Länge eines Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist $\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

297/2

a

$A(0|0|0) \qquad B(2|3|-1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3.74LE$$

b

$$A(2|2|-2) \qquad B(0|-1|5)$$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{62} \approx 7.87LE$$

c

$$A(1|5|6) \qquad B(1|6|7)$$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.41LE$$

5.4.1 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor hat die Länge $1LE$

Einheitsvektor zu z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{30}$

$$\vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

297/8

a

$$A(1|-2|2) \qquad B(3|2|1) \qquad C(3|0|3)$$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9}$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$
$$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BC}| \quad \Rightarrow \text{nicht gleichschenklig}$$

b

$$A(7|0|-1) \qquad B(5|-3|-1) \qquad C(4|0|1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \quad \Rightarrow \text{gleichschenklig}$$

297/9

a

$$A(4|2|-1) \qquad B(10|-8|9) \qquad C(4|0|1)$$

$$\overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AM_a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{BM_b}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{198} \approx 14.07$$

$$|\overrightarrow{CM_c}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} \approx 5.20$$

b

$A(1|2|-1) \qquad B(-1|10|15) \qquad C(9|6|-5)$

$$\overrightarrow{OM_a} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AM_a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{BM_b}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -18 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-18)^2} = \sqrt{396} \approx 19.90$$

$$|\overrightarrow{CM_c}| = \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

c

zu a

$$|\overrightarrow{AS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AM_a}| = 6$$

$$|\overrightarrow{BS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{BM_b}| \approx 9.38$$

$$|\overrightarrow{CS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{CM_c}| \approx 3.46$$

zu b

$$|\overrightarrow{AS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AM_a}| = 6$$

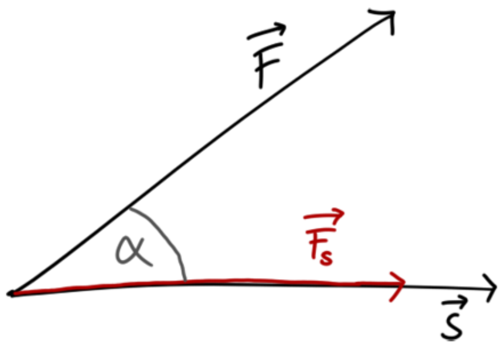
$$|\overrightarrow{BS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{BM_b}| \approx 13.27$$

$$|\overrightarrow{CS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{CM_c}| = 10$$

5.5 Produkte zweier Vektoren

5.5.1 Skalarprodukt

Beispiel aus der Physik:



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$cos(\alpha) = \frac{|\vec{F_s}|}{|\vec{F}|} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F_s}| = |\vec{F}| \cdot cos(\alpha) \qquad \vec{F_s} \text{ ... } \vec{F} \text{ in Richtung } \vec{s}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot cos(\alpha) \cdot |\vec{s}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 7$$

Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$7 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot cos(\alpha) = \sqrt{14} \cdot \sqrt{13} \cdot cos(\alpha)$$

$$\alpha = acos(\frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}}) \approx 1.025 \approx 58.73^\circ$$

Spezialfall:

$\alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow cos(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

321/1

a

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow g \not\perp h$$

b

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g \perp h$$

zu 297/8

a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 11 \qquad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{9}$$

$$\alpha = acos(\frac{11}{3\sqrt{21}}) \approx 0.64 \approx 36.86^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{8}$$

$$\beta = acos(\frac{10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{8}}) \approx 0.69 \approx 39.51^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \qquad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8}$$

$$\gamma = acos(\frac{-2}{3\sqrt{8}}) \approx 1.81 \approx 103.63^\circ$$

b

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \qquad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

$$\alpha = acos(\frac{6}{13}) \approx 1.09 \approx 62.51^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{14}$$

$$\beta = \gamma = acos(\frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{14}}) \approx 1.03 \approx 58.74^\circ$$

zu 297/9

a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 40 \qquad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{236} \cdot \sqrt{8}$$

$$\alpha = acos(\frac{40}{\sqrt{236} \cdot \sqrt{8}}) \approx 0.40 \approx 22.99^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = 196 \qquad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{236} \cdot \sqrt{164}$$

$$\beta = acos(\frac{196}{\sqrt{236} \cdot \sqrt{164}}) \approx 0.09 \approx 4.95^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = -32 \qquad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{164}$$

$$\gamma = acos(\frac{-32}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{164}}) \approx 2.65 \approx 152.06^\circ$$

b

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -48 \qquad |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{324} \cdot \sqrt{96}$$

$$\alpha = acos(\frac{-48}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{96}}) \approx 1.85 \approx 105.79^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = 372 \qquad |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{324} \cdot \sqrt{516}$$

$$\beta = acos(\frac{372}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{516}}) \approx 0.43 \approx 24.52^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} = 144 \qquad |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{96} \cdot \sqrt{516}$$

$$\gamma = acos(\frac{144}{\sqrt{96} \cdot \sqrt{516}}) \approx 0.87 \approx 49.68^\circ$$

321/2

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$2b_1 - 12 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 6$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$2 - a_2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$-3 + 0 + 2b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = 1.5$

321/3

a

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = 0$$

$7a_1 + 17a_2 + 2a_3 = 0$

z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

322/8

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

I $\quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 1c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$

II $\quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 2c_1 + 0c_2 + 3c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{3}{2}c_3$

wähle willkürlich $c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = -3$

setze c_1 und c_3 in I ein

$-3 + 2c_2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{2}$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

I $\quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 2c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$

II $\quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 5c_1 - c_2 - 2c_3 = 0$

I $= \frac{1}{2} \cdot$ II $\quad \Rightarrow \quad c_1 = 7c_2$

wähle willkürlich $c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 7$

setze c_1 und c_2 in I ein

$14 + 3 - c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 17$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

I $\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0$

II $\vec{b} \cdot \vec{c} = 4c_1 - c_2 + 5c_3 = 0$

I = II $\Rightarrow \quad c_1 = c_2$

wähle willkürlich $c_1 = 5 \Rightarrow c_2 = 5$

setze c_1 und c_2 in I ein

$5 + 10 + 5c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -3$

$$\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

322/9

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 0 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -8$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 0 + 2b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = -1.5$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = -24 + b_2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 30$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 30 \\ -1.5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = c_1 + 2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3$

I $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = b_1 + b_2 + 1 = 0$

II $\quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3b_1 + 2b_2 - 5 = 0$

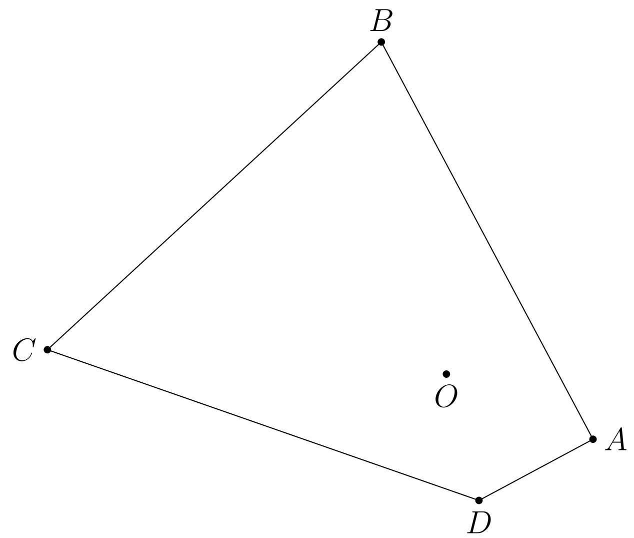
$\Rightarrow \quad b_1 = 7 \qquad b_2 = -8$ (Einsetzungsverfahren)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$$

366/7

a

$$A(2|-2|-2) \qquad B(-2|5.5|-2) \qquad C(-6|2|4) \qquad D(1|-2|1)$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\7.5\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\-3.5\\6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}7\\-4\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\alpha = acos(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}) = acos(\frac{4}{\sqrt{72.25} \cdot \sqrt{10}}) \approx 1.42 \approx 81.44^\circ$$
$$\beta = acos(\frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|}) = acos(\frac{10.25}{\sqrt{64.25} \cdot \sqrt{72.25}}) \approx 1.42 \approx 81.35^\circ$$
$$\gamma = acos(\frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}) = acos(\frac{32}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{64.25}}) \approx 1.09 \approx 62.35^\circ$$
$$\delta = acos(\frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}|}) = acos(\frac{-16}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{74}}) \approx 2.20 \approx 126.03^\circ$$

b

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \approx 351^\circ$$

Die Summe der Innenwinkel ist nicht 360°, da das Viereck nicht auf einer Ebene liegt.

366/3

a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = 90^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 2a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = 30^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \qquad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3 + b^2}$$
$$\alpha = 30^\circ = acos(\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\sqrt{3 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad \alpha = 60^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{c}{2} \qquad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{1 + c^2}$$
$$\alpha = 30^\circ = acos(\frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2 \cdot \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{1 + c^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

366/4

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 13 \qquad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26}$$

$$\alpha_{a,b} = \alpha_{-a,-b} = acos(\frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}}) = 45^\circ$$

$$\alpha_{-a,b} = \alpha_{a,-b} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

5.6 Vektorräume

Beispiel

$$\text{Vektorraum } V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{Prüfe} \quad \vec{a} + \vec{b} \in V_1 : \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nullvektor} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gegenvektor} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Abgeschlossenheit:

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ a + b \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_2$$

z. B. $a = 3, b = 5$ $\qquad \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_2$

$$\left[\begin{pmatrix} (a+b)^2 \\ a + b \\ c \end{pmatrix} \right] \in V_2$$

$\Rightarrow V_2$ ist kein Vektorraum, da er nicht abgeschlossen ist

300/1

b

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2(a+b) \\ 3(a+b) \end{pmatrix} \in V \qquad k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak \\ 2ak \\ 3ak \end{pmatrix} \in V$$

$\Rightarrow V$ ist ein Vektorraum

c

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ a^2 + b^2 \\ a^3 + b^3 \end{pmatrix} \notin V$$

$\Rightarrow V$ ist kein Vektorraum

5.6.1 Basis

Die Basis eines Vektorraums ist ein Satz von Vektoren mit den Eigenschaften:

- Jeder Vektor muss als Linearkombination der Vektoren der Basis darstellbar sein
- Die Anzahl der Basisvektoren muss minimal sein

Beispiel

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad Basis_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

z. B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Basis_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad M$ ist keine Basis

Die Mindestzahl von Vektoren der Basis heißt Dimension des Vektorraums. $\mathbb{R}^3$ ist ein 3-dimensionaler Vektorraum.

$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \qquad Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (1-dim.)

$V_2s = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} \qquad Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (1-dim.)

301/3

a

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$
$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & br \\ -br & ar \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow N$ ist ein Vektorraum

$$Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a + b + c = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c1 + c_2 \end{pmatrix}$$
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0$$
$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & br \\ 0 & cr \end{pmatrix}$$
$$ar + br + cr = r(a + b + c) = 0$$
$\Rightarrow N$ ist ein Vektorraum

$$Basis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & 2 \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow N$ ist kein Vektorraum

5.7 Lineare Abhängigkeit, Unabhängigkeit

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$-4\vec{a} = \vec{b}$ oder $4\vec{a} + \vec{b} = 0$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ sind linear abhängig; geometrisch formuliert: $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind kollinear

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{c})$, $(\vec{b}, \vec{c})$ sind jeweils linear unabhängig

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sind linear abhängig, denn $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$ oder $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Allgemein gilt für 3 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

gilt mindestens eine der Gleichungen

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ oder

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c} = \vec{b}$ oder

$r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} = \vec{a}$

dann heißt die Vektormenge $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ linear abhängig

einfachere Prüfung:

gilt

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad r \neq 0 \vee s \neq 0 \vee t \neq 0$

dann sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, andernfalls linear unabhängig

Prüfe auf lineare Abhängigkeit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

I $r - 2s + 3t = 0$

II $2r + 2s - t = 0$

III $3r + s + t = 0$

$L = \{(0,0,0)\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ ist linear unabhängig

Ist $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Das meint:
Lässt sich jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ durch eine Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ darstellen?

Löse dazu:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

304/2

b

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$7r + s + 3t = 0$

$-r - 2s - 6t = 0$

$3r + s + 3t = 0$

$L = \{(0,0,0); (0, k, -\frac{k}{3})\} \quad \Rightarrow$ linear abhängig

Die letzten beiden Vektoren sind kollinear. Der erste Vektor, der nicht kollinear zu den anderen beiden ist, lässt sich daher nicht durch eine Linearkombination der anderen beiden darstellen.

Prüfe auf lineare Abhängigkeit

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$r = s = t = 0$ ist immer eine Lösung (triviale Lösung)

Findet man weitere Lösungen, so sind $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ linear abhängig und komplanar. Andernfalls (nur triviale Lösung) sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Da $\left|\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}\right| = 3$ ist der $\mathbb{R}^3$ dreidimensional.

304/4

c

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-7\\-2\\8\end{pmatrix}$$

$$r - 4s - 7t = 0$$
$$r - 2s - 2t = 0$$
$$r + 2s + 8t = 0$$

$L = \{(0,0,0); (-6k, -5k, 2k)\} \quad \Rightarrow \quad$ linear abhängig

d

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$4r + s - 2t = 0$$
$$-r + 4s + 3t = 0$$
$$2r + s - t = 0$$

$L = \{(0,0,0)\} \quad \Rightarrow \quad$ linear unabhängig

304/6

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$2r - s = a$$
$$3r + s = 2$$
$$-2r + 2s = -8$$

$$a = 5.5$$
$$r = 1.5 \qquad s = -2.5$$

5.8 Wiederholung: Geometrie, Geraden

307/10 1

$$r = 1.5cm$$
$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = 7.069cm^2$$
$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot r^2 = 1.125cm^2$$
$$A = A_{Kreis} - A_{Dreieck} = 5.944cm^2$$

2

$$A_{Parall.} = 4cm \cdot 2cm = 8cm^2$$
$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (1cm + 2.5cm) \cdot 2cm = 3.5cm^2$$
$$A = A_{Parall.} - A_{Trapez} = 4.5cm^2$$

307/11

a Parallelogramme

b Dreiecke

309/13

a

$$x_3 = 0$$

b

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

x_1-x_2-Ebene
$x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 7$
$R(-12|38|0)$

x_2-x_3-Ebene
$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1$
$S(0|8|6)$

x_1-x_3-Ebene
$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{3}{5}$
$T(3.2|0|7.6)$

c

$$i\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d

$$j\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.9 Parametergleichung einer Ebene

$$E\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

E ... Name der Ebene
$\vec{a}$ ... Stützvektor, Ortsvektor eines bestimmtes Punktes A
$\vec{b}, \vec{c}$ ... Spannvektoren
r, s ... Parameter, die durchlaufen gedanklich alle Werte von $\mathbb{R}$
$\vec{x}$ ... allgemeiner, unbestimmter Ortsvektor aller Punkte X der Ebene E

Ich erhalte eine Ebenengleichung, wenn

- Stütz- und 2 Spannvektoren
- 3 Punkte (nicht auf einer Geraden)
- 1 Gerade und 1 Punkt
- 2 sich schneidende Geraden
- 2 echt parallele Geraden

Punktprobe:

$P \in E$?
$\vec{p}$ ist Orstvektor von P
$\vec{p} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \quad \Rightarrow \quad 3x2$ LGS
wenn eindeutig lösbar, dann $P \in E$

318/5

a

$A(0|1|-1) \quad B(2|3|5) \quad C(-1|3|-1) \quad D(2|2|2)$

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$D \in E$?
I $\;2 = 2r - s$
II $\;2 = 1 + 2r + 2s$
III $\;2 = -1 + 6r$

$L = \{\} \quad \Rightarrow \quad$ keine Ebene

b

$A(3|0|2) \qquad B(5|1|9) \qquad C(6|2|7) \qquad D(8|3|14)$

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$D \in E$?

I $\quad 8 = 3 + 2r + 3s$

II $\quad 3 = r + 2s$

III $\quad 14 = 2 + 7r + 5s$

$L = \{(1,1)\} \quad \Rightarrow$ Ebene

319/10

a

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

319/12

a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$1 + 2t = 3 + s$

$1 + 3t = 4$

$2 + t = 3 + s$

$L = \{(0;1)\}$

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.10 Sonderfälle

$$E\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

$\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ sind in der Regel linear unabhängig, d. h. nicht komplanar. Im Sonderfall sind $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ komplanar. Das bedeutet, dass E durch den Ursprung O verläuft. Im Sonderfall darf ich E so schreiben:

$$E : \vec{x} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

$$g\colon \vec{x} = \vec{d} + r \cdot \vec{e} \qquad r \in \mathbb{R}$$

$\{\vec{d}; \vec{e}\}$ sind normalerweise nicht kollinear. Im Sonderfall, g verläuft durch O, sind sie kollinear:

$$g\colon \vec{x} = r \cdot \vec{e}$$