

Mathe LK Rh

Tim D.

MSS 2017-20

Inhaltsverzeichnis

I	11/1	3
0.1	Terme, Gleichungen, Ungleichungen	4
0.1.1	Pascalsches Dreieck	4
0.1.2	pq-Formel	4
0.1.3	abc-Formel	4
0.1.4	Satz von Vieta	4
0.1.5	Binomischer Lehrsatz	6
0.2	Gleichungen und Ungleichungen	6
0.2.1	Gleichung lösen durch Substitution	6
0.3	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	7
0.3.1	Potenz- und Wurzelgesetze	7
0.3.2	Logarithmengesetze	8
0.4	Funktion - Relation - Zahlenfolge	8
0.4.1	Zahlenfolgen	8
0.4.2	Zahlenfolgen: Monotonie, Beschränktheit	10
0.5	Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion	12
0.5.1	Grenzwerte	14
0.5.2	Grenzwerte von Funktionen: $\lim_{x \rightarrow \infty}$; $\lim_{x \rightarrow a}$	17
0.6	Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit	19
0.6.1	Die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0	22
0.6.2	Polynomdivision	24
0.7	Funktionen - Eigenschaften	24
0.7.1	Punktprobe	24
0.8	Mittlere Änderungsrate	25
0.9	Tangentensteigung, Ableitung	27
0.9.1	Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten	28
0.9.2	Ableitungsfunktion	28
0.10	Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung	29
0.11	Ableitungsfunktion	33
0.12	Nullstellen	38
0.12.1	Mehrfache Nullstellen	39

0.13	Hoch-, Tief- und Sattelpunkte	43
0.14	2. Ableitungsfunktion	45
0.15	Wendepunkte	47
0.16	Nullstellen: Polynomdivision	53
0.17	Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$	58
0.18	Symmetrie	58
0.19	Kurvendiskussion	60
0.19.1	Tangente und Anwendungen	64
II	11/2	69
0.20	Optimieren unter Nebenbedingungen	70

Teil I

11/1

***Diskriminante:**

$> 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen

$= 0 \Rightarrow$ eine Lösung

$< 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots} - \frac{p}{2} - \sqrt{\cdots} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\cdots}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\cdots}\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Beispiel

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = \frac{1}{9}\left(x^2 \underbrace{-6}_{x_1+x_2} x \underbrace{-72}_{x_1 \cdot x_2}\right)$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -6$$

$$0 = \frac{1}{9} \underbrace{(x - 12)(x + 6)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

0.1.5 Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Beispiele

$$n = 2$$

$$(a + b)^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k}$$

Drei Summanden: $k = 0$; $k = 1$; $k = 2$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\binom{2}{0} a^2}_{k=0} + \underbrace{\binom{2}{1} ab}_{k=1} + \underbrace{\binom{2}{2} b^2}_{k=2} \\ &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$n = 5$$

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} \cdot b^k \\ &= \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 + \binom{5}{5} b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

0.2 Gleichungen und Ungleichungen

0.2.1 Gleichung lösen durch Substitution

Beispiel $0 = 2x^4 - 3x^2 - 5$

Lösungsmenge der Gleichung = Menge der Nullstellen (Schnitte mit der x-Achse)
der Funktion mit gleichem Funktionsterm

substituiere $x^2 = t$

$$0 = 2t^2 - 3t - 5$$

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 2.5, \quad t_2 = -1$$

resubstituiere

$$t_1 = x^2 = 2.5 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = \sqrt{2.5}; \quad x_2 = -\sqrt{2.5}$$

$$t_2 = x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$$

keine Lösung

$$L = \{\sqrt{2.5}; -\sqrt{2.5}\}$$

0.3 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

0.3.1 Potenz- und Wurzelgesetze

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$$

0.3.2 Logarithmengesetze

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = \log_a(x) \cdot y$$

$$a^x = 10^{\log(a) \cdot x}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

0.4 Funktion - Relation - Zahlenfolge

Eine Funktion ist eine Zuordnung (Zahlen $x \rightarrow$ Zahlen y), die jeder Zahl x der Definitionsmenge genau eine Zahl y der Wertemenge zuordnet.

Darstellung:

- Funktionsgleichung, z. B. $f(x) = y = \underbrace{2x^2 + 5}_{\text{Funktionsterm}}$
- Graph
- Wertetabelle

Eine Relation ist eine allgemeine Zuordnung von x zu y ,
z. B. $x = 3$ (senkrechte Gerade), $x^2y = y^2 + x^3$

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit $x \in \mathbb{N}$

0.4.1 Zahlenfolgen

Definitionsmenge $D = \mathbb{N}_0$

Wertemenge $W = \mathbb{R}$

$a_n = y = \dots \leftarrow \text{Funktionsterm}$

Angabe eines Funktionsterms für alle Zahlen nennt man explizite Darstellung der Zahlenfolge.

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{8}; \quad \dots; \quad a_{100} = 2^{-100}$$

Berechnung der Folgezahlen Schritt für Schritt nennt man implizite Darstellung der Zahlenfolge. (Rekursion)

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5; a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$$

16/1

a

$$a_n = \frac{2n}{5}$$

$$a_1 = \frac{2}{5}; a_2 = \frac{4}{5}; a_3 = 1\frac{1}{5}; a_4 = 1\frac{2}{5}; a_5 = 2;$$

$$a_6 = 2\frac{2}{5}; a_7 = 2\frac{4}{5}; a_8 = 3\frac{1}{5}; a_9 = 3\frac{3}{5}; a_{10} = 4$$

d

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{1}{8}; a_4 = \frac{1}{16}; a_5 = \frac{1}{32};$$

$$a_6 = \frac{1}{64}; a_7 = \frac{1}{128}; a_8 = \frac{1}{256}; a_9 = \frac{1}{512}; a_{10} = \frac{1}{1024}$$

f

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_1 = 1; a_2 = 0; a_3 = -1; a_4 = 0; a_5 = 1;$$

$$a_6 = 0; a_7 = -1; a_8 = 0; a_9 = 1; a_{10} = 0$$

16/2

a

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 + a_n$$

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 5; a_4 = 7; a_5 = 9;$$

$$a_6 = 11; a_7 = 13; a_8 = 15; a_9 = 17; a_{10} = 19$$

$$a_n = 2n - 1$$

b

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

$$a_1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 4; a_4 = 8; a_5 = 16;$$

$$a_6 = 32; a_7 = 64; a_8 = 128; a_9 = 512; a_{10} = 1024$$

$$a_n = 2^{n-1}$$

d

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (\text{Fibonacci})$$

$$a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = 2; a_5 = 3;$$

$$a_6 = 5; a_7 = 8; a_8 = 13; a_9 = 21; a_{10} = 34$$

$$a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

0.4.2 Zahlenfolgen: Monotonie, Beschränktheit

16/5

$$a_n = 2000000\text{€} \cdot 0.98^n$$

16/7

a

$$V_0 = 1^3 = 1$$

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{8}V_0 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V_0\right) = \frac{9}{8} + \frac{1}{64} = \frac{73}{64}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V_0\right)\right) = \frac{73}{64} + \frac{1}{512} = \frac{585}{512}$$

b

$$V_n = \sum_{k=0}^n 8^{-k}$$

Streng monoton fallende Zahlenfolge

z. B. a_n von 16/5 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n < a_{n-1}$

Streng monoton steigende Zahlenfolge

z. B. V_n von 16/7 ist eine Folge mit der Eigenschaft $a_n > a_{n-1}$

Ohne „streng“entsprechend \leq bzw. \geq

18/1

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 2; a_2 = 1\frac{1}{2}; a_3 = 1\frac{1}{3}; a_4 = 1\frac{1}{4}; a_5 = 1\frac{1}{5}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt (2); nach unten beschränkt (1)

b

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{3}{4}; a_2 = \frac{9}{16}; a_3 = \frac{27}{64}; a_4 = \frac{81}{256}; a_5 = \frac{243}{1024}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt ($\frac{3}{4}$); nach unten beschränkt (0)

c

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_1 = -1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = 1; a_5 = -1$$

nicht monoton

nach oben beschränkt (1); nach unten beschränkt (-1)

d

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = 0; a_2 = \frac{3}{2}; a_3 = \frac{2}{3}; a_4 = \frac{5}{4}; a_5 = \frac{4}{5}$$

nicht monoton

nach oben beschränkt ($\frac{3}{2}$); nach unten beschränkt (0)

e

$$a_n = \frac{8n}{n^2 + 1}$$

$$a_1 = 4; a_2 = \frac{16}{5}; a_3 = \frac{12}{5}; a_4 = \frac{32}{17}; a_5 = \frac{20}{13}$$

streng monoton fallend

nach oben beschränkt (4); nach unten beschränkt (0)

18/2

	a_n	n	$(-1)^n \cdot n$	$(-1)^n : n$	$1 + 1 : n$
↑ beschränkt	✗	✗	✓	✓	✓
↓ beschränkt	✓	✗	✓	✓	✓
beschränkt	✗	✗	✓	✓	✓
monoton	✓	✗	✗	✗	✓

0.5 Grenzwert einer Zahlenfolge/Funktion

Der Grenzwert g ist eine reelle Zahl, der sich die Folgenwerte (Funktionswerte) annähern, sodass die Folgenwerte (Funktionswerte) vom Grenzwert praktisch nicht mehr unterschieden werden können.

z. B.

$$a_n = n^{-1}$$

$$a_n = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}$$

a_n hat den Grenzwert $g = 0$, da a_n auch streng monoton fallend ist, ist $s = 0$ die größte untere Schranke (=„Infimum“).

Vorgehen

Ich gebe eine Genauigkeitsschranke, z. B. $\epsilon = 10^{-3}$ vor (kleine positive Zahl). Zu ϵ finde ich ein $n_\epsilon = 1001$. Alle Folgenwerte mit $n \geq n_\epsilon = 1001$ (also $a_{1001}, a_{1002}, \dots$) liegen näher beim Grenzwert $g = 0$ als $\epsilon = 10^{-3}$ angibt. Finde ich zu jeder möglichen Genauigkeitsschranke ϵ solch ein n_ϵ , so ist g der Grenzwert. Ist diese Bedingung erfüllt, so notiert man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{hier: } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$$

22/2 (Abweichung $< \epsilon = 0.1$)

a

$$a_n = \frac{1+n}{n}$$

$$\left| \frac{1+n}{n} - 1 \right| < 0.1$$

$$n_\epsilon > 10$$

b

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$$
$$\left| \frac{n^2 - 1}{n^2} - 1 \right| < 0.1$$
$$\epsilon > \sqrt{10} \approx 3.162 \quad (\text{ab } 4)$$

c

$$a_n = 1 - \frac{100}{n}$$
$$\left| 1 - \frac{100}{n} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 1000$$

d

$$a_n = \frac{n - 1}{n + 2}$$
$$\left| \frac{n - 1}{n + 2} - 1 \right| < 0.1$$
$$n_\epsilon > 28$$

e

$$a_n = \frac{2n^2 - 3}{3n^2}$$
$$\left| \frac{2n^2 - 3}{3n^2} - 1 \right| < 0.1$$

→ keine Lösung

zu e

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{2n^2 - 3}{3n^2} - 1 \right| < 0.1 \\
 & 1 - \frac{2n^2 - 3}{3n^2} < 0.1 \quad | - 0.1 + \frac{2n^2 - 3}{3n^2} \\
 & 0.9 < \frac{2n^2 - 3}{3n^2} \quad | \cdot 3n^2 \\
 & 2.7n^2 < 2n^2 - 3 \quad | - 2n^2 \\
 & 0.7n^2 < -3 \quad | : 0.7 \\
 & n^2 < -\frac{30}{7} \quad | \sqrt{} \\
 & n < \sqrt{-\frac{30}{7}} \quad \text{und} \quad n < -\sqrt{-\frac{30}{7}} \\
 & \Rightarrow \text{nicht lösbar}
 \end{aligned}$$

0.5.1 Grenzwerte

Eine Zahlenfolge mit Grenzwert ist eine konvergente Folge. Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert ist eine divergente Folge. Eine Nullfolge hat den Grenzwert $g = 0$.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad g = 1 \quad \rightarrow \quad a_n^* = \frac{n}{n+1} - 1 \quad g = 0 \quad (\text{Nullfolge})$$

22/4

a

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\frac{3n-2}{n+2} \right) - 3 \right| < \epsilon \\
 & \left| \frac{-8}{n+2} \right| < \epsilon \quad | x^{-1} \\
 & \frac{n+2}{8} > \frac{1}{\epsilon} \quad | \cdot 8 \\
 & n+2 > \frac{8}{\epsilon} \quad | - 2 \\
 & n > \frac{8}{\epsilon} - 2
 \end{aligned}$$

b

$$|(\frac{n^2 + n}{5n^2}) - 0.2| < \epsilon$$

$$\frac{n}{5n^2} < \epsilon \quad | \cdot 5$$

$$n^{-1} < 5\epsilon \quad | x^{-1}$$

$$n > \frac{1}{5\epsilon}$$

c

$$|(\frac{2^{n+1}}{2^n + 1}) - 2| < \epsilon$$

$$|\frac{-2}{2^n + 1}| < \epsilon \quad | : 2; x^{-1}$$

$$2^n + 1 > \frac{2}{\epsilon} \quad | - 1$$

$$2^n > \frac{2}{\epsilon} - 1 \quad | \log; : \log(2)$$

$$n > \frac{\log(\frac{2}{\epsilon} - 1)}{\log(2)}$$

d

$$|(\frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1}}) - \frac{3}{2}| < \epsilon$$

$$|\frac{3 \cdot 2^n + 2 - 3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}| < \epsilon$$

$$\frac{2}{2^{[n+1]}} < \epsilon$$

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon \quad | x^{-1}$$

$$2^n > \frac{1}{\epsilon} \quad | \log : \log(2)$$

$$n > \frac{-\log(\epsilon)}{\log(2)}$$

24/2

a

$$a_n = \frac{1+2n}{1+n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{1}{n}+n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

b

$$a_n = \frac{7n^3+1}{n^3-10} = \frac{7+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n^3}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n^3}} = \frac{7+0}{1-0} = 7$$

f

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

g

$$a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} = \left(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}\right)^4$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5}{n}-1}{\frac{5}{n}+1}\right)\right)^4 = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1}\right)^4 = \left(\frac{0-1}{0+1}\right)^4 = 1$$

24/3

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{0.5} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 0.5} = \frac{1 - 0}{0.5} = 2$$

c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1 + 4^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - 1}{\frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + 1} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\frac{2}{3})^n + 3}{2} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$$

0.5.2 Grenzwerte von Funktionen: $\lim_{x \rightarrow \infty}$; $\lim_{x \rightarrow a}$

$$f(x) = y = \frac{3x^2 - 3}{(x+1)(x-4)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{-1; 4\}}_{\text{Nullstellen des Nenners}}$$

$x = -1 \rightarrow$ Nullstelle des Zählers und Nenners

$x = 4 \rightarrow$ Nullstelle des Nenners

$$f(x) = y = \frac{3(x^2 - 1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{3x-3}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \neq \lim_{x \rightarrow -\infty}$$

Beispiel $f(x) = 2^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 3}{x - 4} = \frac{3(-1) - 3}{-1 - 4} = \frac{-6}{-5} = 1.2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 3}{x - 4} = ?$$

x	3.9	3.99	3.999	4.1	4.01	4.001
y	-87	-897	-8997	93	903	9003

$$\lim_{x \nearrow 4} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \searrow 4} f(x) = +\infty$$



$x = 4 \rightarrow$ Unendlichkeitsstelle, ein Pol mit Vorzeichenwechsel

Der Punkt $(-1|1.2)$ gehört nicht zum Graphen. Es ergibt sich ein Loch im Graphen.

28/6

a

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	1	1	1	1

b

$$f(x) = \frac{x^3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	-0.01	-0.0001	0.0001	0.01

c

$$f(x) = \frac{x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

x	-0.1	-0.01	0.01	0.1
y	100	10000	10000	100

d

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^0}{3^0} = 1$$

e

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2^0 - 1}{3^0} = 0$$

0.6 Abschnittsweise definierte Funktionen - Stetigkeit

$$D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < -5 \\ x^2 + 10 & \text{für } -5 \leq x < 1 \\ -x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Abschnittsweise definierte Funktionen \rightarrow Für verschiedene Abschnitte der Zahlengeraden von \mathbb{R} sollen unterschiedliche Funktionsterme gelten.

Einschub: Ganzrationale Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

z. B. $f(x) = 3x^4 + 5x - 7$

$n = 4$ (Grad $n \in \mathbb{N}$)

$$a_4 = 3$$

$$a_3 = a_2 = 0$$

$$a_1 = 5$$

$$a_0 = -7$$

Grad der ganzrationalen Funktion ist die höchste Potenz, bspw. 4

Funktionsterm = Polynom

Die Stetigkeit einer Funktion beschreibt die Tatsache, ob man den Graph der Funktion ohne abzusetzen zeichnen kann.

Beispiel: $f(x) = x^3$



$f(x)$ ist überall stetig

Allgemein gilt:

Ganzrationale Funktionen sind überall, d. h. $-\infty < x < \infty$, stetig.

Untersuche $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

$$x_1 = -5; \quad x_2 = 1$$

$$\lim_{x \nearrow -5} f(x) = -10$$

$$\lim_{x \searrow -5} f(x) = -35$$

\Rightarrow unterschiedliche Grenzwerte bedeuten $f(x)$ ist bei $x = -5$ unstetig

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 11$$

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = -1$$

\Rightarrow unstetig bei $x = 1$

28/9

a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 3 \\ 12 - x & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 3} f(x) = 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \searrow 3} f(x) = 12 - 3 = 9$$

\Rightarrow stetig

b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{für } x \leq -1 \\ 2^x - 3 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$$

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = 2^{-1} - 3 = -2.5$$

\Rightarrow unstetig

28/11

•

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sin(\infty) = -1 \text{ bis } +1 \Rightarrow \text{kein Grenzwert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sin(0) = 0$$

0.6.1 Die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0

Eine Funktion ist stetig bei $x = x_0$, wenn Folgendes gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

29/4

$$\text{a } a_n = \frac{n^2 - 7n - 1}{10n^2 - 7n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{10}$$

$$\text{b } a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{5n^3 - 8n + 5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$$

$$\text{f } a_n = \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\text{g } a_n = \frac{3^n + 1}{5^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

29/5

$$\text{a } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 100} - \sqrt{n}) = 0$$

$$\text{b } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n + 10} - \sqrt{n})) = 5$$

$$\text{c } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n) = \frac{3}{4}$$

30/10

$$\text{a } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{8}$$

30/11

a

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = x - 1 = 0$$

c

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 + 1 = 2$$
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2$$

29/6 $a_n = 0.95^n$

a $a_5 = 0.95^5 = 0.77$

b $0.5 = 0.95^n \Rightarrow n = \frac{\log(0.5)}{\log(0.95)} \approx 13.5 \quad n = 13$

c

$$s(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_k$$
$$s(5) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4$$
$$= 1 + 1.9 + 1.805 + 1.71475 + 1.6290125 = 8.0487625$$

0.6.2 Polynomdivision

30/11d

$$f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$

$$(x^6 - 1) : (x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{r} (x^6 - 1) : (x^2 - 1) = x^4 + x^2 + 1 \\ \underline{-x^6 + x^4} \\ x^4 \\ \underline{-x^4 + x^2} \\ x^2 - 1 \\ \underline{-x^2 + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^4 + 1^2 + 1 = 3$$

0.7 Funktionen - Eigenschaften

0.7.1 Punktbprobe

(erfüllt ein Punkt eine Gleichung)

z. B. $P(2|3)$

$$f(x) = y = 2x^2 - 5x + 3$$

Setze für x die Zahl 2 ein

$$f(x) = 8 - 10 + 3 = 1 \neq 3$$

$\Rightarrow P$ gehört nicht zum Graphen von f

38/4

a Höhenmeter: 250m

Streckenkilometer: 10km

b Gesamtanstieg: 750m

c Bei Streckenkilometer 25: Achsensymmetrie zur y-Achse

39/7

a 1.8m

b $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 7.42\}$

c $f(2.5) = 2.425$

39/11

a $f(x) = 1.9879 \cdot 10^{-4} + 86$

b $f(-995.5) = f(995.5) = 283$
 $f(0) = 86$

c $D = \{x \in \mathbb{R} | -995.5 \leq x \leq 995.5\}$

0.8 Mittlere Änderungsrate



Eine **Sekante** s ist eine Gerade, die eine Kurve in 2 (oder mehr) Punkten schneidet.

Eine **Sehne** s^* , Teil einer Sekante, ist eine Strecke, die zwei Kurvenpunkte verbindet.

Eine **Tangente** t ist eine Gerade, die die Kurve in einem Punkt berührt.

Eine **Passante** p ist eine Gerade, die die Kurve nicht schneidet.

$P(1|3); Q(10|8)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{9} \text{ (Steigung der Sekante durch } P \text{ und } Q)$$

Die Sekantensteigung m heißt mittlere Änderungsrate der Funktion f zwischen den Punkten P und Q .

$$P(1|3) \quad f(1) = 3$$

$$Q(10|8) \quad f(10) = 8$$

$$x_1 = 1; x_2 = 10 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = h = 9$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{Differenzenquotient}}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\text{Beispielrechnung } f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$x_1 = 2; x_2 = 10$$

$$h = x_2 - x_1 = 8$$

$$m = \frac{f(10) - f(2)}{8} = \frac{175 - 7}{8} = 21$$

$$41/2 \quad \begin{array}{c|cccccccc} t \text{ [d]} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ h \text{ [mm]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\text{a } m = \frac{h(9) - h(1)}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{b } m = \frac{h(3) - h(1)}{2} = 0$$

$$\text{d } m = \frac{h(6) - h(4)}{2} = 1$$

$$\text{c } m = \frac{h(9) - h(7)}{2} = \frac{3}{2}$$

41/1 $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

a $m = \frac{f(1)-f(0.1)}{0.9} = -10$

b $m = \frac{f(12)-f(2)}{10} = -\frac{1}{24}$

c $m = \frac{f(0.02)-f(0.01)}{0.01} = -5000$

d $m = \frac{f(1000)-f(100)}{900} = -100000^{-1}$

0.9 Tangentensteigung, Ableitung



H Hochpunkt (waagerechte Tangente)

W Wendepunkt (maximale/minimale Steigung)

T Tiefpunkt (waagerechte Tangente)

U Unstetigkeit (keine Tangentensteigung)

K Knickstelle (keine Tangentensteigung)

S Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

0.9.1 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten

$$f(x) = y = x^2 \quad x_0 = 2$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = 4 + h \quad (\text{Sekante})$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \quad (\text{Tangente})$$

0.9.2 Ableitungsfunktion

$$f(x) = 2x^3 \quad x_0 = 4$$

$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \frac{2(4 + h)^3 - 2 \cdot 4^3}{h}$$

$$= \frac{128 + 96h + 24h^2 + 2h^3 - 128}{h}$$

$$= 96 + 24h + 2h^2$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(6|f(6)) \Rightarrow h = 2$

$$m = 96 + 24 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 152$$

Sekante durch $P(4|f(4))$, $Q(-1|f(-1)) \Rightarrow h = -5$

$$m = 96 + 24 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5)^2 = 26$$

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $h \rightarrow 0$.

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{Sekante}} = \lim_{h \rightarrow 0} 96 + 24h + 2h^2 = 96$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3$ bei $x = 4$ ist 96.

$$f'(4) = 96 \quad (\text{Tangentensteigung})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

46/6

a 10.15 Uhr: $m = \frac{500m}{15min} = 33.\overline{3} \frac{m}{min}$

10.45 Uhr: $m = \frac{-500m}{15min} = -33.\overline{3} \frac{m}{min}$

11.15 Uhr: $m = \frac{-1000m}{15min} = -66.\overline{6} \frac{m}{min}$

b am größten: ~10.05 Uhr

am kleinsten: ~11.20 Uhr

48/3

a $x_0 = 4$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = 8$

b $x_0 = 3$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(3+h)^2 - (-2) \cdot 3^2}{h} = -12$

e $x_0 = -1$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^{-1} - (-1)^{-1}}{h} = -1$

h $x_0 = 3$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h+2) - (-3+2)}{h} = -1$

i $x_0 = 7$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-4}{h} = 0$

0.10 Sekanten-, Tangenten-, Normalengleichung

$$f(x) = 5x^3 \quad P_1(2|f(2)) \quad P_2(4|f(4))$$

Sekantengleichung

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{320 - 40}{2} = 140$$

$$b = -m \cdot x + y = -140 \cdot 2 + 40 = -240$$

$$s(x) = 140x - 240$$

Tangentengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{0 \rightarrow h} \frac{5(2+h)^3 - 40}{h} = 60$$

$$b = -m \cdot x + y = -60 \cdot 2 + 40 = -80$$

$$t(x) = 60x - 80$$

Normalengleichung im Punkt $P_1(2|40)$

$$y = m \cdot x + b$$

$$m_n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \frac{-1}{m_t}$$

$$m_n \cdot m_t = -1$$

$$m_t = 60$$

$$m_n = -\frac{1}{60}$$

$$b = -m \cdot x + y = 40 - \frac{1}{30}$$

$$n(x) = -\frac{1}{60}x + 40 - \frac{1}{30}$$

Zwei Geraden mit m_1 und m_2 sind orthogonal, wenn gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$

49/14

a

$$f(x) = 0.5x^2 \quad P(1|f(1) = 0.5)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2}h\right) = 1$$

$$b_t = -m_t \cdot x + y = -\frac{1}{2}$$

$$y_t = x - \frac{1}{2}$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -1$$

$$b_n = -m_n \cdot x + y = 1.5$$

$$y_n = -x + 1.5$$

b

$$f(x) = 2x^2 - 4 \quad P(-2|f(-2) = 4)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2+h)^2 - 4 - 4}{h} = -8$$

$$b_t = -m_t \cdot x + y = -12$$

$$y_t = -8x - 12$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{8}$$

$$b_n = -m_n \cdot x + y = 4\frac{1}{4}$$

$$y_n = \frac{1}{8}x + 4\frac{1}{4}$$

c

$$f(x) = \sqrt{x} \quad P(0.5|f(0.5) = \sqrt{0.5})$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0.5+h} - \sqrt{0.5}}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_t = -m_t \cdot x + y = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y_t = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$b_n = -m_n \cdot x + y = \sqrt{2}$$

$$y_n = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot x + \sqrt{2}$$

d

$$f(x) = -x^3 + 2 \quad P(2|f(2) = -6)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)^3 + 2 + 6}{h} = -12$$

$$b_t = -m_t \cdot x + y = 18$$

$$y_t = -12x + 18$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{12}$$

$$b_n = -m_n \cdot x + y = -6\frac{1}{6}$$

$$y_n = \frac{1}{12}x - 6\frac{1}{6}$$

49/13 $f(x) = -\frac{1}{x}$

a

$$P(-1|f(-1) = 1)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{-1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h + h^2} = 1$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 45^\circ$$

b

$$P(2|f(2) = -\frac{1}{2})$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2}}{2h + h^2} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 14.04^\circ$$

c

$$P(0.1|f(0.1) = -10)$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{0.1+h} + 10}{h} = 100$$

$$\alpha = \text{atan}(m_t) = 89.43^\circ$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= -3\sqrt{x} & x_0 &= 8 \\
f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3\sqrt{8+h} - (-3\sqrt{8})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\sqrt{72+9h} + \sqrt{72})(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})}{h(-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9}{-\sqrt{72+9h} - \sqrt{72}} \\
&= \frac{9}{-2\sqrt{72}} = \frac{3}{-4\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{32}}
\end{aligned}$$

0.11 Ableitungsfunktion

Die Ableitung von $f(x)$ bei x_0 ist eine lokale Eigenschaft der Funktion $f(x)$, also einer Stelle x_0 . Allerdings sind unsere Funktionen fast überall differenzierbar. Ausnahmen sind Unstetigkeitsstellen und Knickstellen. Es gibt eine Funktion $f'(x) = m_t(x)$ für alle Stellen x . Sie heißt Ableitungsfunktion.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

z. B. $f(x) = x^4$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

z. B. $f'(5) = 500$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$h(x) = x^3$$

$$h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

$$i(x) = a \cdot x^2$$

$$i'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - a \cdot x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2xh + ah^2 - ax^2}{h} = 2ax$$

$$j(x) = \sqrt{x}$$

$$j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^{-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)^{-1} - x^{-1}}{h} = -2x^{-3}$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

54/2

a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

b

$$f(x) = \frac{a}{x} + c$$

$$f'(x) = -ax^{-2}$$

c

$$f(x) = x^{c+1}$$

$$f'(x) = (c+1)x^c$$

d

$$f(x) = t^2 + 3t$$

$$f'(x) = 2t + 3$$

e

$$f(x) = x - t$$

$$f'(x) = 1$$

f

$$f(t) = x - t$$

$$f'(t) = -1$$

55/7

c

$$f(x) = 3x^2 + 3$$

$$f'(x) = 6x$$

$$P(0.5|f(0.5) = 3.75)$$

$$m = f'(0.5) = 3$$

$$b = -m \cdot x + y = 2.25$$

$$y = 3x + 2.25$$

d

$$f(x) = -x^3 + 2$$

$$f'(x) = -3x^2$$

$$P(2|f(2) = -6)$$

$$m = f'(2) = -12$$

$$b = -m \cdot x + y = 18$$

$$y = -12x + 18$$

59/6 $g(x) = 10 - 3x \Rightarrow m = -3$

c

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^3$$

$$f'(x) = -\frac{3}{100}x^2$$

$$-3 = -\frac{3}{100}x^2$$

$$x = 10$$

$$P(10|f(10) = -20)$$

d

$$f(x) = bx^3 + c$$

$$f'(x) = 3bx^2$$

$$-3 = 3bx^2$$

$$x = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}|f(\pm(-b)^{-\frac{1}{2}}) = \pm(-b)^{-\frac{1}{2}} + c) \quad b < 0$$

60/12

$$H(t) = \begin{cases} 3.2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 3.2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 \leq t \leq 1.8 \\ 0 & \text{für } 1.8 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

a

$$H'(0.5) = 0$$

$$H'(1.5) = -10t + 10 = -5$$

$$H'(2.5) = 0$$

b

$$H'(1) = 0 = -10t + 10$$

$$H'(1.8) = -10t + 10 = -8 \neq H'(1.8) = 0$$

67/3

a

$$\begin{aligned}
x^5 - 20x^3 + 64x &= 0 & | : x \Rightarrow x &= 0 \\
x^4 - 20x^2 + 64 &= 0 & | t = x^2 \\
t^2 - 20t + 64 &= 0 & | pq \\
t_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6 & | \text{resubst.} \\
x_{1/2/3/4} &= \pm \sqrt{t_{1/2}} \\
L &= \{0; \pm 2; \pm 4\}
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
x^5 - 17x^3 + 16x &= 0 & | : x \Rightarrow x &= 0 \\
x^4 - 17x^2 + 16 &= 0 & | t = x^2 \\
t^2 - 17t + 16 &= 0 & | pq \\
t_{1/2} &= 8.5 \pm \sqrt{72.25 - 16} = 8.5 \pm 7.5 & | \text{resubst.} \\
x_{1/2/3/4} &= \pm \sqrt{t_{1/2}} \\
L &= \{0; \pm 1; \pm 4\}
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
(x - \frac{2}{3})(x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1) &= 0 \\
x - \frac{2}{3} = 0 &\Rightarrow x = \frac{2}{3} \\
x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 1 &= 0 & | t = x^2 \\
t^2 - \frac{13}{6}t + 1 &= 0 & | pq \\
t_{1/2} &= \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12} \\
x_{1/2/3/4} &= \pm \sqrt{t_{1/2}} \\
L &= \{\frac{2}{3}; \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\}
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
 (x^3 - 8)(x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5) &= 0 \\
 x^3 - 8 = 0 &\Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \\
 x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5 = 0 &\quad |t = x^2 \\
 t^2 - \frac{14}{3}t + 5 = 0 &\quad |pq \\
 t_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - 5} = \frac{7}{3} \pm \frac{2}{3} &\quad | \text{resubst.} \\
 x_{1/2/3/4} = \pm \sqrt{t_{1/2}} \\
 L = \{2; \pm \sqrt{\frac{5}{3}}; \pm \sqrt{3}\}
 \end{aligned}$$

0.12 Nullstellen

Annahme: $f(x) = 0$ habe $x_1 = 2$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1$ als Lösungen, $f(x)$ hat Grad 3.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x(x - 2)(x + 3)(x - 1) \\
 &= x^3 - 7x + 6 \text{ für } c = 1
 \end{aligned}$$

Würde ich die zusätzliche Nullstelle $x_4 = 4$ als Linearfaktor in die Funktionsgleichung einfügen, so hätte ich eine Funktion 4. Grades. Allgemein gilt: Eine ganzrationale Funktion mit Grad n hat maximal n Nullstellen. Funktionen mit ungeradzahligem Grad $n = 1, 3, 5, 7 \dots$ haben mindestens eine Nullstelle. Solche mit geradzahligem Grad $n = 2, 4, 6, 8 \dots$ haben keine Mindestzahl an Nullstellen.

0.12.1 Mehrfache Nullstellen

Beispiel $f(x)$ habe $x_1 = x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ als Nullstellen (Grad 3).



Berührungspunkt bei $x = 2$, außerdem Extrempunkt.

Finde ich eine doppelte Nullstelle, so liegt gleichzeitig an der Stelle ein Extrempunkt vor. Eine dreifache Nullstelle ist zusätzlich ein Sattelpunkt mit waagerechter Tangente.

67/5

a

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{0; 2\}$$



c

$$f(x) = x(x^2 - 9)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{0; \pm 3\}$$



f

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$f(0) = 36$$

$$f(x) = 0$$

$$L = \{\pm 2; \pm 3\}$$



68/13 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a

NS: $0; -4; \frac{4}{5}$

$a = 5$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 0)(x + 4)(x - \frac{4}{5}) = a(x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 - 3\frac{1}{5}x) \\ &= 5x^3 + 16x^2 - 16x \end{aligned}$$

b

NS: $-\frac{1}{3}; 3; \frac{10}{3}$

$a = 9$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x + \frac{1}{3})(x - 3)(x - \frac{10}{3}) = a(x^3 - 6x^2 - \frac{1}{9}x + 3\frac{1}{3}) \\ &= 9x^3 - 72x^2 - x + 30 \end{aligned}$$

c

NS: $0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$

$a = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 0)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = a(x^3 - 2x) \\ &= x^3 - 2x \end{aligned}$$

d

$$\text{NS: } 0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a = 5$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 0)\left(x + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = a\left(x^3 - \frac{1}{5}x\right) \\ &= 5x^3 - x \end{aligned}$$

$$\mathbf{68/2} \quad f(x) = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

a

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 4(-0.08) \cdot 1.44}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.88}{-0.16}$$

$$(x_1 = -2) \quad x_2 = 9$$

b

$$1.44 = -0.08x^2 + 0.56x + 1.44$$

$$0 = -0.08x^2 + 0.56x$$

$$x_{1/2} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2}}{2(-0.08)} = \frac{-0.56 \pm 0.56}{-0.16}$$

$$(x_1 = 0) \quad x_2 = 7$$

68/11

$$f(x) = ax^2 + c$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(5) = f(-5) = 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2$$

$$f(x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{50}$$

$$\text{Breite: } 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$$

68/15

$$s = 1000m$$

$$s(t) = 30t - 0.4t^2$$

$$v(t) = 30 - 0.8t$$

a

$$\begin{aligned}v(t) &= 0 = 30 - 0.8t \Rightarrow t = 37.5 \\s(37.5) &= 30(37.5) - 0.4(37.5)^2 = 565.5\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}s(t) &= v_0 \cdot t - 0.4t^2 < 1000 \\v(t) &= v_0 - 0.8t \Rightarrow t = \frac{v_0}{0.8} \\s(t) &= \frac{v_0^2}{0.8} - 0.4\left(\frac{v_0}{0.8}\right)^2 = \frac{5}{8}v_0^2 < 1000 \\v_0 &< \sqrt{1600} = 40\end{aligned}$$

0.13 Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

Hochpunkt: $f(x_H) \geq f(x)$ in der Nähe

Tiefpunkt: $f(x_T) \leq f(x)$ in der Nähe

$$f'(x_H) = f'(x_T) = f'(x_S) = 0$$

Daraus folgt ein Rechenverfahren zur Bestimmung der Stellen x mit $f'(x) = 0$.

$$\text{z. B. } f(x) = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

x_1 und x_2 sind Kandidaten für Extrema.

Umgebungsuntersuchung

für Hochpunkte gilt: $f'(x_l) > 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) < 0$

für Tiefpunkte gilt: $f'(x_l) < 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x_r) > 0$

$$\text{zu: } x_1 = 0 \quad x_l = -1 \quad x_r = 1$$

$$f'(x_l) = f'(-1) = 7$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 0$$

$$f'(x_r) = f'(1) = -1$$

$$\Rightarrow H(0|0)$$

$$\text{zu: } x_2 = \frac{4}{3} \quad x_l = 1 \quad x_r = 2$$

$$f'(x_l) = f'(1) = -1$$

$$f'(x_1) = f'(0) = 0$$

$$f'(x_r) = f'(2) = 4$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{4}{3} \mid -1.2\right)$$

Sonderfall Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

$$f'(x_l) < 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) < 0 \quad \text{oder}$$

$$f'(x_l) > 0 \quad f'(x) = 0 \quad f'(x_r) > 0$$

73/2

e

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \quad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = -x^2 + 3x \quad | : x \Rightarrow x_2 = 0$$

$$0 = -x + 3 \quad | -3; \cdot (-1)$$

$$3 = x$$

$$L = \{0; 3\}$$

$$f'(-1) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 2 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt } S(0|f(0) = -4)$$

$$f'(2) = 4 \quad f'(3) = 0 \quad f'(4) = -16 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(3|f(3) = 2\frac{3}{4})$$

74/6

b

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 8x \quad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = 4x^2 - 12x + 8 \quad | abc$$

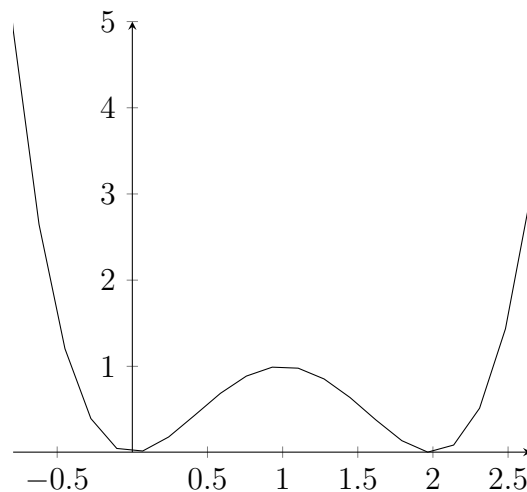
$$x_{2/3} = \frac{12 \pm 4}{8}$$

$$x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$f'(-1) = -24 \quad f'(x_1) = 0 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5 \Rightarrow T(0|0)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5 \quad f'(x_2) = 0 \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1.5 \Rightarrow H(1|1)$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1.5 \quad f'(x_3) = 0 \quad f'(3) = 24 \Rightarrow T(2|0)$$



0.14 2. Ableitungsfunktion

$$f'(x) = (f'(x))''$$

Die 2. Ableitungsfunktion $f''(x)$ beschreibt das Krümmungsverhalten der Ursprungsfunktion $f(x)$.

$f''(x) > 0$ links gekrümmt
 $f''(x) < 0$ rechts gekrümmt
 $f''(x) = 0$ Wendepunkt

80/1

b

$$f(x) = 2x - 3x^2$$

$$f'(x) = 2 - 6x$$

$$f''(x) = -6$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -6 < 0 \quad H\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$$

d

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) = 2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{2}; 0\}$$

$$f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0 \quad T(\pm\sqrt{2} \mid -1)$$

$$f''(0) = -8 < 0 \quad H(0 \mid 3)$$

e

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f''(x) = 16x^3 - 20x$$

$$f'(x) = 0 \quad L = \left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}\right\}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -8 < 0 \quad H\left(\frac{1}{2} \mid \frac{11}{15}\right)$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 > 0 \quad H\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{11}{15}\right)$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 24 > 0 \quad T\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{9}{5}\right)$$

$$f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -24 < 0 \quad T\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{9}{5}\right)$$

0.15 Wendepunkte

Wendepunkte eines Graphen sind Punkte an denen die Krümmung wendet. Am Wendepunkt selbst ist das Krümmungsverhalten gleich 0. Außerdem sind Wendepunkte Punkte mit maximaler bzw. minimaler Steigung.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

Hinreichende Bedingung (I): Umgebungsuntersuchung

$f''(x_l) > 0$ $f''(x_r) < 0$ Wechsel im Krümmungsverhalten

\Rightarrow Wendepunkt $WP(x|f(x))$ (links-rechts)

Hinreichende Bedingung (II): $f'''(x) \neq 0$

für $f'''(x) < 0$ LRWP

für $f'''(x) > 0$ RLWP

für $f'''(x) = 0$ keine Entscheidung

84/1

a

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f''(x) = 6x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow RLWP(0|2)$$

rechts: $x \in]-\infty; 0]$

links: $x \in [0; \infty[$



b

$$f(x) = 4 + 2x - x^2$$

$$f''(x) = -2 = 0 \quad L = \{\}$$

rechts: $x \in]-\infty; \infty[$



d

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \quad L = \{0\}$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$

$$f'''(0) = 6 \Rightarrow RLWP(0|0)$$

rechts: $x \in]-\infty; 0]$

links: $x \in [0; \infty[$



84/2b

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 0 \quad L = \{-1\}$$

$$f'''(-1) = 6 \Rightarrow RLWP(-1 | f(-1) = -1)$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$



85/12

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + bx^2 + cx + d \\f'(x) &= 3x^2 + 2bx + c = 0 \\f''(x) &= 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}b \\f'(x) &= 3\left(-\frac{1}{3}b\right)^2 + 2b\left(-\frac{1}{3}b\right) + c = -\frac{1}{3}b^2 + c = 0 \\&\Rightarrow c = \frac{b^2}{3}\end{aligned}$$

85/14

a

$$\begin{aligned}f_a(x) &= x^3 - ax^2 \\f_a''(x) &= 6x - 2a = 0 \quad L = \left\{\frac{a}{3}\right\} \\f_a'''(x) &= 6 \quad f_a'''(\frac{a}{3}) = 6 \Rightarrow RLWP(\frac{a}{3} | f_a(\frac{a}{3}))\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f_a(x) &= x^4 - 2ax^2 + 1 \\f_a''(x) &= 12x^2 - 4a = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\} \\f_a'''(x) &= 24x \\f_a'''(\sqrt{\frac{a}{3}}) &= 24(\sqrt{\frac{a}{3}}) > 0 \Rightarrow RLWP(\sqrt{\frac{a}{3}} | f_a(\sqrt{\frac{a}{3}})) \\f_a'''(-\sqrt{\frac{a}{3}}) &= 24(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < 0 \Rightarrow LRWP(-\sqrt{\frac{a}{3}} | f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}))\end{aligned}$$

89/2

- A wahr, die Steigung ist negativ, d. h. die Werte werden kleiner
- B falsch, die Funktion hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt, die Steigung ist davor und danach positiv
- C wahr, einen Tiefpunkt bei $x = 2$ und einen Hochpunkt bei $x = 0$
- D ?, die Funktionswerte sind an der Ableitungsfunktion nicht erkennbar

89/1

c

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^4 + x^2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{0; \pm\sqrt{18}\} \Rightarrow S(0|0), S(\sqrt{18}|0), S(-\sqrt{18}|0)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 2x = 0 \quad L = \{0; \pm 3\}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$

$$f''(0) = 2 \Rightarrow T(0|f(0) = 0)$$

$$f''(3) = 4 \Rightarrow T(3|f(3) = \frac{9}{2})$$

$$f''(-3) = -4 \Rightarrow T(-3|f(-3) = \frac{9}{2})$$

monoton steigend $f'(x) \geq 0 :]-\infty; -3], [0; 3]$

monoton fallend $f'(x) \leq 0 : [3; 0], [3; \infty[$



d

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S(0|0)$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1.5x = 0 \quad L = \{0; 3\} \Rightarrow S(0|0), S(3|0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.5 = 0 \quad L = \{1; 3\}$$

$$f''(x) = x - 2$$

$$f''(1) = -1 \Rightarrow H(1|f(1) = 0.\overline{6})$$

$$f''(3) = 1 \Rightarrow T(3|f(3) = 0)$$

monoton steigend $f'(x) \geq 0 : [-\infty; 1], [3; \infty]$

monoton fallend $f'(x) \leq 0 : [1; 3]$



f

$$f(x) = x + \frac{5}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{kein Schnittpunkt mit y-Achse})$$

$$f(x) = 0 \quad L = \{\} \quad (\text{kein Schnittpunkt mit x-Achse})$$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2} = 0 \quad L = \{\pm\sqrt{5}\}$$

$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

$$f''(\sqrt{5}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(\sqrt{5}|f(\sqrt{5})) = \sqrt{20}$$

$$f''(-\sqrt{5}) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow T(-\sqrt{5}|f(-\sqrt{5})) = -\sqrt{20}$$

$$\text{monoton steigend } f'(x) \geq 0 :]-\infty; -\sqrt{5}] , [\sqrt{5}; \infty[$$

$$\text{monoton fallend } f'(x) \leq 0 : [-\sqrt{5}; 0[,]0; \sqrt{5}]$$



0.16 Nullstellen: Polynomdivision

97/2

$$\begin{array}{r} \text{b } (\quad 2x^3 + 2x^2 - 21x + 12) \div (x + 4) = 2x^2 - 6x + 3 \\ \underline{- 2x^3 - 8x^2} \\ \quad - 6x^2 - 21x \\ \quad \underline{6x^2 + 24x} \\ \qquad 3x + 12 \\ \qquad \underline{- 3x - 12} \\ \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c } \left(\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 - x + 2 \\ -2x^3 + x^2 \end{array} \right) \div (2x - 1) = x^2 - 3x - 2 \\ \hline \begin{array}{r} -6x^2 - x \\ 6x^2 - 3x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -4x + 2 \\ 4x - 2 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d } \left(\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2 \\ -x^4 - 2x^3 \end{array} \right) \div (x + 2) = x^3 - 4x - 1 \\ \hline \begin{array}{r} -4x^2 - 9x \\ 4x^2 + 8x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -x - 2 \\ x + 2 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{a } x_1 = 1 \\ \left(\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ -x^3 + x^2 \end{array} \right) \div (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ \hline \begin{array}{r} -5x^2 + 11x \\ 5x^2 - 5x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 6x - 6 \\ -6x + 6 \end{array} \\ \hline 0 \end{array}$$

98/4

$$x_{2/3} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\begin{array}{r} \text{b } x_1 = 2 \\ (x^3 + x^2 - 4x - 4) \div (x - 2) = x^2 + 3x + 2 \\ - x^3 + 2x^2 \\ \hline 3x^2 - 4x \\ - 3x^2 + 6x \\ \hline 2x - 4 \\ - 2x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -1$$

$$f(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r} \text{c } x_1 = -2 \\ (4x^3 - 13x + 6) \div (x + 2) = 4x^2 - 8x + 3 \\ - 4x^3 - 8x^2 \\ \hline - 8x^2 - 13x \\ 8x^2 + 16x \\ \hline 3x + 6 \\ - 3x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{8 \pm 4}{8}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = (x + 2)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})$$

$$\begin{array}{r}
 \text{d } x_1 = 3 \\
 (4x^3 - 8x^2 - 11x - 3) \div (x - 3) = 4x^2 + 4x + 1 \\
 \underline{-4x^3 + 12x^2} \\
 4x^2 - 11x \\
 \underline{-4x^2 + 12x} \\
 x - 3 \\
 \underline{-x + 3} \\
 0
 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = (x - 3)(x + \frac{1}{2})$$

$$\mathbf{98/11} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \quad S(-2|0) \Rightarrow x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r}
 \text{a } (x^3 - 2x^2 - 3x + 10) \div (x + 2) = x^2 - 4x + 5 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 -4x^2 - 3x \\
 \underline{4x^2 + 8x} \\
 5x + 10 \\
 \underline{-5x - 10} \\
 0
 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

\Rightarrow keine Lösung

b

$$g(x) = mx + b \quad m = 2 \quad S(-2|0)$$

$$0 = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x + 4$$

$$f(x) = g(x)x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 2x + 4$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 -4x^2 - 5x \\
 \underline{4x^2 + 8x} \\
 3x + 6 \\
 \underline{-3x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_2 = 1 \quad S(1|6)$$

$$x_3 = 3 \quad S(3|10)$$

98/12 $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$

a

$$f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x \quad | : x$$

$$0 = 2x^2 - 2x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{-60}}{4} \quad \text{keine Lösung}$$

$$L = \{0\}$$

$$f_{10}(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x \quad | : x$$

$$0 = 2x^2 - 10x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{10 \pm 6}{4}$$

$$L = \{0; 1; 4\}$$

$$f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x \quad | : x$$

$$0 = 2x^2 + 10x + 8$$

$$x_{2/3} = \frac{-10 \pm 6}{4}$$

$$L = \{0; -1; -4\}$$

b

$$\text{Diskriminante} > 0$$

$$|t| > 8$$

c

$$t = 8$$

$$f_8(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$$

$$\text{Nullstellen: } \{0; 2\}$$

0.17 Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{z. B. } f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

\Rightarrow unterschiedlich für ungeradzahliges Grad

$$\text{z. B. } g(x) = 2x^4 - 5x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4) = +\infty$$

\Rightarrow unterschiedlich für geradzahliges Grad

0.18 Symmetrie

$$\text{Bsp. } f(x) = x^4 + 5x^2 - 7$$

$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten vorkommen.

$$\text{Bsp. } g(x) = x^5 - 7x^3 + x$$

$g(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.

allgemein:

achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

ansonsten: Symmetrie nicht erkennbar

Anwendung:

Bsp. $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2+5}$

$$h(-x) = \frac{3(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+5} = -\frac{3x^2+2x}{x^2+5} = -h(x)$$

\Rightarrow punktsymmetrisch

100/2

a $f(x) = -\mathbf{3x^4} - 0.2x^2 + 10$

b $f(x) = 3x + 4x^3 - x^2 = \mathbf{4x^3} - x^2 + 3x$

c $f(x) = 2(x-1) \cdot x^2 = \mathbf{2x^3} - 2x^2$

d $f(x) = (x+1)(x^3+1) = \mathbf{x^4} + x^3 + x + 1$

e $f(x) = -2(x^4 - x^3 - x^2) = -\mathbf{2x^4} + 2x^3 + 2x^2$

f $f(x) = x^2 \cdot (-6x - x^2) = -\mathbf{x^4} - 6x^3$

102/1

d $f(x) = x(x^2 - 5) = x^3 - 5x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

e $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow$ nicht erkennbar

f $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x \Rightarrow$ punktsymmetrisch

0.19 Kurvendiskussion

105/1

c

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$f''(x) = 3x - 8$$

$$f'''(x) = 3$$

Symmetrie

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

$$L = \{0; 4\}$$

Grenzverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^3 = -\infty$$

Extremstellen

$$f'(x) = 0 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm 4}{3}$$

$$L = \{\frac{4}{3}; 4\}$$

$$f''(x_1) = f''(\frac{4}{3}) = -4 < 0 \quad HP(\frac{4}{3} | f(\frac{4}{3}))$$

$$f''(x_2) = f''(4) = 4 > 0 \quad TP(4 | f(4))$$

Wendestellen

$$f''(x) = 0 = 3x - 8$$

$$L = \{\frac{8}{3}\}$$

$$f'''(x_1) = f'''(\frac{8}{3}) = 3 > 0 \quad RLWP(\frac{8}{3} | f(\frac{8}{3}))$$



d

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8 = x^3 + 6x^2 - 16$$

Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f'''(x) = 6$$

Symmetrie

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq x^3 + 6x^2 - 16$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$-x^3 + 6x^2 + 16 \neq -x^3 - 6x^2 + 16$$

Nullstellen

$$f(x) = 0 = x^3 + 6x^2 - 16$$

$$x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 \\ -x^3 - 2x^2 \end{array} - 16 \right) \div (x + 2) = x^2 + 4x - 8 \\ \hline 4x^2 \\ -4x^2 - 8x \\ \hline -8x - 16 \\ 8x + 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-8)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$L = \{-2; -5.46; 1.46\}$$

Grenzverhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Extremstellen

$$f'(x) = 0 = 3x^2 + 12x \quad | : x \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3x + 12 = 0$$

$$L = \{0; -4\}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0 \quad TP(0|f(0))$$

$$f''(x_2) = f''(-4) = -12 < 0 \quad HP(-4|f(-4))$$

Wendestellen

$$f''(x) = 0 = 6x + 12$$

$$L = \{-2\}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-2) = 6 > 0 \quad RLWP(-2|f(-2))$$



106/5

$$f(x) = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot x^4$$

a

Höhe

$$f(0) = 187.5$$

Breite

$$f(x) = 0$$

$$\text{subst. } t = x^2$$

$$0 = 187.5 - 1.579 \cdot 10^{-2} \cdot t - 1.988 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$$

$$t_{1/2} = \frac{1.579 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{(1.579 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6}) \cdot 187.5}}{2 \cdot (-1.988 \cdot 10^{-6})}$$

$$t_1 < 0 \quad t_2 = 6520.923541$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{t_2} \approx \pm 80$$

$$2 \cdot 80 = 160$$

b

$$f'(x) = -3.158 \cdot 10^{-2} \cdot x - 7.952 \cdot 10^{-6} \cdot x^3$$

$$f'(80) = -2.5264 - 4.071424 \approx -6.6$$

$$\text{atan}(-6.6) \approx -81^\circ$$

c

$$f(19) = 187.5 - 5.70019 - 0.259078148 \approx 181$$

$$\text{vertikaler Abstand: } 187.5 - 181 = 6.5 < 10$$

$$f(9) - 10 = 177.5 - 1.579 - 0.01988 \approx 176.2$$

0.19.1 Tangente und Anwendungen

Allgemeine Tangentengleichung - Herleitung

$$f(x) = y = m \cdot x + b$$

$$\text{Stelle } u \quad f'(u) = m \quad f(u) = y$$

$$f(u) = f'(u) \cdot u + b \Rightarrow b = f(u) - f'(u) \cdot u$$

$$t(x) = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$$

$$= f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

108/5

a

$$f(x) = x^2 - x; \quad B(-2|6) \quad u = -2$$

$$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(u) = -5$$

$$t(x) = -5 \cdot (x + 2) + 6 = -5x - 4$$

$$n(x) = \frac{1}{5} \cdot (x + 2) + 6 = \frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$$

b

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2; \quad B(4|3) \quad u = 4$$

$$f'(x) = -4x^{-2} \quad f'(u) = -\frac{1}{4}$$

$$t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 3 = -\frac{1}{4}x + 4$$

$$n(x) = 4 \cdot (x - 4) + 3 = 4x - 13$$

Exkurs: Quadratische Ergänzung

führt auf die Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung

$$\text{z. B. } f(x) = x^2 - x$$

$$= x^2 - x + 0.25 - 0.25$$

$$= (x - 0.5)^2 - 0.25$$

$$\text{Scheitelpunkt } S(0.5 | -0.25)$$

$$\text{z. B. } g(x) = 4x^2 - 3x + 8$$

$$= 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) + 8$$

$$= 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}\right) + 8$$

$$= 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - 4\left(\frac{9}{64}\right) + 8$$

$$= 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{137}{16}$$

$$\text{Scheitelpunkt } S\left(\frac{3}{8} | \frac{137}{16}\right)$$

nimm den Koeffizienten (-1), halbiere ihn (-0.5) und quadriere anschließend (0.25).

109/10

$$f(x) = y = 4 - \frac{1}{2}x^2$$

$$Y(0|6)$$

$$f'(x) = -x$$

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} - x \cdot x_0 + 4$$

$$0 = \frac{1}{2}x_0^2 - 2 \quad x_0 = \pm 2$$

109/11

$$f(x) = -0.002x^4 + 0.122x^2 - 1.8$$

$$\text{Tiefster Punkt: } T(0| -1.8)$$

$$\text{Augen: } P(x_0|1.6)$$

$$f'(x) = -0.008x^3 + 0.244x$$

$$t(x) = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 0.008u^3x + 0.224ux - 1.8$$

$$t(0) = -1.8 = 0.006u^4 - 0.122u^3 - 1.8 \quad L = \{0; \pm\sqrt{\frac{61}{3}}\}$$

$$t(x) = 0.366752x - 1.8 \quad \text{fuer } u = \sqrt{\frac{61}{3}}$$

$$1.6 = 0.366752x_0 - 1.8$$

$$x_0 = 9.2706$$

112/7

$$S(t) = -0.08t^3 + 3.5t^2 + 10.6t + 237$$

a

$$S'(t) = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

Die Ableitung gibt an, wie stark die Schulden ansteigen, also die Neuverschuldung pro Jahr.

b

$$S''(t) = -0.48t + 7$$

$$S''(t_0) = 0$$

$$t_0 = 14.58\bar{3} \quad (\text{um } 1994)$$

c

$$S'(t_0) = 0 = -0.24t^2 + 7t + 10.6$$

$$t_0 = \frac{1}{12}(175 + \sqrt{36985}) \approx 30.6 \quad (\text{um } 2010)$$

$$S''(t_0) \approx -7.69 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

d Nicht die Staatsschulden, sondern die Neuverschuldung, nahm ab.

111/3

$$f(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

a

$$f(t) = 0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t \quad L = \{0; 24\}$$

$$f'(t) = 0 = 0.75t^2 - 24t + 144 \quad L = \{8; 24\}$$

$$f''(t) = 1.5t - 24$$

$$f''(8) = -12 < 0 \Rightarrow HP$$

$$f''(24) = 12 > 0 \Rightarrow TP$$

$$f''(t) = 0 = 1.5t - 24 \quad L = \{16\}$$

$$f'''(t) = 1.5 > 0 \Rightarrow RLWP$$

b

$$\text{Hälfte d. Maximalwerts} = \frac{f(8)}{2} = \frac{512}{2} = 256$$

$$f(t) = 256 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t$$

$$0 = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$\begin{array}{r} \left(\frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t - 256 \right) \div (t - 16) = \frac{1}{4}t^2 - 8t + 16 \\ \underline{-\frac{1}{4}t^3 + 4t^2} \\ -8t^2 + 144t \\ \underline{8t^2 - 128t} \\ 16t - 256 \\ \underline{-16t + 256} \\ 0 \end{array}$$

$$L = \{2.1436; 16; (29.856)\}$$

$$f_2(t) = 0.25t^3 - 12t^2 + 144t - 256$$

$$f_2'(t) = f'(t) = 0.75t^2 - 24t + 144$$

$$f_2'(2.1436) \approx 96 > 0$$

$$f_2'(16) = -48 < 0$$

$$(f_2'(29.856) \approx 96 > 0)$$

Zeitraum: 2.1436 bis 16

Teil II

11/2

112/5

$$O(t) = -\frac{1}{300}(t^3 - 36t^2 + 324t - 5700) \quad t \in [0; 24]$$

a

$$O'(t) = \frac{1}{100}(-t^2 + 24t - 108) = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{-2} = \frac{-24 \pm 12}{-2} = 12 \pm 6$$

$$t_1 = 6 \quad t_2 = 18$$

$$O''(t) = \frac{12 - t}{50}$$

$$O''(t_1) = \frac{6}{50} > 0 \Rightarrow TP(6|O(6) = 16.12)$$

$$O''(t_2) = \frac{-6}{50} < 0 \Rightarrow HP(18|O(18) = 19)$$

b Die Steigung der Wendetangente gibt an, wie sich die Temperaturänderung ändert (Beschleunigung).

0.20 Optimieren unter Nebenbedingungen

Tunnelquerschnitt:



Länge der Randlinie (Umfang) ist $5m$; A ist maximal

Hauptbedingung HB

$$A(r, h) = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$$

($A(r)$ heißt Zielfunktion ZF)

Nebenbedingung NB

$$U = 5 = 2h + 2r + \pi r \quad | - 2r - \pi r$$

$$h = \frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r$$

setze h in $A(r, h)$ ein

$$\begin{aligned} A(r) &= 2r\left(\frac{5}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= 5r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right) \cdot r^2 + 5r \end{aligned}$$

$$A'(r) = 5 - 7.14159r$$

$$A'(r) = 0 \quad L = \{0.7\}$$

$$h = 0.7 \quad \text{für } r = 0.7$$

$$A(r) = 1.75m^2$$

114/3

$$A(l, b) = l \cdot b$$

$$U = 50 = 2(l + b) \Rightarrow b = 25 - l$$

$$A(l) = 2l \cdot (25 - l) = -2l^2 + 50l$$

$$A'(l) = -4l + 50$$

$$A'(l) = 0 \quad L = \{12.5\}$$

$$l = b = 12.5cm$$

114/4

$$U(l, b) = 2(l + b)$$

$$A = 400 = l \cdot b \Rightarrow b = \frac{400}{l}$$

$$U(l) = 2l + \frac{800}{l}$$

$$U'(l) = 2 - 800l^{-2}$$

$$U'(l) = 0 \quad L = \{\pm 20\}$$

$$l = b = 20cm$$

115/7

a

$$V(x) = (16 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$V'(x) = 0 \quad L = \{2; (\frac{20}{3})\}$$

$$V(2cm) = 144cm^3$$