

Cálculo Numérico

Conversão de Base

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

18 de Fevereiro de 2021



- ▶ O matemático indiano Pingala apresentou a primeira descrição conhecida de um sistema numérico binário no século III a.C., representando os números de 1 a 8 com a sequência (usando símbolos modernos) 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 e 1000.

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

- ▶ O matemático indiano Pingala apresentou a primeira descrição conhecida de um sistema numérico binário no século III a.C., representando os números de 1 a 8 com a sequência (usando símbolos modernos) 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 e 1000.
- ▶ O sistema numérico binário moderno foi documentado de forma abrangente por Gottfried Leibniz no século XVIII em seu artigo “Explication de l’Arithmétique Binaire”. O sistema de Leibniz utilizou 0 e 1, tal como o sistema numérico binário corrente nos dias de hoje.

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) -
Manuscrito sobre os números binários

Cálculo Numérico

Wellington José
Corrêa

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

[illegible]

Figura: Leibniz e seu manuscrito sobre os números binários

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

- ▶ Ingressou na Universidade aos 15 anos de idade e, aos 17, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal.

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

- ▶ Ingressou na Universidade aos 15 anos de idade e, aos 17, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal.
- ▶ O uso de “função” como um termo matemático foi iniciado por Leibniz (1694)

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

- ▶ É creditado a Leibniz e a Newton o desenvolvimento do cálculo moderno, em particular o desenvolvimento da integral e da regra do produto. Em 1676, já tinha desenvolvido algumas fórmulas elementares do cálculo e tinha descoberto o teorema fundamental do cálculo, que só foi publicado em 11 de julho de 1677, onze anos depois da descoberta não publicada de Newton. A notação hoje utilizada no cálculo infinitesimal é basicamente devida a Leibniz.

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Cálculo Numérico

Wellington José
Corrêa

- ▶ É sabido que Leibniz era capaz de ficar sentado na mesma cadeira por vários dias pensando.

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

A maioria dos equipamentos computacionais representa os valores numéricos. Acontece, muitas vezes, que esta transformação pode ser a comedia de erros.

Um número na base 2 pode ser escrito como:

$$\sum_{i=n}^m a_i 2^i; \quad a_i = \{0, 1\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}; \quad n \leq 0 \text{ e } m \geq 0.$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

A maioria dos equipamentos computacionais representa os valores numéricos. Acontece, muitas vezes, que esta transformação pode ser a comedia de erros.

Um número na base 2 pode ser escrito como:

$$\sum_{i=n}^m a_i 2^i; \quad a_i = \{0, 1\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}; \quad n \leq 0 \text{ e } m \geq 0.$$

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Para mudar da base 2 para base 10, basta multiplicar o dígito binário por uma potência de 2 adequada.

Exemplo

Converta os números binários na base 10:

(a) $(1011)_2$

(b) $(10,1)_2$

(c) $(11,01)_2$

Solução:

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Converta os números binários na base 10:

(a) $(1011)_2$

(b) $(10,1)_2$

(c) $(11,01)_2$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}(1011)_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}\end{aligned}$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Converta os números binários na base 10:

(a) $(1011)_2$ (b) $(10,1)_2$ (c) $(11,01)_2$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}(1011)_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(10,1)_2 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} \\ &= 2 + 0 + 0,5 = (2,5)_{10}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(11,01)_2 &= 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 2 + 1 + 0 + 0,25 = (3,25)_{10}\end{aligned}$$

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Para converter um número da base 10 para a base 2, tem-se que aplicar um processo para a parte inteira e outro para a parte fracionária.

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Para converter um número da base 10 para a base 2, tem-se que aplicar um processo para a parte inteira e outro para a parte fracionária.

► Parte inteira.

divide-se o número N sucessivamente por 2, armazenando, a cada passo, os restos, r_i , $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$, até que o quociente da divisão seja igual a 1. O número binário é constituído do quociente 1 e pelos restos das divisões $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1$ nesta ordem dada a seguir:

Conversão de Base

$$\begin{array}{c|c} N & 2 \\ \hline \textcircled{r_1} & q_1 \end{array}$$

Conversão de Base

$$\begin{array}{c|c} N & 2 \\ \hline (r_1) & q_1 \\ & (r_2) \\ & \hline & 2 \\ & q_2 \end{array}$$

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

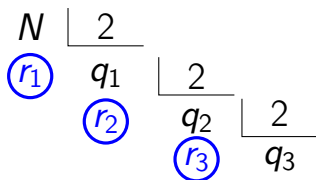
Wellington José
Corrêa

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

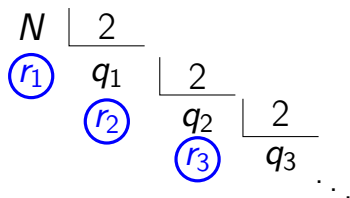
Mudança da Base Decimal para a Parte Binária



Conversão de Base

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa



Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

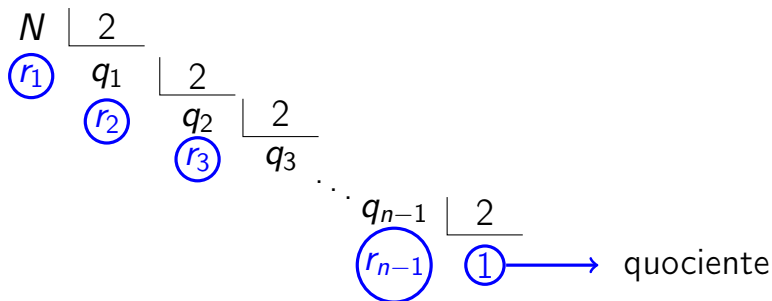
Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Conversão de Base

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa



Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

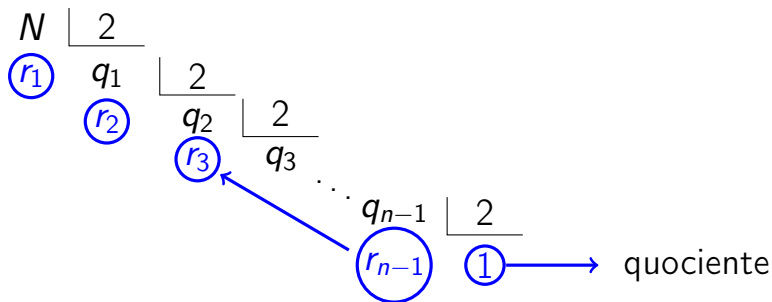
Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Conversão de Base

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa



Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

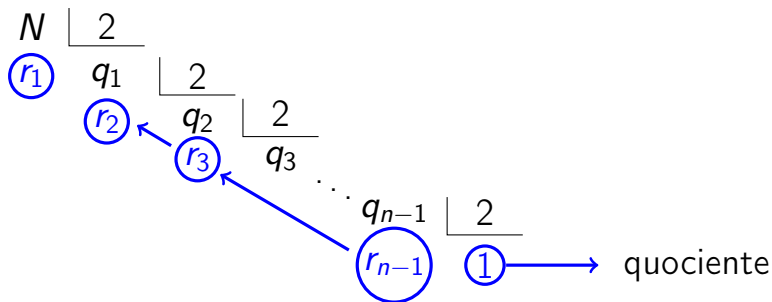
Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Conversão de Base

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa



Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

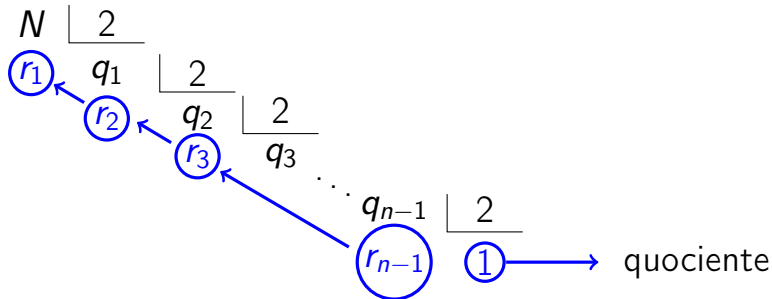
Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Conversão de Base

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa



Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

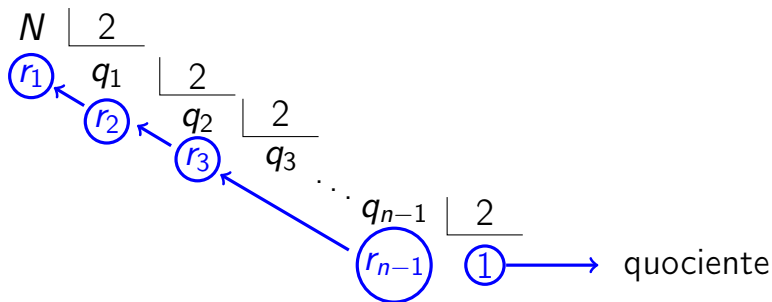
Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Conversão de Base

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa



Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Portanto,

$$(N)_{10} = (1 r_{n-1} r_{n-2} \dots r_2 r_1)_2 .$$

Conversão de Base

Cálculo Numérico

Wellington José
Corrêa

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Exemplo

Converta os números 25 e 11 para a base 2

Solução: Temos que



Exemplo

Converta os números 25 e 11 para a base 2

Solução: Temos que

$$(25)_{10} = (11001)_2$$

Exemplo

Converta os números 25 e 11 para a base 2

Solução: Temos que

$$(25)_{10} = (11001)_2$$

$$(11)_{10} = (1011)_2 .$$

Wellington José
Corrêa

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Cálculo Numérico

► Parte Fracionária.
Temos o procedimento:

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Cálculo Numérico

▶ Parte Fracionária.
Temos o procedimento:

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Cálculo Numérico

▶ Parte Fracionária.
Temos o procedimento:

- (a) Multiplica-se o número fracionário por 2;
- (b) Do resultado do passo (a), a parte inteira é o primeiro dígito binário;

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Temos o procedimento:

- (a) Multiplica-se o número fracionário por 2;
- (b) Do resultado do passo (a), a parte inteira é o primeiro dígito binário;
- (c) Do resultado do passo (b), a parte fracionária é novamente multiplicada por 2;

► Parte Fracionária.

Temos o procedimento:

- (a) Multiplica-se o número fracionário por 2;
- (b) Do resultado do passo (a), a parte inteira é o primeiro dígito binário;
- (c) Do resultado do passo (b), a parte fracionária é novamente multiplicada por 2;
- (d) O processo continua até que a parte fracionária seja nula.

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Converte para a base 2 os números:

(a) $(0, 1875)_{10}$ (b) $(13, 25)_{10}$ (c) $(0, 6)_{10}$

Solução: Note que

(a)

0,1875

×2

0,3750

Exemplo

Converta para a base 2 os números:

(a) $(0,1875)_{10}$ (b) $(13,25)_{10}$ (c) $(0,6)_{10}$

Solução: Note que

(a)

0,1875	0,375
×2	×2
<hr/>	<hr/>
0,3750	0,75

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Converta para a base 2 os números:

(a) $(0,1875)_{10}$ (b) $(13,25)_{10}$ (c) $(0,6)_{10}$

Solução: Note que

(a)

0,1875	0,375	0,75	0,5
$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0,3750	0,75	1,50	1,0

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Converta para a base 2 os números:

(a) $(0,1875)_{10}$ (b) $(13,25)_{10}$ (c) $(0,6)_{10}$

Solução: Note que

(a)

0,1875	0,375	0,75	0,5
$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0,3750	0,75	1,50	1,0

Logo, $(0,1875)_{10} = (0,0011)_2$.

Wellington José
Corrêa

(b) Note que, $(13, 25)_{10} = (13)_{10} + (0, 25)_{10}$.

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Exemplo

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

(b) Note que, $(13, 25)_{10} = (13)_{10} + (0, 25)_{10}$.
Como $(13)_{10} = (1101)_2$ e

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

(b) Note que, $(13, 25)_{10} = (13)_{10} + (0, 25)_{10}$.

Como $(13)_{10} = (1101)_2$ e

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \times 2 \\ \hline 0,50 \end{array}$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

(b) Note que, $(13,25)_{10} = (13)_{10} + (0,25)_{10}$.

Como $(13)_{10} = (1101)_2$ e

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \times 2 \\ \hline 0,50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,5 \\ \times 2 \\ \hline 1,0 \end{array}$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

(b) Note que, $(13, 25)_{10} = (13)_{10} + (0, 25)_{10}$.

Como $(13)_{10} = (1101)_2$ e

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \times 2 \\ \hline 0,50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,5 \\ \times 2 \\ \hline 1,0 \end{array}$$

donde, $(0, 25)_{10} = (0, 01)_2$ e, portanto,

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Exemplo

Cálculo
Numérico

Wellington José
Corrêa

(b) Note que, $(13, 25)_{10} = (13)_{10} + (0, 25)_{10}$.

Como $(13)_{10} = (1101)_2$ e

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \times 2 \\ \hline 0,50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,5 \\ \times 2 \\ \hline 1,0 \end{array}$$

donde, $(0, 25)_{10} = (0, 01)_2$ e, portanto,

$$\begin{aligned} (13, 25)_{10} &= (13)_{10} + (0, 25)_{10} \\ &= (1101)_2 + (0, 01)_2 \\ &= (1101, 01)_2 \end{aligned}$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

(c) Temos que

$$\begin{array}{r} 0,6 \\ \times 2 \\ \hline 1,2 \end{array}$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

(c) Temos que

$$\begin{array}{r} 0,6 \\ \times 2 \\ \hline 1,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,2 \\ \times 2 \\ \hline 0,4 \end{array}$$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

(c) Temos que

$0,6$	$0,2$	$0,4$
$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
$\hline 1,2$	$\hline 0,4$	$\hline 0,8$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

(c) Temos que

$0,6$	$0,2$	$0,4$	$0,8$
$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
$\hline 1,2$	$\hline 0,4$	$\hline 0,8$	$\hline 1,6$

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Binária
para a Base
Decimal

Mudança da
Base Decimal
para a Parte
Binária

Cálculo Numérico

(c) Temos que

0,6

×2

1, 2

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

Wellington José
Corrêa

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Binária para a Base Decimal

Mudança da Base Decimal para a Parte Binária

(c) Temos que

0,6	0,2	0,4	0,8	0,6
$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
<u>1,2</u>	<u>0,4</u>	<u>0,8</u>	<u>1,6</u>	<u>1,2</u>

logo, $(0, 6)_{10} = (0, \textcolor{red}{1}\textcolor{brown}{0}\textcolor{green}{0}\textcolor{blue}{1} \dots)_2$.

(c) Temos que

0,6	0,2	0,4	0,8	0,6
$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
$\hline 1,2$	$\hline 0,4$	$\hline 0,8$	$\hline 1,6$	$\hline 1,2$

logo, $(0,6)_{10} = (0,1001\dots)_2$.

Observe que $(0,6)_{10}$ é uma dízima periódica de período 1001.

Assim, o decimal 0,6 não tem uma representação binária, isto é, a representação é aproximada e com isso, apresenta erros.