

# PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

## NOTAS DE AULAS

Estas notas seguem de muito perto a bibliografia referenciada abaixo e que correspondem aos **livros textos deste Curso**. Sugere-se a sua aquisição. **O único objetivo destas notas é facilitar as atividades dos alunos em sala de aula, pois não precisarão anotar conteúdos e enunciados de exercícios**. De forma que o aluno tem um maior conforto em sala de aula e o professor poderá explicar os temas de forma mais rápida. De nenhuma maneira a leitura ou consulta da bibliografia está descartada, isto é dever do aluno.

Prof. Dr. Wyrllen Everson de Souza

## BIBLIOGRAFIA

- [1] JAMES, BARRY R. - Probabilidade, um curso em nível intermediário, 2<sup>a</sup> ed., IMPA (RJ), 1996.
- [2] DEGROOT, M.H. – Probability and Statistics, ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975.
- [3] MOOD A. M., GRAYBILL F., BOES, D. C. – Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill Book Company, 17<sup>a</sup> imp., 1986.
- [4] BICKEL, P. J. & DOKSUM, K.A. – Mathematical Statistics, Basic Ideas and Selected Topics, ed. Holden Day Inc., 1977.
- [5] MEYER, P.L. - Probabilidade, Aplicações à Estatística, Ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1972.
- [6] SPIEGEL, M.L. - Probabilidade e Estatística, Coleção Schaum, Ed. McGraw-Hill., 1978.
- [7] Montgomery, D. C. & Runger, G. C. – Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros, 2<sup>a</sup> ed., LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (021-2221-9621/fax 021-2221-3202), 2003.
- [8] Triola, M. F. – Introdução à Estatística, 7ed., LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (021-2221-9621/fax 021-2221-3202), 1999.

**SUMÁRIO**

## 1. CONCEITOS INICIAIS

### 1.1 - CONJUNTOS

Um **conjunto** pode ser considerado como uma coleção de objetos chamados **elementos do conjunto**. Em geral denota-se conjunto por letras maiúsculas A, B, C,..., N,... e a sua representação é feita por **enumeração dos elementos**, p.ex.  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ou por **compreensão**, p.ex.  $Z^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

#### EXEMPLOS:

Conjunto dos números naturais  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;

Conjunto dos números das faces de um dado  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;

Conjunto das faces de uma moeda  $F = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ .

#### RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

A relação existente entre elemento e conjunto é a de pertinência.

#### EXEMPLOS:

$$3 \in N$$

$$2) -1 \in Z$$

$$3) \sqrt{2} \notin N$$

$$4) \sqrt{2} \in R$$

#### SUBCONJUNTO

Seja o conjunto A, tal que todo elemento de A é também elemento do conjunto B. Então dizemos que A é subconjunto de B.

#### RELAÇÃO DE INCLUSÃO

A relação existente entre subconjunto e conjunto é a de inclusão.

#### EXEMPLOS:

Seja  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $A = \{2, 4, 6\}$ , então A está contido em B ou B contém A e representa-se por:  $A \subset B$  ou  $B \supset A$ .

#### CONJUNTO VAZIO

O conjunto que não possui nenhum elemento é chamado de vazio e representado por  $\emptyset$ .

#### CONJUNTO UNIVERSO

O conjunto que contiver todos os demais conjuntos é chamado de conjunto universo e representado por U.

## OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Entre conjuntos existem as seguintes operações:

### 1ª.) UNIÃO

O conjunto de todos os elementos (pontos) que pertencem ao conjunto A ou pertençam ao conjunto B ou a ambos é chamado UNIÃO de A e B e denotado por  $A \cup B$ .

### 2ª.) INTERSECÇÃO

O conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B é chamado intersecção entre A e B e representado por  $A \cap B$ .

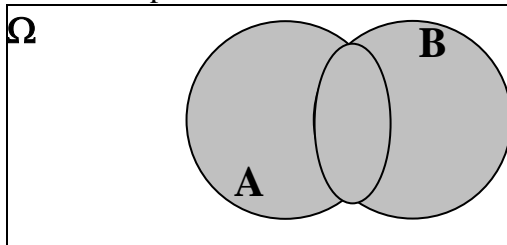
### 3ª.) DIFERENÇA

O conjunto formado pelos elementos de A e que não pertencem a B é chamado diferença entre A e B e denotado por  $A - B$ . Se  $B \subset A$ , então  $A - B$  é chamado de **complemento de B em relação a A** e representado por  $B_A^c$  e se A é o conjunto universo  $A - B$  é chamado de **complemento** e representado por  $B^c$ .

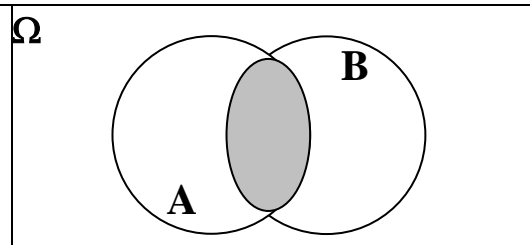
## CONJUNTOS DISJUNTOS

Os conjuntos A e B são chamados de disjuntos quando a sua intersecção é um conjunto vazio, ou seja,  $A \cap B = \emptyset$ .

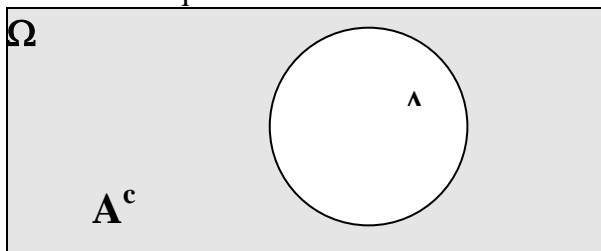
**União  $A \cup B$ :** implica na ocorrência de pelo menos um dos eventos



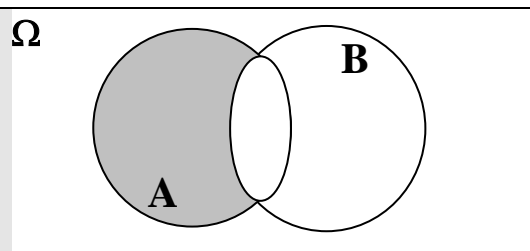
**Intersecção  $A \cap B$ :** quando os dois eventos ocorrem simultaneamente



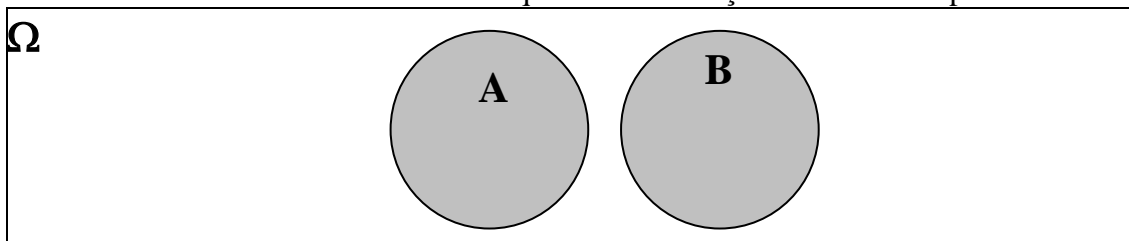
**Complemento de A =  $(A^c)$ :** quando não ocorre A



**Diferença A-B:** quando ocorre A mas não ocorre B



**Eventos mutuamente exclusivos:** quando a intersecção é o evento impossível



## PROPRIEDADE DE CONJUNTOS

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A - B = A \cap B^c$$

Se  $A \subset B$ , então  $A^c \supset B^c$  ou  $B^c \subset A^c$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

- Lei Comutativa da União

- Lei Associativa da União

- Lei Comutativa da Interseção

- Lei Associativa da Interseção

- Lei distributiva da Interseção

- Lei distributiva da União

- 1ª. Lei de De Morgan

- 2ª. Lei de De Morgan

## 1.2 - AMOSTRAS ORDENADAS E NÃO-ORDENADAS: Princípio Fundamental da Contagem, Diagrama em Árvore e Análise Combinatória

### 1.2.1 - Princípio Fundamental da Contagem

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

$m_1$  é o número de possibilidades da 1ª. etapa;

$m_2$  é o número de possibilidades da 2ª. etapa;

.....

.....

$m_k$  é o número de possibilidades da kª. Etapa.

Então, o número total de possibilidades do acontecimento ocorrer é  $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_k$ .

### EXEMPLO

No Brasil, as placas de automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Usando o alfabeto de 26 letras, quantas placas diferentes é possível formar?

### 1.2.2 - Amostras Ordenadas

Suponha que se tenha os conjuntos A e B. Se A tem m elementos (pontos) distintos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  e B tem p elementos distintos  $b_1, b_2, \dots, b_p$ ; então, o número de pares  $(a_i, b_j)$   $i = 1, 2, \dots, m$   $j = 1, 2, \dots, p$ , que podem ser formados, tomando-se um ponto de A e um ponto de B é  $m \cdot p$  (pelo Princípio Fundamental da Contagem). Suponha, ainda que se tenha n conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  cada um tendo  $m_1, m_2, \dots, m_n$  elementos distintos, respectivamente. Então, o número de n-uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que podem ser formadas com um elemento  $x_i$  de cada conjunto  $A_i$  é  $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_n$  (Princípio Fundamental da Contagem). Quando cada conjunto  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , é o mesmo conjunto A com N elementos distintos, tem-se  $N^n$  n-uplas, pois  $N \cdot N \cdot N \cdot \dots \cdot N = N^n$ .

### 1.2.3 - Amostras não-ordenadas

Suponha que se deseja calcular o número de amostras sem reposição com tamanho  $n$ , ou seja, com  $n$  elementos, tomadas de uma população (conjunto) com  $N$  elementos  $N \geq n$ . Pode-se observar o seguinte:

1º.) O número de amostras sem reposição, portanto com todos os elementos distintos, de tamanho  $n$  tomadas da população é dado por  $A_n^N = N.(N-1).(N-2). \dots .(N-n+1)$ .

2º.) Cada amostra (subconjunto) distinta  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  com  $n$  objetos distintos pode ser re-arranjada de  $n!$  modos distintos e, portanto tem-se:

$$\binom{N}{n} = \frac{A_n^N}{n!} = \frac{N.(N-1).(N-2)....(N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

combinações distintas ou melhor  $\binom{N}{n}$  diferentes amostras de tamanho  $n$  que podem ser extraídas, sem reposição e sem consideração de ordem, de um conjunto com  $N$  objetos distintos.

Como se pode observar, nos arranjos (permutações) intervém a ordem dos objetos (elementos). Assim,  $abc$  é um arranjo distinto de  $bca$ . Quando se está interessado apenas nos objetos, sem distinção da ordem (posição) que eles ocupam, os grupos são chamados de **combinações**. Então,  $abc$  e  $bca$  representam a mesma combinação.

## 2. PROBABILIDADE E MODELOS DE PROBABILIDADE

### 2.1 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Considere o **experimento** de jogar um dado equilibrado e observar o número da face superior. Observa-se no experimento que:

- a) Os “resultados possíveis” de ocorrer formam o conjunto  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ .

Definição 1: ESPAÇO AMOSTRAL,  $\Omega$ , de um experimento realizado sob condições fixas, é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, entendendo-se por resultado possível todo resultado elementar e indivisível do experimento.

Definição 2: RESULTADO COMPOSTO é todo resultado formado por mais de um resultado elementar e indivisível.

Observa-se no experimento que o resultado “número par” não é elementar e indivisível, pois é composto por três resultados deste tipo  $\{2,4,6\}$ , logo “número par” é um resultado composto.

Cada resultado pode ser associado ao espaço amostral como um subconjunto dele. O resultado “número par” é o subconjunto  $NP = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$ . Assim, todo resultado do experimento é subconjunto do espaço amostral.

### EXERCÍCIOS

2.1.1) Peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosas (D) ou não defeituosas (P). As peças são inspecionadas e suas condições registradas. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer em primeiro lugar. Descreva o espaço amostral para este experimento.

2.1.2) Uma caixa d'água cilíndrica que abastece certo local não recebe o suprimento de água de forma completamente previsível. Em um dia qualquer, a entrada de suprimento de água é igualmente provável para 1,5 m, 1,75 m ou 2,00 m. A demanda de água é, também, variável e pode necessitar das quantidades equivalentes a 1,25 m, 1,50 m ou 1,75m na caixa d'água. A demanda é equiprovável.

- a) Quais são as possíveis combinações do fluxo de entrada de água e do fluxo de saída?  
b) Assumindo que o nível da água na caixa seja 1,75 m no início de um dia, qual são os possíveis níveis da água no final do dia?  
c) Qual é a probabilidade de que no final do dia exista, pelo menos 2,25 m na altura da água remanescente?

Definição 3: Seja  $\Omega$  o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto  $A \subset \Omega$  será chamado de evento, o conjunto  $\Omega$  é evento certo, o subconjunto  $\emptyset$  é o evento impossível e se  $\omega \in \Omega$  o evento  $\{\omega\}$  é dito elementar e indivisível.

Definição 4: DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE (quando  $\Omega$  é finito).

Seja A um subconjunto do espaço amostral  $\Omega$ ,  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Então, se todos os resultados elementares de  $\Omega$  são equiprováveis a medida da probabilidade de ocorrência do evento

A é dada por  $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ .

Definição 5: DEFINIÇÃO FREQUENTISTA DE PROBABILIDADE (Von Mises)

A probabilidade de ocorrência do evento A em n ensaios é definida, segundo Von Mises, por:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\text{número de ocorrências de A em n ensaios})$$

Definição 6: DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE (Kolmogorov)

Probabilidade ou medida de probabilidade é a função P definida em  $\mathcal{A}$  e que satisfaz os axiomas seguintes:

A1)  $P(A) \geq 0$

A2)  $P(\Omega) = 1$

A3) Se A e B  $\in \mathcal{A}$  e são disjuntos  $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\text{Se } A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{A} \text{ e são disjuntos} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$A3') \text{ Se } A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \text{ e são disjuntos} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## EXERCÍCIOS:

2.1.3) Um dado é lançado. Pergunta-se a probabilidade dos eventos:

a) A= sair um número ímpar.

b) B= sair um número menor que 3.

c) C= sair um número maior que 10.

d)  $\Omega$ = sair um número inteiro maior ou igual a 1 e menor ou igual a 6.

2.1.4) Sejam A, B, C três eventos associados a um experimento. Exprima em notação de conjunto as seguintes afirmações verbais:

Ao menos um dos eventos ocorre;

Exatamente um dos eventos ocorre;

Exatamente dois dos eventos ocorrem;

Não mais de dois eventos ocorrem simultaneamente.

## 2.2 - PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE

Além das propriedades enunciadas na definição axiomática, a função P goza, ainda, das seguintes:



P1) Se  $A$  é um evento aleatório, então a probabilidade de  $A$  não ocorrer é dada por  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

P2) Se  $A$  é um evento aleatório, então  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

P3)  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ . (conjuntos disjuntos)

## 1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Suponha que 4 cartas estejam numeradas de 1 a 4. Das 4 cartas retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar-se o 1º. número par. Conta-se o número de retiradas necessárias. Descreva um espaço de probabilidade para o experimento.

2) Considere, agora, outro experimento que consiste na escolha, ao acaso, de um ponto eqüidistante dos extremos do segmento de reta  $AB$  com comprimento de 2 cm, contido no eixo das abscissas de um Sistema Cartesiano e com  $A$  colocado na origem do sistema.

Descreva o espaço amostral do experimento;

Descreva o resultado  $\omega_1$  “distância entre o ponto escolhido e o ponto médio do segmento é  $\leq 2$ ” na forma de subconjunto do espaço amostral;

Descreva o resultado  $\omega_2$  “distância entre o ponto escolhido e a origem é  $\leq \frac{1}{2}$ ”;

Descreva o resultado  $\omega_3$  “a 1ª. coordenada do ponto escolhido tem comprimento menor que a 2ª”.

3) Uma caixa com  $N$  lâmpadas contém  $r$  lâmpadas ( $r < N$ ) com filamento partido. Essas lâmpadas são verificadas uma a uma até que uma lâmpada defeituosa seja encontrada.

a) Descreva o espaço amostral do experimento.

b) Suponha que as lâmpadas acima sejam verificadas uma a uma, até que todas as defeituosas tenham sido encontradas. Descreva o espaço amostral para este experimento.

4) Considere 4 objetos  $a, b, c, d$ . Suponha que a ordem em que tais objetos sejam listados represente o resultado de um experimento. Sejam os eventos  $A$  e  $B$  definidos por:

$A = \{a \text{ está na } 1^{\text{a}} \text{ posição}\}$

$B = \{b \text{ está na } 2^{\text{a}} \text{ posição}\}$

Enumere todos os elementos do espaço amostral do experimento.

Enumere todos os elementos dos eventos:  $A \cap B$  e  $A \cup B$ .

5) Um lote contém peças pesando 5, 10, 15, ..., 50 g. Admite-se que ao menos 2 peças de cada peso sejam encontradas no lote. Duas peças são retiradas do lote. Seja  $X$  o peso da 1ª. peça escolhida e  $Y$  o peso da 2ª.. Portanto, o par de números  $(X, Y)$  representa um resultado simples do experimento. Empregando o plano  $XY$ , marque o espaço amostral e os seguintes eventos:

$\{X = Y\}$

$\{Y > X\}$

$\{Y = 2X\}$

6) Durante um período de 24 h, em algum momento X, uma chave é posta na posição “ligada”. Depois em algum momento futuro Y (dentro do período de 24h) a chave é virada para a posição “desligada”. Suponha que X e Y sejam medidas em horas, no eixo dos tempos, com o início do período na origem da escala. O resultado do experimento é constituído pelo par de números (X, Y).

Descreva o espaço amostral.

Descreva e marque no plano XY os seguintes eventos:

O circuito está ligado por uma hora ou menos.

O circuito está ligado no tempo Z, onde Z é algum instante no período de 24 h.

O circuito é ligado antes do tempo  $t_1$  e desligado depois do tempo  $t_2$  (onde  $t_1 < t_2$  são 2 instantes durante o período de 24 h especificado).

O circuito permanece ligado duas vezes mais tempo do que desligado.

7) Seja o experimento, onde se escolhe ao acaso um ponto do círculo unitário centrado na origem.

Qual a probabilidade de ocorrer o evento  $A = \text{“distância entre ponto escolhido e a origem é } \leq 1/2 \text{”}$ ?

Qual a probabilidade de ocorrer o evento  $B = \text{“1ª coordenada do ponto escolhido é } > \text{ que a 2ª”}$ ?

8) Uma carta é retirada ao acaso de um baralho com 52 cartas.

Qual a probabilidade de sair a carta de espadas?

Qual a probabilidade de sair um rei?

9) Demonstre o Teorema “Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). ”$$

10) Certo tipo de motor elétrico falha nas seguintes situações:

A. emperramento dos mancais;

B. queima dos rolamentos;

C. desgaste das escovas;

Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima e esta é quatro vezes mais provável do que o desgaste das escovas. Qual será a probabilidade de que o motor falhe devido a cada uma dessas circunstâncias?

11) Suponha que A e B sejam eventos tais que  $P(A) = x$ ,  $P(B) = y$  e  $P(A \cap B) = z$ .

Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de x, y e z:

a)  $P(A^c \cup B^c)$     b)  $P(A^c \cap B)$     c)  $P(A^c \cup B)$     d)  $P(A^c \cap B^c)$

12) Suponha que A, B e C sejam eventos tais que  $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$ ,  $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$  e  $P(A \cap C) = 1/8$ . Calcule a probabilidade de que ao menos um dos eventos A, B ou C ocorra.

13) O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 homens com mais de 21 anos, 4 homens com menos de 21 anos, 6 mulheres com mais de 21 anos e 3 mulheres com menos de 21 anos de idade. Uma pessoa é escolhida ao acaso. Definem-se os seguintes eventos:  $A=\{\text{a pessoa é maior de 21 anos}\}$ ;  $B=\{\text{a pessoa é menor de 21 anos}\}$ ;  $C=\{\text{a pessoa é homem}\}$ ;  $D=\{\text{a pessoa é mulher}\}$ . Calcule:

a)  $P(B \cup D)$     b)  $P(A^c \cap C^c)$

14) Em uma sala 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 a 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número do seu emblema é anotado. Qual a probabilidade de que o menor número de emblema seja 5? Qual a probabilidade de que o maior número do emblema seja 5?

15) Uma remessa de 1500 arruelas contém 400 peças defeituosas e 1100 perfeitas. Duzentos arruelas são escolhidas ao acaso (sem reposição) e classificadas. Qual a probabilidade de que sejam encontradas exatamente 90 peças defeituosas? Qual a probabilidade de que sejam encontradas ao menos 2 peças defeituosas?

16) Suponha que os três dígitos 1, 2 e 3 sejam escritos em ordem aleatória. Qual a probabilidade de que ao menos um dígito ocupe seu lugar próprio? Qual a probabilidade de que os dígitos 1, 2, 3 e 4 ocupem os seus lugares próprios quando são escritos em ordem aleatória? Qual a probabilidade de que os dígitos 1, 2, 3, 4, ..., n ocupem os seus lugares próprios na mesma situação de escrita em ordem aleatória?

### 2.3. PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS:

#### 2.3.1 - Probabilidade Condicional

Definição 1: Sejam o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e os eventos  $A, B \in \mathcal{A}$  com  $P(B) > 0$ , a probabilidade condicional do evento A dado B é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad A \in \mathcal{A}$$

**OBS:**

1ª.) Se  $P(B) = 0$ ,  $P(A|B)$  pode ser arbitrariamente definida. A maioria dos livros faz  $P(A|B) = 0$ , mas é conveniente pela independência se fazer  $P(A|B) = P(A)$ .

2ª.) Como  $P(A|B)$  é uma probabilidade, vale para ela todas as propriedades de probabilidade.

3ª.) Como  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , então a probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B é dada por:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$ .

#### 2.3.2 Teorema da Multiplicação ou da Probabilidade Composta

“Seja o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , então:

$$I. P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

$$II. P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$\forall A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} ”.$$

## EXERCÍCIOS:

2.3.1) Duas válvulas defeituosas se misturam com duas válvulas perfeitas. As válvulas são ensaiadas, uma a uma, até que ambas as defeituosas sejam encontradas.

- a) Qual a probabilidade de que a última válvula defeituosa seja encontrada no segundo ensaio?
- b) Qual a probabilidade de que a última válvula defeituosa seja encontrada no terceiro ensaio?
- c) Qual será a probabilidade de que a última válvula defeituosa seja encontrada no quarto ensaio?

2.3.2) A urna 1 contém  $x_1$  bolas brancas e  $y_1$  bolas vermelhas. A urna 2 contém  $x_2$  bolas brancas e  $y_2$  bolas vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna 1 e posta na urna 2. A seguir uma bola é escolhida ao acaso da urna 2. Qual seria a probabilidade de que esta bola seja branca?

### 2.3.3 - Independência de eventos

DEFINIÇÃO: Seja o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Os eventos aleatórios A e B são estocasticamente independentes se  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ , ou seja,  $P(B|A) = P(B)$  e  $P(A|B) = P(A)$ .

2.3.3) Um dado é lançado e, independentemente, uma carta é extraída de um baralho completo (52 cartas). Qual será a probabilidade de que: a) O dado mostre um número PAR e a carta seja de um naipe vermelho? b) O dado mostre um número PAR ou a carta seja de um naipe vermelho?

## 2.4 - EVENTOS ALEATÓRIOS

### 2.4.1 - Eventos Mutuamente Exclusivos

Os eventos A e B, com  $A, B \in \mathcal{A}$ , são mutuamente exclusivos (disjuntos) se  $P(A \cap B) = 0$  ou seja  $A \cap B = \emptyset$ .

### 2.4.2 - Eventos Independentes

Os eventos A e B, com  $A, B \in \mathcal{A}$ , são independentes se  $P(A|B) = P(A)$  e  $P(B|A) = P(B)$ .

### 2.4.3 - Propriedades de Eventos Independentes

1ª.) O evento aleatório  $A \in \mathcal{A}$  é independente de si mesmo se e somente se  $P(A) = 0$  ou  $P(A) = 1$ .

2ª.) Se A e B são eventos aleatórios independentes pertencentes a  $\mathcal{A}$ , então A e  $B^c$ ,  $A^c$  e B,  $A^c$  e  $B^c$  também são independentes.

3ª) Se A e B são eventos aleatórios mutuamente exclusivos pertencentes a  $\mathcal{A}$ , então A e B são independentes somente se  $P(A) = 0$  ou  $P(B) = 0$ .

## EXERCÍCIOS:

2.4.1) Suponha que A e B sejam eventos independentes associados a um experimento. Se a probabilidade de A ou B ocorrer for igual a 0,6 enquanto a probabilidade de ocorrência de A for igual a 0,4 determine a probabilidade da ocorrência de B

## 2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Dez fichas numeradas de 1 a 10 são misturadas em uma urna. Duas fichas, numeradas (x, y), são extraídas da urna, sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de  $x + y = 10$ ?

2) Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso. Ache a probabilidade de que:

a) Ele não tenha defeitos:

b) Ele não tenha defeitos graves:

c) Ele seja perfeito ou tenha defeitos graves:

d) Resolva os itens c e b aplicando a definição de probabilidade:

3) Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves, se dois artigos forem escolhidos (sem reposição), ache a probabilidade de que:

a) Ambos sejam perfeitos;

b) Ambos tenham defeitos graves;

c) Ao menos 1 seja perfeito;

d) No máximo 1 seja perfeito;

e) Exatamente 1 seja perfeito;

f) Nenhum tenha defeitos graves;

g) Nenhum deles seja perfeito.

4) Um número inteiro é escolhido ao acaso, dentre os números 1,2,...,50. Qual será a probabilidade de que o número escolhido seja divisível por 6 **ou** por 8? Qual é a probabilidade do número escolhido ser divisível por 6 **e** por 8?

5) Uma caixa contém etiquetas numeradas 1, 2, 3, ... , n. Duas etiquetas são escolhidas ao acaso. Determine a probabilidade de que os números das etiquetas escolhidas sejam inteiros consecutivos se:

a) As etiquetas forem escolhidas sem reposição.

b) As etiquetas forem escolhidas com reposição.

6) Dentre 6 números positivos e 8 negativos, escolhe-se ao acaso 4 números (sem reposição) e multiplicam-se esses números. Qual será a probabilidade de que o produto seja um número positivo?

7) Uma caixa contém 4 válvulas defeituosas e 6 perfeitas. Duas válvulas são extraídas juntas. Uma delas é ensaiada e se verifica ser perfeita. Qual a probabilidade de que a outra válvula também seja perfeita?

8) No problema anterior, as válvulas são verificadas extraíndo-se uma válvula ao acaso, ensaiando-se e repetindo-se o procedimento até que todas as 4 válvulas defeituosas sejam encontradas. Qual será a probabilidade de que a quarta válvula defeituosa seja encontrada

no quinto ensaio

no décimo ensaio.

9) Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que  $P(A) = 0,4$  enquanto  $P(A \cup B) = 0,7$ . Seja  $P(B) = p$ .

a) Para qual valor de p, A e B serão mutuamente excludentes?

b) Para qual valor de p, A e B são independentes?

10) Um número binário é constituído apenas dos dígitos 0 e 1. (Por exemplo, 1011, 1100, etc.). Esses números têm importante papel na utilização de computadores eletrônicos. Suponha que um número binário seja formado por n dígitos. Suponha que a probabilidade de que um dígito incorreto apareça seja p e que os erros em diferentes dígitos sejam independentes uns dos outros. Qual será a probabilidade de formar-se um número incorreto?

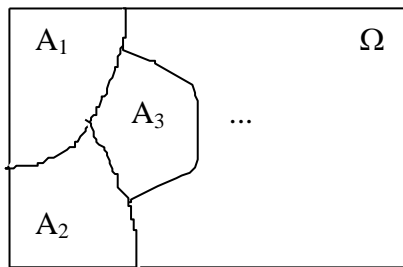
11) Um dado é atirado n vezes. Qual é a probabilidade de que a face 6 apareça ao menos uma vez em n jogadas?

12) Cada uma de 2 pessoas joga três moedas equilibradas. Qual é a probabilidade de que elas obtenham o mesmo número de caras?

## 2.5- PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL $\Omega$

### 2.5.1- Teorema da Probabilidade Total

#### ***PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL $\Omega$***



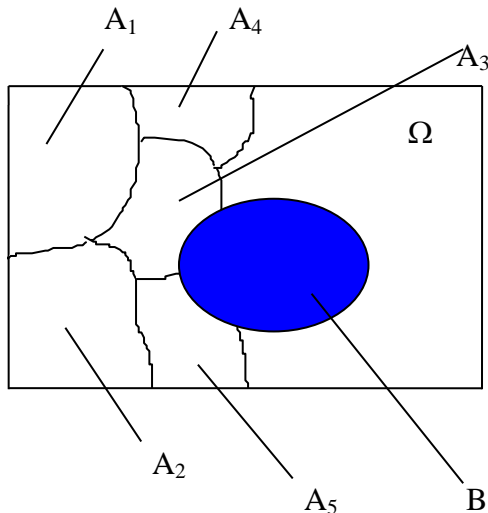
• Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots$  eventos aleatórios mutuamente exclusivos e exaustivos, isto é, os  $A_i$  são disjuntos e  $U A_i = \Omega$ , então os eventos  $A_i$  formam uma PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL  $\Omega$ .

• É importante observar DUAS COISAS, admitindo-se que a sequência  $A_1, A_2, A_3, \dots$  seja FINITA ou INFINITA ENUMERÁVEL:

$A_i$  e  $A_i^c$  formam uma PARTIÇÃO,  $\forall A_i \in \mathcal{A}$ .

$\forall$  evento  $B \in \mathcal{A}$  temos  $B = \bigcup_i (A_i \cap B)$ , pois os  $A_i$  são disjuntos, então os  $B \cap A_i$  também são disjuntos e  $B = \bigcup_i B \cap A_i$  logo

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$



## TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Definição 1: Se a sequência (finita ou infinita enumerável) de eventos aleatórios  $A_1, A_2, A_3, \dots$  forma uma PARTIÇÃO do espaço amostral  $\Omega$ , então a probabilidade de um evento  $B$  contido em  $\Omega$  é dada por:

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

**OBS:** O Teorema da Probabilidade Total é utilizado quando se conhecem todas as  $P(A_i)$  e as  $P(B/A_i)$ , mas se desconhece diretamente  $P(B)$ .

## EXERCÍCIOS:

2.5.1) Três candidatos  $A_1, A_2$  e  $A_3$  disputam uma eleição. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5, 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover mudanças substanciais caso eleitos são respectivamente 0,7, 0,6 e 0,3. Qual é a probabilidade de que as mudanças substanciais ocorram, após a posse do eleito?

### 2.5.2- Teorema de Bayes

Com base no Teorema da Probabilidade Total é possível calcular a probabilidade do evento  $A_j$  dada à ocorrência do evento B, pela fórmula:

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B | A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B | A_j)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(B | A_i)}$$

Esta expressão é conhecida como FÓRMULA DE BAYES (Teorema de Bayes).

### EXERCÍCIOS:

2.5.2) Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é 0,3. O meu time ganha um jogo em dia de chuva com probabilidade 0,4 e em dia sem chuva com probabilidade 0,6. Se o meu time ganha o jogo em novembro, qual a probabilidade de que tenha chovido no dia?

2.5.3) Um saco contém 3 moedas, uma das quais foi cunhada com duas caras, enquanto as outras duas moedas são normais. Uma moeda é tirada ao acaso e jogada quatro vezes em seqüência. Se sair CARA toda vez, qual será a probabilidade de que essa seja a moeda de duas caras?

### 3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) A probabilidade de que um aluno saiba a resposta de certa questão, em um exame de múltipla escolha é p. Das opções de resposta para cada questão, somente uma é correta. Se o aluno não sabe a resposta para a questão, ele seleciona ao acaso uma resposta dentre as m opções. Se a probabilidade do aluno responder corretamente dado que ele sabe a resposta é 0,88; pergunta-se:

a) Se o aluno responder corretamente a questão, qual a probabilidade de que ele tenha chutado a resposta?

b) Se o aluno responder incorretamente a questão, qual a probabilidade de que ele não tenha chutado a resposta?

2) Em um experimento sobre sabor de vinho a uma equipe de 5 especialistas (*someliers*) é servido um entre 2 vinhos, um do vale do rio S. Francisco (PE/BA) e o outro do vale dos Vinhedos (RGS). O vinho é selecionado por lançamento de uma moeda honesta. Suponha que cada especialista tenha uma probabilidade  $\frac{3}{4}$  de adivinhar corretamente, independentemente dos outros especialistas. Então, pergunta-se:

Se 4 dos 5 juizes afirmarem que o vinho é do Vale do S. Francisco, qual a probabilidade de que na verdade o vinho gaúcho tenha sido servido?

Nas mesmas condições do item a, qual a probabilidade de que o vinho do Vale do S. Francisco tenha sido servido?

3) Cinco em 100 homens são daltônicos e 25 em 1000 mulheres são daltônicas. Uma pessoa escolhida ao acaso é daltônica. Qual a probabilidade de que seja homem?



4) Suponha que temos duas urnas 1 e 2, cada urna tem duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra; enquanto a urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida ao acaso, a seguir uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Verifica-se que a moeda encontrada nessa gaveta é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda provenha da urna 2?

5) Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produziram 25, 35 e 40% do total produzido, respectivamente. Da produção de cada máquina 5, 4 e 2% respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e se verifica ser defeituoso. Qual será a probabilidade de que o parafuso venha da máquina A? da B? da C?

6) Jogam-se dois dados. Desde que as faces mostrem números diferentes, qual será a probabilidade de que uma face seja 4?

2.5.15) Na busca pelo ouro dos Incas os conquistadores espanhóis vasculharam todo o Peru, muitas vezes foram bem sucedidos outras vezes não. Uma vez, certo conquistador se viu sob o seguinte dilema. Os  $\frac{1}{3}$  dos incas de uma aldeia que foram interrogados responderam que o “El Dorado” estaria no final do caminho na direção nordeste,  $\frac{1}{3}$  disseram que estaria no final do caminho na direção leste e  $\frac{1}{3}$  no final do caminho da direção sudeste. Antes de escolher o caminho a ser percorrido o conquistador encontrou o Grande Feiticeiro inca. O feiticeiro, que tudo sabia e podia, afirmou que no final de um dos caminhos realmente existia o “El Dorado”, mas no final de cada um dos outros dois existia uma região povoada por índios antropófagos, onças, cobras e com chuvas intensas. Nenhuma expedição, dos incas ou de outro povo, que se aventurou até o final de qualquer deles teve algum membro de volta. Então, o feiticeiro propôs o seguinte jogo. Independentemente do caminho que o conquistador escolhesse de início, ele mostraria num passe de mágica o que havia no final de uma das duas direções não escolhidas. Mas, mostraria um dos caminhos perigosos para que o conquistador se desse conta do que o esperava. Então, o conquistador teria chance de mudar a sua escolha inicial ou permanecer com ela. Qual a probabilidade do conquistador alcançar a lendária cidade do “El Dorado”?

### 3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

#### 3.1 – VARIÁVEL ALEATÓRIA

Definição 3.1.1: Uma variável aleatória  $X$  é uma função real definida no espaço  $\Omega$ , tal que o evento  $[X \leq x]$  é evento aleatório para qualquer  $x$  pertencente aos reais, isto é, a função  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é variável aleatória se o evento  $[X \leq x]$  pertence a sigma-álgebra, para todo  $x$  pertencente aos reais.

#### EXERCÍCIOS:

3.1.1) Seja uma família com duas crianças.

- a) Escreva todas as situações possíveis de ocorrer quanto ao sexo das duas crianças.
- b) Associe a cada situação possível um número real.

##### 3.1.1 - Variável aleatória discreta

Definição 3.1.2: Uma v.a. é dita DISCRETA quando seu contradomínio é um conjunto finito ou infinito enumerável  $\{x_1, x_2, \dots\}$  contido em  $\mathbb{R}$  tal que  $W(\omega)$  pertence a  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , para todo  $\omega$  pertencente a  $\Omega$ .

##### 3.1.2 - Variável aleatória contínua

Definição 3.1.3: Uma v.a. é chamada CONTÍNUA quando seu contradomínio é um conjunto infinito.

#### 3.2 – FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Uma vez que uma v.a. assume um valor do seu contradomínio com uma certa probabilidade, tem-se que as probabilidades são associadas a valores da variável aleatória discreta por uma função de probabilidade (f.p.) e as probabilidades são associadas a *intervalos de valores* de uma variável aleatória contínua por uma função densidade de probabilidade (f.d.p.).

##### 3.2.1 - Função de Probabilidade

Definição 3.2.1: A função de probabilidade da v.a.  $X$  discreta é representado por  $P(X=x)$ , e sempre  $p(x_i) \geq 0$  e  $\sum p(x_i) = 1$ .

**Exemplo:** Ao lançar um dado e seja X os valores observados:

X	1	2	3	4	5	6
P(x <sub>i</sub> )	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Verifique se X é uma Função de Probabilidade (f.p) e calcule a probabilidade de obter um valor par na face superior.

### 3.2.2 - Função Densidade de Probabilidade

Definição 3.2.2: A função densidade de probabilidade de uma v.a. X contínua é representada por  $f_x(x)$ , sendo que  $f_x(x) \geq 0$  e  $\int f_x(x) dx = 1$ .

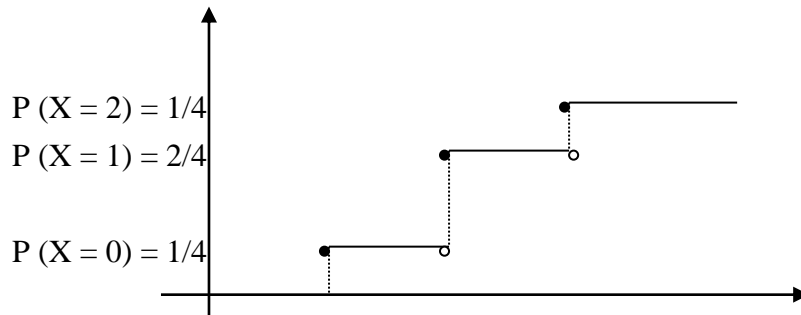
**Exemplo:** Seja uma v.a.contínua definida pela f.d.p:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ kx & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

Ache  $k$  para que a  $f(x)$  seja uma f.d.p. e calcule a probabilidade de  $x \geq 1$ .

### 3.3 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

Definição 3.3.1: A função distribuição da v.a. X,  $F_x(x) = P(X \leq x)$ , é não decrescente, isto é, se  $x \leq y$  então  $F_x(x) \leq F_y(y)$ .



**Exemplo:** Dois dados são lançados. A v. a X é definida como a soma dos pontos obtidos:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ache a função distribuição de X.

### 3.4 ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA:

#### 3.4.1 Esperança de uma Variável Aleatória

Esperança de uma variável Aleatória é um valor médio dos possíveis valores de X, ponderada conforme sua distribuição, isto é, uma média ponderada onde os pesos são as probabilidades  $p(x_i)$ .

Definição 3.4.1: Seja uma v.a. X discreta que assume valores no conjunto  $\{x_1, x_2, \dots\}$ .

Chama-se VALOR MÉDIO ou ESPERANÇA MATEMÁTICA de X o valor  $\mu$ .

CASO DISCRETO:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

CASO CONTÍNUO:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

#### PRORPIEDADES

1.  $E(X=c) = c$ , onde c é uma constante
2.  $E(cX) = cE(X)$ , onde c é uma constante
3.  $E(aX + b) = a.E(X) + b$ , onde a e b são constantes.

**Exemplo:** Seja uma distribuição de probabilidade dada por:

X	-1	0	1
P(X)	1/4	1/2	1/4

Determine a  $E(X)$

**Exemplo:** Seja a f.d.p dada abaixo, calcule a  $E(X)$ .

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c/c} \end{cases}$$

### 3.4.2 Variância de uma Variável Aleatória

Definição 3.4.2: Se  $X$  é uma v.a., definimos a variância de  $X$  como a dispersão da densidade de  $X$  em relação ao seu valor de localização central de densidade( $E(X)$ ) e é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2$$

CASO DISCRETO:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ onde } E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i).$$

CASO CONTÍNUO:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ onde } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx. E(X - \mu)^2.$$

#### PROPRIEDADES

1.  $V(X + c) = V(X)$ , onde  $c$  é constante.
2.  $V(cX) = c^2 \cdot V(X)$ , onde  $c$  é constante.

Definição 3.4.3 A raiz quadrada da variância da v.a.  $X$  é denominada desvio padrão e é definido por  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

É importante observar que a variância mede a dispersão (espalhamento) dos dados em torno da média  $\mu = E(X)$  e o desvio padrão faz isto também, mas na mesma unidade de medida dos dados.

**Exemplo:** Seja uma distribuição de probabilidade dada por:

$X$	-1	0	1
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Determine a  $V(X)$

**Exemplo:** Seja a f.d.p dada abaixo, calcule a  $V(X)$ .

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c/c} \end{cases}$$

#### 4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Um determinado artigo é vendido em caixa a preço de R\$20,00 cada um. É característica de produção que 20% destes artigos sejam defeituosos. Um comprador fez a seguinte proposta: de cada caixa escolhe 25 artigos, ao acaso, e paga por caixa:

R\$ 25,00 se nenhum artigo for defeituoso dos selecionados;

R\$ 17,00 se um ou dois artigos forem defeituosos;

R\$ 10,00 se três ou mais artigos forem defeituosos.

O que é melhor para o fabricante, manter o seu preço de R\$20,00 por caixa ou aceitar a proposta do consumidor?

2) Classifique as variáveis abaixo relacionadas em discreta ou contínua:

a) A variável X correspondente ao número de filhos de um casal.

b) A variável Y correspondente à altura de uma pessoa adulta.

c) A variável E correspondente ao erro de uma medida física.

d) A variável W correspondente ao número de pessoas que chegam em casa às 9h.

e) A variável T correspondente ao tempo de espera em fila de banco.

f) A variável Z correspondente à duração de uma lâmpada elétrica.

3) Uma sacola contém 3 moedas de prata e 1 de ouro. Retiram-se sucessivamente 3 moedas da sacola com reposição, olhando se ela é de prata ou de ouro.

a) Descreva o espaço amostral  $\Omega$  do experimento.

b) Seja a variável aleatória  $X(\omega)$  que associa com um número real a quantidade de moedas de ouro ocorridas no experimento, quais os valores que  $X(\omega)$  pode assumir?

c) A variável X é discreta ou contínua, por quê?

d) Calcule a esperança e a variância da variável X.

e) Calcule o desvio padrão da variável X.

4) Seja uma família com 4 crianças e seja a variável X que é associada a um número de crianças com olhos azuis na família. Sabe-se que nesta família a probabilidade de crianças nascerem com olhos azuis é de  $\frac{1}{4}$ .

a) Calcule a probabilidade de não existir crianças com olhos azuis na família, ou de uma criança com olhos azuis, ou duas crianças, ou três crianças, ou quatro crianças.

b) Escreva a função de probabilidade da variável X,  $P_X$ , e a função distribuição.

c) Calcule a esperança e a variância de X.

d) Calcule o desvio padrão de X.

5) Suponha que a porcentagem de impurezas de um composto seja uma variável aleatória contínua com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} k(2x^2 + x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) Calcule o valor de k.

b) Calcule a probabilidade  $P(X \geq 0,6)$

c) Ache a  $E(X)$  e  $V(X)$ .

6) Um supermercado faz a seguinte promoção, o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair a face 6 tem um desconto de 30% sobre a conta, se sair a face 5 o desconto é de 20%, se ocorrer a face 4 é de 10% e se sair a face, 1, 2 ou 3 o desconto é de 5%. Calcule a desconto médio dado pelo supermercado.

7) Num jogo de dados, Felipe paga R\$20,00 para Lucia e lança 3 dados. Se sair a face 1 em apenas um dado, Felipe ganha R\$20,00. Se sair face 1 em dois dados apenas, Felipe ganha R\$50,00, e se sair 1 nos 3 dados, Felipe ganha R\$80,00. Calcular o lucro médio de Felipe.

## 4. DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE PROBABILIDADE

Neste capítulo estudaremos alguns modelos de probabilísticos padrões, que podem ser usados em situações práticas. O problema agora consiste em determinar qual o modelo mais adequado para a situação de estudo e como aplicá-lo adequadamente.

### 4.1 – DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Talvez os experimentos mais simples são aqueles em que observamos presença ou não de alguma característica, que são conhecidos como ensaios de Bernoulli. Alguns exemplos:

- 1) Face de uma moeda: cara ou coroa.
- 2) Sexo de uma criança: masculino ou feminino.
- 3) Qualidade de uma peça: perfeita ou defeituosa.

Consideremos apenas uma única tentativa de um experimento aleatório. Podemos então ter uma *sucesso* ou um *fracasso* nessa tentativa.

Seja  $\theta$  a probabilidade de sucesso e  $(1 - \theta)$  a probabilidade de fracasso, logo  $\text{sucesso} + \text{fracasso} = \theta + (1 - \theta) = 1$ .

Uma v.a.  $X$ : número de sucessos em uma única tentativa do experimento. A v.a.  $X$  assume valor 0 que corresponde ao fracasso, com probabilidade  $(1 - \theta)$ , ou valor 1, que corresponde ao sucesso, com probabilidade  $\theta$ .

$$X = \begin{cases} 0 = \text{fracasso} \\ 1 = \text{sucesso} \end{cases} \quad \text{com} \quad P(X = 0) = (1 - \theta) \quad \text{e} \quad P(X = 1) = \theta$$

tem uma distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$  quando assume apenas os valores 1 e 0 com probabilidade  $\theta$  e  $(1 - \theta)$ , respectivamente. O número 1, em geral, representa sucesso.

**Definição 4.1.1.** A v.a.  $X$  é chamada variável de Bernoulli e  $\theta$  é a probabilidade de “sucesso”, então:

$$P(X = x) = \theta^x + (1 - \theta)^{1-x} \quad x = 0; 1 \quad 0 < \theta < 1$$

Os parâmetros de uma variável de Bernoulli são: 
$$\begin{cases} E(X) = \theta \\ V(X) = \theta(1 - \theta) \end{cases}$$

**Exemplo:** Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja  $X$ : Número de bolas verdes, determinar  $P(X)$ , calcular  $E(X)$  e  $V(X)$ .



## 4.2 – DISTRIBUIÇÃO DE BINOMIAL

Consideremos  $n$  tentativas independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite apenas dois resultados, *sucesso* ou um *fracasso*. As probabilidades de *sucesso* e *fracassos* são as mesmas para cada tentativa.

Definição 4.2.1: Uma v.a.  $Y$  tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $\theta$  quando assume valores no conjunto  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y} \quad n = 0, 1, 2, \dots, n$$

**Exemplo:** Sabe-se que 5% dos parafusos fabricados por certa indústria são defeituosos. Em um lote de 10 parafusos, calcular a probabilidade de:

- a) exatamente 2 serem defeituosos;
- b) menos de 2 serem defeituosos;
- c) três ou mais serem defeituosos.

**Exemplo:** Dados históricos mostram que 5% dos itens provindos de um fornecedor apresentam algum tipo de defeito. Considerando um lote com 20 itens, calcular a probabilidade de:

- a) haver um item com defeito;
- b) haver exatamente dois itens defeituosos;
- c) haver mais de dois itens defeituosos;

**Exemplo:** Qual a esperança e a variância de uma v.a. com distribuição binomial?

Os parâmetros de uma variável de Binomial são  $\begin{cases} E(Y) = n\theta \\ V(Y) = n\theta(1 - \theta) \end{cases}$

**Exemplo:** Achar a média de uma variável aleatória  $X = 3Y + 2$ , onde  $Y$  é uma variável aleatória binomial com  $n = 20$  e  $\theta = 0,3$ .

## 4.3 – DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Muitas vezes, no uso da binomial, acontece que  $n$  é muito grande ( $n \rightarrow \infty$ ) e  $\theta$  é pequeno ( $\theta \rightarrow 0$ ). Nesses casos não encontramos o valor em tabelas, ou então o cálculo é difícil. Assim, pode-se fazer uma aproximação da binomial pela Poisson, fazendo:

1.  $n \rightarrow \infty, (n > 30)$ ;
2.  $\theta \rightarrow 0, (\theta < 0, 1)$ ;
3.  $0 < n\theta \leq 10$  consideraremos  $np = \lambda$ .

Assim é possível mostrar que:

$$X \sim B(n, p) \approx X \sim Poi(\lambda)$$

**Definição 4.3.1:** Na distribuição de Poisson a probabilidade de ocorrência de “sucesso” é proporcional ao intervalo considerado (distância, tempo, etc). Seja  $X$  o número de sucessos neste intervalo, então a função de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Esta distribuição é usada em:

1. carros que passam no cruzamento por 1 hora;
2. erros tipográficos por página;
3. defeitos por unidade por peça fabricada;
4. mortes por ataque do coração por ano numa cidade;
5. tempo de espera numa fila

**Exemplo:** Suponha que o número de erros tipográficos em uma única página de um livro tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda = 1$ . Calcule a probabilidade de que:

- a) Uma página qualquer contenha exatamente 1 erro;
- b) Uma página qualquer não contenha erros;
- c) Uma página qualquer contenha pelo menos 1 erro;
- d) Uma página qualquer contenha 2 ou 3 erros;
- e) No máximo 1 erro na página;
- f) Qual o número esperado de erros por página?
- g) Qual o desvio padrão do número de erros por página?
- h) Em 5 páginas tenham exatamente 12 erros;
- i) Em 13 páginas tenham no máximo 2 erros.

Os parâmetros de uma variável de Poisson são  $\begin{cases} E(Y) = \lambda \\ V(Y) = \lambda \end{cases}$

**Exemplo:** Suponha que o número de consumidores que entrem num banco em uma hora seja uma v.a. de Poisson. Suponha também que  $P(X = 0) = 0,05$ . Dê  $E(X)$  e  $V(X)$ .

#### 4.4 – DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

Definição 4.4.1: A variável  $U$  tem distribuição Uniforme no intervalo  $(a, b)$  se a sua f.d.p. é dada por  $f_U(u) = \frac{1}{b-a}$ .

**Exemplo:** A espessura de um filme foto resistente aplicado a pastilhas na fabricação de semicondutores, em certa localização na pastilha está uniformemente distribuída em 0,2050 e 0,2150 micrometros.

- dê a proporção de pastilhas que excedem 0,2125 micrometro na espessura do filme;
- que espessura é excedida por 10% das pastilhas?

Os parâmetros de uma variável aleatória Uniforme são: 
$$\begin{cases} E(U) = \frac{(a+b)}{2} \\ V(U) = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

#### 4.5 – DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Enquanto a distribuição de Poisson pode ser usada para modelar o número de ocorrências em um período contínuo, a distribuição exponencial pode modelar a v.a. contínua que representa o intervalo entre as ocorrências. Exemplos:

- tempo (em minutos) até a próxima consulta a uma base de dados;
- tempo (em segundos) entre pedidos a um servidor;
- distância (em metros) entre defeitos de uma fita;

Definição 4.5.1: A v.a.  $X$  tem distribuição Exponencial com parâmetro  $\theta$  se a sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0 \quad \lambda > 0.$$

**Exemplo:** Dada a variável aleatória  $T$  = tempo de resposta na consulta a um banco de dados (em minutos) com fdp

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & c. c. \end{cases}$$

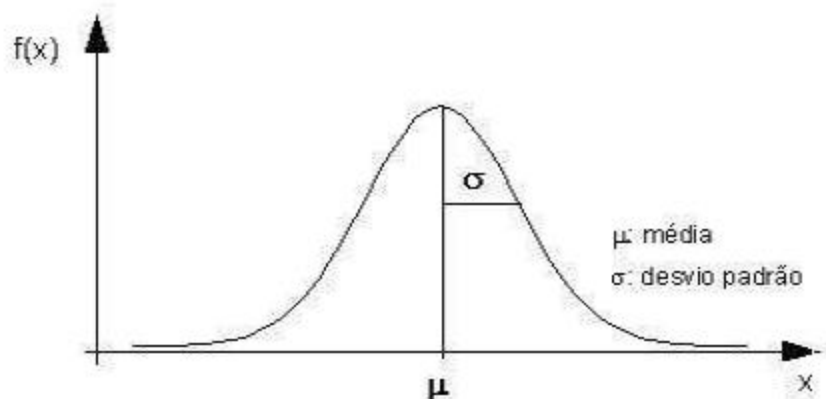
Calcular a probabilidade da consulta demorar mais que 3 minutos, isto é,  $P(T > 3)$ .

Os parâmetros de uma variável aleatória Exponencial são: 
$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{\lambda} \\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

## 4.6 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A normal é considerada a distribuição de probabilidades mais importante, pois permite modelar uma infinidade de fenômenos naturais e, além disso, possibilita realizar aproximações para calcular probabilidades de muitas variáveis aleatórias que tem outras distribuições. É muito importante também na inferência estatística, como será observado mais adiante.

A distribuição normal é caracterizada por uma função de probabilidade, cujo gráfico descreve uma curva em forma de sino, como mostra a figura a seguir.



### PROPRIEDADES:

1.  $f_X(x) > 0$  ,  $x \in \mathbb{R}$
2.  $f_X(x)$  é crescente para  $x \in (-\infty, \mu)$  e decrescente para  $x \in (\mu, \infty)$ .
3. Ponto de máximo da função em  $x = \mu$ . Então  $\mu$  é também a moda da distribuição.
4.  $f_X(x)$  é simétrica em relação a  $\mu$ .
5. A área da curva correspondente entre:  
 $(\mu - \sigma)$  e  $(\mu + \sigma) = 68,27\%$   
 $(\mu - 2\sigma)$  e  $(\mu + 2\sigma) = 95,45\%$   
 $(\mu - 3\sigma)$  e  $(\mu + 3\sigma) = 99,73\%$

Definição 4.6.1: Uma v.a.  $X$  tem distribuição Normal ou Gaussiana quando a sua f.d.p. tem a forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}^+$$

Na distribuição Normal a probabilidade da v.a.  $X$  assumir um valor entre  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ) é

dado por:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Como é difícil trabalhar-se com todos os membros da família Normal, prefere-se trabalhar com a Normal Reduzida ou Normal Padrão. Esta v.a. é representada por  $Z$  e tem a seguinte f.d.p.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad z \in \mathfrak{R}$$

A distribuição de  $Z$  tem média e variância iguais a, respectivamente,  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$  e essa v.a. é obtida da transformação  $Z = (X - \mu)/\sigma$ , onde  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

**Exemplo:** Seja  $X$  uma variável aleatória com média 100 e variância 25. Calcular:

- a)  $P(100 \leq X \leq 106)$
- b)  $P(89 \leq X \leq 107)$
- c)  $P(112 \leq X \leq 116)$
- d)  $P(X \geq 108)$

**Exemplo:** Seja  $X$  uma variável aleatória com média 50 e desvio padrão 4. Calcular:

- a)  $P(X \geq X_\alpha) = 0,05$
- b)  $P(X \leq X_\alpha) = 0,99$
- c)  $P(X \leq X_\alpha) = 0,04$

**Exemplo:** Uma fábrica de carros sabe que os motores de sua fabricação tem duração normal com média de 1500.000 km e desvio padrão de 5.000 km. Qual a probabilidade de que um carro, escolhido ao acaso, dos fabricados por essa firma, tenham um motor que dure:

- a) Menos de 170.000 km?
- b) Entre 140.000 e 165.000 km?
- c) Se a fabrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia para que a porcentagem de motores substituídos seja inferior a 0,2%?

## 5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

- 1) Qual a esperança e a variância de uma v.a. com distribuição binomial?
- 2) De um lote que contém 25 peças das quais 5 são defeituosas, são escolhidas 4 ao acaso. Seja  $Y$  o número de defeituosas encontradas na amostra tomada do lote. Estabeleça a distribuição de probabilidade de  $Y$ , quando:
  - a) As peças forem escolhidas com reposição;
  - b) As peças forem escolhidas sem reposição;
  - c) Calcule a esperança matemática de  $Y$  no experimento do item a;
  - d) Calcule o desvio padrão de  $Y$  no experimento do item a.
- 3) Seja  $X$  uma v.a. Bernoulli com parâmetro  $\theta = 0,80$ , ou seja,  $X$  assume o valor 1 com probabilidade igual a 0,80 e  $X$  assume o valor 0 com probabilidade igual a 0,20.
  - a) Escreva a expressão da f.p. da v.a.  $X$ ;
  - b) Calcule o desvio padrão de  $X$ .
- 4) Uma moeda honesta é lançada 5 vezes.
  - a) Qual a probabilidade de ocorrer CARA na 1ª vez?
  - b) Qual a probabilidade de ocorrer CARA na 2ª vez?
  - c) Os eventos “cara na 1 vez” e “cara na 2 vez” são de que tipo?
  - d) Qual a probabilidade de ocorrer CARA exatamente 4 vezes nos 5 lançamentos?
  - e) Qual a probabilidade de ocorrer CARA exatamente 2 vezes nos 5 lançamentos?
  - f) Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos 3 caras nos 5 lançamentos?
  - g) Qual a probabilidade de ocorrer no máximo 2 caras?
  - h) Qual a probabilidade de ocorrer 1 ou 3 caras nos 5 lançamentos?
- 5) Seja  $X \sim P(2)$  (distribuição de Poisson), portanto  $\theta = 2$ . Calcule:
  - a)  $P_x(2 \leq x \leq 4)$ ;
  - b)  $P_X(x \geq 1)$ ;
  - c)  $P_x(1 \leq x \leq 3)$ ;
  - d) A esperança e a variância da v.a.  $X$ .
- 6) Um PBX recebe uma média de 5 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson.
  - a) Calcule a probabilidade de não receber chamadas durante um intervalo de 1 minuto.
  - b) Calcule a probabilidade de se obter no máximo 2 chamadas em 4 minutos ( $\theta = 20$ );
  - c) Calcule a probabilidade de se obter exatamente 2 chamadas em 4 minutos;
  - d) Calcule a probabilidade de se obter no máximo 2 chamadas em 10 minutos ( $\theta = 50$ );
  - e) Qual o número esperado de chamadas em um período de 4 minutos?
- 7) Seja a v.a.  $X \sim N(10,4)$ . Calcule:
  - a)  $P(8 < X < 10)$ ,  $P(X \geq 12)$ ,  $P(X \leq 5)$  e  $P(11 < X < 13)$ ;
  - b) Qual é a média e a variância da variável  $X$ ;

8) O peso dos frangos de corte criados em um galinheiro pode muito bem ser representado por uma distribuição normal, com média de 2,0 kg e desvio padrão de 0,1 kg. Um frigorífico comprou 4.000 desses frangos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: 20% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios, os 20% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

9) A distribuição da v.a.  $X$  que corresponde ao tamanho de sementes utilizadas na dieta de uma espécie particular de pardal, segue aproximadamente a distribuição Normal com média 1,5mm e variância 0,99. Calcule  $P(X \geq 1,9)$ .

10) Suponha que a v.a. que representa o valor do Q.I. siga uma distribuição Normal, em uma população definida, com média 100 e desvio padrão 15. Qual a proporção da população que terá Q.I. menor do que 90? Qual proporção da população que terá Q.I. maior do que 145? E qual será a proporção daqueles que terão Q.I. entre 120 e 140?

11) Qual a média e a variância da distribuição Uniforme no intervalo (10, 30)?

12) Verifique se a função  $f(x) = \theta e^{-\theta x}$  com  $\theta > 0$  e  $x > 0$  é f.d.p. (Exponencial com parâmetro  $\theta$ ).

13) Dada a f.d.p.  $f_X(x) = 1$  com o intervalo  $[0; 1]$  como contradomínio de  $X$ . Determine:

- a) Esperança de  $X$
- b) Variância de  $X$

14) Um fabricante de um certo equipamento eletrônico determinou que a vida média dos equipamentos é de 800 horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial. Qual a probabilidade de que a fábrica tenha de substituir um equipamento se oferecer uma garantia de 300 horas de uso?

15) O diâmetro  $X$  de um cabo para TV é uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \frac{3}{2}(2x - x^2) \text{ para } 0 \leq x \leq 1$$

A probabilidade de um cabo sair com diâmetro defeituoso é dada por:

$$p = 0,5125 - P(X \leq 0,5)$$

Se 25 cabos são produzidos, qual a probabilidade de que:

- a) Pelo menos 2 sejam defeituosos?
- b) Exatamente 6 sejam defeituosos?

16) O número de falhas em parafusos de máquinas de uma indústria de cerâmica segue a distribuição de Poisson com média de 0, 1 falha por metro quadrado.

(a) Qual a probabilidade de que haja duas falhas em 1 metro quadrado de cerâmica?

(b) Qual a probabilidade de que haja 1 falha em 10 metros quadrados de cerâmica?

17) A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com média de 6000 quilogramas por centímetro quadrado e um desvio padrão de 100 quilogramas por centímetro quadrado.

- (a) Qual a probabilidade da resistência da amostra ser menor que 6250kg/cm<sup>2</sup>?
- (b) Qual a probabilidade da resistência da amostra estar entre 5800 e 5900kg/cm<sup>2</sup>?
- (c) Qual a resistência é excedida por 95% das amostras?

18) Colesterol é uma substância gordurosa que é uma parte importante da ligação (membrana) externa das células do corpo de animais. Sua faixa normal para um adulto é 120–240mg/dl. O instituto de Alimentos e Nutrição das Filipinas encontrou que o nível de colesterol para adultos filipinos tem uma média de 159, 2mg/dl e 84, 1% de adultos tem um nível de colesterol abaixo de 200mg/dl. Suponha que o nível de colesterol esteja distribuído normalmente.

- a) Determine o desvio padrão;
- b) Qual o valor do nível de colesterol que excede 90% da população?



## 5 ESTIMAÇÃO

### 5.1 INTRODUÇÃO

A dedução de informações relativas a uma população, mediante a utilização de amostras aleatórias dela extraídas, diz respeito à Inferência Estatística.

Um problema importante da inferência é a estimação de parâmetros (tais como média, variância e proporção da população) deduzidos da estatística, ou seja, da média, variância e proporção da amostra proveniente desta população.

Pode-se distinguir dois casos de estimação de parâmetros: a estimação por ponto e a estimação por intervalo. No primeiro caso obtém-se um valor único para o parâmetro, ao passo que, no segundo, constrói-se um intervalo em torno da estimativa por ponto, o qual deverá, com probabilidade conhecida, conter o parâmetro.

### 5.2 ESTIMADOR E ESTIMATIVA

Estimador  $t$  de um parâmetro  $\theta$  é a variável aleatória, função dos elementos da amostra, que será utilizada na estimação. O valor numérico obtido para o estimador considerado, numa certa amostra, é denominado de estimativa.

A notação utilizada para estimador geralmente é feita através do uso de letras maiúsculas, enquanto que, para estimativa o uso recai sobre as letras minúsculas.

### 5.3 QUALIDADES DE UM BOM ESTIMADOR

Um bom estimador deve possuir determinadas qualidades que o caracterizam como tal. As qualidades são:

#### 1 – Estimador não tendencioso (justo ou não-viciado)

Um estimador  $t_n$  de um parâmetro  $\theta$  é dito não tendencioso se  $E(t_n) = \theta$ .

A tendenciosidade (B) é definida como sendo a diferença  $B = E(t_n) - \theta$ .

#### 2 – Estimador consistente (ou coerente)

Um estimador  $t_n$  de um parâmetro  $\theta$  é dito consistente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|t_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ . A definição acima pode ser substituída pelas condições:  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(t_n) = \theta$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(t_n) = 0$ .

De uma maneira menos formal, pode-se dizer que um estimador é consistente quando para amostras suficientemente grandes tornam o erro de estimação tão pequeno quanto se queira.

### 3 – Estimador de variância mínima

Uma qualidade desejável para os estimadores é que sejam eficientes, isto é, que tenham variância mínima.

Dados dois estimadores  $t_1$  e  $t_2$ , a serem usados na estimação de um mesmo parâmetro  $\theta$ , diz-se que  $t_1$  é mais eficiente que  $t_2$  como estimador de  $\theta$  se, para o mesmo tamanho da amostra,

$$V(t_1) < V(t_2).$$

Pode-se demonstrar que, dada uma variável aleatória  $X$  de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , a média aritmética de uma amostra de  $n$  observações é, dentre os estimadores lineares não tendenciosos, o estimador de variância mínima.

### 4 – Estimador suficiente

De uma forma bastante simples, pode-se dizer que os estimadores suficientes são aqueles que tem a capacidade de retirar das amostras toda a informação que elas pode fornecer.

## 5.4 ESTIMAÇÃO POR PONTO

Na estimação por ponto o parâmetro é estimado através de um único valor, o qual corresponde a um ponto sobre o eixo de variação da variável. Os principais estimadores por ponto são:

### 5.4.1 Estimador da média populacional $\mu$

A expressão é dada por: 
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

### 5.4.2 Estimador da variância populacional $\sigma^2$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \quad \text{quando a média populacional } \mu \text{ for conhecida e,}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad \text{quando } \mu \text{ for desconhecida.}$$

Para grandes amostras, será indiferente usar  $n$  ou  $n - 1$  no denominador da expressão acima.

### 5.4.3 Estimador da proporção populacional $p$

A expressão é dada por :  $P = \frac{h}{n}$

## 5.5 ESTIMAÇÃO POR INTERVALOS

Na estimação por intervalo constrói-se um intervalo em torno da estimativa por ponto, de modo que este intervalo tenha uma probabilidade conhecida de conter o verdadeiro valor do parâmetro.

Seja o parâmetro  $\theta$ , tal que  $P(t_1 \leq \theta \leq t_2) = 1 - \alpha$ ,

- o intervalo  $t_1 \leq \theta \leq t_2$  é denominado intervalo de confiança (IC);
- os extremos desse intervalo  $t_1$  e  $t_2$  são chamados limites de confiança;
- a probabilidade conhecida  $1 - \alpha$  é denominada nível de confiança;
- $\alpha$  é chamado de nível de significância.

A escolha de nível de confiança depende da precisão com que se deseja estimar o parâmetro.

### 5.5.1 Intervalo de confiança para a média populacional $\mu$

#### 1 – quando desvio padrão populacional for conhecido.

Utiliza-se a distribuição normal padronizada em que:  $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ ,

onde  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Desta forma, o IC para  $\mu$  será  $\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Exemplo:

O desvio padrão dos comprimentos das peças produzidas por certa máquina é de 2mm. Uma amostra de 50 peças produzidas por esta máquina apresentou média  $\bar{x} = 25mm$ . Construir o IC de 95% de confiança para o verdadeiro comprimento das peças produzidas pela máquina.

#### 2 – quando desvio padrão populacional for desconhecido.

Utiliza-se a distribuição t de student em que:  $P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ ,

onde  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$  com  $\nu = n - 1$  graus de liberdade.

Desta forma, o IC para  $\mu$  será  $\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Exemplo:

Uma amostra de cabos produzidos por uma indústria foi ensaiada e as tensões de ruptura obtidas foram: 750, 780, 745, 770 e 765 kgf. Construir o IC de 99% para a verdadeira tensão de ruptura desses cabos.

### 5.5.2 Intervalo de confiança para a variância populacional $\sigma^2$

Utiliza-se a distribuição Qui-quadrado em que  $P(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Onde  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$  com  $\nu = n - 1$  graus de liberdade.

Desta forma, o IC para  $\sigma^2$  será  $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}$

Exemplo: Um mesmo ângulo foi medido 5 vezes obtendo-se os resultados 30°15' 30°13'

30°17' 30°15' e 30°14'. Estimar a variância através de um IC de 95%.

### 5.5.3 Intervalo de confiança para a proporção populacional p

Para amostras suficientemente grandes, a distribuição amostral das proporções é aproximadamente normal com:

$$z = \frac{P - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

Para o cálculo deve-se estimar a proporção populacional p utilizando a estimativa por ponto P, desta forma:

$$\hat{p} = P \quad \text{e} \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}, \text{ obtém-se o IC: } P - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq P + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Exemplo:

Em uma amostra de 200 peças produzidas por certa máquina, verificou-se que 10 eram defeituosas. Estimar a verdadeira proporção de peças defeituosas por essa máquina, utilizando um IC de 90%

## DIMENSIONAMENTO DE AMOSTRAS

O objetivo do dimensionamento de amostras é a determinação do tamanho mínimo que se deve tomar para amostra, de modo que, o erro ao estimarmos o parâmetro seja menor que um valor especificado.

Como exemplo, considere o dimensionamento de uma amostra para a estimação da média populacional  $\mu$ , através de um IC. A precisão (semi-amplitude de IC) é dada por

$e_0 = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , quando o desvio padrão populacional  $\sigma$  for conhecido, onde:

$$n = \left( \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e_0} \right)^2$$

Exemplo: Qual o tamanho de uma amostra suficiente para estimarmos a média de uma população infinita cujo desvio padrão é 3,2 com 95% de confiança e precisão de 80%?

## LISTA DE EXERCÍCIOS DE ESTIMAÇÃO.

### Estimação por ponto

Ex.1 – Uma amostra de 10 doces de leite foi ensaiada e o teor de açúcar (°BRIX) foi: 45 47 42 46 47 43 45 45 48 46.

- Estime o teor médio de açúcar dos doces deste tipo.
- Estime a variância dos doces produzidos.
- Estime o desvio padrão dos doces produzidos.

Ex.2 – Uma análise sensorial foi realizada com o intuito de verificar a aprovação de um novo produto. Neste teste são dadas notas de 1 a 9, onde 1 representa desgostei muitíssimo e 9 representa gostei muitíssimo. O teste utilizou 16 provadores não treinados e os resultados foram: 5 6 6 7 9 5 6 8 9 8 5 7 6 7 8 9. Com base nesta experiência amostral quer se estimar parâmetros para a população que poderia ser consumidora de tal produto. Para isto, estime:

- A nota média do produto.
- O desvio padrão.
- A proporção de pessoas que consideraria o produto muito bom (nota  $\geq 8$ ).

### Estimação por intervalos

Ex.3 – Uma amostra de 9 pães de uma mesma panificadora foi ensaiada para estimar a massa dos pães do tipo francês produzidos. Sabe-se que a variância das massas é igual a  $16 \text{ g}^2$  e a massa média da amostra igual a 100g. Construa um intervalo de confiança, ao nível de 1%, para a média das massas do pão desta padaria.

Ex.4 – Utilizando os dados do exercício 3, realize as mesmas estimações através de um intervalo de confiança (IC), com 5% de significância.

Ex.5 – Com base nos dados do exercício 4, realize as mesmas estimações através de um intervalo de confiança (IC), com 10% de significância.

Ex.6 – Foram realizadas 12 determinações de densidade (g/cm<sup>3</sup>) de um certo composto, obtendo-se os resultados: 19,0 19,3 19,1 19,3 19,2 19,4 19,2 19,3 19,2 19,0 19,5 19,3. estimar a média e a variância através de um IC de 95% de confiança.

Ex.7 – Qual o tamanho mínimo da amostra para se estimar a média de uma população cujo desvio padrão é 10, com confiança de 99% e precisão igual a 4. Supor que a amostra é obtida de:

- a) Uma população infinita.
- b) Uma população de 1000 elementos.

## TESTE DE HIPÓTESES

### 1.DEFINIÇÕES

#### Hipóteses Estatísticas:

São suposições que se faz, acerca dos parâmetros de uma população, ao se tentar a tomada de decisões. Essas suposições poderão ser verdadeiras ou falsas.

#### Hipóteses nula e alternativa:

Hipótese nula ( $H_0$ ): é qualquer hipótese que será testada (sempre terá o sinal da igualdade).

Hipótese alternativa ( $H_1$ ): é qualquer hipótese que contradiga a hipótese nula.

O teste de hipóteses coloca a hipótese nula  $H_0$  em contraposição à hipótese alternativa  $H_1$ . Suponhamos que  $\theta$  seja o parâmetro a ser testado. As hipóteses nula e alternativa geralmente são enunciadas como:

$$(1) \begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{array}$$

#### Regiões de aceitação e rejeição:

Região de aceitação (RA): é a região em que se aceita a hipótese nula. Pode ser um trecho do eixo das abscissas onde serão representados os valores da variável de interesse.

Região de rejeição (RR) ou região crítica (RC): é a região em que se rejeita a hipótese nula, sendo complementar a região de aceitação.

#### Erros do tipo I e II:

Na aplicação de um teste de hipóteses, pode-se cometer dois tipos de erros:

Erro do tipo I: é o erro cometido ao rejeitarmos a hipótese nula quando ela é verdadeira;

Erro do tipo II: é o erro cometido ao aceitarmos a hipótese nula quando ela é falsa.

#### Nível de significância:

É a probabilidade máxima com a qual se sujeitaria a cometer erro do tipo I. Essa probabilidade pode ser representada da seguinte maneira:

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 / H_0 \text{ verdadeira})$$

Na prática é muito comum o uso dos valores 0,05 (5%) ou 0,01 (1%).

A probabilidade de se cometer erro do tipo II é dada por:  $\beta = P(\text{aceitar } H_0 / H_0 \text{ falsa})$

#### Testes unilateral e bilateral:

Teste unilateral: quando a RR estiver em apenas um dos extremos do eixo da variável de interesse.

Teste bilateral: quando a RR estiver nos dois extremos do eixo da variável de interesse.

**Esquema geral de um teste de hipóteses:**

- 1º) Enunciar a hipótese nula;
- 2º) Enunciar a hipótese alternativa;
- 3º) Fixar o nível de significância;
- 4º) Escolher a distribuição de probabilidade adequada ao teste e delimitar as regiões RA e RR;
- 5º) Calcular a estatística do teste com base de uma amostra aleatória;
- 6º) Conclusão: com base no valor amostral obtido, tomar a decisão de rejeitar ou aceitar  $H_0$ .

**Teste de hipóteses para a média populacional  $\mu$**

**1º caso: Se a variância populacional for conhecida:**

Distribuição de probabilidade utilizada: Gaussiana (Normal)

$$\text{Estatística do teste: } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \begin{array}{l} \text{conclusão: se } z < -z_{\alpha}, \text{ rejeita-se } H_0 \\ \text{se } z > z_{\alpha}, \text{ rejeita-se } H_0 \\ \text{se } |z| > z_{\frac{\alpha}{2}}, \text{ rejeita-se } H_0 \end{array}$$

**2º caso: Se a variância populacional for desconhecida:**

Distribuição de probabilidade utilizada: t student, com grau de liberdade  $\nu = n - 1$

$$\text{Estatística do teste: } t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \begin{array}{l} \text{conclusão: se } t < -t_{\alpha}, \text{ rejeita-se } H_0 \\ \text{se } t > t_{\alpha}, \text{ rejeita-se } H_0 \\ \text{se } |t| > t_{\frac{\alpha}{2}}, \text{ rejeita-se } H_0 \end{array}$$

Exemplos:

1) Uma população tem desvio padrão igual a 5 mm. Se uma amostra de 50 elementos, obtida dessa população tem média igual a 46mm, podemos afirmar que a média dessa população seja superior a 43 mm, ao nível de 1% de significância?

2) Um fabricante afirma que a tensão média de ruptura dos cabos produzidos por sua companhia não é inferior a 500 kgf. Uma amostra de 7 cabos foi ensaiada, obtendo-se os resultados (em kgf): 490 480 495 493 475 478 485. Testar a afirmação do fabricante, ao nível de 5% de significância.



## TESTE DE HIPÓTESES

### TESTE PARA A DIFERENÇA ENTRE DUAS MÉDIAS POPULACIONAIS

#### PASSOS COMUNS AOS TESTES:

(1)  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$

(2)  $H_1 : \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 < d_0 \\ \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$

(3) Fixar o nível de significância  $\alpha$

**1º CASO:** Desvios padrões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  conhecidos.

(4) Determinar a R.C.

(5) Calcular a estatística do teste: 
$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(6) Conclusões: a) se  $z < -z_\alpha$ , rejeita-se  $H_0$   
b) se  $z > z_\alpha$ , rejeita-se  $H_0$   
b) se  $|z| > z_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo: Uma amostra de 100 válvulas da Companhia A tem média 1530 h, sendo o desvio padrão populacional igual a 100 h. Uma outra amostra de 70 válvulas da companhia B tem média 1420 h e desvio padrão populacional de 80 h. Testar a hipótese de que as válvulas da companhia A em relação a companhia B tem duração média superior a 100 h. Utilizar  $\alpha = 0,01$ .

**2º CASO:** Desvios padrões populacionais desconhecidos mas supostamente iguais.

(4) Determinar R.C. conforme graus de liberdade:  $\nu = n_1 + n_2 - 2$

(5) Calcular a estatística do teste: 
$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Onde: 
$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

(6) Conclusões: a) se  $t < -t_\alpha$ , rejeita-se  $H_0$

b) se  $t > t_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b) se  $|t| > t_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo: Dois tipos de soluções químicas foram ensaiados para se determinar os pH. Os resultados obtidos foram:

Solução A: 7,50 7,54 7,51 7,53 7,50

Solução B: 7,49 7,50 7,51 7,52 7,50 7,51

Testar a hipótese de que não existe diferença entre os pH médios das duas soluções, supondo que os desvios padrões populacionais são iguais. Usar  $\alpha = 0,05$ .

**3º CASO:** Desvios padrões populacionais desconhecidos mas supostamente diferentes.

(4) Determinar R.C. conforme graus de liberdade:  $\nu = \frac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{n_1 - 1} + \frac{w_2^2}{n_2 - 1}}$ ,

Onde  $w_1 = \frac{s_1^2}{n_1}$  e  $w_2 = \frac{s_2^2}{n_2}$

(5) Calcular a estatística do teste:  $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$

(6) Conclusões: a) se  $t < -t_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b) se  $t > t_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b) se  $|t| > t_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo: Uma mesma distância foi medida 5 vezes por certo instrumento, antes e após sofrer uma calibração. Antes da calibração os resultados foram: 100,8 101,3 100,6 99,5 100,1 e após a calibração: 100,5 100,4 100,5 100,3 100,3. Testar a hipótese de que não existe diferença entre os resultados obtidos antes e após a calibração do instrumento. Utilizar o nível de significância de 5%.

**4º CASO:** Dados emparelhados.

(4) Determinar a R.C. com graus de liberdade:  $\nu = n - 1$

(5) Calcular a estatística do teste:  $t = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

Onde  $s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$  ;  $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$  ;  $d_i = x_{1i} - x_{2i}$

(6) Conclusões: a) se  $t < -t_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b) se  $t > t_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b) se  $|t| > t_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo: Dois operários determinam os pesos (em g) das impurezas contidas em 6 amostras de certo produto químico, obtendo os resultados:

amostras	1	2	3	4	5	6
Operário A	10,1	10,4	10,2	10,5	9,9	10,0
Operário B	9,8	10,0	10,1	10,0	10,1	9,5

Pode-se concordar com a hipótese de que não existe diferença entre as determinações dos dois operários, no nível de 1%?

### TESTE PARA A PROPORÇÃO POPULACIONAL $p$

(1)  $H_0: p = p_0$

(2)  $H_1: \begin{cases} p < p_0 \\ p > p_0 \\ p \neq p_0 \end{cases}$

(3) Fixar o nível de significância  $\alpha$

(4) Determinar a R.C. segundo a distribuição normal.

(5) Estatística do teste:  $z = \frac{P - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$

(6) Conclusões: a)  $z < -z_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b)  $z < -z_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

c)  $|z| > z_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo:

Para determinarmos se um certo tipo de tratamento para evitar a corrosão é eficiente, 45 tubos de um total de 50 apresentaram resultados satisfatórios. Sabe-se que o tratamento é considerado eficiente se pelo menos 95% dos tubos apresentarem resultado satisfatório. Qual a conclusão, ao nível de 5%?

### TESTE PARA DIFERENÇA ENTRE DUAS PROPORÇÕES POPULACIONAIS $p_1$ e $p_2$

(1)  $H_0: p_1 - p_2 = d_0$

(2)  $H_1: \begin{cases} p_1 - p_2 > d_0 \\ p_1 - p_2 < d_0 \\ p_1 - p_2 \neq d_0 \end{cases}$

(3) Fixar a significância  $\alpha$

(4) Determinar a R.C. segundo a distribuição Normal

$$(5) \text{ Estatística do teste: } z = \frac{(P_1 - P_2) - d_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

- (6) Conclusões: a)  $z < -z_\alpha$ , rejeita-se  $H_0$   
 b)  $z < -z_\alpha$ , rejeita-se  $H_0$   
 c)  $|z| > z_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo:

Uma indústria automobilística anuncia que os automóveis do modelo A supera em vendas os do modelo B de 10%. Tomadas duas amostras aleatórias independentes encontrou-se que 56 de 200 consumidores preferem o modelo A e 29 de 150 preferem o modelo B. Testar a hipótese ao nível de 6% de que o modelo A supera o modelo B em 10%, contra a hipótese de que esta diferença é menor que 10%.

### TESTE PARA A VARIÂNCIA POPULACIONAL $\sigma^2$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \begin{cases} \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

Fixar o nível de significância  $\alpha$

Determinar a R.C. segundo a distribuição qui-quadrado.

$$\text{Estatística do teste: } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- Conclusões: a)  $\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2$ , rejeita-se  $H_0$   
 b)  $\chi^2 > \chi_\alpha^2$ , rejeita-se  $H_0$   
 c)  $\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2$  ou  $\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2$ , rejeita-se  $H_0$

Exemplo:

As chapas de aço produzidas por certa indústria tem uma especificação tal que a variância de suas espessuras (em mm) não deve ser superior a 0,0009 mm<sup>2</sup>. Uma amostra de 10 chapas tem espessura: 3,15 3,18 3,15 3,12 3,14 3,13 3,17 3,16 3,15 3,16. Testar a hipótese de que a variância está dentro da especificação, usando o nível de 5%.

### TESTE PARA IGUALDADE DE DUAS VARIÂNCIAS POPULACIONAIS $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \begin{cases} \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Fixar a significância  $\alpha$

Determinar a R.C. segundo a distribuição F

Estatística do teste:  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Conclusões: a)  $F < F_{1-\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

b)  $F > F_{\alpha}$ , rejeita-se  $H_0$

c)  $F < F_{1-\alpha/2}$  ou  $F > F_{\alpha/2}$ , rejeita-se  $H_0$

Foram testadas as durabilidades (em km) dos pneus das marcas A e B, obtendo-se para 5 pneus de cada marca os resultados:

Marca A: 30000 32000 28000 26000 31000

Marca B: 25000 30000 20000 21000

Existe diferença significativa entre as variâncias das durabilidades dos dois pneus, no nível de significância de 10%?

## LISTA DE EXERCÍCIOS DE TESTE DE HIPÓTESES.

Ex.1 – Uma fabrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros da marca X apresenta-se abaixo de 26 mg por cigarro. Um laboratório realiza 10m análises do índice obtendo: 26 24 23 22 28 25 27 26 28 e 24. Sabe-se que o índice de nicotina nos cigarros da marca X distribui-se normalmente com variância  $5,36 \text{ mg}^2$ . Pode-se aceitar a afirmação do fabricante ao nível de 5%?

Ex.2 – Uma fabrica de automóveis anuncia que seus carros consomem, em média 11 litros por 100 km, com desvio padrão de 0,8 litros. Uma revista especializada decide testar essa afirmação e analisa 35 carros dessa marca, obtendo 11,4 litros por 100 km, como consumo médio. Admitindo que o consumo tenha distribuição normal, ao nível de 10% o que a revista concluirá sobre o anúncio da fabrica?

Ex.3 – Os indivíduos de um país apresentam altura média de 170 cm e desvio padrão de 5 cm. A altura tem distribuição normal. Uma amostra de 40 indivíduos apresentou média de 167 cm. Podemos afirmar, ao nível de 5%, que essa população é formada por indivíduos com a altura média menor que 170 cm?

Ex. 4 – Uma fabrica produz certo tipo de reguladores de pressão. Esses reguladores são produzidos para suportar uma pressão de 20 atm. Um ensaio é realizado com uma amostra de 7 desses reguladores de pressão e os resultados foram: 19,5 18,9 19,0 19,1 18,9 19,3 19,0. Com base neste ensaio, podemos concluir que a pressão suportada é realmente inferior a 20 atm, ao nível de 1%?

Ex. 5 – Uma padaria informa que seu pão francês tem massa igual a 50 g. Uma amostra com 10 pães foi pesada e os resultados são apresentados a seguir: 48 51 46 60 49 51 47 52 46 47. Determine se a informação dada pela padaria é correta ao nível de 5%.

Ex. 6 – Uma empresa informa que o tempo gasto por uma máquina para realizar uma operação industrial é de 120 segundos, com desvio-padrão de 8s. Uma experiência realizada sobre este tempo de operação acusou média de 123s, após 17 realizações. Realize o teste de hipóteses, com significância de 10%, nos seguintes casos:

- a) teste bilateral;
- b) teste unilateral;
- c) existe diferença na tomada de decisão entre (a) e (b). Conclua.

Ex. 7 – Duas amostras de tubos das marcas A e B foram ensaiadas e as resistências médias obtidas foram  $40 \text{ kgf/mm}^2$  e  $35 \text{ kgf/mm}^2$ , com variâncias 5 e 4,5 respectivamente. Sabendo-se que foram ensaiados 15 tubos de cada marca, há evidência, ao nível de 1%, de que a resistência média dos tubos da marca A seja maior que a da marca B?

Ex. 8 – Duas máquinas A e B produzem parafusos e sabe-se que as variâncias dos comprimentos dos parafusos produzidos são  $25 \text{ mm}^2$  e  $20 \text{ mm}^2$ , respectivamente. Uma amostra de 40 parafusos da máquina A apresentou comprimento médio de 30 mm, enquanto que uma amostra de 50 parafusos da máquina B apresentou média de 25 mm. Existe diferença significativa entre os comprimentos dos parafusos produzidos pelas duas máquinas, ao nível de 5%?

Ex. 9 – Foram ensaiadas válvulas das marcas A e B. Verificou-se que os tempo de vida (em h) foram:

Marca A: 1500 1450 1480 1520 1510

Marca B: 1000 1300 1250

Pode-se concluir, ao nível de 1%, que o tempo médio de vida das válvulas da marca A supera o de B em mais de 300h? Supor que os desvios padrões populacionais sejam diferentes.

Ex.10 – Um metalúrgico decide testar a pureza de um certo metal, que supõe ser constituído exclusivamente de manganês. Adota para isso o critério da verificação do ponto de fusão. O ponto de fusão do manganês puro é igual a  $1260^{\circ}$ , com desvio padrão de  $2^{\circ}$ . O metalúrgico realizou 4 experiências, obtendo  $1267^{\circ}$ ,  $1269^{\circ}$ ,  $1261^{\circ}$ ,  $1263^{\circ}$ . Poderá ele aceitar que o metal é puro ao nível de 10%.

Ex.11 – Uma máquina de misturar fertilizantes é adaptada para fornecer 10g de nitrato para cada 100g de fertilizante. Dez porções de 100g foram analisadas, com as seguintes porções de nitrato: 9, 12, 11, 10, 11, 9, 11, 12, 9, 10. Há razões para crer que a porção de nitrato é diferente da informada, ao nível de 10%?

Ex.12– Um grupo de 10 pessoas é submetido a um tipo de dieta por 10 dias, estando o peso do início e no final da dieta marcados na tabela abaixo. Ao nível de 5%, podemos concluir que houve diminuição do peso pela aplicação da dieta?

Pessoa	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Início	120	104	93	87	85	98	102	106	88	90
Fim	116	102	90	83	86	97	98	108	82	85

Ex.13– De duas populações normais A e B, com variâncias 25, levantaram-se duas amostras de tamanhos 9 e 16, respectivamente, obtendo média 3 para a amostra A e média 2 para a amostra B. Teste, ao nível de 5%, se a média da população A é maior que a média da população B.

Ex.14 – Em uma prova de estatística, uma amostra de 12 alunos de uma classe conseguiu média 7,8 e desvio padrão 0,6, ao passo que uma outra amostra de 15 alunos de outra classe, do mesmo curso, conseguiu média 7,4 com desvio padrão 0,8. Considerando distribuições normais para as notas e supondo que as variâncias sejam iguais entre as classes, verificar se o primeiro grupo é superior ao segundo, ao nível de 5%.

Ex.15– O QI de 16 estudantes de uma zona pobre de certa cidade apresenta a média de 107 pontos com desvio padrão de 10 pontos, enquanto os 14 estudantes de outra região rica da cidade apresentam média 112 pontos com desvio padrão de 8 pontos. Teste se existe diferença, ao nível de 10 %, entre os dois grupos.

Ex.16 – Para o seguinte conjunto de dados: 19,5 18,9 19,0 19,1 18,9 19,3 19,0. Testar ao nível de 1%, se a variância populacional é superior a 1.

Ex.17 – Um operário realizou uma mesma operação com 2 equipamentos diferentes e os tempos gastos (em segundos) foram:

Equipamento A: 10 11 10 12 15

Equipamento B: 08 10 15 12

Existe diferença significativa entre as variâncias ao nível de 5%.

Ex.18 – Um fabricante afirma que no máximo 3% das peças fabricadas são defeituosas. Uma amostra com 50 peças apresentou 4 com defeito. Com base neste resultado, qual a conclusão ao nível de 10%.



## ANÁLISE DA VARIÂNCIA (ANOVA)

A análise de variância, conhecida por ANOVA, consiste de uma generalização do teste para igualdade de duas médias populacionais. Nesta análise testamos  $k$  ( $k \geq 2$ ) médias populacionais com base na estatística  $F$ .

Suponha que se deseja testar a hipótese de  $k$  ( $k \geq 2$ ) médias populacionais sejam iguais, ou seja:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

contra a hipótese alternativa de que pelo menos uma dessas médias seja diferente das demais.

No modelo de análise de variância a um critério de classificação, existe apenas uma característica de interesse a ser testada.

Sejam  $k$  populações  $P_1, P_2, \dots, P_k$  e as amostras correspondentes de tamanhos  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

Considere que:

$x_{ij}$  é o  $i$ -ésimo elemento da  $j$ -ésima amostra.

$\bar{x}_j$  é a média da  $j$ -ésima amostra.

$\bar{X}$  é a média do conjunto das  $k$  amostras.

$N$  é o número total de observações das  $k$  amostras.

$n_j$  é o tamanho da  $j$ -ésima amostra.

Tem-se então os seguintes passos para a determinação da ANOVA.

(1)  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$

(2)  $H_1$ : pelo menos uma das médias  $\mu_j$  é diferente das demais.

(3) Fixar o nível de significância  $\alpha$ , com base na confiança desejada.

(4) Determinar a Região de Rejeição (RR)

(5) Calcular a estatística do teste segundo as fórmulas abaixo:

$$SQE = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{n_j} \right] - \frac{\left( \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{N}$$

$$SQR = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{n_j} \right]$$

$$SQT = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{\left( \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2}{N}$$

Onde, demonstra-se que

$$SQT = SQE + SQR$$

$$QME = \frac{SQE}{k-1}$$

$$F = \frac{QME}{QMR}$$

$$QMR = \frac{SQR}{N-k}$$

- elabora-se então o quadro da ANOVA:

QUADRO 2.2 – ANOVA

Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado médio (s2)	Estatística F
Entre amostras	SQE	K – 1	QME	F
Residual	SQR	N - K	QMR	
Total	SQT	N – 1		

FONTE: MARQUES & MARQUES 92005, p.190)

(6) Conclusão: se  $F > F_{k-1, N-k}(\alpha)$ , rejeita-se  $H_0$ , caso contrário, aceita-se  $H_0$ .

Exemplo:

Em uma indústria, quatro operários executam a mesma operação. Com o objetivo de identificar se existe diferença significativa entre os tempos gastos para executar a operação mencionada, foram realizadas as seguintes observações destes tempos (em segundos):

Operário 1: 8,1 8,3 8,0 8,1 8,5

Operário 2: 8,4 8,4 8,5 8,3

Operário 3: 8,8 8,7 8,9

Operário 4: 8,3 8,4 8,2 8,2 8,3 8,4

Verificar se a diferença é significativa ao nível de 5%.

A tabela da ANOVA permite constatar se existe diferença significativa entre as médias populacionais, contudo, não informa entre quais grupos a diferença significativa se encontra. Vários testes podem ser utilizados, como Scheffé, Tukey, Duncan e Dunnett.

#### MÉTODO DE SCHEFFÉ

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > \Delta\alpha \therefore \text{diferentes}$$

onde:

$$\Delta\alpha = \sqrt{QMR \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right) (k-1) F_{k-1, N-k}(\alpha)}$$

### Exercício de análise de variância

A produtividade da soja depende de diversos fatores (solo, clima, tipo da semente, insumos, etc.). O preço final da saca de 50 kg varia de acordo com o mercado internacional, no momento, U\$ 25,00. Uma área agrícola de 16 alqueires foi dividida, seguindo os passos de delineamentos experimentais apropriados, de forma que 4 insumos possam ser testados (supomos que este é o único fator diferenciado entre os grupos). Os preços destes insumos são diferentes e sabemos que:

$$\text{insumo A} < \text{insumo B} < \text{insumo C} < \text{insumo D}$$

Após a colheita, verificou-se a quantidade colhida em cada alqueire, com os resultados apresentados na tabela abaixo:

insumo A	insumo B	insumo C	insumo D
103	110	114	115
105	108	114	117
108	107	113	113
106	107	116	115

Supondo que você fosse consultado para determinar qual insumo deveria ser escolhido, utilize a estatística para elaborar um parecer, baseado somente nesta amostragem.

## LISTA DE EXERCÍCIOS DE ANOVA

Ex.1 – Três pesquisadores utilizando quatro métodos diferentes determinaram a velocidade do som (em m/s) em certo meio. Obtendo os resultados:

métodos	pesquisadores		
	P1	P2	P3
A	341	342	340
B	345	344	346
C	338	339	340
D	343	341	342

Podemos identificar se existe diferença significativa, ao nível de 5%, entre os pesquisadores? E entre os métodos? Use Scheffe para localizar as possíveis diferenças.

Ex.2 – Foram testadas três tipos de lâmpadas elétricas e os tempos de vida (em horas) obtidos foram:

Lâmpada A	1245	1354	1367	1289	
Lâmpada B	1235	1300	1230	1189	1250
Lâmpada C	1345	1450	1320		

Existe diferença significativa entre os tempos médios de vida dessas três marcas de lâmpadas, ao nível de significância de 1%? Se necessário, aplicar o teste de Scheffé.

Ex.3 – Seis máquinas produzem parafusos. Em seguida estão relacionados os diâmetros correspondentes a uma amostra de 4 parafusos produzidos em cada máquina.

A	B	C	D	E	F
8	9	7	8	9	10
7	7	9	8	7	11
9	7	7	7	8	9
7	8	7	9	8	10

Testar se os diâmetros médios são iguais considerando um nível de significância de 5%. Se necessário aplique o teste de Scheffe.

## ***ANEXOS:***

*TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO*

*TABELA DA DISTRIBUIÇÃO T-STUDENT*

*TABELA DA DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO*

*TABELA DA DISTRIBUIÇÃO F DE SNEDECOR 0,01*

*TABELA DA DISTRIBUIÇÃO F DE SNEDECOR 0,05*

*TABELA DA DISTRIBUIÇÃO F DE SNEDECOR 0,10*

## TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de  $P(0 \leq Z \leq z_0)$

$z_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4967	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

### Tabela da Distribuição t de Student

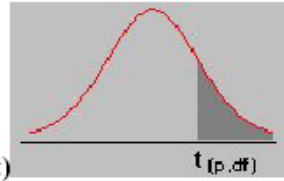


Tabela t Referida à Cauda Direita:  $p(t_i > t)$

gl\p	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
inf	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905



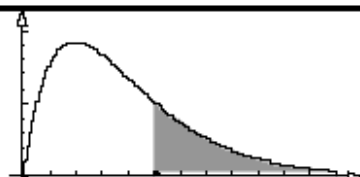
## Distribuição do Qui-Quadrado - $\chi_n^2$

Os valores tabelados correspondem aos pontos  $x$  tais que:  $P(\chi_n^2 \leq x)$

	$P(\chi_n^2 \leq x)$													
n	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	
1	3,93E-05	0,000157	0,000982	0,003932	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	1
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	2
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	4
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	5
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	6
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	7
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	8
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	9
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	10
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	11
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	12
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	13
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	14
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	15
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	16
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	17
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	18
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	19
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	20
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	21
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	22
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	23
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	24
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	25
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	26
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	27
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994	28
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335	29
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	30
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	40
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	50
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	60
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	70
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	80
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	90
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,170	100

# 1%

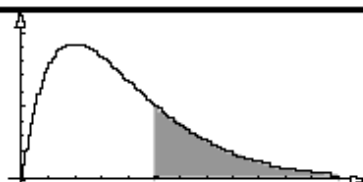
Distribuição F de  
Snedecor  
 $\alpha = 0,01$



<i>gl</i> denominador	<i>gl</i> /numerador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6022,4	6055,9
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50

# 5%

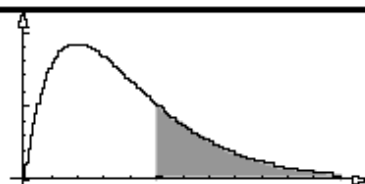
Distribuição F de  
Snedecor  
 $\alpha = 0,05$



<i>gl</i> denominador	<i>gl</i> numerador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93

# 10%

Distribuição F de  
Snedecor  
 $\alpha = 0,10$



<i>gl</i> denominador	<i>gl</i> /numerador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82
35	2,85	2,46	2,25	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,82	1,79
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76
45	2,82	2,42	2,21	2,07	1,98	1,91	1,85	1,81	1,77	1,74
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66