华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第6章 集合代数

第6章 集合代数

6.1 集合的基本概念

6.2 集合的运算

6.3 集合恒等式

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合是不能精确定义的基本概念.

把一些事物汇集到一起组成一个整体就称为集合，称这些事物为集合的元素或成员.

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合.

2. 集合表示法

列元素法——通过列出全体元素来表示集合.

谓词表示法——通过谓词概括集合元素的属性.

实例： 列元素法 自然数集合 N={0, 1, 2, 3, …}

谓词表示法 $S=\{\, x \mid x\text{是实数}，x^2-1=0\}$

6.1 集合的基本概念

集合中元素是彼此不同的：

例：$\{1, 1, 2, 3, 3\}=\{1, 2, 3\}$；

集合中元素是无序的：

例：$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$；

集合中元素是确定的：

例：$A = \{$中国的所有帅哥$\}$　？

A不是集合，因为没有确定帅的标准.

到底什么样才算是帅呢？

集合中元素是彼此不同的：

例：$\{1, 1, 2, 3, 3\}=\{1, 2, 3\}$；

集合中元素是无序的：

例：$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$；

集合中元素是确定的：

例：$A = \{$中国的所有帅哥$\}$　？

A不是集合，因为没有确定帅的标准.

到底什么样才算是帅呢？

集合中的元素是彼此不同的、无序的、确定的

- 元素与集合之间的关系是**隶属关系**，即**属于**和**不属于**, 分别记作$\in$和$\notin$

例: 设$A=\{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$, 则$b \in A$.

6.1 集合的基本概念

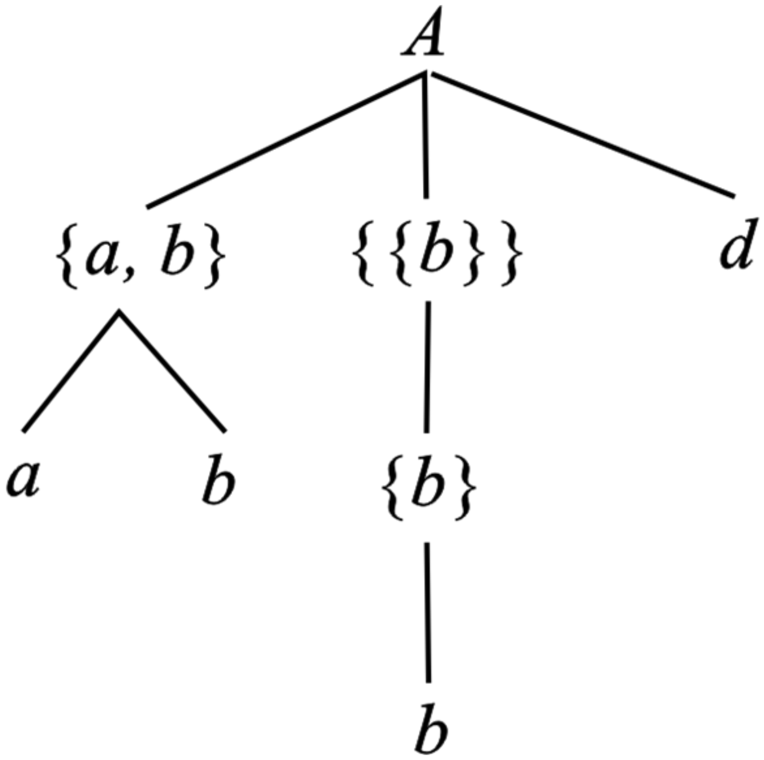
1. 集合的元素具有的性质
   - **无序性**：元素列出的顺序无关
   - **相异性**：集合的每个元素只计数一次
   - **确定性**：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

在课程中，我们规定集合的元素都是集合！

2. 元素与集合的关系
   隶属关系：$\in$或者$\notin$

3. 集合的树型层次结构

$$A=\{\{a, b\}, \{\{b\}\}, d\}$$



$d\in A$, $a\notin A$

集合与集合之间的关系

定义6.1 设A,B为集合，若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，也称A包含B，记作$B \subseteq A$. $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$.

定义6.2 设A,B为集合，若$B \subseteq A$且$A \subseteq B$，则称A与B相等，记作$A = B$. $\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 设A,B为集合，若$B \subseteq A$且$B \neq A$，则称B是A的真子集，记作$B \subset A$. $\Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$

例: $A=\{b, c\}$和$B=\{a,\{b, c\}\}$，则A和B之间的关系？
$A=\{\{b, c\}\}$和$B=\{a,\{b, c\}\}$，则A和B之间的关系？

定义6.4 空集 $\varnothing$： 不含任何元素的集合.

实例： $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理6.1 空集是一切集合的子集.

证 对于任意集合A,

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1$$

(蕴涵式前件为假)

推论 $\varnothing$是惟一的.

定义6.5 幂集：A的全体子集构成的集合

$$P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$$

例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)| = ?$ 2^n

定义6.6 全集 E：在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集.

全集具有相对性，与问题有关，不存在绝对的全集.

第6章 集合代数

初级运算

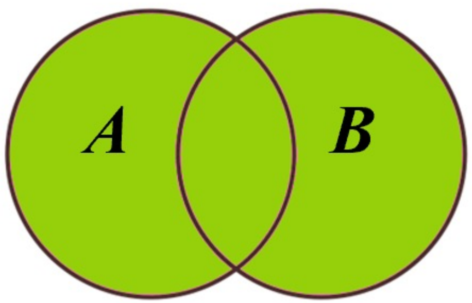
定义6.7

并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

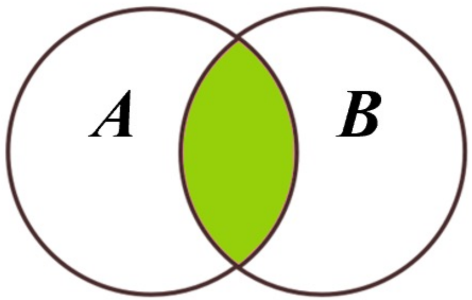
交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

相对补集 $A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

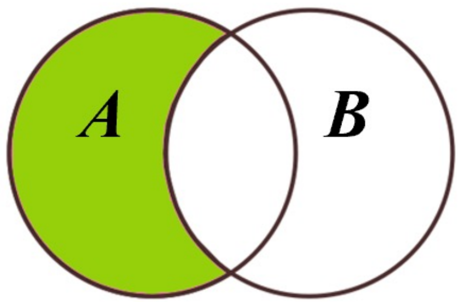
集合运算的表示



$A\cup B$



$A\cap B$



$A-B$

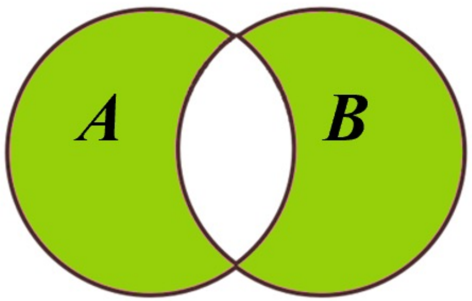
初级运算

定义6.8 对称差集 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

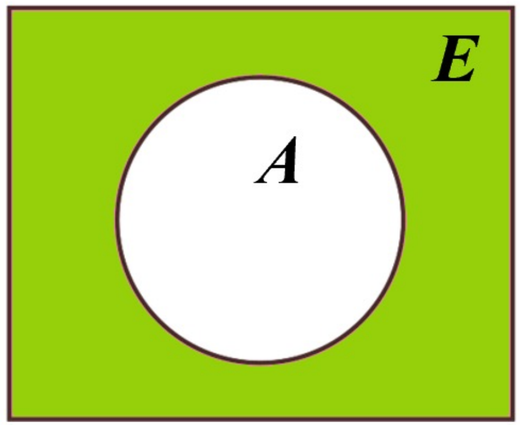
$= (A \cup B) - (A \cap B)$

定义6.9 绝对补集 $\sim A = E - A$ (给定全集E)

集合运算的表示



$A \oplus B$



$\sim A$

6.2 集合的运算

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B =$ ？ $\varnothing$

- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B =$ ？ A

定义6.10 设A为集合,

广义并：A的元素的元素构成的集合.

广义交：非空集合A的所有元素的公共元素构成的集合.

运算	记号	内涵
广义并	$\cup A$	$\{x \mid \exists z(z \in A \wedge x \in z)\}$
广义交	$\cap A$	$\{x \mid \forall z(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

例: $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

$$\cup A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

集合的广义并与广义交

$\cup\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}=\{1, 2, 3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$， $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$， $\cap\{a\}=a$

广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$， $\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{a\}$的广义并和广义交都等于a

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

1 类运算：初级运算$\cup, \cap, -, \oplus$,

优先顺序由括号确定

2 类运算：广义运算、~运算、幂集

运算由右向左进行

混合运算：2 类运算优先于1 类运算

例1 $A=\{\{a\},\{a, b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$
$$=\cap\{a, b\}\cup(\cup\{a, b\}-\cup\{a\})$$
$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$
$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

第6章 集合代数

集合运算的定律

对于全集合E的任意子集A, B, C，有：

交换律	$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
结合律	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
分配律	$A \cap (\mathrm{B} \cup C) = (\mathrm{A} \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (\mathrm{B} \cap C) = (\mathrm{A} \cup B) \cap (A \cup C)$
同一律	$A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$
排中律	$A \cup \sim A = E$
矛盾律	$A \cap \sim A = \emptyset$

集合运算的定律

对于全集合E的任意子集A, B, C，有：

双重否定律	$\sim\sim A = A$
幂等律	$A \cup A = A, A \cap A = A$
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$
零律	$A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup E = E$
德摩根律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ $\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$ $\sim\emptyset = E,\ \ \sim E = \emptyset$

证明: $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证： 对任意x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
&\quad \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
&\quad \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
&\quad \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
&\quad \Leftrightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C\\
&\quad \Leftrightarrow x\in (A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

证毕!

证明集合的方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范(以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X \subseteq Y$　　任取$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一　分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$ 相互包含

方法二　任取$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的.

方法一：命题演算法

例3 证明$A\cup(A\cap B)=A$（吸收律）

证 任取x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A\cup(A\cap B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\vee x\in A\cap B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A
\end{aligned}
$$

因此得 $A\cup(A\cap B)=A$.

方法一：命题演算法

例4 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A-B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\in\sim B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\cap\sim B
\end{aligned}
$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$.

方法二：等式置换法

例5 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证 $A \cup (A \cap B)$

$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$ （同一律）

$= A \cap (E \cup B)$ （分配律）

$= A \cap (B \cup E)$ （交换律）

$= A \cap E$ （零律）

$= A$ （同一律）

例6 证明$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B=B \Leftrightarrow A \cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　　②　　③　　④

证明思路:

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　②　③　④

证 ①⇒②

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x，

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证.

②⇒③

$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$ (由②知$A\cup B=B$，将$A\cup B$用B代入)

证明$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

①　②　③　④

③⇒④

假设$A-B \neq \varnothing$, 即$\exists x \in A-B$，那么知道$x \in A$且$x \notin B$. 而

$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$, 由于$A \cap B = A$, 则$x \notin A$, 从而产生矛盾.

④⇒①

假设$A \subseteq B$不成立，那么

$\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A-B \Rightarrow A-B \neq \varnothing$

与条件④矛盾.

第六章主要内容:

- 集合的两种表示法
- 集合与元素之间的隶属关系、集合之间的包含关系的区别与联系
- 特殊集合：空集、全集、幂集
- 有穷集合的计数
- 集合的$\cup$, $\cap$, $-$, $\sim$, $\oplus$等运算以及广义$\cup$, $\cap$运算
- 集合运算的算律及其应用