華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第2章 命题逻辑等值演算

题目1：已知公式$\neg(q \to p)\wedge p$是矛盾式，

求$\neg(q \to p)\wedge p\wedge\neg r$的成真赋值和成假赋值。

题目2：已知公式$p\wedge q \to p$是重言式，

求$(p\wedge q \to p)\vee r$的成真赋值和成假赋值。

第2章 命题逻辑等值演算

设公式A与B共同含有n个命题变项，A或B可能有哑元. 若A与B有相同的真值表，则说明在所有2^n个赋值下，A与B的真值都相同(同真同假)，等价式$A \leftrightarrow B$为重言式.

定义2.1 设A与B是两个命题公式，若A与B构成的等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B是等值的，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式.

几点说明：

- 定义2.1中, A, B, $\Leftrightarrow$均为元语言符号
- $\Leftrightarrow$不是联结词，是用来说明A与B等值($A\leftrightarrow B$是重言式)的一种记法;
- A或B中可能有哑元出现.

  例如 $(p\to q) \Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$

  r为左边公式的哑元.
- 用真值表可检查两个公式是否等值.

例1 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$ 不等值

利用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等值, 但当命题变项较多时, 工作量比较大.

证明公式等值的另一个方法是利用已知的等值式通过代换得到新的等值式.

例如，用真值表很容易验证 $p \leftrightarrow \neg\neg p$ 是重言式. 如果用任意一个命题公式替换式子中的 p，比如用 $p \wedge q$ 替换 p 得到 $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$，直觉上所得到的新式子也是重言式.

命题：设A是一个命题公式，含有命题变项p_1, p_2, …, p_n，又设A_1, A_2, …, A_n是任意的命题公式，对每一个i (i=1, 2, … n)，把p_i在A中的所有出现都替换成A_i, 所得到的新命题公式记成B，那么如果A是重言式，则B也是重言式.

16组重要等值式

双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

幂等律 $A \Leftrightarrow A \vee A$, $A \Leftrightarrow A \wedge A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

16组重要等值式

德摩根律	$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$
	$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$
吸收律	$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$，$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$
零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$，$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

16组重要等值式

蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow \neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow \neg B\rightarrow \neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow \neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow \neg B)\Leftrightarrow \neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，

这是继续学习的基础！

第三章，1-2节

第四章，1-2节

第六章，1-3节

第七章，1-5节

第八章，1-3节

第十四章，1-4节

以上16组等值式模式共包含了24个重要等值式，它们都是用元语言符号书写的.

等值式模式中的A，B，C可以替换成任意的公式，因此每个等值式模式都可以给出无穷多个同类型的具体的等值式.

1. 等值演算——由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程.

2. 等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则（如下）

3. 置换规则

设$\Phi(A)$是含公式A的命题公式，$\Phi(B)$是用公式B置换$\Phi(A)$中A的所有出现后得到的命题公式，若 $B\Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$.

证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

今后在注明中省去置换规则.

注意：用等值演算可以验证两个公式等值，
但不能直接证明两个公式不等值！

证明两个公式不等值

例3 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 不等值.

证 方法1 真值表法(第一章中已介绍过).

方法2 观察法. 观察到000, 010是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值, 因而不等值.

方法3 先用等值演算化简公式, 然后再观察

$$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\rightarrow q)\rightarrow r\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee r\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee r$$

更容易看出前面的两个赋值分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值.

等值演算判断公式类型

判断公式类型：A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

(2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r)$

解 (1) $q\wedge\neg(p\to q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

(2) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

可满足式，101和111是成真赋值，000和010是成假赋值.

第2章 命题逻辑等值演算

第1节 等值式

第2节 析取范式与合取范式

第3节 联结词的完备集

2.2 析取范式与合取范式

本节给出命题公式的两种规范表示方法，这种规范的表达式能表达真值表所能提供的一切信息.

基本概念:

(1) 文字——命题变项及其否定的总称;

(2) 简单析取式——仅由有限个文字构成的析取式

$$p,\ \neg q,\ p\vee\neg q,\ p\vee q\vee r, \ldots$$

(3) 简单合取式——仅由有限个文字构成的合取式

$$p,\ \neg q,\ p\wedge\neg q,\ p\wedge q\wedge r, \ldots$$

一个文字既是简单析取式，又是简单合取式

(4) 析取范式——由有限个简单合取式的析取构成的命题公式;

$$p, p\vee\neg q, \neg p\wedge q, (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式的合取构成的命题公式;

$$p, \neg p\wedge q, \ p\vee\neg q, (p\vee q)\wedge\neg p\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称.

说明: 形如 $p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式既是析取范式, 又是合取范式.

2.2 析取范式与合取范式

定理2.1

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

定理2.2

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个<u>简单合取式都是矛盾式</u>.

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个<u>简单析取式都是重言式</u>.

定理2.3 (范式存在定理)

任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\to$, $\leftrightarrow$（若有）

$$A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B \qquad A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$$\neg\neg A\Leftrightarrow A \quad \neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B \quad \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

例5 求下列公式的析取范式与合取范式.

(1) $(p \to \neg q) \vee \neg r$

(2) $(p \to \neg q) \to r$

解 (1) $(p \to \neg q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$ （消去→，蕴含等值式）

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$ （结合律）

最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式)，又是合取范式(由一个简单析取式组成的合取式)

(2) $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→, 蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→, 蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移, 德摩根律)

析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律）

合取范式

定理2.3 (范式存在定理)

任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

$$p \vee q \vee r$$

$$(p \wedge \neg q) \vee q \vee r$$

一般地，命题公式的合取范式与析取范式不是唯一的！

2.2 析取范式与合取范式

定义2.2 在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项).

说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项；
  为什么？
- 每个极小项都有且仅有一个成真赋值;
- 每个极大项只有一个成假赋值;
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示．用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示．m_i (M_i)称为极小项(极大项)的名称.

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

2.2 析取范式与合取范式

主析取范式——所有简单合取式都是极小项的析取范式;

主合取范式——所有简单析取式都是极大项的合取范式;

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ —主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_7$—主合取范式

定理2.4 (主范式的存在唯一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的.

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2, \dots, p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \dots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式, $j=1, 2, \dots s$;

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止;

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$;

(4) 将极小项按下标从小到大排列.

求公式主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式, $j=1, 2, \ldots s$;

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止;

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i \wedge M_i$;

(4) 将极大项按下标从小到大排列.

2.2 析取范式与合取范式

例6 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式和主合取范式.

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\land q)\lor r$ （析取范式） ①

$p\land q$

$\Leftrightarrow (p\land q)\land(\neg r\lor r)$

$\Leftrightarrow (p\land q\land\neg r)\lor(p\land q\land r)$

$\Leftrightarrow m_6\lor m_7$ ②

极小项		
公式	成真赋值	名称
$\neg p\land\neg q\land\neg r$	0 0 0	m_0
$\neg p\land\neg q\land r$	0 0 1	m_1
$\neg p\land q\land\neg r$	0 1 0	m_2
$\neg p\land q\land r$	0 1 1	m_3
$p\land\neg q\land\neg r$	1 0 0	m_4
$p\land\neg q\land r$	1 0 1	m_5
$p\land q\land\neg r$	1 1 0	m_6
$p\land q\land r$	1 1 1	m_7

r

$\Leftrightarrow (\neg p\lor p)\land(\neg q\lor q)\land r$

$\Leftrightarrow (\neg p\land\neg q\land r)\lor(\neg p\land q\land r)\lor(p\land\neg q\land r)\lor(p\land q\land r)$

$\Leftrightarrow m_1\lor m_3\lor m_5\lor m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\lor m_3\lor m_5\lor m_6\lor m_7$ （主析取范式）

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

⑤, ⑥代入④并排序，得

$(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

主析取范式的用途:

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值.

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地, 由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主析取范式的用途:

2. 判断公式的类型

设公式A含n个命题变项,

A为重言式$\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A为矛盾式$\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

例7 用主析取范式判断公式的类型.

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \land q$ (2) $B \Leftrightarrow p \to (p \lor q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p \lor q) \to r$

解:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \land q \Leftrightarrow (p \land \neg q) \land q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \lor (p \lor q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor r$

$\Leftrightarrow \underline{(\neg p \land \neg q \land r)} \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor \underline{(\neg p \land \neg q \land r)}$

$\lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land r)$

$\Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_7$ 非重言式的可满足式

主析取范式的用途:

3. 判断两个公式是否等值

例8 用主析取范式判断以下每一组公式是否等值.

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见, (1)中的两公式等值, 而(2)的不等值.

4. 解实际问题

例 某单位要从A, B, C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记p: 派A去, q: 派B去, r: 派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$S=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

求S的主析取范式

$$S=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$$

$$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$

$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101, 010

结论: 方案1是派A与C去, 方案2是派B去.

由主析取范式确定主合取范式

例 设A有3个命题变项，且已知$A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$，求$A$的主合取范式.

解 A的成真赋值是1, 3, 7的二进制表示，成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0, 2, 4, 5, 6的二进制表示，它们恰好是$\neg A$的成真赋值，因而是主合取范式的极大项的下角标，故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

2.2 析取范式与合取范式

$$A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$$

$$\neg A \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$$

$$\neg\neg A \Leftrightarrow \neg\,(m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6)$$

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第2章 命题逻辑等值演算

定义2.3 称$F:\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$为$n$元真值函数.

在定义中，F的自变量为n个命题变项，定义域$\{0, 1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，即由0, 1组成的长为$n$的符号串的全体，值域为$\{0, 1\}$. n个命题变项共可构成2^{2^n}个不同的真值函数.

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

每个真值函数都与唯一的一个主析取范式(主合取范式)等值.
(1真值函数-1主析取范式)
每个主析取范式对应无穷多个等值的命题公式
(1主析取范式-∞命题公式)
每一个命题公式又都有唯一等值的主析取范式
(1命题公式- 1主析取范式)

所以每个真值函数对应无穷多个等值的命题公式
(1真值函数-∞命题公式)
每个命题公式又都对应唯一的等值的真值函数
(1命题公式-1真值函数)

定义2.4 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集.

定理2.5 $S=\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集.

证明　因为任何n元真值函数都与唯一的一个主析取范式等值，而在主析取范式中仅有$\neg, \wedge, \vee$.

推论 以下是否是联结词完备集?

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$ (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明: (1), (2)在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集;

(3) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ (4) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

(5) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 为什么?

它的子集$\{\wedge\}$,$\{\vee\}$,$\{\rightarrow\}$,$\{\leftrightarrow\}$,$\{\wedge,\vee\}$,$\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$等都不是.

2.3 联结词的完备集

定义2.5 设 p, q 为两个命题，$\neg(p\wedge q)$称作p与q的**与非式**，记作$p\uparrow q$，即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$，$\uparrow$称为**与非联结词**；$\neg(p\vee q)$称作 p 与 q 的**或非式**，记作 $p\downarrow q$，即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$，$\downarrow$称为**或非联结词**.

定理2.6 $\{\uparrow\}$与$\{\downarrow\}$都是联结词完备集.

证明 已知$\{\neg, \wedge, \vee\}$为完备集，

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg p \Leftrightarrow \neg(p\vee p) \Leftrightarrow p\downarrow p$$

$$p\wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q) \Leftrightarrow \neg p\downarrow\neg q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$$

$$p\vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\downarrow q) \Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$$

得证$\{\downarrow\}$为联结词完备集. 对$\{\uparrow\}$类似可证.

小结

第二章主要内容:

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集