華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第7章 二元关系

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第7章 二元关系

7.1 有序对与笛卡尔积

定义7.1 由两个元素 x 和 y (允许$x = y$)按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**或**序偶**，记作$\langle x, y\rangle$, 其中x是它的第一元素，y是它的第二元素.

对比
$\{x, y\}$

有序对性质：

(1) 有序性：当$x\neq y$时, $\langle x, y\rangle\neq\langle y, x\rangle$.

(2) $\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$的充分必要条件是$x=u$并且$y=v$. 已知$\langle x+2, 4\rangle = \langle 5, 2x+y\rangle$, 求$x, y$.

这些性质是二元集合{x, y}所不具备的，有序对中的元素是有序的，而集合中的元素是无序的

定义7.2 设A, B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对. 所有这样的有序对组成的集合称为A与B的笛卡儿积，记作$A\times B$,

$$A\times B = \{<x, y>| \ x\in A \wedge y\in B\}.$$

例 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{<\varnothing, \varnothing>, <\{\varnothing\}, \varnothing>\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡尔积的性质：

(1) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(2) 不满足交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (\text{当}A\neq B\text{且}A\neq\varnothing\text{且}B\neq\varnothing\text{时})$$

(3) 不满足结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (\text{当}A\neq\varnothing\text{且}B\neq\varnothing\text{且}C\neq\varnothing\text{时})$$

(4) 对于并和交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(5) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = ?$ mn

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

另外三组请大家课后自己证明.

证 任取$\langle x, y\rangle$

$$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cup C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$
$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in A\times B\vee\langle x, y\rangle\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

例1 (1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$.

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B, C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$\langle x, y\rangle$

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}, B=\{2\}, C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

例2 设A, B, C, D为任意集合，判断以下命题是否为真.

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

(3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(4) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解 (1) 为真. $<x, y>\in (A\times C)\cap(B\times D)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in A\times C \wedge <x, y>\in B\times D$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\in B\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge y\in(C\cap D)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in (A\cap B)\times(C\cap D)$

例2 设A, B, C, D为任意集合, 判断以下命题是否为真

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

(3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(4) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解 (2) 不一定.

$A=D=\varnothing$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$,

左$=\{1\}\times\{2\}=\{<1, 2>\}$

右$=\varnothing$.

例2 设A, B, C, D为任意集合, 判断以下命题是否为真

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

(3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(4) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解 (3) 不一定.

$A=B=\{1\}$, $C=\{2\}$, $D=\{3\}$,

左$=\varnothing$

右$=\{\langle 1, 2\rangle\}-\{\langle 1, 3\rangle\}=\{\langle 1, 2\rangle\}$.

例2 设A, B, C, D为任意集合, 判断以下命题是否为真

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

(3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(4) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解 (4) 不一定.

$A=B=\{1\}, C=\{2\}, D=\{3\},$

左$=\varnothing$

右$=\{\langle 1, 2\rangle\}\oplus\{\langle 1, 3\rangle\}=\{\langle 1, 2\rangle,\langle 1, 3\rangle\}.$

第7章 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对;

(2) 集合是空集,

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系, 记作R.

如果$<x, y> \in R$, 可记作xRy；如果$<x, y> \notin R$, 则记作 $x \not R y$.

例： $R=\{<1, 2>, <a, b>\}$, $S=\{<1, 2>, a, b\}$.

R是二元关系; S不是二元关系.

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb.

定义7.4 设A, B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系称作从A到B的二元关系，特别当$A=B$时称作A上的二元关系.

例 $A=\{0, 1\}, B=\{1, 2, 3\}$，那么

$R_1=\{<0, 2>\}$， $R_2=A\times B$， $R_3=\varnothing$， $R_4=\{<0, 1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从A到B的二元关系，

并且R_3和R_4也是A上的二元关系.

说明：$|A|=n, |A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有2^{n^2}个，所以A上有2^{n^2}个不同的二元关系.

例如$|A| = 3$，则A上有512个不同的二元关系.

常见的二元关系

定义7.5 对任意的集合 A，定义

1. $\emptyset$是任何集合上的二元关系，称为空关系.
2. $A \times A$是A上的全域关系，记作E_A

$$E_A = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$$

3. $\{<x, x>| \ x \in A\}$为A上的恒等关系，记作I_A

例： $A = \{1, 2\}$；

$$E_A = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>\};$$

$$I_A = \{<1, 1>, <2, 2>\};$$

4. 小于等于关系：A是实数集**R**的子集

$$L_A = \{<x, y> \mid x, y \in A, x \le y\}.$$

5. 整除关系：A是非零整数集**Z***的子集

$$D_A = \{<x, y> \mid x, y \in A, x \mid y\}.$$

例：$A = \{1, 2, 3\}$；

$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$；

$D_A = \{<1,1>,<1,2>, <1,3>, <2,2>,<3,3>\}$；

6. 包含关系：A是由一些集合构成的集合族

$$R_{\subseteq}=\{<x,y>|\,x,y\in A,x\subseteq y\}.$$

例：$B=\{a,b\}$；

$$A\triangleq P(B)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

$$\begin{aligned}R_{\subseteq}\{&<\emptyset,\emptyset>,<\emptyset,\{a\}>,<\emptyset,\{b\}>,<\emptyset,\{a,b\}>,\\&<\{a\},\{a\}>,<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,\\&<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}\end{aligned}$$

类似的还可以定义：大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系等.

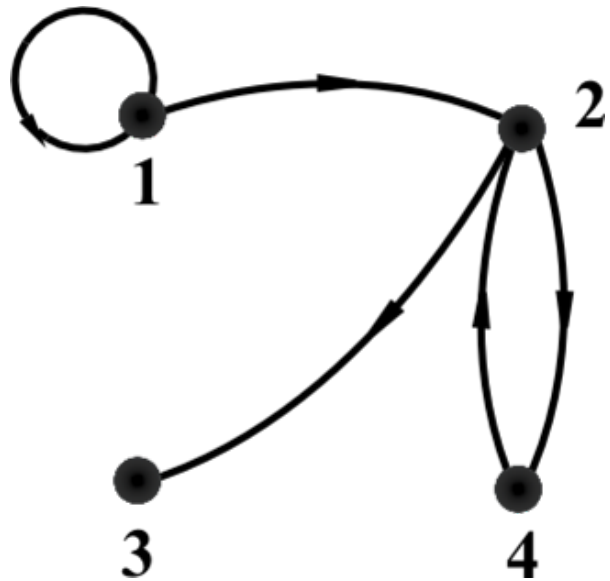
关系矩阵：若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [r_{ij}]_{m\times n}$，其中$r_{ij}= 1 \Leftrightarrow <x_i , y_j>\in R$，反之$r_{ij}= 0$.

关系图：若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$，其中$A$为节点集，$R$为边集. 如果$<x_i , x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从$x_i$到$x_j$的有向边.

注意：1. 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系(A, B为有穷集).　2. 关系图适合表示有穷集A上的关系.

例2 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$, R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第7章 二元关系

第一元素—>定义域

定义7.6 设R是二元关系，

(1) R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的**定义域**，记作dom$R$，形式化表示为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R) \};$$

(2) R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的**值域**，记作ran$R$，形式化表示为

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\, (\langle x, y\rangle \in R) \}$$

第二元素—>值域

(3) R的定义域和值域的并集称为R的**域**，记作fld$R$，形式化表示为

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则 $\mathrm{dom}R$, $\mathrm{ran}R$, $\mathrm{fld}R$分别是?

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

定义7.7 设R是二元关系，R的**逆关系**，简称为R的逆，记作R^{-1}，其中

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

定义7.8 设R, S是二元关系，S对R的**右复合**记作$R \circ S$，其中

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y\, (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

例3 $R = \{<1, 2>, <2, 3>, <1, 4>, <2, 2>\}$

$S = \{<1, 1>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>\}$

$R^{-1} = \{<2, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <2, 2>\}$

$R \circ S = \{<1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$

$S \circ R = \{<1, 2>, <1, 4>, <3, 2>, <3, 3>\}$

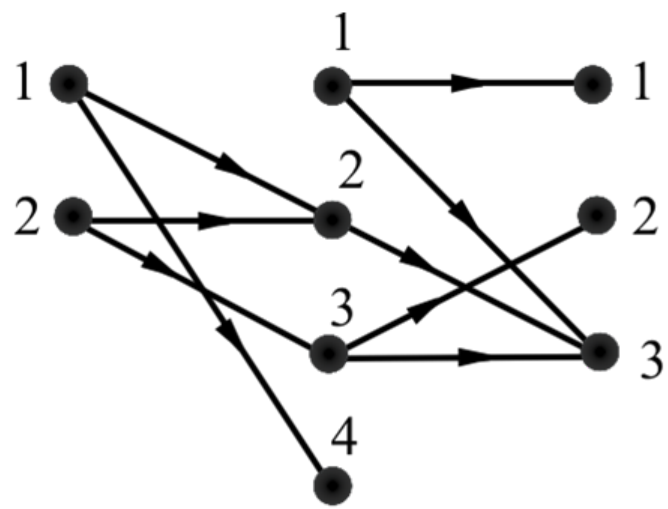
例3 $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$S = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

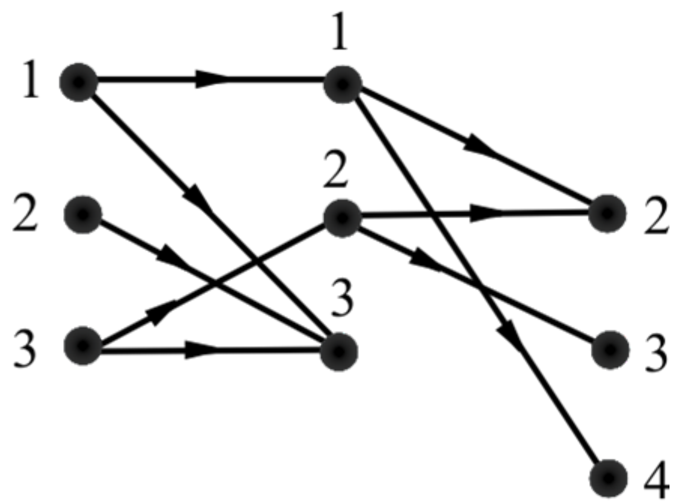
利用图示(不是关系图)方法求合成更为直观

$R\circ S = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$S\circ R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$



$R\circ S$



$S\circ R$

定义7.9 设R为二元关系，A是集合，

(1) R在A上的**限制**记作 $R\restriction A$，其中

- $R\restriction A = \{ <x, y> \mid xRy \wedge x \in A \}$

(2) A在R下的**像**记作$R[A]$，其中

- $R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)=\{ y \mid xRy \wedge x \in A \}$

说明：

- R在A上的限制 $R\restriction A$是 R 的子关系，即 $R\restriction A \subseteq R$
- A在R下的像$R[A]$是$\mathrm{ran}R$的子集，即$R[A] \subseteq \mathrm{ran}R$

例4 设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$，问 $R\restriction\{1\}$，$R\restriction\varnothing$，$R\restriction\{2,3\}$，$R[\{1\}]$，$R[\varnothing]$，$R[\{3\}]$？

- $R\restriction\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$
- $R\restriction\varnothing=\varnothing$
- $R\restriction\{2,3\}=\{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$
- $R[\{1\}]=\{2,3\}$
- $R[\varnothing]=\varnothing$
- $R[\{3\}]=\{2\}$

定理7.1 设F是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x, y>$，由逆的定义有

$$<x, y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y, x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x, y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x，

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y, x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x, y>$,

$<x, y>\in(F\circ G)\circ H \Leftrightarrow \exists t\ (<x, t>\in F\circ G \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\ (\ \exists s\ (<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G) \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\ \exists s\ (<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x, s>\in F \wedge \exists t\ (<s, t>\in G \wedge <t, y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x, s>\in F \wedge <s, y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

定理7.2 设F, G, H是任意的关系，则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

(2) 任取$<x, y>$,

□□□ $<x, y>\in(F\circ G)^{-1}$

□ $\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G$

□ $\Leftrightarrow \exists t\,(<y, t>\in F\wedge<t, x>\in G)$

□$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in G^{-1}\wedge<t, y>\in F^{-1})$

□$\Leftrightarrow <x, y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

定理7.3 设R为A上的关系，则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证　任取$<x, y>$

$$<x, y>\in R\circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \wedge <t, y>\in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \wedge t=y \wedge y\in A)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in R$$

补充知识点：

量词分配等值式

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\vee$，$\exists$对$\wedge$无分配律，不成立！

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(反过来不成立)

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(反过来不成立)

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$ (2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ (4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x, y>$,

$<x, y>\in F\circ(G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\wedge<t, y>\in G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\wedge<t, y>\in G\wedge<t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,((<x, t>\in F\wedge<t, y>\in G)\wedge(<x, t>\in F\wedge<t, y>\in H))$

$\Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\wedge<t, y>\in G)\wedge\exists t\,(<x, t>\in F\wedge<t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ G\wedge<x, y>\in F\circ H$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ G\cap F\circ H$ 所

以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$.

定理7.4的结论可以推广到有限多个关系：

- $R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$
  $(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$
  $R\circ(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n) \subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap \ldots \cap R\circ R_n$
  $(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap \ldots \cap R_n\circ R$

定理7.5 设F为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证 只证(1)和(4). (1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(1) 任取$<x, y>$,

□□□ $<x, y>\in F\upharpoonright(A\cup B)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\wedge x\in A\cup B$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\wedge(x\in A\vee x\in B)$

$\Leftrightarrow (<x, y>\in F\wedge x\in A)\vee(<x, y>\in F\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\upharpoonright A\vee<x, y>\in F\upharpoonright B$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

所以有$F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$.

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

任取y,

□ □ $y\in F[A\cap B]$

□ $\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in A\cap B)$

□ $\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in A\land x\in B)$

□ $\Leftrightarrow \exists x\,((\langle x, y\rangle\in F\land x\in A)\land(\langle x, y\rangle\in F\land x\in B))$

□ $\Rightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in A)\land\exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in B)$

□ $\Leftrightarrow y\in F[A]\land y\in F[B]$

□ $\Leftrightarrow y\in F[A]\cap F[B]$

所以有$F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$.

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 **n 次幂R^n** 定义为:

(1) $R^0 = \{ <x, x> \mid x \in A \} = I_A$ (恒等关系)

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

例5 设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{<a, b>,<b, a>,<b, c>, <c, d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

与普通矩阵乘法不同，这里的加法采用的是逻辑加，即0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1

R^3和R^4的矩阵是:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

□□ $R^2=R^4=R^6=\ldots\ldots$, $R^3=R^5=R^7=\ldots\ldots$

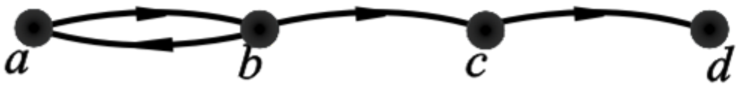
R^0的关系矩阵是

□□ □

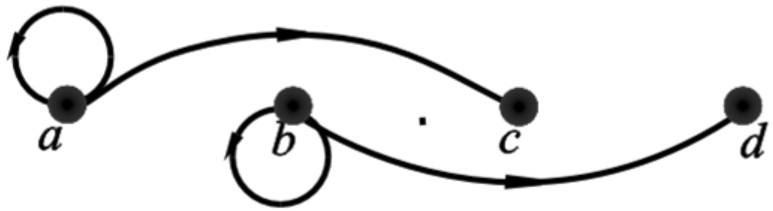
$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示.

R^0



R^1



$R^2=R^4=\ldots$

$R^3=R^5=\ldots$

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证　R为A上的关系，对任何自然数k，R^k都是$A\times A$的子集. 由于$|A|=n$, A上的不同的子集只有2^{n^2}个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

定理7.7 设 R 是A上的关系，$m, n \in \mathbf{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m \in \mathbf{N}$, 对n用归纳法,

若$n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切$m, n \in \mathbf{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

定理7.7 设 R 是A上的关系， $m, n\in\mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

(2) 对于任意给定的$m\in\mathrm{N}$, 对n用归纳法，

若n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切$m, n\in\mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

定理7.8 设R是A上的关系，若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$，则

(1) 对任何 $k\in\mathrm{N}$有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in\mathrm{N}$有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in\mathrm{N}$有$R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若$k=0$，则有$R^{s+0p+i}=R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中$p=t-s$，则

$$R^{s+(k+1)p+i}=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

定理7.8 设R是A上的关系，若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$，则

(1) 对任何 $k\in\mathrm{N}$有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in\mathrm{N}$有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in\mathrm{N}$有$R^q\in S$

(3) 任取 $q\in\mathrm{N}$，若 $q<t$，显然有 $R^q\in S$，

若$q\geq t$，则存在自然数 k 和 i 使得

$$q=s+kp+i，其中0\leq i\leq p-1.$$

于是 $R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$

而 $s+i\leq s+p-1=s+t-s-1=t-1$

从而证明了 $R^q\in S$.

例6 设$A=\{a,b,d,e,f\}$,

R={<a,b>,<b,a>,<d,e>,<e,f>,<f,d>}.

求出最小的自然数m和n，使得$m<n$且$R^m=R^n$.

解：R^2={<a,a>,<b,b>,<d,f>,<e,d>,<f,e>},

R^3={<a,b>,<b,a>,<d,d>,<e,e>,<f,f>},

R^6={<a,a>,<b,b>,<d,d>,<e,e>,<f,f>},

最小的自然数$m=0,n=6,R^0=R^6=I_A$

第7章 二元关系

7.1 有序对与笛卡尔积

7.2 二元关系

7.3 关系的运算

7.4 关系的性质

7.5 关系的闭包

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的

(2) 若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的

实例: 自反: 全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反: 实数集上的小于关系, 幂集上的真包含关系.

$A=\{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$

$R_3 = \{\langle 1, 3\rangle\}$

R_1既不是自反的也不是反自反的, R_2自反, R_3反自反

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R)$, 则称$R$ 为 A 上的对称关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为A上的反对称关系.

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A

反对称关系：恒等关系I_A是A上的反对称关系

设$A=\{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1, 1>,<2, 2>\}$，$R_2=\{<1, 1>,<1, 2>,<2, 1>\}$

$R_3=\{<1, 2>,<1, 3>\}$，$R_4=\{<1, 2>,<2, 1>,<1, 3>\}$

R_1:对称和反对称； R_2:对称； R_3:反对称； R_4:无

定义7.13 设R为A上的关系，若$\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$，则称$R$是$A$上的传递关系.

实例：A上的全域关系E_A，恒等关系I_A和空关系$\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系.

设$A=\{1, 2, 3\}$，R_1, R_2, R_3是A上的关系，其中

$$R_1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1, 3\rangle\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系，R_2不是A上的传递关系.

定理7.9 设R为A上的关系，则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

必要性:

任取$<x, x>$, $<x, x> \in I_A \Rightarrow x \in A$

由于R 在A上自反必有

$<x, x> \in R$，从而$I_A \subseteq R$

充分性:

任取x, 有

$$x \in A \Rightarrow <x, x> \in I_A \Rightarrow <x, x> \in R$$

因此 R 在A上是自反的.

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

必要性：

任取$<x, y>$,

□ $<x, y>\in R \Leftrightarrow <y, x>\in R \Leftrightarrow <x, y>\in R^{-1}$□

所以 $R = R^{-1}$

充分性：

任取$<x, y>$, 由$R = R^{-1}$得

□□$<x, y>\in R \Rightarrow <y, x>\in R^{-1} \Rightarrow <y, x>\in R$

所以R在A上是对称的.

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

必要性： 任取 $\langle x, y\rangle$, 有

□ $\langle x, y\rangle\in R\cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle x, y\rangle\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, x\rangle\in R \Rightarrow x=y \wedge (x, y\in A)$ □

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in I_A$

这就证明了 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性： 任取 $\langle x, y\rangle$,

□ □ $\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, x\rangle\in R \Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle x, y\rangle\in R^{-1}$

□$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y\rangle\in I_A$ □

□$\Rightarrow x=y$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

(5) R 在A上传递当且仅当 $R\circ R \subseteq R$

必要性：

任取$<x, y>$有

□□□ $<x, y>\in R\circ R$

□ □$\Rightarrow \exists t\ (<x, t>\in R\wedge<t, y>\in R)$

□ □ $\Rightarrow <x, y>\in R$□□

所以 $R\circ R \subseteq R$

充分性：

任取$<x, y>, <y, z>\in R$, 则

□ $<x, y>\in R\wedge<y, z>\in R$

$\Rightarrow <x, z>\in R\circ R \ \Rightarrow <x, z>\in R$

所以 R 在 A上是传递的.

7.4 关系的性质

□	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$，且$i \neq j$，则$r_{ji}=0$	
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边，是一对方向相反的边	两点之间有边，是一条有向边	点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则x_i到x_k也有边

例7 判断$A=\{1,2,3\}$上下列关系的性质，并说明理由. 请给出A上关系R, 使其同时不满足自反、反自反、对称、反对称和传递性.

$R_1=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<3,1>\}$

$R_2=\{<2,1>,<3,1>\}$

$R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,1>,<3,2>,<1,3>\}$

$R=\{<1,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$

设R_1和R_2是A上的关系，他们具有一些共同的性质。在经过并、交、相对补、逆或右复合以后，得到的新关系是否还能保持原来关系的性质呢？

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

第7章 二元关系

设R是A上的关系，我们希望R具有某些有用的性质，如自反性．如果R不具有自反性，则可以通过在R中添加一部分有序对来改造R，得到新的关系R'，使得R'具有自反性，但又不希望R'和R相差太多．换句话说，添加的有序对要尽可能少，满足这些要求的R'就称作R的自反闭包，通过添加有序对来构造的闭包除了自反闭包外还有对称闭包和传递闭包.

定义7.14 设R是非空集合A上的关系，R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R'，使得R'满足以下条件：(1) R'是自反的(对称的或传递的) (2) $R \subseteq R'$
(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R''有$R' \subseteq R''$.

R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$.

注：1. R的自反(对称或传递)闭包是包含R的最小自反(对称或传递)关系.

2. 若R已经是自反的(对称的或传递的)，则R的自反(对称或传递)闭包就是R.

定理7.10 设R为A上的关系，则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

说明：对有穷集A上的关系，存在正整数r使得

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^r$

定理7.10 设R为A上的关系，则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

证

由 $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$ 知 $R\cup R^0$ 是自反的，且满足 $R\subseteq R\cup R^0$.

设R''是A上包含R的自反关系，则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$. 从而有$R\cup R^0\subseteq R''$. $R\cup R^0$满足闭包定义，所以$r(R)=R\cup R^0$.

定理7.10 设R为A上的关系，则有

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

用归纳法证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$.

$n=1$时有$R^1=R\subseteq t(R)$.

假设$R^n\subseteq t(R)$成立，那么对任意的$<x, y>$有

$<x, y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in R^n\wedge<t, y>\in R)$

$\Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in t(R)\wedge<t, y>\in t(R))$

$\Rightarrow <x, y>\in t(R)$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

定理7.10 设R为A上的关系，则有

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

再证 $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\ldots$成立，为此只须证明 $R\cup R^2\cup\ldots$传递.

任取$<x, y>$,$<y, z>$，则

□ $<x, y>\in R\cup R^2\cup\ldots\wedge<y, z>\in R\cup R^2\cup\ldots$

$\Rightarrow \exists t\ (<x, y>\in R^t)\wedge\exists s(<y, z>\in R^s)$

$\Rightarrow \exists t\ \exists s\ (<x, z>\in R^t\circ R^s)$

$\Rightarrow \exists t\ \exists s\ (<x, z>\in R^{t+s})$

$\Rightarrow <x, z>\in R\cup R^2\cup\ldots$

从而证明了$R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和M_t，则

$M_r=M+E$ □$M_s=M+M'$ $M_t=M+M^2+M^3+\cdots$

E是单位矩阵，M'是转置矩阵，相加时使用逻辑加

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r, G_s, G_t的顶点集与G的顶点集相等. 除了G的边以外, 以下述方法添加新的边:

(1) 考察G的每个顶点, 若没环就加一个环, 得到G_r

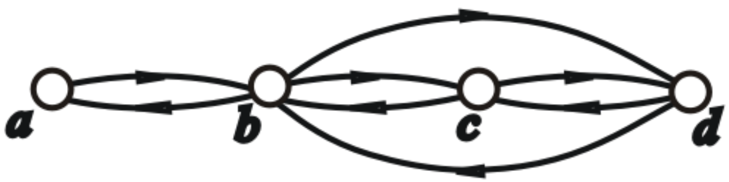
(2) 考察G的每条边, 若有一条x_i到x_j的单向边, $i\neq j$, 则在G中加一条x_j到x_i的反向边, 得到G_s

(3) 考察G的每个顶点x_i, 找x_i可达的所有顶点x_j (允许$i=j$), 如果没有从x_i到x_j的边, 就加上这条边, 得到图G_t

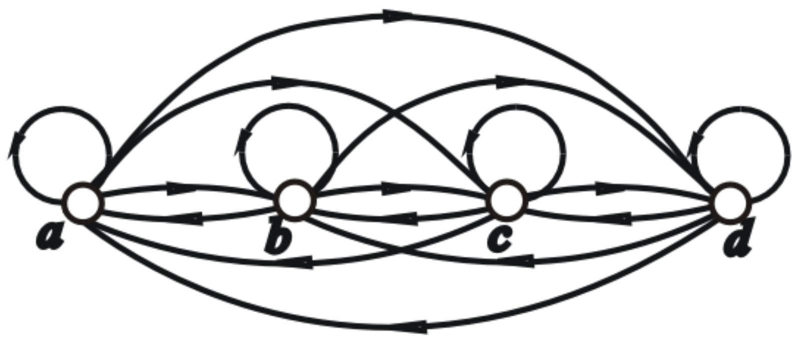
例8 设$A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{\langle a, b\rangle,\langle b, a\rangle,\langle b, c\rangle,\langle c, d\rangle,\langle d, b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

定理7.11 设R是非空集合A上的关系，则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

三个结论的充分性都是显然的，这里我们只证明(1)的必要性，其余的留作练习. 显然有$R \subseteq r(R)$, 又由于R是包含了R的自反关系，根据自反闭包的定义有$r(R) \subseteq R$, 从而有$r(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证: (3)只需证明对于任意正整数n, $R_1^n \subseteq R_2^n$. 对n归纳.

$n = 1$, 显然为真.

假设$n = k$时, 命题为真. 任取$<x, y>$,

$<x, y> \in R_1^{k+1} \Rightarrow <x, y> \in R_1^k \circ R_1$

$\Rightarrow \exists t(<x, t> \in R_1^k \wedge <t, y> \in R_1)$

$\Rightarrow t(<x, t> \in R_2^k \wedge <t, y> \in R_2) \Rightarrow <x, y> \in R_2^k \circ R_2$

$\Rightarrow <x, y> \in R_2^{k+1}$

定理7.13 设R是非空集合A上的关系,

(1) 若R是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若R是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若R是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

证明过程请大家自己思考

第七章主要内容:

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从A到B的关系、A上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、复合、限制、像、幂
- 关系运算的性质:A上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A上关系的自反、对称、传递闭包

- 第二次作业:

- 习题4：第7、11题;
- 习题6：第5、8、9、10题;
- 习题7：第7、8、9、16题。

15. 设

$$A=\{<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>,<\{\varnothing\},\varnothing>\}$$

求 A^{-1}, A^2, A^3, $A\restriction\{\varnothing\}$, $A[\varnothing]$, $A\restriction\varnothing$, $A\restriction\{\{\varnothing\}\}$, $A[\{\{\varnothing\}\}]$.

21. 设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，定义 A 上的关系

$$R=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x+y=10\}$$

说明 R 具有哪些性质并说明理由.

25. 设 R 的关系图如图 7.12 所示，试给出 $r(R)$，$s(R)$ 和 $t(R)$ 的关系图.

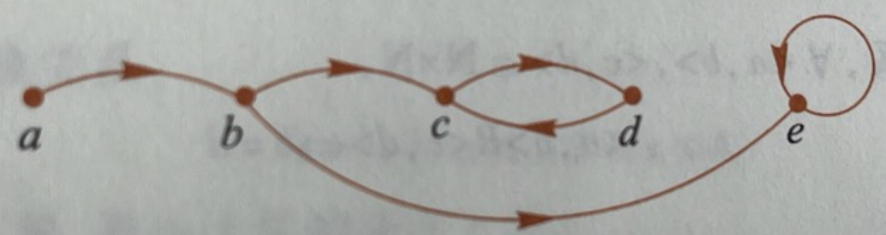


图 7.12