第二部分　集合论

第八章
函 数

8.1 函数的定义与性质
8.2 函数的复合与反函数
8.3 双射函数与集合的基数

本章讨论的函数，实际上就是一种特殊的二元关系。它对关系的概念作了限制，即要求由A到B的关系满足对于A中每一元素a，在B中必须有一个元素且只能有一个元素与之对应。

由于函数也是关系，因此关系的所有性质和运算对于函数均是成立的。但反过来，由于函数是一种特殊的关系，因此它又有其自身特殊的一些性质。例如，逆函数、复合函数既是逆关系和复合关系，但又有其不同于一般关系之处。

对函数的概念再作些限制，我们又可得到单射、满射、双射三类特殊的函数。

8.1 函数的定义与性质

定义8.1 设F为二元关系，若$\forall x \in \mathrm{dom}F$都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}F$使$xFy$成立，则称$F$为函数. 对于函数$F$，如果有$xFy$, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为F 在 x 的值.

例 $F_1=\{<x_1, y_1>,<x_2, y_2>,<x_3, y_2>\}$

$F_2=\{<x_1, y_1>,<x_1, y_2>\}$是不是函数?

F_1是函数, F_2不是函数.

定义8.2 设F, G 为函数, 则 $F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$

如果两个函数F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ (定义域相同)

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ 都有$F(x)=G(x)$ (对应关系一致)

函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$是否相等?

不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

8.1 函数的定义与性质

定义8.3 设A, B为集合, 如果

f 为函数, $\mathrm{dom}f = A$, $\mathrm{ran}f \subseteq B$,

则 f 称作从A到B的函数, 记作 f: $A \to B$.

例 f: $N \to N$, $f(x)=2^x$ 是从N到N的函数,

g: $N \to N$, $g(x)=2$ 也是从N到N的函数.

定义8.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A, 符号化表示为

□ $$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$$

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$ (为什么?)

$A=\varnothing$, 则$B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则$B^A=\varnothing^A= \varnothing$

8.1 函数的定义与性质

例1 设$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, 求B^A.

解□$B^A=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

□ $f_0 = \{<1, a>, <2, a>, <3, a>\}$

$f_1 = \{<1, a>, <2, a>, <3, b>\}$

□$f_2 = \{<1, a>, <2, b>, <3, a>\}$

□$f_3 = \{<1, a>, <2, b>, <3, b>\}$

□$f_4 = \{<1, b>, <2, a>,<3, a>\}$

□$f_5 = \{<1, b>, <2, a>, <3, b>\}$

□$f_6 = \{<1, b>, <2, b>, <3, a>\}$

□$f_7 = \{<1, b>, <2, b>, <3, b>\}$

8.1 函数的定义与性质

定义8.5 设函数 f: $A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$,

(1) A_1在 f 下的像 $f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$. 特别地，当$A_1 = A$时称$f(A)$为函数的像.

(2) B_1在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$

注意:

- 函数值与像的区别：函数值 $f(x) \in B$, 像$f(A_1) \subseteq B$
- 一般来说 $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$, 但是$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$. 为什么?

例 设f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$

令$A=\{0, 1\}$, $B=\{2\}$, 有$f(A) = f(\{0, 1\}) = \{ f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$

$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}$

8.1 函数的定义与性质

定义8.6 设 $f: A \to B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}f = B$, 则称 $f: A \to B$ 是满射的 (值域等于B)

(2) 若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 $f: A \to B$ 是单射的 (不能多对一)

(3) 若 $f: A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \to B$ 是双射的

问：对于单射、满射和双射，$|A|$和$|B|$的大小如何?

满射: $|A| \geq |B|$; 单射: $|A| \leq |B|$; 双射: $|A| = |B|$;

由定义不难看出，如果 $f: A \to B$ 是满射的，则对于任意的 $y \in B$, 都存在 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$. 如果 $f: A \to B$ 是单射的，则对于任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, 一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 换句话说，如果对于 $x_1, x_2 \in A$ 有 $f(x_1) = f(x_2)$, 则一定有 $x_1 = x_2$.

8.1 函数的定义与性质

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$;

(2) f: Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集;

(3) f: R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, 不超过x的最大整数;

(4) f: R→R, $f(x)=2x+1$;

(5) f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

解

(1) f: R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射

8.1 函数的定义与性质

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$;

(2) f: Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集;

(3) f: R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, 不超过x的最大整数;

(4) f: R→R, $f(x)=2x+1$;

(5) f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

解

(2) f: Z^+→R, $f(x)=\ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射, $\text{ran}f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$.

8.1 函数的定义与性质

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) $f: \mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x) = -x^2+2x-1$;

(2) $f: \mathrm{Z}^+\to\mathrm{R},\ f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集;

(3) $f: \mathrm{R}\to\mathrm{Z},\ f(x) = \lfloor x\rfloor$, 不超过 x 的最大整数;

(4) $f: \mathrm{R}\to R,\ f(x)=2x+1$;

(5) $f: \mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+,\ f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathrm{R}^+$为正实数集.

解

(3) $f: \mathrm{R}\to\mathrm{Z},\ f(x)=\lfloor x\rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如$f(1.5)=f(1.2)=1$

8.1 函数的定义与性质

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$;

(2) f: Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集;

(3) f: R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, 不超过x的最大整数;

(4) f: R→R, $f(x)=2x+1$;

(5) f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

解

(4) f: R→R, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射, 因为它是单调函数并且ran$f$=R

8.1 函数的定义与性质

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$;

(2) f: Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集;

(3) f: R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, 不超过x的最大整数;

(4) f: R→R, $f(x)=2x+1$;

(5) f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

解

(5) f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$

当x趋于0或者正无穷的时候, f都趋于正无穷;
有极小值$f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的

8.1 函数的定义与性质

例3 对于给定的集合A和B构造双射函数$f:A\to B$.

(1) $A=P(\{1, 2, 3\})$, $B=\{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$

(2) $A=[0, 1]$, $B=[1/4, 1/2]$

(3) $A=\mathrm{Z}$, $B=\mathrm{N}$

(4) $\mathrm{A}=[\pi/2, 3\pi/2]$, $B=[-1, 1]$

(1) $A=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

□$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

□$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令$f:A\to B$, $f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

8.1 函数的定义与性质

例3 对于给定的集合A和B构造双射函数$f:A\to B$.

(1) $A=P(\{1, 2, 3\})$, $B=\{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$

(2) $A=[0, 1]$, $B=[1/4, 1/2]$

(3) $A=\mathrm{Z}$, $B=\mathrm{N}$

(4) $\mathrm{A}=[\pi/2, 3\pi/2]$, $B=[-1, 1]$

(2) 令 $f:[0, 1]\to[1/4, 1/2]$, $f(x)=(x+1)/4$

8.1 函数的定义与性质

例3 对于给定的集合A和B构造双射函数f:A→B.

(1) $A=P(\{1, 2, 3\})$, $B=\{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$

(2) $A=[0, 1]$, $B=[1/4, 1/2]$

(3) $A=\mathrm{Z}$, $B=\mathrm{N}$

(4) $\mathrm{A}=[\pi/2, 3\pi/2]$, $B=[-1, 1]$

(3) 将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

□□□Z: 0□–1□1 –2□ 2□–3□ 3 …

□ □ □ ↓□ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

□□□N: 0 □1 □2 3 □4 □5 □6 …

所表示的函数是：f： $\mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{N}, f(x)$

$$= \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

8.1 函数的定义与性质

例3 对于给定的集合A和B构造双射函数$f:A\to B$.

(1) $A=P(\{1, 2, 3\})$, $B=\{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$

(2) $A=[0, 1]$, $B=[1/4, 1/2]$

(3) $A=\mathrm{Z}$, $B=\mathrm{N}$

(4) $\mathrm{A}=[\pi/2, 3\pi/2]$, $B=[-1, 1]$

(4) 令 $f:[\pi/2, 3\pi/2]\to[-1, 1]$

□□ $f(x) = \sin x$

8.1 函数的定义与性质

定义8.7

(1) 设 $f: A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称$f: A\to B$是常函数.

(2) 称A上的恒等关系I_A为A上的恒等函数, 对所有的 $x\in A$都有$I_A(x)=x$.

(3) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_{A'}: A\to\{0, 1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a)=1,\ a\in A' \qquad \chi_{A'}(a)=0,\ a\in A-A'$$

8.2 函数的复合与反函数

定理8.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in\mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$

证 先证明$F\circ G$是函数. 因为F, G是关系, 所以$F\circ G$也是关系. 若对某个$x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$有$xF\circ Gy_1$和 $xF\circ Gy_2$, 则

$$<x, y_1>\in F\circ G\wedge<x, y_2>\in F\circ G$$

$\Rightarrow\exists t_1(<x,t_1>\in F\wedge<t_1,y_1>\in G)\wedge\exists t_2(<x,t_2>\in F\wedge<t_2,y_2>\in G)$

$\Rightarrow\exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge<t_1,y_1>\in G\wedge<t_2,y_2>\in G$□ （$F$为函数）

$\Rightarrow y_1=y_2$□□ □□□□□□□□□□ □ （G为函数）

所以 $F\circ G$ 为函数.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$

任取x, $x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$

□ □ $\Rightarrow \exists t\, \exists y(\langle x, t\rangle \in F \wedge \langle t, y\rangle \in G)$

□ □ $\Rightarrow \exists t\, (x\in \mathrm{dom}F \wedge t=F(x) \wedge t\in \mathrm{dom}G)$

□ □ $\Rightarrow x\in \{\, x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G \,\}$

任取x, $x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G$

□ □ $\Rightarrow \langle x, F(x)\rangle \in F \wedge \langle F(x), G(F(x))\rangle \in G$

□ □ $\Rightarrow \langle x, G(F(x))\rangle \in F\circ G$

□ □ $\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(F\circ G) \wedge F\circ G(x)=G(F(x))$

所以(1)和(2)得证.

8.2 函数的复合与反函数

推论1 设F, G, H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且

□ $$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H).$$

证　由上述定理易证.

推论2 设$f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$, 则$f\circ g: A\rightarrow C$, 且$\forall x\in A$都有

$$f\circ g(x)=g(f(x)).$$

证　由上述定理知$f\circ g$是函数, 且

$$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x|x\in \mathrm{dom}f\wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$$

□□□□□ $$=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B\}=A$$

$$\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq \mathrm{ran}g\subseteq C$$

因此$f\circ g: A\rightarrow C$, 且$\forall x\in A$有$f\circ g(x)=g(f(x))$.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.2 设$f: A\to B$, $g: B\to C$,

(1) 如果$f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果$f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果$f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

证

(1) 任取$c\in C$, 由$g:B\to C$的满射性, $\exists b\in B$使得 $g(b)=c$.

对于这个b, 由 $f:A\to B$的满射性, $\exists a\in A$使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了$f\circ g: A\to C$是满射的.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.2 设$f: A\to B$, $g: B\to C$,

(1) 如果$f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果$f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果$f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

(2) 假设存在$x_1, x_2\in A$使得

□□

$$f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为$g:B\to C$是单射的，故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于$f:A\to B$是单射的, 所以$x_1=x_2$. 从而证明$f\circ g: A\to C$是单射的.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.2 设$f: A\rightarrow B$, $g: B\rightarrow C$,

(1) 如果$f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$是满射的, 则 $f\circ g:A\rightarrow C$也是满射的

(2) 如果$f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$是单射的, 则 $f\circ g:A\rightarrow C$也是单射的

(3) 如果$f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$是双射的, 则 $f\circ g:A\rightarrow C$也是双射的

(3) 由(1)和(2)得证.

注意: 定理逆命题不为真, 即如果$f\circ g: A\rightarrow C$是单射(或满射、双射)的, 不一定有 $f: A\rightarrow B$ 和 $g: B\rightarrow C$都是单射(或满射、双射)的.

8.2 函数的复合与反函数

考虑集合$A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3\}$. 令

□ □$f=\{<a_1, b_1>,<a_2, b_2>,<a_3, b_3>\}$

□ □$g=\{<b_1, c_1>,<b_2, c_2>,<b_3, c_3>,<b_4, c_3>\}$

□ □$f\circ g=\{<a_1, c_1>,<a_2, c_2>,<a_3, c_3>\}$

那么 $f:A\to B$和$f\circ g:A\to C$是单射的, 但$g:B\to C$不是单射的.

考虑集合$A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $C=\{c_1, c_2\}$. 令

□□$f=\{<a_1, b_1>,<a_2, b_2>,<a_3, b_2>\}$

□□$g=\{<b_1, c_1>,<b_2, c_2>,<b_3, c_2>\}$

□□$f\circ g=\{<a_1, c_1>,<a_2, c_2>,<a_3, c_2>\}$

那么$g:B\to C$ 和 $f\circ g:A\to C$是满射的, 但 $f:A\to B$不是满射的.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.3 设 $f: A\to B$, 则 $f = f\circ I_B = I_A\circ f$.

证 由定理8.1可知, $f\circ I_B$: $A\to B$, $I_A\circ f: A\to B$.

任取$<x, y>$有

$$<x, y>\in f \Rightarrow <x, y>\in f \wedge y\in B$$

$$\Rightarrow <x, y>\in f \wedge <y, y>\in I_B$$

$$\Rightarrow <x, y>\in f\circ I_B$$

$$<x, y>\in f\circ I_B \Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\wedge <t, y>\in I_B)$$

$$\Rightarrow <x, t>\in f \wedge t = y$$

$$\Rightarrow <x, y>\in f$$

所以有$f = f\circ I_B$, 同理可证$I_A\circ f = f$.

8.2 函数的复合与反函数

函数的逆运算

(1) 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系. 如$F=\{\langle x, y\rangle, \langle z, y\rangle\}$.

(2) 任给单射函数 $f: A\to B$, 则f^{-1}是从ran$f$到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数.

(3) 对于双射函数 $f: A\to B$, $f^{-1}: B\to A$是从B到A的双射函数.

定理8.4 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B\to A$, 即f^{-1}是函数, 且dom$f^{-1}=B$, ran$f^{-1}=A$.

再证明$f^{-1}:B\to A$的双射性质.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.4 设 $f:A\to B$ 是双射的, 则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射的.

证　因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\ ,\quad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A.$$

对于任意的 $x\in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有 $y_1, y_2\in A$ 使得

$$<x, y_1>\in f^{-1}\wedge<x, y_2>\in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<y_1, x>\in f\wedge<y_2, x>\in f$$

根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$, 从而证明了 f^{-1} 是函数，且是满射的(因为 $\mathrm{ran}\, f^{-1}= A$). 再证明单射. 若存在 $x_1, x_2\in B$ 使得 $f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$, 从而有

□□　$$<x_1, y>\in f^{-1}\wedge<x_2, y>\in f^{-1}$$

□ □　$$\Rightarrow <y, x_1>\in f\wedge<y, x_2>\in f \Rightarrow x_1=x_2$$

对于双射函数 $f: A\to B$, 称 $f^{-1}: B\to A$ 是它的反函数.

8.2 函数的复合与反函数

定理8.5

(1) 设 $f: A\to B$ 是双射的, 则 $f^{-1}\circ f = I_B$, $f\circ f^{-1} = I_A$

(2) 对于双射函数 $f: A\to A$, 有 $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$

证明思路：根据定理可知 $f^{-1}: B\to A$ 也是双射的, 由合成基本定理可知 $f^{-1}\circ f: B\to B$, $f\circ f^{-1}: A\to A$，且它们都是恒等函数. 证明过程请大家自己完成.□

例5 设 f□$: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$

□□□
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ -2 & x<3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

8.2 函数的复合与反函数

解 $f \circ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$g \circ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f: R→R不是双射的, 不存在反函数.

g: R→R是双射的, 它的反函数是

□g^{-1}: R→R, $g^{-1}(x)=x-2$

8.3 双射函数与集合的基数

对于有限集合来说，集合的基数就是集合中元素的个数.

对于无限集合，如何计数呢?

一家拥有无穷多个客房的旅店，每个房间恰能住一名旅客，并已经客满.

当日又有一名旅客投宿，店主能否接纳?

他让1#房间的旅客挪到2#房间，

让2#房间的旅客挪到3#房间，…

如此下去可腾出1#房间给新的旅客.

Hilbert旅馆

8.3 双射函数与集合的基数

这说明$Z^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$与N= $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$具有同样多的元素.

可N明明比Z^+多一个元素!

这一问题困扰数学家多年，直到十九世纪七十年代，康托研究无限集合的度量问题时，提出"集合基数"的概念，这个问题才得到彻底解决.

格奥尔格·康托
1845.3.3-1918.1.6
集合论的创始人

8.3 双射函数与集合的基数

这一节将利用双射函数来讨论集合的势. 通俗地说，集合的势是度量集合所含元素多少的量. 集合的势越大，所含的元素就越多.

度量集合大小的数称为集合的基数（势），记为 $|A|$ 或card$A$.

设 A 和 B 为集合，则 $|A|=|B|$，$|A|<|B|$ 或 $|A|>|B|$.

定义8.8 设A, B是集合, 如果存在从A到B的双射函数, 就称A和B是等势的, 记作$A\approx B$. 如果A不与B等势, 则记作$A\not\approx B$.

8.3 双射函数与集合的基数

集合等势的实例:

例6 (1) Z≈N

□□Z: 0□–1□1 –2□ 2□–3□ 3 …

□ □ □ ↓□ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

□□□N: 0 □1 □2 3 □4 □5 □6 …

这种对应所表示的函数是:

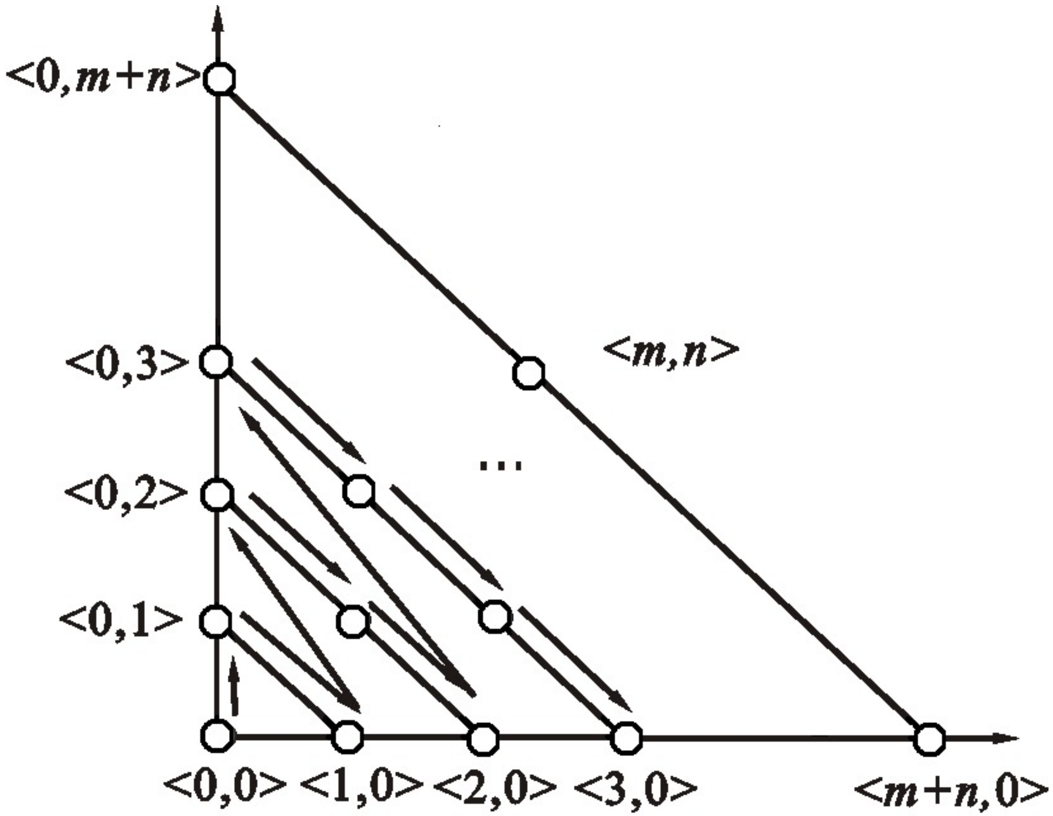
$$f: \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{N}, \quad f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数, 从而证明了Z≈N.

8.3 双射函数与集合的基数

(2) N×N≈N

N×N中所有的元素排成有序图形



$$f: \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}, \quad f(<m,n>) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$

8.3 双射函数与集合的基数

(3) N≈Q

来源：百度百科：有理数

命名由来

播报 编辑

“有理数”这一名称不免叫人费解，有理数并不比别的数更“有道理”。事实上，这似乎是一个翻译上的失误。有理数一词是从西方传来，在英语中是rational number，而rational通常的意义是“理性的”。中国在近代翻译西方科学著作，依据日语中的翻译方法，以讹传讹，把它译成了“有理数”。但是，这个词来源于古希腊，其英文词根为ratio，就是比率的意思（这里的词根是英语中的，希腊语意义与之相同）。所以这个词的意义也很显豁，就是整数的“比”。与之相对，“无理数”就是不能精确表示为两个整数之比的数，而并非没有道理。[1]

8.3 双射函数与集合的基数

(3) N≈Q

双射函数 f:N→Q

−3/1 [18]	−2/1 [5]	−1/1 [4]	0/1 [0]	1/1 [1]	2/1 [10]	3/1 [11]	
−3/2 [17]	−2/2	−1/2 [3]	0/2	1/2 [2]	2/2	3/2 [12]	
−3/3	−2/3 [6]	−1/3 [7]	0/3	1/3 [8]	2/3 [9]	3/3	
−3/4 [16]	−2/4	−1/4 [15]	0/4	1/4 [14]	2/4	3/4 [13]	…

8.3 双射函数与集合的基数

(4) (0, 1)≈R 其中实数区间 $(0,1)=\{x|\ x\in R\wedge 0<x<1\}$.

$$令 f:(0,1)\to \mathrm{R},\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

(5) [0,1]≈(0,1) 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间.

令 f: [0, 1]→(0, 1)

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & x=0\\ 1/2^2 & x=1\\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n\\ x & 其它x\end{cases}$$

(6) 对任何 $a, b\in \mathrm{R}$, $a<b$, $[0, 1]\approx[a, b]$，双射函数

f:[0, 1]→[a, b], $f(x)=(b-a)x+a$.

类似地可以证明, 对任何 $a, b\in R$, $a<b$, 有 $(0, 1)\approx(a, b)$.

8.3 双射函数与集合的基数

例7　设A为任意集合, 则$P(A) \approx \{0, 1\}^A$.

证　如下构造从$P(A)$ 到 $\{0, 1\}^A$ 的函数

□　　$f: P(A) \to \{0, 1\}^A$,　$f(A') = \chi_{A'}$, $\forall A' \in P(A)$.

其中$\chi_{A'}$是集合A'的特征函数. 易证 f 是单射的, 因为如果 $A_1 \neq A_2$, 则$f(A_1) = \chi_{A_1} \neq f(A_2) = \chi_{A_2}$.

对于任意的 $g \in \{0, 1\}^A$, 那么有 $g: A \to \{0, 1\}$. 令

$$B = \{ x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$$

则$B \subseteq A$, 且$\chi_B = g$, 即$\exists B \in P(A)$, $f(B) = g$. 从而证明了f 是满射的. 由等势定义得 $P(A) \approx \{0, 1\}^A$.

8.3 双射函数与集合的基数

定理8.6 设A, B, C是任意集合，

(1) $A \approx A$

(2) 若$A \approx B$，则$B \approx A$

(3) 若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$

等势具有自反性、对称性和传递性

证明思路：利用等势的等义.

(1) I_A是从A到A的双射

(2) 若$f: A \to B$是双射，则$f^{-1}: B \to A$是从B到A的双射.

(3) 若$f: A \to B$，$g: B \to C$是双射，则$f \circ g: A \to C$是从A到C的双射. 具体的证明过程请大家自己完成.

8.3 双射函数与集合的基数

等势结果

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N}\times\mathbf{N}$
- $\mathbf{R} \approx [0, 1] \approx (0, 1)$　可以强化成任何的实数区间

不等势的结果:

定理8.7 (康托定理)

(1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$;　　(2) 对任意集合$A$都有$A \not\approx P(A)$

证明思路:

(1) 如果能证明$\mathbf{N} \not\approx [0, 1]$，则$\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$. 因此只需证明任何函数 $f:\mathbf{N}\to[0, 1]$都不是满射的.

(2) 任取函数 $f:A\to P(A)$，构造$B\in P(A)$，使得B与 f 的任何函数值都不等.

8.3 双射函数与集合的基数

证 (1) 规定[0, 1]中数的表示. 对任意的$x\in[0, 1]$, 令

□□ $x = 0.x_1x_2\ldots,\quad 0\le x_i\le 9$

规定在 x 的表示式中不允许在某位后有无数个9的情况.

设 f: N→[0, 1]是任何函数，列出 f 的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$$
$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$$
$$\ldots$$
$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots$$
$$\ldots$$

令 y 的表示式为$0.b_1b_2\ldots$, 并且满足$b_i\ne a_i^{(i)}$, i=1, 2, …, 那么$y\in[0, 1]$, 且y与上面列出的任何函数值都不相等. 这就推出$y\notin \mathrm{ran}f$, 即 f 不是满射的.

8.3 双射函数与集合的基数

(2) 我们将证明任何函数 $g: A\rightarrow P(A)$都不是满射的.

设 $g: A\rightarrow P(A)$是从A到$P(A)$的函数, 如下构造集合B:

□□ $$B=\{\, x \mid x\in A\wedge x\notin g(x)\}$$

则$B\in P(A)$, 但对任意$x\in A$都有

$$x\in B \Leftrightarrow x\notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x\in A$都有$g(x)\neq B$. 即$B\notin \mathrm{ran}g$.

注意：根据康托定理可以知道$\mathrm{N}\not\approx P(\mathrm{N})$，$\mathrm{N}\not\approx\{0, 1\}^{\mathrm{N}}$.

8.3 双射函数与集合的基数

定义8.9 一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势；如果一个集合不是有穷的，则称作无穷集. 对于有穷集合A，称与A等势的那个唯一的自然数为A的基数，记作card$A$(或$|A|$)，即

$$\mathrm{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

8.3 双射函数与集合的基数

由于无限集合无法用元素的个数表示其基数，为此我们引入如下基数记号：

定义8.10 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$(阿列夫零).

实数集合R的基数记作$\aleph$ (阿列夫).

等势结果

- card$N$=card$Z$=card$Q$=card $N\times N$ = $\aleph_0$
- card$R$=card[a, b]=card(c, d)= $\aleph$

8.3 双射函数与集合的基数

定理8.8 设A是任意有限集合，则$|A| < \aleph_0 < \aleph$.

定理8.9 $\aleph_0$是最小的无穷基数.

定理8.10 对任何集合A都有

$$|A| < |P(A)|.$$

注：此定理说明不存在最大的基数.

没有最大
只有更大

将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中:

$0, 1, 2\ldots, n, \ldots$ 是全体自然数, 是有穷基数.

$\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无穷基数, $\aleph_0$是最小的无穷基数, $\aleph$后面还有更大的基数, 如card$P$(R)等.

8.3 双射函数与集合的基数

定义8.11 设A为集合，若$\mathrm{card}A \leqslant \aleph_0$，则称$A$为可数集或可列集.

可数集的特点：集合中所有元素可以排序.

注：$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{N}\times\mathbf{N}$是可数集.

① 可数集的任何子集都是可数集;

② 两个可数集的并是可数集;

③ 两个可数集的笛卡尔积是可数集;

④ 可数个可数集的并仍是可数集.

定义8.12 不是可数集的无限集统称为不可数集.

第八章主要内容:

- 函数，从A到B的函数$f{:}A \rightarrow B$，B^A，函数的像与完全原像
- 函数的性质：单射、满射、双射函数
- 重要函数：恒等函数、常函数、特征函数
- 重要的集合等势的结果
- 可数集与不可数集
- 集合基数的定义

课后作业：

13. 计算下列集合的基数，并说明原因。

(1) $A=\{x, y, z\}$;

(2) $B=\{x \mid x=n^2 \wedge n \in \mathbf{N}\}$;

(3) $C=\{x \mid x=n^{109} \wedge n \in \mathbf{N}\}$;

(4) $B \cap C$;

(5) $B \cup C$.