華中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 命题逻辑的推理理论

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 命题逻辑的推理理论

第1节　推理的形式结构

第2节　自然推理系统P

3.1 推理的形式结构

数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理. **推理**是指从前提出发推出结论的思维过程. **前提**是已知的命题公式集合, **结论**是从前提出发应用推理规则推出的命题公式.

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式, 若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$中出现的命题变项的任意一组赋值, 要么$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假, 要么当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时, B也为真, 则称由**前提**$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出**结论**B的**推理**是**有效的**或**正确的**, 并称B是**有效的结论**.

说明：(1) 设$\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots A_k\}$为前提，则由$\Gamma$推出$B$的推理记为$\Gamma \vdash B$，推理是否正确与诸前提排列次序无关，前提是一个有限的公式集合.

若推理正确，则记为 $\Gamma \models B$

若推理不正确，则记为 $\Gamma \not\models B$

这里称$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$为推理的形式结构

(2) 判断推理是否正确的依据：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1且$B$为0是否出现. 不出现，推理正确；出现，推理不正确.

(3) 推理正确并不能保证结论B一定成立.

推理形式结构的另一种等价形式

定理3.1 由命题公式 $A_1, A_2, \ldots A_k$推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

- 根据定理3.1可知，推理形式结构等同于蕴涵式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$，其中推理前提的合取式成了蕴涵式的前件，结论成了蕴涵式的后件. 若推理正确，记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$ （$\Rightarrow$是一种元语言符号，表示蕴涵式是重言式）
- 前提： $A_1, A_2, \ldots A_k$

  结论： B

定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

判断推理是否正确的方法:

1. 真值表法
2. 等值演算法
3. 主析取范式法

例1 判断下面推理是否正确.

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号, 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号, 所以, 今天是1号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(1) 推理的形式结构: $(p\to q)\wedge p\to q$

用等值演算法

$$(p\to q)\wedge p\to q \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$, 由定理3.1可知推理正确

(2) 推理的形式结构: $(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$

用主析取范式法

$$(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow p\vee\neg q$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值, 所以推理不正确

9条推理定律

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

   $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$???

9条推理定律

6. $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow(A\rightarrow C)$ 假言三段论

7. $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$ 等价三段论

8. $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$ 构造性二难

   $(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B)\Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形 式)

9. $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$ 破坏性二难

3.1 推理的形式结构

注意：每个等值式可产生两个推理定律，

如，由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第3章 命题逻辑的推理结构

第1节 推理的形式结构

第2节 自然推理系统P

本节将对由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论B的正确推理的证明给出严格的形式描述. 证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论.

定义3.2 一个**形式系统** I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记I=$<A(I), E(I), A_X(I), R(I)>$为四元组，其中$<A(I), E(I)>$是$I$ 的**形式语言系统**，$<A_X(I), R(I)>$是I的**形式演算系统**.

3.2 自然推理系统P

形式系统一般分为两类，一类是自然推理系统，它的特点是从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，最后得到的命题公式是推理的结论(它是有效的结论，可能是重言式，也可能不是重言式)。另一类是公理推理系统，它只能从若干条给定的公理出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的结论是系统中的重言式，称为系统中的定理。我们这里只介绍自然推理系统*P*，它的定义中没有公理部分，因而只有3个部分。

定义3.3 自然推理系统P定义如下：

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg \ \wedge \ \vee \ \rightarrow \ \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：( ) ，

2. 合式公式（同定义1.6）

定义1.6 合式公式（也称作命题公式或命题形式，简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式;

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是;

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B), (A\vee B), (A\rightarrow B), (A\leftrightarrow B)$也是;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)形成的符号串才是合式公式.

续：

3. 推理规则

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提；

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后续证明的前提；

(3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式；

3.2 自然推理系统P

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{\therefore A \to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad C\rightarrow D \quad A\vee C}{\therefore B\vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \quad C\rightarrow D \quad \neg B\vee\neg D}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A\wedge B}$$

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$, 则称公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的**证明**.

例2 构造下面推理的证明.

若明天是星期三或星期五，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课, 所以，明天不是星期三, 也不是星期五.

解 (1) 设命题并符号化

设p：明天是星期三，q：明天是星期五，

r：我明天有课，s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\lor q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\land\neg q$

(3) 证明

① $r\to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\lor q)\to r$	前提引入
⑤ $\neg(p\lor q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\land\neg q$	⑤置换

附加前提证明法 适用于结论为蕴涵式

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B$

例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则 $\sqrt{2}$ 是无理数. 若$\sqrt{2}$ 是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$ 是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p\vee q$，$p\to r$，$r\to\neg s$

结论：$s\to q$

前提：$p\vee q$，$p\rightarrow r$，$r\rightarrow\neg s$

结论：$s\rightarrow q$

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法 (反证法)

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法：在前提中加入$\neg B$，得到矛盾式.

理由

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$$
$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$$

例4　前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\to s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明　用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

例5 判断下面推理是否正确:

(1) 前提: $\neg p \to q$, $\neg q$

结论: $\neg p$

解 推理的形式结构: $(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

方法一: 等值演算法

$$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

易知10是成假赋值，不是重言式，所以推理不正确

方法二：主析取范式法

$$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q\rightarrow\neg p$$

$$\Leftrightarrow\neg((p\vee q)\wedge\neg q)\vee\neg p$$

$$\Leftrightarrow\neg p\vee q$$

$$\Leftrightarrow M_2$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$$

未含m_2, 不是重言式, 推理不正确.

方法三　真值表法

p	q	$\neg p\rightarrow q$	$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q$	$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q\rightarrow\neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式，推理不正确

方法四　直接观察出10是成假赋值

(2) 前提：$q \to r$，$p \to \neg r$

结论：$q \to \neg p$

解 推理的形式结构：$(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$

用等值演算法

$$(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \to (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r)) \to (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \to (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow ((q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee (\neg q \vee \neg p)$$

$\Leftrightarrow 1$ 推理正确，有效的结论

例6 在系统P中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六，并且颐和园游人太多. 所以，我们去圆明园或动物园玩.

证明：(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，

r：到圆明园玩，s：颐和园游人太多

t：到动物园玩

(2) 前提：$p\to(q\vee r)$，$s\to\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

前提：$p \to (q \vee r)$，$s \to \neg q$，p，s

结论：$r \vee t$

(3) 证明：

① $p \to (q \vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q \vee r$	①②假言推理
④ $s \to \neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r \vee t$	⑦附加

第3章主要内容:

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法

  真值表法、等值演算法、主析取范式法

- 推理定律
- 自然推理系统*P*中构造推理证明的方法