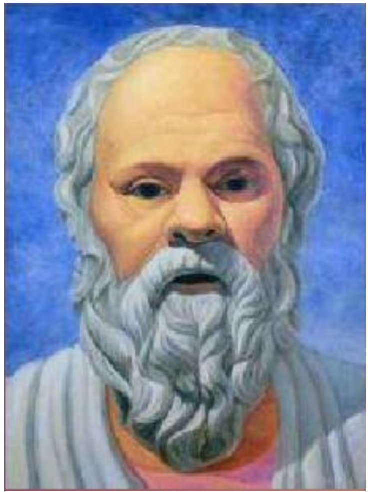
華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 一阶逻辑基本概念

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第4章 一阶逻辑基本概念

4.1 一阶逻辑命题符号化



苏格拉底三段论:

所有人都是要死的,

苏格拉底是人,

所以苏格拉底是要死的.

苏格拉底三段论应该是正确的，但在命题逻辑中无法判断(因为$(p\wedge q)\rightarrow r$不是重言式).

为克服命题逻辑的这种局限性，要将命题再细分，分离出个体词、谓词和量词 (表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系), 这就是一阶逻辑的研究内容. 一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑.

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的三个基本要素.

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体. 如小王、小李、中国、3等.

个体常项：表示具体或特定的客体的个体词. 一般用小写英文字母a, b, c表示;

个体变项：表示抽象或泛指的个体词. 常用x, y, z表示;

个体域(论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如 N, Z, R, …

全总个体域——由宇宙间一切事物组成

谓词——刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词. 常用F, G, H等表示.

谓词常项:表示具体性质或关系的谓词. 如, $F(a)$: a是人

谓词变项:表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词.

如, $F(x)$: x具有性质F

含$n(n\geq 1)$个个体变项x_1, x_2, … x_n的谓词P称作n元谓词, 记作$P(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

一元谓词(n=1)——表示性质, $P(x_1)$

多元谓词($n\geq 2$)——表示事物之间的关系, $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$

如, $L(x, y)$: x与y有关系L, $L(x, y)$: $x\geq y$, …

0元谓词——不含个体变项的谓词, 如$F(a)$, $G(a, b)$等. 任何命题均可以表示为0元谓词, 可以将命题看成特殊谓词.

量词——表示个体常项或变项之间数量关系的词.

全称量词$\forall$: 表示所有的, 一切的, 每一个, 任意的……

$\forall x$: 表示个体域里的所有个体 x

如, $\forall xF(x)$表示个体域中所有的x具有性质F

$\forall x\forall yG(x, y)$表示个体域中所有个体 x 和 y 有关系G

存在量词$\exists$: 表示存在, 有一个, 有的……

$\exists x$: 表示个体域中有一个个体 x

如, $\exists xF(x)$表示个体域中存在个体 x具有性质F

$\exists x\exists yG(x, y)$表示个体域中存在个体 x 和 y 有关系G

$\forall x\exists yG(x, y)$表示对个体域中每一个$x$都存在一个$y$使得$x$和$y$有关系$G$

$\exists x\forall yG(x, y)$表示个体域中存在一个$x$使得对每一个$y$, x和y有关系G

例1 将下列命题符号化.

(1) 墨西哥位于北美洲.

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数.

(3) 如果2>3，则3<4.

解：在命题逻辑中：

(1) p，p：墨西哥位于北美洲. 是真命题

(2) $p \rightarrow q$，其中，p：$\sqrt{2}$ 是无理数，q：$\sqrt{3}$ 是有理数.
是假命题

(3) $p \rightarrow q$，其中，p：2>3，q：3<4. 是真命题

例1 将下列命题符号化.

(1) 墨西哥位于北美洲.

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数.

(3) 如果2>3，则3<4.

而在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$，其中，a：墨西哥，$F(x)$：x位于北美洲

(2) $F(\sqrt{2})\rightarrow G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数

(3) $F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$，其中，$F(x, y)$：$x>y$，

$G(x, y)$：$x<y$

例2 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) D为人类集合 (b) D为全总个体域

解 (a) (1) $\forall xG(x)$, $G(x)$：x爱美

(2) $\exists xH(x)$, $H(x)$：x用左手写字

(b) $F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ (2) $\exists x(F(x)\wedge H(x))$

1. 使用全总个体域时，为了将人与其他事物区别出来，引入特性谓词$F(x)$. 2. 注意蕴含与合取！

4.1 一阶逻辑命题符号化

当F是**谓词常项**时， $\forall xF(x)$是一个命题. 如果把个体域中任何一个个体a代入，$F(a)$都为真，则$\forall xF(x)$为真；否则$\forall xF(x)$为假. $\exists xF(x)$也是一个命题，如果个体域中存在一个个体a使得$F(a)$为真，则$\exists xF(x)$为真，否则为假.

例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数， $L(x, y)$：$x>y$

$$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x, y))$$

(2) 令$F(x)$：x是无理数，$G(y)$：y是有理数，$L(x, y)$：$x>y$

$$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$$

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 没有不呼吸的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解 (1) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x呼吸

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x喜欢吃糖

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

例5 设个体域为实数域, 将下面命题符号化.

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$

解 令$L(x, y)$: $x<y$

(1) $\forall x \exists y L(x, y)$

(2) $\exists x \forall y L(x, y)$

注意: ∀与∃不能随意交换顺序

显然(1)是真命题, (2)是假命题

第4章 一阶逻辑基本概念

4.2—阶逻辑公式及其解释

为在一阶逻辑中进行演算和推理，必须给出一阶逻辑中公式的抽象定义以及它们的解释. 为此，首先给出一阶语言的概念. 所谓一阶语言，是用于一阶逻辑的形式语言，而一阶逻辑是建立在一阶语言上的逻辑体系. 一阶语言本身是由抽象符号构成的，可以根据需要被解释成各种具体的定义.

在描述对象和形式化时要使用个体常项、个体变项、函数、谓词、量词、联结词和括号与逗号. 个体常项符号、函数符号和谓词符号称作非逻辑符号, 个体变项符号、量词符号、联结词符号和括号与逗号称作逻辑符号.

定义4.1 设L是一个非逻辑符号集合，由L生成的**一阶语言**$\mathscr{L}$的**字母表**包括下述符号：

非逻辑符号

(1) 个体常项符号：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：( ) ，

定义4.2 $\mathscr{L}$的项的定义如下：

(1) 个体常项符号和个体变项符号是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1), (2)得到的.

如，$a, x, x+y, f(x), g(x, y)$等都是项.

定义4.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是$\mathscr{L}$的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是$\mathscr{L}$的原子公式.

如，$F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式.

定义4.4 $\mathscr{L}$的**合式公式**定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

合式公式简称**公式**. 如， $F(x)$, $F(x)\vee\neg G(x, y)$, $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x, y))$ 等都是合式公式.

定义4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现的.

例如，$\forall x(F(x, y)\rightarrow G(x, z))$，$x$为指导变元，$(F(x, y)\rightarrow G(x, z))$为$\forall x$的辖域，$x$的两次出现均为约束出现，$y$与$z$均为自由出现.

又如，$\exists x(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$，$\exists x$中的$x$是指导变元，辖域为$(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$. $\forall y$中的y是指导变元，辖域为$(G(x,y)\wedge H(x,y,z))$. x的3次出现都是约束出现，y的第一次出现是自由出现，后2次是约束出现，z的2次出现都是自由出现.

思考：$\forall x(F(x)\rightarrow G(y)) \rightarrow \exists y(H(x)\wedge L(x, y, z))$？

定义4.6 设A是任意的公式，若A中不含自由出现的个体变项，则称A为**封闭的公式**，简称**闭式**.

例如，$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ 为闭式，

而 $\exists x(F(x) \wedge G(x, y))$ 不是闭式

4.2一阶逻辑公式及其解释

$\mathscr{L}$ 中的合式公式是按照形成规则生成的符号串，没有实际的意义. 只有将其中的变项(个体变项、谓词变项等)用指定的常项代替后，所得公式才具有特定的实际含义.

定义4.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言，$\mathscr{L}$的**解释**I由4部分组成：

(a) 非空个体域D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$，有一个$\overline{a}\in D_I$，称$\overline{a}$为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f\in L$，有一个D_I上的n元函数$\overline{f}: D_I^n \to D_I$，称$\overline{f}$为$f$在$I$中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F\in L$，有一个D_I上的n元谓词常项$\overline{F}$，称$\overline{F}$为F在I中的解释.

设公式A，取个体域D_I，把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释$\overline{a}$、$\overline{f}$、$\overline{F}$，称所得到的公式A'为A在I下的**解释**，或A在I下**被解释成**A'.

例6 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a}=0$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

写出下列公式在I下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists xF(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$　　真

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),g(x,y))\rightarrow F(x,y))$

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$　　假

(3) $\forall xF(g(x,y),a)$

$\forall x(x\cdot y=0)$　　真值不定, 不是命题

定理4.1 闭式在任何解释下都是命题.

注意：不是闭式的公式在解释下可能是命题，也可能不是命题.

定义4.8 若公式A在任何解释下均为真，则称A为永真式(逻辑有效式). 若A在任何解释下均为假，则称A为矛盾式(永假式). 若至少有一个解释使A为真，则称A为可满足式.

几点说明：

永真式为可满足式，但反之不真；

由于公式中的谓词和函数可以有各种不同的解释，结果是判断任意给定的公式是否是永真式/矛盾式的问题是不可判定的，不存在一个算法能在有限步内判断任意给定的公式是否是永真式/矛盾式.

定义4.9 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i ($1 \le i \le n$) 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如，$F(x) \rightarrow G(x)$, $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$等都是$p \rightarrow q$的代换实例.

定理4.2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是永假式.

例7　判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式?

(1) $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$

重言式 $p\to(q\to p)$ 的代换实例，故为永真式

(2) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\to q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式

(3) $\forall x(F(x)\to G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$:$x>5$, $G(x)$: $x>3$, 公式为真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$:$x<5$, $G(x)$:$x<3$, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式

例8 在分别取个体域为

(a) D_1=N

(b) D_2=R

(c) D_3为全总个体域

的条件下，将下面命题符号化，并讨论真值.

(1) 对于任意的数x均有$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

解 设$G(x)$: $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

(a) $\forall xG(x)$ 真

(b) $\forall xG(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$: x是数

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 真

(2) 存在数x，使得 $x+7=5$

解 设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists xH(x)$ 假

(b) $\exists xH(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$：x为实数

$\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 真

本例说明：不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同(也可能相同)，真值可能不同(也可能相同).

例9 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

设$F(x)$: x为大熊猫，$G(x)$: x可爱

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) 有人爱发脾气

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱发脾气

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃面包

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(4) 没有不爱吃糖的人

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃糖

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设$F(x)$:x是人, $H(x,y)$:x与y相同, $L(x,y)$: x与y一样高

$\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg H(x, y)\rightarrow\neg L(x, y))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设$F(x)$:x是汽车, $G(y)$:y是火车, $H(x, y)$:x比y快

$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x, y))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x, y))$

例10 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

说明下列公式在 I 下的涵义, 并讨论真值.

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$

$\forall x(2x=x)$ 假

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

$\forall x\forall y(x+2=y\rightarrow y+2=x)$ 假

例10 给定解释 I 如下:

(a) 个体域D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$ 真

(4) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

$\exists x\forall y\forall z(y+z=x)$ 假

(3), (4)说明∀与∃不能随意交换

(5) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$

$\exists x(x+x=x\cdot x)$ 真

例11 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解释1: D_1=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是质数， 真

解释2: D_2=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数， 假

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x, y))$

解释1: D_1=Z，$F(x)$:x是正数，$G(x)$: x是负数，
$H(x, y)$:$x>y$ 真

解释2: D_2=Z，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数，
$H(x, y)$:$x>y$ 假

例12 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

$(A\rightarrow B)\wedge A\rightarrow B$的代换实例

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$

设I是任意的一个解释, 对每一个$x\in D_I$,

$F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x))$恒为真

第四章主要内容：

- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言$\mathscr{L}$(项、原子公式、合式公式)
- 公式的解释
- 公式的类型