2024-2025 学年第一学期期末考试 B 卷参考答案

一、【学解】

1.p→(p∨q∨r)

真值表：

p	q	r	p∨q∨r	p→(p∨q∨r)
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

公式类型：

永真式。

解析：无论命题变元 p, q, r 取何真值，蕴含式的后件 p∨q∨r 在 p=1 时恒为 1，在 p=0 时前件为 0，蕴含式恒为 1，故整个公式始终为真。

2.(p→¬p)→¬q

真值表：

p	q	¬p	p→¬p	¬q	(p→¬p)→¬q
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1

公式类型：

可满足式。

解析：当 p=0, q=1 时公式为 0，其他情况为 1，即公式存在为真和为假的情况，故为可满足式。

3.¬(q→r)∧r

真值表：

q	r	q→r	¬(q→r)	¬(q→r)∧r
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

公式类型:

永假式。

解析：无论 q, r 取何真值，合取式为 0，故公式始终为假。

【考点延伸】《学霸笔记》专题一 命题与逻辑, 1.2 命题公式。本题考察了通过构建真值表来判断命题公式的类型（永真式、永假式、可满足式）。

二、

1.$\neg(r\rightarrow p)\wedge r\wedge\neg p$

【正解】

主析取范式: $(\neg p\wedge r)$(或 m_1)

主合取范式: $(\neg p\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee r)\wedge(p\vee r)$ (或 $M_0\wedge M_2\wedge M_3$)

【学解】

真值表:

p	r	r→p	¬(r→p)	¬(r→p)∧r∧¬p
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

公式等价于 $r\wedge\neg p$(因 $\neg(r\rightarrow p)=r\wedge\neg p$,再合取 r 和 ¬p 得原式)。

真值表显示仅当 p 假(F)、r 真(T)时公式真(T),其他假(F)。

(1)主析取范式(极小项合取):

极小项对应真赋值: $\neg p\wedge r$(即 p 假 r 真)。

故主析取范式为单一极小项: $\neg p\wedge r$。

(2)主合取范式(极大项析取):

极大项对应假赋值:

(p=T, r=T): 极大项 $\neg p\vee\neg r$(当 p 真 r 真时假)。

(p=T, r=F): 极大项 $\neg p\vee r$(当 p 真 r 假时假)。

(p=F, r=F): 极大项 $p\vee r$(当 p 假 r 假时假)。

主合取范式: $(\neg p\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee r)\wedge(p\vee r)$。

2.$(p\vee q)\wedge r$

【正解】

主析取范式: $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$ (或 $m_3\vee m_5\vee m_7$)

主合取范式: $(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$(或 $M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_4\wedge M_6$)

【学解】

真值表:

p	q	r	p∨q	(p∨q)∧r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T

F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

公式真（T）当且仅当 r 真（T）且 $p\vee q$ 真（T），即 r 真且至少一个 p 或 q 真。

真赋值行: (p=T,q=T,r=T), (p=T,q=F,r=T), (p=F,q=T,r=T)。

（1）主析取范式:

每个真赋值对应一个极小项:

(T,T,T): $p\wedge q\wedge r$

(T,F,T): $p\wedge\neg q\wedge r$

(F,T,T): $\neg p\wedge q\wedge r$

故主析取范式: $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$。

（2）主合取范式:

极大项对应假赋值（共 5 行）:

(T,T,F): 极大项 $\neg p\vee\neg q\vee r$（当 p 真 q 真 r 假时假）。

(T,F,F): 极大项 $\neg p\vee q\vee r$（当 p 真 q 假 r 假时假）。

(F,T,F): 极大项 $p\vee\neg q\vee r$（当 p 假 q 真 r 假时假）。

(F,F,T): 极大项 $p\vee q\vee\neg r$（当 p 假 q 假 r 真时假）。

(F,F,F): 极大项 $p\vee q\vee r$（当 p 假 q 假 r 假时假）。

主合取范式: $(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$。

3.$(p\to q)\wedge(r\to p)$

【正解】

主析取范式（通过等值演算）: $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$(或 $m_0\vee m_2\vee m_6\vee m_7$)

主合取范式（利用主析取范式）: $(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$（或 $M_1\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5$)

【学解】

（1）等值演算求主析取范式:

公式: $(p\to q)\wedge(r\to p)$。

等价变换: $p\to q\equiv\neg p\vee q$， $r\to p\equiv\neg r\vee p$。

原式: $(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)$。

分配律展开:

$(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)=[\neg p\wedge(p\vee\neg r)]\vee[q\wedge(p\vee\neg r)]=(\neg p\wedge p)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(q\wedge p)\vee(q\wedge\neg r)$

$\neg p\wedge p$=false（矛盾），可忽略。

剩余: $(\neg p\wedge\neg r)\vee(p\wedge q)\vee(q\wedge\neg r)$。

但需标准化为极小项（含所有变量）。变量 p, q, r，极小项形式:

$\neg p\wedge\neg r$ 缺 q，拆为 $(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$。

$p\wedge q$ 缺 r，拆为 $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$。

$q\wedge\neg r$ 缺 p，拆为 $(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$。

合并所有极小项（去重）:

$(p\wedge q\wedge r)$, $(p\wedge q\wedge\neg r)$, $(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$, $(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$。
故主析取范式: $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$。
（2）利用主析取范式求主合取范式:
主析取范式包含 4 个极小项，对应真赋值: (T,T,T), (T,T,F), (F,T,F), (F,F,F)。
假赋值（共 4 行）: (T,T,F), (T,F,T), (T,F,F), (F,T,T)（注: (T,T,F) 在真赋值中？不，真赋值是 (T,T,T) 等，假赋值需补全）。
总 8 种赋值，真赋值 4 种，假赋值 4 种: (p=T,q=T,r=F)? 但在主析取范式中 (T,T,F) 是极小项之一，故真。正确假赋值：
未在真赋值的: (T,F,T), (T,F,F), (F,T,T), (F,F,T)。
极大项对应假赋值:
(p=T,q=F,r=T): 极大项 $\neg p\vee q\vee\neg r$（变量真时取否定，假时取原形）。
(p=T,q=F,r=F): 极大项 $\neg p\vee q\vee r$。
(p=F,q=T,r=T): 极大项 $p\vee\neg q\vee\neg r$。
(p=F,q=F,r=T): 极大项 $p\vee q\vee\neg r$。
主合取范式: $(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$。
【考点延伸】《学霸笔记》专题一 命题与逻辑, 1.4 析取范式和合取范式 及 1.5 极大/极小项。本题考察了通过真值表和等值演算法求主析取范式和主合取范式。

三、

1.((p→(q→r)) ∧ (s→p) ∧ q) → (s→r)

【正解】

该公式是 重言式 (永真式)。

【学解】

采用归谬法证明。假设该公式为假。

则前提 ((p→(q→r)) ∧ (s→p) ∧ q) 为真，结论 (s→r) 为假。

（1）从结论 (s→r) 为假，可得：s 为真，r 为假。

（2）从前提为真，可得：

(a) p→(q→r) 为真

(b) s→p 为真

(c) q 为真

（d）由 (b) 和 s 为真，根据推理规则（分离规则），可得 p 为真。

（e）由 (a) 和 p 为真，可得 q→r 为真。

（f）由 (c) q 为真 和 (4) q→r 为真，可得 r 为真。

（g）步骤(5)推得 r 为真，与步骤(1)的 r 为假 产生矛盾。

因此，初始假设不成立，该公式必为真。故为重言式。

2.∀x∀y(F(x)∧G(y)→H(x,y))

【正解】

该公式是 可满足式，但非永真式。

【学解】

（1）证明其非永真式:

要证其非永真，只需构造一个使它为假的解释。

令论域 D = {a, b}。

令 F(x): x=a，G(y): y=b，H(x,y): x=y。

当 x=a, y=b 时，F(a)为真，G(b)为真，所以 F(a)∧G(b)为真。

而 H(a,b) 为假。

因此 F(a)∧G(b)→H(a,b) 为假。

所以 ∀x∀y(F(x)∧G(y)→H(x,y)) 在此解释下为假。故该公式非永真式。

（2）证明其可满足:

要证其可满足，只需构造一个使它为真的解释。

令论域 D = {a}。

令 $F(a), G(a), H(a,a)$ 均为真。

此时 $F(a)\wedge G(a)\rightarrow H(a,a)$ 等价于 $T\wedge T\rightarrow T$，为真。

所以 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 在此解释下为真。故该公式是可满足式。

【考点延伸】 该题第一小问涉及命题逻辑的推理，对应《学霸笔记》专题一 命题与逻辑, 1.6 推理理论。第二小问涉及谓词逻辑的解释，对应 1.7 谓词逻辑。

四、【正解】
1.$A \cap B \cap \neg C = \{a\}$
2.$P(A)-P(B) = \{\{d\}, \{a,d\}\}$
3.$(A \oplus B) \cap C = \{b,d\}$
【学解】
首先，计算 C 的补集 $\neg C = U - C = \{a,b,c,d\} - \{b,d\} = \{a,c\}$。
1.$A \cap B \cap \neg C$:
$A \cap B = \{a,d\} \cap \{a,b,c\} = \{a\}$
$(A \cap B) \cap \neg C = \{a\} \cap \{a,c\} = \{a\}$
2.$P(A)-P(B)$:
A 的幂集 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}\}$。
B 的幂集 $P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$。
$P(A) - P(B)$ 是 $P(A)$ 中不属于 $P(B)$ 的元素的集合。
$\{d\} \notin P(B)$, $\{a,d\} \notin P(B)$。
所以 $P(A) - P(B) = \{\{d\}, \{a,d\}\}$。
3.$(A \oplus B) \cap C$:
$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$
$A-B = \{a,d\} - \{a,b,c\} = \{d\}$
$B-A = \{a,b,c\} - \{a,d\} = \{b,c\}$
$A \oplus B = \{d\} \cup \{b,c\} = \{b,c,d\}$
$(A \oplus B) \cap C = \{b,c,d\} \cap \{b,d\} = \{b,d\}$
【考点延伸】《学霸笔记》专题二 集合与函数。本题涉及集合的基本运算（交集、补集、幂集、对称差），是学习函数与关系的基础。

五、

【正解】

$R1\circ R2 = \{\langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle\}$

$R2\circ R1 = \{\langle c,d\rangle\}$

$R1^2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,d\rangle\}$

$R2^3 = \{\langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,b\rangle\}$

【学解】

（1）$R1\circ R2$:

$\langle a,a\rangle\in R1, \langle a,d\rangle\in R2 \rightarrow \langle a,d\rangle$

$\langle a,b\rangle\in R1, \langle b,c\rangle\in R2 \rightarrow \langle a,c\rangle$

$\langle a,b\rangle\in R1, \langle b,d\rangle\in R2 \rightarrow \langle a,d\rangle$

所以 $R1\circ R2 = \{\langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle\}$。

（2）$R2\circ R1$:

$\langle c,b\rangle\in R2, \langle b,d\rangle\in R1 \rightarrow \langle c,d\rangle$

所以 $R2\circ R1 = \{\langle c,d\rangle\}$。

（3）$R1^2 = R1\circ R1$:

$\langle a,a\rangle\in R1, \langle a,a\rangle\in R1 \rightarrow \langle a,a\rangle$

$\langle a,a\rangle\in R1, \langle a,b\rangle\in R1 \rightarrow \langle a,b\rangle$

$\langle a,b\rangle\in R1, \langle b,d\rangle\in R1 \rightarrow \langle a,d\rangle$

所以 $R1^2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,d\rangle\}$。

（4）$R2^3 = R2^2\circ R2$:

先求 $R2^2 = R2\circ R2$:

$\langle b,c\rangle\in R2, \langle c,b\rangle\in R2 \rightarrow \langle b,b\rangle$

$\langle c,b\rangle\in R2, \langle b,c\rangle\in R2 \rightarrow \langle c,c\rangle$

$\langle c,b\rangle\in R2, \langle b,d\rangle\in R2 \rightarrow \langle c,d\rangle$

所以 $R2^2 = \{\langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$。

再求 $R2^3 = R2^2\circ R2$:

$\langle b,b\rangle\in R2^2, \langle b,c\rangle\in R2 \rightarrow \langle b,c\rangle$

$\langle b,b\rangle\in R2^2, \langle b,d\rangle\in R2 \rightarrow \langle b,d\rangle$

$\langle c,c\rangle\in R2^2, \langle c,b\rangle\in R2 \rightarrow \langle c,b\rangle$

所以 $R2^3 = \{\langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,b\rangle\}$。

【考点延伸】《学霸笔记》专题三 关系, 3.3 复合关系与逆运算。本题考察了关系的复合运算($R_1\circ R_2$)和关系的幂运算(R^2)。

六、

【正解】

R∩S = {<2,4>}

R∪S = {<1,2>, <1,3>, <2,4>, <3,3>, <4,2>}

R-S = {<1,2>, <3,3>}

¬R = {<1,1>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>}

【学解】

（1）R∩S: R 与 S 的交集，即共同的元素。

R∩S = {<2,4>}。

（2）R∪S: R 与 S 的并集，即所有的元素。

R∪S = {<1,2>, <2,4>, <3,3>} ∪ {<1,3>, <2,4>, <4,2>} = {<1,2>, <1,3>, <2,4>, <3,3>, <4,2>}。

（3）R-S: R 与 S 的差集，即在 R 中但不在 S 中的元素。

R-S = {<1,2>, <3,3>}。

（4）¬R: R 的补集，即 U - R = A×A - R。

A×A 共有 4×4=16 个元素。从 A×A 中除去 R 的 3 个元素即可。

¬R = A×A - {<1,2>, <2,4>, <3,3>} = {<1,1>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>}。

【考点延伸】《学霸笔记》专题三 关系, 3.1 关系及其表示。关系作为笛卡尔积的子集，其交、并、差、补等运算遵循集合运算法则。

七、【学解】

1.R 在 A 上对称

充要条件: $R = R^{-1}$, 其中 $R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y>\in R\}$ 是 R 的逆关系。

证明:

(⇒) 假设 R 对称。需证 $R = R^{-1}$。

对任意 $<x,y>\in R$，因为 R 对称，所以 $<y,x>\in R$。根据逆关系定义，$<x,y>\in R^{-1}$。故 $R \subseteq R^{-1}$。

对任意 $<x,y>\in R^{-1}$，根据逆关系定义，$<y,x>\in R$。因为 R 对称，所以 $<x,y>\in R$。故 $R^{-1} \subseteq R$。

因此 $R = R^{-1}$。

(⇐) 假设 $R = R^{-1}$。需证 R 对称。

对任意 $<x,y>\in R$，因为 $R = R^{-1}$，所以 $<x,y>\in R^{-1}$。根据逆关系定义，$<y,x>\in R$。

所以 R 是对称的。

2.R 在 A 上反对称

充要条件: $R \cap R^{-1} \subseteq I_a$, 其中 $I_a = \{<x,x> \mid x\in A\}$ 是 A 上的恒等关系。

证明:

(⇒) 假设 R 反对称。需证 $R \cap R^{-1} \subseteq I_a$。

对任意 $<x,y> \in R \cap R^{-1}$，则 $<x,y>\in R$ 且 $<x,y>\in R^{-1}$。

由 $<x,y>\in R^{-1}$ 可知 $<y,x>\in R$。

现在有 $<x,y>\in R$ 且 $<y,x>\in R$，因为 R 反对称，所以必有 $x=y$。

因此 $<x,y> = <x,x> \in I_a$。故 $R \cap R^{-1} \subseteq I_a$。

(⇐) 假设 $R \cap R^{-1} \subseteq I_a$。需证 R 反对称。

若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,x>\in R$，由 $<y,x>\in R$ 可知 $<x,y>\in R^{-1}$。

因此 $<x,y>\in R \cap R^{-1}$。根据假设，$<x,y>\in I_a$。

由恒等关系定义，必有 $x=y$。

所以 R 是反对称的。

3.R 在 A 上传递

充要条件: $R\circ R \subseteq R$。

证明:

(⇒) 假设 R 传递。需证 $R\circ R \subseteq R$。

对任意 $<x,z> \in R\circ R$，根据复合定义，存在 $y\in A$ 使得 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in R$。

因为 R 传递，所以 $<x,z>\in R$。

故 $R\circ R \subseteq R$。

(⇐) 假设 $R\circ R \subseteq R$。需证 R 传递。

若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in R$，根据复合定义，$<x,z>\in R\circ R$。

根据假设 $R\circ R \subseteq R$，所以 $<x,z>\in R$。

所以 R 是传递的。

【考点延伸】《学霸笔记》专题三 关系, 3.2 关系的性质。本题考察了对称、反对称、传递三个关系性质的充要条件及其证明。

八，【正解】

$F \circ G$ 是函数。

定义域: $Dom(F \circ G) = \{x \mid x \in Dom(G) \land G(x) \in Dom(F)\}$。在常见情况下，若 $G: A \to B, F: B \to C$，则 $Dom(F \circ G) = A$。

计算表达式: $(F \circ G)(x) = F(G(x))$。

【学解】

证明 $F \circ G$ 是函数:

一个关系是函数的充要条件是，其定义域中的每个元素都恰好对应唯一的一个值。设 G 是一个函数，F 是一个函数，复合关系 $F \circ G$ 定义为 $\{\langle x,z\rangle \mid \exists y, \langle x,y\rangle \in G \land \langle y,z\rangle \in F\}$。我们需要证明 $F \circ G$ 满足函数的单值性。

证明:

假设 $\langle x, z_1\rangle \in F \circ G$ 且 $\langle x, z_2\rangle \in F \circ G$。我们需要证明 $z_1 = z_2$。

（1）由 $\langle x, z_1\rangle \in F \circ G$，可知存在 y_1 使得 $\langle x, y_1\rangle \in G$ 且 $\langle y_1, z_1\rangle \in F$。

（2）由 $\langle x, z_2\rangle \in F \circ G$，可知存在 y_2 使得 $\langle x, y_2\rangle \in G$ 且 $\langle y_2, z_2\rangle \in F$。

（3）因为 G 是一个函数，且 $\langle x, y_1\rangle \in G, \langle x, y_2\rangle \in G$，所以必有 $y_1 = y_2$。令 $y = y_1 = y_2$。

（4）现在我们有 $\langle y, z_1\rangle \in F$ 且 $\langle y, z_2\rangle \in F$。

（5）因为 F 也是一个函数，所以必有 $z_1 = z_2$。

因此，$F \circ G$ 满足函数的单值性，所以 $F \circ G$ 是一个函数。

定义域与计算表达式:

定义域: 根据复合函数的定义，一个元素 x 要在 $F \circ G$ 的定义域中，必须首先在 G 的定义域中，并且其通过 G 映射后的值 $G(x)$ 必须在 F 的定义域中。所以，$Dom(F \circ G) = \{x \mid x \in Dom(G) \land G(x) \in Dom(F)\}$。

计算表达式: 对于任意 $x \in Dom(F \circ G)$，$F \circ G(x)$ 的值被定义为先将 G 应用于 x，再将 F 应用于 $G(x)$ 的结果。即 $(F \circ G)(x) = F(G(x))$。

【考点延伸】《学霸笔记》专题二 集合与函数, 2.3 函数的合成。本题考察了复合函数的定义、定义域以及证明复合关系是否为函数。