Лабораторная работа №3

Нелинейные математические модели колебательных явлений

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
март 2022
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Математический маятник под действием силы тяжести без учета сопротивления среды

Концептуальная постановка задачи

- Объектом исследования является физическое тело массы m, которое подвешено на невесомом и нерастяжимом стержне длины l к неподвижной опоре. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня, поэтому принимаем его за материальную точку.
- Тело качается в фиксированной плоскости. Обозначим через $\alpha(t)$ угол отклонения стержня от вертикального положения равновесия $\alpha(t) = 0$. Будем считать, что $\alpha(t) > 0$ при отклонении стержня против часовой стрелки.
- Тело находится под действием **силы тяжести** $\overline{F} = m\,\overline{g}$; силой сопротивления среды пренебрегаем. Допущение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени.

In[1]:=
```
g = QuantityMagnitude@
  WolframAlpha["Gravitational acceleration value", {{"Value", 1}, "QuantityData"}]
```

Out[1]=
```
9.807
```

Принимая во внимание, что в момент времени $t = 0$ стержень отклонили на угол α_0 и телу сообщили скорость ω_0, требуется определить угол отклонения стержня $\alpha(t)$ как функцию времени.

Математическая модель

Математическая модель представляет собой задачу Коши для нелинейного однородного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\alpha(t)) = 0, \\ &\alpha(0) = \alpha_0, \\ &\frac{d\alpha(0)}{dt} = \omega_0. \end{aligned} \qquad (1)$$

В случае малых колебаний маятника математическая модель (1) упрощается за счет допущения, что $\sin(\alpha) \approx \alpha$ при $\alpha << 1$ и сводится к модели гармонического осциллятора

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha(t) = 0, \\ &\alpha(0) = \alpha_0, \\ &\frac{d\alpha(0)}{dt} = \omega_0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Задание 1.1 (Фазовый портрет)

На основании анализа уравнения фазовых траекторий **сформулируйте выводы**:

1. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 маятник находится в положении равновесия;
2. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 маятник совершает колебательные движения (замкнутые фазовые траектории);
3. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 маятник совершает вращательные движения (волнистые фазовые траектории);
4. при каких ограничениях на начальные данные α_0 и ω_0 фазовая траектория является сепаратрисой, т.е. разделяет колебательное и вращательное движение маятника.

Изобразите фазовые траектории динамической системы, соответствующей математической модели маятника, на фазовой плоскости переменных $\alpha,\ \omega := \frac{d\alpha(t)}{dt}$. **Выделите цветом** в фазовой плоскости четыре траектории, соответствующие разным типам движения маятника.

Задание 1.2 (Динамическая визуализация)

Осуществите динамическую визуализацию поведения маятника для интерактивного задания параметров модели $l > 0$, $g > 0$, α_0 и ω_0 с учетом трех режимов его движения: стационарный режим, колебательные движения, вращательные движения.

В интерактивном объекте **укажите** тип движения маятника на основании выводов из Задания 1.1.

Задание 1.3 (Период колебаний)

Постройте зависимость периода колебаний маятника T от начального угла α_0 вида $T = T(\alpha_0) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\alpha_0}\frac{1}{\sqrt{\cos(\alpha)-\cos(\alpha_0)}}\,d\alpha$ в предположении, что начальная скорость равна нулю $\omega_0 = 0$. Найти значение периода можно из закона сохранения энергии, см. [1, стр. 44-45]. Альтетрнативный способ построения зависимости:

- умножить дифференциальное уравнения из математической модели (1) на $\alpha'(t)$;
- проинтегрировать полученное уравнения по времени от момента времени $t = 0$, что соответствует положению $\alpha = \alpha_0$ и начальной скорости $\omega_0 = 0$, до момента времени $t = T/4$, что соответствует $\alpha = 0$.

Зависимость периода колебаний от начального угла $T = T(\alpha_0)$ является основной причиной того, что маятниковые часы не точные, так как тело в крайнем положении отклоняется на угол, отличный от α_0, см. [1, стр. 44-45].

Аналитическая зависимость периода колебаний маятника от начального угла может быть найдена также в базе знаний Wolfram Alpha

```
In[2]:= First@FormulaData[{"Pendulum", "Standard"}]
```

Out[2]= $T == 4\,\mathrm{EllipticK}\left[\mathrm{Sin}\left[\frac{\theta_0}{2}\right]^2\right]\sqrt{\frac{l}{g}}$

В предположении о малых колебаниях маятника и без учета сопротивления среды период колебаний маятника T не будет зависеть от начальных данных. На основании математической модели (2) **постройте зависимость** периода колебаний T от параметров модели l и g. **Определите** длину стержня l для создания секундного маятника с периодом колебания $T = 2\,c$.

Задание 2. Модель двухвидового взаимодействия "хищник-жертва"

Система уравнений Лотки-Вольтерра задает математическую модель взаимодействия популяции жертв с численностью $N = N(t) \geq 0$ и популяции хищников с численностью $M = M(t) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \alpha N - c N M, \\
\frac{dM}{dt} &= -\beta M + d N M, \\
N(t_0) &= N_0, \\
M(t_0) &= M_0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$\alpha = \text{const} > 0$ -- коэффициент прироста жертв при отсутствии хищников в условиях неограниченности ресурса для питания;

$c = \text{const} > 0$ -- коэффициент пропорциональности при взаимодействии жертв с хищниками, соответствующий уменьшению жертв;

$\beta = \text{const} > 0$ -- коэффициент смертности хищников при отсутствии жертв;

$d = \text{const} > 0$ -- коэффициент пропорциональности при взаимодействии жертв с хищниками, соответствующий увеличению жертв.

Задание 2.1 (Колебательное поведение)

Проиллюстрируйте существование колебательного поведения системы "хищник-жертва" в окрестности нетривиального положения равновесия $N^* = \frac{\beta}{d}$, $M^* = \frac{\alpha}{c}$ по решению математической модели (3) и по фазовому портрету динамической системы.

Решение необходимо построить численно, например, с помощью функции **NDSolve**.

Продемонстрируйте на фазовом портрете, что положение равновесия $N^* = \frac{\beta}{d}$, $M^* = \frac{\alpha}{c}$ является центром: окрестность положения равновесия (N^*, M^*) заполнена непересекающимися замкнутыми фазовыми траекториями, окружающими (N^*, M^*).

Задание 2.2 (Неявная зависимость между $N(t)$ и $M(t)$)

Постройте дифференциальное уравнение фазовых траекторий для математической модели (3) и, решая его, найдите неявную зависимость между численностями хищников и жертв в виде

$$-d\,N[t] + \log\left(N[t]^{\beta}\right) - c\,M(t) + \ln\left(M(t)^{\alpha}\right) = C,$$

где значение неизвестной константы C определяется из начальных условий.

Задание 2.3 (Структурная неустойчивость модели "хищник-жертва")

Проиллюстрируйте структурную неустойчивость математической модели "хищник-жертва" (3).

Для этого **измените** математическую модель (3) добавлением к правым частям произвольных слагаемых вида $\epsilon f(N, M)$, где $\epsilon << 1$. **Продемонстрируйте** по фазовому портрету и по поведению решения для измененной математической модели, что изменяется качественное поведение системы уравнений Лотка-Вольтерра в окрестности нетривиального положения равновесия (N^*, M^*), т.е. что центр изменяется на другой тип особой точки.

Для описания реальных процессов структурно-неустойчивые модели использовать нельзя!

Литература

[1] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. -- М.: Наука, 1987.

[2] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. -- М.: Физматлит, 1959.