

# Лабораторная работа №1

1. Дайте определения следующим понятиям: моделирование, модель, математическое моделирование, математическая модель

**Модель** – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал (система, процесс, явление), сохраняя некоторые его свойства, важные для данного исследования

**Моделирование** – это процесс построения модели и проведения исследований модели с целью изучить некоторые свойства объекта-оригинала (объекта моделирования)

**Математическое моделирование** – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта моделирования осуществляется на языке математики в виде математической модели, а исследование модели проводится с использованием математических методов

**Математическая модель** – оператор  $A: \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$ , позволяющий по значениям входных данных  $X \in \Omega_X$  объекта моделирования установить значения выходных данных  $Y \in \Omega_Y$

Элементами множеств  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.)

Оператором  $A$  может быть

- функция
- отображение в виде системы уравнений
- вероятностное описание
- совокупность правил

2. Сформулируйте закон прироста величины биологической популяции, приводящий к модели экспоненциального роста, и составьте дифференциальное уравнение размножения особей.

Численность популяции рассматривается как непрерывная функция времени  $N = N(t)$ . В силу того, что популяция достаточно велика, игнорируем случайные различия между отдельными особями. Полагаем, что каждая особь в популяции имеет равные шансы родить и умереть в течение определенного промежутка времени.

Полагаем, что рождаемость и смертность непрерывны во времени и заданы коэффициентами рождаемости  $\alpha(t) \geq 0$  и смертности  $\beta(t) \geq 0$  на одну особь в единицу времени.

В основу модели Мальтуса положено утверждение, что скорость изменения численности популяции  $N'(t)$  пропорциональна ее текущей

численности  $N(t)$  в момент времени  $t$ , с коэффициентом пропорциональности, равным разности коэффициентов рождаемости и смертности

$$N'(t) = (\alpha(t) - \beta(t)) * N(t)$$

$$N(t_0) = N_0$$

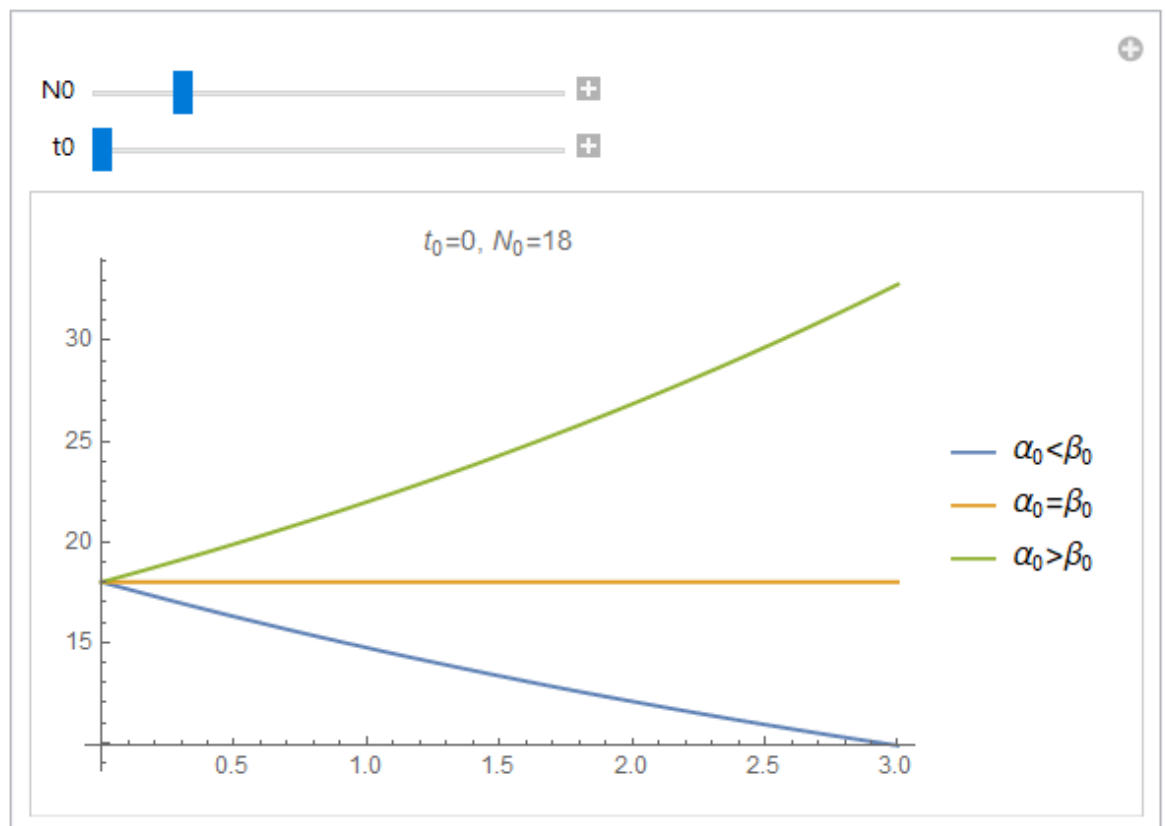
3. Получите аналитическое решение модели экспоненциального роста. Постройте интегральные кривые при фиксированном коэффициенте воспроизводства и различных значениях начальных данных.

### Задание 1.1 (аналитическое решение)

`sol = DSolveValue[{NN'[t] == (α[t] - β[t]) NN[t], NN[t0] == N[t0]}, NN[t], t]`  
 [решение дифференциального уравнения] [численное приближение]

$$= e^{\int_1^t (\alpha[K[1]] - \beta[K[1]]) dK[1]} - \int_1^{t0} (\alpha[K[1]] - \beta[K[1]]) dK[1] t0$$

$$N(t) = N_0 e^{\int_{t_0}^t (\alpha(\tau) - \beta(\tau)) d\tau}$$



4. Проанализируйте зависимость решения модели Мальтуса от соотношения коэффициентов рождаемости и смертности популяции. Сделайте вывод о характере устойчивости равновесного состояния системы, когда коэффициенты рождаемости и смертности совпадают.

Функция численности населения при  $t \rightarrow +\infty$ :

- убывает при  $\alpha_0 < \beta_0$ ;
- принимает постоянное начальное значение  $N_0$  при  $\alpha_0 = \beta_0$ ;
- возрастает при  $\alpha_0 > \beta_0$ .

Не устойчиво.

5. Сформулируйте закон прироста величины биологической популяции, приводящий к логистической модели, и составьте дифференциальное уравнение размножения особей.

Логистическая модель или модель Ферхюльста принимает во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. В частности, считается, что существует равновесная численность популяции  $N_p = \text{const} > 0$ , которую может обеспечить окружающая среда, т.е.  $N(t) \rightarrow N_p$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это свойство называется эффектом насыщения численности населения.

При моделировании полагается также, что скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности, умноженной (в отличие от модели Мальтуса) на величину ее отклонения от равновесного значения  $N_p$

$$N'(t) = N(t) k \left( 1 - \frac{N(t)}{N_p} \right), \quad k = \text{const} > 0.$$

Логистической моделью называется задача Коши для уравнения (3) при заданном начальном условии в момент времени  $t = t_0$

$$N'(t) = N(t) k \left( 1 - \frac{N(t)}{N_p} \right),$$

$$N(t_0) = N_0.$$

Существенным недостатком математической модели является тот факт, что равновесная численность популяции  $N_p$  вводится в качестве известного параметра, в

то время как нахождение этой величины нередко является основной задачей исследования.

Современные прогнозы показывают, что численность человечества в обозримом будущем стабилизируется на уровне  $N_p = 12 \cdot 10^9$  человек. Такой же прогноз дается ООН.

6. Получите аналитическое решение логистической модели, описывающей динамику биологической популяции, двумя способами: 1) методом приведения к линейному ДУ первого порядка [6, с.52] с последующим его решением методом вариации произвольной постоянной [6, с.46]; 2) методом разделения переменных [5, с.61], [1, с. 24].

$$N' = N(t) k \left( 1 - \frac{N(t)}{N_p} \right)$$

$$N(t_0) = N_0$$

$$N' = kN - \frac{k}{N_p} N^2$$

$$N' - kN + \frac{k}{N_p} N^2 = 0$$

Метод Бернулли :

Разделим на  $N^2$  :

$$\frac{N'}{N^2} - \frac{k}{N} + \frac{k}{N_p} = 0$$

Сделаем следующую замену :

$$z = N^{-1}, \quad z' = -\frac{N'}{N^2}$$

Тогда уравнение (1) переписется в следующем виде :

$$-z' - kz + \frac{k}{N_p} = 0$$

$$z' + kz - \frac{k}{N_p} = 0 \quad \text{-- линейное неоднородное ДУ}$$

Решение :  $z(t) = u(t) v(t)$  :

$$u v' + v u' + k u v - \frac{k}{N_p} = 0$$

$$u v' + v (u' + k u) - \frac{k}{N_p} = 0$$

$$u' + k u = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -ku$$

$$\frac{du}{u} = -k dt$$

Значит,

$$\ln(|u|) = -kt + C^*$$

$$u = e^{-kt}$$

Подставим в ЛНДУ :

$$e^{-kt} v' = \frac{k}{N_p}$$

$$v' = \frac{k}{N_p} e^{kt}$$

$$v = \int \frac{k e^{kt}}{N_p} = \frac{1}{N_p} e^{kt} + C$$

Итого общее решение :

$$z = uv = e^{-kt} \left( \frac{1}{N_p} e^{kt} + C \right) = \frac{1}{N_p} + C e^{-kt} = \frac{1}{N}$$

Подставим начальное условие :

$$\frac{1}{N_p} + C e^{-kt_0} = \frac{1}{N_0}$$

$$C e^{-kt_0} = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_p}$$

$$C = \left( \frac{N_p - N_0}{N_0 N_p} \right) e^{kt_0}$$

$$N = \frac{1}{\frac{1}{N_p} + C e^{-kt}} = \frac{1}{\frac{1}{N_p} + \left( \frac{N_p - N_0}{N_0 N_p} \right) e^{k(t_0 - t)}} = \frac{N_p}{1 + N_p \left( \frac{N_p - N_0}{N_0 N_p} \right) e^{k(t_0 - t)}} = \frac{N_p}{1 + N_p e^{k(t_0 - t)} \left( \frac{N_p - N_0}{N_0 N_p} \right)} =$$

$$\frac{N_p}{1 + \frac{N_p - N_0}{N_0} e^{k(t_0 - t)}} = \frac{N_0 N_p}{N_0 + N_p e^{k(t_0 - t)} - N_0 e^{k(t_0 - t)}} = \frac{N_0 N_p}{N_0 (1 - e^{k(t_0 - t)}) + N_p e^{k(t_0 - t)}} = \frac{N_0 N_p e^{k(t - t_0)}}{N_p + N_0 (e^{k(t - t_0)} - 1)} = \frac{N_0 N_p e^{kt} e^{-kt_0}}{N_p + N_0 (e^{k(t - t_0)} - 1)} = \frac{N_0 N_p e^{kt}}{N_p e^{kt_0} + e^{kt_0} N_0 (e^{k(t - t_0)} - 1)} = \frac{N_0 N_p e^{kt}}{N_p e^{kt_0} + N_0 e^{kt} - e^{kt_0} N_0}$$

7. Проанализируйте поведение решения логистической модели в зависимости от времени и «емкости»  $N_p$  биологической популяции. Сделайте вывод о характере устойчивости положения равновесия, когда численность популяции совпадает с величиной «емкости» ее среды обитания.

а у меня так (у меня тоже так):

- $N_0 > N_p$ : монотонно убывает к  $N = N_p$ ;
- $N_0 = N_p$ : постоянное значение  $N = N_p$ ;
- $N_0 < N_p$ : монотонно возрастает к  $N = N_p$ .

Положение равновесия будет в том случае , когда  $N = N_p$ . Модель является устойчивой, т.к. малое отклонение от положения устойчивого равновесия оставляет систему вблизи равновесия при любых  $t$

8. Сформулируйте закон прироста величины биологической популяции, приводящий к модели роста с квадратичными нелинейностями, и составьте дифференциальное уравнение размножения особей.

Полагаем, что коэффициент рождаемости пропорционален численности населения (например, потому что особи популяции заинтересованы в ее росте)  $\alpha(N) = \alpha_0 N$ ,  $\alpha_0 = \text{const} > 0$ , а коэффициент смертности постоянный  $\beta(t) = \beta_0 = \text{const} > 0$ . Тогда уравнение Мальтуса (1) преобразуется к виду

$$N'(t) = N(t)(\alpha_0 N(t) - \beta_0) \quad (5)$$

с квадратичной нелинейностью в правой части.

Математической моделью называется задача Коши для уравнения (5) при заданном начальном условии в момент времени  $t=t_0$

$$N'(t) = N(t)(\alpha_0 N(t) - \beta_0),$$

$$N(t_0) = N_0.$$

9. Получите аналитическое решение нелинейной модели роста, описывающей динамику биологической популяции, двумя способами: 1) методом приведения к линейному ДУ первого порядка с последующим его решением методом вариации произвольной постоянной; 2) методом разделения переменных. При построении решения отдельно рассмотрите случаи  $N_0 < N_{кр}$ ,  $N_{кр} = \beta_0/\alpha_0$ . При  $N_0 > N_{кр}$  решение строится только на отрезке  $[t_0, t^*]$ , выразите явно зависимость  $t^*$  от начальных данных [1, с. 53-54].



## 1 Метод вариации произвольных постоянных

$$N' = N(\alpha N - \beta), N(t_0) = N_0$$

Сделаем замену

$$z = \frac{1}{N}, \quad z' = -\frac{N'}{N^2}$$

Получаем линейное уравнение

$$z' - \beta z = -\alpha$$

Решение соответствующего однородного

$$z = C_1 \cdot e^{\beta t}$$

Решение неоднородного будем искать в виде

$$z = C_1(t) \cdot e^{\beta t}$$

$$z' = C_1'(t) \cdot e^{\beta t} + C_1(t) \cdot \beta e^{\beta t}$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$C_1'(t) \cdot e^{\beta t} = -\alpha$$

Тогда

$$C_1(t) = \int -\alpha \cdot e^{-\beta t} dt = \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-\beta t} + C$$

$$z = \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-\beta t} + C \right) \cdot e^{\beta t} = \frac{1}{N}$$

$$N = \frac{\beta}{C \cdot \beta e^{\beta t} + \alpha}$$

Используя условие Коши, находим постоянную  $C$

$$N_0 = \frac{\beta}{C \cdot \beta e^{\beta t_0} + \alpha} \Rightarrow C = \frac{\beta - \alpha N_0}{\beta N_0 \cdot e^{\beta t_0}}$$

Тогда частное решение исходного уравнения имеет вид

$$N = \frac{\beta N_0 \cdot e^{\beta t_0}}{(\beta - \alpha N_0) \cdot e^{\beta t} + \alpha N_0 \cdot e^{\beta t_0}}$$

## 2 Метод разделения переменных

$$N' = N(\alpha N - \beta), N(t_0) = N_0$$

$$\frac{dN}{N(\alpha N - \beta)} = dt$$

Заметим, что

$$\frac{1}{N(\alpha N - \beta)} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\alpha}{\alpha N - \beta} - \frac{1}{N} \right)$$

Тогда

$$\frac{1}{\beta} \int \left( \frac{\alpha}{\alpha N - \beta} - \frac{1}{N} \right) dN = t + C$$

$$\ln |\alpha N - \beta| - \ln N = \ln \frac{|\alpha N - \beta|}{N} = \beta(t + C)$$

$$\alpha - \frac{\beta}{N} = C_1 \cdot e^{\beta t}$$

$$N = \frac{\beta}{\alpha - C_1 \cdot e^{\beta t}}$$

Используя условие Коши, находим постоянную  $C_1$

$$N_0 = \frac{\beta}{\alpha - C_1 \cdot e^{\beta t_0}} \Rightarrow C_1 = \frac{\beta - \alpha N_0}{N_0 \cdot e^{\beta t}}$$

Тогда частное решение исходного уравнения имеет вид

$$N = \frac{\beta N_0 \cdot e^{\beta t_0}}{\alpha N_0 \cdot e^{\beta t_0} + (\beta - \alpha N_0) \cdot e^{\beta t}}$$

Рассмотрим три случая

1)  $\beta = \alpha N_0$ , тогда

$$N(t) = \frac{\beta}{\alpha} = const$$

2)  $\beta < \alpha N_0$ , тогда существует  $t^*$  такое, что  $N(t) \rightarrow +\infty$ , т.е. знаменатель дроби стремится к нулю

$$\alpha N_0 + (\beta - \alpha N_0) \cdot e^{\beta(t^* - t_0)} \rightarrow 0$$

$$e^{\beta(t^* - t_0)} \rightarrow \frac{\alpha N_0}{\alpha N_0 - \beta}$$

$$t^* \rightarrow \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{\alpha N_0}{\alpha N_0 - \beta} \right] + t_0$$

3)  $\beta > \alpha N_0$ , тогда числитель и знаменатель положительны, и  $N(t) \rightarrow 0$ , при  $t \rightarrow +\infty$

10. Проведите анализ нелинейной модели роста. На основе полученного аналитического решения и его графической интерпретации сформулируйте выводы о поведении решения указанной модели при  $t$  для случаев  $N_0 < N_{кр}$ ,  $N_{кр} = \beta_0/\alpha_0$ .

$$N' = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \Leftrightarrow N' + \beta_0 N - \alpha_0 N^2 = 0 \Leftrightarrow N' - k N + \frac{k}{N_p} N^2 = 0$$

$$N(t) = \frac{N_0 N_p e^{k(t-t_0)}}{N_p + N_0 (e^{k(t-t_0)} - 1)}$$

$$k = -\beta_0;$$

$$-\alpha_0 = \frac{-\beta_0}{N_p} \Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{\beta_0}{N_p} \Rightarrow N_p = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

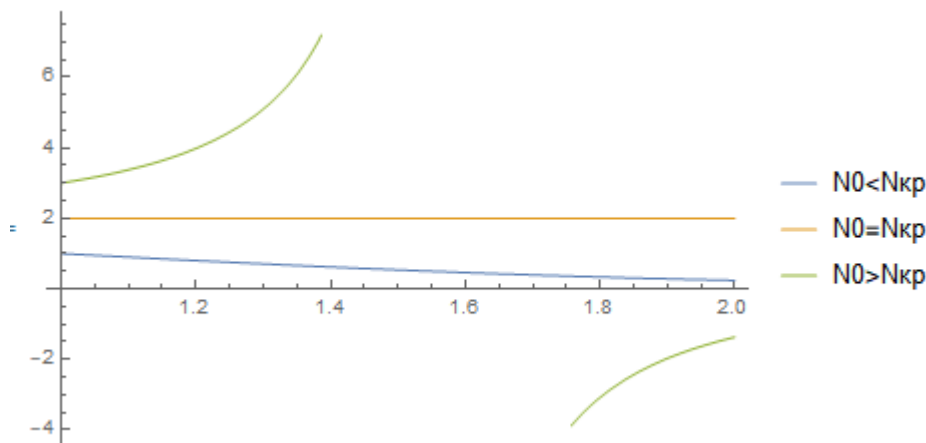
Далее, по аналогии с предыдущими рассуждениями выпишем решение этого уравнения, поменяв коэффициенты:

$$N(t) = \frac{N_0 \beta_0}{\beta_0 e^{\beta_0(t-t_0)} + \alpha_0 N_0 (1 - e^{\beta_0(t-t_0)})}$$

Найдем  $t^*$ , при котором  $N[t] \rightarrow \infty (t \rightarrow t^*)$ :

$$\beta_0 + \alpha_0 N_0 (e^{-\beta_0(t^*-t_0)} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{-\beta_0(t^*-t_0)} =$$

$$\frac{\alpha_0 N_0 - \beta_0}{\alpha_0 N_0} \Leftrightarrow -\beta_0 t^* - \beta_0 t_0 = \ln \left( \frac{\alpha_0 N_0 - \beta_0}{\alpha_0 N_0} \right) \Leftrightarrow \beta_0 t^* + \beta_0 t_0 = \ln \left( \frac{\alpha_0 N_0}{\alpha_0 N_0 - \beta_0} \right) \Rightarrow t^* = \frac{1}{\beta_0} \ln \left( \frac{\alpha_0 N_0}{\alpha_0 N_0 - \beta_0} \right) - t_0$$



—  $N_0 < N_{кр}$ : убывает;

—  $N_0 = N_{кр}$ : постоянное значение  $N_0$ ;

—  $N_0 > N_{кр}$ : возрастает

11. Дайте определения следующим понятиям: динамическая система, математическая модель динамической системы, фазовое пространство, фазовый портрет, фазовая траектория, изображающая (фазовая) точка динамической системы, особая точка дифференциального уравнения (точка покоя, положение равновесия).

### Математическая модель динамической системы:

введены параметры (*координаты*), характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор  $\varphi_t$ , позволяющий установить изменение координат во времени.

**Динамическая система** — математическая модель некоторого объекта, процесса или явления, которые могут быть представлены как система, для которой описаны некоторые состояния. Тогда динамическая система описывает поведение некоторого процесса как последовательность переходов из одного состояния в другое.

Динамическая система первого порядка определяется автономным (правая часть  $f$  не зависит явно от времени  $t$ ) дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

если все решения  $x(t)$  продолжимы для  $t \in \mathbb{R}$

**Динамическая система второго порядка** определяется системой двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2).$$

В частности, к динамической системе второго порядка сводится уравнение второго порядка  $\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_1\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right)$ , введением замены  $\frac{dx_1}{dt} = x_2$

**Динамическая система  $n$ -го порядка** определяется системой из  $n$  автономных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

**Фазовое пространство**  $Ox_1 \dots x_n$  используется для геометрического представления совокупности всех возможных состояний  $x \in \mathbb{R}^n$  ДС

Для ДС 1-го порядка фазовым пространством является одномерное пространство  $Ox$   
 Для ДС 2-го порядка фазовым пространством является плоскость  $Ox_1x_2$

**Фазовый портрет** – чертеж фазовых траекторий в фазовом пространстве с указанием направления движения по траектории с возрастанием времени  $t$

**Фазовой траекторией** решения динамической системы  $x(t)$  называется множество точек  $t, x(t)$  в фазовом пространстве  $Ox_1 \dots x_n$ . Другими словами, фазовая траектория – это проекция решения  $x(t)$  на фазовое пространство

Точка пространства, соответствующая состоянию системы, называется «**изображающей**» или «**представляющей**» для него

**Особая точка дифференциального уравнения** — точка, в которой одновременно обращаются в нуль и числитель и знаменатель правой части дифференциального уравнения

12. Опишите процесс представления движения на фазовой прямой для динамических систем первого порядка [4, с. 247]. В качестве демонстрационных примеров используйте модели динамики популяции.

Предположим, что  $f(x)$  — функция, аналитическая на всей прямой  $x$ . Если уравнение  $f(x)=0$  не имеет действительных корней, то все движения имеют одну и ту же траекторию, совпадающую со всей фазовой прямой. Если же  $f(x)$  имеет действительные корни  $x=x_1, x=x_2, x=x_3, \dots, x=x_k$ , то могут быть траектории различных типов:

- а) состояния равновесия;
- б) интервалы между двумя корнями;
- в) интервалы между одним из корней и бесконечностью (полу-прямые).

На каждой траектории движение происходит в какую-нибудь определенную сторону, так как  $f(x)$  не меняет знака на траектории. Если  $f(x) > 0$ , то изображающая точка движется вправо; если  $f(x) < 0$ ,

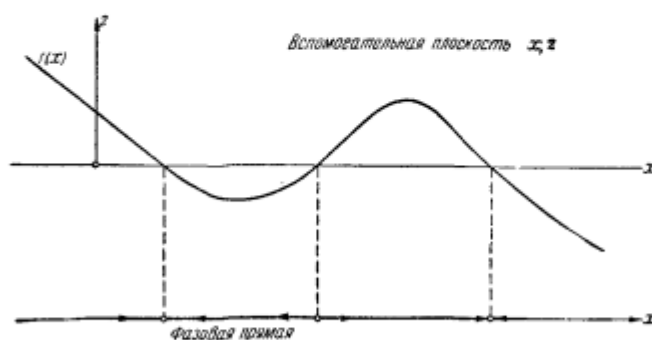


Рис. 161.

то изображающая точка движется влево; точки, где  $f(x)=0$ , как мы уже говорили, соответствуют состояниям равновесия. Зная вид кривой  $z=f(x)$  и пользуясь этими соображениями, можно разбить фазовую прямую на траектории и указать направление движения изо-

бразжающей точки по траекториям<sup>1)</sup>. Пример такого построения приведен на рис. 161. Разбитая на траектории фазовая прямая дает наглядное отображение возможных движений рассматриваемой динамической системы, описываемой одним дифференциальным уравнением первого порядка. Очевидно, что основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия и их устойчивость. Зная состояния равновесия и их устойчивость, мы можем нарисовать себе качественную картину возможных движений. В частности, отсюда сразу видно, что в случае аналитичности  $f(x)$  на всей прямой в системе невозможны периодические движения. Поведение интегральных кривых на плоскости  $t, x$  можно установить, если известен характер движений изображающей точки на фазовой прямой. Рассмотрим плоскость  $t, x$ , причем фазовую прямую совместим с осью  $x$ . Пусть изображающая точка движется по фазовой прямой. Построим на плоскости  $t, x$  точку с абсциссой  $t$  и с ординатой, равной смещению изображающей точки по оси  $x$  в данный момент  $t$ . Абсцисса этой точки есть время и поэтому меняется; ордината, вообще говоря, тоже меняется, так как изображающая точка

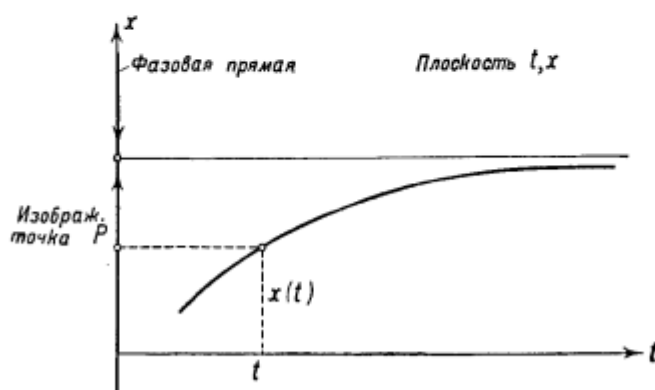


Рис. 162.

двигается. Следовательно, точка будет двигаться на плоскости  $t, x$ , описывая какую-то кривую. Эта кривая и будет интегральной кривой нашего уравнения (рис. 162).

13. Опишите процесс исследования устойчивости состояния равновесия для динамических систем первого порядка [4, с. 247 – 250]. В качестве демонстрационных примеров используйте модели динамики популяции.

#### § 4. Устойчивость состояний равновесия

В свое время мы дали уже определение устойчивости состояния равновесия, следуя Ляпунову. Посмотрим, как выглядит это определение для рассматриваемого случая и каким образом возможно

<sup>1)</sup> Стрелками на фазовой прямой указывается направление движения изображающей точки.

аналитически распознавать устойчивость или неустойчивость состояний равновесия.

В нашем случае состояние равновесия  $x = x_0$  будет устойчиво по Ляпунову, если, задав сколь угодно малое положительное  $\varepsilon$ , можно всегда найти такое  $\delta$ , что

$$|x(t) - x_0| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leq t < +\infty, \quad \text{если} \quad |x(t_0) - x_0| < \delta.$$

Ляпунов дает аналитический рецепт исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим сперва самый рецепт, а затем дадим его обоснование.

Пусть нас интересует устойчивость состояния равновесия  $x = x_0$ . Так как мы подразумеваем при этом устойчивость по Ляпунову, то мы интересуемся малыми отклонениями от состояния равновесия. Положим  $x = x_0 + \xi$ ; тогда  $\xi$  — отклонение от состояния равновесия. По нашему предположению  $f(x)$  — аналитическая функция. Переходя от переменной  $x$  к переменной  $\xi$  в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (4.1)$$

получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{1 \cdot 2} f''(x_0)\xi^2 + \dots$$

или, так как  $f(x_0) = 0$ , то уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots, \quad (4.3)$$

где

$$a_1 = f'(x_0); \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \quad \text{и т. д.}$$

Данный Ляпуновым рецепт исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнении (4.3) нелинейные члены. Мы получим тогда *линейное* уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi, \quad (4.4)$$

которое носит название *линеаризованного уравнения* или *уравнения первого приближения*. Интеграл этого уравнения находится сразу:

$$\xi = ce^{\lambda t}, \quad \text{где} \quad \lambda = a_1 = f'(x_0).$$

Ляпунов утверждает, что если  $\lambda < 0$ , то решение  $x = x_0$  уравнения (4.1) устойчиво, т. е. что состояние равновесия устойчиво; если  $\lambda > 0$ , то состояние равновесия неустойчиво; если  $\lambda = 0$ , то уравнение первого приближения, вообще говоря, не может дать ответа на вопрос об устойчивости. Таким образом, Ляпунов утверждает, что в известных случаях уравнения, полученные путем отбрасывания не-

линейных членов, могут дать правильный ответ на вопрос об устойчивости решений нелинейных уравнений.

В рассматриваемом простом случае весьма нетрудно обосновать этот рецепт исследования устойчивости. Умножая обе части уравнения (4.3) на  $\xi$ , будем иметь:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\xi^2)}{dt} = a_1 \xi^2 + a_2 \xi^3 + \dots = F(\xi). \quad (4.5)$$

Представим  $F(\xi)$  при помощи теоремы Тейлора, замечая, что

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 2a_1,$$

$$F(\xi) = \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F''(\theta \xi) \quad (\text{где } 0 < \theta < 1),$$

и положим  $\rho = \frac{1}{2} \xi^2$ ; тогда уравнение (4.5) примет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F''(\theta \xi). \quad (4.6)$$

Если  $F''(0) < 0$  (или, что то же самое,  $a_1 < 0$ ), то в силу непрерывности функции  $F''(\xi)$  и  $F''(\theta \xi) < 0$  для достаточно малых  $|\xi|$ . Отсюда следует по (4.6), что и  $\frac{d\rho}{dt} < 0$  для тех же  $|\xi|$ . Если  $\rho = \frac{1}{2} \xi^2$  уменьшается, то уменьшается и  $|\xi|$  и никогда не сможет начать увеличиваться. Отсюда следует, что условие  $a_1 = f'(x_0) < 0$  достаточно для устойчивости по Ляпунову рассматриваемого состояния равновесия  $x = x_0$ , так как в этом случае вокруг  $x = x_0$  всегда существует такая область начальных значений, из которой наша изображающая точка будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Совершенно таким же образом можно показать, что при  $a_1 = f'(x_0) > 0$  состояние равновесия  $x = x_0$  неустойчиво по Ляпунову.

Таким образом, рецепт Ляпунова оправдывается, так как результат исследования устойчивости состояния равновесия при помощи полного нелинейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots$$

совпадает с результатом исследования устойчивости при помощи линейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 \xi,$$

если  $a_1 \neq 0$ . Основание для указанного отбрасывания нелинейных членов, таким образом, состоит в том, что нелинейные члены при малых значениях  $\xi$  весьма малы по сравнению с основным линейным членом; когда же линейный член равен нулю, то вопрос требует особого исследования.

Для рассматриваемого случая условия устойчивости можно сформулировать еще более кратко. Перенесем начало координат в точку  $x_0$ . Тогда для устойчивости необходимо, чтобы  $x$  и  $f$  по обе стороны от положения равновесия были разных знаков, так как в противном случае, т. е. когда  $\frac{dx}{dt}$  и  $x$  одного знака, раз возникшее отклонение от положения равновесия будет возрастать, т. е. состояние равновесия будет неустойчиво.

Все эти случаи могут быть исследованы и аналитически.

Если  $a_1 \neq 0$ , мы получим тогда как раз то, что мы нашли, следуя Ляпунову.



Мы привели рассуждения, связанные с отбрасыванием нелинейных членов, поскольку аналогичные рассуждения нам будут встречаться при рассмотрении более сложных динамических систем и поскольку в нашем простейшем случае особенно отчетливо вырисовывается идея, лежащая в основе метода Ляпунова. Но, с другой стороны, в нашем конкретном случае одного уравнения первого порядка нетрудно непосредственно, исследуя характер функции  $f(x)$  вблизи состояния равновесия  $x = x_0$ , однозначно образом заключить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия.

Так как  $f(x_0) = 0$ , то здесь могут быть три существенно различных случая:

1)  $f(x)$  меняет знак вблизи состояния равновесия  $x = x_0$  с плюса на минус при возрастании  $x$  (рис. 163). Отсюда следует на основании предыдущего, что изображающая точка, находящаяся в доста-

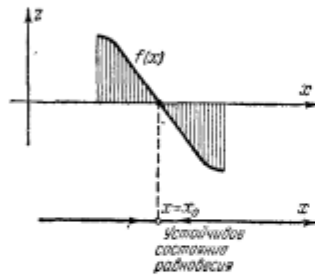


Рис. 163.

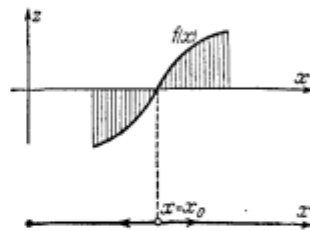


Рис. 164.

точной близости к состоянию равновесия  $x = x_0$ , будет асимптотически к нему приближаться при возрастании  $t$ . Ясно, что в этом случае состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

2)  $f(x)$  меняет знак вблизи состояния равновесия  $x = x_0$  с минуса на плюс при возрастании  $x$  (рис. 164). Это значит, что изображающая точка, помещенная в достаточно близости к состоянию равновесия, будет удаляться от состояния равновесия; отсюда следует, что состояние равновесия неустойчиво в смысле Ляпунова.

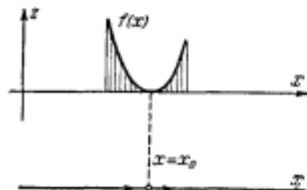


Рис. 165.

3)  $f(x)$  не меняет знака вблизи состояния равновесия  $x = x_0$  при возрастании  $x$  (рис. 165). Это значит, что изображающая точка, помещенная достаточно близко к положению равновесия с одной стороны, будет приближаться к нему, помещенная с другой — удаляться. Ясно, что состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

14. Укажите направления движения изображающих точек вдоль фазовой прямой для экспоненциального дифференциального уравнения. Опишите характер устойчивости положений равновесия.

Устойчиво. Вне зависимости от значений параметров  $a$  (альфа) и  $b$  (бэта) фазовые траектории имеют совпадающие друг с другом направления.

15. Укажите направления движения изображающих точек вдоль фазовой прямой для логистического уравнения. Опишите характер устойчивости положений равновесия.

Не устойчиво. В зависимости от значений параметров  $N_r$  и  $k$  фазовые траектории имеют различные направления (в том числе, несовпадающие друг с другом направления).

16. Укажите направления движения изображающих точек вдоль фазовой прямой для нелинейной модели роста. Опишите характер устойчивости положений равновесия.

Не устойчиво. В зависимости от значений параметров  $a$  (альфа) и  $b$  (бэта) фазовые траектории имеют различные направления (в том числе, несовпадающие друг с другом направления).

## Лабораторная работа №2,3

1. Сформулируйте концептуальную постановку задачи о движении пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности без трения.

Подходит к 1, 2 и 3 вопросу (синее - конец 1 вопроса, зеленое - конец 2 вопроса, красное - конец 3 вопроса).

Концептуальная постановка задачи

- Объектом исследования является физическое тело массы  $m$ , которое находится на одном конце пружины, второй конец пружины жестко закреплен. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной пружины, поэтому принимаем его за материальную точку.
- Тело движется вперед или назад по горизонтальной поверхности. Обозначим через  $r(t)$  координату тела вдоль оси пружины относительно положения равновесия  $r=0$ , когда пружина не сжата и не растянута. Будем считать, что  $r(t)>0$ , когда пружина растянута и  $r(t)<0$ , когда она сжата.
- Расстояние между положением равновесия  $r=0$  и стенкой, к которой крепится пружина, равно  $L$ .
- Тело находится под действием силы упругости пружины. Сила упругости описывается законом Гука  $F=-k r$ , где коэффициент упругости  $k=\text{const}>0$ . Закон Гука является экспериментальным и справедлив при небольших отклонениях пружины от ее положения равновесия.
- Можно сделать допущение, что тело движется без трения. Предположение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени. Если учитывать сопротивление среды, то можно полагать, что сила трения пропорциональна скорости движения

$F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr(t)}{dt}$  с коэффициентом трения  $\mu = \text{const}>0$ . Приведенная

зависимость называется формулой Стокса и является допустимой при малых скоростях движения.

- На тело может действовать внешняя сила, например  $F = F_0 \sin(t \omega_2)$ .

Принимая во внимание, что в момент времени  $t=0$  пружину растянули на величину  $r_0$  и сообщили телу скорость  $V_0$ , требуется определить координату тела  $r(t)$  как функцию времени.

2. Сформулируйте концептуальную постановку задачи о движении пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности с учетом сопротивления среды: с возникновением силы трения.

в 1 вопросе (синее - конец 1 вопроса, зеленое - конец 2 вопроса, красное - конец 3 вопроса)

3. Сформулируйте концептуальную постановку задачи о движении пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности с учетом сопротивления среды и действия на тело внешней силы.

в 1 вопросе (синее - конец 1 вопроса, зеленое - конец 2 вопроса, красное - конец 3 вопроса)

4. Сформулируйте концептуальную постановку задачи о движении физического маятника под действием силы тяжести без учета сопротивления среды.

- Объектом исследования является физическое тело массы  $m$ , которое подвешено на невесомом и нерастяжимом стержне длины  $l$  к неподвижной опоре. Тело имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня, поэтому принимаем его за материальную точку.
- Тело качается в фиксированной плоскости. Обозначим через  $\alpha(t)$  угол отклонения стержня от вертикального положения равновесия  $\alpha(t) = 0$ . Будем считать, что  $\alpha(t) > 0$  при отклонении стержня против часовой стрелки.
- Тело находится под действием силы тяжести  $\vec{F} = m \vec{g}$ ; силой сопротивления среды пренебрегаем. Допущение об отсутствии трения справедливо для небольших промежутков времени.

Принимая во внимание, что в момент времени  $t=0$  стержень отклонили на угол  $\alpha_0$  и телу сообщили скорость  $\omega_0$ , требуется определить угол отклонения стержня  $\alpha(t)$  как функцию времени.

5. Постройте математическую модель движения пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности без учета сопротивления среды, исходя из фундаментального закона природы – второго закона Ньютона.

Мат. модель:

1. На основании 2го закона Ньютона имеем  $m\bar{a} = \bar{F}$ , где  $m$  - масса тела,  $\bar{a}$  - ускорение,  $\bar{F}$  - сила, действ на тело.

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr \quad (1)$$

Диф-ур-ие (1) наз-ся *ур-ие пружинного осциллятора*.

Ур-ие отр. для параметров:  $m = \text{const} > 0$  и  $k = \text{const} > 0$

6. Постройте математическую модель движения пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности без учета сопротивления среды, исходя из фундаментального закона природы – закона сохранения энергии.

При отсутствии трения полная механическая энергия  $E$  сохраняет значение во времени  $\frac{dE}{dt} = 0$ . В этом случае механическую систему называют консервативной.

В общем виде  $E = E_k + E_p$

Кинетическая энергия в общем случае:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \frac{dr}{dt}^2}{2}$$

Потенциальная энергия в общем случае:

$$E_p = - \int_0^r F dr = \int_0^r kr dr = \frac{kr^2}{2}$$

Отсюда имеем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \frac{dr}{dt}^2}{2} + \frac{kr^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{m}{2} 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{k}{2} 2r \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2r}{dt^2} = -kr$$

7. Постройте математическую модель движения пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности без учета сопротивления среды, на основании вариационных принципов – принципа Гамильтона.

**Принцип наименьшего действия в форме Гамильтона:** из всех допустимых траекторий движения  $u(t)$  механической системы между моментами времени  $t_1$  и  $t_2$  выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия  $S(u)$

$$S(u) := \int_{t_1}^{t_2} L(u(t), u'(t)) dt,$$

где  $L(u, u')$  -- функция Лагранжа для исследуемой механической системы.

В простейшем случае функция Лагранжа определяется разностью кинетической и потенциальной энергий  $L(u, u') = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}$ .

Принцип Гамильтона нахождения минимума функционала действия принимает вид

$$\left( \frac{d}{d\varepsilon} S(u(t) + \varepsilon \varphi(t)) \right) \bigg|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где  $\varphi(t)$  -- пробная функция такая, что  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ ;  $u(t) + \varepsilon \varphi(t)$  называется вариацией произвольного движения, при этом  $u(t)$  и  $\varphi(t)$  не зависят от  $\varepsilon = \text{const} > 0$ .

Кинетическая энергия

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m (\dot{r})^2}{2}$$

Потенциальная энергия

$$E_{\text{п}} = - \int_0^r F d\rho = \int_0^r k\rho d\rho = \frac{kr^2}{2}$$

Функция Лагранжа

$$L = E_{\text{к}} - E_{\text{п}} = \frac{m (\dot{r})^2}{2} - \frac{kr^2}{2}$$

Тогда

$$S(r + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d(r + \varepsilon\varphi)}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} (r + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left( \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) - k(r\varphi + \varepsilon\varphi^2) \right] dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon\varphi) \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - k r \varphi \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} dt - \int_{t_1}^{t_2} k r \varphi dt = \end{aligned}$$

Первый интеграл интегрируем по частям

$$= m \frac{dr}{dt} \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d^2 r}{dt^2} \varphi dt - \int_{t_1}^{t_2} k r \varphi dt = m \frac{dr}{dt} \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right) \varphi dt = 0$$

Так как  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ , то первое слагаемое равно 0. Отсюда  $\forall \varphi$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right) \varphi dt = 0$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr = 0$$

8. Постройте математическую модель движения физического маятника под действием силы тяжести без учета сопротивления среды, используя фундаментальный закон природы: закон сохранения энергии.

$$E = E_{\kappa} + E_{\Pi}$$

$$E_{\kappa} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{d(l\alpha)}{dt} \right)^2 = \frac{ml^2}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2$$

$$E_{\Pi} = - \int_{-l}^{-l \cos \alpha} -mg dy = mgy \Big|_{-l}^{-l \cos \alpha} = -mgl \cos \alpha + mgl = mgl(1 - \cos \alpha)$$

**Закон сохранения энергии:**

При отсутствии трения полная механическая энергия  $E$  сохраняет значение во времени

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{ml^2}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \right) = 0$$

$$ml^2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

Так как  $m \neq 0, l \neq 0, \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ , то разделим на них

$$l \frac{d^2\alpha}{dt^2} + g \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$$

9. Запишите задачу Коши, моделирующую движение пружинного осциллятора по горизонтальной поверхности без учета сопротивления среды. Постройте соответствующую модели динамическую систему и проведите ее качественное исследование: постройте уравнение фазовых траекторий, получите его аналитическое решение. Изобразите фазовый портрет системы, укажите состояния равновесия, их тип.



Математическая модель пружинного осциллятора без учета сопротивления среды представляет собой задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида

$$\begin{cases} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \omega^2 r(t) = 0 \\ r(0) = r_0 \\ \frac{dr(0)}{dt} = v_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{const} > 0$  – собственная частота колебаний.

Динамическая система, соответствующая данной модели

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\omega^2 r \end{cases} \quad (2)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\omega}$$

Особая точка  $r(t) = v(t) = 0$  является центром ( $\text{Re } \lambda = 0$ ). Тогда положение равновесия является устойчивым.

Для построения фазовой кривой, разделим второе уравнение на первое

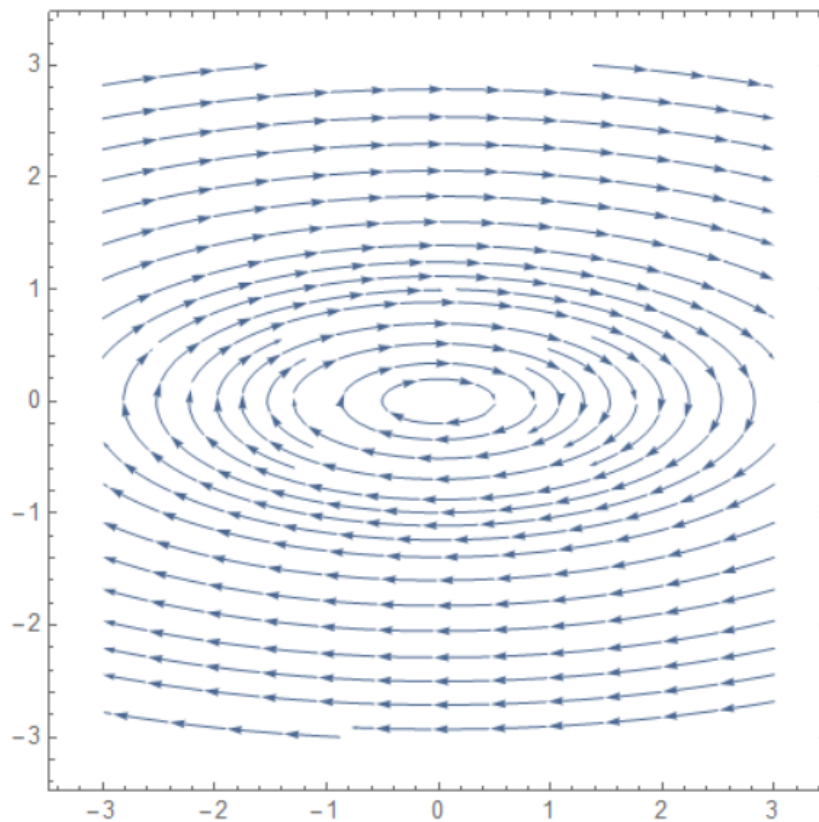
$$\frac{dv}{dr} = -\omega^2 \frac{r}{v}$$

$$v \, dv = -\omega^2 r \, dr$$

$$v^2 = -\omega^2 r^2 + C$$

$$\frac{v^2}{C} + \omega^2 \frac{r^2}{C} = 1 \text{ – уравнение эллипса}$$

Качественное описание исследуемой динамической системы: система совершает малые колебания вблизи положения равновесия без достижения равновесия. Это **незатухающие колебания**



10. Запишите задачу Коши, моделирующую движение пружинного осциллятора с учетом сопротивления среды. Постройте соответствующую модели динамическую систему и проведите ее качественное исследование, опираясь на собственные значения матрицы системы. Изобразите фазовые траектории для трех возможных типов поведения системы: затухающие колебания, критическое колебание, апериодическое затухание.

**Задача Коши:**

Полагаем, что на пружинный осциллятор воздействует сила трения, заданная формулой Стокса  $F_{\text{тр}} = -\mu \frac{dr(t)}{dt}$ , где коэффициент трения  $\mu = \text{const} > 0$ .

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -k r(t) - \mu \frac{dr(t)}{dt},$$

$$r(0) = r_0,$$

$$\frac{dr(0)}{dt} = v_0.$$

## Качественный анализ:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

Замена  $\dot{x} = y$

$$\text{Следовательно } y' = -\frac{kx}{m} - \frac{\mu y}{m}$$

$$\text{Solve} \left[ \text{Det} \left[ \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\mu - \lambda \end{pmatrix} \right] == 0, \lambda \right]$$

[реш...] [детерминант]

$$\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{2} \left( -\frac{\mu}{m} - \frac{\sqrt{-4km + \mu^2}}{m} \right) \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{2} \left( -\frac{\mu}{m} + \frac{\sqrt{-4km + \mu^2}}{m} \right) \right\} \right\}$$

Характеристическое уравнение:

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}$$

$$1) \mu^2 < 4mk$$

Собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно-сопряженные

$\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$  - устойчивый фокус

$$r(t) = e^{\frac{-\mu t}{2m}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - \mu^2} t}{2m}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - \mu^2} t}{2m}\right) \right)$$

Затухающие колебания

$$2) \mu^2 = 4mk$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

Устойчивый вырожденный узел

$$r(t) = e^{\frac{-\mu t}{2m}} (C_1 + C_2 t)$$

Критическое колебание

$$3) \mu^2 > 4mk$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

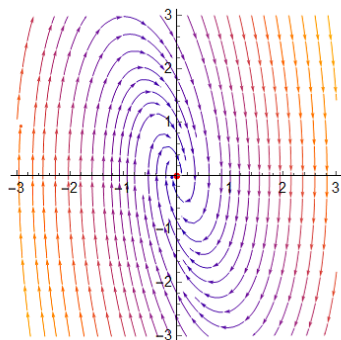
Устойчивый узел

$$r(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

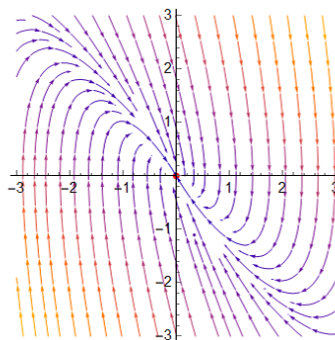
Апериодическое затухание

## Фазовые траектории:

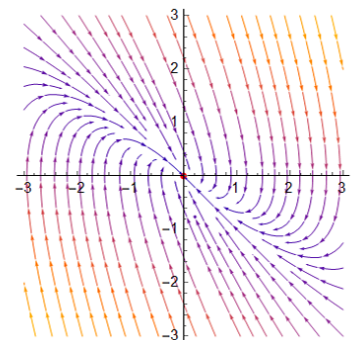
$\mu^2 < 4mk$  —  
Устойчивый фокус



$\mu^2 = 4mk$  —  
Устойчивый вырожденный узел

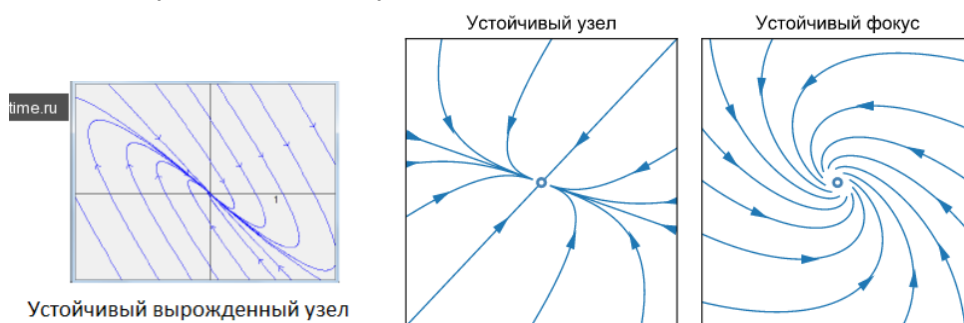


$\mu^2 > 4mk$  —  
Устойчивый узел



Слева направо: затухающие колебания, критическое колебание, аperiodическое затухание.

Мб здесь лучше видны рисунки (?):



11. Запишите задачу Коши, моделирующую движение пружинного осциллятора под действием внешней силы вида  $F_0 \sin(\omega t)$ . Укажите, с точностью до неопределенных коэффициентов, общий вид резонансного и нерезонансного решений задачи Коши. Изобразите резонансное и нерезонансное решения математической модели для некоторых заданных значений параметров модели.

**Задача Коши:**

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -k r(t) + F_0 \sin(\omega t),$$

$$r(0) = r_0,$$

$$\frac{dr(0)}{dt} = v_0.$$

**Общий вид:**

Резонанс:

$r^*(t) = t(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))$ , где  $\omega = \sqrt{k/m}$  собственная частота колебаний.

$$\dot{r} = (C_1 \sin[\omega t] + C_2 \cos[\omega t]) + \omega t (C_1 \cos[\omega t] - C_2 \sin[\omega t]) = (C_1 - C_2 \omega t) \sin[\omega t] + (C_2 + C_1 \omega t) \cos[\omega t];$$

$$\ddot{r} = 2\omega (C_1 \cos[\omega t] - C_2 \sin[\omega t]) - \omega^2 t (C_1 \sin[\omega t] + C_2 \cos[\omega t]) = (2\omega C_1 - \omega^2 t C_2) \cos[\omega t] + (-2\omega C_2 - \omega^2 t C_1) \sin[\omega t];$$

$$m \left( (2\omega C_1 - \omega^2 t C_2) \cos[\omega t] + (-2\omega C_2 - \omega^2 t C_1) \sin[\omega t] \right) = -k t (C_1 \sin[\omega t] + C_2 \cos[\omega t]) + F_0 \sin[\omega t];$$

$$\text{Коэффициенты при } \cos[\omega t] : m (2\omega C_1 - \omega^2 t C_2) =$$

$$-k t C_2 \Rightarrow 2 m \omega C_1 - k t C_2 = -k t C_2 \Rightarrow 2 m \omega C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{Коэффициенты при } \sin[\omega t] : m (-2\omega C_2) = F_0 \Rightarrow C_2 = -\frac{F_0}{2 m \omega}$$

$$r^*[t] = -\frac{F_0 t}{2 m \omega} \cos[\omega t]$$

Без резонанса:

$r^*(t) = C \sin(\omega_2 t)$ , где  $\omega_2 \neq \omega$ .

$$-m \omega_2^2 C \sin[\omega_2 t] = -k C \sin[\omega_2 t] + F_0 \sin[\omega_2 t];$$

$$C = \frac{F_0}{k - m \omega_2^2} = \frac{F_0}{m (\omega^2 - \omega_2^2)};$$

$$r^*[t] = \frac{F_0}{m (\omega^2 - \omega_2^2)} \sin[\omega_2 t]$$

Изображение:

Резонансное решение:

$$\omega_2 = 1;$$

$$F_0 = 1;$$

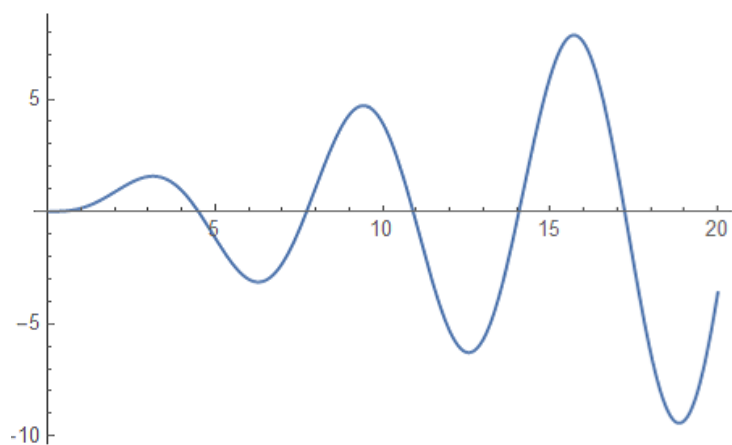
$$r_0 = 0;$$

$$v_0 = 0;$$

$$m = 1;$$

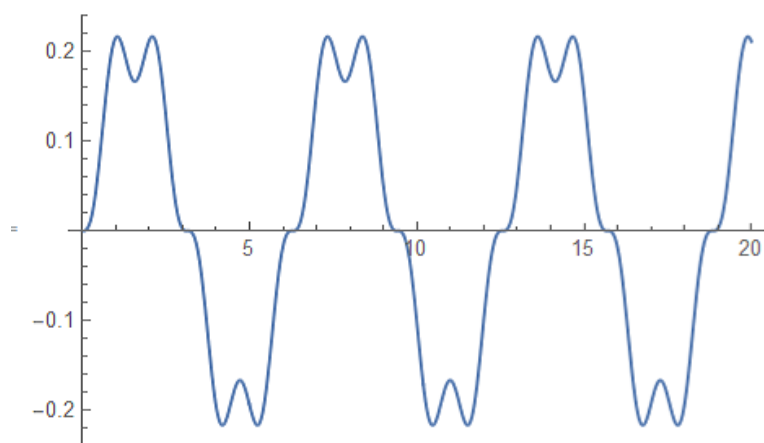
$$k = 1;$$

$$t_0 = 0;$$



Нерезонансное решение:

$$\omega_2 = 5;$$



12. Для математической модели физического маятника под действием силы тяжести без учета сопротивления среды получите уравнение фазовых траекторий соответствующей динамической системы и исследуйте их поведение в зависимости от значения произвольной постоянной. Изобразите фазовые траектории, укажите условия, при которых маятник находится в качественно различных положениях равновесия, совершает колебательные движения, вращательные движения. Укажите также условие для фазовой траектории, которая разделяет колебательное и вращательное движение маятника.

$$\alpha'' = -\frac{g}{l} \sin[\alpha]$$

$$\alpha' = w$$

$$w' = -\frac{g}{l} \sin[\alpha]$$

$$w dw = -\frac{g}{l} \sin[\alpha] d\alpha$$

$$\frac{w^2}{2} = -\frac{g}{l} \cos[\alpha] + \text{const}$$

$$w = \pm \sqrt{-2 \left( \frac{g}{l} \cos[\alpha] + \text{const} \right)}$$

$$\frac{g}{l} \cos[\alpha] + \text{const} = < 0$$

$$\frac{g}{l} \cos[\alpha] \leq -\text{const}$$

$$\text{const} \geq -\frac{g}{l} \cos[\alpha]$$

$$\text{const} \geq -\frac{g}{l} \quad (\cos \text{ ограничен})$$

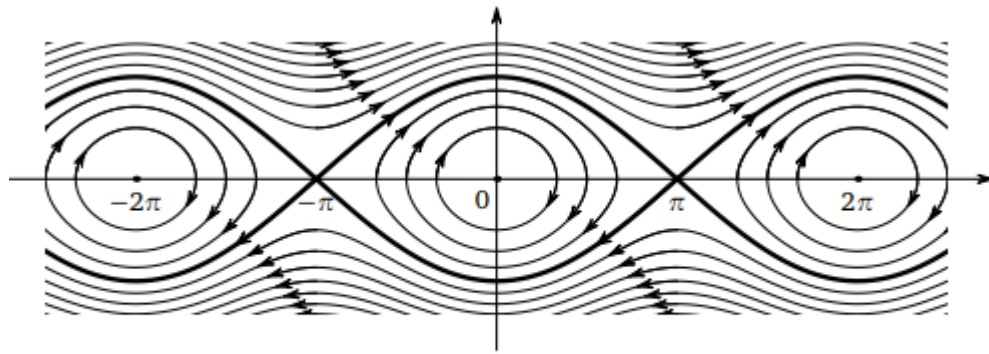
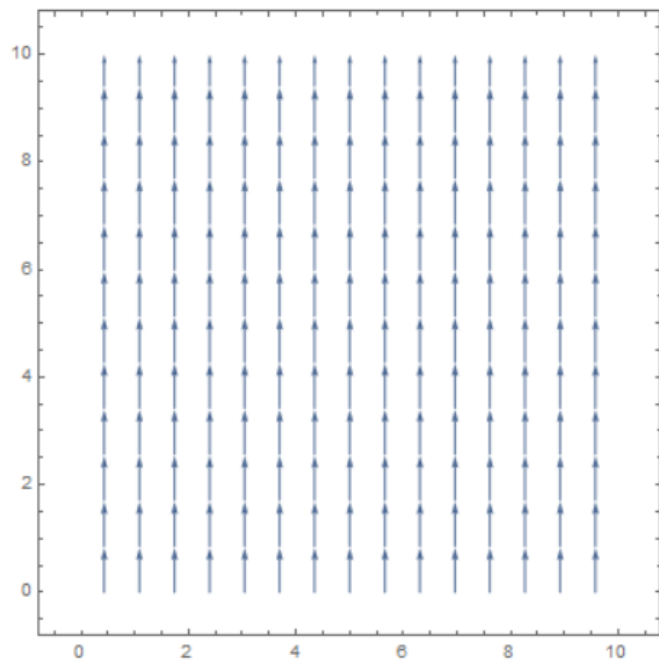


Рис. 12. Фазовый портрет маятника на плоскости

Фазовая траектория маятника находится в положение **равновесия**

$$\dot{w} = 0,$$

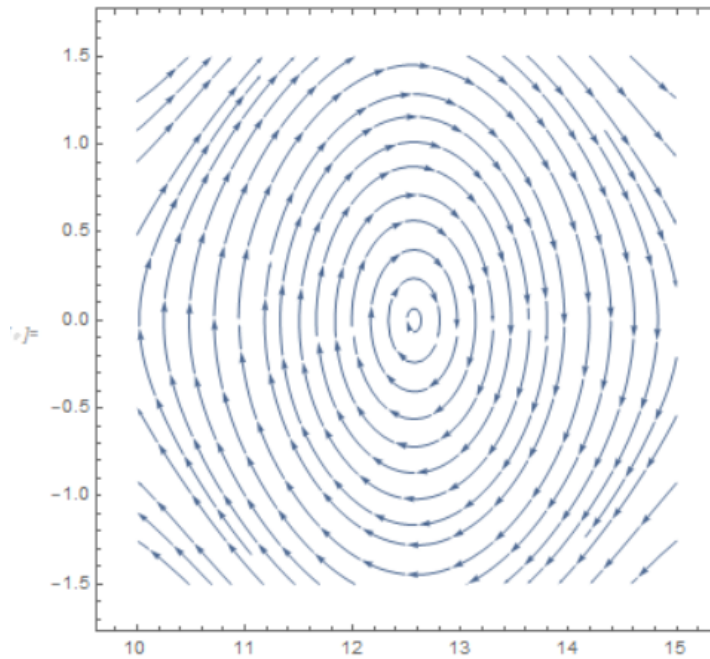
$\alpha = \pi n$  (особые точки) (стационарное состояние)



Фазовая траектория совершает **колебательные** движения

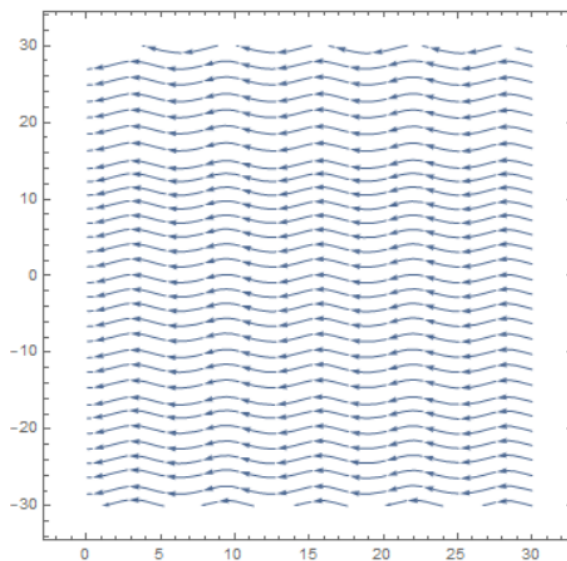
$$|c| < \frac{g}{l}, \text{ Траектории являются замкнутыми кривыми}$$





Если  $C > \frac{g}{L}$ , то  $2 \left( \frac{g}{L} \cos \alpha + C \right) > 0$ , при любых значениях  $\alpha$ ,

Маятник будет совершать **вращательные** движения, при которых  $\alpha$  монотонно возрастает(или убывает) до бесконечности.



Фазовая траектория разделяет колебательные и вращательные движения маятника (**сепаратриса**)  $C = g/L$

Сепаратрисы разбивают фазовую плоскость на 2 части: в одной из них траектории замкнуты, в другой не замкнуты.

