БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р. А. Прохорова

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Допущено*
*Министерством образования Республики Беларусь*
*в качестве учебного пособия для студентов*
*учреждений высшего образования*
*по математическим специальностям*

МИНСК
БГУ
2017

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73-1
П78

Рецензенты:
кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры Гродненского государственного университета имени Янки Купалы (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, доцент *А. А. Гринь*);
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Цегельник*

**Прохорова, Р. А.**
П78 Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Р. А. Прохорова. – Минск : БГУ, 2017. – 335 с.
ISBN 978-985-566-496-4.

Содержание учебного пособия соответствует курсу обыкновенных дифференциальных уравнений для студентов математических специальностей университетов.

Излагаемый материал разбит на параграфы, каждый из которых, как правило, может рассматриваться в качестве отдельного практического занятия: приведены необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых задач и достаточное число заданий для аудиторных занятий и самостоятельной работы. Большое внимание уделено дифференциальным уравнениям, используемым как основные математические модели в естествознании и механике.

Для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям.

**УДК 517.91(075.8)**
**ББК 22.161.6я73-1**

**ISBN 978-985-566-496-4**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено на основе опыта проведения практических занятий по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений в группах различных специализаций механико-математического факультета Белорусского государственного университета. В издании изложены необходимые теоретические сведения и даны подробные решения типовых задач по учебной программе «Дифференциальные уравнения» для математических специальностей университетов.

По структуре книга логически связана с учебными пособиями В. В. Амелькина [1], Ю. Н. Бибикова [2], А. Ф. Филиппова [12], Н. М. Матвеева [7] и «Книгой для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений» Н. П. Еругина [4].

Издание состоит из восьми глав, разбитых на параграфы. Нумерация глав и параграфов сквозная, задачи и рисунки нумеруются в рамках параграфов.

В начале каждого параграфа приводятся теоретические сведения, далее — подробные решения типовых задач и контрольные вопросы.

Для мини-самоконтроля в конце каждого параграфа даны простые типовые задания, не требующие сложных вычислений, решение которых должно быть освоено. Более трудные задачи, как правило теоретического характера, объединены в задания для самостоятельной работы.

Кроме задач, составленных автором, в учебном пособии приведены стандартные задачи из известных сборников задач по дифференциальным уравнениям [5, 8, 13, 21, 25].

Автор благодарна рецензентам — доктору физико-математических наук, профессору В. В. Цегельнику, доктору физико-математических наук, доценту А. А. Гриню и сотрудникам кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры Гродненского государственного университета имени Янки Купалы — за конструктивные замечания по улучшению учебного пособия, а также преподавателям кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ профессорам В. В. Амелькину, В. И. Громаку, А. П. Садовскому, доцентам О. А. Лавровой, А. Э. Малевичу и соавторам методических разработок доценту В. И. Мататову и старшему преподавателю Н. Т. Примачук за полезные обсуждения излагаемого материала. За набор рукописи автор благодарит студентов — выпускников 2012–2014 годов, специализировавшихся по этой кафедре, секретаря кафедры Е. Н. Гордееву, лаборанта отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси Г. И. Кузнецову. Отдельную благодарность автор выражает старшему научному сотруднику кандидату физико-математических наук С. Г. Красовскому за подготовку рукописи к печати.

# ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | — | множество натуральных чисел |
| $\mathbb{N}_0$ | — | множество целых неотрицательных чисел |
| $\mathbb{R}$ | — | множество действительных чисел |
| $\mathbb{C}$ | — | множество комплексных чисел |
| $[a,b]$, $(a,b)$, $\lvert a,b\rvert$ | — | отрезок, интервал, промежуток с концами $a$ и $b$ |
| $\mathbb{R}^n$ | — | пространство $n$-мерных действительных векторов |
| $\mathbb{C}^n$ | — | пространство $n$-мерных комплексных векторов |
| $\Rightarrow$ | — | следует |
| $\Leftrightarrow$ | — | эквивалентно |
| $\forall$ | — | для любого |
| $\exists$ | — | существует |
| $^\top$ | — | знак транспонирования |
| $\lVert \boldsymbol{x} \rVert$ | — | норма вектора $\boldsymbol{x}$ |
| $o(x)$ при $x \to 0$ | — | бесконечно малая более высокого порядка, чем $x$ при $x \to 0$ |
| $f\colon X \to Y$ | — | отображение (функция) $f$ из множества $X$ в множество $Y$ |
| $f \in C(X)$ ($f \in C^k(X)$) | — | непрерывная ($k$ раз непрерывно дифференцируемая) на множестве $X$ функция |
| $A = (a_{ij})$ | — | матрица с элементами $a_{ij}$ |
| $\operatorname{diag}[A_1, \ldots, A_k]$ | — | блочно-диагональная матрица с квадратными блоками $A_i$ |
| $E$ ($E_k$) | — | единичная (единичная порядка $k$) матрица |
| $A^\top$ | — | матрица, транспонированная к матрице $A$ |
| $\det A$ | — | определитель матрицы $A$ |
| $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{Sp} A$ | — | след матрицы $A$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ |
| $\operatorname{rank} A$ | — | ранг матрицы $A$ |
| ДУ (ОДУ) | — | дифференциальное уравнение (обыкновенное ДУ) |
| ДС | — | дифференциальная система |
| ЛЗ (ЛНЗ) | — | линейно зависимы (линейно независимы) |
| $[\varphi(x,y) = 0\,?]$ | — | символическая запись возможной потери решений ДУ, определяемых уравнением $\varphi(x,y) = 0$, при преобразовании этого ДУ |
| $\square$ | — | конец решения |
| ЛДУ (ЛОДУ) | — | линейное (однородное) ДУ |
| ЛНДУ | — | линейное неоднородное ДУ |
| ФСР | — | фундаментальная система решений |

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ — элементы пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$

$\dot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \operatorname{colon}(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — производные по переменной $t$, производные по другим переменным обозначаются штрихами

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

## Введение

*Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка в нормальной форме. ДУ первого порядка в симметричной (нормальной дифференциальной) форме. Определение решения ДУ. Интегральная кривая. Задача Коши. Единственность решения задачи Коши. Особое решение. Общий интеграл. Общее решение. Общее решение в форме Коши. Теорема существования и единственности (простейший вариант). Теорема Пеано.*

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка называется соотношение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где $x$ — независимая переменная; $y$ — искомая функция, $y = y(x)$; $F$ — заданная функция своих аргументов.

Уравнение, разрешённое относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f$ определена и непрерывна в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$, называется *ОДУ первого порядка в нормальной форме.*

**Определение 1.** Непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$, $x \in |a, b|$, называется **решением ДУ** (1) (в явном виде), если она обращает это уравнение в тождество на промежутке $|a, b|$.*

Соотношение $\Phi(x, y) = 0$, где $\Phi$ — некоторая дифференцируемая функция, называют *решением в неявном виде*, если оно определяет функцию $y = y(x)$, $x \in |a, b|$, которая является решением ДУ (1). Это означает, что $d\Phi(x, y) = 0$ в силу ДУ (1) и $\Phi(x, y) = 0$, т. е. $\dfrac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} f(x, y) \equiv 0$ в силу соотношения $\Phi(x, y) = 0$.

*Подчеркнём, что решение определяется на связном множестве (интервале, полуинтервале или отрезке). Если промежутку принадлежит его левый или правый конец, то под производной решения в этой точке понимаем соответственно право- или левосторонние производные.

Решение ДУ (1) может быть задано *параметрически*: $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, $\varphi, \psi \in C^1(|a, b|)$, $\varphi'(p) \neq 0$, $p \in |\alpha, \beta|$, если

$$\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)} \equiv f[\varphi(p), \psi(p)], \quad p \in |\alpha, \beta|.$$

График решения дифференциального уравнения (1) называется *интегральной кривой (или движением).*

Процесс нахождения решений ДУ называют его *интегрированием.*

Часто для полноты исследования решений уравнения (1) рассматривают так называемое *«перевёрнутое» уравнение*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{2}$$

которое равносильно уравнению (1) всюду в $G$, где $f(x, y) \neq 0$. Это даёт возможность изучить поведение решений уравнения (1) в окрестности тех точек $(x, y)$, в которых $1/f(x, y) = 0$. Кроме того, уравнение (2) можно использовать ещё и тогда, когда решить его легче, чем уравнение (1).

Иногда целесообразно проводить *интегрирование в широком смысле*: в этом случае к решениям уравнения (1) $y = y(x)$, $x \in |a, b|$, присоединяют решения $x = x(y)$, $y \in |c, d|$, перевёрнутого уравнения (2).*

Важной в теории дифференциальных уравнений является **задача Коши**, или **начальная задача**: *среди всех решений уравнения (1) найти то решение $y = y(x)$, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$, где $x_0$ и $y_0$ — заданные начальные данные*, $(x_0, y_0) \in G$.

Кратко задача Коши записывается в виде

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(x_0, y_0)$.

Будем говорить, что *задача Коши* (3) *разрешима*, если она имеет решение.

---

*В дальнейшем такое интегрирование (в отличие от авторов работ [4, 7, 8]) проводим *лишь в тех случаях, когда это будет оговорено заранее.*

Объединяющей уравнения (1) и (2) формой записи ДУ первого порядка является *уравнение в нормальной дифференциальной* (или *симметричной*) *форме*:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{4}$$

где $M$ и $N$ — непрерывные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции.

Точка $(x_0, y_0) \in D$ называется *особой*, если $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$; остальные точки области $D$ называются *неособыми*.

**Определение 2.** *Решением уравнения* (4) назовём [2, с. 26; 3, с. 97] дифференцируемую функцию $y = y(x)$, $x \in |a,b|$ (или дифференцируемую функцию $x = x(y)$, $y \in |c,d|$), обращающую уравнение (4) в тождество на промежутке $|a,b|$ (или $|c,d|$).*

Если $(x_0, y_0) \in D$ — неособая точка уравнения (4), то в некоторой её окрестности уравнение (4) эквивалентно по меньшей мере одному из уравнений в нормальной форме:

$$dy/dx = -M(x,y)/N(x,y) \quad \text{или} \quad dx/dy = -N(x,y)/M(x,y). \tag{5}$$

Геометрически задача Коши для уравнения (4) ставится так же, как и для ДУ (1).

Будем говорить, что разрешимая задача Коши (3) имеет *единственное решение*, если для любых двух решений $y = y_1(x)$, $x \in (a_1, b_1)$, и $y = y_2(x)$, $x \in (a_2, b_2)$, этой задачи существует такая $\varepsilon$-окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$, точки $x_0$, что $y_1(x) \equiv y_2(x)$, когда $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Такую задачу Коши будем называть *однозначно разрешимой*.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*.

Понятие особого решения тесно связано с понятием *огибающей* семейства кривых, т. е. такой линией $\gamma$, которая в каждой своей точке касается кривой семейства, отличной от $\gamma$ в любой сколь угодно малой окрестности этой точки. *Особое решение* ДУ (1) является огибающей семейства интегральных кривых этого уравнения.

Наиболее простые *достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши* (3), приводит следующая теорема.

**Теорема о существовании и единственности.** *Если функция $f$ вместе со своей частной производной $\partial f/\partial y$ непрерывна в некоторой*

*Другой подход к определению решения ДУ (4) см., например, в учебных пособиях [1, с. 22; 4; 7, с. 23]: решениями уравнения (4) называют решения ДУ (5).

*окрестности точки* $(x_0, y_0)$, *то существует единственное решение задачи Коши* (3), *определённое на некотором отрезке* $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Достаточное условие существования решения задачи Коши (3):

**Теорема Пеано.** *Если функция* $f$ *непрерывна в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0)$, *то существует решение задачи Коши* (3), *определённое в некоторой окрестности точки* $x_0$.

Пусть $S \subset G$ — область существования и единственности для ДУ (1), т. е. для любой точки $(x_0, y_0) \in S$ задача Коши (3) однозначно разрешима.

Семейство решений ДУ (1) вида

$$y = \varphi(x, C), \tag{6}$$

где $C$ — параметр (называемый допустимой *произвольной постоянной*) из некоторого множества значений $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, будем называть *общим решением ДУ* (1) в области $S$, если для любой точки $(x_0, y_0) \in S$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C_0 = U(x_0, y_0)$ и функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши (3).

*Полным семейством решений* дифференциального уравнения иногда [1, с. 23] называют совокупность всех решений ДУ.

Решение, в каждой точке которого имеет место единственность решения задачи Коши, следуя [8, с. 12], назовём *частным* решением.

Если функция (6) есть общее решение уравнения (1) в области $S$, то всякое решение, содержащееся в формуле (6) при конкретном (допустимом) значении произвольной постоянной $C$, является *частным*.

Если при любом $C \in \Delta \subset \mathbb{R}$ функциональное соотношение $U(x, y) = C$ определяет решение ДУ в неявном виде, то это соотношение называют *общим интегралом* этого ДУ, а саму функцию $U(x, y)$ — *интегралом*. Часто *общим интегралом* называют соотношение $U(x, y, C) = 0$ с указанным выше свойством.

Форма задания общего решения, когда роль произвольной постоянной играет начальное значение $y_0$ искомой функции $y = y(x)$ при некотором *фиксированном значении* $x = x_0$, называется *общим решением в форме Коши*. Оно имеет вид $y = \psi(x; x_0, y_0)$, при этом $y_0 = \psi(x_0; x_0, y_0)$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Является ли решением ДУ $y' = -y^2$ функция $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$? **2.** Функция $y = \varphi(x)$ задана параметрически $x = te^t$, $y = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Показать, что эта функция является решением ДУ $(1 + xy)y' + y^2 = 0$. **3.** Проверить, является ли решением ДУ $(x + 2y)y' = 1$ функция $y = \varphi(x)$, определяемая соотношением $x + 2y + 2 = Ce^y$, $C \in \mathbb{R}$.

# § 1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка. Составление дифференциальных уравнений семейства кривых и ортогональных траекторий

*Уравнение первообразной. Автономное уравнение. Уравнение вида* $y' = f(ax + by)$. *ДУ семейства линий и ортогональных траекторий к семейству линий.*

## Уравнение первообразной

Интегрирование уравнения

$$y' = f(x) \tag{1.1}$$

с непрерывной на интервале $(a, b)$ функцией $f$ равносильно построению первообразных для функции $f(x)$. Известно, что все решения уравнения (1.1) содержатся в формуле *общего решения**

$$y = \int f(x)dx + C, \quad x \in (a, b), \tag{1.2}$$

где $C$ — произвольная постоянная, $C \in \mathbb{R}$, или представимы *общим решением в форме Коши* $y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0$, где $x_0 \in (a, b)$ фиксировано, $y_0 \in \mathbb{R}$ играет роль произвольной постоянной. Эта форма решения сразу выделяет решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

В теории рассматриваются уравнения и с разрывной функцией $f$.

Если точка $x = \alpha \in (a, b)$ — точка конечного скачка, то после интегрирования уравнения (1.1) на промежутках непрерывности $(a, \alpha)$ и $(\alpha, b)$ нужно склеить непрерывным образом соответствующие решения в точке $x = \alpha$ (в этой точке существуют односторонние производные).

Если точка $x = \alpha \in (a, b)$ есть точка бесконечного скачка функции $f$, а во всех остальных точках интервала $(a, b)$ она непрерывна, то формула (1.2) задаёт решения уравнения (1.1) в каждой из областей $a < x < \alpha$, $|y| < +\infty$ и $\alpha < x < b$, $|y| < +\infty$; иногда соответствующие решения удаётся склеить в точке $x = \alpha$.

---

*В формуле (1.2) и далее символ неопределённого интеграла обозначает какую-нибудь первообразную, а сама операция интегрирования функции $\int f(x)\,dx$ в теории ДУ называется *квадратурой*.

**В задачах 1.1–1.20 проинтегрировать уравнения и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию (если оно указано).**

**1.1.** $y' = 1/(x^2 - 1)$.

Решение. Функция $f = 1/(x^2-1)$ определена и непрерывна на интервалах $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, $\Delta_2 = (-1, 1)$, $\Delta_3 = (1, +\infty)$, точки $x = \pm 1$ — точки бесконечного скачка. *Общее решение* в областях* $G_1 = \Delta_1 \times \mathbb{R}$, $G_2 = \Delta_2 \times \mathbb{R}$, $G_3 = \Delta_3 \times \mathbb{R}$ определяется по формуле $y = \frac{1}{2} \ln |(x-1)/(x+1)| + C$. □

**1.2.** $y' = 1/\sqrt{4 - x^2}$, $|x| < 2$.

Решение. *Общее решение* ДУ задаёт формула $y = \arcsin(x/2) + C$, $|x| < 2$. □

**1.3.** $y'(x) = f(x)$, где $f(x) = 0$ при $x \leqslant 1$, $f(x) = 2x$ при $x > 1$.

Решение. При $x \leqslant 1$ уравнение принимает вид $y' = 0$ и все его решения определяются по формуле $y = C$, $x \leqslant 1$, $C \in \mathbb{R}$. При $x > 1$ имеем уравнение $y' = 2x$ и его решения — функции $y = x^2 + C_1$, $x > 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Для построения решений на всей числовой прямой произведём склейку полученных решений в точке $x = 1$ и определим связь между постоянными $C$ и $C_1$: $C = 1 + C_1$, $C_1 = C - 1$. Поэтому все *решения* исходного уравнения — функции

$$y = \begin{cases} C, & x \leqslant 1, \\ x^2 + C - 1, & x > 1, \end{cases}$$

где $C$ — произвольная постоянная, $C \in \mathbb{R}$. □

**1.4.** $y'(x) = f(x)$; $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$;** $y(0) = 2$.

Решение. *Общее решение* ДУ в области $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$ определяется по формуле $y = \int((\sin x)/x)\,dx + C$, интеграл в которой не выражается в элементарных функциях. Поэтому для общего решения предпочтительной является *форма Коши* $y = \int_0^x ((\sin t)/t)\,dt + y_0$, где $y_0$ играет роль произвольной постоянной, а в качестве нижнего предела в интеграле взяли $x_0 = 0$, учитывая начальное условие. *Искомое решение задачи Коши* имеет вид $y = \int_0^x ((\sin t)/t)\,dt + 2$. □

## Автономное уравнение

Рассмотрим уравнение первого порядка в нормальной форме, не содержащее независимой переменной $x$,

$$y' = f(y), \tag{1.3}$$

*В дальнейшем для краткости в ответах эти области будем опускать.

**Значение функции $(\sin x)/x$ при $x = 0$ доопределяем по непрерывности: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$. Так поступаем и в аналогичных ситуациях.

«перевёрнутым» ДУ для которого будет уравнение первообразной

$$dx/dy = 1/f(y), \tag{1.4}$$

равносильное (1.3), если $f(y) \neq 0$. К последнему уравнению применимы предыдущие рассуждения.

Предположим, что функция $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ непрерывна и не обращается в нуль на $(c, d)$. Тогда *общее решение уравнения* (1.3) определяется неявно по формуле $x = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C$ (или $x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(\eta)}\, d\eta + x_0$).

Если $f(y)$ обращается в нуль в некоторой точке $\beta \in (c, d)$: $f(\beta) = 0$, то ДУ (1.3) имеет также *решение* вида $y = \beta$, которое может оказаться особым. Тогда *полное семейство решений* ДУ (1.3) определяется соотношениями $x = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C$; $y = \beta_i$, где $\beta_i$: $f(\beta_i) = 0$, $\beta_i \in (c, d)$, $i = 1, 2, \ldots$

**1.5.** $y' = 2\sqrt{y}$.

Решение. Функция $f = 2\sqrt{y}$ определена и непрерывна при $y \geqslant 0$ и обращается в нуль при $y = 0$. «Перевёрнутое» ДУ имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad [2\sqrt{y} = 0\,?]$$

(здесь и в дальнейшем в квадратных скобках будем записывать уравнение, определяющее возможные на потерю решения исходного ДУ при переходе к новому уравнению); интегрируя его, получаем $\sqrt{y} = x + C$ или $y = (x + C)^2$, $x \geqslant -C$. Решением исходного ДУ будет также $y = 0$, это решение не содержится в полученной формуле общего решения ни при каком значении постоянной $C$. Следовательно, *полное семейство решений* уравнения — $y = (x + C)^2$, $x \geqslant -C$; $y = 0$. □

**Замечание 1.1.** Решение $y = 0$ — *особое*. Оно является *огибающей* (рис. 1.1) семейства интегральных кривых (семейства правосторонних полупарабол).

В этом можно также убедиться аналитически, доказав, что в каждой точке $(x_0, 0)$ решения $y = 0$ нарушается единственность решения задачи Коши. Действительно, через эту точку проходит по меньшей мере два решения: 1) $y = 0$; 2) второе решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = 0$, находим из формулы общего решения, подставляя в неё начальные данные $x_0$, $0$; получаем для $C$ уравнение

$$0 = x_0 + C \;\Rightarrow\; C = -x_0.$$

Искомое второе решение $\sqrt{y} = x - x_0$, $x \geqslant x_0$ (см. рис. 1.1).

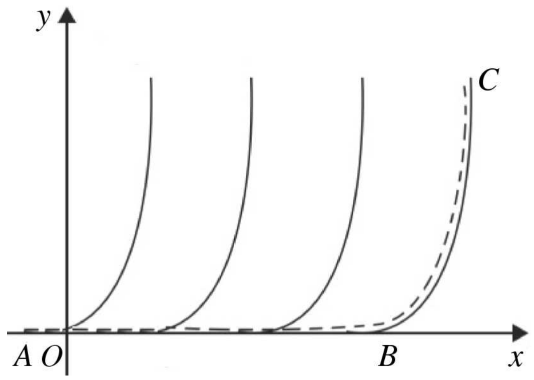



*Рис. 1.1.* Интегральные кривые (линия $ABC$ — пример гладкой склейки интегральных кривых)

**Замечание 1.2.** Исходное уравнение имеет, кроме того, *составные* решения, полученные гладкой склейкой *особого* и частных решений (см. рис. 1.1):

$$\begin{cases} y = (x + C)^2, & x \geqslant -C, \\ y = 0, & x < -C, \end{cases}$$

однако в ответах это не будем отмечать.

## Уравнение вида $y' = f(ax + by)$

В интегрировании дифференциальных уравнений важную роль играют *подстановки*: замена одной из переменных (или обеих), которая сводит уравнение к известным. *Уравнение*

$$y' = f(ax + by), \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \tag{1.5}$$

с помощью *замены** $z = ax + by$, где $z$ — новая неизвестная функция, $z = z(x)$, приводится к автономному уравнению.

Отображение $(x, y) \to (x, z)$ есть диффеоморфизм в $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, переводит решения уравнения (1.5) в решения преобразованного ДУ (аналогичное утверждение справедливо и для обратного отображения).

**1.6.** $y' = \sqrt{y - 2x} + 2, \ y(0) = 0.$

Решение. После замены $z = y - 2x$, $z = z(x)$, в силу которой $y' = z' + 2$, данное уравнение примет вид $z' = \sqrt{z}$. Перейдем к «перевёрнутому уравнению»

$$dx/dz = 1/\sqrt{z}, \quad [z = 0\,?].$$

Его интегрирование даёт *общее решение* $x + C = 2\sqrt{z}$, где $C$ — произвольная постоянная. Кроме того, решением будет также $z = 0$. Это решение не содержится в формуле общего решения ни при каком значении постоянной $C$.

Возвращаясь к переменной $y$, получим *полное семейство решений* исходного уравнения $x + C = 2\sqrt{y - 2x}$; $y = 2x$.

Для выделения решения, удовлетворяющего поставленному начальному условию, подставим начальные данные $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ в формулу общего решения и найдём $C:\ 0 + C = 0 \ \Rightarrow \ C = 0$, так что одним из решений задачи Коши будет $x = 2\sqrt{y - 2x}$ или $y = x^2/4 + 2x$, $x \geqslant 0$. Кроме того, проверкой убеждаемся, что поставленному начальному условию удовлетворяет решение $y = 2x$. Итак, *решение задачи Коши* определяется формулами

$$y = \frac{x^2}{4} + 2x, \quad x \geqslant 0; \quad y = 2x. \qquad \square$$

*Замену можно записывать в виде отображения $(x, y) \to (x, z)$, $z = ax + by$.

**Замечание 1.3.** Из решения задачи 1.5 следует, что $y = 2x$ — *особое решение* исходного уравнения.

**1.7.** $y' = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 2$.

**1.8.** $y' = e^x/x$, $y(1) = 2$.

**1.9.** $y' = x \ln x$.

**1.10.** $y' = y^2$, $y(0) = 0$.

**1.11.** $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.

**1.12.** $y' = (y+2)y^2$.

**1.13.** $y' = |x|$.

**1.14.** $y' = 2\sqrt{|y|}$.

**1.15.** $y' = (4x + y - 1)^2$, $y(0) = 1$.

**1.16.** $y' = \sqrt{y - x} + 1$, $y(1) = 1$.

**1.17.** $y' = \cos 2(y - x)$.

**1.18.** $y' = f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ x + 3, & x < 0. \end{cases}$

**1.19.** $y' = \sqrt[3]{y - 3x} + 3$.

**1.20.** $y' = f(x)$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

## Составление дифференциальных уравнений семейства кривых и ортогональных траекторий

Пусть задано однопараметрическое семейство плоских кривых, определяемых уравнением

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.6}$$

где $\Phi$ — дифференцируемая по $x$ и $y$ функция, $C$ — параметр.

Чтобы получить ДУ, которому удовлетворяют кривые этого семейства, нужно продифференцировать по правилу производной сложной функции равенство (1.6) по $x$, считая $y$ функцией от $x$:

$$\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0, \tag{1.7}$$

а затем из уравнений (1.6) и (1.7) исключить параметр $C$. Получим *искомое ДУ первого порядка в общем виде*:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.8}$$

Для построения ДУ, которому удовлетворяют кривые $n$-параметрического семейства $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$, надо продифференцировать последнее равенство $n$ раз по $x$, считая $y = y(x)$, а затем из исходного равенства и полученных $n$ уравнений исключить $C_1, \ldots, C_n$.

*Ортогональной траекторией* семейства кривых (1.6) называется кривая, которая пересекает все линии семейства под прямым углом.

Используя геометрический смысл производной и условие ортогональности $k_1 \cdot k_2 = -1$ для двух направлений с угловыми коэффициентами $k_1$ и $k_2$, дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства (1.6) можно записать на основе уравнения (1.8) в виде

$$F(x, y, -1/y') = 0.$$

Если однопараметрическое семейство кривых задано в полярной системе координат $\Psi(\varphi, \rho, C) = 0$, то для построения ДУ ортогональных траекторий находим предварительно ДУ данного семейства кривых $\mathrm{H}(\varphi, \rho, d\rho/d\varphi) = 0$, в котором далее заменяем $d\rho/d\varphi$ на $-\rho^2/\rho'$, т. е. ДУ ортогональных траекторий в полярной системе координат имеет вид $\mathrm{H}(\varphi, \rho, -\rho^2/\rho') = 0$.

**В задачах 1.21–1.32 составить дифференциальные уравнения данных семейств линий.**

**1.21.** $x + y + C(xy - 1) = 0$. **1.22.** $y = (x - C)^2$.
**1.23.** $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$. **1.24.** $Cy = \cos Cx$.
**1.25.** $C^2x^2 - 2Cy - 1 = 0$. **1.26.** $y = C(x - C)^2$.
**1.27.** $y = \cos(x + C)$. **1.28.** $\rho = 2C(1 - \cos\varphi)$.
**1.29.** $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 4$. **1.30.** $y = C_1 \sin(x + C_2)$.
**1.31.** $x = C\cos^3 t$, $y = C\sin^3 t$. **1.32.** $x = C(t - \sin t)$, $y = C(1 - \cos t)$.

**1.33.** Найти ДУ семейства парабол, проходящих через начало координат, если ось их симметрии есть ось $Ox$.

**1.34.** Построить дифференциальное уравнение семейства окружностей с радиусом 1, центры которых лежат на прямой $y = x$.

**В задачах 1.35–1.38 построить ДУ ортогональных траекторий данных семейств линий.**

**1.35.** $y = Cx^2$. **1.36.** $y^2 - x^2 = C$. **1.37.** $y = Cx$. **1.38.** $\rho^2 = C\cos 2\varphi$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Обосновать единственность решения задачи Коши: **а)** $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $f \in C(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$; **б)** $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$, $f \in C(c, d)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in (c, d)$, $f(y_0) \neq 0$. **2.** Проинтегрировать следующие ДУ и выделить решения с указанными начальными данными: **а)** $y' = x^2 + 1$, $y(0) = 1$; **б)** $y' = \sin x^2$, $x(0) = 2$; **в)** $y' = y$, $y(2) = 0$; **г)** $y' = |y|^{3/2}$, $y(1) = 0$; **д)** $y' = y^{1/3}$, $y(1) = 0$; **е)** $(x + y)^2 y' = 1$, $y(0) = 1$. **3.** Исследовать ДУ $y' = y^\alpha$, $y \geqslant 0$, на особые решения в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}_+$. **4.** Построить ДУ семейства кривых и его ортогональных траекторий: **а)** $y = Cx - C^2$; **б)** $\rho = C\sin 3\varphi$, $\rho$, $\varphi$ — полярные координаты; **в)** $x = C\cos t$, $y = C\sin t$.

# § 2. Геометрические и физические задачи, приводящие к простейшим дифференциальным уравнениям первого порядка

*Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к данной кривой $y = y(x)$. Подкасательная и поднормаль к кривой. Физический смысл производной. Принцип отбрасывания бесконечно малых высших порядков.*

*Для составления дифференциального уравнения в геометрических задачах* (при решении в прямоугольных координатах) полезно сделать чертёж, обозначить уравнение искомой кривой $y = y(x)$. Составление самого уравнения основывается на том фундаментальном факте, что угловой коэффициент $k$ касательной $MT$ к данной кривой $y = y(x)$ в её точке $M(x, y)$ равен производной, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha = y'(x)$, где $\alpha$ — угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс. Отсюда получаем *уравнение касательной* $MT$

$$Y - y = y'(X - x),$$

где $X, Y$ — текущие координаты точки касательной. Уравнение *нормали* $MN$ (перпендикуляра к касательной в точке касания) имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где $X, Y$ — текущие координаты точки нормали.

Найдём также значения *подкасательной* $TP$ ($TP$ — ориентированный отрезок, направленный от $T$ к $P$) и *поднормали* $PN$ ($PN$ — ориентированный отрезок, направленный от $P$ к $N$), являющиеся соответственно проекциями на ось $Ox$ отрезков касательной $MT$ и нормали $MN$ к этой кривой в точке $M$.

Из рис. 2.1, учитывая, что $PM = y$, получаем формулы для длин отрезков (с учётом знаков): *подкасательной* $S_t = TP$, *поднормали* $S_n = PN$, *длины отрезка касательной* $t = MT$, *длины отрезка нормали* $n = MN$, а именно:

$$S_t = \frac{y}{y'}, \quad S_n = yy',$$

$$t = |y/y'|\sqrt{1+y'^2}, \quad n = |y|\sqrt{1+y'^2}.$$

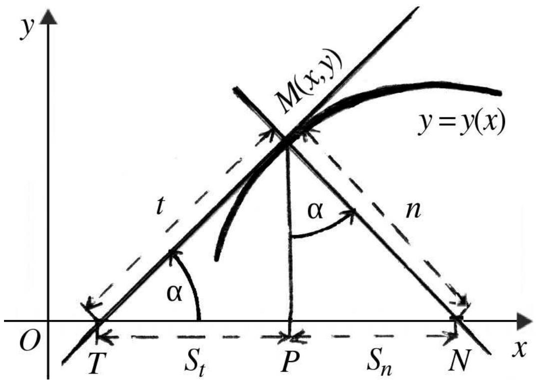


*Рис. 2.1.* Геометрическая интерпретация основных величин

Дифференциальное уравнение геометрической задачи строится исходя из условия, имеющего место в произвольной точке искомой кривой, которое нужно выразить через координаты точки $(x, y)$, где $y = y(x)$, и через значения производной $y'(x)$ в этой точке, причём условие (если оно есть) в отдельной точке будет играть роль начального условия.

Условие геометрической задачи может привести к уравнению, содержащему интеграл с переменным верхним пределом от искомой функции. Такая ситуация встречается, например, в задачах, связанных с площадью, ограниченной искомой кривой, длиной её дуги и т. д. В этом случае интегральное уравнение с помощью операции дифференцирования приводится к дифференциальному уравнению.

*При составлении дифференциального уравнения в физических задачах* прежде всего выбираем, какие из величин мы примем за независимую и зависимую переменные. Иногда уравнение получается сразу на основе физического закона, если воспользоваться *физическим смыслом производной*: пусть $x = x(t)$ — величина, изменяющаяся во времени $t$, тогда $dx/dt$ есть скорость её изменения.

Обычно же при составлении ДУ физической задачи приходится находить соотношения между бесконечно малыми приращениями искомых величин, используя известные физические законы.

Здесь имеет место так называемый **принцип отбрасывания бесконечно малых высших порядков** [22, с. 60; 32, с. 218]. *При составлении дифференциального уравнения первого порядка, связывающего некоторые переменные $t$ и $x$, можно отбросить бесконечно малые высших порядков относительно приращений $\Delta t$ и $\Delta x$ этих переменных, заменяя последние при этом соответственно дифференциалами $dt$ и $dx$.*

В дальнейшем при составлении ДУ первого порядка мы будем вместо бесконечно малых приращений величин писать дифференциалы этих величин, игнорируя члены высшего порядка малости относительно приращений данных величин.

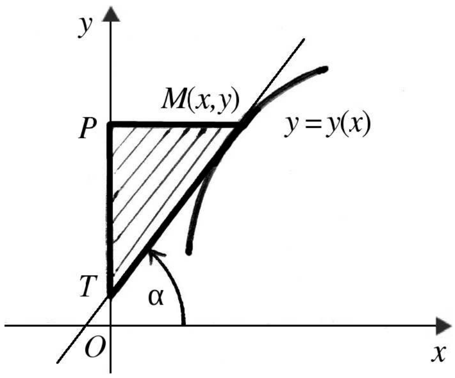
**В задачах 2.1–2.5 найти дифференциальное уравнение кривой по заданному свойству её касательной (или нормали) в любой её точке и решить его.**

**2.1.** Найти кривые со следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к кривой, осью ординат и абсциссой* точки касания, есть величина постоянная, равная $a^2$.

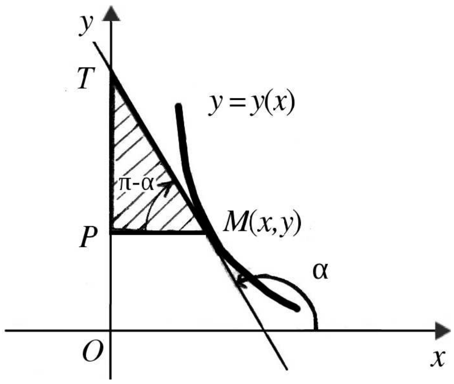
Р е ш е н и е. Задача решается в прямоугольных координатах $x$ и $y$. Не ограничивая общности, искомую кривую расположим в I квадранте $(x > 0, \ y > 0)$ и обозначим её уравнение через $y = y(x)$. Построим треугольник из условия задачи в произвольной точке $M(x, y)$ этой кривой. Возможны следующие расположения треугольника $MPT$ в зависимости от знака производной $y' = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$ — угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс.

В первом случае (рис. 2.2,*а*) имеем $MP = x$, $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $PT = y'x$. Тогда искомое дифференциальное уравнение получаем, используя формулу для площади прямоугольного треугольника $PTM$. Имеем $y'x^2/2 = a^2$. Разрешая это равенство относительно $y'$, получаем простейшее уравнение $y' = 2a^2/x^2$.

Во втором случае (рис. 2.2,*б*) внутренний угол $\angle PMT$ треугольника равен $\pi - \alpha$. Поэтому $PT = x\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -xy'$, а дифференциальное уравнение в этом случае примет вид $y' = -2a^2/x^2$. Интегрируя первое уравнение, получаем $y = -2a^2/x + C$, а для второго — уравнение кривых имеет вид $y = 2a^2/x + C$, т. е. все искомые кривые определяются уравнениями $y = \pm 2a^2/x + C$. □




*а*




*б*

*Рис. 2.2*

**2.2.** Найти кривые, если площадь треугольника, образованного касательной в любой точке кривой, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная $a^2$.

**2.3.** Найти кривую, для которой длина отрезка касательной (см. рис. 2.1) в каждой её точке есть величина постоянная, равная $a$.

**2.4.** Найти кривую, проходящую через точку $M(1, 1)$, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален квадрату ординаты точки касания.

*Здесь и далее в аналогичных задачах под абсциссой (ординатой) понимается перпендикуляр из точки $M(x, y)$ к оси $Oy$ $(Ox)$.

**2.5.** Найти кривые, если сумма длин отрезков нормали и поднормали в каждой точке кривой (см. рис. 2.1) есть величина постоянная, равная $a$.

**Решить задачи 2.6–2.26, используя сформулированные перед ними законы рассматриваемых процессов.**

**В задачах 2.6–2.9 скорость изменения рассматриваемой величины пропорциональна наличному количеству этой величины.**

**2.6.** Используя закон радиоактивного распада: скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент, определить время *полураспада* радиоактивного вещества (время для уменьшения его количества вдвое), если в течение года из каждого грамма этого вещества распадается 1 мг.

Решение. Пусть $x = x(t)$ — количество радиоактивного вещества в момент времени $t$ после начала исследования распада, где время $t$ измеряется в годах, а величина $x$ — в граммах. Используя физический смысл производной и закон радиоактивного распада, получаем простейшее (автономное) дифференциальное уравнение рассматриваемого процесса $dx/dt = -kx$, где коэффициент пропорциональности $k$ (постоянная распада $k > 0$) найдём ниже.

Интегрируя уравнение распада, получим его решение в виде $x(t) = Ce^{-kt}$, где $C$ — произвольная постоянная. Полагая $x(t)|_{t=0} = x(0)$, запишем закон изменения радиоактивного вещества в виде общего решения в форме Коши $x(t) = x(0)e^{-kt}$.

Из условия задачи $x(1) = 1 - 0,001 = 0,999$ г, если $x(0) = 1$. Подставляя эти данные в полученную формулу Коши, находим $k$ из уравнения $0,999 = e^{-k}$, т. е. $k = -\ln 0,999$. Отсюда следует, что $x(t) = x(0)e^{t \ln 0,999}$.

Период полураспада $T$, $x(T) = x(0)/2$, определится из уравнения $x(0)e^{T \ln 0,999} = x(0)/2$, т. е. $T = \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,999} \approx 693$ года.

Заметим корректность понятия «период полураспада» $T$, которое не зависит от начального количества вещества, причём всегда $kT = \ln 2$, где величина $k$ определяется конкретным веществом. □

**2.7.** Найти, через сколько времени останется 1 % от первоначального количества радиоактивного вещества, если *период полураспада* этого вещества равен одному году (см. задачу 2.6).

**2.8.** В исследуемом куске горной породы содержится 50 мг урана и 10 мг уранового свинца. Известно, что *период полураспада* (см. задачу 2.6) урана равен $4,5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы, если предположить, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов, так как они распадаются намного быстрее урана.

**2.9.** Наблюдением установлено, что скорость прироста величин таких биологических популяций, как, например, количество бактерий в чашке Петри или рыб в просторном пруду, пока пищи достаточно много, пропорциональна их количеству $N(t)$ в момент времени $t$. Пусть в начальный момент $t = 0$ их количество было равно $N_0$. Считая в качестве математической модели величину $N(t)$ непрерывной функцией (*так поступают часто в случае дискретной функции*), составьте дифференциальное уравнение размножения особей и постройте его интегральные кривые.

**2.10.** Рассмотреть процесс биологической популяции с учётом смертности её особей. В этом случае скорость роста популяции есть разность между рождаемостью, которая пропорциональна количеству особей, и смертностью, равной квадрату этого количества. Если $x = x(t)$ — количество особей в момент времени $t$, то дифференциальное уравнение роста популяции примет вид $dx/dt = ax - bx^2$. Коэффициенты $a$ и $b$ можно превратить в единицу выбором масштабов $t$ и $x$. Получаем так называемое *логистическое уравнение* $\dot{x} = (1 - x)x$.

Проинтегрировать это уравнение, построить его интегральные кривые и доказать, что любое решение $x = x(t)$ с $x(0) > 0$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 1$.

**В задачах 2.11–2.16 использовать второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, где вектор $\vec{F}$ — сила, действующая на материальную точку массой $m$, вектор $\vec{a}$ — ускорение, которое она получает под действием данной силы. В предложенных задачах за неизвестную функцию удобнее взять скорость.**

**2.11.** Материальная точка массой $m$ кг движется прямолинейно по оси $Ox$ из состояния покоя в начале координат под действием внешней силы*, зависящей только от времени $t$, $F = f(t)$ Н. Построить закон изменения координаты и скорости движущейся точки.

**2.12.** Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 3$ м/с. После выключения мотора он замедляет своё движение под действием

*Сила в дальнейшем измеряется в ньютонах (Н). 1 Н — единица силы — сила, придающая телу с массой 1 кг ускорение 1 м в с$^2$, 1 Н $= 1$ кг $\cdot$ м/с$^2$.

сопротивления воды, которое пропорционально скорости катера, и через 10 с после этого его скорость станет 1 м/с. Когда скорость катера уменьшится до 0,3 м/с? Какой путь при этом пройдёт катер?

Решение. Движение катера происходит по прямой. Примем за ось $Ox$ эту прямую, а за начало координат — начальное положение катера в момент отключения мотора. Катер моделируется как материальная точка, на которую действует сила $\vec{F}$, направленная против движения катера, и её модуль $F = kv$, где $v$ — скорость катера, $k$ – постоянный размерный коэффициент, $k > 0$.

На основании второго закона Ньютона имеем дифференциальное уравнение движения катера $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$. Интегрируя это автономное уравнение, находим его решение $v(t) = Ce^{-k_1 t}$, где $k_1 = k/m$.

Используя начальное условие $v(0) = 3$, получаем $C = 3$ и $v(t) = 3e^{-k_1 t}$. Дополнительное условие $v(10) = 1$ позволяет определить коэффициент $k_1$: $1 = 3e^{-10k_1} \Rightarrow k_1 = (\ln 3)/10$. Отсюда следует закон изменения скорости движения катера $v(t) = 3e^{(-t\ln 3)/10}$.

Время $t_1$, через которое скорость катера уменьшится до 0,3 м/с, находим из уравнения $0,3 = 3e^{-(t_1 \ln 3)/10}$, откуда $t_1 = 10\dfrac{\ln 10}{\ln 3} \approx 21$ с. Длину пути, пройденного катером за $t_1$ секунд, вычислим по формуле

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} v(t)\,dt = \int_0^{t_1} 3e^{-(t\ln 3)/10} dt = \frac{30}{\ln 3} e^{-(t\ln 3)/10}\Big|_{10\frac{\ln 10}{\ln 3}}^{0} =$$

$$= \frac{30}{\ln 3}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{27}{\ln 3} \approx 24,6 \text{ м}. \qquad \square$$

**2.13.** Тело массой $m$ кг падает с некоторой высоты со скоростью $v_0$. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

**2.14.** Самолёт массой $m = 15\,000$ кг в момент приземления имел скорость 50 м/с. Определить, какое расстояние он пройдёт и какую будет иметь скорость через 10 с при выключенном моторе, если суммарное сопротивление движению $R = 20v^2$ Н.

**2.15.** Материальная точка массой $m$ кг падает в среде, сопротивление $R$ которой пропорционально квадрату скорости точки $v$, $R = kv^2$ Н, где $k$ — постоянный размерный коэффициент. Найти закон изменения скорости в зависимости от времени $t$. Показать, что при $t \to +\infty$ скорость приближается к величине $\sqrt{mg/k}$, где $g$ — ускорение свободного падения.

**2.16.** Парашютист прыгнул с высоты 1,6 км, а раскрыл парашют на высоте 0,6 км. Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Сопротивление пропорционально квадрату скорости. Изменением плотности пренебречь. Определить, сколько времени парашютист падал до раскрытия парашюта.

**В задачах 2.17–2.21 считать, что скорость $\boldsymbol{v}$ истечения жидкости из сосуда через отверстие в его дне определяется по формуле $\boldsymbol{v = c\sqrt{2gh}}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянная, зависящая от вида жидкости (например, для воды имеем $\boldsymbol{c = 0,6}$, $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения, $\boldsymbol{h}$ — высота уровня жидкости над отверстием).**

**2.17.** Пусть в дне цилиндрической бочки высотой 2 м и диаметром 1,2 м образовалась щель площадью $6\,\text{см}^2$. Определить, за какое время заполненная водой бочка опорожнится.

Решение. Примем за независимую переменную время $t$, а за искомую функцию $h = h(t)$ — высоту уровня воды над отверстием в момент времени $t$, где высота $h$ измеряется в метрах, а время $t$ в секундах. Имеем $h(0) = 2$. Нужно найти время $t^*$ такое, что $h(t^*) = 0$.

За промежуток времени $dt$ высота $h$ изменится на $-dh$ (уменьшится) и вытечет вода объёмом $-S\,dh$, где площадь дна $S = \pi\cdot 0,6^2 = 0,36\pi$. С другой стороны, этот объём равен объёму столба с основанием площадью $6\cdot 10^{-4}\,\text{м}^2$ и высотой $v\,dt$, где $v = 0,6\sqrt{2gh(t)}$, т. е. имеем объём, равный $6\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{2gh}\cdot 0,6\,dt$. Приравнивая эти объёмы, получаем дифференциальное уравнение истечения жидкости

$$-0,36\pi\,dh = 3,6\cdot 10^{-4}\sqrt{2gh}\,dt.$$

Интегрируя полученное простейшее (автономное) уравнение, имеем

$$t = -\int\frac{0,36\cdot 10^4}{3,6\sqrt{2gh}}\,dh + C = -\int\frac{10^3\pi}{\sqrt{2gh}}\,dh + C = -10^3\pi\sqrt{\frac{2h}{g}} + C.$$

Для определения постоянной $C$ воспользуемся начальным условием $h(0) = 2$, тогда $0 = -2\cdot 10^3\pi/\sqrt{g} + C$ и $C = 2\pi\cdot 10^3/\sqrt{g}$.

Следовательно, закон истечения воды из сосуда примет вид

$$t = \frac{2\pi\cdot 10^3}{\sqrt{g}} - 10^3\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Отсюда, полагая $h = 0$, найдём время опорожнения бочки

$$t^* = 2\frac{10^3\pi}{\sqrt{g}} \approx 2000\,\text{с} = 33\,\text{мин}\ 20\,\text{с}.$$

**Замечание 2.1.** Искомое время $t^*$ можно найти сразу из дифференциального уравнения с помощью определённого интеграла

$$t^* = -\int\limits_2^0 \frac{10^3\pi}{\sqrt{2gh}}\,dh = 10^3\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}\Bigg|_0^2 = 10^3\pi\frac{2}{\sqrt{g}} \approx 2000\,\text{с}. \qquad \square$$

**2.18.** Прямоугольная цистерна с основанием площадью $S = 1\,\text{м}^2$ и высотой $1\,\text{м}$ имеет в дне основания отверстие площадью $3\,\text{см}^2$. За какое время вытечет вода из заполненной доверху цистерны?

**2.19.** Воронка имеет форму кругового конуса диаметром 10 см и высотой 16 см. За какое время вытечет вода из воронки через круглое отверстие диаметром 1 см в её вершине?

**2.20.** В дне котла, имеющего форму полушара с радиусом 1 м и заполненного доверху водой, образовалась щель площадью $1\,\text{см}^2$. Найти время истечения воды из котла.

**2.21.** В заполненном водой сосуде, имеющем форму параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ высотой $z = 1\,\text{м}$, образовалась в дне пробоина площадью $10\,\text{см}^2$. Определить время, за которое объём воды в сосуде уменьшится вдвое.

**В задачах 2.22–2.24 считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания распределяется по всему объёму вместилища равномерно.**

**2.22.** В сосуд, содержащий 16 л воды, непрерывно со скоростью 4 л в минуту поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,25 кг соли, при этом смесь вытекает с такой же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 12 мин?

Решение. Обозначим через $x = x(t)$ количество кг соли в сосуде через $t$ минут после начала опыта. Тогда начальное условие данного процесса примет вид $x(0) = 0$. Требуется найти $x(12)$.

Для построения дифференциального уравнения процесса вычислим, насколько изменится количество соли при изменении времени от $t$ до $t + dt$. За этот период в сосуд поступит $4 \cdot dt$ л раствора, в котором содержится $0,25 \cdot 4dt = dt$ кг соли. В то же время из сосуда вытекает $4 \cdot dt$ л раствора. Так как в любой момент времени $t$ во всём сосуде имеется 16 л раствора, в котором содержится $x(t)$ кг соли, то в 1 л раствора имеем $x(t)/16$ кг соли. Следовательно, вытекающий раствор объёмом $4{\cdot}dt$ л содержит $4x(t)\,dt/16$ кг соли. Итак, изменение соли $dx = x(t{+}dt) - x(t)$ в сосуде есть разность между количеством поступающей $dt$ кг и вытекающей $x(t)\,dt/4$ кг соли, т. е.

$$dx = \left(1 - \frac{x(t)}{4}\right)dt \quad \text{или} \quad dx = \frac{4 - x}{4}\,dt.$$

Из условия задачи (количество соли в растворе возрастает) следует неравенство $dx/dt > 0$ и, следовательно, в силу дифференциального уравнения процесса имеем оценку $x(t) < 4$ при $t \geqslant 0$, а полученное автономное дифференциальное уравнение процесса эквивалентно простейшему уравнению

$$dt = \frac{4}{4-x}\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $t = -4\ln(4-x) + C$. Представим эти решения в виде

$$x(t) = 4 + C_1 e^{-t/4}.$$

Из начального условия $x(0) = 0$ находим $C_1 = -4$.

Итак, количество соли в растворе изменяется по закону

$$x(t) = 4 - 4e^{-t/4},$$

из которого следует, что через 12 мин в сосуде будет $x(12) = 4 - 4e^3 \approx 3,8$ кг соли.

Заметим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 4$. □

**2.23.** Воздух в помещении вместительностью $2700\,\text{м}^3$ содержит 0,12 % $CO_2$. В помещение равномерно доставляют чистый воздух, содержащий 0,04 % $CO_2$; через 10 мин работы вентилятора содержание углекислоты падает до 0,06 %.

Найти: 1) сколько кубических метров наружного воздуха ежеминутно доставляется в помещение; 2) зависимость между временем $t$ работы вентиляции и содержанием $CO_2$.

**2.24.** В баке находится 50 л раствора, содержащего 5 кг соли. В бак непрерывно подаётся вода (10 л в мин), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Через сколько времени концентрация соли в баке достигнет 1 %?

**В задачах 2.25–2.26 считать, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.**

**2.25.** Температура вынутого из печи хлеба в течение 15 мин падает от 100 °C до 75 °C. Температура окружающего воздуха 25 °C. Через какое время от момента выема из печи температура хлеба понизится вдвое?

**2.26.** Определить время совершения отстрела в заповеднике дикого кабана, убитого наповал браконьерами днём, когда температура воздуха менялась мало и была равна 25 °C, если в момент обнаружения туши её температура была 32 °C, а спустя час составила 30 °C. Принять, что температура живого кабана была 37 °C.

# § 3. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной

*Поле направлений. Изоклина. Поле направлений в расширенном смысле. Обобщение понятия интегральной кривой. Метод изоклин.*

Рассмотрим *ОДУ первого порядка в нормальной форме*

$$y' = f(x, y), \tag{3.1}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция, определённая в некоторой области $G$ плоскости $xOy$. Эту область будем называть *областью определения ДУ* (3.1).

В силу теоремы Пеано через каждую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит хотя бы одна интегральная кривая ДУ (3.1). Пусть $y = y(x)$ — некоторое решение ДУ (3.1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Угловой коэффициент $k_0$ касательной к графику решения (*интегральной кривой*) в точке $(x_0, y_0)$ в силу геометрического смысла производной и ДУ (3.1) определяется по формуле

$$k_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0) = f(x_0, y_0), \tag{3.2}$$

где $\alpha_0$ — угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси $Ox$ (рис. 3.1).

Сопоставим теперь каждой точке $(x, y) \in G$ прямую с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$, проходящую через эту точку. Получившуюся картину (рис. 3.2) назовём **полем направлений** ДУ (3.1). Графически *направление поля* в точке будем изображать отрезком касательной единичной длины (для определённости) с центром в этой точке. Направление на отрезке не указываем, оно для нас безразлично.

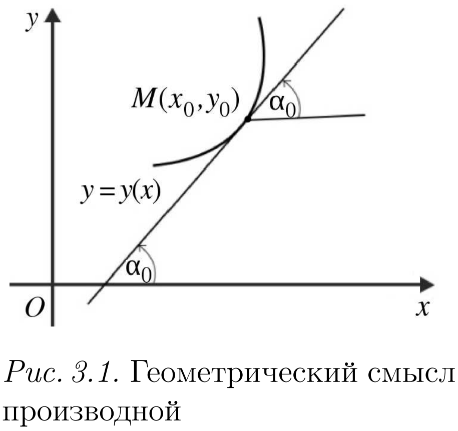



*Рис. 3.1.* Геометрический смысл производной

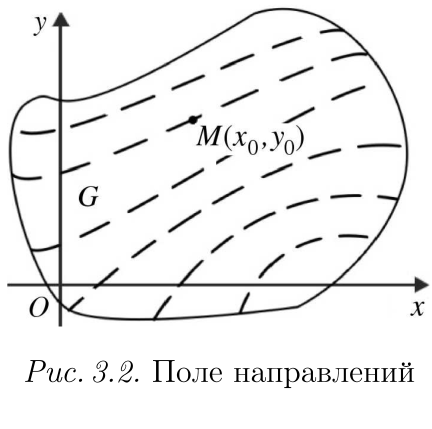



*Рис. 3.2.* Поле направлений

Таким образом, из вышеприведённых определений следует, что кривая, лежащая в области $G$, является *интегральной* ДУ (3.1) тогда и только тогда, когда она *гладкая и направление касательной в каждой точке кривой совпадает с направлением поля в этой точке.*

Поле направлений ДУ даёт некоторое (иногда достаточно полное) представление о поведении интегральных кривых этого ДУ. При его построении полезно использовать *изоклины.*

*Геометрическое место точек* $(x, y) \in G$, *в которых наклон поля, определяемый ДУ* (3.1), *один и тот же, называется изоклиной ДУ* (3.1).

Очевидно, что семейство изоклин ДУ (3.1) определяется уравнением $f(x, y) = k$, где $k$ — допустимая постоянная. Среди всех изоклин важное место занимает *0-изоклина* $f(x, y) = 0$, *на которой расположены возможные точки максимума или минимума интегральных кривых ДУ (3.1).* Для различения точек максимума от точек минимума вычисляют знак $y''(x)$ в точках 0-изоклины. Имеем

$$y''(x) = f'_x + f'_y y' = f'_x + f'_y f(x, y) = f'_x.$$

Отсюда следует, что при выполнении *условия* 1) $f'_x < 0$ или 2) $f'_x > 0$ *в точках 0-изоклины будет соответственно максимум или минимум для решений ДУ* (3.1).

Построение 0-изоклины позволяет разбить область $G$ задания ДУ на области возрастания $G_1 = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ и убывания $G_2 = \{(x, y) : f(x, y) < 0\}$ решений ДУ.

Для более детальной картины можно найти множество возможных точек $(x, y)$ перегиба графиков решений $y = y(x)$, которые в силу формулы для $y''$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) = 0,$$

и выделить области выпуклости вверх $(y'' < 0)$ и выпуклости вниз $(y'' > 0)$.

Полезно следующее утверждение:

**Утверждение 3.1** [5, с. 19]. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывно дифференцируема в* $G$ *и точка* $(x_0, y(x_0))$ — *точка перегиба графика решения* $y = y(x)$, *то эта точка является точкой касания данного графика с изоклиной, проходящей через эту точку.*

Рассмотрим ДУ первого порядка в дифференциальной форме

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{3.3}$$

где $M$ и $N$ — непрерывные функции в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$.

Если точка $(x_0, y_0) \in D$ неособая, то в некоторой её окрестности ДУ (3.3) эквивалентно по меньшей мере одному из ДУ в нормальной форме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \tag{3.4}$$

*Поле направлений в расширенном смысле для ДУ* (3.3) — это объединение полей направлений дифференциальных уравнений (3.4), т. е. это поле определено во всех точках области $D$ за исключением особых.

Аналогично для ДУ в нормальной форме (3.1) *поле направлений в расширенном смысле* есть объединение полей направлений самого ДУ (3.1) и «перевёрнутого» $dx/dy = 1/f(x, y)$.

Таким образом, как для ДУ (3.3), так и для ДУ (3.1) поле направлений в расширенном смысле может иметь среди элементов поля *вертикали.*

В этом параграфе будем рассматривать *интегральные кривые в расширенном смысле,* т. е. такие кривые, которые касаются в каждой своей точке поля направлений в расширенном смысле.

**В задачах 3.1–3.16 с помощью изоклин начертить (приближённо) интегральные кривые (в расширенном смысле) данных уравнений**.

**3.1.** $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1.$

Решение. Область определения ДУ $G = \mathbb{R}^2$. Функция $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2 - 1$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\partial f/\partial y = y$ в области $G$. Тогда в силу теоремы 1 (существования и единственности) через каждую точку области $G$ проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, что интегральные кривые и интегральные кривые в расширенном смысле данного ДУ одни и те же.

Уравнение $k$-изоклины — $x^2 + y^2 = 2(k + 1)$, $k \geqslant -1$, т. е. $k$-изоклины — концентрические окружности радиуса $\sqrt{2(k + 1)}$ с центром в начале координат.

Угол $\alpha$ между направлением поля в любой точке $k$-изоклины и положительным направлением оси $Ox$ определяется по формуле $\alpha = \operatorname{arctg} k$ (или из условия $\operatorname{tg} \alpha = k$) и может быть построен на основе геометрического смысла тангенса или с привлечением тригонометрических таблиц.

0-*изоклина* ДУ — окружность $x^2 + y^2 = 2$. Сразу строим её на плоскости $Oxy$ и вдоль неё элементы поля направлений, параллельные оси $Ox$, так как $k = 0$. Она является линией точек, подозрительных на экстремум, и делит плоскость $Oxy$ на две части, в каждой из которых производная $y'$ имеет один и тот же знак: *внутри круга* $x^2+y^2 < 2$ *справедливо неравенство* $y' < 0$ *(решения убывают), вне этого круга —* $y' > 0$ *(решения возрастают).* Интегральные кривые, пересекая окружность, переходят из области возрастания функции $y$ в область убывания и наоборот, при этом в точках 0-изоклины вдоль решений имеем $y'' = x$, значит, при $x > 0$ эти точки — точки минимума, а при $x < 0$ — точки максимума решений ДУ. Если $x = 0$, то точки $M_1(0, \sqrt{2})$ и $M_2(0, -\sqrt{2})$ являются точками перегиба интегральных кривых $y = y(x)$, проходящих через каждую из этих точек, так как $y''(0) = 0$, а $y'''(0) = 1 \neq 0$. Согласно утверждению 3.1, *каждая из этих точек является точкой касания соответствующей интегральной кривой с* 0-*изоклиной, проходящей через эти точки.*

Придадим $k$ значения $k = 1$ и $k = -1$. Тогда линия $x^2 + y^2 = 4$ — 1-изоклина, угол наклона поля вдоль которой равен $\pi/4$; $-1$-изоклина $x^2+y^2 = 0$ вырождается в точку (0,0), в которой $\alpha = -\pi/4$. Придавая теперь $k$ различные значения, $k \geqslant -1$, построим достаточно густую сеть $k$-изоклин, в точках которых достаточно часто строим параллельно элементы поля направлений в виде отрезков одинаковой длины под углом $\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = k$, к оси $Ox$ (см. рис. 3.3,*а*). Заметим, что при $k \to +\infty$ угол наклона элементов поля стремится к $\pi/2$.

Ввиду простоты поля направлений можно не привлекать всю линию точек перегиба. Нам достаточно информации, чтобы приближённо построить интегральные кривые, касающиеся в каждой своей точке поля направлений (см. рис. 3.3,*б*).

Однако для полноты картины найдём всё-таки линию точек перегиба. В силу данного ДУ имеем $y'' = x + yy' = x + y((x^2 + y^2)/2 - 1)$. Из условия $y'' = 0$

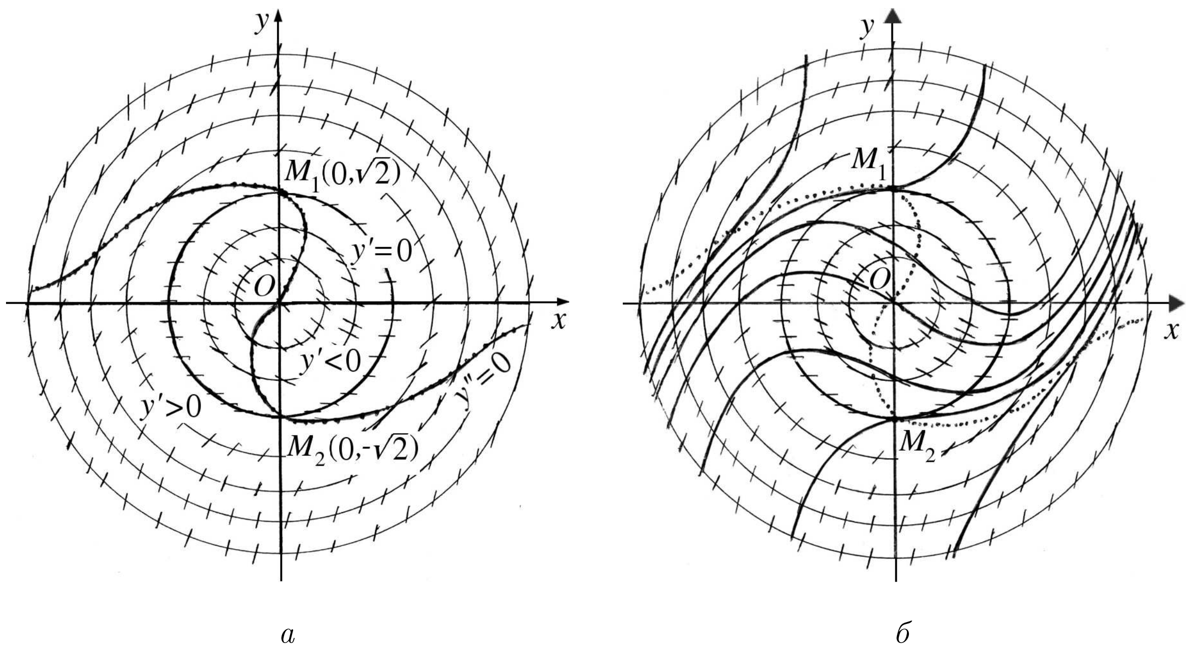



*Рис. 3.3.* Поле направлений (*а*) и интегральные кривые (*б*)

получаем искомую линию $y(x^2+y^2)=2(y-x)$, которая, очевидно, симметрична относительно начала координат (это следует из того, что при замене в её уравнении $x$ на $-x$ и $y$ на $-y$ оно не изменяется) и вдоль которой $|y|\to 0$ при $x\to\infty$.

В полярных координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, где $\rho$ — полярный радиус, $\varphi$ — полярный угол, уравнение линии точек перегиба принимает вид

$$\rho^2 = 2(1-\operatorname{ctg}\varphi)$$

и эта линия легко может быть построена (на рис. 3.3 она изображена пунктиром). □

### 3.2. $y' = x - y$.

Р е ш е н и е. Область определения ДУ $G=\mathbb{R}^2$. Функция $f(x,y)=x-y$ непрерывна в $G$ вместе со своей производной $\partial f/\partial y=-1$ и, следовательно, в силу теоремы о существовании и единственности через каждую точку $(x_0,y_0)\in G$ проходит единственная интегральная кривая.

Изоклины этого ДУ, определяемые уравнением $x-y=k$, есть параллельные прямые. 0-изоклина $x-y=0$, не являющаяся интегральной линией, делит плоскость $xOy$ на две части: в верхней части $(y>x)$ производная $y'<0$ и интегральные кривые здесь убывают, в нижней части $(y<x)$ — $y'>0$ и интегральные кривые возрастают. Отсюда следует, что интегральные кривые в точках прямой $y=x$ достигают минимума. Это следует также из положительности в точках 0-изоклины второй производной $y''=1-y'=1$.

Точки, подозрительные на точки перегиба, определяются из условия

$$y''=1-y'=1-x+y=0 \quad\Rightarrow\quad y=x-1.$$

Однако линия $y=x-1$ является интегральной, кроме того, она является 1-изоклиной. Отсюда в силу единственности получаем, что другие интегральные кривые не могут её пересекать и, следовательно, они не имеют точек перегиба (рис. 3.4).

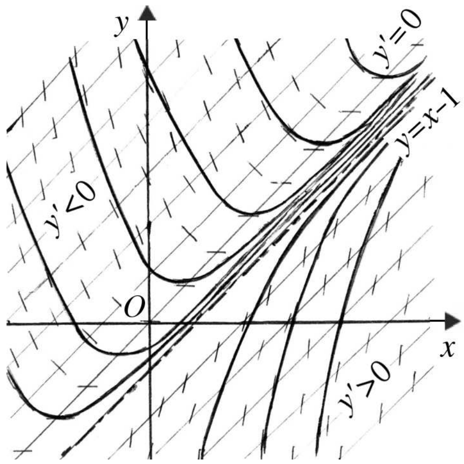



*Рис. 3.4.* Интегральные кривые

Придавая $k$ различные значения, построим сеть изоклин с элементами поля, а далее — приближённо семейство интегральных кривых данного ДУ. □

**3.3.** $2y\,dx - x\,dy = 0.$

Р е ш е н и е. Поле направлений в расширенном смысле этого ДУ есть объединение полей направлений двух ДУ $y' = 2y/x$ и $x' = x/2y$. Оно определено всюду в $\mathbb{R}^2$ за исключением единственной особой точки $(0,0)$ и, очевидно, симметрично как относительно оси $Ox$, так и относительно $Oy$. Это следует из того, что уравнение сохраняет свой вид при замене в нём $x$ на $-x$ или $y$ на $-y$. Объединяя области существования и единственности двух уравнений, получаем, что через каждую неособую точку исходного ДУ проходит единственная интегральная кривая.

Изоклины этого ДУ — полупрямые $2y/x = k$ $(x \neq 0)$ и $x = 0$ $(y \neq 0)$. Придавая $k$ различные значения, получим сеть $k$-изоклин с элементами поля направлений с угловым коэффициентом, равным $k$. Линия 0-изоклина — $y = 0$ $(x \neq 0)$ приводит к решению исходного ДУ $y = 0$. Линия $x = 0$ $(y \neq 0)$ — $\infty$-изоклина данного ДУ, она также доставляет решение исходного ДУ $x = 0$.

Построение поля провели сначала в первом квадранте, а затем в силу симметрии поля относительно осей координат отразили его на всю плоскость. Семейство интегральных кривых также симметрично относительно осей (рис. 3.5, 3.6). $\square$

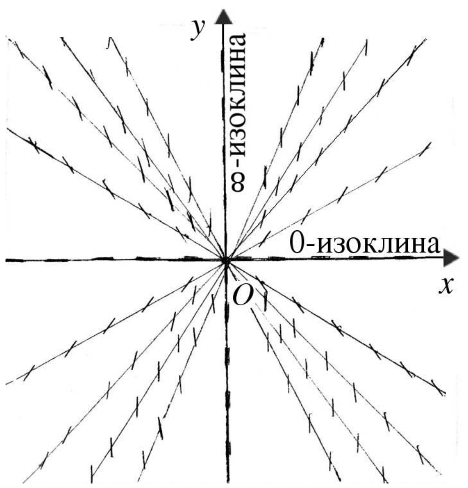



*Рис. 3.5.* Поле направлений. Изоклины — полупрямые

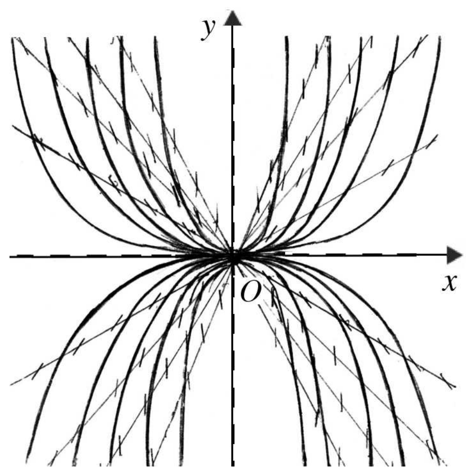



*Рис. 3.6.* Интегральные кривые — полупараболы

**3.4.** $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}.$

Р е ш е н и е. Поле направлений исходного ДУ в расширенном смысле определено в области $G = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$. Точка $(0,0)$ — особая. Через каждую точку $(x_0, y_0) \in$ $\in G$ проходит единственная интегральная кривая (убеждаемся в этом, как и выше, с помощью теоремы о существовании и единственности). Из ДУ следует, что $k$-изоклины — полупрямые:

$$\frac{x+2y}{2x-y} = k \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2k-1}{k+2}x, \quad k \neq -2, \quad x \neq 0;$$

$$k = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad (y \neq 0).$$

Тогда 0-изоклина — $x+2y=0$; $\infty$-изоклина — $2x-y=0$; 1-изоклина — $y=x/3$; $-1$-изоклина — $y=-3x$ (точка $(0,0)$ исключается из этих прямых).

Найдём также угловые коэффициенты элементов поля вдоль осей: а) вдоль оси $x=0$, $y\neq 0$, имеем $k=-2$; б) вдоль оси $y=0$, $x\neq 0$, имеем $k=1/2$.

Для большей точности построения можно добавить ещё несколько изоклин с элементами поля направлений вдоль них. Полученной информации достаточно, чтобы приближённо начертить интегральные кривые ДУ, являющиеся *спиралями,* наматывающимися на особую точку $(0,0)$ (рис. 3.7). $\square$

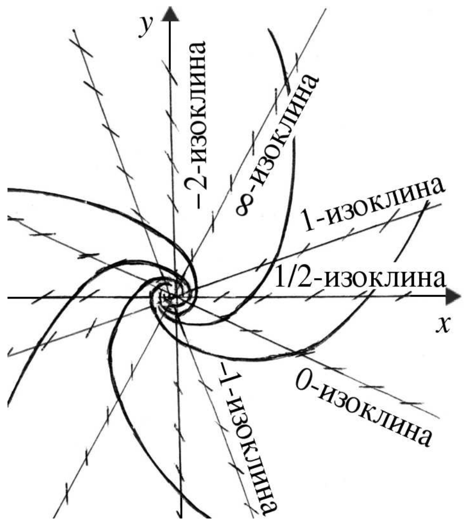



*Рис. 3.7.* Интегральные кривые — спирали

**3.5.** $y'=2x-y+1$.

**3.6.** $y'=y-x^4+2$.

**3.7.** $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$.

**3.8.** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.

**3.9.** $x\,dy=y\,dx$.

**3.10.** $y\,dx+x\,dy=0$.

**3.11.** $y'=x^2+y^2+2y+2$.

**3.12.** $y'=y^2+x$.

**3.13.** $y'=e^y-10x$.

**3.14.** $y'=(y-1)^3-x$.

**3.15.** $yy'=y-x$.

**3.16.** $y'=y^2-x^2$.

**Контрольные вопросы**

**1.** Могут ли интегральные кривые ДУ $y'=f(x,y)$, $f\in C(G)$, пересекаться между собой, касаться друг друга? Тот же вопрос, если функции $f$ и $\partial f/\partial y$ непрерывны в области $G\subset\mathbb{R}^2$.

**2.** Доказать, что поля направлений ДУ $y'=f(x)$ и $y'=f(y)$ переходят в себя при сдвигах соответственно вдоль оси $Oy$ и оси $Ox$.

**3.** Как расположены поля направлений ДУ $y'=f(x,y)$ и $y'=-1/f(x,y)$?

**4.** Найти угол $\alpha$ между интегральными кривыми уравнений $y'=x^2+y^2$ и $y'=x^2-y^2$ в точке $M(1,1)$.

**Мини-самоконтроль.** Построить интегральные кривые ДУ: **1.** $y'=y^2+x^2-2x-3$; **2.** $y^2dx-x^2dy=0$; **3.** $y'=x+y-1$; **4.** $y'=x-y^2$.

# § 4. Уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными

*Уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными. Общий вид таких уравнений в нормальной и дифференциальной формах. Общий интеграл. Решение задачи Коши. Единственность решения задачи Коши.*

Уравнение в дифференциальной форме вида

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$

называется **уравнением с разделёнными переменными**. Будем предполагать, что коэффициенты $M$ и $N$ — непрерывные функции соответственно на промежутках $|a,b|$ и $|c,d|$.

*Общий интеграл уравнения* (4.1) определяется по формуле

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

В дальнейшем под неопределённым интегралом понимается какая-либо фиксированная первообразная. *Общий интеграл* можно записать также в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta = C,$$

в котором $x_0 \in |a,b|$, $y_0 \in |c,d|$ – некоторые фиксированные значения.

Если точка $(x_0, y_0)$ — неособая, то существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (4.1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ и определённое в некоторой окрестности точки $x_0$. Это решение задаётся неявно уравнением

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta = 0.$$

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0, \tag{4.2}$$

где функции $M_1$, $M_2$ и $N_1$, $N_2$ предполагаются непрерывными соответственно на промежутках $|a,b|$ и $|c,d|$, называется **уравнением с разделяющимися переменными.**

В той части области определения уравнения (4.2), где $M_2(x)N_1(y) \neq 0$, уравнение (4.2) путём деления его на функцию $M_2(x)N_1(y)$ (эта операция называется *разделением переменных*) сводится к равносильному уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0.$$

Тогда в этой области *общий интеграл* уравнения (4.2) имеет вид

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = C$$

или (4.3)

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_1(\xi)}{M_2(\xi)}\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{N_2(\eta)}{N_1(\eta)}\,d\eta = C.$$

Если уравнение $M_2(x)N_1(y) = 0$ имеет действительные корни, например $x = \alpha$ $(M_2(\alpha) = 0)$ или $y = \beta$ $(N_1(\beta) = 0)$, то функции $x = \alpha$ и $y = \beta$ всегда являются решениями исходного уравнения (4.2) (в этом легко убеждаемся проверкой). Эти решения нужно присоединить к полученному общему интегралу (4.3). Заметим, что эти решения и только они могут (но не обязательно) оказаться *особыми*.

Уравнение в нормальной форме $y' = f(x, y)$ будет **уравнением с разделяющимися переменными**, если $f(x, y) \equiv \varphi(x)g(y)$.

Очевидно, что уравнение первообразной $y' = f(x)$ является уравнением с разделёнными переменными $dy = f(x)\,dx$, а автономное уравнение $y' = f(y)$ можно решать как уравнение с разделяющимися переменными $dy = f(y)\,dx$.

Рассмотренные выше ДУ *интегрируемы в квадратурах.* Будем говорить, что *дифференциальное уравнение интегрируемо в квадратурах*, если каждое его решение явно или неявно может быть представлено при помощи конечного числа алгебраических операций и квадратур над элементарными функциями и коэффициентами ДУ.

**В задачах 4.1–4.13 решить данные уравнения. Найти также решения, удовлетворяющие поставленным (там, где они указаны) начальным условиям.**

**4.1.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 0;\;\; y(1) = 1.$

Р е ш е н и е. Это *уравнение с разделёнными переменными*, оно определено при $x > 0,\;\; y > 0.$ После интегрирования получаем его *общий интеграл* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C.$

Для построения решения задачи Коши подставим начальные данные $x_0 = 1,$ $y_0 = 1$ в общий интеграл, находим $C = 2.$ *Решением начальной задачи* будет $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ (рис. 4.1). □

**4.2.** $\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = 0;$ **а)** $y(1) = 1;$ **б)** $y(1) = 0.$

Р е ш е н и е. Это *уравнение с разделяющимися переменными*, оно определено при $x \geqslant 0,\;\; y \geqslant 0.$ Разделяя переменные путём деления ДУ на функцию $\sqrt{x}\sqrt{y},$ получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0, \quad [\sqrt{x}\sqrt{y} = 0\,?],$$

*общий интеграл* которого имеет вид $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C.$

Кроме того, функция разделения $\sqrt{x}\sqrt{y}$ равна 0 при $x = 0$ или $y = 0.$ Отсюда следует, что исходное уравнение имеет также *решения* $x = 0,\;\; y \geqslant 0;$ $y = 0,\;\; x \geqslant 0.$ Эти решения не содержатся в формуле общего интеграла ни при каком значении постоянной $C,$ поэтому их надо присоединить к общему интегралу. Итак, *полное семейство решений* определяется по формулам

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = C; \quad x = 0,\; y \geqslant 0; \quad y = 0,\; x \geqslant 0.$$

Решение задачи **а)**. Найдём решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1.$ Подставим начальные данные $x_0 = 1,\;\; y_0 = 1$ в формулу общего интеграла и найдём $C:\;\; \sqrt{1} + \sqrt{1} = C \;\Rightarrow\; C = 2.$ *Искомое решение задачи Коши* определяется уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2.$ Других решений нет, так как начальная точка $(1, 1)$ не лежит ни на одном из решений $x = 0,\;\; y \geqslant 0,$ или $y = 0,\;\; x \geqslant 0.$

Решение задачи **б)**. Найдём решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$ (рис. 4.2). Первым шагом, как и выше, выделим *искомое решение* из формулы общего интеграла. Имеем $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$ Однако для этой задачи Коши

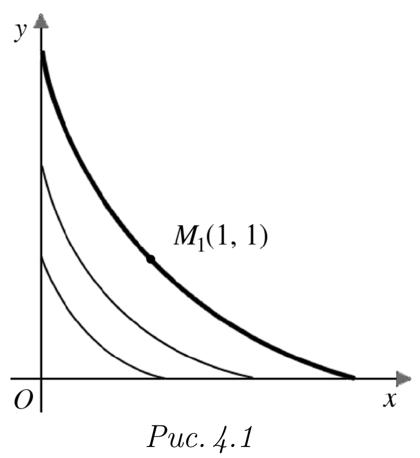


*Рис. 4.1*

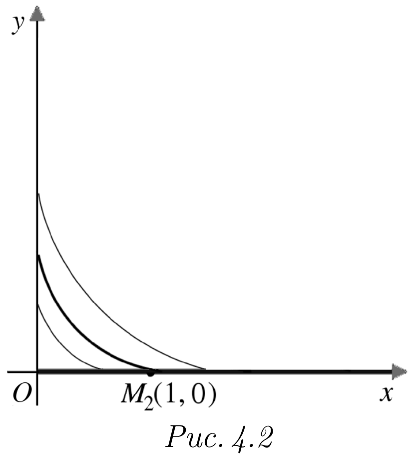


*Рис. 4.2*

начальная точка $(1,0)$ лежит и на решении $y=0,\ x\geqslant 0$, поэтому *искомых решений задачи Коши* будет два: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ и $y=0,\ x\geqslant 0$. $\square$

**Замечание 4.1.** Нетрудно убедиться, что решения $x=0,\ y>0;\ y=0,\ x>0$ — *особые*. В самом деле, например, для второго решения в каждой его точке $(x_0,0),\ x_0>0$, нарушается единственность, так как через эту точку проходит вторая интегральная кривая, определяемая неявно уравнением $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x_0}$, которое получается из общего интеграла при $C=\sqrt{x_0}$.

## 4.3. $xy'+y=y^2$.

Р е ш е н и е. Запишем это уравнение с разделяющимися переменными в дифференциальной форме $x\,dy+(y-y^2)\,dx=0$. Разделим обе части уравнения на $x(y-y^2)$, при этом могут быть утеряны решения исходного ДУ, удовлетворяющие уравнению $y-y^2=0$ ($x=0$ априори в силу определения решения уравнения в нормальной форме не является решением исходного ДУ). Получим

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y(1-y)}=0, \quad [y-y^2=0\,?].$$

Интегрируя ДУ с разделёнными переменными, получаем

$$\ln|x|+\ln|y|-\ln|1-y|=\ln C.$$

Кроме того, уравнение имеет *решения* $y=0,\ y=1$, которые не содержатся в построенном выше общем интеграле. Для удобства выполнения операции потенцирования мы взяли постоянную интегрирования в виде $\ln C$, считая $C>0$.

Тогда *решения исходного уравнения* после потенцирования определяются по формулам

$$\frac{|x||y|}{|1-y|}=C, \quad C>0; \quad y=0; \quad y=1.$$

Раскрывая модуль в левой части общего интеграла, получим $xy/(1-y)=\pm C$, $C>0$. Заметим, что решение $y=0$ можно включить в эту формулу при $C=0$ (однако при $y=1$ формула не имеет смысла).

Поэтому *ответ даём в более простой форме* (в дальнейшем будем это делать сразу, без подробных объяснений):

$$\frac{xy}{1-y}=C, \quad C\in\mathbb{R}; \quad y=1.$$ $\square$

**Замечание 4.2.** Решение $y=1$ не является особым. Почему?

## 4.4. $\sin x\sin y\,dx+\cos x\cos y\,dy=0$.

## 4.5. $y'-\alpha\dfrac{y}{x}=0,\ \alpha$ — $\mathrm{const}\neq 0$.

## 4.6. $x\sqrt{4-y^2}\,dx+y\sqrt{4-x^2}\,dy=0;\ y(0)=2;\ y(0)=1$.

**4.7.** $(xy^2+y^2)\,dx+(x^2-x^2y)\,dy=0;\ \ y(0)=0;\ \ y(1)=1.$

**4.8.** $\sqrt{x-1}\,y'+\sqrt{y-1}=0,\ \ y(2)=1.$

**4.9.** $y'=\sqrt{|y|(1-y)},\ \ y(0)=1.$

**4.10.** $y\sin x\,dx+x\sin y\,dy=0;\ \ y(1)=0.$

**4.11.** $(xy+y-2x-2)\,dx+(xy-y+x-1)\,dy=0.$

**4.12.** $2xy'+y^2=1,\ \ y(1)=-1.$

**4.13.** $y'=|y|,\ \ y(0)=0;\ \ y(0)=1.$

**4.14.** Найти все те кривые, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси $Ox$, пропорциональна квадрату абсциссы точки касания.

Решение. Уравнение искомой кривой обозначим $y=y(x)$ (рис. 4.3). Пусть $M(x,y)$ — любая точка этой кривой, $y=y(x)$. Запишем уравнение касательной к кривой в этой точке. Текущие координаты на касательной обозначим через $X$, $Y$. Тогда имеем $Y-y=y'(X-x)$.

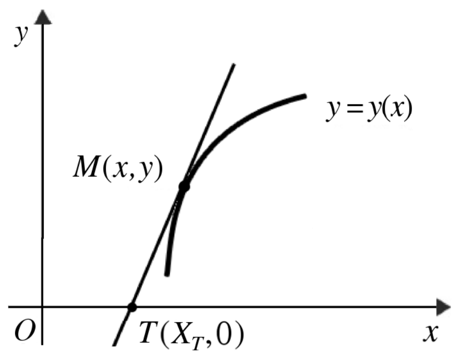



*Рис. 4.3*

Найдём координаты точки $T(X_T,0)$ пересечения касательной с осью $Ox$. Для этого подставим в уравнение касательной $Y=0$ и найдём $X_T$:

$$-y=y'(X_T-x)\Rightarrow X_T=x-(y/y'),$$

т. е. $OT=|X_T|=|x-(y/y')|$.

По условию имеем $|x-(y/y')|=kx^2$, где $k$ — коэффициент пропорциональности. Отсюда следует ДУ искомых кривых $xy'-y=\pm kx^2y'$. Обозначим $k_1=\pm k$. Полученное уравнение перепишем в дифференциальной форме:

$$(x-k_1x^2)\,dy=y\,dx.$$

*Разделяя переменные,* имеем

$$\frac{dx}{x-k_1x^2}=\frac{dy}{y}$$

($x=0,\ y=0,\ x=1/k_1$ не подходят из геометрических соображений). Интегрируя ДУ, получаем

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|1-k_1x| + \ln|C|.$$

Уравнение искомых кривых можно записать в виде $y = Cx(1-k_1x)^{-1}$. □

**4.15.** Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключённый между осями координат, делится пополам в точке касания. Найти кривую, проходящую через точку $(1,2)$, с указанным свойством.

**4.16.** Найти кривую $y=y(x)$, $x>0$, у которой средняя ордината, т. е. величина $(1/x)\int_0^x y(\xi)\,d\xi$, пропорциональна последней ординате $y(x)$.

**4.17.** Найти кривую $y=y(x)$, проходящую через точку $(1,2)$, касательная к которой в каждой точке кривой пересекает прямую $y=1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

**4.18.** Найти кривую, для которой *подкасательная* (см. § 2) в любой её точке $M(x,y)$ равна удвоенной абсциссе точки касания.

**4.19.** Найти ортогональные траектории семейства гипербол $xy=C$.

**4.20.** Найти ортогональные траектории семейства кривых $(x^2 + y^2)^2 = a^2xy$.

Указание. Перейти к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

**4.21.** В резервуар, содержащий 100 л воды с 10 кг соли, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси. Определить, какое количество соли останется в резервуаре через 90 мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Решение. Пусть $x$ — количество воды в резервуаре в момент времени $t$ мин, а $x+dx$ — количество соли в момент времени $t+dt$. Изменение количества соли происходит лишь за счёт вытекания смеси. Объём смеси в резервуаре в момент времени $t$ равен $100+30t-20t = 100+10t$, концентрация соли в этот момент равна $x/(100+10t)$.

С точностью до бесконечно малой высшего порядка относительно $dt$ можем считать, что в течение бесконечно малого промежутка $(t, t+dt)$ концентрация соли остаётся постоянной, поэтому *уменьшение* соли $dx$ в резервуаре за промежуток времени $dt$ (от момента $t$) будет равно

$$\frac{x}{100+10t}\cdot 20\,dt = \frac{2x}{10+t}\,dt.$$

Отсюда следует ДУ исследуемого процесса, для которого $x(0)=10:\ dx = -\dfrac{2x}{10+t}\,dt$. Разделяя переменные в полученном уравнении и интегрируя его, получаем (учитывая, что $x>0$, $10+t>0$)

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{10+t} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln C - 2\ln(10+t) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

В силу начального условия $x(0) = 10$ имеем равенство $10 = C/10^2$, т. е. $C = 1000$.

Таким образом, *закон изменения количества соли* $x$ (в кг), находящейся в резервуаре в момент времени $t$, $x = x(t)$, определяется по формуле $x = 1000/(10+ + t)^2$, где время $t$ измеряется в минутах.

Подставив теперь в полученное решение $t = 90$, находим *количество соли*, оставшейся в резервуаре через 90 мин от начала процесса, $x(90) = 0,1$ кг. ☐

**4.22.** Ракета запущена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 100$ м/с. Сопротивление воздуха замедляет её движение, сообщая ракете отрицательное ускорение $D$, равное $-kv^2$ (где $v$ — мгновенная скорость ракеты, а $k$ — аэродинамический коэффициент). Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

### Задания для самостоятельной работы

**1.** Показать, что замена переменных $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$ в уравнении

$$(y - x)\sqrt{1 + x^2}\, dy = (1 + y^2)^{3/2}\, dx$$

разделяет переменные, и проинтегрировать полученное ДУ с разделяющимися переменными.

**2.** Доказать, что каждая интегральная кривая уравнения $\sqrt[5]{y^4 + 1}\, dx = \sqrt[5]{x^6 + 1}\, dy$ имеет две горизонтальные асимптоты.

**3.** Проинтегрировать ДУ $|y|^\alpha\, dx + |x|^\beta\, dy = 0$, где параметры $\alpha, \beta > > 0$. Найти решения, удовлетворяющие следующим начальным условиям: **а)** $y(0) = 0$; **б)** $y(1) = 0$; **в)** $x(1) = 0$; **г)** $y(1) = 1$. Исследовать, при каких значениях параметров $\alpha$ и $\beta$ область существования и единственности этого ДУ — множество $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

#### Контрольные вопросы

**1.** Укажите область существования, существования и единственности решения задачи Коши для ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными.

**2.** Имеет ли ДУ с разделёнными переменными с непрерывными коэффициентами особые решения?

**3.** Какие решения ДУ с разделяющимися переменными могут оказаться особыми?

**Мини-самоконтроль.** Проинтегрировать следующие ДУ и выделить, там где это указано, решения, удовлетворяющие поставленным условиям: **1.** $xy' + y = x^2y'$; **2.** $(xy + 2x + y + 2)\, dx + (xy - 2x - y + 2)\, dy = 0$; **3.** $y' = \alpha y/x$, $\alpha = \mathrm{const} \neq 0$; **4.** $\sqrt{x - 1}\, dy + \sqrt{y - 1}\, dx = 0$, $y(2) = 1$; **5.** $y' = 2\operatorname{sgn} y\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$; **6.** $y' = = \sqrt{2x + y - 1}$, $y(0) = 1$; **7.** $yx\, dx = \sqrt{x^2 + 1}\, dy$, $y(x)$ ограничено на $\mathbb{R}$.

# § 5. Однородные и приводящиеся к однородным уравнения

*Однородная функция степени $m$. Определение однородного уравнения:* **1)** *в случае уравнения в дифференциальной форме;* **2)** *в случае уравнения в нормальной форме. Уравнение вида* $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ (*случаи* **а)** $\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$; **б)** $\Delta = 0$). *Обобщённое однородное уравнение.*

Функция $g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, называется *однородной степени* $m$, если для любого действительного $\lambda > 0$ выполнено равенство

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m g(x, y), \quad \forall (x, y), \quad (\lambda x, \lambda y) \in D.$$

Например, функции $y/x$, $x/y$, $\ln x - \ln y$ $(x > 0,\ y > 0)$, $\varphi(y/x)$, $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ — однородные функции степени 0, функции $x+y$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ — однородные степени 1.

**Дифференциальное уравнение** вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{5.1}$$

где $M$ и $N$ — непрерывные в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции, **называется однородным**, если коэффициенты $M$ и $N$ — однородные функции одной и той же степени.

Это уравнение *с помощью замены* $y = zx$, $z$ — новая искомая функция, $z = z(x)$, *приводится* при $x \neq 0$ *к эквивалентному уравнению с разделяющимися переменными* (иногда с вычислительной точки зрения целесообразно сделать *замену* $x = yz$, $z = z(y)$). Переход от переменных $(x, y)$ к переменным $(x,\ z = y/x)$ в области, где $x \neq 0$, или к переменным $(z = x/y,\ y)$ в области $y \neq 0$ является диффеоморфизмом и, следовательно, указанные замены переводят решения исходного уравнения в решения преобразованного и наоборот (в соответствующих областях). Линии $x = 0$ в случае первой замены и $y = 0$ в случае второй замены требуют дополнительного исследования.

Однородное ДУ также приводится к уравнению с разделяющимися переменными при переходе к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, где $\rho$ — полярный радиус, $\varphi$ — полярный угол.

*Дифференциальное уравнение* $dy/dx = f(x, y)$ *является однородным, если* $f(x, y)$ *— однородная функция степени* 0 $(f(x, y) \equiv \varphi(y/x))$.

**Уравнения, приводящиеся к однородным.** *Уравнение вида*

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \tag{5.2}$$

в случае если $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, с помощью преобразования переноса $(x, y) \to (u, v)$, $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, где $(x_0, y_0)$ — точка пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$, *приводится к однородному уравнению.*

В случае если определитель $\Delta = 0$ (тогда $a_1/a_2 = b_1/b_2 = \lambda$), уравнение (5.2) может быть записано в виде

$$y' = f\left[\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right] \equiv \varphi(a_2x + b_2y). \tag{5.3}$$

Тогда (см. § 1, 4) с помощью замены $z = a_2x + b_2y$ *уравнение* (5.3) *приводится к уравнению с разделяющимися переменными* (кроме того, преобразованное уравнение не содержит независимой переменной, см. § 1).

**Обобщённым однородным** называют *уравнение* (5.1), *которое приводится к однородному при помощи замены* $y = z^m$ (или $x = z^n$). Число $m$ (или $n$) *априори* не известно. Для его нахождения подставим $y = z^m$ (или $x = z^n$) в уравнение (5.1) и выясним, существует ли такое число $m$ (или $n$), при котором преобразованное уравнение становится однородным. Если это число удаётся найти, то на практике удобнее воспользоваться *заменой* $y = ux^m$ (или $x = vy^n$), *приводящей сразу обобщённое однородное ДУ к уравнению с разделяющимися переменными.*

**Решить уравнения 5.1–5.23.**

**5.1.** $(4x - 3y)\,dx + (10y - 3x)\,dy = 0.$

Р е ш е н и е. Данное уравнение является однородным, так как его коэффициенты $M = 4x - 3y$, $N = 10y - 3x$ — однородные функции одной и той же степени (степени 1).

Введём замену $y = zx$, где $z = z(x)$ — новая искомая функция, при этом $dy = x\,dz + z\,dx$, получим $(4x - 3xz)\,dx + (10xz - 3x)(x\,dz + z\,dx) = 0$. Сокращая на $x$ (проверкой убеждаемся, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения) и приводя подобные члены, имеем уравнение с разделяющимися переменными $(4 - 6z + 10z^2)\,dx + x(10z - 3)\,dz = 0$.

Отсюда, разделяя переменные

$$\frac{2\,dx}{x} + \frac{10z - 3}{2 - 3z + 5z^2}\,dz = 0$$

(заметим, что $5z^2-3z+2\neq 0$) и интегрируя, получаем $2\ln|x|+\ln|2-3z+5z^2| = \ln C$, следовательно, имеем $x^2(2-3z+5z^2)=C$. Возвращаясь к переменным $x$ и $y$, получим *общий интеграл* исходного ДУ $2x^2-3yx+5y^2=C$. □

**5.2.** $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0,\ \ x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0.$

Решение. Данное уравнение является однородным. Замена переменных $x = zy$, где $z=z(y)$ — новая искомая функция, приводит уравнение при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ к виду $(2y\sqrt{z}-yz)\,dy+y(y\,dz+z\,dy)=0$ или $2y\sqrt{z}\,dy+y^2\,dz=0$. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y}+\frac{dz}{2\sqrt{z}}=0, \quad [y=0, \quad z=0\,?].$$

Интегрируя, получаем $\ln|y|+\sqrt{z}=C$. Кроме того, очевидно, *решениями* будут $y=0$ (проверяем) и $z=0$; эти решения не содержатся в полученной формуле общего интеграла. Возвращаясь к старым переменным, имеем *полное семейство решений*:

$$\ln y+\sqrt{\frac{x}{y}}=C, \quad x\geqslant 0, \quad y>0; \quad x=0 \ \ (y\geqslant 0); \quad y=0 \ \ (x\geqslant 0). \qquad \square$$

**5.3.** $y'=\dfrac{y}{x}(\ln y-\ln x).$

Решение. Уравнение перепишем в виде $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $y>0$, $x>0$. Правая часть этого ДУ в нормальной форме — однородная функция нулевой степени, поэтому это *уравнение — однородное.* Замена переменных $y=zx$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными $z'x+z=z\ln z$ или $x\,dz+z(1-\ln z)\,dx=0$.

Разделяя переменные, получаем уравнение

$$\frac{dx}{x}+\frac{dz}{z(1-\ln z)}=0, \quad [1-\ln z=0\,?].$$

Интегрируя, имеем $\ln|x|-\ln|1-\ln z|=\ln C$ или $x^{-1}(1-\ln z)=C$. *Решением* также будет $z=e$, которое содержится в формуле общего интеграла при $C=0$. Возвращаясь к старым переменным, получим *полное семейство решений*:

$$x^{-1}\left(1-\ln\frac{y}{x}\right)=C \quad (x>0, \quad y>0) \ \text{ или } \ y=xe^{1+C_1x}, \quad x>0. \qquad \square$$

**5.4.** $(x+2y)\,dx+y\,dy=0.$

**5.5.** $x\,dx+(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,dy=0.$

**5.6.** $(x+y)\,dx=(y-x)\,dy.$

**5.7.** $(y^2-2xy-x^2)\,dx+2x^2\,dy=0.$

**5.8.** $xyy'=y^2+x^2e^{y^2/x^2}.$

**5.9.** $x\,dx-y\,dy=\sqrt{x^2+y^2}\,dy,\ x>0.$

**5.10.** $xy\,dx=(x^2+y^2)\,dy.$

**5.11.** $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$

**5.12.** $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

**5.13.** $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right) dx + x\cos\dfrac{y}{x}\, dy = 0$.

**5.14.** $(x - 2y + 5)\, dx + (2x - y + 4)\, dy = 0$.

Р е ш е н и е. Уравнение имеет вид (5.2), в котором величина $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, и, следовательно, приводится к однородному уравнению с помощью замены переноса $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, где $(x_0, y_0)$ — точка пересечения прямых

$$x - 2y + 5 = 0, \quad 2x - y + 4 = 0.$$

Отсюда следует, что $x_0 = -1$, $y_0 = 2$. В исходном уравнении произведём замену переменных $x = u - 1$, $y = v + 2$. Имеем $dx = du$, $dy = dv$. Преобразованное уравнение $(u - 2v)\, du + (2u - v)\, dv = 0$ является однородным, в котором делаем замену $u = zv$, где $z = z(v)$. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(zv - 2v)(z\, dv + v\, dz) + (2zv - v)\, dv = 0 \text{ или } (z^2 - 1)\, dv + (z - 2)v\, dz = 0$$

(проверкой убеждаемся, что $v = 0$ не является решением однородного уравнения). Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dv}{v} + \frac{z - 2}{z^2 - 1}\, dz = 0, \quad [z^2 - 1 = 0\,?].$$

Так как $\dfrac{z - 2}{z^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{z + 1} - \dfrac{1}{z - 1}\right)$, то предыдущее уравнение после интегрирования и потенцирования примет вид

$$2\ln|v| + 3\ln|z + 1| - \ln|z - 1| = \ln C \text{ или } v^2(z + 1)^3 = C(z - 1).$$

Кроме того, *решениями* уравнения с разделяющимися переменными будут $z = -1$ и $z = 1$, при этом решение $z = -1$ содержится в полученной формуле при $C = 0$.

Возвращаясь к старым переменным, получим *полное семейство решений*

$$(x + y + 3)^3 = C(x - y - 1); \quad x - y - 1 = 0. \qquad \square$$

**5.15.** $(x + y - 1)\, dx + (3x + 3y - 1)\, dy = 0$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение имеет вид (5.2), в котором определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что с помощью замены $z = x + y$, $z = z(x)$, уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. В силу замены имеем $dy = dz - dx$ и преобразованное уравнение примет вид

$$(z - 1)\, dx + (3z - 1)(dz - dx) = 0 \text{ или } -2z\, dx + (3z - 1)\, dz = 0.$$

Разделив переменные, получим

$$-2\, dx + \left(3 - \frac{1}{z}\right) dz = 0, \quad [z = 0\,?].$$

Интегрируя, имеем равенство $3z-2x-\ln|z|=C$. Кроме того, *решением* будет $z=0$. Возвращаясь к старым переменным $x$ и $y$, получаем *полное семейство решений*

$$x+3y-\ln|x+y|=C; \quad y=-x. \qquad \square$$

**5.16.** $(3y-7x+7)\,dx+(7y-3x+3)\,dy=0$.

**5.17.** $(2x-y+3)\,dx-(2y-x-3)\,dy=0$.

**5.18.** $(2x-y+5)\,dx+(4x-2y)\,dy=0$.

**5.19.** $(x-y+1)\,dx-(2x-2y+3)\,dy=0$.

**5.20.** $y'=y^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Решение. Покажем, что это *уравнение — обобщённое однородное*. Выполним в данном уравнении замену $y=z^m$, $z=z(x)$. Имеем $y'=mz^{m-1}z'$ и уравнение примет вид $mz^{m-1}z'=z^{2m}+x^{-2}$. Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени однородности всех его членов равны между собой, т. е. $m-1=2m=-2$. Очевидным решением этой системы является $m=-1$. Таким образом, исходное уравнение — обобщённое однородное, замена $y=1/z$ приводит исходное ДУ к однородному уравнению. Однако делаем *сразу* замену $y=ux^m=ux^{-1}$, приводящую данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Получим $u'x^{-1}-ux^{-2}=u^2x^{-2}+x^{-2}$ или $xu'=u^2+u+1$.

Разделяя переменные, будем иметь $du/(u^2+u+1)=dx/x$. Отсюда после интегрирования следует соотношение $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}=\ln|x|+C$. В силу замены имеем $u=xy$, *общий интеграл* исходного ДУ примет вид

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2xy+1}{\sqrt{3}}=\ln|x|+C. \qquad \square$$

**5.21.** $(2x^3-2xy)\,dx+(y+x^2)\,dy=0$.

**Указание.** Проиллюстрируем на этом примере второй способ нахождения возможного числа $m$, обеспечивающего однородность левой части уравнения $2x^3\,dx-2xy\,dx+y\,dy+x^2\,dy$ при условии, что $x$, $y$, $dx$ и $dy$ считаются однородными величинами соответственно степеней $1$, $m$, $0$ и $m-1$. Для этого число $m$ должно удовлетворять следующим равенствам: $3=1+m=m+m-1=2+m-1$. Очевидно, число $m=2$ удовлетворяет этой системе уравнений. Таким образом, исходное уравнение является *обобщённым однородным, а замена* $y=zx^2$, $z=z(x)$, *приводит его к уравнению с разделяющимися переменными.*

**5.22.** $y(1+\sqrt{y^3/x-1})\,dx=3x\,dy$.

**5.23.** $(x^6+3y^2)dx-x(x^3+y)dy=0$.

**В задачах 5.24–5.28 найти интегральные кривые, проходящие через заданную начальную точку.**

**5.24.** $(x+2y)\,dx-x\,dy=0$; $M(1,-1)$.

**5.25.** $(y+\sqrt{y^2-x^2})\,dx-x\,dy=0$, $x\geqslant 0$; $M(1,1)$.

**5.26.** $(x-y+1)\,dx+(x+y-1)\,dy=0$; $M(1,1)$.

**5.27.** $(x-y+1)\,dx-(2x-2y+3)\,dy=0$; $M(1,3)$.

**5.28.** $y'=4x-2x^3/y$; $M(1,1)$.

**5.29.** Найти интегральную кривую ДУ $y\,dx-(2x+y)\,dy=0$, пересекающую прямую $x=2$ под прямым углом.

**5.30.** Доказать, что интегральные кривые уравнения

$$(ax+by)\,dx+(ay-bx)\,dy=0, \quad |a|+|b|\neq 0,$$

являются логарифмическими спиралями.

Решение. Выполним в ДУ замену переменных к полярным координатам (её подсказывает условие задачи) $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, где $\rho$ — *полярный радиус,* $\varphi$ — *полярный угол.* Тогда в силу замены имеем $dx=\cos\varphi\,d\rho-\rho\sin\varphi\,d\varphi$, $dy=$ $=\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi\,d\varphi$.

Применение этой замены приводит исходное ДУ (после очевидных арифметических преобразований) к уравнению

$$a\rho d\rho=b\rho^2 d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{d\rho}{\rho}=\frac{b}{a}\,d\varphi \quad\Rightarrow\quad \ln|\rho|=\frac{b}{a}\varphi+\ln C,$$

откуда следует, что $\rho=Ce^{b\varphi/a}$, а это — уравнение логарифмических спиралей. □

**5.31.** Найти уравнение такой кривой, чтобы длина отрезка нормали, проведённой из произвольной точки кривой до оси абсцисс, была равна длине отрезка, отсекаемого той же нормалью на оси $Ox$.

Решение. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка на искомой кривой $y=y(x)$, $N(X_N,0)$ — точка пересечения нормали к кривой в точке $M$ с осью абсцисс. По условию $MN=ON$. Для нахождения отрезка $ON$ запишем уравнение нормали в точке $(x,y)$ к искомой кривой $y=y(x)$ (рис. 5.1):

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

где $X$, $Y$ — текущие координаты нормали. Тогда отрезок $ON$ определяется из уравнения нормали, в котором полагаем $Y=0$ и находим $X_N$: $X_N=x+yy'$. Отсюда следует, что $ON=|x+$ $+yy'|$. Длина отрезка нормали $MN$ определяется из треугольника $MNP$: $MN=\sqrt{MP^2+NP^2}$, где $MP=y$, $\operatorname{tg}\angle MNP=-1/y'$, $NP=|yy'|$, т. е. $MN=\sqrt{y^2+y^2y'^2}$.

Итак, ДУ, которому должна удовлетворять искомая кривая, имеет вид

$$|x+yy'|=\sqrt{y^2+y^2y'^2}.$$

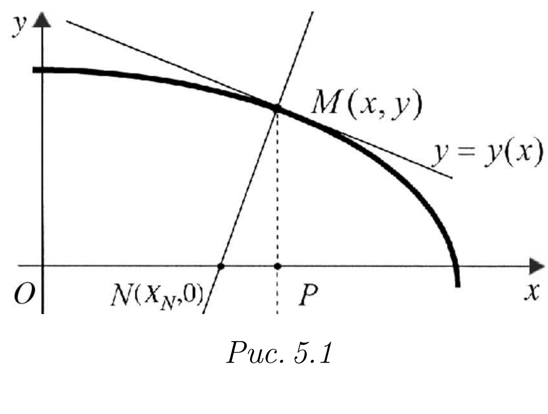


*Рис. 5.1*

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим *однородное уравнение* $2xyy' = y^2 - x^2$. В дифференциальной форме оно примет вид

$$(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Выполняя замену $y = zx$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$(z^2+1)\,dx + 2xz\,dz = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} + \frac{2z}{z^2+1}\,dz = 0 \;\Rightarrow\; \ln|x| + \ln|z^2+1| = \ln C.$$

После потенцирования имеем $x(z^2+1) = C$ и, возвращаясь к старым переменным, получим *уравнение искомых кривых* $y^2 + x^2 = Cx$. □

**5.32.** Найти кривую, расположенную в первом квадранте, для которой отношение длины отрезка, отсекаемого касательной на оси $Oy$, к радиус-вектору точки касания есть величина постоянная, равная $k$.

**5.33.** Найти кривую, расположенную в первом квадранте, для которой отношение длины отрезка, отсекаемого касательной на оси $Ox$, к длине отрезка, отсекаемого нормалью на оси $Oy$, равно $k$.

**5.34.** Найти кривую, если *поднормаль* (см. § 2) для всякой точки кривой есть среднее арифметическое координат этой точки.

**5.35.** Найти кривую, проходящую через точку $(1, 1)$, если произведение абсциссы любой точки $M(x, y)$ кривой на абсциссу точки пересечения нормали к кривой в точке $M$ с осью $Ox$ равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки $M$.

### Задания для самостоятельной работы

**1.** Пусть $\varphi : |a, b| \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Укажите области существования и единственности для ДУ $y' = \varphi(y/x)$. Какие решения этого ДУ могут быть особыми?

**2.** Докажите, что если все интегральные кривые некоторого ДУ (5.1) подобны между собой с центром подобия в начале координат, то это уравнение однородное.

#### Контрольные вопросы

**1.** Какая точка однородного ДУ (5.1) является особой?

**2.** Что представляют собой изоклины однородного ДУ? Обоснуйте свойство инвариантности его поля направлений относительно гомотетий с центром $(0, 0)$.

**3.** Нарисовать интегральные кривые уравнения $dy/dx = y/x + y^2/x^2$, $x > 0$.

**4.** Какая замена приводит ДУ $dy/dx = x^2 + y^{2/3}$ к уравнению с разделяющимися переменными?

**Мини-самоконтроль.** Проинтегрировать ДУ: **1.** $y' = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$; **2.** $(y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$; **3.** $(y + x^3)\,dy + (3x^5 - 3x^2y)\,dx = 0$.

# § 6. Линейные уравнения первого порядка

*Линейные однородные уравнения. Линейные неоднородные уравнения. Соответствующее линейное однородное уравнение. Метод интегрирующего множителя. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Метод Бернулли. Общие решения линейного однородного и неоднородного уравнений. Общее решение в форме Коши.*

**Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) первого порядка** называется уравнение

$$y' + p(x)y = 0, \tag{6.1}$$

которое является частным случаем уравнения с разделяющимися переменными.

**Линейным неоднородным уравнением (ЛНДУ) первого порядка** называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{6.2}$$

Уравнение (6.1) будем называть *соответствующим* (6.2) *ЛОДУ.*

*Будем предполагать*, что функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны на интервале $(a, b)$.

Существует несколько методов решения этого уравнения.

**Метод интегрирующего множителя (метод Эйлера).** Умножим обе части уравнения (6.2) на *интегрирующий множитель* $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, получим равносильное ДУ

$$y'e^{\int p(x)\,dx} + p(x)e^{\int p(x)\,dx}y = q(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int p(x)\,dx}\right] = q(x)e^{\int p(x)\,dx},$$

интегрируя которое, получаем

$$ye^{\int p(x)\,dx} = C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения (6.2) имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx\right]. \tag{6.3}$$

**Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).** Рассмотрим соответствующее (6.2) *ЛОДУ* (6.1). Разделив в нём переменные, получим, что его решения имеют вид $y = Ce^{-\int p(x)\,dx}$. Решения линейного неоднородного уравнения (6.2) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{6.4}$$

где $C(x)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Для определения $C(x)$ подставим (6.4) в (6.2), получим уравнение $C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x)$, из которого находим

$$C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx, \tag{6.5}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Подставляя (6.5) в (6.4), приходим к (6.3).

**Метод Бернулли.** Решение уравнения (6.2) ищем в виде

$$y = u(x)v(x). \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в уравнение (6.2), имеем

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x) \quad \Rightarrow \quad v\frac{du}{dx} + \left[\frac{dv}{dx} + p(x)v\right]u = q(x).$$

Выберем в качестве $v(x)$ одно из решений уравнения $\dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0$, например, $v = e^{-\int p(x)\,dx}$. Тогда функцию $u(x)$ находим из уравнения $e^{-\int p(x)\,dx}\dfrac{du}{dx} = q(x)$, и получаем $u(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx$, где $C$ — произвольная постоянная. Подставив эти выражения для $u(x)$ и $v(x)$ в формулу (6.6), получим общее решение (6.3). Очевидно, что искомые функции $u$ и $v$ равноправны.

*Решение уравнения (6.2), удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, можно на основе формулы (6.3) записать в виде

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}\,dt\right). \tag{6.7}$$

Отсюда следует, что такое решение существует, единственно и определено на всём интервале непрерывности коэффициентов ДУ (6.2).

По этой причине линейное ДУ (6.2) не имеет особых решений в области $a < x < b,\ y \in \mathbb{R}$.

Формула (6.7), в которой $x_0$ зафиксировано, а $y_0 \in \mathbb{R}$ играет роль произвольной постоянной, определяет *общее решение ДУ* (6.2) *в форме Коши.*

Если линейное уравнение записать в дифференциальной форме, то оно примет вид $dy + [p(x)y - q(x)]\,dx = 0$.

Может оказаться, что дифференциальное *уравнение линейно относительно переменной* $x$ как функции $y$, $x = x(y)$. Нормальная форма такого уравнения — $\dfrac{dx}{dy} + r(y)x = s(y)$, а в дифференциальной форме оно перепишется в виде $dx + [r(y)x - s(y)]\,dy = 0$.

**Решить уравнения 6.1–6.13.**

**6.1.** $y' + 2xy = x^3$.

Решение. Решим это линейное уравнение *методом интегрирующего множителя*, который определяется по формуле $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} \equiv e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Умножив обе части уравнения на $\mu(x)$, получим уравнение

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = x^3e^{x^2},$$

в котором левая часть есть точная производная от функции $ye^{x^2}$: $\dfrac{d}{dx}(ye^{x^2}) = x^3e^{x^2}$.

Интегрируя по $x$ обе части уравнения, имеем

$$ye^{x^2} = \int x^3e^{x^2}\,dx + C = \frac{1}{2}\int x^2e^{x^2}\,dx^2 + C = \frac{1}{2}(x^2e^{x^2} - e^{x^2}) + C.$$

Отсюда получаем *общее решение* уравнения

$$y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2 - 1). \qquad \square$$

**6.2.** $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2\sin x$.

Решение. Уравнение определено на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. На каждом из этих интервалов *интегрирующий множитель* находится по формуле

$$\mu(x) = \exp\left(-\int\frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(-2\ln|x|) = \frac{1}{x^2}.$$

После умножения на $\mu(x)$ имеем $\dfrac{1}{x^2}y' - \dfrac{2}{x^3}y = \sin x$ или $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = \sin x$. Отсюда $y/x^2 = -\cos x + C$, т.е. *общее решение* ДУ имеет вид $y = Cx^2 - x^2\cos x$. $\square$

**6.3.** $y' - \dfrac{1}{2x} y = \sqrt{x}(x+1)$.

Р е ш е н и е. Область определения этого уравнения $x > 0$. Решим уравнение *методом вариации произвольной постоянной*. Интегрируя соответствующее линейное однородное уравнение $y' - y/(2x) = 0$ как уравнение с разделяющимися переменными, получаем его общее решение $y = C\sqrt{x}$ на интервале $(0, +\infty)$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)\sqrt{x}$, где $C(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, для нахождения которой последнее выражение для $y$ подставим в исходное уравнение. Получим

$$C'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{C(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}C(x)\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}(x+1),$$

$$C'(x)\sqrt{x} = \sqrt{x}(x+1), \quad C'(x) = x+1, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. *Общее решение исходного уравнения* определяется формулой

$$y = \left(C + \frac{x^2}{2} + x\right)\sqrt{x} = C\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2} + x\sqrt{x}, \quad x \geqslant 0. \qquad \square$$

**6.4.** $y' - y \operatorname{tg} x = \sin x$.

Р е ш е н и е. По *методу Бернулли* ищем решения этого уравнения в виде произведения двух функций $y = u(x)v(x)$. После его подстановки в уравнение имеем $u'v + u(v' - v\operatorname{tg} x) = \sin x$. Выберем функцию $v$ так, чтобы $v' - v\operatorname{tg} x = 0$. Решим это уравнение с разделяющимися переменными и выберем одно из его решений, например, $v(x) = 1/\cos x$. Тогда функция $u(x)$ определяется из уравнения $u'(x)/\cos x = \sin x$ и $u(x) = \int \sin x \cos x \, dx = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$. Следовательно, *общее решение* исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{C}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{2\cos x}. \qquad \square$$

**6.5.** $(2x + y^4)y' = y$.

Р е ш е н и е. Это уравнение не является линейным относительно $y$, но оно линейно относительно $x$ как функции $y$. Действительно, по правилу производной обратной функции $y'_x = 1/x'_y$ уравнение можно переписать в виде

$$2x + y^4 = yx' \quad \Rightarrow \quad x' - 2x/y = y^3, \quad [y = 0\,?].$$

Интегрирующим множителем этого уравнения будет $\mu(y) = e^{-\int (2/y)\,dy} = 1/y^2$. Умножая последнее уравнение на $\mu(y)$, имеем

$$\frac{x'}{y^2} - 2\frac{x}{y^3} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y^2}\right) = y.$$

Интегрируя по $y$ обе части последнего уравнения, получаем, что *общее решение* исходного уравнения неявно определяется по формуле $x = y^4/2 + Cy^2$. Кроме того, *решением* этого ДУ является $y = 0$, которое не содержится в полученной формуле. $\square$

**6.6.** $y' + \dfrac{2}{x}y = 5x^2 + 4x$.

**6.7.** $(y-y^2)\,dx + (2xy - x + y^2)\,dy = 0$.

**6.8.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin y}{x\cos y + \sin 2y}$.

**6.9.** $(2xye^{x^2} - x\sin x)\,dx + e^{x^2}\,dy = 0$.

**6.10.** $(x^2 + y)\,dx - 2x\,dy = 0$.

**6.11.** $(2x + y^3)y' = y$.

**6.12.** $x^2y' + xy = \ln x$.

**6.13.** $dy/dx + y\cos x = xe^{-\sin x}$.

**Решить в 6.14–6.16 задачи Коши.**

**6.14.** $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2;\ \ y(1) = 2$.

**6.15.** $y' - \dfrac{1}{2x}y = x;\ \ M(1,1)$.

**6.16.** $y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0;\ \ x_0 = 1,\ \ y_0 = 1$.

**6.17.** Найти решение ДУ $xy' + y = 2x$, которое остаётся ограниченным при $x \to 0$.

**6.18.** Найти решение ДУ $y' - 2xy = 2x + 1$, которое остаётся ограниченным при $x \to +\infty$.

**С помощью дифференцирования привести уравнения 6.19–6.21 к линейным и решить их.**

**6.19.** $y(x) = 2\int_0^x y(t)\,dt + e^{2x} + 1$.

Р е ш е н и е. Продифференцируем по $x$ обе части уравнения, получим линейное уравнение $y'(x) = 2y(x) + 2e^{2x}$.

Очевидно, что решения исходного интегрального уравнения содержатся среди решений полученного ДУ. Однако обратное неверно. Для выделения искомого решения найдём какое-либо начальное условие, которому оно удовлетворяет. Такое условие получается из интегрального уравнения при $x = 0$: $y(0) = 2$.

Решим линейное ДУ $y' - 2y = 2e^{2x}$, получим $y = Ce^{2x} + 2xe^{2x}$. Исходя из начального условия $y(0) = 2$, находим $C = 2$. Следовательно, функция $y = 2e^{2x} + 2xe^{2x}$ есть *искомое решение интегрального уравнения.* $\square$

**6.20.** $\int_0^x (x^2 - t^2)y(t)\,dt = x^4 + \int_0^x ty(t)\,dt$.

**6.21.** $y(x) = \int_0^x 2ty(t)\,dt + e^x$.

**6.22.** Найти кривые, если площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и радиус-вектором точки касания, есть величина постоянная, равная $a^2$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение касательной $MA$ к кривой $y = y(x)$ в точке $M(x, y)$, имеем $Y - y = y'(X - x)$, где $X, Y$ — текущие координаты касательной.

Найдём абсциссу точки пересечения $A(X_A, 0)$ касательной с осью абсцисс. Подставляя $Y = 0$ в уравнение касательной, находим $X_A = x - y/y'$. Тогда $OA = |x - y/y'|$. По условию задачи получаем ДУ $\frac{1}{2}y\left(x - \frac{y}{y'}\right) = \pm a^2$, при этом знак «$-$» соответствует расположению кривой на рис. 6.1, *слева*; знак «$+$» отвечает геометрическому портрету на рис. 6.1, *справа*.

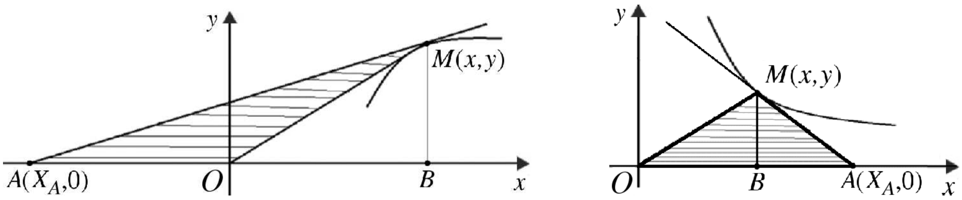



*Рис. 6.1*

Полученное уравнение является линейным относительно $x = x(y)$: $dx/dy - x/y = \mp 2a^2/y^2$, интегрируя которое с помощью интегрирующего множителя $\mu(y) = 1/y$, получим $\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y^2}x = \mp\frac{2a^2}{y^3}$ или $\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = \mp\frac{2a^2}{y^3}$. Отсюда следует *уравнение искомых кривых* $x/y = \pm a^2/y^2 + C$ или $xy = Cy^2 \pm a^2$. □

**6.23.** Найти кривую, если касательная, проведённая в любой её точке, отсекает на оси ординат отрезок, длина которого равна полусумме координат точки касания.

**6.24.** Проводят прямую, параллельную оси $Ox$, на расстоянии, равном абсциссе для любой точки $M(x, y)$ кривой. Длина отрезка этой прямой, заключённого между ординатой точки $M$ и касательной к ней, равна абсциссе точки $M$, разделённой на 2. Найти уравнение указанной кривой.

**6.25.** В электрической цепи (с выключателем) с постоянной индуктивностью $L$ и активным сопротивлением $R$ происходит переходный процесс (рис. 6.2). Напряжение источника меняется по синусоидальному закону $U = E\sin\omega t$. Найти зависимость силы тока $i$ от времени $t$ после включения выключателя при $t = 0$, если $i(0) = 0$, используя второй закон Кирхгофа: сумма падений напряжений на элементах цепи равна напряжению источника.

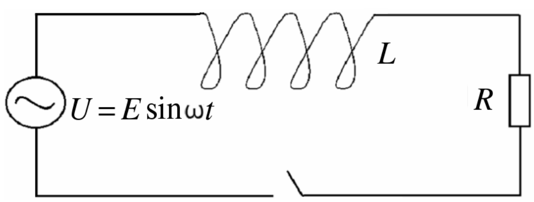



*Рис. 6.2*

**6.26.** Найти кривые, если площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной к кривой и абсциссой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

**6.27.** Найти кривую, если площадь $S$ криволинейного треугольника, образованного кривой, расположенной в первом квадранте и проходящей через начало координат, осью абсцисс и ординатой произвольной точки $M(x, y)$ кривой, есть функция $S = xy/3$.

**6.28.** Капля с массой $M$ г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет $m$ г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли (коэффициент пропорциональности $k \neq m$). Найти зависимость скорости движения капли от времени, если в начальный момент скорость капли равна нулю.

### Задания для самостоятельной работы

**1.** Общее решение линейного ДУ имеет вид $y = A(x)C + B(x)$, где функции $A, B \in C^1(a, b)$, а $C$ — произвольная постоянная. Доказать обратное: ДУ всякого семейства кривых этого вида — линейное.

**2.** Показать, что уравнение $y' + ay = f(x)$, где $a = \text{const} \neq 0$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $|f(x)| \leqslant M < +\infty$, $x \in \mathbb{R}$, имеет единственное решение, ограниченное на $\mathbb{R}$. Найти его.

**3.** Доказать, что ограниченное решение в предыдущей задаче будет $\omega$-периодическим, если $f(x)$ — $\omega$-периодическая функция: $f(x + \omega) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Найти его.

**4.** Доказать, что все решения, выходящие из достаточно малой $\Delta$-окрестности начала координат, ДУ $y' = ay + f(y)$, где $a = \text{const} < 0$, $|f(y)| < M|y|^m$, $m > 1$, $|y| < \Delta$, стремятся к нулю при $x \to +\infty$.

**5.** Пусть в уравнении $y' + a(x)y = f(x)$ непрерывные при $x \geqslant x_0$ функции $a$ и $f$ удовлетворяют условиям: $a(x) \geqslant c > 0$, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Доказать, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $x \to +\infty$.

#### Контрольные вопросы

**1.** Дано частное решение $y = y_1(x) \neq 0$ линейного однородного ДУ (6.1). Выразить через него общее решение ДУ (6.1).

**2.** Даны два различных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного ДУ (6.2). Выразить через них общее решение этого ДУ.

**3.** Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения $y' + ay = f(x)$, $a = \text{const} > 0$, $f(x) \in C(\mathbb{R}_+)$. Доказать, что $y_1(x) - y_2(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Решить ДУ: **а)** $xy' + 2y = x^2$; **б)** $2y\,dx - (x + y^3)\,dy = 0$; **в)** $2y\,dx + (y^2 - 4x)\,dy = 0$. **2.** Найти решение интегрального уравнения $\int_0^x xy\,dx = x^2 + y$. **3.** Найти решение ДУ, удовлетворяющее поставленным условиям: **а)** $y' + y\cos x = \cos x$; $y(0) = 0$; **б)** $y' + ay = \sin x$, $a < 0$; $y(x)$ ограничено на $\mathbb{R}$.

# § 7. Уравнения, приводящиеся к линейным. Уравнения Бернулли, Дарбу и Риккати

*Уравнение Бернулли. Линеаризация уравнения Бернулли. Методы Лагранжа и Бернулли. Частные случаи уравнений, приводящихся к линейным. Уравнение Дарбу. Уравнение Риккати. Об интегрируемости уравнения Риккати, для которого известно частное решение.*

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \neq 0, \quad m \neq 1, \tag{7.1}$$

называется **уравнением Бернулли**.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции на промежутке $|a, b|$.

Разделим обе части уравнения(7.1) на $y^m$, получим равносильное при $y^m \neq 0$ уравнение

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x), \quad [y^m = 0\,?]. \tag{7.2}$$

Введём замену $z = y^{1-m}$, где $z = z(x)$ — новая искомая функция. Учитывая, что $z' = (1-m)y^{-m}y'$, уравнение (7.2) сводится *к линейному относительно функции z уравнению*

$$\frac{1}{1-m}z' + p(x)z = q(x),$$

которое решаем при помощи любого способа из § 6.

Если число $m > 0$, то $y = 0$ — решение уравнения (7.1), которое может быть потеряно при переходе к уравнению (7.2). Заметим, *если* $0 < m < 1$, *то решение* $y = 0$ — *особое.*

Кроме *метода линеаризации* уравнение Бернулли можно интегрировать как при помощи *метода Бернулли, так и метода Лагранжа* (см. § 6).

Уравнение иногда может стать уравнением Бернулли, если $x$ считать функцией, а $y$ независимой переменной. В этом случае оно имеет вид

$$\frac{dx}{dy} + r(y)x = s(y)x^n.$$

**Уравнения, обобщающие уравнения Бернулли**:

$$\varphi'(y)\frac{dy}{dx} + p(x)\varphi(y) = q(x) \tag{7.3}$$

или

$$\varphi'(x)\frac{dx}{dy} + r(y)\varphi(x) = s(y) \tag{7.4}$$

также допускают линеаризацию с помощью соответственно замен $z = \varphi(y)$ и $z = \varphi(x)$.

**Уравнением Дарбу** называется уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy + R(x,y)(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

в котором коэффициенты $M$ и $N$ — *однородные функции* одной и той же степени $m$, $R$ — однородная функция степени $n$, $n \neq m-1$.

Уравнение Дарбу при помощи *замены* $y = zx$, $x = x(z)$, приводится к уравнению Бернулли (линейному при $n = m-2$) относительно $x = x(z)$, которое вырождается в уравнение с разделяющимися переменными, если $N \equiv 0$. Можно также делать замену $x = zy$.

Уравнение

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{7.5}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — непрерывные функции на промежутке $|a,b|$, называется **уравнением Риккати.**

В общем случае *уравнение Риккати не интегрируется в квадратурах. Если же известно одно его частное решение* $y = y_1(x)$, то с помощью замены $y = y_1(x) + z$, $z = z(x)$, *уравнение Риккати* сводится к уравнению Бернулли и, следовательно, *интегрируется в квадратурах.* Можно сразу с помощью замены $y = y_1(x) + 1/z$, $z \neq 0$, линеаризовать ДУ Риккати. Решение $y = y_1(x)$ ДУ (7.5) надо будет присоединить к решениям $y = y_1(x) + 1/z$, где $z = z(x)$ — решения преобразованного ДУ.

*Общих методов построения частных решений уравнения Риккати нет.* Можно пытаться подбирать решения исходя из вида коэффициентов уравнения или в виде определённой функции, учитывая конкретный смысл задачи.

Например, уравнение Риккати

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}, \tag{7.6}$$

при выполнении условия $(b+1)^2 \geqslant 4ac$ имеет частное решение вида $y_1(x) = A/x$, где постоянная $A$ определяется подстановкой решения $y_1(x)$ в уравнение (7.6).

Заметим, что в любом случае *уравнение* (7.6) является *обобщённым однородным* (проверить) и замена $y = z/x$ всегда приводит уравнение (7.6) к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнения Риккати вида

$$y' = a\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2x}y + b \quad \text{или} \quad y' = a\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2x}y + \frac{b}{x}, \qquad a, b - \text{const},$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены $y = z\sqrt{x}$, $z = z(x)$.

В общем виде уравнение Риккати (7.5) при помощи линейной подстановки $y = \alpha(x)u$, где $\alpha(x) = \pm 1/p(x)$, приводится к такому уравнению Риккати, в котором коэффициент при квадрате искомой функции равен $+1$ или $-1$. Подстановкой $u = z + \beta(x)$ за счёт выбора функции $\beta(x)$ в уравнении Риккати можно уничтожить коэффициент при искомой функции, при этом коэффициент при квадрате искомой функции не меняется. Комбинируя обе подстановки, уравнение Риккати можно *привести к каноническому виду*

$$z' = z^2 + J(x).$$

*Специальное уравнение Риккати*

$$y' = ay^2 + bx^{\alpha},$$

где $a$, $b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ и $\alpha$ — постоянные числа, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $\alpha = -2$ или число $\alpha/(2\alpha + 4)$ — целое.

**Решить уравнения 7.1–7.15, приведя их с помощью замены переменных к линейным. Найти решения, удовлетворяющие поставленным начальным условиям.**

**7.1.** $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$, $y(1) = 0$.

Решение. Запишем это *уравнение Бернулли* в области, где $x \neq 0$, в стандартной форме $y' - 4y/x = 2x\sqrt{y}$. Разделим обе части последнего уравнения на $\sqrt{y}$, получим

$$y'y^{-1/2} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = 2x, \quad [y = 0\,?].$$

Введём новую искомую функцию $z = \sqrt{y}$, $z = z(x)$, тогда $z' = y^{-1/2}y'/2$, а преобразованное уравнение станет линейным:

$$z' - 2z/x = x.$$

Интегрируя последнее уравнение с помощью *интегрирующего множителя* $\mu(x) = \exp\{-\int(2/x)\,dx\} = 1/x^2$, находим его общее решение $z = x^2(\ln|x| + c)$. Возвращаясь к старым переменным, получим *общее решение* исходного уравнения

$$y = x^4(\ln|x| + C)^2, \quad \ln|x| + C \geqslant 0.$$

Кроме того, *решением данного ДУ будет* $y = 0$, которое не содержится в полученной формуле ни при каком значении $C$.

Для нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, подставим начальные данные $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ в формулу общего решения и найдём $C:\ 0 = 1(\ln 1 + C)^2 \ \Rightarrow\ C = 0$. Тогда *первое искомое решение* имеет вид $y = x^4 \ln^2 x$, $x \geqslant 1$. Кроме того, *решение* $y = 0$ также удовлетворяет начальному условию, т. е. *поставленная задача Коши имеет два решения*: $y = 0$ и $y = x^4 \ln^2 x$, $x \geqslant 1$. □

### 7.2. $xy' - 2y = xy^2$.

Р е ш е н и е. Это *уравнение Бернулли* будем решать одноименным методом в виде произведения двух функций: $y = u(x)v(x)$. Подставляя его в уравнение, получаем

$$xu\frac{dv}{dx} + xv\frac{du}{dx} - 2uv = xu^2v^2 \quad \text{или} \quad v\left[x\frac{du}{dx} - 2u\right] + xu\frac{dv}{dx} = xu^2v^2.$$

В качестве функции $u(x)$ возьмём какое-либо решение уравнения $x\,du/dx - 2u = 0$, например, $u = x^2$. Функцию $v(x)$ находим из уравнения

$$x^3\,\frac{dv}{dx} = x^5v^2 \ \Rightarrow\ \frac{dv}{v^2} = x^2\,dx, \quad [v = 0\,?] \ \Rightarrow\ -\frac{1}{v} = \frac{x^3}{3} + C_1$$

и, следовательно, $v(x) = 3/(-3C_1 - x^3)$. Обозначим $C = -3C_1$. Тогда имеем $v(x) = 3/(C - x^3)$. Кроме того, *решением* будет также $v = 0$ (оно потеряно при разделении переменных). Таким образом, *полное семейство решений исходного ДУ* определяется по формулам

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3}; \quad y = 0.$$

□

### 7.3. $y\,dx + (x - 2x^2y^2)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Это уравнение является *уравнением Бернулли относительно* $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2x^2y, \quad [y = 0\,?].$$

Интегрирование уравнения проведём *методом линеаризации*. Разделим обе части уравнения на $x^2$, получим

$$\frac{x'}{x^2} + \frac{1}{yx} = 2y, \quad [x = 0\,?].$$

С помощью замены $z = 1/x$, где $z = z(y)$, учитывая, что $z' = -x'/x^2$, имеем относительно $z$ линейное уравнение $z' - z/y = -2y$, для которого интегрирующим множителем на интервалах $y > 0$ и $y < 0$ будет функция $\mu(y) = 1/y$. После умножения на $\mu(y)$ уравнение перепишется следующим образом:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{z}{y}\right) = -2.$$

Следовательно, *общее решение* преобразованного ДУ имеет вид $z = Cy - 2y^2$, а *соотношения* $1/x = Cy - 2y^2$; $x = 0$; $y = 0$ задают *все решения* исходного уравнения. $\square$

**7.4.** $\dfrac{dy}{dx} + x\sin 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y.$

Р е ш е н и е. Придадим уравнению форму ДУ (7.3), приводящегося к линейному:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} + 2x \cdot \operatorname{tg} y = xe^{-x^2}, \quad [\cos y = 0\,?].$$

Подстановка $z = \operatorname{tg} y$, $z = z(x)$, преобразует уравнение к виду $z' + 2xz = xe^{-x^2}$.

Используя интегрирующий множитель $\mu(x) = e^{x^2}$, получаем *общее решение* преобразованного уравнения $z = Ce^{-x^2} + (x^2e^{-x^2})/2$. Тогда *полное семейство решений* исходного уравнения определяется по формулам

$$\operatorname{tg} y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2}e^{-x^2}, \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots .$$ $\square$

**7.5.** $y' - 2xy = 2x^3y^2.$

**7.6.** $y' + \operatorname{tg} y = x/\cos y.$

**7.7.** $y' + 2y/x = x^2y^2\ln x.$

**7.8.** $(x^2 + 2\ln y)y\,dx = x\,dy.$

**7.9.** $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x.$

**7.10.** $y'\sin y + \cos y = 3x^2.$

**7.11.** $(x^3 + ye^y)y' = 3x^2.$

**7.12.** $2y\sin x\,dx + (\cos x - y^2)\,dy = 0.$

**7.13.** $x(e^y - y') = 1.$

**7.14.** $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0.$

**7.15.** $dx + dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$

### В задачах 7.16–7.25 проинтегрировать уравнения Риккати.

**7.16.** $4x^2y' + (xy+1)^2 = 0.$

Р е ш е н и е. Ищем частное решение уравнения в виде $y_1(x) = a/x$. Подставляя его в данное уравнение, получаем для определения постоянной $a$ уравнение $a^2 - 2a + 1 = 0$, откуда $a = 1$. Следовательно, $y_1(x) = 1/x$. Выполним теперь замену $y = 1/x + 1/z$, $[y = 1/x\,?]$, приходим к линейному уравнению $z' - z/x = 1/4$, *общее решение* которого определяется по формуле $z = (\ln|x| + C)x/4$.

Отсюда следует, что *полное семейство решений исходного уравнения* имеет вид

$$y = \frac{1}{x} + \frac{4}{x(\ln|x| + C_1)}; \quad y = \frac{1}{x}.$$ $\square$

**7.17.** $y' = y^2 + 2/x^2$.

Р е ш е н и е. Коэффициенты данного *уравнения Риккати* таковы, что частного решения вида $y_1(x) = a/x$, $a \in \mathbb{R}$, не существует. Однако это уравнение можно рассматривать и как *обобщённое однородное* (см. задачу 5.20), которое с помощью замены $y = zx^{-1}$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$z'x^{-1} - zx^{-2} = z^2 + 2x^{-2} \quad \text{или} \quad x\,dz = (z^2 + z + 2)\,dx.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение с разделёнными переменными, получаем после возвращения к старым переменным, что *все решения* исходного уравнения определяются соотношением

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2xy + 1}{\sqrt{7}} = \ln|x| + C. \qquad \square$$

**7.18.** $y' = y^2 - xy + x - 1$.

**7.19.** $2x^2y' + y^2 - 2xy - x^2 = 0$.

**7.20.** $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$.

**7.21.** $y' = y^2 - ye^x + e^x$.

**7.22.** $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{1}{2x}y + \dfrac{1}{x}$.

**7.23.** $y' = \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{1}{2x}y + 1$.

**7.24.** $x^2y' + xy + x^2y^2 + 4 = 0$.

**7.25.** $y' + y^2 = u'(x) + u^2(x)$, $u \in C^1(a, b)$.

**7.26.** Составить уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка её нормали от любой точки кривой до оси $Ox$ находится на параболе $y^2 = x$.

Р е ш е н и е. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой кривой $y = y(x)$ (рис. 7.1). Уравнение нормали к этой кривой имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где $(X, Y)$ — текущие координаты точки нормали, $(x, y)$ — координаты точки $M$. Отсюда следует, что координата $X_N$ точки пересечения нормали с осью $Ox$ определяется по формуле $X_N = x + yy'$. Точка $A$ — середина отрезка нормали $MN$. Значит, её координаты

$$X_A = x + yy'/2, \quad Y_A = y/2.$$

Так как точка $A$ лежит на параболе $y^2 = x$, то её координаты $(X_A, Y_A)$ удовлетворяют уравнению параболы $y^2/4 = x + yy'/2$. Решая теперь уравнение Бернулли $2yy' - y^2 = -4x$ и учитывая условие $y(0) = 0$, получаем *уравнение искомой кривой*

$$y^2 = 4(x + 1 - e^x). \qquad \square$$

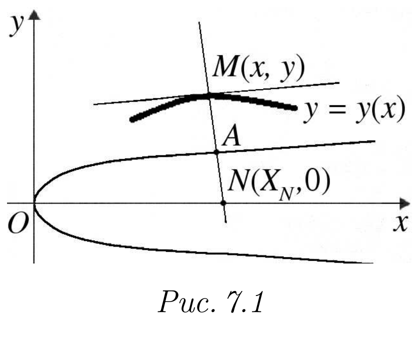



*Рис. 7.1*

**7.27.** Найти кривые, если длина отрезка, отсекаемого на оси $Oy$ нормалью к кривой в точке $M(x, y)$, равна $x^2/y$.

**7.28.** Найти кривые, если длина отрезка, отсекаемого на оси $Ox$ касательной к кривой в точке $M(x, y)$, равна $x^2 y$.

**Задания для самостоятельной работы**

**1.** Пусть для уравнения Риккати (7.5) известны два частных решения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Показать, что все решения ДУ (7.5) определяются соотношениями

$$y = y_2(x), \quad \frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = C \exp \int p(x)(y_1(x) - y_2(x))\, dx,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

**2.** Пусть для уравнения Риккати известны три частных решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. Тогда остальные решения ДУ определяются соотношением

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y(x) - y_1(x)} = C \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)},$$

где $C$ — произвольная постоянная.

**3.** Показать, что любое решение $y = y(x)$ ДУ $y' = y^2 + 1$ обладает свойством $y(x) \to +\infty$, если $x \to x_1 - 0$, $y(x) \to -\infty$, если $x \to x_1 + \pi + 0$, при некотором значении $x_1 \in \mathbb{R}$, зависящем от $y(x)$.

**4.** Доказать, что любое решение $y = y(x)$ ДУ Риккати $y' = x^2 + y^2$ также обладает аналогичным, как и выше, свойством $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} y(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_2 + 0} y(x) = -\infty$, где числа $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ зависят от решения.

**5.** Доказать [4, с. 70], что любое решение ДУ Риккати $y' = (y - \alpha(x))^2$, где $\alpha(x)$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, $m \leqslant \alpha(x) \leqslant M$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0 > M$, обладает свойством $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} y(x) = +\infty$, $x_1 \leqslant x_0 + 1/(y_0 - M)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = m_1 \geqslant m$.

**6.** Пусть $R(x)$ — периодическая функция периода $\omega$: $R(x + \omega) = R(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что если уравнение Риккати $y' = y^2 + R(x)$ имеет два различных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с периодом $\omega$, то $\int_0^{\omega} [y_1(x) + y_2(x)]\, dx = 0$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Решить ДУ: **а)** $y' + y/x = y^2 \ln x$; **б)** $y + xy' = yy'x^2$; **в)** $(\sin y - x^2)\, dx + \cos y\, dy = 0$; **г)** $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$; **д)** $y' = y^2 + 1/(2x^2)$. **2.** Доказать, что решение $y = 0$ ДУ $xy' + 2y = x\sqrt{y}$ является особым.

# § 8. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

*Уравнение в полных дифференциалах. Потенциал уравнения. Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах. Критерий уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующие множители специального вида* $\mu = \mu[\omega(x,y)]$, $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$. *Теорема об общем виде интегрирующего множителя.*

**Уравнения в полных дифференциалах.** Уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{8.1}$$

где $M$ и $N$ — непрерывные функции в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$, называется **уравнением в полных дифференциалах** в области $D$, если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y)$, $(x,y) \in D$, что левая часть уравнения (8.1) является полным дифференциалом этой функции $U(x,y)$, т. е.

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Уравнение в полных дифференциалах, если известна соответствующая функция $U(x,y)$, равносильно уравнению $dU(x,y) = 0$, все решения которого удовлетворяют соотношению $U(x,y) = C$, где $C$ — *допустимая* произвольная постоянная, т. е. *общий интеграл* ДУ имеет вид

$$U(x,y) = C.$$

Функция $U(x,y)$ называется *потенциалом* ДУ (8.1).

*Пусть область* $D$ *односвязна и частные производные* $\partial M/\partial y$ *и* $\partial N/\partial x$ *существуют и непрерывны в этой области.*

**Критерий уравнения в полных дифференциалах.** *Для того чтобы уравнение* (8.1) *было уравнением в полных дифференциалах в области* $D$, *необходимо и достаточно выполнение условия Эйлера*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{8.2}$$

Для построения функции $U(x,y)$ воспользуемся равенствами

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{8.3}$$

Интегрируем первое из них по $x$, считая $y$ постоянным, и определим функцию $U(x, y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции $\varphi(y)$ вместо постоянной интегрирования:

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx = \Phi(x, y) + \varphi(y). \tag{8.4}$$

Подставляя выражение (8.4) во второе уравнение системы (8.3), получаем уравнение для определения функции $\varphi(y)$. С найденной функцией $\varphi(y)$ формула (8.4) задаёт искомый потенциал $U(x, y)$ и соответственно *общий интеграл* ДУ будет иметь вид $U(x, y) = C$.

В силу равноправия переменных $x$ и $y$ построение функции $U(x, y)$ можно начинать и со второго уравнения $\partial U/\partial y = N(x, y)$ системы (8.3).

Если область определения уравнения (8.1) в полных дифференциалах есть прямоугольник $D = \{(x, y):\ a < x < b,\ c < y < d\}$, то *общий интеграл* этого уравнения можно сразу строить по любой из следующих формул:

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x_1, y)\, dx_1 + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y_1)\, dy_1 = C$$

или (8.5)

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x_1, y_0)\, dx_1 + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, y_1)\, dy_1 = C,$$

где $(x_0, y_0)$ — любая фиксированная, а $(x, y)$ — произвольная точки прямоугольника $D$. Применение этих формул иногда упрощает выкладки за счёт выбора фиксированной точки.

Если $(x_0, y_0)$ — неособая точка этого ДУ, то любая из формул

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x_1, y)\, dx_1 + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y_1)\, dy_1 = 0 \quad \text{или} \quad \int\limits_{x_0}^{x} M(x_1, y_0)\, dx_1 + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, y_1)\, dy_1 = 0$$

*неявно определяет единственное решение* рассматриваемого уравнения (при выполнении всех условий критерия), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

После изучения в курсе математического анализа темы «Криволинейные интегралы» можно заметить, что для ДУ (8.1) в полных дифференциалах, рассматриваемого в односвязной области $D$, его *общий интеграл* выражается при помощи *криволинейного интеграла 2-го рода*

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = C.$$

**Мини-самоконтроль.** Определить, при каких значениях чисел $m_i \in \mathbb{N}_0$, $i = \overline{1,4}$, ДУ $(x^{m_1} + y^{m_2})\,dx + (x^{m_3} + y^{m_4})\,dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, и найти потенциал и общий интеграл этого ДУ.

**Интегрирующий множитель.** В случае если не выполнено условие (8.2) критерия для ДУ (8.1), возникает вопрос, нельзя ли его привести к уравнению в полных дифференциалах, умножив обе части уравнения (8.1) на некоторый множитель.

Функция $\mu(x,y)$, определённая в области $D$, непрерывная и не обращающаяся в нуль в $D$, называется *интегрирующим множителем* ДУ (8.1), если *уравнение* (8.1) после умножения на $\mu(x,y)$

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

становится в $D$ *уравнением в полных дифференциалах.*

Например, уравнение с разделяющимися переменными $M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0$ имеет интегрирующий множитель $\mu(x,y) = \dfrac{1}{M_2(x)N_1(y)}$, линейное ДУ $[p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0$ — множитель $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$.

Будем предполагать, что функции $M$ и $N$ класса $C^1$. Функция $\mu(x,y)$ класса $C^1$, $\mu(x,y) \neq 0$, будет *интегрирующим множителем* ДУ (8.1) в области $G \subset D$ тогда и только тогда, *когда она удовлетворяет уравнению*

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{8.6}$$

**Интегрирующие множители специального вида.** В некоторых случаях уравнение (8.6) можно проинтегрировать. Например, если для некоторой функции $\omega = \omega(x,y) \in C^1$ выполнено условие

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ \left(N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \equiv \psi(\omega), \tag{8.7}$$

то существует *интегрирующий множитель вида* $\mu = \mu(\omega) = e^{\int \psi(\omega)\,d\omega}$.

Отсюда следует, что уравнение (8.1) имеет *интегрирующий множитель, зависящий только от* $x$, если

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N \equiv \psi(x) \qquad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int \psi(x)\,dx}.$$

Аналогично, существует $\mu = \mu(y)$, если

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/(-M) \equiv \psi(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int \psi(y)\,dy}.$$

**Замечание 8.1.** При умножении на интегрирующий множитель мы можем потерять некоторые решения этого уравнения (если вдоль некоторых кривых, лежащих на границе области $G$, $1/\mu = 0$) и приобрести посторонние (если $\mu = 0$ вдоль некоторых кривых из области $G$).

**Метод разбиения уравнения на две группы.** Интегрирующий множитель уравнения (8.1) иногда можно отыскать с помощью разбиения этого уравнения на группы, используя следующую теорему.

**Теорема об общем виде интегрирующего множителя.** *Если* $\mu_0(x,y)$ — *непрерывно дифференцируемый интегрирующий множитель уравнения* (8.1) *в области* $G$, $U_0(x,y)$ — *соответствующий ему потенциал, т. е. если* $\mu_0(x,y)(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = dU_0(x,y)$, *то функция* $\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\varphi(U_0(x,y))$, *где* $\varphi$ — *непрерывно дифференцируемая функция* $(\varphi \neq 0)$, *определённая на множестве значений* $U_0(x,y)$, *если* $(x,y) \in G$, *также является интегрирующим множителем уравнения* (8.1) *в области* $G$.

Для применения этого метода разобьём правую часть ДУ (8.1) на две группы, каждую из которых рассматриваем как отдельное ДУ. Находим для них интегрирующие множители $\mu_1$ и $\mu_2$ и соответствующие им потенциалы $U_1$ и $U_2$. Тогда по сформулированной теореме *общий вид интегрирующих множителей* для первой группы есть $\tilde{\mu}_1 = \mu_1\varphi(U_1)$, а для второй — $\tilde{\mu}_2 = \mu_2\psi(U_2)$. Далее пытаемся подобрать функции $\varphi$ и $\psi$ так, чтобы было выполнено равенство $\tilde{\mu}_1(x,y) = \tilde{\mu}_2(x,y)$, т. е. $\mu_1(x,y)\varphi[U_1(x,y)] = \mu_2(x,y)\psi[U_2(x,y)]$. Очевидно, что этот метод носит характер неопределённости.

Знание для уравнения (8.1) двух существенно различных интегрирующих множителей $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ ($\mu_1/\mu_2 \not\equiv \text{const}$ ни в какой подобласти области $D$) позволяет записать общий интеграл уравнения в виде $\mu_1(x,y)/\mu_2(x,y) = C$.

**В задачах 8.1–8.10 проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и проинтегрировать их, применяя различные методы.**

**8.1.** $(x^2 + y^2 + y/x)\,dx + (2xy + \ln x + y)\,dy = 0.$

Решение. Область $D$ определения уравнения — полуплоскость $x > 0$. В этой односвязной области выполняются условия критерия ДУ в полных дифференциалах

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D: \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y + \frac{1}{x}.$$

Для нахождения функции $U(x,y)$ воспользуемся системой (8.3). Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2 + \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \ln x + y.$$

Проинтегрируем в $D$ первое уравнение системы по $x$, при этом $y$ считаем постоянным, получим

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + y\ln x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — неизвестная непрерывно дифференцируемая функция (при интегрировании первого уравнения по $x$ она играла роль произвольной постоянной), для её нахождения подставим построенную функцию $U(x,y)$ во второе уравнение системы, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + y^2x + y\ln x + \varphi(y)\right) = 2xy + \ln x + y.$$

Отсюда следует, что $\varphi'(y) = y$ и $\varphi(y) = y^2/2$. При интегрировании последнего уравнения произвольную постоянную можно опустить, так как для получения интеграла уравнения нам нужна хотя бы одна функция, удовлетворяющая системе (8.3). Отсюда следует, что $U(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2x + y\ln x + \dfrac{y^2}{2}$, а *общий интеграл* уравнения определяется по формуле

$$\frac{x^3}{3} + y^2x + y\ln x + \frac{y^2}{2} = C. \qquad \square$$

**Замечание 8.2.** Отметим, что *методом группировки* членов общий интеграл легко строится, так как

$$\left(x^2+y^2+\frac{y}{x}\right)dx+(2xy+\ln x+y)\,dy = x^2dx+ydy+\left(\frac{y}{x}\,dx+\ln x\,dy\right)+(y^2\,dx+2xy\,dy) =$$

$$= d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) + d(y\ln x) + d(xy^2) = d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y\ln x + xy^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y\ln x + xy^2 = C.$$

**Замечание 8.3.** Для нахождения функции $U(x, y)$ можно воспользоваться также одной из формул (8.5) положив, например, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$:

$$\int_1^x x_1^2\, dx_1 + \int_0^y (2xy_1 + \ln x + y_1)\, dy_1 = C.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3} + xy^2 + y\ln x + \dfrac{y^2}{2} = C$ или $\dfrac{x^3}{3} + y^2 x + y\ln x + \dfrac{y^2}{2} = C_1$.

**8.2.** $(1 + y^2\sin 2x)\, dx - 2y\cos^2 x\, dy = 0.$

Р е ш е н и е. Это ДУ является *уравнением в полных дифференциалах*, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 + y^2\sin 2x) = \frac{\partial}{\partial x}(-2y\cos^2 x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Функцию $U(x, y)$ найдём из системы уравнений

$$\partial U/\partial x = 1 + y^2\sin 2x, \quad \partial U/\partial y = -2y\cos^2 x.$$

Интегрируя по $x$ первое уравнение, имеем

$$U(x, y) = \int (1 + y^2\sin 2x)\, dx = x - \frac{y^2\cos 2x}{2} + \varphi(y).$$

Подставляя теперь построенную функцию $U(x, y)$ во второе уравнение системы, получаем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{y^2\cos 2x}{2} + \varphi(y)\right) = -2y\cos^2 x.$$

Следовательно, $-y\cos 2x + \varphi'(y) = -2y\cos^2 x$ и $\varphi'(y) = -2y\cos^2 x + y\cos 2x$, т. е. $\varphi'(y)$ зависит и от $x$? Однако на самом деле это не так, потому что $(-2y\cos^2 x + y\cos 2x) = -2y\cos^2 x + y(-1 + 2\cos^2 x) = -y$, и, следовательно, $\varphi'(y) = -y$. Если же в процессе выкладок окажется, что $\varphi'(y)$ существенно зависит всё же и от $x$, то либо допущена ошибка при вычислении интегралов или производных, либо первоначально не было выполнено условие $M'_y = N'_x$.

Итак, $\varphi(y) = -y^2/2$, $U(x, y) = x - \dfrac{y^2\cos 2x}{2} - \dfrac{y^2}{2} \equiv x - y^2\cos^2 x$ и *все решения* исходного уравнения определяются неявно соотношением $x - y^2\cos^2 x = C$. □

**8.3.** $x\, dx + y\, dy + \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = 0.$

**8.4.** $(e^x y^2 + 3x^2)\, dx + (2ye^x + 3y^2)\, dy = 0.$

**8.5.** $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\dfrac{dy}{y}=0.$

**8.6.** $(3x^2y+y^2)\,dx+(x^3+2yx)\,dy=0.$

**8.7.** $2x(1+\sqrt{x^2-y})\,dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$

**8.8.** $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

**8.9.** $(\sin y+y\sin x)\,dx+(x\cos y-\cos x)\,dy=0.$

**8.10.** $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$

**В задачах 8.11–8.20 проинтегрировать уравнения, допускающие интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.**

**8.11.** $\dfrac{y}{x}\,dx+(y^2-\ln x)\,dy=0.$

Р е ш е н и е. Здесь коэффициенты ДУ $M(x,y)=y/x$, $N(x,y)=y^3-\ln x$ — непрерывно дифференцируемые функции в полуплоскости $x>0$. Данное ДУ, очевидно, не является уравнением в полных дифференциалах.

Выясним, имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель вида $\mu=$ $=\mu(x)$. Для этого вычислим дробь

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}=\frac{1/x+1/x}{y^2-\ln x}=\frac{2}{x(y^2-\ln x)}.$$

Она, очевидно, не является функцией, зависящей только от $x$, следовательно, интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ не существует.

Испытаем теперь дробь

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{-M}=-\frac{2/x}{y/x}\equiv\psi(y)=-\frac{2}{y},$$

следовательно, существует интегрирующий множитель, зависящий только от $y$, и он равен $\mu(y)=e^{\int\psi(y)\,dy}=e^{-\int(2/y)\,dy}=1/y^2$. Умножив обе части исходного ДУ на $1/y^2$, приходим в областях $x>0$, $y>0$ и $x>0$, $y<0$ к *уравнению в полных дифференциалах*

$$\frac{1}{xy}\,dx+\left(1-\frac{\ln x}{y^2}\right)dy=0,\quad [y=0\,?],$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{xy}\,dx-\frac{\ln x}{y^2}\,dy\right)+y\,dy=0\ \text{ или }\ d\left(\frac{\ln x}{y}+\frac{y^2}{2}\right)=0,$$

откуда следует его *общий интеграл* $\dfrac{\ln x}{y}+\dfrac{y^2}{2}=C$ $(x>0,\ y\neq 0)$. Кроме того, *решением* исходного ДУ будет $y=0$, которое утеряно при делении уравнения на $y^2$. $\square$

**8.12.** $(1 + x^2y)dx + x^2(2y + x)dy = 0.$

Р е ш е н и е. Испытаем это уравнение на интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$. Имеем

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{x^2 - 4xy - 3x^2}{x^2(2y + x)} = \frac{-2x(2y + x)}{x^2(2y + x)} \equiv \psi(x) = -\frac{2}{x},$$

следовательно, *интегрирующий множитель* имеет вид $\mu = \mu(x) = e^{-\int (2/x)\, dx} = 1/x^2$.

Умножив обе части рассматриваемого уравнения на $1/x^2$, приходим в областях $x > 0$ и $x < 0$ к уравнению в полных дифференциалах

$$(1/x^2 + y)\, dx + (2y + x)\, dy = 0, \quad [x = 0\,?].$$

Решим его, получим *общий интеграл* $y^2 + yx - 1/x = C$ $(x \neq 0)$. Кроме того, *решением* исходного уравнения будет $x = 0$, которое потеряно при делении ДУ на $x^2$. □

**8.13.** $2xy \ln y\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})\, dy = 0.$

**8.14.** $(x^4 - \sin^2 y)\, dx + x \sin 2y\, dy = 0.$

**8.15.** $(2x^2 \ln x - 2y^3)\, dx + 3xy^2\, dy = 0.$

**8.16.** $(x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2y\, dy = 0.$

**8.17.** $(x + \sin y)\, dx + \cos y\, dy = 0.$

**8.18.** $(2xy + y^2)\, dx - (x^2 + y^3)\, dy = 0.$

**8.19.** $(2x^3y^2 - y^4)\, dx + (7 - 2xy^3)\, dy = 0.$

**8.20.** $(1 - x^2y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0.$

**В задачах 8.21–8.26 решить уравнения с помощью интегрирующего множителя одного из видов: $\mu = \mu(x + y)$, $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu(x^2 - y^2)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$, $\mu = \mu(x + y^2)$.**

**8.21.** $y(x^2y^2 + 1)\, dx + x(x^2y^2 - 1)\, dy = 0.$

Р е ш е н и е. Исходя из вида коэффициентов, целесообразно начать испытание на интегрирующий множитель $\mu = \mu(xy)$. Здесь $\omega = xy$. Вычислим дробь вида (8.7)

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ \left(N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = \frac{3x^2y^2 + 1 - 3x^2y^2 + 1}{(x^3y^2 - x)y - (x^2y^3 + y)x} = -\frac{1}{xy} \equiv \psi(xy) = -\frac{1}{\omega}.$$

Отсюда следует, что существует интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(\omega) = e^{-\int (1/\omega)\, d\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{xy}.$$

Умножая обе части ДУ на $1/xy$, получаем *уравнение в полных дифференциалах*

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad [x = 0\,?, \quad y = 0\,?].$$

Отсюда следует *общий интеграл* ДУ $x^2y^2+2\ln|x/y|=C$. Кроме того, при делении на $xy$ мы потеряли *решения* $x=0$ и $y=0$. □

**8.22.** $(3y^2-x)\,dx+(2y^3-6xy)\,dy=0.$

Решение. Испытание начнём с $\mu=\mu(x+y)$. Соответствующая (8.7) дробь

$$\frac{6y+6y}{2y^3-6xy-3y^2+x}=\frac{12y}{(2y-3)y^2+x(1-6y)},$$

очевидно, не является функцией от $x+y$. Попробуем искать множитель в виде $\mu=\mu(xy)$. Вычисляя, как и выше, соответствующую (8.7) дробь, имеем

$$\frac{12y}{(2y^3-6xy)y-(3y^2-x)x}=\frac{12y}{2y^4-9xy^2+x^2}\not\equiv\psi(xy).$$

Продолжая испытывать случаи $\omega=x^2+y^2$ и $\omega=x^2-y^2$, также приходим к отрицательному результату.

Наконец, пусть $\omega=x+y^2$. Тогда соответствующая (8.7) дробь имеет вид

$$\frac{12y}{(2y^3-6xy)-(3y^2-x)2y}=\frac{12y}{-4(y^2+x)y}=-\frac{3}{y^2+x}\equiv\psi(\omega)=-\frac{3}{\omega}$$

и *интегрирующий множитель* определяется по формуле $\mu(\omega)=e^{-\int(3/\omega)\,d\omega}= =1/\omega^3$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu(\omega)=1/\omega^3=1/(x+y^2)^3$, получим *уравнение в полных дифференциалах*:

$$\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}\,dx+\frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}\,dy=0,\quad [x+y^2=0\,?].$$

Искомую функцию $U(x,y)$ находим из системы (8.3)

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}.$$

Интегрируя первое уравнение системы по $x$, получаем

$$U(x,y)=\int\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}\,dx=\int\frac{4y^2-(x+y^2)}{(x+y^2)^3}\,dx=\int\frac{4y^2}{(x+y^2)^3}\,dx-\int\frac{1}{(x+y^2)^2}\,dx=$$

$$=-\frac{2y^2}{(x+y^2)^2}+\frac{1}{(x+y^2)}+\varphi(y)=\frac{-y^2+x}{(x+y^2)^2}+\varphi(y).$$

Для нахождения функции $\varphi(y)$ подставим построенную функцию $U(x,y)$ во второе уравнение системы (8.3), получим

$$\frac{-2y(x+y^2)^2-4y(x+y^2)(-y^2+x)}{(x+y^2)^4}+\varphi'(y)=\frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3}.$$

Отсюда после арифметических преобразований первой дроби имеем $\varphi'(y) = 0$ и, полагая $\varphi(y) = 0$, получаем *общий интеграл* исходного уравнения $x - y^2 = C(x + y^2)^2$ в областях $y^2 > x$ и $y^2 < x$. Кроме того, проверкой убедимся, что $y^2 = -x$ задаёт *решение* исходного уравнения. Окончательно *полное семейство решений* этого уравнения определяется формулами

$$x - y^2 = C(x + y^2)^2; \quad y^2 = -x. \qquad \square$$

**8.23.** $(2xy^2 + y)\,dx - (2x^2y - x)\,dy = 0.$

**8.24.** $(x^2y^3 + y)\,dx + (x^3y^2 - x)\,dy = 0.$

**8.25.** $(xy^2 - y)\,dx + (x^2y - 3x)\,dy = 0.$

**8.26.** $(x^3 + xy^2 - y)\,dx + (y^3 + x^2y + x)\,dy = 0.$

**В уравнениях 8.27–8.28 построить общий интеграл без интегрирования полного дифференциала, зная, что каждое из них имеет два существенно различных интегрирующих множителя рассмотренных выше видов.**

**8.27.** $(x - xy)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0,\ \mu_1 = \mu_1(y),\ \mu_2 = \mu_2(x^2 + y^2).$

**8.28.** $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0,\ \mu_1 = \mu_1(x),\ \mu_2 = \mu_2(x^2 - y^2).$

**Проинтегрировать уравнения 8.29–8.35 с помощью интегрирующего множителя, найдя его методом разбиения ДУ на группы.**

**8.29.** $(x + y^3)\,dx + (x^3 + y)\,dy = 0.$

Решение. Разбиваем уравнение на две группы так, чтобы интегрирующий множитель каждой группы мог быть легко найден:

$$(x\,dx + y\,dy) + (y^3\,dx + x^3\,dy) = 0.$$

Первая группа является полным дифференциалом, поэтому интегрирующим множителем можно взять 1, а соответствующий ему потенциал $U_1(x, y) = (x^2 + y^2)/2$. Следовательно, общая форма интегрирующего множителя первой группы есть $\mu_1 = \varphi(x^2 + y^2)$. Вообще говоря, далее можно пытаться строить следующий множитель и для исходного ДУ в виде $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

Однако покажем, как можно применить метод, основанный на теореме об общем виде интегрирующего множителя. Интегрирующий множитель второй скобки есть функция $1/(x^3y^3)$ (переменные разделяются), а соответствующий ему потенциал получается при интегрировании уравнения $\dfrac{1}{x^3}\,dx + \dfrac{1}{y^3}\,dy = 0$ и равен $U_2(x, y) = -\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2y^2}$. Следовательно, общий вид *интегрирующего множителя* *второй группы* имеет вид

$$\mu_2(x,y) = \frac{1}{x^3y^3}\psi\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

Теперь надо подобрать функции $\varphi$ и $\psi$ так, чтобы имело место тождество

$$\varphi(x^2+y^2) \equiv \frac{1}{x^3y^3}\psi\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right).$$

Для этого можно положить

$$\psi\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)^{-3/2}, \quad \varphi(x^2+y^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Тогда *интегрирующий множитель* исходного уравнения имеет вид

$$\mu(x,y) = \mu_1(x,y) = \mu_2(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Умножим теперь уравнение на этот множитель, получим *уравнение в полных дифференциалах*

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^3\,dx + x^3\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0,$$

*потенциал* которого $u(x,y)$ можно найти из соответствующей системы или сразу представить левую часть уравнения в виде *полного дифференциала*

$$d\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + d\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{xy-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = C. \qquad \square$$

**8.30.** $(x^3 + xy^2 - y)\,dx + (y^3 + x^2y + x)\,dy = 0.$
**8.31.** $y\,dx + (x - x^2y\ln y)\,dy = 0.$
**8.32.** $(x^3 - xy^2 - y)\,dx + (x^2y - y^3 + x)\,dy = 0.$
**8.33.** $(x^2 - y)\,dx + x(y+1)\,dy = 0.$
**8.34.** $y^2(y\,dx - 2x\,dy) = x^3(x\,dy - 2y\,dx).$
**8.35.** $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$

**8.36.** В плоскости $xOy$ рассмотрим векторное поле $(M(x,y), N(x,y))$. Если существует дифференцируемая функция $U(x,y)$ такая, что $\partial U/\partial x = M$, $\partial U/\partial y = N$, то такое поле называется *потенциальным,* а функция $U(x,y)$ — *потенциалом поля.*

**а)** Пусть проекция сил на оси дана формулами

$$F_x = \frac{x-3y}{(x+y)^2}, \quad F_y = \frac{ax+by}{(x+y)^2}.$$

Определить постоянные $a$, $b$ так, чтобы силы имели потенциал $U(x, y)$, и найти его.

**б)** Рассмотрим поле *ньютоновского притяжения.* Доказать, что оно является *потенциальным.*

Решение. Если в начале координат $O$ поместить массу $m$, а в точку $A(x, y)$ — массу 1, то последняя будет притягиваться к центру $O$ с силой $\bar{F}$, равной по величине $F = m/r^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть расстояние точки $A$ от начала координат. Так как косинусы углов, составляемых этой силой с осями, будут $-x/r$ и $-y/r$, то проекции силы $\bar{F}$ на оси имеют вид $F_x = -mx/r^3$, $F_y = -my/r^3$. Очевидно, что *ньютоновское поле является потенциальным*, поскольку соответствующее дифференциальное уравнение

$$-\frac{mx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx - \frac{my}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dy = 0$$

есть *уравнение в полных дифференциалах* (это легко проверяется), а его *потенциал* $U(x, y) = m/\sqrt{x^2 + y^2}$. □

**в)** Доказать, что поля, образованные силой $F = kr$ или $F = k/r$ ($k = \mathrm{const}$), направление которой составляет угол $+\pi/2$ с направлением радиус-вектора $\vec{r}$, не являются потенциальными.

**8.37.** Найти кривые, у которых длина отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат в любой точке кривой, равна длине радиус-вектора этой точки.

**8.38.** Определить форму зеркала, которое собирает все лучи, параллельные его оптической оси, в одной точке.

Решение. Поместим начало координат $O$ в точку, где отражённые лучи фокусируются, а ось абсцисс $Ox$ направим по оптической оси зеркала. Рассмотрим сечение зеркала плоскостью, проходящей через ось $Ox$. Пусть $Oy$ — ось ординат в этой плоскости.

Обозначим через $y = y(x)$ уравнение сечения зеркала, $M(x, y)$ — его произвольную точку $(y > 0)$, $MN$ — нормаль к сечению в этой точке (рис. 8.1). Любой луч $LM$, параллельный оси $Ox$, должен после отражения пройти через начало координат. По закону отражения $\angle\alpha = \angle\beta$. Следовательно, треугольник $MON$ — равнобедренный и $OM = ON$, где $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $ON$ — отрезок, отсекаемый на оси абсцисс нормалью. Абсциссу точки $N(X_N, 0)$ находим из уравнения нормали

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

подставляя в него $Y = 0$ и определяя $X_N = x + yy'$. Тогда дифференциальное уравнение сечений имеет вид

$$x + yy' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

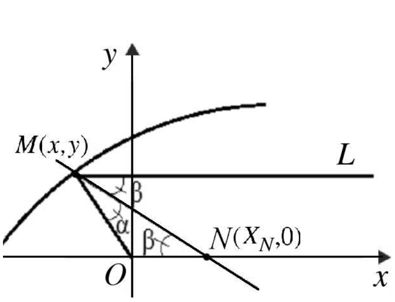



*Рис. 8.1*

Решим это (однородное) уравнение с помощью интегрирующего множителя

$$\mu = 1/\sqrt{x^2+y^2}.$$

После умножения на этот множитель имеем ДУ в полных дифференциалах

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} - dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} - dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2} = x + C.$$

Так как плоскость $xOy$, проходящая через ось $Ox$, выбрана произвольно, то сечение зеркала любой такой плоскостью есть одна и та же парабола. Следовательно, искомая зеркальная поверхность является параболоидом вращения

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2. \qquad \square$$

## Задания для самостоятельной работы

**1.** Докажите, что если уравнение (8.1) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, удовлетворяющими условию Эйлера (8.2) и заданными в односвязной области, обладает замкнутой интегральной кривой, то внутри области, ограниченной этой кривой, найдётся по меньшей мере одна особая точка $(x_0, y_0)$, для которой $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$.

**2.** Найти интегрирующий множитель уравнения

$$yF_1(xy)\,dx + xF_2(xy)\,dy = 0.$$

**Контрольные вопросы**

**1.** Пусть уравнение (8.1) — уравнение в полных дифференциалах в односвязной области $G$, $M, N \in C(G)$, с потенциалом $U(x,y)$, точка $(x_0, y_0) \in G$. При каком условии через эту точку заведомо проходит единственная интегральная кривая? Ответ обоснуйте и запишите уравнение этой кривой.

**2.** Пусть уравнение (8.1), где $M$ и $N$ — непрерывные в области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции, $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in G$, является уравнением в полных дифференциалах. Доказать, что оно не имеет особых решений.

**3.** Указать интегрирующие множители рассмотренных ранее уравнений: **а)** уравнения с разделяющимися переменными; **б)** линейного уравнения и уравнения Бернулли; **в)** однородного уравнения.

**4.** Пусть $M, N \in C(G)$, $M^2 + N^2 \neq 0$, $(x,y) \in G$. Указать общий вид множителей, после умножения на которые ДУ в полных дифференциалах остаётся уравнением в полных дифференциалах.

**5.** Доказать, что если ДУ (8.1) является одновременно однородным и в полных дифференциалах, то $xM(x,y) + yN(x,y) = C$ есть его общий интеграл.

**Мини-самоконтроль. 1.** Проинтегрировать следующие ДУ: **а)** $(2x + y\ln y)\,dx + (x + 2y + x\ln y)\,dy = 0$; **б)** $x^5\,dx + (x^2+y^2)(y\,dx - x\,dy) = 0$; **в)** $y^2(y - x)\,dx + (y^3 + xy^2 + 1)\,dy = 0$; **г)** $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$. **2.** Найти интегрирующие множители уравнений: **а)** $\omega(x^2+y^2)x\,dx + \omega_1(x^2+y^2)y\,dy = 0$; **б)** $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy) = 0$.

# § 9. Применение теоремы существования и единственности

*Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Условие Липшица. Теорема Пикара — Линделёфа. Простейший вариант теоремы существования и единственности. Интегральное уравнение, равносильное задаче Коши. Решение интегрального уравнения. Последовательные приближения (приближения Пикара). Оценка погрешности $k$-го приближения к истинному решению. Отрезок Пеано. Продолжимость решения. Точка единственности. Точка ветвления. Построение решений, подозрительных на особые, по виду уравнения.*

Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{9.1}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция, определённая в замкнутом прямоугольнике

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leqslant a, \;\; |y - y_0| \leqslant b\}. \tag{9.2}$$

Решение задачи Коши (9.1) равносильно решению *соответствующего интегрального уравнения*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[\tau, y(\tau)]\, d\tau, \tag{9.3}$$

при этом *решением интегрального уравнения* называют непрерывную функцию $y = y(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, обращающую уравнение (9.3) в тождество при $x \in (\alpha, \beta)$.

*Достаточные условия* существования и единственности:

**Теорема Пикара — Линделёфа.** *Пусть функция $f(x, y)$, непрерывная в компакте $D$ (см. формулу (9.2)), удовлетворяет в $D$ условию Липшица по переменной $y$ равномерно относительно $x$, т. е. выполнено неравенство*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \tag{9.4}$$

*с некоторой постоянной Липшица $L > 0$ для любых точек $(x, y_1) \in D$, $(x, y_2) \in D$.*

*Тогда существует единственное решение задачи Коши (9.1), заведомо определённое на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, где*

$$h = \min(a, b/M), \tag{9.5}$$

*а $M$ — такое число, что $|f(x, y)| \leqslant M$, $(x, y) \in D$.*

**Последовательные приближения (приближения Пикара)** $y_k(x)$ к решению задачи Коши (9.1), определяемые рекуррентными формулами

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[\tau, y_{k-1}(\tau)]\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9.6}$$

равномерно сходятся к искомому решению на указанном отрезке, при этом *оценка погрешности*, получаемой при замене точного решения $y(x)$ задачи Коши (9.1) $k$-м приближением $y_k(x)$, имеет вид

$$|y(x) - y_k(x)| \leqslant \frac{ML^k}{(k+1)!}h^{k+1}, \quad |x - x_0| \leqslant h. \tag{9.7}$$

*Для проверки условия Липшица* на практике часто более удобно использовать легко проверяемые *достаточные признаки*, гарантирующие выполнение этого условия, например, следующий.

*Если функции $f(x,y)$ и $\partial f(x,y)/\partial y$ непрерывны в компакте $D \subset \subset \mathbb{R}^2$, то функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ равномерно относительно $x$ в $D$, причём в качестве константы Липшица можно взять любое число $L \geqslant \max\limits_{(x,y)\in D} |\partial f(x,y)/\partial y|$.*

Отсюда следует **простейший вариант теоремы существования и единственности**. *Если функция $f$ вместе со своей частной производной $\partial f/\partial y$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$, то существует единственное решение задачи Коши* (9.1), *определённое на некотором отрезке* $[x_0 - \widetilde{h}, x_0 + \widetilde{h}]$.

В случае если в $D$ выполнено лишь условие непрерывности функции $f(x,y)$, имеет место следующая теорема.

**Теорема Пеано.** *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $D$* (*см. формулу* (9.2)). *Тогда задача Коши* (9.1) *имеет по меньшей мере одно решение на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, где число $h$ определяется по формуле* (9.5).

Этот отрезок называется *отрезком Пеано.*

Пусть $y = y(x)$ — решение ДУ в (9.1), определённое на промежутке $J$. Каждое *сужение решения* на промежуток $J_1 \subset J$ $y = y(x)$, $x \in J_1$, также является решением этого ДУ.

Если решение $y = y(x)$, $x \in J$, не служит сужением никакого другого решения данного ДУ, то решение $y = y(x)$, $x \in J$, называется *продолженным* или *непродолжаемым.*

**Теорема о продолжимости.** *Если функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет в прямоугольнике* $D$ *(см. формулу* (9.2)*) условиям теоремы Пикара — Линделёфа, то существует непродолжаемое решение* $y = y(x)$, $x \in J$, *задачи Коши* (9.1).

Из этой теоремы следует, что каждое решение ДУ в (9.1) может быть продолжено до решения, далее непродолжаемого.

**9.1.** Выполнено ли условие Липшица по переменной $y$ равномерно по $x$ для данных функций $f(x,y)$ в указанных областях? При положительном ответе найти какую-либо постоянную Липшица:

**а)** $f(x,y) = x^3 + y^3$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$.

Решение. Функции $f(x,y)$ и $\partial f/\partial y = 3y^2$ непрерывны в $D$ и по достаточному признаку удовлетворяют в компакте $D$ условию Липшица по $y$ равномерно относительно $x$ с постоянной Липшица $L = \max\limits_{(x,y)\in D} |\partial f/\partial y| = \max\limits_{(x,y)\in D} |3y^2| = 3b^2$; □

**б)** $f(x,y) = |y| + x\sin y$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 3\}$.

Решение. Представим функцию $f(x,y) \equiv f_1(x,y) + f_2(x,y)$, где для первой функции $f_1(x,y) = |y|$ нельзя применить достаточный признак выполнимости условия Липшица, так как она недифференцируема в $D$, однако в силу неравенства

$$|f_1(x,y_1) - f_1(x,y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leqslant |y_1 - y_2|$$

условие Липшица (9.4) выполнено с постоянной $L_1 = 1$.

Функция $f_2(x,y) = x\sin y$ непрерывна в $D$ вместе со своей производной $\partial f_2/dy = x\cos y$ и по достаточному признаку удовлетворяет условию Липшица (9.4) с постоянной $L_2 = \max\limits_{(x,y)\in D} |\partial f_2/\partial y| = \max\limits_{(x,y)\in D} |x\cos y| = 2$. Отсюда следует, что данная функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица (9.4) с постоянной Липшица $L = \max(L_1, L_2) = 2$; □

**в)** $f(x,y) = \sqrt{y-1}$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Решение. Достаточный признак выполнения условия Липшица для данной функции в указанной области не работает, так как производная функции терпит разрыв при $y = 1$. Покажем, что условие Липшица (9.4) не выполняется. Предположим противное. Пусть это условие выполняется в $D$ с некоторой постоянной $L > 0$. Тогда и для любых двух точек $(0,1)$ и $(0,y)$, где $y = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, справедливо неравенство $|f(0,y) - f(0,1)| = \sqrt{\varepsilon} \leqslant L|y-1| = L\varepsilon$, откуда следует неравенство $L\sqrt{\varepsilon} \geqslant 1$, что невозможно при достаточно малых $\varepsilon$. Полученное противоречие доказывает, что условие Липшица не выполняется в компакте $D$; □

**г)** $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b\}$;

**д)** $f(x,y) = x^2|y| + xy^2$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2\}$;

**е)** $f(x,y) = x^2\sqrt{|y|^3}$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$;

**ж)** $f(x,y) = x\sqrt[3]{y^2}$, $D = \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$;
**з)** $f(x,y) = |y|(\sin x + \cos x)$, $D = \mathbb{R}^2$;
**и)** $f(y) = \begin{cases} y \ln |y|, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$ $D = \{(x,y)\colon\ x \in \mathbb{R},\ |y| \leqslant 2\}$.

**9.2.** Доказать, что:

**а)** функция $f(x,y) = p(x)y + q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции на отрезке $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, удовлетворяет условию Липшица по $y$ равномерно относительно $x$ в полосе $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ плоскости $xOy$;

**б)** функция $f(x,y) = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, $p$, $q$, $r \in C[\alpha,\beta]$, не удовлетворяет условию Липшица по $y$ равномерно относительно $x$ в полосе $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ плоскости $xOy$.

Удовлетворяет ли она этому условию в компакте $D = \{(x,y)\colon\ \alpha \leqslant \leqslant |x| \leqslant \beta,\ a \leqslant |y| \leqslant b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$?

**В задачах 9.3–9.7 построить последовательные приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ к решению поставленных задач Коши, оценить величину отрезка Пеано и разность между точным решением $y = y(x)$ и вторым приближением $y_2(x)$ на этом отрезке. Указать номер $k$-го приближения, гарантирующего оценку $|y(x) - y_k(x)| \leqslant 0{,}001$ на отрезке Пеано.**

**9.3.** $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

Решение. Для применения теоремы Пикара будем рассматривать наше уравнение в квадрате $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$, т. е. $a = 1$, $b = 1$. Функция $f(x,y) = x^2 + y^2$ непрерывна в $D$ вместе с производной $\partial f/\partial y = 2y$. Отсюда следует, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет в $D$ условию Липшица по $y$ равномерно относительно $x$ с постоянной $L = \max\limits_{(x,y)\in D} |\partial f/\partial y| = 2$, а число $M$ можно положить равным $\max\limits_{(x,y)\in D} |x^2 + y^2| = 2$, т. е. $h = \min(1, 1/2) = 1/2$. В силу теоремы Пикара — Линделёфа решение указанной задачи Коши существует, оно единственно и заведомо определено на отрезке Пеано $[-1/2, 1/2]$.

Построим требуемые последовательные приближения по формулам (9.6), в которых полагаем

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0:$$

$$y_0(x) = 0, \quad y_k(x) = 0 + \int\limits_0^x [t^2 + y_{k-1}^2(t)]\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда имеем

$$y_0(x) = 0; \quad y_1(x) = 0 + \int\limits_0^x [t^2 + 0]\,dt = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2(x) = 0 + \int\limits_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}, \quad |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для оценки разности между точным решением задачи Коши $y = y(x)$ и пикаровским приближением $y_2(x)$ на отрезке Пеано воспользуемся оценкой (9.7), получаем

$$|y(x) - y_2(x)| \leqslant \frac{ML^2}{3!} h^3 = \frac{2 \cdot 2^2}{6} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{6}, \quad |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для нахождения нужного номера приближения $y_k(x)$, гарантирующего заданную точность на отрезке $J = [-1/2, 1/2]$, имеем в силу (9.7) оценку

$$|y(x) - y_k(x)| \leqslant 2 \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!} \leqslant 0,001,$$

из которого следует неравенство $(k+1)! \geqslant 1000$, отсюда находим нужный номер приближения $k = 6$. □

**9.4.** $y' = x^2 - y^2$; $y(0) = 1$.

**9.5.** $y' = y^2 - 2x$; $y(0) = 0$.

**9.6.** $y' = x - y^2$; $y(0) = 0$.

**9.7.** $y' = y^2 + 2x$; $y(1) = 1$.

**В задачах 9.8–9.16 выделить области на плоскости $xOy$, в которых через каждую точку проходит единственная интегральная кривая данных уравнений.**

**9.8.** $y' = y^2 + x^2$.

Решение. Функция $f(x, y) = y^2 + x^2$ определена и непрерывна в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ вместе со своей частной производной $\partial f / \partial y = 2y$, поэтому она удовлетворяет условиям простейшей теоремы существования и единственности. Следовательно, через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая и область существования и единственности — вся плоскость. □

**9.9.** $\dot{y} = \sqrt{y - x} + 1$.

Решение. Функция $f(x, y) = \sqrt{y - x} + 1$ определена и непрерывна в полуплоскости $y \geqslant x$. Её частная производная $\partial f / \partial y = 1/(2\sqrt{y - x})$ непрерывна в области $y > x$.

Отсюда в силу простейшей теоремы существования и единственности следует, что область существования и единственности $G = \{(x, y) \mid y > x\}$.

Заметим, что применение достаточного признака единственности общей теоремы Пикара — Линделёфа не позволяет расширить область единственности, так как в окрестности точек $(x_0, x_0)$, лежащих на границе полуплоскости $y \geqslant x$, не выполнено условие Липшица по переменной $y$ равномерно относительно $x$ (см. аналогичное доказательство в задаче 9.1,**в**). □

**9.10.** $y' = |y|(x^2 + 1)$.

Решение. Функция $f(x, y) = |y|(x^2 + 1)$ определена и непрерывна на плоскости $\mathbb{R}^2$, однако она не является дифференцируемой по $y$ при $y = 0$. Покажем, что тем не менее эта функция удовлетворяет условию Липшица по $y$ равномерно относительно $x$ в любом компакте $D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant a, \ |y| \leqslant b\}$. Действительно, имеем неравенство $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||y_1|(1 + x^2) - |y_2|(1 + x^2)| \leqslant (1 + x^2)\,||y_1| - |y_2|| \leqslant (1 + a^2)|y_1 - y_2|$, т. е. выполнено условие Липшица с постоянной $L = 1 + a^2$.

Отсюда в силу теоремы Пикара — Линделёфа через каждую точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая. $\square$

**9.11.** $y' = x^3 - y^3$.

**9.12.** $yy' = y - \operatorname{tg} y$.

**9.13.** $y' = x^2 + \sqrt{y^2 - x^2}$.

**9.14.** $xy' = (y - 1)(y + 1)^{1/3}$.

**9.15.** $y' = a + \sqrt[3]{x - 2y}$.

**9.16.** $(x^2 - y)y' = \sqrt[3]{(y - 2x)^2}$.

**В задачах 9.17–9.20 доказать по виду уравнения, что оно не имеет особых решений.**

**9.17**. $y' = y^3 + x^3$.

**9.18.** $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.

**9.19**. $y' + y/x = \sin x$.

**9.20**. $y' = a + 3(y - x/3)^{1/2}$, $a \neq 1/3$.

**В задачах 9.21–9.30 выяснить, имеют ли уравнения особые решения. Найти их, если они существуют.**

**9.21.** $y' = x^2 y + y^3$.

Решение. Функция $f(x, y) = x^2 y + y^3$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\partial f/\partial y = x^2 + 3y^2$ в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Тогда в силу простейшей теоремы существования и единственности через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая уравнения и, следовательно, *оно не имеет особых решений.* $\square$

**9.22.** $y' = 1/3 + 3(y - x/3)^{2/3}$.

Решение. Функция $f(x, y) = 1/3 + 3(y - x/3)^{2/3}$ определена и непрерывна в $\mathbb{R}^2$, однако её частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\left(y - \frac{x}{3}\right)^{-1/3}$$

непрерывна в точках плоскости $(x, y)$, где $y \neq x/3$. Отсюда следует, что через каждую точку $(x_0, y_0)$, $y_0 \neq x_0/3$, проходит единственная интегральная кривая.

Нарушение единственности может произойти только в точках прямой $y = x/3$, в которых производная $\partial f/\partial y$ обращается в бесконечность. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = x/3$ является решением данного уравнения, и это решение — единственное, которое может оказаться особым. Для дальнейшего исследования найдём все решения уравнения. С помощью замены $z = y - x/3$, $z = z(x)$, уравнение приводится к виду $z' = 3z^{2/3}$. Интегрируя, получаем все его решения $z = (x + C)^3$, $z = 0$. Тогда решения исходного уравнения определяются формулами $y = x/3 + (x + C)^3$ и $y = x/3$.

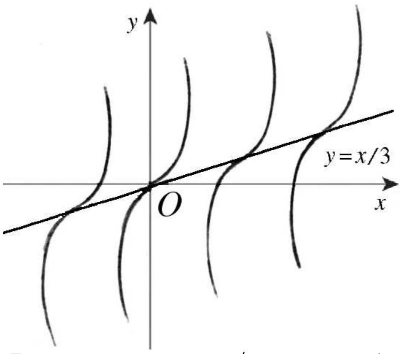



*Рис. 9.1.* $y = x/3$ — особое решение

При $x = x_0$ условию $y(x_0) = x_0/3$ удовлетворяет само исследуемое на особое решение $y = x/3$ и второе решение, которое получается из общего решения при $C = -x_0:$ $y = x/3 + (x - x_0)^3$, т. е. в любой точке $(x_0, x_0/3)$ нарушается единственность решения задачи Коши. Поэтому $y = x/3$ является *особым* решением данного уравнения (рис. 9.1).

**Замечание.** Для справедливости последнего утверждения достаточно доказать, что функция $z = 0$ — особое решение преобразованного уравнения $z' = 3z^{2/3}$. □

**9.23.** $y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + a$.

**9.24.** $y' = y\sqrt{|y|}$.

**9.25.** $y' = y^\alpha$, $y \geqslant 0$.

**9.26.** $y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$.

**9.27.** $y' = x^2 + y^3$.

**9.28.** $xy' = \sqrt{y} + x^2$.

**9.29.** $y' = f(y)$, $f(y) = y\ln|y|$, $y \neq 0$; $f(0) = 0$.

**9.30.** $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

**9.31.** Могут ли интегральные кривые касаться друг друга в некоторой точке $(x_0, y_0)$:

**а)** для уравнения $y' - \dfrac{\alpha}{x}y = 0$, $\alpha$ — const $\neq 0$, $x \neq 0$;

**б)** для уравнения $y' = x\sqrt{y}$?

**9.32.** Пусть функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ непрерывны на интервале $(a, b)$. Исследовать следующие уравнения на особые решения в полосе $a < x < b$: **а)** $y' + p(x)y = q(x)$; **б)** $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ (в зависимости от параметра $\alpha > 0$); **в)** $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.

**9.33.** Найти особые решения уравнения $(y^2 - 1)y' = y^{1/3}$.

**9.34.** Найти три последовательные приближения для уравнений: **а)** $y' = y^2$; **б)** $y' = y$; **в)** $y' = -y^2$ при начальном условии $y(0)=1$. Оценить отрезки Пеано существования решения этих начальных задач и найти точные интервалы существования этих решений.

**9.35.** При каких значениях параметра $\alpha$ каждое решение ДУ $y' = |y|^\alpha$ продолжимо на бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

**9.36.** Доказать, что для любых чисел $x_0, y_0$ решение задачи Коши

$$y' = x^2 - y^5, \quad y(x_0) = y_0,$$

существует на всём интервале $(x_0, +\infty)$.

## Задания для самостоятельной работы

**1.** Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области $D = \{(x,y)\colon\ \alpha < x < \beta,\ y \in \mathbb{R}\}$ и удовлетворяет неравенству

$$|f(x,y)| \leqslant a(x)|y| + b(x)$$

с непрерывными положительными функциями $a(x)$ и $b(x)$. Доказать, что всякое решение задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, можно продолжить на весь интервал $(\alpha, \beta)$.

**2.** Доказать, что ДУ $y' = x^2 + y^2$ не имеет решения, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$, на отрезке $[0, 3]$.

**3.** Доказать, что уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где $P$ и $Q$ — взаимно простые полиномы относительно $x$ и $y$, не имеет особых решений.

**4.** При каких значениях $a \in \mathbb{R}$ и целых $n$ $(n \geqslant 2)$ решение уравнения $y' = x + ay^n$ с произвольными начальными условиями $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$?

**5.** Доказать однозначную разрешимость задачи Коши

$$y' = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad y(0) = y_0 \neq 0,$$

и неограниченную продолжимость на числовую прямую решения этой задачи.

### Контрольные вопросы

**1.** Является ли любое решение линейного ДУ (6.2) с непрерывными на $R$ коэффициентами продолжимым на всю числовую прямую?

**2.** Существует ли хоть одно ненулевое решение ДУ $y' = y^2$, продолжимое на всю числовую прямую?

**3.** Докажите однозначную разрешимость задачи Коши $y' = y^2 + 1/x^2$; $y(1) = 1$. Является ли это решение неограниченно продолжимым вправо $(x \geqslant 1)$?

**4.** Дано уравнение $dy/dx = x^3 - 2y^3$. Доказать, что любое его решение неограниченно продолжимо вправо.

**Мини-самоконтроль. 1.** Найти области существования и единственности для ДУ: **а)** $y' = x^3 - y^3$; **б)** $x^2 y' = y^2 + \sqrt{y^4 - x^4}$. **2.** Построить последовательные приближения $y_0$, $y_1$, $y_2$ к решению задачи Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$. Указать промежуток существования решения, который гарантируется теоремой Пикара — Линделёфа. **3.** Выяснить, имеют ли уравнения: **а)** $y' = a + \sqrt{y - x}$, $a$ — const; **б)** $xy' = y^2 + \sqrt{y^2 - x^2}$ особые решения. Найти их, если они существуют.

## § 10. Разные уравнения первого порядка. Варианты самостоятельной и контрольной работ

При определении типа ДУ, встречающихся ниже, иногда достаточно визуально сравнить их с изученными ранее в § 1, 4–8 стандартными уравнениями как в нормальной форме, разрешив их относительно $y'$ или $x'$, так и в дифференциальной, или испытать их на ДУ в полных дифференциалах либо на наличие простейших интегрирующих множителей $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$. Можно попытаться построить интегрирующий множитель специального вида $\mu = \mu[\omega(x, y)]$, испытывая различные случаи функции $\omega(x, y)$, вид которых подсказывает соответствующая дробь (см. § 8), или методом группировки членов.

Иногда удаётся упростить ДУ, группируя члены и выделяя полный дифференциал, что позволяет ввести упрощающие ДУ замены. Напомним часто встречающиеся полные дифференциалы:

$$d(x^2 + y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy, \quad d(xy) = x\,dy + y\,dx, \quad d(e^y) = e^y\,dy,$$

$$d(\ln y) = \frac{1}{y}\,dy, \quad d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \quad \text{и т. д.}$$

**Проинтегрировать ДУ 10.1–10.21 с помощью интегрирующих множителей или упрощающих замен.**

**10.1.** $(x^2 + y^2)\,dx + x(y\,dx - x\,dy) = 0.$

Решение. Это ДУ является уравнением Дарбу. С помощью замены $y = zx$ (или $x = zy$) оно приводится к уравнению Бернулли относительно $x = x(z)$ (или $y = y(z)$), которое в данном случае вырождается в ДУ с разделяющимися переменными. Однако придём к этой замене, выделяя полный дифференциал путём деления уравнения на $y^2$. Имеем

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)dx + x\,\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)dx + x\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad [y = 0\,?].$$

Замена $z = x/y$, $z = z(x)$, преобразует ДУ к уравнению с разделяющимися переменными $(z^2 + 1)\,dx + x\,dx = 0$, решая которое, получаем общий интеграл $\ln|x| + \operatorname{arctg} z = C$ и решение $x = 0$.

Окончательно *полное семейство решений* исходного ДУ определяется соотношениями $\ln|x| + \operatorname{arctg}(y/x) = C$; $x = 0$ ($y = 0$ не является решением). □

**10.2.** $y^2x\,dx - (x\,dy - y\,dx)\sqrt{1+x^2} = 0.$

Р е ш е н и е. Аналогично, как и в предыдущей задаче, преобразуем ДУ, разделив его на $y^2\sqrt{1+x^2}$ и выделяя полные дифференциалы. Имеем

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad d(\sqrt{1+x^2}) + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad [y = 0\,?].$$

Отсюда следует, что *полное семейство решений* исходного ДУ определяется соотношениями $\sqrt{1+x^2} + x/y = C;\ \ y = 0.$ □

**10.3.** $(\operatorname{ctg} xy - xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$

Р е ш е н и е. Из вида ДУ следует, что целесообразно применить замену $z = xy$, $z = z(x)$. Тогда ДУ преобразуется к виду

$$(\operatorname{ctg} z - z)\,dx - x^2\frac{x\,dz - z\,dx}{x^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{ctg} z\,dx - x\,dz = 0, \quad [x = 0\,?].$$

Интегрируя ДУ с разделяющимися переменными, получаем его решения $\ln|x| + \ln|\cos z| = C_1;\ \ z = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ x = 0.$ Полученный интеграл, полагая $C_1 = \ln C$, можно переписать в виде $x\cos z = C$, в котором при $C = 0$ содержатся все решения $z = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \ x = 0.$ Отсюда следует, что *полное семейство решений* исходного ДУ определяется соотношением $x\cos(x/y) = C.$ □

**10.4.** $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$

Р е ш е н и е. Найдём интегрирующий множитель этого ДУ Дарбу методом разбиения его на группы следующим образом: $(x\,dx + y\,dy) + [x(x\,dy - y\,dx)] = 0.$

Первая группа является полным дифференциалом, поэтому интегрирующий множитель можно считать равным 1, а соответствующий ему потенциал — $(x^2 + y^2)/2$. Следовательно, общая форма интегрирующего множителя первой группы есть $\mu_1 = \varphi(x^2 + y^2)$.

Далее целесообразно пытаться строить интегрирующий множитель для второй группы в виде $\mu_2 = \mu_2(x^2 + y^2)$. Соответствующая дробь (8.7) из § 8 является функцией от $\omega = x^2 + y^2$. Действительно,

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N\omega'_x - M\omega'_y} = \frac{-x - 2x}{2x^3 + 2xy^2} = -\frac{3}{2\omega} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \mu_2 = e^{-(3/2)\int(1/\omega)\,d\omega} = \omega^{-3/2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Отсюда следует, что функция $\mu(x,y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}$ является интегрирующим множителем и для исходного ДУ.

К этому интегрирующему множителю можно прийти и приёмом, описанным при решении задачи 8.29.

Умножим обе части исходного ДУ на $\mu(x,y)$, получим ДУ в полных дифференциалах

$$\frac{x(1-y)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx + \frac{y + x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dy = 0.$$

Для построения общего интеграла воспользуемся интегральной формулой (см. § 8), полагая $(x_0, y_0) = (0, 1)$:

$$\int_0^x \frac{\xi(1-y)}{\sqrt{(\xi^2+y^2)^3}}\,d\xi + \int_1^y \frac{\eta+0}{\sqrt{0+\eta^6}}\,d\eta = C.$$

После очевидного интегрирования получаем при $y > 0$ *общий интеграл* исходного ДУ $(y-1)/\sqrt{x^2+y^2} = C$. Убеждаемся в справедливости построенного интеграла и для $y < 0$. □

**10.5.** $(x + \ln^2 y)y\,dx = 2\ln y\,dy$.

**10.6.** $y\,dx - x\,dy = 2y^3\cos^2\dfrac{x}{y}\,dy$.

**10.7.** $xy\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1-y^2}$.

**10.8.** $(y + xy^2)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$.

**10.9.** $(x^2 - y^2 + 2x)\,dx - 2y\,dy = 0$.

**10.10.** $(x + e^x + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$.

**10.11.** $y - xy' = xy\left(\ln\dfrac{x}{y} + 1\right)$.

**10.12.** $x^2y' - 2x = e^y$.

**10.13.** $(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0$.

**10.14.** $(\operatorname{ctg} xy - xy)\,dx - x^2\,dy = 0$.

**10.15.** $(x^2y^2 + xy)y\,dx + (x^2y^2 - 1)x\,dy = 0$.

**10.16.** $xy' = (3x^2\cos y - \sin y)\cos y$.

**10.17.** $(x^2 + y^2)y\,dx + 2x(x\,dy - y\,dx) = 0$.

**10.18.** $(x^3 + xy^2 + y)\,dx + (y^3 + x^2y + x)\,dy = 0$.

**10.19.** $(y + 2xy^3)\,dx + (3x + 2x^2y^2)\,dy = 0$.

**10.20.** $y' + \sin 2y + x\cos 2y + x = 0$.

**10.21.** $(x^2y - y^4)\,dx + (2xy^3 - x^3)\,dy = 0$.

**В задачах 10.22–10.57 проинтегрировать изученные в § 1, 4–8 стандартные уравнения.**

**10.22.** $(\sqrt{x-y} + \sqrt{x})\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0$.

**10.23.** $xy' - y = 2x^2e^{-y/x}$.

**10.24.** $((x+1)\sin y + x)\,dx + x\cos y\,dy = 0$.

**10.25.** $y' - 4x^3\sqrt{y} = 4xy$.

**10.26.** $(4xy^2 - y)\,dx + (x - 2y^3)\,dy = 0$.

**10.27.** $2yy' + x = xy^4$.

**10.28.** $(e^y - 2x)\,dx - x^2\,dy = 0$.

**10.29.** $4x^2y' + (xy+1)^2 = 0$.

**10.30.** $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0$.

**10.31.** $(y^2 - x)y' = 2y$.

**10.32.** $(1 + x^2y)\,dx + x^2(y + x)\,dy = 0$.

**10.33.** $y'\cos y + \sin y = x$.

**10.34.** $e^x\,dx + (e^x\operatorname{tg} y + \cos^2 y)\,dy = 0$.

**10.35.** $y' = y^2 - xy + 1$.

**10.36.** $y' = y^2 - 4x^2 + 2$.

**10.37.** $y^3 + 6x^{-3/2} + 14y' = 0$.

**10.38.** $y' = 2\sqrt{y - 3x} + 3$.

**10.39.** $3y^2y' + y^3 = \cos x$.

**10.40.** $y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}$.

**10.41.** $(2x^3 - 2xy)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0$.

**10.42.** $2xy^2\,dx - 2x^2y\,dy = (y^4 + 1)\,dy,\ \ y \geqslant 0$.

**10.43.** $(y + 3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

**10.44.** $2(x + \sqrt{y - x^2})\,dx - dy = 0$.

**10.45.** $(2xy^2 - y)\,dx - (y^2 + x + y)\,dy = 0$.

**10.46.** $(xy - 1 + x - y)\,dx - (2xy + 1 - 2x - y)\,dy = 0$.

**10.47.** $(1 + x^2 - y)\,dx = (1 + y^2 + x)\,dy$.

**10.48.** $(4x^2 + 4y + xy^3)\,dx + (2x + x^2y^2)\,dy = 0$.

**10.49.** $(2x + 2y - 1)\,dx + (x + y + 1)\,dy$.

**10.50.** $(y^2 + 1)\,dx + y(4x - 10\sqrt{xy})\,dy = 0,\ \ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0$.

**10.51.** $(x^2 - y)\,dx + (x - 2xy)\,dy = 0$ (в области $|x| > \sqrt{2}|y|$).

**10.52.** $x\,dy - y\,dx + (x^3 + xy^2)\,dx - 2x^2y\,dy = 0$.

**10.53.** $xy' = y - x(e^{y/x} - e^{-y/x})$.

**10.54.** $y' + 1 = \operatorname{tg}\dfrac{x + y}{x} + \dfrac{x + y}{x}$.

**10.55.** $(x + 2y + 1)\,dx + (x - 1)\,dy = 0$.

**10.56.** $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

**10.57.** $(4x + 3y - 1)\,dx + (2x + y - 1)\,dy = 0$.

**В задачах 10.58–10.79 определить тип уравнения и указать метод интегрирования.**

**10.58.** $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

**10.59.** $y' + xy = 2xy^3$.

**10.60.** $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.

**10.61.** $(1 - x^2)y' + xy = x$.

**10.62.** $(\sin y - x\operatorname{tg} y)y' = 1$.

**10.63.** $y' = \sqrt{y - 2x} + 2$.

**10.64.** $(4y - 2x - 2)\,dx + (x + y - 2)\,dy = 0$.

**10.65.** $x^2y' = (xy - 1)^2$.

**10.66.** $y' = \sqrt{\dfrac{x + y}{2x}}$.

**10.67.** $y' = e^{x+y}/(x + y)$.

**10.68.** $y' = \dfrac{y}{x} + 2\sqrt{\dfrac{x^3}{y}}$.

**10.69.** $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

**10.70.** $y'\cos y + \sin y = x^2 + 1$.

**10.71.** $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$.

**10.72.** $(x^6 + 3y^2)\,dx - x(x^3 + y)\,dy = 0$.

**10.73.** $y' = x^{\alpha}y^{\beta}$.

**10.74.** $(2x^3 - 2xy)\,dx + (e + x^2)\,dt = 0$.

**10.75.** $y' = -x + \sqrt{x^2 + y}$.

**10.76.** $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$.
**10.77.** $(2x^6 - 3y^4)\,dx - 2x^4y\,dy = 0$.
**10.78.** $(x + \sin x + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$.
**10.79.** $(x + y^3)\,dx + 3(y^3 - x)y^2\,dy = 0$.

### Вариант самостоятельной работы

Определить тип уравнения и указать метод интегрирования.
1. $(2x + y + 1)\,dx + (2 - x - 1) = 0$.
2. $y' = -y^2 - \dfrac{1}{4x^2}$.
3. $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.
4. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{2/3}$.
5. $(y + x^3)\,dy - (x^5 + x^2y)\,dx = 0$.

## Варианты контрольной работы к главе I

### Вариант I

1. Проинтегрировать уравнение

$$y\,dx + \left(x - 2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M(0, 1)$.

2. Решить уравнение

$$(x + y - 1)\,dx - (3x + 3y + 1)\,dy = 0.$$

3. Проинтегрировать уравнение

$$(x \cos y - y \sin y)\,dy + (x \sin y + y \cos y)\,dx = 0.$$

4. Найти кривые, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат в любой точке кривой, равна расстоянию этой точки до начала координат.

5. Выделить области существования и единственности на плоскости $xOy$ уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

и доказать по виду уравнения, что оно не имеет особых решений.

## **Вариант II**

1. Проинтегрировать уравнение

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

и выделить решения, удовлетворяющие начальному условию $y(1) = 0$.

2. Проинтегрировать уравнение

$$(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0.$$

3. Решить уравнение

$$9x^2y' = -18x^2y^2 + 2.$$

4. Найти кривые, у которых отношение длины отрезка, отсекаемого касательной на оси $Oy$, к длине отрезка, отсекаемого нормалью на оси $Ox$, есть величина постоянная, равная $k$.

5. Выделить области существования и единственности на плоскости $xOy$ уравнения $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

## **Вариант III**

1. Проинтегрировать уравнение

$$y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M(1,1)$.

2. Проинтегрировать уравнение

$$y' = y^2 + \frac{1}{x^2}.$$

3. Решить уравнение

$$\left(x + \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{y^3}{x}\right)dy = 0.$$

4. Материальная точка массой $m$ движется под действием силы $F_1$, пропорциональной времени $t$, которое прошло с момента начала движения. Сила сопротивления среды $F_2$ пропорциональна скорости движения $v$. Найти зависимость скорости движения точки $v = v(t)$, если $v(t_0) = v_0$.

5. Доказать существование и единственность решения уравнения $y' = x^2 + y^2$ с начальным условием $y(0) = 0$. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение указанной задачи Коши. Построить последовательные приближения $y_0, y_1, y_2$ к этому решению.

# Глава II

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

## § 11. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно $y'$. Неполные уравнения

*Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Уравнения первого порядка $m$-й степени. Определения решения, интегральной кривой, поля направлений. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Особое решение, $p$-дискриминантная кривая.*

Общий вид **дифференциального уравнения первого порядка, не разрешённого относительно производной**, следующий:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{11.1}$$

где $x$ — независимая переменная; $y = y(x)$ — искомая функция; $F(x, y, y')$ — заданная непрерывная функция в некоторой области $G \subset \subset \mathbb{R}^3$.

*Решением* уравнения (11.1) будем называть непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$, определённую на интервале $(a, b)$ и обращающую уравнение (11.1) в тождество на этом интервале.

Решение может быть задано и в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, и в *параметрической форме* $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, $p \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, где $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ — непрерывно дифференцируемые на интервале $(\alpha, \beta)$ функции, причём $\varphi'(p) \neq 0$, для которых выполнено тождество

$$F\left[\varphi(p), \psi(p), \frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}\right] \equiv 0, \quad p \in (\alpha, \beta).$$

График решения ДУ (11.1) называется *интегральной кривой.*

Так же, как и уравнение, разрешённое относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{11.2}$$

уравнение общего вида (11.1) определяет некоторое *поле направлений.* Главное отличие от уравнений вида (11.2), где в каждой точке $(x_0, y_0)$

области определения уравнения задаётся лишь одно значение направления поля, тангенс угла наклона которого к оси абсцисс есть $y'_0 = f(x_0, y_0)$, в том, что уравнение (11.1) в точке $(x_0, y_0)$ задаёт, вообще говоря, несколько направлений поля (их может быть и бесконечно много), которые определяются из уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$.

**Задача Коши для уравнения (11.1)** ставится так же, как и в случае уравнения (11.2): среди всех решений ДУ (11.1) найти решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Кратко задача Коши записывается в виде

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{11.3}$$

**Теорема существования и единственности решения задачи Коши**. *Пусть точка* $(x_0, y_0, p_0)$ *такова, что* $F(x_0, y_0, p_0) = 0$, *и выполнены следующие условия:*

1) *функция* $F(x, y, p)$ *непрерывна вместе со своими частными производными* $F'_y$ и $F'_p$ *в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, p_0)$;

2) *производная функции* $F$ *по* $p$ *в точке* $(x_0, y_0, p_0)$ *отлична от нуля:*

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) \neq 0.$$

*Тогда существует единственное решение* $y = y(x)$ *задачи Коши* (11.3), *определённое в некоторой окрестности точки* $x_0$ *и удовлетворяющее условию* $y'(x_0) = p_0$.

Точка $(x_0, y_0)$ называется *точкой ветвления* (*точкой неединственности*) для уравнения (11.1), если через неё проходит *не менее двух* интегральных кривых, не совпадающих в любой сколь угодно малой окрестности этой точки и имеющих в ней *общую касательную*.

Решение $y = y(x)$ уравнения (11.1) называется **особым**, если соответствующая ему интегральная кривая состоит из *точек неединственности* (*точек ветвления*).

Пусть выполнено так называемое **основное предположение** (см. условие 1 теоремы):

*функция* $F(x, y, p)$ *определена и непрерывна вместе со своими частными производными* $\partial F/\partial y$ *и* $\partial F/\partial p$ *в некоторой области* $V \subset \mathbb{R}^3$.

Тогда *особые решения* уравнения (11.1), если таковые имеются, *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

Если исключить из системы (11.4) параметр $p$, получим уравнение так называемой *$p$-дискриминантной кривой* $\psi(x,y) = 0$, которую сокращённо обозначают $\mathrm{Disct}_p\colon\ \psi(x,y) = 0$.

*Для выделения особых решений* нужно проверить, какие ветви $p$-дискриминантной кривой определяют решения ДУ (11.1), и именно их далее исследовать, будут ли они особыми решениями, т. е. касаются ли их в каждой точке другие решения.

*Для выделения определённого решения* ДУ (11.1) иногда начальные условия для него задаются отличным от (11.3) развёрнутым способом. Пусть тройка чисел $x_0$, $y_0$, $p_0$, $(x_0, y_0, p_0) \in V$ такова, что $F(x_0, y_0, p_0) = 0$.

**Задачей Коши (в расширенном смысле)** назовём нахождение решения $y = y(x)$ уравнения (11.1), удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p_0.$$

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0, y_0)$ с *заданным угловым коэффициентом касательной* $p_0$ к кривой в этой точке.

*Одним из методов интегрирования уравнения* (11.1) является, если это возможно, разрешение уравнения (11.1) относительно $y'$. В благоприятном случае получается одно или несколько (может быть и бесконечно много) уравнений вида

$$y' = f_k(x,y), \quad k = 1, \ldots . \tag{11.5}$$

Если эти уравнения удаётся проинтегрировать, то *полное семейство решений* ДУ (11.1) является объединением всех решений ДУ (11.5), при этом уравнение (11.1) может иметь и *составные интегральные кривые*, полученные гладкой склейкой как интегральных кривых каждого из ДУ (11.5), так и интегральных кривых различных уравнений (11.5) в тех точках, где совпадают значения соответствующих решений и их производных. Однако в ответах при решении конкретных уравнений мы не будем это отражать.

Такой *метод* можно (но не всегда это удаётся и даже не всегда целесообразно) проводить, например, для **уравнения первого порядка $m$-й степени**

$$a_0(x,y){y'}^m + a_1(x,y){y'}^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(x,y)y' + a_m(x,y) = 0.$$

Другим методом интегрирования уравнения (11.1) является **метод введения параметра**. Покажем его сначала на примере неполных уравнений вида

$$F(x, y') = 0 \tag{11.6}$$

и

$$F(y, y') = 0. \tag{11.7}$$

*Будем говорить, что уравнение* (11.6) (*уравнение* (11.7)), *допускает параметрическое представление* $x = \varphi(p)$, $y' = \psi(p)$ ($y = \varphi(p)$, $y' = \psi(p)$), $p \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1$, $\psi \in C$, если $F[\varphi(p), \psi(p)] \equiv 0$, $p \in (\alpha, \beta)$.

В этом случае, используя **основное дифференциальное соотношение**

$$dy = y'\,dx, \tag{11.8}$$

уравнение (11.6) ((11.7)) удаётся проинтегрировать в квадратурах.

Например, если уравнение (11.6) допускает параметрическое представление $x = \varphi(p)$, $y' = \psi(p)$, то, подставляя эти значения $x$ и $y'$ в *основное соотношение* (11.8), имеем

$$dy = \psi(p)\varphi'(p)\,dp.$$

Проинтегрировав, найдём $y = \int \psi(p)\varphi'(p)\,dp + C$, и *общее решение* уравнения (11.6) *в параметрической форме* примет вид

$$x = \varphi(p), \quad y = \int \psi(p)\varphi'(p)\,dp + C.$$

В случае уравнения (11.7) знание его параметризации $y = \varphi(p)$, $y' = \psi(p)$ в силу (11.8) приводит к уравнению $\varphi'(p)\,dp = \psi(p)\,dx$. Тогда

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\,dp, \quad [\psi(p) = 0\,?].$$

Поэтому *общее решение* уравнения (11.6) представимо в виде

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\,dp + C, \quad y = \varphi(p).$$

Кроме того, если уравнение $\psi(p) = 0$ имеет корни $p = p_k$, то уравнение (11.7) имеет *решения* вида $y = \varphi(p_k)$, $k = 1, \ldots$ .

Заметим, что параметризация неполных уравнений (11.6) и (11.7) равносильна параметризации соответствующей кривой $F(x, y) = 0$.

В случае если уравнение (11.6) можно разрешить относительно $x$, $x = \varphi(y')$, то, полагая $y' = p$, где $p$ — параметр, имеем $x = \varphi(p)$, т. е. получаем параметрическое представление уравнения в виде $x = \varphi(p)$, $y' = p$.

Аналогично, если уравнение (11.7) можно разрешить относительно $y$, $y = \varphi(y')$, получаем параметрическое представление этого уравнения $y = \varphi(p)$, $y' = p$.

Иногда для упрощения выкладок целесообразнее положить $y' = \psi(p)$, где $\psi(p)$ — соответствующим образом подобранная функция.

Неполное уравнение $F(y') = 0$ в случае, если корни уравнения $F(p) = 0$ изолированы, имеет общее решение вида

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

(обсуждение этого уравнения в общем случае см. в работе [17]).

**Контрольные вопросы**

**1.** Проверить выполнимость условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши: **а)** $y'^2 - 4y = 0$, $y(1) = 4$, удовлетворяющего условию $y'(1) = 4$; **б)** $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$, $y(0) = 1$, удовлетворяющего условию $y'(0) = 0$.

**2.** Будет ли точка $M(1, 1)$ точкой ветвления для ДУ $yy' + y'^2 = x^2 + y^2$?

**3.** Найти $p$-дискриминантную кривую ДУ $y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0$.

Исследование возможных ситуаций построения общего решения и особых решений уравнений первого порядка общего вида **проведём параллельно на примере двух тривиальных уравнений:**

| **11.1.** $4y'^2 = y^3$; | **11.2.** $y'^2 = 4y$. |
|---|---|

Решение. Область определения обоих уравнений $y \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Разрешая уравнения относительно $y'$, получаем соответственно

$$y' = \pm\frac{1}{2}y^{3/2};$$

$$y' = \pm 2\sqrt{y}.$$

Разделяя переменные в уравнениях, имеем

$$\pm\frac{2dy}{y^{3/2}} = dx, \quad [y = 0\,?];$$

$$\pm\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx, \quad [y = 0\,?].$$

Отсюда следует, что *полное семейство решений* исходных уравнений определяется соответственно по формулам:

$$y = \frac{4}{(x+C)^2}, \quad y = 0;$$

$$y = (x+C)^2, \quad y = 0.$$

Для выделения *особых решений* рассматриваемых уравнений, удовлетворяющих *основному предположению*, построим $p$-дискриминантные кривые для каждого уравнения по формулам (11.4):

$$\begin{cases} 4p^2 = y^3, \\ 8p = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 0;$$

$$\begin{cases} p^2 = 4y, \\ 2p = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Для обоих уравнений $\mathrm{Disct}_p: \ y = 0$, при этом $y = 0$ — решение исходных уравнений и, следовательно, лишь оно может быть особым.

Однако для первого уравнения решение $y = 0$ не имеет общих точек ни с каким другим решением этого уравнения и поэтому *не является особым решением* (рис. 11.1). $\square$

Для второго уравнения через любую точку $(x_0, 0)$ решения $y_1(x) = 0$ проходит другое решение $y_2(x) = (x - x_0)^2$, при этом выполнено условие касания этих решений при $x = x_0 : y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = 0$. Отсюда следует, что $y = 0$ — *особое решение* второго уравнения (рис. 11.2). $\square$

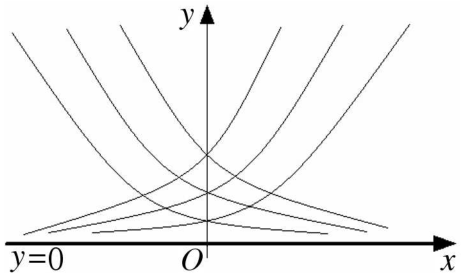



*Рис. 11.1.* $y = 0$ не является особым решением задачи 11.1

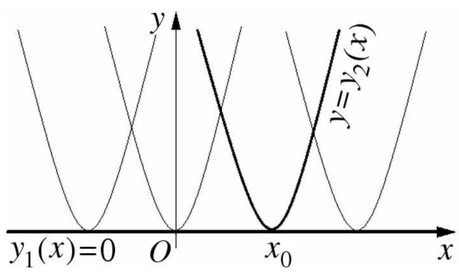



*Рис. 11.2.* $y = 0$ — особое решение задачи 11.2

**Уравнения 11.3–11.13 проинтегрировать (где указано, выделить интегральные кривые, проходящие через заданную точку) и исследовать на особые решения.**

**11.3.** $y'^2 - 2xy' + 2x^2 - 2y = 0.$

Р е ш е н и е. Данное уравнение легко разрешается относительно производной, получаем $y' = x \pm \sqrt{2y - x^2}$. Перепишем это уравнение в виде $d(2y - x^2) = \pm 2\sqrt{2y - x^2}\,dx$, из которого следует

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(2y - x^2)}{\sqrt{2y - x^2}} = \pm dx, \quad [2y - x^2 = 0\,?].$$

Интегрируя, получаем *общее решение* уравнения (в области $y > x^2/2$) вида $\sqrt{2y - x^2} = \pm x + C$, которое можно переписать в форме $y = x^2/2 + (x + C)^2/2$. Проверкой убеждаемся, что $y = x^2/2$ — решение исходного уравнения и оно не содержится в полученной выше формуле ни при каком значении постоянного $C$. Окончательно *полное семейство* решений имеет вид

$$y = x^2/2 + (x + C)^2/2; \quad y = x^2/2.$$

Для исследования уравнения на особые решения заметим, что функция $F(x, y, y') = y'^2 - 2xy' + 2x^2 - 2y$ удовлетворяет *основному предположению*: она непрерывна по $x$ и непрерывно дифференцируема по $y$ и $y'$. Отсюда следует, что *решения, подозрительные на особые*, содержатся среди ветвей *p-дискриминантной кривой*, определяемой системой

$$\begin{cases} p^2 - 2xp + 2x^2 - 2y = 0, \\ 2p - 2x = 0, \end{cases}$$

из которой надо исключить $p$. Из второго уравнения имеем $p = x$ и, подставляя $p = x$ в первое уравнение, получаем $p$-дискриминантную кривую $\mathrm{Disct}_p$: $y = x^2/2$. Ранее мы убедились, что эта кривая является *интегральной*.

Проверим теперь, будет ли решение $y = x^2/2$ особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения (рис. 11.3). Пусть $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2/2)$ — произвольная точка исследуемой интегральной кривой. Предварительно найдём другое решение, график которого проходит через эту точку. Подставляя её координаты в формулу общего решения, получаем $x_0^2/2 = x_0^2/2 + (x_0 + C)^2/2$. Отсюда имеем

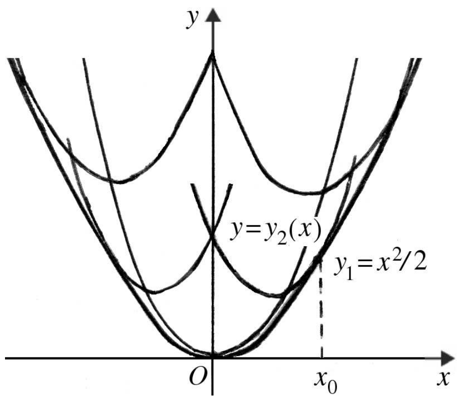



*Рис. 11.3.* Интегральные кривые ДУ, $y_1 = x^2/2$ — особое решение

$C = -x_0$ и второе решение, проходящее через точку $(x_0, x_0^2/2)$, примет вид $y = x^2/2 + (x - x_0)^2/2$.

Проверим, наконец, выполнено ли условие касания этих двух решений $y_1(x) = x^2/2$ и $y_2(x) = x^2/2 + (x - x_0)^2/2$ в точке с абсциссой $x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Для их производных в этой точке имеем равенство $y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = x_0$. Значит, при каждом $x_0$ решение $y = x^2/2$ в точке с абсциссой $x_0$ касается другого решения $y = y_2(x)$. Отсюда следует, что $y = x^2/2$ — *особое решение*.

Последние построения **целесообразно** объединить следующим образом. Запишем *условие касания* исследуемого на особое решение $y_1 = x^2/2$ в точке с абсциссой $x_0 \in \mathbb{R}$ и неизвестного пока решения $y_2(x)$ из семейства $y = x^2/2 + (x + C)^2/2$:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$$

которое примет вид

$$\frac{x_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + \frac{(x_0 + C)^2}{2}, \quad x_0 = x_0 + (x_0 + C).$$

Эти два равенства выполняются при $C = -x_0$. Это означает, что решение $y_1(x) = x^2/2$ в любой точке с абсциссой $x_0$ касается другого решения $y_2(x) = x^2/2 + (x - x_0)^2/2$. □

**11.4.** $y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0$. **11.5.** $4yy'(yy' - 1) = y^2 - 1$.
**11.6.** $xy'^2 - 2yy' + x = 0$. **11.7.** $y'^2 - 4y^3(1 - y) = 0$; $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 1)$.
**11.8.** $y'^2 - 2xy' + x^2 - e^{2y} = 0$. **11.9.** $y'^2 + y^2 - 1 = 0$; $M_1(0, 1)$, $M_2(0, 0)$.
**11.10.** $yy'^2 - 2xy' + y = 0$. **11.11.** $y'^3 - 4xy'^2 - yy' + 4xy = 0$.
**11.12.** $y'^2 - 2y' + y - x - 3 = 0$. **11.13.** $y'^2 = y(1 - y)^2$; $M_1(0, 1)$, $M_2(0, 0)$.

**Уравнения 11.14–11.26 решить методом введения параметра.**

**11.14.** $x = y'^2 + y' \ln y'$.

Решение. Неполное уравнение вида (11.6) разрешено относительно $x$. Примем за параметр $y'$, полагая $y' = p$, имеем $x = p^2 + p \ln p$. Тогда получаем параметрическое представление уравнения $x = p^2 + p \ln p$, $y' = p$.

Подставим эти значения $x$ и $y'$ в дифференциальное соотношение (11.8), имеем

$$dy = y'\,dx = p(2p + \ln p + 1)\,dp.$$

Отсюда следует, что $y = \int p(2p + \ln p + 1)\,dp = \dfrac{2}{3}p^3 + \dfrac{p^2}{2}\ln p + \dfrac{p^2}{4} + C$, а *общее решение в параметрической форме* имеет вид $x = p^2 + p \ln p$, $y = \dfrac{2}{3}p^3 + \dfrac{p^2}{2}\ln p + \dfrac{p^2}{4} + C$. □

**11.15.** $y = 2y'^3 + y'^2 e^{y'}$.

Решение. Неполное уравнение вида (11.7) разрешено относительно $y$. Введём параметр $y' = p$. Отсюда следует параметрическое представление уравнения $y = 2p^3 + p^2 e^p$, $y' = p$.

Используя соотношение (11.8), получаем $d(2p^3 + p^2e^p) = p\,dx$, откуда

$$dx = (6p + 2e^p + pe^p)\,dp, \quad [p = 0\,?],$$

следовательно, $x = 3p^2+e^p+pe^p+C$. Кроме того, $p = 0$ для исходного ДУ приводит к решению $y = 0$, которое получается подстановкой $p = 0$ в представление $y = 2p^3 + p^2e^p$.

Таким образом, *решения* заданного ДУ определяются соотношениями $y=0$ и

$$\begin{cases} x = 3p^2 + e^p + pe^p, \\ y = 2p^3 + p^2e^p. \end{cases} \qquad \square$$

**11.16.** $y^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$.

Р е ш е н и е. В этом уравнении по аналогии с параметризацией астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ естественно положить $y = a\cos^3 p$, $y' = a\sin^3 p$. Тогда в силу (11.8) имеем $3a\cos^2 p(-\sin p)\,dp = a\sin^3 p\,dx$.

Из этого уравнения находим $dx = \dfrac{\cos^2 p}{\sin^2 p}\,dp$, $[\sin p = 0\,?]$. Отсюда

$$x = -\int 3\frac{\cos^2 p}{\sin^2 p}\,dp = 3(\operatorname{ctg} p + p) + C$$

и $p = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ . Таким образом, *решениями* данного уравнения являются функции $\begin{cases} x = 3(\operatorname{ctg} p + p) + C, \\ y = a\cos^3 p \end{cases}$ и $y = \pm a$.

Заметим, что *последние два решения получаются после подстановки* $p = k\pi$ в *представление* $y = a\cos^3 p$. $\square$

**11.17.** $x = \operatorname{sh} y' + y'$.

**11.18.** $x^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$.

**11.19.** $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$.

**11.20.** $y = y'^2 \arcsin y' - y'^3$.

**11.21.** $y^3 + y'^3 - 3yy' = 0$.

**11.22.** $x(y'^2 + 1) = y'^2 - 1$.

**11.23.** $y'^3 = 2yy' - y$.

**11.24.** $x(y'^2 + 1)^{3/2} = 1$.

**11.25.** $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5}$.

**11.26.** $x^3 - y'^3 = xy'$.

**11.27.** Найти кривые, для которых длина отрезка нормали (см. § 2) равна радиус-вектору точки касания.

**11.28.** Указать общий интеграл уравнения

$$y'^n + a_1 y'^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n = 0$$

($a_1, \ldots, a_n$ — постоянные, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, уравнение $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ имеет действительные корни).

**Мини-самоконтроль. 1.** Проинтегрировать следующие ДУ: **а)** $xy'^2 + 2yy' - x = 0$; **б)** $x = y'+y'^4$; **в)** $y = y'+y'^3$. **2.** Исследовать уравнения на особые решения с помощью $p$-дискриминантной кривой: **а)** $y'^2 - 2xy' + y = 0$; **б)** $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

# § 12. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро

*Параметрическое представление дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$. Уравнения вида $y = \varphi(x, y')$, $x = \psi(y, y')$. Уравнения Лагранжа и Клеро. $C$-дискриминантная кривая и огибающая семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$. Особые решения.*

Предположим, что уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{12.1}$$

допускает **параметрическое представление**

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), y' = \chi(u, v), \tag{12.2}$$

где параметры $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$, т. е. выполнено тождество

$$F[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)] \equiv 0, \quad (u, v) \in G.$$

Тогда, используя *основное дифференциальное соотношение*

$$dy = y'\,dx$$

и представления (12.2), уравнение (12.1) *всегда можно привести к уравнению, разрешённому относительно производной.*

Параметризация уравнения (12.1) равносильна параметризации поверхности $F(x, y, z) = 0$ и в общем случае эта задача вызывает большие трудности.

Однако в частных случаях, когда уравнение (12.1) можно разрешить относительно $y$ или $x$, т. е.

$$y = f(x, y') \tag{12.3}$$

или

$$x = g(y, y'), \tag{12.4}$$

параметризация уравнения (12.1) получается естественным образом. Например, в случае уравнения (12.3), принимая за параметры $x = x$, $y' = p$, получаем параметрическое представление уравнения (12.3):

$$x = x, \quad y = \varphi(x, p), \quad y' = p. \tag{12.5}$$

Уравнение (12.4) параметризуется аналогично:

$$x = g(y, p), \quad y = y, \quad y' = p.$$

Далее, например в случае уравнения (12.3), подставим (12.5) в основное соотношение $dy = y'\,dx$, получим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, dp = p\, dx.$$

Если общее решение последнего уравнения удаётся найти в виде $x = x(p, C)$, где $C$ — произвольная постоянная, то общее решение уравнения (12.3) представимо в параметрической форме

$$x = x(p, C), \quad y = \varphi[x(p, C), p].$$

Аналогично решаются и уравнения вида (12.4).

Примерами уравнений, которые допускают параметризацию вида (12.5) и при этом после использования основного дифференциального соотношения заведомо *интегрируются в квадратурах*, являются *уравнения Лагранжа и Клеро.*

**Уравнением Лагранжа** называется уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad \varphi(y') \not\equiv y', \tag{12.6}$$

где $\varphi$ и $\psi$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Полагая $y' = p$, где $p$ — параметр, получаем параметрическое представление уравнения

$$x = x, \quad y' = p, \quad y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{12.7}$$

Подставив (12.7) в соотношение $dy = y'\,dx$, получим

$$\varphi(p)\, dx + \big(\varphi'(p)x + \psi'(p)\big)\, dp = p\, dx$$

или

$$\big(\varphi(p) - p\big)\, dx + \big(\varphi'(p)x + \psi'(p)\big)\, dp = 0. \tag{12.8}$$

Это уравнение является линейным относительно $x = x(p)$:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}, \quad \big[\varphi(p) - p = 0\,?\big].$$

Далее, решив это уравнение, получим, как и выше, *общее решение в параметрической форме.*

Если уравнение $\varphi(p) - p = 0$ имеет корни $p = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то уравнение (12.6) имеет решения вида

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Эти решения *могут* оказаться *особыми.*

**Уравнением Клеро** называется уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{12.9}$$

Появление уравнения Клеро *следует ожидать в геометрических задачах*, в которых ищется кривая на плоскости $xOy$ *по свойству её касательных, не зависящих от положения точки касания.*

Параметрическое представление уравнения (12.9)

$$x = x, \quad y = xp + \psi(p), \quad y' = p$$

в силу равенства $dy = y'\,dx$ приводит уравнение (12.9) к виду

$$\big(x + \psi'(p)\big)\,dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два: 1) $dp = 0$ и 2) $x + \psi'(p) = 0.$

Из первого уравнения следует, что $p = C$. Подставляя это значение $p$ в уравнение $y = xp + \psi(p)$, получим *общее решение* уравнения (12.9) $y = xC + \psi(C)$.

Из второго уравнения и формулы $y = xp + \psi(p)$ следует, что уравнение Клеро имеет также следующее *решение в параметрической форме*:

$$x = -\psi'(p), \quad y = -\psi'(p)p + \psi(p),$$

которое при выполнении условия $\psi''(p) \neq 0$ является *особым.*

*Заметим, что общее решение уравнения Клеро* (12.9) *получается сразу заменой в* (12.9) $y'$ *на* $C$, а при выполнении условия $\psi''(p) \neq 0$ ДУ имеет особое решение, которое строится как *огибающая семейства прямых* $y = xC + \psi(C)$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство интегральных кривых ДУ (12.1) на плоскости $xOy$, определяемых уравнением

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{12.10}$$

где $C$ — параметр.

Пусть функция $\Phi$ непрерывно дифференцируема в некоторой области пространства $(x, y, C)$.

*Огибающей семейства кривых* (12.10) является линия $\gamma$, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства, отличной от линии $\gamma$ в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Решение $y = \psi(x)$ является *особым решением* уравнения (12.1) тогда и только тогда, когда график этого решения является *огибающей семейства интегральных кривых* (12.10) этого уравнения.

Как известно из дифференциальной геометрии, огибающая входит в состав так называемой *$C$-дискриминантной кривой* $\psi(x, y) = 0$ (сокращённо $\mathrm{Disct}_C\colon\ \psi(x, y) = 0$), определяемой системой соотношений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{12.11}$$

Таким образом, *для нахождения особых решений* ДУ (12.1) нужно найти $C$-дискриминантную кривую семейства (12.10) по формулам (12.11), а затем для каждой ветви этой кривой проверить, определяет ли она решение ДУ (12.1). В случае если она окажется интегральной кривой, нужно выяснить, будет ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения из семейства (12.10).

Для *выделения особых решений* из $C$-дискриминантной кривой можно также воспользоваться следующим **достаточным условием для огибающей** [6, с. 84–87].

*Если вдоль какой-либо ветви $C$-дискриминантной кривой,* **не принадлежащей множеству кривых (12.10)**, *выполнено условие*

$$(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 \neq 0, \tag{12.12}$$

*то эта ветвь будет огибающей.*

В дальнейшем при исследовании ДУ на особые решения будем либо использовать это *достаточное условие*, либо *непосредственно исследовать на единственность те ветви $C$-дискриминантной кривой*, которые окажутся решениями уравнения (12.1).

**Уравнения 12.1–12.7 решить методом введения параметра (при желании можно также исследовать ДУ на особые решения).**

**12.1.** $3y - 6x + 6y'^2 - 2y'^3 = 0.$

Р е ш е н и е. Данное уравнение разрешим относительно $y$: $y = 2x - 2y'^2 + 2(y')^3/3$. Введём параметризацию ДУ:

$$x = x, \quad y = 2x - 2p^2 + 2p^3/3, \quad y' = p.$$

В силу равенств $dy = y'\,dx$ и $dy = 2\,dx - (4p - 2p^2)\,dp$ получаем уравнение

$$p\,dx = 2\,dx - (4p - 2p^2)\,dp \ \text{ или } \ (2-p)(dx - 2p\,dp) = 0.$$

Из последнего ДУ следует $p = 2$ или $dx - 2p\,dp = 0$:

1) $p = 2 \ \Rightarrow \ y = 2x - 8/3$; 2) $dx - 2p\,dp = 0 \ \Rightarrow \ x = p^2 + C \ \Rightarrow \ y = 2p^3/3 + 2C$.

Отсюда следует *полное семейство решений ДУ*: $y = 2x - 8/3$ и

$$\begin{cases} x = p^2 + C, \\ y = 2p^3/3 + 2C. \end{cases}$$

Из параметрического представления общего решения можно исключить параметр $p$, получим *общее решение* в явном виде $y = \pm 2(x - C)^{3/2}/3 + 2C$.

Исследование ДУ на особые решения проведём с помощью *p-дискриминантной кривой*

$$\mathrm{Disct}_p = 0: \quad \begin{cases} 3y - 6x + 6p^2 - 2p^3 = 0, \\ 12p - 6p^2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем $p = 0$ или $p = 2$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы, получаем *две ветви p-дискриминантной кривой* $y = 2x$ и $y = 2x - 8/3$, первая из которых не является интегральной, а прямая $y = 2x - 8/3$ — интегральная линия этого ДУ, и она может оказаться особой.

Проверим, касаются ли этой прямой в каждой её точке другие интегральные кривые. Запишем условие касания решения $y = 2x - 8/3 \equiv y_1(x)$ в точке с абсциссой $x_0 \in \mathbb{R}$ и другого решения, входящего в формулу общего решения, $y_2(x) = 2(x - C)^{3/2}/3 + 2C$ при некотором $C$ в виде системы $y_1(x_0) = y_2(x_0)$; $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$, принимающей вид

$$2x_0 - \frac{8}{3} = \pm\frac{2(x_0 - C)^{3/2}}{3} + 2C; \quad 2 = \pm(x_0 - C)^{1/2}.$$

Из второго равенства следует, что в представлении решения $y_2(x)$ нужно взять знак «$+$» и $C = x_0 - 4$. Подставляя это значение $C$ в первое условие, получаем равенство.

Это означает, что решение $y_1(x)$ в любой точке с абсциссой $x_0$ касается другого, отличного от него, решения $y_2(x)$, где $C = x_0 - 4$: $y_2(x) = 2(x - x_0 + 4)^{3/2}/3 + 2x_0 - 8$. Таким образом, интегральная линия $y = 2x - 8/3$ состоит из точек ветвления и, следовательно, *решение* $y = 2x - 8/3$ *является особым.* $\square$

**12.2.** $y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2} - y = 0.$

**12.3.** $y'^3 + y^2 = xyy'.$

**12.4.** $y = xy' - x^2y'^3.$

**12.5.** $8yx^3 = 4x^4y' - y'^3.$

**12.6.** $4x^2y = y'^2 + 2x^3y'.$

**12.7.** $3y = 2xy' - \dfrac{2}{x}y'^2.$

**В задачах 12.8–12.19 решить уравнения Лагранжа и Клеро (при желании исследовать их на особые решения).**

**12.8.** $y = 2xy' - y'^2$.

Решение. Полагая $y' = p$, получаем параметрическое представление уравнения Лагранжа

$$x = x, \quad y = 2xp - p^2, \quad y' = p.$$

Подставляя эти формулы в соотношение $dy = y'\,dx$, получаем $2x\,dp + 2p\,dx - 2p\,dp = p\,dx$ или $p\,dx + 2x\,dp = 2p\,dp$. Это уравнение — линейное относительно $x = x(p)$:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2, \quad [p = 0\,?].$$

Интегрируя это уравнение, получаем $x = \dfrac{2}{3}p + \dfrac{C}{p^2}$, $p \neq 0$. Следовательно, *общее решение* исходного уравнения представимо в параметрической форме

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, \quad y = 2xp - p^2 = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p}, \quad p \neq 0.$$

Кроме того, уравнение имеет *решение* $y = 0$, которое получается подстановкой $p = 0$ в равенство $y = 2xp + p^3$.

Исследуем это ДУ на особые решения с помощью $p$-дискриминантной кривой

$$\mathrm{Disct}_p = 0: \quad \begin{cases} y = 2xp - p^2, \\ 0 = 2x - 2p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = x^2.$$

Проверим, является ли эта кривая интегральной. После подстановки $y = x^2$ в ДУ получаем

$$x^2 \neq 2x \cdot 2x - (2x)^2,$$

откуда следует, что $p$-дискриминантная кривая не является интегральной, значит, исходное ДУ *не имеет особых решений.* □

**12.9.** $y = x + y'^2 - y'$.

Решение. Параметрическое представление исходного уравнения (*уравнения Лагранжа*) имеет вид $x = x$, $y = x + p^2 - p$, $y' = p$. Пользуясь равенством $dy = y'\,dx$ и учитывая, что $dy = dx + 2p\,dp - dp$, получаем $dx + 2p\,dp - dp = p\,dx$, откуда $(1 - p)\,dx + (2p - 1)\,dp = 0$. Разделяя переменные

$$dx + \frac{2p - 1}{1 - p}\,dp = 0, \quad [p = 1\,?]$$

и интегрируя, получаем $x = \int (2p - 1)/(p - 1)\,dp = 2p + \ln|p - 1| + C$. Тогда *общее решение* в параметрической форме имеет вид

$$x = 2p + \ln|p - 1| + C, \quad y = p + p^2 + \ln|p - 1| + C.$$

Кроме того, подставляя $p = 1$ в равенство $y = x + p^2 - p$, имеем *решение* $y = x$.

Исследуем это ДУ на особые решения с помощью $p$-дискриминантной кривой:

$$\mathrm{Disct}_p = 0: \quad \begin{cases} y = x + p^2 - p, \\ 0 = 2p - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x + p^2 - p, \\ p = 1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = x - \frac{1}{4}.$$

Проверкой убеждаемся, что $p$-дискриминантная кривая не является интегральной и, следовательно, исходное ДУ *не имеет особых решений.* □

**12.10.** $y = xy'^2 + y'^3.$

Р е ш е н и е. Это *уравнение Лагранжа* допускает параметризацию

$$x = x, \quad y = xp^2 + p^3, \quad y' = p.$$

Отсюда в силу соотношения $dy = y'\,dx$ приходим к уравнению

$$p^2\,dx + 2px\,dp + 3p^2\,dp = p\,dx \quad \Rightarrow \quad (p-1)\frac{dx}{dp} + 2x = -3p, \quad [p = 0\,?].$$

Интегрируя это линейное ДУ, найдём

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - p - \frac{1}{2}, \quad [p = 1\,?].$$

Тогда *общее решение* заданного ДУ представимо в параметрическом виде

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - p - \frac{1}{2}, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2} - \frac{1}{2}p^2, \quad p \neq 1. \tag{12.13}$$

Кроме того, ДУ имеет *решения* вида $y = 0$; $y = x + 1$.

Исследуем это ДУ на особое решение с помощью $p$-дискриминантной кривой:

$$\mathrm{Disct}_p{=}0: \begin{cases} y = xp^2 + p^3, \\ 0 = 2xp + 3p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xp^2 + p^3, \\ p(2x + 3p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xp^2 + p^3, \\ p = 0; \quad p = -\dfrac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y = \dfrac{4}{27}x^3. \end{cases}$$

Отсюда следует, что *$p$-дискриминантная кривая* состоит из двух ветвей $y = 0$ и $y = (4/27)x^3$. Интегральной линией является лишь $y = 0$. Проверим, состоит ли эта линия из точек ветвления. Запишем условия касания в точке с абсциссой $x_0$ решения $y = 0$ и другого решения из семейства (12.13):

$$x_0 = \frac{C}{(p-1)^2} - p - \frac{1}{2}, \quad 0 = \frac{Cp^2}{(p-1)^2} - \frac{1}{2}p^2, \quad p = 0.$$

Из этих равенств следует, что $C - 1/2 = x_0$, $C = x_0 + 1/2$. Значит, при каждом $x_0$ решение $y = 0$ в точке с абсциссой $x_0$ касается другой интегральной кривой, соответствующей решению, полученному из (12.13) при $C = x_0 + 1/2$, и, следовательно, $y = 0$ — *особое решение.* □

**12.11.** $y = xy' - \dfrac{y'^3}{3}.$

Решение. Полагая $y' = p,$ получим параметрическое представление данного *уравнения Клеро*

$$x = x, \quad y = xp - p^3/3, \quad y' = p.$$

Отсюда, используя соотношение $dy = y'\,dx,$ получаем уравнение

$$x\,dp + p\,dx - p^2\,dp = p\,dx \quad \Rightarrow \quad (x - p^2)\,dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два: 1) $dp = 0;$ 2) $x - p^2 = 0.$

Из первого уравнения следует, что $p = C.$ Подставив это значение в представление для $y,$ получим *общее решение* уравнения Клеро: $y = Cx - C^3/3.$ Заметим, что его всегда можно получить сразу из уравнения Клеро заменой в нём $y'$ на $C.$

Второе уравнение $x - p^2 = 0$ доставляет *решение* заданного ДУ *в параметрической форме*

$$x = p^2, \quad y = p^3 - p^3/3 = 2p^3/3.$$

Исключая из полученного параметрического представления решения параметр $p,$ придём к двум *решениям в явном виде*:

$$y = \pm x\sqrt{x} \mp \frac{x\sqrt{x}}{3} = \pm\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Эти решения являются *особыми*, так как $\psi(p) = -p^3/3$ удовлетворяет условию $\psi''(p) \neq 0,$ если $p \neq 0.$

Докажем непосредственно, что решение $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ (аналогично $y = -\dfrac{2}{3}x^{3/2}$) состоит из точек ветвления. Запишем условие касания этого решения в точке с абсциссой $x_0 \geqslant 0$ с некоторой интегральной прямой из семейства $y = Cx - C^3/3$:

$$\frac{2}{3}x_0^{3/2} = Cx_0 - \frac{C^3}{3}, \quad \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)'\bigg|_{x_0} = x_0^{1/2} = C.$$

Подставляя $C = x_0^{1/2}$ в первое уравнение, получим равенство.

Это означает, что решение $y = (2/3)x^{3/2}$ в любой точке с абсциссой $x_0 \geqslant 0$ касается интегральной прямой $y = \sqrt{x_0}x - x_0^3/3$ и, следовательно, является *особым.* □

**12.12.** $y + xy' = 4\sqrt{y'^3}.$

**12.13.** $y - xy' = \ln y'.$

**12.14.** $(xy' - y)^2 = y'.$

**12.15.** $y = 2xy' - 4y'^3.$

**12.16.** $y'^2 + (x+1)y' - y = 0.$

**12.17.** $y = -xy' + y'^{5/2}.$

**12.18.** $x + y/y' = 4/y'^3.$

**12.19.** $y = 2xy' + y'^2.$

**12.20.** Исследовать, при каком значении параметра $m$ дифференциальное уравнение $(y')^2 - 2xy' + my = 0$ имеет особые решения.

**Найти особые решения ДУ в задачах 12.21–12.27, если известно семейство интегральных кривых этого уравнения.**

**12.21.** $2xy + C^2 + 2Cy = 0.$ (12.14)

Р е ш е н и е. Известно, что *особое решение* ДУ $F(x, y, y') = 0$ является огибающей семейства интегральных кривых этого уравнения. Для построения огибающей $C$-семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ нужно предварительно построить $C$-дискриминантную кривую, которая получается исключением параметра $C$ из системы уравнений (12.10), которая в нашем случае принимает вид

$$\mathrm{Disct}_C = 0: \quad \begin{cases} 2xy + C^2 + 2Cy = 0, \\ 2C + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = -y, \\ 2xy - y^2 = 0. \end{cases}$$

$C$-дискриминантная кривая $2xy - y^2 = 0$ распадается на две ветви: 1) $y = 2x$ и 2) $y = 0$.

1) Непосредственной подстановкой $y = 2x$ в (12.14) убеждаемся, что первая ветвь не принадлежит $C$-семейству ни при каком $C$. Проверим выполнение достаточного условия (12.12) для огибающей, которое в нашем случае функции $\Phi(x, y, C) = 2xy + C^2 + 2Cy$ принимает вид

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]_{y=2x} = (2y)^2\Big|_{y=2x} + (2x + 2C)^2\Big|_{\substack{y=2x \\ C=-y}} = 16x^2 + 4x^2 \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Отсюда следует, что линия $y = 2x$ — *огибающая* $C$-семейства решений (12.14), значит, $y = 2x$ — *особое решение* ДУ.

2) Вторая ветвь $\mathrm{Disct}_C = 0$: $y = 0$ принадлежит семейству кривых при $C = 0$. Здесь также выполнено условие (12.12) вдоль $y = 0$:

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]_{y=0} = \left[(2y)^2 + (2x + 2C)^2\right]\Big|_{\substack{y=0 \\ C=0}} = 4x^2 \neq 0, \quad \text{если } x \neq 0.$$

Однако линия $y = 0$ *не является огибающей* $C$-семейства кривых (12.14), так как она даже не имеет общих точек ни с какой другой кривой из этого семейства, следовательно, $y = 0$ — *не особое решение* ДУ. □

**12.22.** $(x + C)^2 = 4Cy.$ **12.23.** $C^2x - Cxy + 1 - 0.$

**12.24.** $y = Cx - C^2.$ **12.25.** $xy = Cy - C^2.$

**12.26.** $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2.$ **12.27.** $y = C^3x^2 - 2C^2x + C.$

**12.28.** Найти кривую, для которой отрезок любой касательной к ней, заключённый между осями координат, имеет постоянную длину, равную $a$.

Р е ш е н и е. Уравнение касательной в точке $M(x, y)$ к кривой $y = y(x)$ имеет вид

$$Y - y = y'(X - x), \tag{12.15}$$

где $X$, $Y$ — текущие координаты точки на касательной.

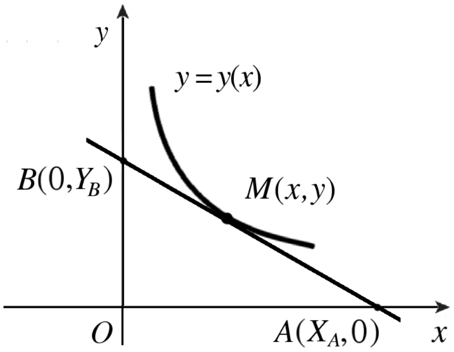



*Рис. 12.1*

Пусть $A(X_A, 0)$ и $B(0, Y_B)$ — точки пересечения касательной соответственно с осью $Ox$ и осью $Oy$, как на рис. 12.1. Абсциссу $X_A$ найдём из уравнения касательной (12.15), полагая $Y = 0$, а ординату $Y_B$ находим из (12.15), полагая $X = 0$, получаем

$$X_A = x - \frac{y}{y'}, \quad Y_B = y - xy'.$$

Тогда длина отрезка $AB$ определяется по формуле

$$\sqrt{(x - y/y')^2 + (y - xy')^2} = a.$$

Полученное ДУ преобразуем к виду

$$\pm(x - y/y')\sqrt{1 + (1/y')^2} = a \quad \Rightarrow \quad y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Это уравнение Клеро. Его *общее решение* $y = Cx \pm \dfrac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$ определяет $C$-семейство прямых. Наибольший интерес представляет *особое решение* ДУ, являющегося *огибающей* этого $C$-семейства прямых. Имеем

$$\mathrm{Disct}_C = 0 : \quad \begin{cases} y = xC \pm \dfrac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}, \\ 0 = x \pm \dfrac{a}{(1 + C^2)^{3/2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \mp \dfrac{a}{(1 + C^2)^{3/2}}, \\ y = x \pm \dfrac{ap^3}{(1 + C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Исключим параметр $p$ из последней системы, возвысив в степень $2/3$ обе части уравнений и сложив их, приходим к уравнению *астроиды* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, которая является искомой *особой интегральной кривой.* □

**12.29.** Найти кривые, для которых произведение расстояний от двух данных точек $M_1$ и $M_2$, $M_1M_2 = 2b$, до любой касательной есть величина постоянная, равная $a^2$.

У к а з а н и е. Ось $Ox$ выбрать проходящей через эти точки, а начало координат поместить в середину отрезка $M_1M_2$.

**12.30.** Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник площади $2a^2$.

**12.31.** Найти интегральную кривую уравнения $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$, которая пересекает ось $Oy$ под углом $\pi/4$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Проинтегрировать ДУ: **а)** $y = 2xy' + y'^2$; **б)** $y = xy' - \sqrt{1 + y'^2}$; **в)** $y = 2xy' - y'^2$; **г)** $y'^4 + 3y^2 = 3xyy'$. **2.** Найти особые решения ДУ, если известно его общее решение: **а)** $C^3 = 3(Cx - y)$; **б)** $2(x - C)^2 + 2y^2 = C^2$; **в)** $y - (x + C)^3 = 0$; **г)** $y^{1/3} - (x + C) = 0$.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

## § 13. Основные понятия и определения. Неполные дифференциальные уравнения $n$-го порядка, допускающие понижение порядка

*Порядок дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения n-го порядка в общем виде. Дифференциальное уравнение n-го порядка в нормальной форме. Решение, интегральная кривая. Задача Коши. Общее решение. Общий интеграл. Промежуточный интеграл. Первый интеграл. Уравнение вида* $F(x, y^{(n)})=0$. *Формула Коши для повторного интеграла. Метод введения параметра. Уравнения вида* $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)})=0$, $F(y, y', \ldots, y^{(n)})=0$. *Методы понижения порядка.*

*Порядком* ОДУ называется порядок старшей производной искомой функции, входящей в уравнение.

*Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка*:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

в котором $x$ — независимая переменная; $y = y(x)$ — искомая функция; $y', \ldots, y^{(n)}$ — её последовательные производные; $F$ — заданная функция своих аргументов.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{13.1}$$

называется **дифференциальным уравнением $n$-го порядка в нормальной форме,** или **уравнением $n$-го порядка, разрешённым относительно старшей производной**.

Будем предполагать, что функция $f$ непрерывна в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

**Решением уравнения** (13.1) называется функция $y = \varphi(x)$, определённая на промежутке $|a, b|$, непрерывно дифференцируемая по $x$ до $n$-го порядка включительно на $|a, b|$* и обращающая уравнение в тождество на этом промежутке.

*Если концы промежутка ему принадлежат, то под производной решения в этих точках подразумеваются соответственно право- (если $\alpha \in |\alpha, \beta|$) и левосторонние (если $\beta \in |\alpha, \beta|$) производные.

График решения $y = y(x)$, $x \in |a, b|$, на плоскости $xOy$ называется *интегральной кривой.*

**Общее решение*** *уравнения* (13.1) — это множество его решений, представимых в виде

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{13.2}$$

где функция $\Phi$ — непрерывно дифференцируемая по $x$ до $n$-го порядка включительно в некоторой области $D$ изменения переменных $x, C_1, C_2, \dots, C_n$, которая удовлетворяет условиям:

1) при допустимом наборе постоянных $C_1, \dots, C_n$ является решением уравнения (13.1);

2) и наоборот, любое решение уравнения (13.1) может быть представлено в виде (13.2) при некотором выборе констант $C_1^0, \dots, C_n^0$.

**Задача Коши для ДУ (13.1) (начальная задача)**

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{13.3}$$

где $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (*начальные данные*), состоит в следующем.

*Среди всех решений уравнения* (13.1) *выделить решение* $y = y(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям* (13.3).

Определение общего решения ДУ (13.1) можно также дать по аналогии с определением общего решения ДУ первого порядка в нормальной форме (см. с. 8) в терминах задачи Коши.

Если общее решение уравнения задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

то будем называть такое соотношение *общим интегралом.*

Если в процессе понижения порядка ДУ (13.1) получаем соотношение

$$\Psi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, \dots, C_k) = 0,$$

в котором $C_1, \dots, C_k$, $1 \leqslant k < n$, — допустимые произвольные постоянные, то оно называется *промежуточным интегралом $k$-го порядка* (*первым интегралом*, если $k = 1$).

*Формализованная теория общего решения построена в [4, 5].

Промежуточный интеграл $k$-го порядка, $1 \leqslant k < n$, является ДУ порядка $(n-k)$, т. е. знание такого промежуточного интеграла сводит интегрирование ДУ $n$-го порядка к интегрированию ДУ $(n-k)$-го порядка.

**Контрольные вопросы**

**1.** Укажите порядок дифференциального уравнения $(y')^5 y'' + y^{(4)} y = 0$.

**2.** Поставьте какие-либо начальные условия для ДУ $y''' = (x - yy')^2 + \sqrt{y''}$.

**3.** Найдите первые интегралы уравнений: **а)** $y''+y' = 0$; **б)** $y'' = y$; **в)** $y'' = \sin y$.

**Уравнение, содержащее явно только независимую переменную и производную искомой функции *n*-го порядка:**

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{13.4}$$

При решении этого уравнения возможны следующие случаи его интегрируемости в квадратурах.

1. Уравнение (13.4) можно разрешить относительно $y^{(n)}$, получим одно или несколько *простейших дифференциальных уравнений $n$-го порядка* вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{13.5}$$

Предположим, что $f(x)$ — непрерывная функция на промежутке $|a, b|$. Интегрируя последовательно $n$ раз уравнение (13.5), получаем его *общее решение*

$$y = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx\cdots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $x_0 \in |a, b|$, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые числа из $\mathbb{R}$, тогда *решение задачи Коши* для уравнения (13.5) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n-1$ (*общее решение в форме Коши*), представимо в виде

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} dx_n \int\limits_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x_1)\,dx_1 + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + y_0'(x-x_0) + y_0 \equiv$$

$$\equiv I(x) + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \ldots + y_0'(x - x_0) + y_0. \tag{13.6}$$

Известно, что повторный интеграл $I(x)$ допускает представление по *формуле Коши* в виде однократного интеграла

$$I(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{13.7}$$

2. Рассмотрим случай, когда уравнение (13.4) не разрешимо относительно $y^{(n)}$, но для него можно построить *параметрическое представление*

$$x = \varphi(p), \quad y^{(n)} = \psi(p), \quad p \in (\alpha, \beta), \tag{13.8}$$

где $\varphi \in C^1$, $\psi \in C$ — такие функции, что $F[\varphi(p), \psi(p)] \equiv 0$, $p \in (\alpha, \beta)$.

Тогда для построения общего решения в параметрической форме достаточно найти $y$ как функцию параметра $p$, так как представление $x = \varphi(p)$ уже известно. Для этого последовательно воспользуемся *дифференциальными соотношениями*, начиная с $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$. Имеем $dy^{(n-1)} = \psi(p)\varphi'(p)\,dp$, откуда $y^{(n-1)} = \int \psi(p)\varphi'(p)\,dp + C_1$. Далее продолжим понижение порядка по аналогии и найдём $y(p)$.

Параметрическое представление уравнения (13.4) можно заведомо реализовать, если его удастся разрешить относительно $x$ в виде элементарной функции $x = \varphi(y^n)$. Полагая $y^{(n)} = p$, получим $x = \varphi(p)$.

Иногда для упрощения выкладок удобно принять $y^{(n)} = \psi(p)$ со специально подобранной функцией $\psi(p)$ и получить параметрическое представление ДУ вида (13.4): $x = \varphi[\psi(p)]$, $y^{(n)} = \psi(p)$.

**Проинтегрировать уравнения 13.1–13.10 и найти решения, удовлетворяющие начальным условиям (если они указаны).**

**13.1.** $y''' = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 1$.

Решение. Интегрируя последовательно уравнение, получим

$$y'' = -\cos x + C_1, \quad y' = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad y = \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Для построения решения задачи Коши подставим начальные данные $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 2$, $y_0'' = 1$ в найденные представления $y''$, $y'$, $y$, получим систему для определения $C_1$, $C_2$, $C_3$:

$$1 = -1 + C_1, \quad 2 = C_2, \quad 1 = 1 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 0.$$

Поэтому *искомым решением задачи Коши* будет $y = \cos x + x^2 + 2x$, а *общее решение* перепишем в виде $y = \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. □

**13.2.** $y''' = \dfrac{\sin x}{x},\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 2,\ \ y''(1) = 3.$

Р е ш е н и е. Интегрируем уравнение последовательно, при этом заметим, что интеграл от его правой части не выражается в элементарных функциях, поэтому первообразную запишем в виде определённого интеграла с переменным верхним пределом, а нижний предел, учитывая начальные условия, положим равным 1. Таким образом, имеем

$$y'' = \int\limits_1^x \frac{\sin x_1}{x_1}\, dx_1 + C_1, \quad y' = \int\limits_1^x \int\limits_1^{x_2} \frac{\sin x_1}{x_1}\, dx_1\, dx_2 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\limits_1^x \int\limits_1^{x_3} \int\limits_1^{x_2} \frac{\sin x_1}{x_1}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \frac{1}{2!}\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^2\, dt + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Подставим начальные данные, получим систему для определения $C_i,\ i = \overline{1,3}$:

$$3 = C_1, \quad 2 = C_1 + C_2, \quad 1 = \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3, \quad C_2 = -1, \quad C_3 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому *искомое решение начальной задачи* есть

$$y = \frac{1}{2}\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\,(x-t)^2\, dt + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

Это решение можно было получить сразу из формул (13.6), (13.7), подставив туда $x_0 = 1,\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = 2,\ \ y_0'' = 3,$ имеем

$$y = \frac{1}{2}\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^2\, dt + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2(x-1) + 1. \qquad \square$$

**13.3.** $x = y'' + y''^5.$

Р е ш е н и е. Разрешить это уравнение относительно $y''$ не представляется возможным, но это уравнение уже разрешено относительно $x$. Введём параметр $p$ по формуле $y'' = p,$ получим параметрическое представление уравнения $x = p + p^5,$ $y'' = p,\ \ p \in \mathbb{R}.$

В силу дифференциального соотношения $dy' = y''\, dx$ имеем

$$dy' = td(p + p^5) = p(1 + 5p^4)\, dp \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{p^2}{2} + \frac{5}{6}p^6 + C_1.$$

Далее используем дифференциальное соотношение $dy = y'\, dx,$ находим

$$dy = \left(\frac{p^2}{2} + \frac{5}{6}p^6 + C_1\right)d(p + p^5) = \left(C_1 + \frac{p^2}{2} + 5C_1p^4 + \frac{10}{3}p^6 + \frac{25}{6}p^{10}\right)dp.$$

Интегрируя последнее уравнение, приходим к *общему решению уравнения в параметрической форме*:

$$x = p + p^5, \quad y = C_1 p + \frac{p^3}{6} + C_1 p^5 + \frac{10}{21} p^7 + \frac{25}{66} p^{11} + C_2, \quad p \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

**13.4.** $x = 2y''/\sqrt{1 - y''^2}$.

Р е ш е н и е. Уравнение разрешено относительно $x$. Учитывая структуру правой части ДУ, целесообразно ввести параметр по формуле $y'' = \operatorname{th} p$, $p \in \mathbb{R}$ (также будет удобным положить $y'' = \sin p$, $-\pi/2 < p < \pi/2$), тогда $x = \dfrac{2 \operatorname{th} p}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 p}} = 2 \operatorname{th} p \cdot \operatorname{ch} p = 2 \operatorname{sh} p$. Отсюда следует параметрическое представление исходного уравнения:

$$x = 2 \operatorname{sh} p, \quad y'' = \operatorname{th} p.$$

Далее на первом шаге используем соотношение $dy' = y''\,dx$:

$$dy' = \operatorname{th} p \cdot 2 \operatorname{ch} p\, dp = 2 \operatorname{sh} p\, dp \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \operatorname{ch} p + C_1.$$

На втором шаге применим соотношение $dy = y'\,dx$:

$$dy = (2 \operatorname{ch} p + C_1) 2 \operatorname{ch} p\, dp = (4 \operatorname{ch}^2 p + 2C_1 \operatorname{ch} p)\, dp \quad \Rightarrow \quad y = \int 4 \operatorname{ch}^2 p\, dp + 2C_1 \operatorname{sh} p + C_2 =$$

$$= 2\int (\operatorname{ch} 2p + 1)\, dp + 2C_1 \operatorname{sh} p + C_2 = \operatorname{sh} 2p + 2p + 2C_1 \operatorname{sh} p + C_2 = \operatorname{sh} 2p + 2p + \widetilde{C}_1 \operatorname{sh} p + C_2.$$

Отсюда следует *общее решение* ДУ в параметрической форме:

$$x = 2 \operatorname{sh} p, \quad y = \operatorname{sh} 2p + 2p + C_1 \operatorname{sh} p + C_2, \quad p \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

**13.5.** $y'' = \dfrac{x}{x+1}$.

**13.6.** $y'' = \dfrac{e^x}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

**13.7.** $x = y''^3 + y''$.

**13.8.** $x = e^{y''} + y''$.

**13.9.** $x = (1 + y''^2)^{-3/2}$.

**13.10.** $x = \dfrac{2y''}{\sqrt{1 + y''^2}}$.

### Уравнение, не содержащее явно искомую функцию и её последовательные производные до $k$-го порядка:

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n.$$

Это уравнение с помощью подстановки $z = y^{(k)}$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция (следовательно, $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$), приводится к уравнению $(n-k)$-го порядка

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

**В задачах 13.11–13.18 проинтегрировать уравнения.**

**13.11.** $x^3y''' + 2x^2y'' = 1.$

Решение. Данное уравнение вида $F(x, y'', y''') = 0$. Выполним замену $y'' = z$, где $z = z(x)$ — новая искомая функция, тогда $y''' = z'$. Уравнение приводится к линейному уравнению первого порядка

$$x^3z' + 2x^2z = 1 \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^3}.$$

Умножив обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu(x) = e^{\int 2/x\, dx} = x^2$, получим $(x^2z)' = 1/x$. Откуда

$$x^2z = \ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\ln|x|}{x^2} + \frac{C_1}{x^2}.$$

В силу замены $y'' = z$ имеем уравнение $y'' = \dfrac{\ln|x|}{x^2} + \dfrac{C_1}{x^2}$. Интегрируя последовательно 2 раза, находим *общее решение* заданного уравнения:

$$y' = -\frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x} - \frac{C_1}{x} + C_2 = -\frac{\ln|x|}{x} + \frac{\tilde{C}_1}{x} + C_2; \quad y = -\frac{\ln^2|x|}{2} + \tilde{C}_1 \ln|x| + C_2x + C_3. \ \square$$

**13.12.** $4y''^3 - 2xy'' + y' = 0.$

Решение. Имеем уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$. С помощью замены $y' = z = z(x)$, $y'' = z'$ приведём его к уравнению первого порядка $4z'^3 - 2xz' + z = 0$. Введём *параметризацию* этого уравнения Лагранжа

$$x = x, \quad z' = p, \quad z = 2xp - 4p^3.$$

Используя дифференциальное соотношение $dz = z'\,dx$, получаем $2x\,dp + 2p\,dx - 12p^2\,dp = p\,dx \ \Rightarrow \ p\,dx + 2x\,dp = 12p^2\,dp$. Отсюда имеем

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 12p, \quad [p = 0\,?].$$

Интегрируя, найдём

$$x = \frac{1}{p^2}(C_1 + 3p^4) = \frac{C_1}{p^2} + 3p^2, \quad z = 2p\left(\frac{C_1}{p^2} + 3p^2\right) - 4p^3 = \frac{2C_1}{p} + 2p^3.$$

Кроме того, при $p = 0$ получаем решение уравнения Лагранжа $z = 0$.

Учитывая, что $z = y'$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка, допускающее *параметризацию*

$$x = \frac{C_1}{p^2} + 3p^2, \quad y' = \frac{2C_1}{p} + 2p^3.$$

Используя равенство $dy = y'\,dx$, имеем

$$dy = \left(\frac{2C_1}{p} + 2p^3\right)\left(6p - \frac{2C_1}{p^3}\right)dp = \left(12C_1 + 12p^4 - \frac{4C_1^2}{p^4} - 4C_1\right)dp.$$

Отсюда следует *общее решение* исходного уравнения *в параметрической форме*

$$x = \frac{C_1}{p^2} + 3p^2, \quad y = 8C_1 p + \frac{12}{5}p^5 + \frac{4C_1^2}{3p^3} + C_2.$$

Кроме того, ДУ имеет *решения* $y = C, \ C \in \mathbb{R}$. □

**13.13.** $y''^4 = 4(xy'' - y')$.

**13.14.** $xy''^2 - 2y'y'' = 1$.

**13.15.** $x^2 y'' = y'^2$.

**13.16.** $(y'^2 - 6x)y'' + 2y' = 0$.

**13.17.** $xy'' = y' \ln(y'/x) + y'$.

**13.18.** $xy'' + 3xy'^2 - 2y' = 0$.

**Уравнение, не содержащее явно независимую переменную:**

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{13.9}$$

Введём новую искомую функцию $z = y'$, при этом будем считать, что $z$ — функция от $y$, $z = z(y)$. Заметим, что $z = z(y)$ — сложная функция, так как $y$ является функцией от $x$. Выразим, например, производные $y''_x$, $y'''_x$ через переменную $z$, $z = z(y)$, и её производные по $y$, используя правило производной сложной функции:

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'_y z, \quad y'''_x = \frac{d(y''_x)}{dx} = \frac{d(z'_y z)}{dy}\frac{dy}{dx} = (z''_y z + z'^2_y)z.$$

Таким образом, удаётся понизить порядок уравнения на 1.

Принимая $y$ за независимую переменную, *следует изначально проследить за решениями* $y = \mathrm{const}$.

Для *частных случаев* уравнения (13.9)

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{13.9$_1$}$$

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \tag{13.9$_2$}$$

можно также применять *метод введения параметра.*

Если уравнение $F(u, v) = 0$ допускает параметризацию

$$u = \varphi(p), \quad v = \psi(p), \quad p \in (\alpha, \beta),$$

то имеем также параметрические представления уравнений $(13.9_1)$ и $(13.9_2)$

$$y^{(n-1)} = \varphi(p), \quad y^{(n)} = \psi(p) \tag{13.10$_1$}$$

и

$$y^{(n-2)} = \varphi(p), \quad y^{(n)} = \psi(p). \tag{13.10$_2$}$$

Для уравнения $(13.10_1)$ из соотношения $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$ находим

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\,dx \quad\Rightarrow\quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\,dp + C_1 \equiv \psi_1(p, C_1),$$

т. е. получаем параметризацию вида (13.8) уравнения $(n–1)$-го порядка

$$x = \psi_1(p, C_1), \quad y^{(n-1)} = \varphi(p).$$

Далее интегрируем по схеме, изложенной в начале параграфа.

Для уравнения $(13.10_2)$ используем соотношения

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx,$$

из которых следует $y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = y^{(n-1)}y^{(n)}\,dx = y^{(n)}\,dy^{(n-2)}$. В силу $(13.10_2)$ получаем уравнение

$$d[(y^{(n-1)})^2] = 2\psi(p)\varphi'(p)\,dp,$$

интегрируя которое, приходим к параметрическому представлению

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int\psi(p)\varphi'(p)\,dp + C_1} \equiv \psi_2(p, C_1),$$

т. е. получаем параметризацию вида $(13.10_1)$ уравнения $(n-1)$-го порядка

$$y^{(n-2)} = \varphi(p), \quad y^{(n-1)} = \psi_2(p, C_1).$$

**В задачах 13.19–13.35 проинтегрировать уравнения.**

**13.19.** $yy'' = {y'}^2$.

Р е ш е н и е. Уравнение явно не содержит независимую переменную $x$. Проверкой убеждаемся, что $y = C$ — решение уравнения, где $C \in \mathbb{R}$ — любое. Найдём другие решения, отличные от $y = C$.

Выполним замену

$$y' = z, \quad z = z(y), \quad y'' = z\frac{dz}{dy}.$$

Уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \quad (z = 0 \text{ для решений } y = C).$$

Решая его, получаем $z = C_1 y$. Отсюда в силу замены имеем $y' = C_1 y$. Разделяя переменные в последнем уравнении $\dfrac{dy}{y} = C_1\,dx$ и интегрируя, находим *общее решение* заданного уравнения $y = C_2 e^{C_1 x}$. *Решения* $y = C$ содержатся в полученной формуле при $C_1 = 0$, $C_2 = C$. □

**13.20.** $yy'' = {y'}^2 + 1.$

Р е ш е н и е. Уравнение явно не содержит независимой переменной $x$. Проверкой убеждаемся, что оно не имеет решений вида $y = C$.

Выполним замену

$$z = y', \quad z = z(y); \quad y'' = \frac{dz}{dy} z.$$

Уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными

$$yz\frac{dz}{dy} = z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y},$$

откуда получаем

$$\ln(z^2+1) = 2\ln|y| + \ln C_1, \quad \Rightarrow \quad z^2 + 1 = C_1 y^2, \quad C_1 > 0.$$

Учитывая замену $z = y'$, имеем ДУ первого порядка

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y^2 - 1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\, dx.$$

После интегрирования получаем *полное семейство решений* исходного уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln|\sqrt{C_1} y + \sqrt{C_1 y^2 - 1}| = \pm x + C_2, \quad C_1 > 0. \qquad \square$$

**13.21.** $y^{(IV)} - 2y''' = 0.$

Р е ш е н и е. Сделаем стандартную замену $y''' = z$, $z = z(x)$, $y^{(IV)} = z'$ и уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными $z' - 2z = 0$, общее решение которого имеет вид $z = \tilde{C}_1 e^{2x}$. В силу замены имеем $y''' = \tilde{C}_1 e^{2x}$. Интегрируя последовательно 3 раза, получим *общее решение* заданного уравнения:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \qquad \square$$

**13.22.** $y''' + e^{y''} = 0.$

Р е ш е н и е. Уравнение имеет вид $(13.9_1)$. В данном уравнении представляется целесообразным ввести параметризацию: $y'' = p$, $y''' = -e^p$.

Отсюда в силу дифференциального соотношения $dy'' = y'''\,dx$ находим

$$dx = \frac{dy''}{y'''} = \frac{dp}{-e^p} = -e^{-p} dp.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $x = e^{-p} + C_1$.

Тогда дифференциальное уравнение уже второго порядка допускает следующую параметризацию:

$$y'' = p, \quad x = e^{-p} + C_1.$$

Отсюда имеем $dy' = y''\,dx = -pe^{-p}\,dp$, откуда $y' = pe^{-p} + e^{-p} + C_2$, т. е. построили параметризацию уравнения уже первого порядка

$$x = e^{-p} + C_1, \quad y' = (p+1)e^{-p} + C_2.$$

Используя дифференциальное соотношение $dy = y'\,dx$, получаем

$$dy = (pe^{-p} + e^{-p} + C_2)d(e^{-p} + C_1) = -e^{-p}(pe^{-p} + e^{-p} + C_2)\,dp.$$

Отсюда $y = -\int(pe^{-2p} + e^{-2p} + C_2e^{-p})\,dp + C_3 = \dfrac{p}{2}e^{-2p} + \dfrac{3}{4}e^{-2p} + C_2e^{-p} + C_3$. Поэтому *общее решение* данного ДУ в параметрической форме имеет вид

$$x = e^{-p} + C_1, \quad y = e^{-2p}\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{4}\right) + C_2e^{-p} + C_3. \qquad \square$$

**13.23.** $y = 4y''^3 + y''$.

Решение. Уравнение не содержит независимой переменной и производной искомой функции $y'$ и относится к частному случаю $(13.9_2)$. Очевидно, что $y = 0$ — *решение* уравнения. Это уравнение допускает параметризацию

$$y'' = p, \quad y = 4p^3 + p, \quad x = x.$$

Запишем следующие два дифференциальных соотношения: $dy' = y''\,dx$, $dy = y'\,dx$, из которых после умножения первого из них на $y'$ и на основе второго равенства получим новое дифференциальное соотношение

$$y'\,dy' = y'y''\,dx = \frac{1}{2}\,d[(y')^2] = y''\,dy \quad \Rightarrow \quad d[(y')^2] = 2p(12p^2 + 1)\,dp.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$y'^2 = 6p^4 + p^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{6p^4 + p^2 + C_1}.$$

Таким образом, пришли к ДУ первого порядка, допускающего параметрическое представление

$$y = 4p^3 + p, \quad y' = \pm\sqrt{6p^4 + p^2 + C_1}.$$

Поскольку $dy = y'\,dx$, находим

$$dx = \frac{12p^2 + 1}{\pm\sqrt{6p^4 + p^2 + C_1}}\,dp \quad \Rightarrow \quad x = \pm\int\frac{12p^2 + 1}{\sqrt{6p^4 + p^2 + C_1}}\,dp + C_2.$$

Таким образом, построено в квадратурах *общее решение* исходного ДУ в параметрическом виде

$$x = \pm\int\frac{12p^2 + 1}{\sqrt{6p^4 + p^2 + C_1}}\,dp + C_2, \quad y = 4p^3 + p. \qquad \square$$

**13.24.** $yy'' + (y')^3 = 0$.

**13.25.** $y''' = y''^3$.

**13.26.** $y'^2 + 1 = 2yy''$.

**13.27.** $y''\sqrt{y} = y'^{3/2}$.

**13.28.** $y^2y'' + y'^2y + 1 = 0$.

**13.29.** $y^2y'' = 1$.

**13.30.** $yy'' + y'^2 = 2yy'$.

**13.31.** $y'''(1 + y'^2) - 2y'y''^2 = 0$.

**13.32.** $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

**13.33.** $y^3y'' + 1 = y^4$.

**13.34.** $2yy'' - y'^2 = y^2$.

**13.35.** $y'''y'^2 = y''^3$.

**В задачах 13.36–13.43 найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.**

**13.36.** $y'' - 4y'^2 + 3e^y y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Решение. Уравнение, очевидно, имеет решения вида $y = C$. Однако эти решения, для которых $y' = 0$, не удовлетворяют начальным условиям.

Пусть далее $y \neq C$. В силу замены $y' = z(y)$, $y'' = z'z$, уравнение преобразуется к линейному (после сокращения на $z$, $z \neq 0$)

$$z'z - 4z^2 + 3e^y z = 0 \quad \Rightarrow \quad z' - 4z = -3e^y.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $z = e^y + C_1 e^{4y}$, т. е. $y' = e^y + C_1 e^{4y}$.

При решении **только** задачи Коши заданные начальные условия целесообразно начинать использовать уже на первом этапе решения, а не после построения общего решения уравнения. Это часто (но не всегда) упрощает решение задачи, так как дальнейшее интегрирование проводится уже при конкретных значениях постоянных.

В данном примере, подставляя начальные данные в $y'$, получаем уравнение для определения $C_1$: $1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$. Отсюда следует, что для искомого решения $y' = e^y$. Разделяя переменные $e^{-y}\,dy = dx$ и интегрируя, получаем $-e^{-y} = x + C_2$. Подставим в полученную формулу начальные данные, имеем уравнение для определения $C_2$: $-1 = 0 + C_2$, т. е. $C_2 = -1$, и *искомое решение задачи Коши* есть $e^{-y} = 1 - x$ или $y = -\ln(1-x)$. □

**13.37.** $y' = 2xy'' - \dfrac{3}{2}y''^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{3}{2}.$

Решение. С помощью замены $y' = z$, $z = z(x)$, приходим к уравнению Лагранжа: $z = 2xz' - \dfrac{3}{2}z'^2$. Положив $z' = p$, получим параметрическое представление этого ДУ

$$x = x, \quad z = 2xp - \frac{3}{2}p^2, \quad z' = p.$$

Из дифференциального соотношения $dz = y'\,dx$ следует

$$2p\,dx + 2x\,dp - 3p\,dp = p\,dx.$$

Решим полученное линейное относительно $x$ уравнение

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 3, \quad [p = 0\,?],$$

его общее решение имеет вид $x = p + C_1/p^2$. Тогда $z = \dfrac{p^2}{2} + \dfrac{2C_1}{p}$.

Для определения постоянной $C_1$ и значений $p$, соответствующих начальным данным $x_0 = 0$, $z_0 = y'(0) = -3/2$, решим систему

$$\begin{cases} 0 = p + C_1/p^2, \\ -1/2 = p^2/2 + 2C_1/p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -p^3, \\ -3/2 = p^2/2 - 2p^2 = -3p^2/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -p^3, \\ p^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 1, & p_2 = -1, \\ C_1^{(1)} = -1, & C_1^{(2)} = 1. \end{cases}$$

Кроме того, при $p = 0$ получаем решения уравнения Лагранжа $z = 0$, т. е. $y' = 0$. Отсюда $y = C$, однако эти решения не удовлетворяют начальным условиям.

Решим ДУ первого порядка в параметрическом виде

$$x = p + C_1/p^2, \quad y' = p^2/2 + 2C_1/p.$$

В силу равенства $dy = y'\,dx$ имеем

$$dy = \left(\frac{p^2}{2} + \frac{2C_1}{p}\right)\left(1 - \frac{2C_1}{p^3}\right)dp = \left(\frac{p^2}{2} + \frac{C_1}{p} - \frac{4C_1^2}{p_4}\right)dp,$$

откуда $y = \dfrac{p^3}{6} + C_1 \ln|p| + \dfrac{4C_1^2}{3p^3} + C_2$. Найдём $C_2$ для соответствующих пар: 1) $p_1 = 1$, $C_1 = -1$ и 2) $p_1 = -1$, $C_1 = 1$ из условия $y(0) = 1$:

1) $1 = 1/6 + 4/3 + C_2 \Rightarrow C_2 = -1/2$;

2) $1 = -1/6 - 4/3 + C_2 \Rightarrow C_2 = 5/2$.

Таким образом, получаем искомые *два решения задачи Коши* в параметрической форме

$$\begin{cases} x = p - 1/p^2, \\ y = \dfrac{p^3}{6} - \ln|p| + \dfrac{4}{3p^2} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = p + 1/p^2, \\ y = \dfrac{p^3}{6} + \ln|p| + \dfrac{4}{3p^2} + \dfrac{5}{2}. \end{cases} \qquad \square$$

**13.38.** $y'' - 3y^2 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

**13.39.** $(1 + 4yy')y'' = [1 + (2y')^2]y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

**13.40.** $y'y'' = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

**13.41.** $x = y''^3 + 2y''$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

**13.42.** $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 2x^{-2} = 0$, $y(1) = -\ln 2$, $y'(1) = 1$.

**13.43.** $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = \pi/2$, $y'(0) = 0$.

**13.44.** Найти интегральную кривую уравнения $yy'' + 2y'^2 = 2$, проходящую через точку $(0, 1)$, касаясь в ней прямой $x + y = 1$.

**13.45.** Найти интегральную кривую уравнения $2y^2y'' = 2y'^4 - yy'^2$, проходящую через точку $(1, 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y = x$.

**13.46.** Найти интегральную кривую уравнения $y'' + y'^2 = y'e^y$, касающуюся в начале координат прямой $x - 2y = 0$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Проинтегрировать уравнения: **а)** $yy'y'' - y''^2 = y'^3$; **б)** $xy'' - 2x^2\sqrt{y'} = 4y'$; **в)** $x = y''^3 + y''$; **г)** $(y'')^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **2.** Найти решения задачи Коши: **а)** $5y'^3y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; **б)** $y' = (y'' - 1)e^{y''}$, $y(e^\pi) = 2$, $y'(e^\pi) = 0$.

## § 14. Дифференциальные уравнения $n$-го порядка, допускающие понижение порядка (однородные разных видов, в точных производных)

*ДУ, однородное относительно искомой функции и её производных. Уравнение обобщённое однородное. Уравнение, однородное относительно независимой переменной, искомой функции и их дифференциалов. Уравнение в точных производных. Интегрирующий множитель. Первый (промежуточный) интеграл.*

Рассмотрим ДУ $n$-го порядка общего вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{14.1}$$

**Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных.** Так называется уравнение (14.1), если функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ — *однородная некоторой степени* $m$ относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, т. е. если для любого $\lambda > 0$ выполнено условие $F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) \equiv \lambda^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

С помощью *замены* $y' = yz$, где $z$ — новая неизвестная функция, $z = z(x)$, *порядок уравнения понижается на единицу.*

Выпишем выражения для первых производных:

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y(z^3 + 3zz' + z'').$$

**14.1.** Проинтегрировать ДУ $xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$.

Решение. Левая часть уравнения $F(x, y, y', y'') = xyy'' - xy'^2 + yy'$ — однородная функция относительно переменных $y, y', y''$ степени 2, следовательно, исходное ДУ — однородное относительно $y, y', y''$. С помощью подстановки $y' = yz$, где $z = z(x)$, — новая искомая функция, $y'' = y(z^2 + z')$, исходное ДУ преобразуется к виду $xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 + y^2z = 0$. Отсюда имеем уравнение $xz' + z = 0$, $[y = 0\,?]$, общее решение которого имеет вид $z = C_1/x$. В силу замены имеем $y'/y = C_1/x$. Следовательно, *общее решение* исходного ДУ $y = C_2|x|^{C_1}$, $x \neq 0$, *решение* $y = 0$ не потеряно, оно содержится в последней формуле при $C_2 = 0$. □

**Обобщённое однородное уравнение.** ДУ (14.1) называется *обобщённым однородным*, если существует такое число $k$, при котором функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ становится однородной некоторой степени $m$ относительно всех своих аргументов в предположении, что $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ считаются однородными переменными соответственно 1-й, $k$-й, $(k-1)$-й, …, $(k-n)$-й степеней однородности.

Если такое число $k$ удаётся найти, то делаем замену обеих переменных

$$x = e^t, \quad x > 0 \quad (x = -e^t, \ \ x < 0), \quad y = ze^{kt}, \tag{14.2}$$

где $z$ — новая неизвестная функция, $z = z(t)$.

Используя правило производной сложной функции, найдём выражения для первых производных в силу замены (14.2):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = (z'_t + kz)e^{(k-1)t},$$

$$y''_{x^2} = \frac{dy'_x}{dt}\frac{dt}{dx} = (z''_{t^2} + (2k-1)z'_t + k(k-1)z)e^{(k-2)t}. \qquad (14.3)$$

После замены (14.2) получим ДУ, не содержащее независимой переменной $t$, которое далее решаем методом из § 13.

Если $k = 0$, то замена (14.2) упрощается, имеем $x = e^t$, $y = z$, тогда $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

**14.2.** Проверить, что уравнение $x^4 y'' - (y - xy')^2 = 0$ является обобщённым однородным и преобразовать его к автономному ДУ.

Решение. Запишем уравнение в развернутом виде: $x^4y'' - y^2 + 2xyy' - x^2y'^2 = 0$. Найдём число $k$, при котором слагаемые в левой части ДУ становятся однородными одинаковой степени при указанном выше предположении. Тогда получаем следующую систему равенств:

$$4 + k - 2 = 2k = 1 + k + k - 1 = 2 + 2(k-1),$$

которая совместна и $k = 2$.

Пусть $x > 0$. Делаем замену вида (14.2) с $k = 2:$ $x = e^t$, $y = ze^{2t}$. Тогда имеем $y'_x = (z'_t + 2z)e^t$, $y''_{x^2} = z''_{t^2} + 3z'_t + 2z$.

Исходное ДУ преобразуется к уравнению, не содержащему новой независимой переменной $t$: $z'' + 3z' + 2z - (z' + z)^2 = 0$. □

### Однородное ДУ в дифференциальной форме:

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny) = 0. \qquad (14.4)$$

Уравнение (14.4) называется *однородным*, если при любом $\lambda > 0$ выполняется (при некотором $m$) тождество

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda dx, \lambda dy, \lambda d^2y, \ldots, \lambda d^ny) \equiv \lambda^m F(x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny). \qquad (14.5)$$

В этом случае подстановки

$$x = e^t, \quad y = ze^t, \qquad (14.6)$$

где $z$ — новая неизвестная функция, $z = z(t)$, приводят уравнение (14.4) к уравнению, которое не содержит явно новую независимую переменную $t$.

Выпишем выражения для первых производных, используя ранее полученные представления (14.3) с $k=1$:

$$y'_x = z'_t + z, \quad y''_x = (z''_t + z'_t)e^{-t}.$$

**14.3.** Проверить, что уравнение $2x^2yy'' - x^2{y'}^2 + x^2 + y^2 = 0$ является однородным в указанном смысле и преобразовать его к автономному.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в дифференциальной форме, чтобы убедиться, что ДУ является однородным относительно независимой переменной и её дифференциала, искомой функции и её дифференциалов. Получаем уравнение

$$2x^2y\,d^2y - x^2(dy)^2 + (x^2+y^2)(dx)^2 = 0.$$

Функция $F(x, y, dx, dy, d^2y)$, равная левой части уравнения, является однородной степени $4$ относительно всех своих аргументов.

Введём новые переменные $t$ и $z$ по формулам (14.6): $x = e^t$, $y = ze^t$. Тогда $y'_x = z'_t + z$, $y''_x = (z''_t + z'_t)e^{-t}$, а исходное уравнение преобразуется к ДУ, не содержащему независимой переменной $t$:

$$2zz'' - {z'}^2 + 1 = 0. \qquad \square$$

**В задачах 14.4–14.17 решить однородные разных видов уравнения.**

**14.4.** $xyy'' + x{y'}^2 + yy' = 0$ (см. другой метод решения этого ДУ в задаче 14.18).

Р е ш е н и е. Левая часть уравнения — однородная функция относительно переменных $y, y', y''$ степени 2. Сделаем замену $y' = yz$, где $z$ — новая функция $z = z(x)$, $y'' = y(z^2 + z')$, тогда ДУ принимает вид $xy^2(z^2+z') + xy^2z^2 + y^2z = 0$ или

$$x(z^2 + z') + xz^2 + z = 0, \quad [y = 0\,?].$$

Решим полученное ДУ Бернулли $z' + \dfrac{z}{x} = -2z^2$. Разделив обе части уравнения на $z^2$ и положив $u = 1/z$, относительно $u$ получим линейное уравнение

$$u' - \frac{u}{x} = 2, \quad [z = 0\,?],$$

общее решение которого имеет вид $u = x(2\ln|x| + \widetilde{C}_1)$. Откуда в силу замены следует уравнение

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(2\ln|x| + \widetilde{C}_1)},$$

интегрируя которое, *имеем* $y^2 = C_1\ln|x| + C_2$. Кроме того, *решениями* исходного уравнения являются функции $y = C$, которые содержатся в формуле общего решения. $\square$

**14.5.** $xyy'' - xy'^2 = yy' + 3x^2y^2$. **14.6.** $x^2yy'' = (xy' + y)^2$.

**14.7.** $xyy'' + x(x^2 - 1)y'^2 + 2yy' = 0$. **14.8.** $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

**14.9.** $x^2yy'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0$. **14.10.** $8x^2yy'' - 8x^2y'^2 + y^2 = 0$.

**14.11.** $x^3y'' = (y - xy')^2, \ x > 0$.

Решение. Испытаем это уравнение на *обобщённое однородное*. Считая $x, y, y', y''$ однородными величинами соответственно 1-й, $k$-й, $(k-1)$-й и $(k-2)$-й степеней и приравнивая степени однородности слагаемых в представлении функции $F(x, y, y', y'') = x^3y'' - y^2 + 2xyy' - x^2y'^2$, имеем систему равенств для определения возможного $k$:

$$3 + k - 2 = 2k = 1 + k + k - 1 = 2 + 2(k-1) \Rightarrow k + 1 = 2k = 2k = 2k \Rightarrow k = 1,$$

т. е. данное уравнение является *обобщённым однородным*.

Выполним замену $x = e^t$, $y = ze^t$, $z = z(t)$, $z = y/x$. Тогда

$$y'_x = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (z'_t e^t + ze^t)e^{-t} = z'_t + z, \quad y''_{x^2} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = (z''_{t^2} + z'_t)e^{-t}.$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$e^{3t}(z'' + z')e^{-t} = \left(ze^t - e^t(z' + z)\right)^2.$$

Полученное уравнение $z'' + z' = z'^2$ не содержит явно независимой переменной $t$, кроме того, оно не содержит также и $z$. Сделаем в силу последнего замечания замену $z = u$, $u = u(t)$, тогда $z'' = u'$, и уравнение примет вид $u' + u = u^2$. *Полное семейство решений* этого ДУ с разделяющимися переменными определяется соотношениями $u = 1/(1 + C_1e^t)$, $u = 0$.

Учитывая замену $u = z'$, имеем $z' = 1/(1 + C_1e^t)$ и $z' = 0$. Интегрируя последние уравнения, получаем $z = t - \ln|1 + C_1e^t| + \ln|C_2|$ и $z = C$. Отсюда, согласно произведённой первоначальной замене, имеем *полное семейство решений* исходного ДУ:

$$y = x\ln\left|\frac{C_2x}{1 + C_1x}\right|, \quad y = Cx. \qquad \square$$

**14.12.** $x^2y^2y'' + x^{3/2} + \frac{1}{4}y^3 = 0, \ x > 0, \ y > 0$.

**14.13.** $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0, \ x > 0, \ y > 0$.

**14.14.** $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4, \ x > 0, \ y > 0$.

**14.15.** $x^4y'' - (x^3 + 2xy)y' + 4y^2 = 0, \ x > 0, \ y > 0$.

**14.16.** $xy'' + 2y' - x^2y'^2 + y^2 = 0, \ x > 0$.

**14.17.** $x^2y'' - x^2y'^2 + 2xyy' = y^2, \ x > 0$.

## Уравнения в точных производных. Интегрирующий множитель

Уравнение (14.1) называется *уравнением в точных производных*, если существует дифференцируемая функция $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ такая, что

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

(Заметим, что дифференцирование по $x$ проводится по правилу производной сложной функции, считая $y$ и её производные функциями от $x$.)

Тогда ДУ (14.1) можно переписать как $\dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$. Отсюда следует *первый интеграл* уравнения $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1$.

Иногда описанной выше ситуации удаётся добиться, умножив ДУ на некоторую функцию, называемую *интегрирующим множителем.*

Например, ДУ $x^2y'' + xy' - y = 0$, $x > 0$, не является уравнением в точных производных, но после умножения на функцию (*интегрирующий множитель* $\mu(x) = 1/x^2$) получим *уравнение в точных производных* $y'' + (xy' - y)/x^2 = 0$, так как $y'' + (xy' - y)/x^2 = \dfrac{d}{dx}(y' + y/x)$. Отсюда находим *первый интеграл* $y' + y/x = \widetilde{C}_1$. Интегрируя это линейное ДУ, находим *общее решение* исходного ДУ $y = C_1x + C_2/x$. □

## Решить уравнения 14.18–14.25 как уравнения в точных производных или приводя их к таковым с помощью интегрирующего множителя.

**14.18.** $xyy'' + xy'^2 + yy' = 0$.

Р е ш е н и е. Это уравнение решено в задаче 14.4 как однородное относительно переменных $y$, $y'$, $y''$. Однако нетрудно заметить, что левая часть уравнения может быть представлена в виде точной производной $xyy'' + xy'^2 + yy' = \dfrac{d}{dx}(xyy')$, т. е. приходим к ДУ $xyy'' + xy'^2 + yy' = \dfrac{d}{dx}(xyy') = 0 \Rightarrow xyy' = \tilde{C}_1$ или $yy' = \tilde{C}_1/x$.

Интегрируя последнее ДУ, получаем *общее решение* исходного уравнения $y^2 = C_1 \ln|x| + C_2$. □

**14.19.** $y''^2 + y'y''' = 0$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части ДУ на $y'y''$, получим уравнение в точных производных $\dfrac{y''}{y'} + \dfrac{y'''}{y''} = 0$, $[y'y'' = 0\,?]$, или $(\ln|y'|)' + (\ln|y''|)' = 0$. Отсюда следует *первый интеграл* $y'y'' = C_1$, при этом деление на $y'y''$ не привело к потере решений. Первый интеграл также является уравнением в точных производных $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'^2}{2}\right) = \tilde{C}_1 \Rightarrow y'^2 = C_1x + C_2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$. Интегрированием находим *все решения* исходного ДУ $y = \pm\dfrac{2}{3C_1}(C_1x + C_2)^{3/2} + C_3$, если $C_1 \neq 0$; $y = Cx + D$. □

**14.20.** $y'' + xy' + y = x$. **14.21.** $y'' = 2y'^2 y$.

**14.22.** $2xy'^2 + 2xyy'' = 2yy' + 3x^2$. **14.23.** $3yy'' - y'^2 = 0$.

**14.24.** $(1 + y^2)y'' - 2yy'^2 = 0$. **14.25.** $y'' = 2yy'$.

**14.26.** Доказать, что уравнение Ньютона $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \dot{x})$ при произвольной правой части $F$ интегрируется в квадратурах, когда сила $F$ зависит только от одной из переменных $t$, $x$, $\dot{x}$, т. е. уравнение имеет один из видов:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t), \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x), \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Построить первый и общий интегралы этих уравнений.

**В задачах 14.27–14.36 понизить порядок уравнения.**

**14.27.** $yy'^2 + y'' = y^2$. **14.28.** $x^2y'' = (y + xy')^2$.

**14.29.** $y'' + xy' = y'^3$. **14.30.** $x^2(yy'' + y'^2) = y'y$.

**14.31.** $yy'' - y'^3 = y^2 \ln y$. **14.32.** $x^4y'' = (x^3 + 2xy)y' - 4y^2$.

**14.33.** $\dfrac{y'''}{y''} = \dfrac{y''}{y'}$. **14.34.** $y'' = \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} + 1$.

**14.35.** $x^2yy'' = y'^2 + xy^2$. **14.36.** $xy'^2 + yy''x - yy' = x$.

**В задачах 14.37–14.40 использовать второй закон Ньютона** (см. аналогичные задачи в § 2).

**14.37.** Найти закон движения материальной точки $M$ массой $m$ по прямой под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от неподвижного центра $O$.

Решение. Пусть $x = x(t)$ — расстояние точки $M$ от отталкивающего центра $O$. По условию сила, действующая на точку, равна $k/x^3$, при этом коэффициент пропорциональности $k > 0$, так как направление движения точки совпадает с направлением отталкивающей силы. Согласно второму закону Ньютона получаем ДУ движения точки

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^3} \;\Rightarrow\; \ddot{x} = \frac{a}{x^3}, \quad a = \frac{k}{m} > 0.$$

Это уравнение второго порядка не содержит независимой переменной $t$. Понизим порядок уравнения с помощью замены $\dot{x} = v$, принимая $x$ за независимую переменную. Тогда преобразованное уравнение $v'_x v = \dfrac{a}{x^3}$ очевидным образом интегрируется, получаем

$$v^2 = -\frac{a}{x^2} + \tilde{C}_1 \quad \text{или} \quad v^2 = \frac{a}{C_1}\left(\frac{x^2 - C_1}{x^2}\right), \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{a}{\tilde{C}_1}.$$

Отсюда следует ДУ с разделяющимися переменными

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{a}{C_1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x} \;\Rightarrow\; \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - C_1}} = \pm\sqrt{\frac{a}{C_1}}dt,$$

интегрируя которое, получаем

$$\sqrt{x^2 - C_1} = \pm\sqrt{\frac{k}{mC_1}}(t + C_2),$$

и *закон движения точки* можно представить в виде

$$x^2 - C_1 = \frac{k}{mC_1}(t + C_2)^2. \qquad \square$$

**14.38.** Материальная точка массой $m$ движется по прямой к центру $O$, притягивающему её с силой $\dfrac{mk^2}{r^3}$, где $r$ — расстояние точки от центра. Движение начинается с состояния покоя при $r = a$. Найти время, по истечении которого точка достигнет центра.

**14.39.** Пуля входит перпендикулярно в брус толщиной 10 см со скоростью 150 м/с, а вылетает, пробив его, со скоростью 50 м/с. Сопротивление бруса движению пули пропорционально квадрату скорости её движения (коэффициент пропорциональности $k$). Найти время движения пули через брус.

**14.40.** С поверхности Земли вертикально вверх посылается тело с начальной скоростью $v_0$. Требуется найти максимальную высоту подъёма тела в зависимости от $v_0$. Найти значение $v_0$, при котором тело не вернётся на Землю (не учитывать сопротивление атмосферы). Радиус Земли считать равным 6 400 км.

**14.41.** Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что для каждой точки этой кривой площадь криволинейного треугольника, образованного кривой, осью $Ox$ и ординатой точки кривой, равна удвоенной площади треугольника, образованного касательной к кривой в этой точке, осью $Ox$ и ординатой этой точки.

**Мини-самоконтроль. 1.** Проинтегрировать следующие уравнения: **а)** $x^2yy'' = (y - xy')^2$; **б)** $yy' + xy'^2 + xyy'' = 0$; **в)** $y'' + x^2y' + 2xy = x$. **2.** Понизить порядок следующих уравнений: **а)** $x^2yy'' + xyy' + y^2 = 0$; **б)** $xyy'' + 3yy' - 2x^2y'^2 = 0$; **в)** $y^2y'' = x^3y'^2 + xy^2$; **г)** $xy'' + y' + xyy'' = 0$, $x > 0$.

**Глава IV**

# СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 15. Основные понятия и методы интегрирования

*Системы дифференциальных уравнений (ДС) в нормальной и симметрической формах. Решение, траектория решения, целая траектория, динамическая система, общее решение, интеграл, первый интеграл ДС. Задача Коши. Функционально независимые интегралы. Базис интегралов. Общий интеграл. Метод исключения. Свойство производной пропорции (свойство ряда равных отношений):* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{k_1 a + k_2 c}{k_1 b + k_2 d}$. *Интегрируемые комбинации.*

*Системой ДУ первого порядка в нормальной форме из $n$ уравнений называется система вида*

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{15.1}$$

где $t$ — независимая переменная, которую, следуя механической терминологии, будем называть временем; $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные переменные; $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Для сокращённой записи будем использовать обозначения $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, и тогда система (15.1) примет вид

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

С помощью векторов $\boldsymbol{x} = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \operatorname{colon}(f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$ эту систему можно записать в виде векторного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{15.2}$$

Будем предполагать, что правая часть уравнения (15.2) — непрерывная функция в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

**Определение 15.1.** *Решением системы ДУ* (15.1) называется совокупность $n$ непрерывно дифференцируемых функций $x_1 = \varphi_1(t), \ldots$ $\ldots, \ x_n = \varphi_n(t)$, определённых на некотором промежутке $J = |a, b|$ и обращающих (15.1) в систему тождеств на $J$.

Тогда решение векторного уравнения (15.2) — $n$-мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in J$, для которой выполнено тождество $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, $t \in J$.

**Определение 15.2.** *Траекторией* решения $x_1 = \varphi_1(t)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$, $t \in J$, системы (15.1) называется множество точек $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in J$, пространства $Ox_1, \ldots, x_n$, называемого *фазовым.*

*Задача Коши, или начальная задача, для векторного уравнения* (15.2) ставится так же, как и для ДУ первого порядка в нормальной форме:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{15.3}$$

где $t_0, \boldsymbol{x}_0$ $((t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G)$ — *заданные начальные данные*, а условие $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ называется *начальным условием.*

Пусть область $D \subset G$ — область существования и единственности решения задачи Коши (15.3), $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$.

Назовём множество решений ДУ (15.2), зависящих от произвольного допустимого постоянного вектора $\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{C} = \operatorname{colon}(C_1, \ldots, C_n), \quad \boldsymbol{\varphi} : E \to \mathbb{R}^n, \quad E \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

*общим решением* уравнения (15.2) в области $D_1 \subset D$, если для любой точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D_1$ уравнение $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(t_0, C)$ имеет единственное решение $\boldsymbol{C}_0 = \operatorname{colon}(C_1^0, \ldots, C_n^0)$, $(t_0, \boldsymbol{C}_0) \in E$, и векторная функция $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{C}_0)$ — решение задачи Коши (15.3) с начальными данными $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

Если в ДУ (15.2) правая часть не зависит явно от времени $t$, то ДУ называется *автономным* (или *стационарным*). Оно имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{15.4}$$

Будем говорить, что ДУ (15.4) определяет *динамическую систему*, если все его решения продолжимы на $\mathbb{R}$.

Множество точек $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in \mathbb{R}$, решения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *целой траекторией.*

Другой формой записи системы ОДУ является *система в симметрической форме*, представленная в виде ряда отношений

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{15.5}$$

Будем предполагать, что коэффициенты $X_i(\boldsymbol{x})$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывные функции в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n |X_i(\boldsymbol{x})| \neq 0$, $\boldsymbol{x} \in G$.

В этой системе переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — равноправны. Если в точке $\boldsymbol{x}_0 \in G$, например, $X_n(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, то, принимая $x_n$ за независимую переменную, систему (15.5) в окрестности этой точки можно переписать в виде нормальной системы из $(n-1)$ уравнений:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

И наоборот, ДС в нормальной форме (15.1) можно поставить в соответствие ДС в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \quad (15.6)$$

Важную роль в теории ДС играют *интегралы* (*первые интегралы*) системы.

Назовём непрерывную скалярную функцию $U(t, x_1, \ldots, x_n)$, определённую в области $D \subset G$, *допустимой* в $D$, если она не обращается в постоянную в любой непустой подобласти области $D$.

**Определение 15.3.** Допустимая в области $D$ функция $U(t, x_1, \ldots, x_n)$ называется **интегралом*** ДС (15.1) в области $D$, если она обращается в постоянную вдоль любого решения ДС $\boldsymbol{x}(t) = \operatorname{colon}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$, такого, что $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in D$, $t \in I$ : $U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv \text{const}$, $t \in I$, т. е. график каждого решения лежит на одной из поверхностей уровня $U(t, x_1, \ldots, x_n) = C$.

**Аналитический критерий интеграла.** Непрерывно дифференцируемая допустимая в $D$ функция $U(t, x_1, \ldots, x_n)$ является интегралом системы (15.1) в $D$ тогда и только тогда, когда её полная производная в силу системы (15.1) $dU/dt|_{(15.1)}$ равна нулю, т. е.

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{(15.1)} = \frac{\partial U(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

для любой точки $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$.

*Часто эту функцию называют *первым интегралом*. Мы для удобства формулировок при решении задач оставим для этой функции название «интеграл» [2, 6, 13], а функциональное соотношение $U(t, x_1, \ldots, x_n) = C$ будем называть **первым интегралом** [6, 13]. Иногда условие непостоянства функции $U(t, x_1, \ldots, x_n)$ отсутствует в определении 15.3, тогда говорят и о постоянном интеграле [15].

Компактно это тождество можно записать

$$\frac{\partial U(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}+\frac{\partial U(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\equiv 0,\quad (t,\boldsymbol{x})\in D.$$

Основополагающую роль при интегрировании ДС играют *функционально независимые интегралы.*

**Определение 15.4.** Непрерывно дифференцируемые интегралы

$$U_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,U_m(t,x_1,\ldots,x_n),\quad (t,\boldsymbol{x})\in D,$$

называются *функционально независимыми в области* $D$, если ранг матрицы Якоби этих функций равен $m$, т. е.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial U_m}{\partial t} & \dfrac{\partial U_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial U_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=m\quad \forall(t,x_1,\ldots,x_n)\in D.$$

**Теорема.** *Для того чтобы* $n$ *непрерывно дифференцируемых интегралов*

$$U_1(t,\boldsymbol{x}),\ldots,U_n(t,\boldsymbol{x}),\quad (t,\boldsymbol{x})\in D, \tag{15.7}$$

*системы* (15.1) *были функционально независимы в* $D$, *необходимо и достаточно, чтобы определитель Якоби был отличен от нуля:*

$$\frac{D(U_1,U_2,\ldots,U_n)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\neq 0\quad \forall(t,\boldsymbol{x})\in D.$$

**Определение 15.5.** Совокупность $n$ функционально независимых в области $D$ интегралов (15.7) называется *базисом интегралов* ДС (15.1) в $D$, а совокупность соответствующих первых интегралов

$$U_1(t,\boldsymbol{x})=C_1,\quad U_2(t,\boldsymbol{x})=C_2,\quad \ldots,\quad U_n(t,\boldsymbol{x})=C_n \tag{15.8}$$

назовём *общим интегралом* ДС (15.1) в области $D$.

*Общий интеграл* (15.8) определяет *общее решение* в неявном виде.

Заметим, что *базис интегралов* системы в симметрической форме (15.5) состоит из $(n-1)$ функционально независимых интегралов.

Если для ДС в нормальной форме (15.1) известен один первый интеграл $U(t,x_1,\ldots,x_n)=C_1$, то, разрешая это уравнение относительно одной из переменных $x_i$, $i=1,\ldots,n$, например относительно $x_n$

$(x_n = F(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, C_1))$ и подставляя это выражение для $x_n$ в первые $n-1$ уравнений ДС (15.1), получаем ДС размерности $n-1$.

Знание $k$, $k < n$, функционально независимых интегралов ДС (15.1) позволяет свести интегрирование системы (15.1) к интегрированию ДС из $(n-k)$ уравнений.

**Мини-самоконтроль. 1.** Найти один из первых интегралов системы $\dot{x} = x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = -y(x^2 + y^2)$. Построить её траектории на фазовой плоскости $xOy$. **2.** Будет ли совокупность первых интегралов $xy = C_1$, $xz = C_2$ системы $\dfrac{dx}{-x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$ образовывать базис первых интегралов? **3.** Проверить, является ли соотношение $x^2 y = C$ первым интегралом вышеприведённой в п. **2** системы.

Одним из методов решения ДС в нормальной форме (15.1) является **метод исключения**, который состоит в приведении ДС (15.1) (если это возможно) к одному ДУ $n$-го порядка относительно одной неизвестной переменной или к нескольким таким уравнениям меньших порядков, причём сумма их порядков равна $n$. Это приведение достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одной.

Дифференцируя, например, первое уравнение системы (15.1) $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ последовательно по $t$ $n-1$ раз и подставляя каждый раз вместо $\dot{x}_i$, $i = \overline{1, n}$, их значения из системы (15.1), получим совокупность уравнений:

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ddot{x}_1 = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots$$
$$x_1^{(n-1)} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (15.9)$$

Выразив $x_2, x_3, \ldots, x_n$ из первых $n-1$ уравнений системы (15.9) через $x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(n-1)}$ и подставив эти значения в последнее уравнение этой системы, получим ДУ $n$-го порядка относительно искомой переменной $x_1$:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{(n-1)} x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Если это уравнение удаётся проинтегрировать, то остальные компоненты $x_2, \ldots, x_n$ решения находятся уже без интегрирования путём дифференцирования и алгебраических операций.

Иногда исключение неизвестных переменных, кроме одной, достигается уже на $k$-м шаге, $k < n-1$.

Метод исключения может также применяться для канонических систем ДУ высших порядков вида

$$x_i^{(m_i)} = f_i(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(m_1-1)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(m_n-1)}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Эта система приводится к соответствующей ей нормальной системе уравнений из $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений.

Другой метод интегрирования ДС состоит в образовании **интегрируемых комбинаций.** Особенно удобно их строить для систем в симметрической форме (15.5). Для их нахождения используют следующее *свойство производной пропорции (свойство ряда равных отношений)*:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} =$$

$$= \frac{\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n}{\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)X_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)X_n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Путём подбора функций $\varphi_i$, $i = \overline{1, n}$ (иногда простым сложением или вычитанием соответствующих числителей и знаменателей отношений) удаётся построить интегрируемые уравнения относительно какой-либо группы переменных *(интегрируемые комбинации).*

**Теорема об интегрируемой комбинации.** *Если выражение*

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \varphi_2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 + \ldots + \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n$$

*является дифференциалом некоторой допустимой функции* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ *и в* $D$ *справедливо тождество*

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)X_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)X_n(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

*то функция* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *— интеграл системы* (15.5), *а соотношение* $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = C$ *— первый интеграл ДС* (15.5).

Переход от ДС в нормальной форме (15.1) к соответствующей ДС в симметрической форме (15.6) иногда позволяет ускорить построение интегрируемых комбинаций.

**В задачах 15.1–15.22 решить данные системы.**

**15.1.** $y' = y^2 z$, $z' = -yz^2$.

Решение. **I способ.** В случае двумерной системы *метод исключения* можно реализовать следующим образом. Из первого уравнения исходной системы выразим $z$: $z = y'y^{-2}$, $y \neq 0$, тогда $z' = y''y^{-2} - 2y'^2y^{-3}$. Подставляя полученные выражения во второе уравнение ДС, имеем ДУ второго порядка относительно $y$:

$$y''y^{-2} - 2y'^2y^{-3} = -y^{-3}y'^2 \quad \text{или} \quad y''y - y'^2 = 0.$$

Очевидным решением этого уравнения является функция $y = C$. Разделим обе части уравнения на $yy'$, получим ДУ в точных производных $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{y'}{y} = 0$. Интегрируя его, имеем $y' = C_1 y$, откуда $y = C_2 e^{C_1 x}$ (решение $y = C$ содержится в полученной формуле при $C_1 = 0$, $C_2 = C$).

Подставляя теперь в представление $z = y'y^{-2}$ полученные выражения для $y$ и $y'$, находим

$$z = \frac{C_1 C_2 e^{C_1 x}}{C_2^2 e^{2C_1 x}} = \frac{C_1 e^{-C_1 x}}{C_2}, \quad C_2 \neq 0.$$

Ответ получен в виде *общего решения*

$$y = C_2 e^{-C_1 x}, \quad z = C_1 e^{-C_1 x}/C_2.$$

Кроме того, система имеет *решения* $y = 0$, $z = C$, $C \in \mathbb{R}$.

**II способ.** Для исходной системы легко построить одну *интегрируемую комбинацию*: умножим первое уравнение на $z$, а второе — на $y$ и сложим полученные уравнения, получим

$$z\,dy + y\,dz = 0 \;\Rightarrow\; d(zy) = 0 \;\Rightarrow\; zy = C_1.$$

Из найденного *первого интеграла* при $y \neq 0$ имеем $z = C_1/y$. Подставляя $z$ в первое уравнение ДС, исключая тем самым $z$, получим ДУ первого порядка

$$y' = yC_1 \quad\Rightarrow\quad y = C_2 e^{C_1 x} \quad (y = 0 \text{ содержится в формуле при } C_2 = 0).$$

Отсюда, выражая $C_2$ и учитывая соотношение $C_1 = zy$, получаем другой *первый интеграл* $C_2 = ye^{-xyz}$. Интегралы $U_1 \equiv zy$, $U_2 \equiv ye^{-xyz}$ образуют базис интегралов. В самом деле, их количество совпадает с размерностью системы, равной 2, и они функционально независимы, так как ранг их матрицы Якоби

$$\frac{\partial(U_1, U_2)}{\partial(x, y, z)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ -y^2 z e^{-xyz} & e^{-xyz} - xyze^{-xyz} & -xy^2 e^{-xyz} \end{pmatrix}, \quad z \neq 0, \quad y \neq 0,$$

равен 2.

Ответ получен в форме *общего интеграла* $zy = C_1$, $ye^{-xyz} = C_2$. □

**Замечание.** Первую интегрируемую комбинацию можно также получить путём деления первого уравнения ДС на второе:

$$dy/dz = -y/z, \quad [zy = 0\,?].$$

Её также можно найти, перемножая крест накрест уравнения ДС:

$$-y'yz^2 = z'y^2 z \;\Rightarrow\; y'z + z'y = 0, \quad [zy = 0\,?] \;\Rightarrow\; yz = C_1.$$

## 15.2. $\dot{x} = 1 - \dfrac{2}{t}x$, $\dot{y} = x + y + \dfrac{2}{t}x - 1$.

Решение. Первое уравнение содержит только одну искомую функцию $x$ и независимую переменную $t$. Интегрируем это линейное уравнение $\dot{x} + 2x/t = 1$, получим $x = t/3 + C_1/t^2$.

Далее можно подставить выражение для $x$ во второе уравнение ДС и решить полученное уравнение (оно тоже линейное). Однако проще заметить *интегрируемую комбинацию*, которая получается при сложении соответствующих частей двух уравнений ДС. Имеем $\dot{x}+\dot{y}=x+y$ или $d(x+y)/dt=x+y$, откуда $x+y=C_2e^t$.

Таким образом, *решениями исходной системы* являются функции

$$x=\frac{t}{3}+\frac{C_1}{t^2},\quad y=C_2e^t-\frac{C_1}{t^2}-\frac{t}{3}. \qquad \square$$

**15.3.** $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{(x+y)^2}.$

Решение. Из уравнения $dx/y=dy/x$ находим *один из первых интегралов* $x^2-y^2=C_1$. Чтобы найти *вторую интегрируемую комбинацию*, воспользуемся свойством ряда равных отношений. Из исходной системы получаем

$$\frac{dx+dy}{y+x}=\frac{dz}{(x+y)^2}\quad\text{или}\quad (x+y)\,d(x+y)=dz.$$

Отсюда следует *еще один первый интеграл* $(x+y)^2-2z=C_2$. Нетрудно убедиться, что построенные интегралы образуют базис интегралов. Таким образом, *общий интеграл системы* есть

$$x^2-y^2=C_1,\quad (x+y)^2-2z=C_2. \qquad \square$$

**15.4.** $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{0}=\dfrac{dz}{y}.$

Решение. Наличие второго отношения в ДС влечёт равенство $dy=0$ и $y=C_1$ — *первый интеграл* исходной системы. Подставляя теперь $y=C_1$ в уравнение $dx/x=dz/y$, получим

$$dx/x=dz/C_1\ \Rightarrow\ C_1\ln|x|=z+C_2.$$

Отсюда следует другой *первый интеграл* $y\ln|x|-z=C_2$. Полученные интегралы, очевидно, *функционально независимы*. Таким образом, все решения исходной системы определяются из *общего интеграла*

$$y=C_1,\quad y\ln|x|-z=C_2. \qquad \square$$

**15.5.** $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z-xy}.$

Решение. Интегрируя очевидное ДУ $dx/x=dy/y$, найдём *первый интеграл* $y/x=C_1$. Вторую интегрируемую комбинацию построим, используя свойство производной пропорции. Получим

$$\frac{dx}{x}=\frac{y\,dx+x\,dy+dz}{xy+xy+z-xy}=\frac{d(xy+z)}{xy+z}\quad\Rightarrow\quad \ln|x|+\ln|C_1|=\ln|z+xy|.$$

Отсюда следует другой *первый интеграл* $(z+xy)/x=C_2$.

Эти интегралы образуют *базис интегралов* (легко проверить) системы, и её *общий интеграл* определяется соотношениями $y/x = C_1$, $(z + xy)/x = C_2$.

Заметим, что после построения первого интеграла $y/x = C_1$ можно было не изобретать вторую интегрируемую комбинацию, а подставить $y = C_1 x$ в уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - C_1 x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -C_1 x.$$

Интегрируя это линейное уравнение, находим $z/x = -C_1 x + C_2$, откуда следует другой *первый интеграл* $z/x + y = C_2$. □

**15.6.** $\dfrac{dx}{2z - y} = \dfrac{dy}{x - 2z} = \dfrac{dz}{y - x}$.

Решение. Для построения первой интегрируемой комбинации сложим числители и знаменатели всех отношений, получим в силу свойства производной пропорции

$$\frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{x - 2z} = \frac{dz}{y - x} = \frac{dx + dy + dz}{(2z - y) + (x - 2z) + (y - x)},$$

где знаменатель образованного отношения равен 0, откуда по *теореме об интегрируемой комбинации* имеем $d(x + y + z) = 0$ и, следовательно, $x + y + z = C_1$ — *первый интеграл* системы.

Для построения второй интегрируемой комбинации умножим числитель и знаменатель каждого из отношений соответственно на $2x$, $2y$, $4z$ и сложим их, придём к аналогичной ситуации, как и в первом случае:

$$\frac{dz}{y - x} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz}{2x(2z - y) + 2y(x - 2z) + 4z(y - x)} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz}{0}.$$

Из полученного отношения следует $d(x^2 + y^2 + 2z^2) = 0$, находим ещё один *первый интеграл* $x^2 + y^2 + 2z^2 = C_2$. *Полученные интегралы*, очевидно, образуют *базис интегралов*, а *общий интеграл* представим в виде совокупности уравнений

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = C_2. \qquad \square$$

**15.7.** $y' = 1 - z$, $z' = \dfrac{z}{(x - y)^2}$.

**15.8.** $y' = \dfrac{z - 1}{z}$, $z' = \dfrac{y - x}{z}$.

Решение. Запишем ДС в соответствующей симметрической форме и воспользуемся далее свойством ряда равных отношений

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{(z - 1)/z} = \frac{dz}{(y - x)/z} \ \Rightarrow\ \frac{dx}{z} = \frac{dy}{z - 1} = \frac{dz}{y - x} \ \Rightarrow\ \frac{dx - dy}{1} = \frac{dz}{y - x}.$$

Интегрируя ДУ $dz + (y - x)d(y - x) = 0$, находим *первый интеграл* $2z + (y - x)^2 = C_1$, откуда выразим $y - x = \pm\sqrt{C_1 - 2z}$ и подставим это представление во второе ДУ исходной системы, приходим к ДУ с разделяющимися переменными

$$z' = \pm\frac{\sqrt{C_1 - 2z}}{z} \ \Rightarrow\ \pm\frac{zdz}{\sqrt{C_1 - 2z}} = dx.$$

Интегрируя его, получаем функциональное соотношение

$$3x \pm (C_1 + z)\sqrt{(C_1 - 2z)} = C_2.$$

Подставляя вместо $C_1$ соответствующий интеграл $2z+(y-x)^2$, находим ещё один *первый интеграл* системы $(y-x)^3 + 3z(y-x) + 3x = C_2$.

Нетрудно проверить, что найденные интегралы функционально независимы, поэтому *общий интеграл* системы определяется соотношениями

$$2z + (y-x)^2 = C_1, \quad (y-x)^3 + 3z(y-x) + 3x = C_2. \qquad \square$$

**15.9.** $\dot{x} = x^2/y,\ \dot{y} = y^2/x.$

**15.10.** $\dot{x} = tx^2y,\ \dot{y} = txy^2.$

**15.11.** $\dfrac{dx}{x+z} = \dfrac{dy}{y+z} = \dfrac{dz}{x+y}.$

**15.12.** $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy}.$

**15.13.** $\dfrac{dx}{2zx} = \dfrac{dy}{2zy} = \dfrac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$

**15.14.** $\dfrac{dx}{x^2+y^2} = \dfrac{dy}{2y^2} = \dfrac{dz}{2z^2}.$

**15.15.** $\dfrac{dx}{(z-y)^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}.$

**15.16.** $\dfrac{dx}{x^2+y^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{(x+y)z}.$

**15.17.** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{(y+x)^2},\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{(y+x)^2}.$

**15.18.** $\dot{x} = -\dfrac{t^2}{y},\ \dot{y} = \dfrac{t^2}{x}.$

**15.19.** $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

**15.20.** $\dfrac{dx}{2z-y} = \dfrac{dy}{x-2z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

**15.21.** $\dfrac{dx}{y-u} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{u-y} = \dfrac{du}{x-z}.$

**15.22.** $\dfrac{A\,dx}{(B-C)yz} = \dfrac{B\,dy}{(C-A)xz} = \dfrac{C\,dz}{(A-B)xy},\ A > B > C > 0.$

**15.23.** Доказать, что: 1) для гамильтоновой системы $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$, $i = 1, \ldots, n$, функция Гамильтона $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ является интегралом, а соотношение $H(p_1, \ldots, q_n) = C$ — первым интегралом; 2) если функция Гамильтона не зависит от $q_i$, то $p_i = C_i$, $i = 1, \ldots n$, — первые интегралы уравнений Гамильтона.

**15.24.** Используя аналитический критерий интеграла, проверить, какие из предложенных функций являются интегралами ДС, и выделить из них базис интегралов. Записать общий интеграл ДС:

**а)** $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = y^2/x,\ \varphi_1 = ty,\ \varphi_2 = xy,\ \varphi_3 = x^2 + 2txy.$

Решение. Для применения аналитического критерия интеграла вычислим производные функций $\varphi_i(t,x,y)$ по времени $t$ в силу системы **а)** в области $D = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}_3\colon\ x \neq 0\}$:

$$\left.\frac{d\varphi_i(t,x,y}{dt}\right|_{a)} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\dot{y}.$$

Получаем:

$$\left.\frac{d\varphi_1}{dt}\right|_{a)} = y + t\dot{y} = y + t(-y) \not\equiv 0 \ \Rightarrow\ \text{функция } \varphi_1 \text{ — не интеграл ДС;}$$

$$\left.\frac{d\varphi_2}{dt}\right|_{a)} = \dot{x}y + x\dot{y} = -y^2 + x\cdot y^2/x \equiv 0 \ \Rightarrow\ \text{функция } \varphi_2 \text{ — интеграл ДС;}$$

$$\left.\frac{d\varphi_3}{dt}\right|_{a)} = 2x\dot{x} + 2xy + 2t\dot{x}y + 2tx\dot{y} = -2xy + 2xy + 2t(-y)x + 2tx\cdot y^2/x \equiv 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \text{функция } \varphi_3 \text{ — интеграл ДС.}$$

Интегралы $\varphi_2$ и $\varphi_3$ являются функционально независимыми в области $D$, так как якобиан

$$\frac{D(\varphi_2,\varphi_3)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x+2ty & 2tx \end{vmatrix} = -2x^2 \neq 0, \quad \text{если } x \neq 0.$$

Отсюда следует, что функции $\varphi_2$ и $\varphi_3$ образуют *базис интегралов*, а совокупность *первых интегралов*

$$xy = C_1, \quad x^2 + 2txy = C_2$$

доставляет *общий интеграл* данной системы; □

**б)** $\dot{x} = \dfrac{x}{t},\ \ \dot{y} = \dfrac{t+x}{t},\ \ \varphi_1 = \dfrac{x}{t},\ \ \varphi_2 = x^2 - y,\ \ \varphi_3 = t + x - y;$

**в)** $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dz}{z};\ \ \varphi_1 = \dfrac{x}{y},\ \ \varphi_2 = xz,\ \ \varphi_3 = xz + \dfrac{y}{x}.$

**15.25.** Найти один из первых интегралов следующих систем:

**а)** $\dot{x} = y,\ \dot{y} = \sin x$; **б)** $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x + x^3/6$; **в)** $\dot{x} = -x + y + x^2$, $\dot{y} = y - 2xy$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Проинтегрировать следующие ДС:

а) $\begin{cases} y' = y^2 z, \\ z' = z - yz^2; \end{cases}$ **б)** $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{x-y}$; **в)** $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{-yz} = \dfrac{dz}{xy}$.

**2.** Убедиться, что функции $U_1 = tx$, $U_2 = ty + x^2$ являются интегралами системы $\dot{x} = -x/t$, $\dot{y} = (2x^2 - ty)/t^2$, используя аналитический критерий интеграла, и выяснить, будут ли указанные интегралы функционально независимыми.

# § 16. Применение теорем существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальной системы и дифференциального уравнения $n$-го порядка

*Теоремы существования и единственности для ДС и ДУ $n$-го порядка. Приближения Пикара.*

Пусть функция $\boldsymbol{f}\colon\ G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G$.

Рассмотрим *задачу Коши* (*начальную задачу*)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{16.1}$$

где $\boldsymbol{x} = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \operatorname{colon}(f_1(t, \boldsymbol{x}), \ldots, f_n(t, \boldsymbol{x}))$.

Для существования решения задачи Коши (16.1) в некоторой окрестности точки $t_0$ согласно **теореме Пеано** достаточно непрерывности вектор-функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ в окрестности начальной точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

**Теорема существования и единственности решения задачи Коши для векторного уравнения (16.1)** формулируется так же, как и соответствующая теорема для ДУ первого порядка (см. § 9), нужно только в её оценках векторных величин модуль заменить на норму, при этом за норму вектора $x$ можно взять любую, например,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

(см. [1, с. 48; 7, с. 231]).

**Простейший вариант теоремы существования и единственности решения задачи Коши:** *если функция* $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ *непрерывна вместе со своей частной производной* $\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x} = (\partial f_i/\partial x_j)_{ij}$ *в некоторой окрестности точки* $(t_0, \boldsymbol{x}^0)$, *то существует единственное решение* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ *задачи Коши* (16.1), *определённое в некоторой окрестности точки* $t_0$ (см. [12, с. 36]).

При выполнении условий теоремы существования и единственности **последовательные приближения** (**приближения Пикара**) определяются рекуррентными соотношениями в векторной форме

$$\boldsymbol{x}_0(t) = \boldsymbol{x}^0, \quad \boldsymbol{x}_{k+1}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_k(\tau))\, d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим задачу Коши для ДУ $n$-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{16.2}$$

**Простейший вариант теоремы существования и единственности решения задачи (16.2):** *если функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *и её частные производные по* $y, y', \ldots,$ $y^{(n-1)}$ *непрерывны в области* $D$, *то для любой начальной точки* $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *существует единственное решение начальной задачи* (16.2).

Дифференциальное уравнение (16.2) в нормальной форме сводится к ДС в нормальной форме, если ввести новые неизвестные функции по формулам $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\ldots$, $y_n = y^{(n-1)}$. Эта замена сводит решение задачи Коши (16.2) к решению задачи Коши для ДС следующего вида:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \ \ y'_2 = y_3, \ \ldots, \ y'_{n-1} = y_n, \ \ y'_n = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ y_1(x_0) = y_0, \ \ y_2(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{16.3}$$

*Искомое решение задачи Коши* (16.2) есть первая компонента $y = y_1(x)$ векторного решения системы (16.3), а его $k$-последовательное приближение есть $k$-приближение этой компоненты системы (16.3).

**16.1.** Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с заданными начальными условиями:

**а)** $\dfrac{dx}{dt} = y, \ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2; \ x(0) = 1, \ y(0) = 0.$

Решение. Пусть компакт $D$ из теоремы Пикара — Линделёфа есть множество

$$D = \{(t, x, y) : |t| \leqslant 1, \quad |x - 1| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1\},$$

т. е. $a = 1$, $b = 1$. Функции $f_1 = x$, $f_2 = x^2 + y^2$ и их производные по $x$ и $y$ непрерывны в параллелепипеде $D$, ограничены и удовлетворяют условию Липшица по переменным $x$ и $y$ равномерно относительно $t$ в $D$. Вектор-функция $\boldsymbol{f} = \operatorname{colon}(y, x^2 + y^2)$ в $D$ ограничена: $\|\boldsymbol{f}\| \leqslant \max\limits_{(t,x,y)\in D}(|y|, x^2 + y^2) \leqslant 5$, т. е. $M = 5$. Отсюда согласно теореме Пикара — Линделёфа существует единственное решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ начальной задачи, заведомо определённое на отрезке $[-h, h]$, где $h = \min(a, b/M) = \min(1, 1/5) = 1/5$; □

**б)** $\dot{x} = y^2, \ \dot{y} = xyt; \ x(1) = 0, \ y(1) = 2;$

**в)** $\dot{x} = x^2 y, \ \dot{y} = x + t; \ x(0) = 0, \ y(0) = 3;$

**г)** $y'' + y'x + x^2y^2 = 0;\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

**д)** $y'' = x + {y'}^2 - y;\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

**16.2.** Построить два последовательных приближения (не считая начального) к решениям следующих задач Коши:

**а)** $\dot{x} = y + t,\ \ \dot{y} = x^2;\ \ x(0) = 0,\ \ y(0) = 1.$

Решение. Предварительно установим, что решение поставленной начальной задачи существует и единственно. Действительно, в компакте $D = \{(t, x, y) : |t| \leqslant 1,\ \ |x| \leqslant 1,\ \ |y - 1| \leqslant 1\}$, функции $f_1 = y + t,\ \ f_2 = x^2$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по искомым переменным $x$ и $y$ равномерно относительно $t$. Справедлива в $D$ оценка для вектор-функции $\boldsymbol{f} = \mathrm{colon}\,(y + t, x^2)$: $\|\boldsymbol{f}\| \leqslant \max\limits_{(t,x,y)\in D}(|y + t|, x^2) \leqslant 3$ и, следовательно, по теореме Пикара — Линделёфа искомое решение существует, единственно и заведомо определено на отрезке $[-1/3, 1/3]$. На этом отрезке строим приближения Пикара: $x_0(t) = 0,\ \ y_0(t) = 1;$

$$x_1(t) = 0 + \int\limits_0^t (y_0(\tau) + \tau)\,d\tau = \int\limits_0^t (1 + \tau)\,d\tau = \frac{t^2}{2} + t, \quad y_1(t) = 1 + \int\limits_0^t x_0^2(\tau)\,d\tau = 1 + \int\limits_0^t 0\,d\tau = 1;$$

$$x_2(t) = 0 + \int\limits_0^t (y_1(\tau) + \tau)d\tau = \int\limits_0^t (1 + \tau)d\tau = t + \frac{t^2}{2},$$

$$y_2(t) = 1 + \int\limits_0^t (x_1(\tau))^2 d\tau = 1 + \int\limits_0^t \left[\frac{\tau^2}{2} + \tau\right]^2 d\tau = 1 + \frac{t^5}{20} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}; \qquad \square$$

**б)** $y'' + xy' + y^2 = 0;\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1.$

Решение. Легко проверяется выполнение условий теоремы существования и единственности для ДУ $n$-го порядка.

Для построения последовательных приближений сведём ДУ к эквивалентной ДС, полагая, $u_1 = y,\ \ u_2 = y'$. Тогда получим $u_1' = u_2,\ \ u_2' = -u_1^2 - xu_2$, а начальные условия примут вид $u_1(1) = 0,\ \ u_2(1) = 1$. Строим последовательные приближения $u_1^k(x),\ \ u_2^k(x),\ \ k = 0, 1, 2$. Имеем $u_1^0(x) = 0,\ \ u_2^0(x) = 1;$

$$u_1^1(x) = 0 + \int\limits_1^x u_2^0(\tau)\,d\tau = \int\limits_1^x d\tau = x - 1,$$

$$u_2^1(x) = 1 + \int\limits_1^x (-(u_1^0(\tau)^2 - \tau u_2^0(\tau))\,d\tau = 1 + \int\limits_1^x -\tau\,d\tau = 1 - \frac{\tau^2}{2}\bigg|_1^x = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2};$$

$$u_1^2(x) = 0 + \int\limits_1^x u_2^1(\tau)\,d\tau = \int\limits_1^x \left(\frac{3}{2} - \frac{\tau^2}{2}\right)d\tau = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} - 1.$$

На этом шаге останавливаемся, так как второе приближение $y_2(x)$ к решению исходной задачи Коши совпадает с $u_1^2(x)$. Следовательно, искомое *второе приближение* есть $y_2(x) = 3x/2 - x^2/2 - 1;$ $\square$

**в)** $\dot{x} = y^2, \ \dot{y} = txy; \ x(1) = 1, \ y(1) = 2;$
**г)** $y'' + xyy' + y = 0; \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

**16.3.** При каких начальных условиях существует единственное решение следующих уравнений и систем:

**а)** $\dot{x} = xy + \sqrt[3]{y - t}, \dot{y} = \sqrt{x + t};$ **б)** $y'''y + (x + 2)y' + \sqrt{y} = 0;$
**в)** $\dot{x} = yx + (x^2 + 1), \dot{y} = y + \sqrt[3]{t};$ **г)** $(x - 1)yy'' = \sqrt[3]{y' - y}$ ?

**16.4.** Поставьте начальные условия для системы

$$\ddot{x} - 3\dot{x} = f(x, y), \quad \ddot{y} + 5\dot{x} = g(x, y)$$

и сформулируйте теорему существования и единственности.

**16.5.** Могут ли графики двух решений на плоскости $xOy$ пересекаться или касаться для следующих уравнений:

**а)** $y' = x^2 + y^2;$ **б)** $y'' = x^2 + y^2;$ **в)** $y''' = x^2 + y^2$ ?

**16.6.** При каких $n$ уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией $f$ может иметь среди своих решений функции $y_1 = x$ и $y_2 = x + x^2$ ?

**16.7.** Докажите, что все решения уравнения математического маятника $\ddot{\theta} = \sin\theta$ продолжаются неограниченно.

### Задания для самостоятельной работы

**1.** Пусть $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ – непрерывно дифференцируемая функция, $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Предположим, что $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leqslant a(t)\|\boldsymbol{x}\| + b(t), \ t \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, где $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывно дифференцируемые положительные функции, $t \in \mathbb{R}$. Доказать, что решение любой задачи Коши $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \ (t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, определено на всей числовой прямой.

**2.** Пусть $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ – непрерывная функция при $t \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leqslant \varphi(t)\|\boldsymbol{x}\|$, где $\varphi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t \geqslant 0$ и $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt < +\infty$. Доказать, что каждое решение задачи Коши $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \ \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, определено при всех $t \geqslant 0$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Для уравнения $y''' + xy'^2 + y = 0$ запишите эквивалентную ему систему в нормальной форме. **2.** Постройте 3 последовательных приближения для задач Коши: **а)** $y'' + y'^2 + y^2 = 0; \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0;$ **б)** $\dot{x} = t + xy, \dot{y} = x + y^2; \ x(0) = 1, \ y(0) = 1.$ **3.** Найти область существования и единственности в пространстве $Otxy$ для системы $(t - 1)\dot{x} = \sqrt{x - y} + \sqrt[3]{x}, \ \dot{y} = \sqrt{1 - xy} + y^2.$ **4.** Для уравнения $y''' = x^2 y'' + \sqrt{4 - x^2 - (y')^2}$ поставить начальные условия так, чтобы они выделяли единственное решение.

# ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

## § 17. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

*Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Соответствующая этому ДУ система в симметрической форме. Характеристическая система. Характеристики ДУ. Задача Коши. Схема её решения.*

*Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка* имеет вид

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,\quad \boldsymbol{x}\in G\subset\mathbb{R}^n,\tag{17.1}$$

в котором $f_i,\ i=1,\dots,n,$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области $G\subset\mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что выполнено условие $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\boldsymbol{x})\neq 0$, если $\boldsymbol{x}\in G$.

*Решением линейного однородного уравнения в частных производных* (17.1) называется функция $u=u(x_1,\dots,x_n)$, определённая в некоторой области $D\subseteq G$, непрерывно дифференцируемая и обращающая уравнение (17.1) в тождество, если $\boldsymbol{x}\in D$.

Уравнение (17.1) имеет *очевидные* решения вида $u\equiv\text{const}$. В $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{(x_1,\dots,x_n,u)}$ решение задаёт некоторую гладкую поверхность, которая называется *интегральной поверхностью.*

Уравнению (17.1) поставим в соответствие систему в симметрической форме следующего вида:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}.\tag{17.2}$$

Связь между ДУ (17.1) и (17.2) устанавливает следующее утверждение.

**Утверждение.** *Любой непрерывно дифференцируемый интеграл* $U(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *ДС* (17.2) *является решением* $u=U(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *уравнения* (17.1).

*Если* $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— решение уравнения* (17.1), *где* $u(x)$ *— допустимая в области* $D$ *функция, то* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— непрерывно дифференцируемый интеграл соответствующей ДС* (17.2).

**Теорема об общем решении.** *Если* $U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$ $\ldots$, $U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— базис интегралов системы* (17.2) *в области* $D \subseteq G$, *то в некоторой окрестности любой точки* $M \in D$ *общее решение уравнения* (17.1) *имеет вид*

$$u = \Phi[U_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, U_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)], \tag{17.3}$$

*где* $\Phi$ *— произвольная непрерывно дифференцируемая функция, другими словами, в этой окрестности формула* (17.3) *содержит все решения уравнения* (17.1) *и только их.*

Заметим, что функция, определяемая формулой (17.3), *всегда* является *решением ДУ* (17.1) в области $D$.

Автономная система

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17.4}$$

соответствующая (17.2), называется *характеристической системой* для уравнения (17.1), а её траектории называются *характеристиками* уравнения (17.1).

Базис интегралов системы (17.2) совпадает с совокупностью $(n - 1)$ функционально независимых *стационарных* (*не зависящих от* $t$) *интегралов* $U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (17.4).

**Задача Коши для ДУ (17.1)** ставится (как один из её вариантов) следующим образом.

Среди всех решений уравнения (17.1) найти такое решение $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое при заданном $x_k^0$, $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, — фиксировано, удовлетворяет начальному условию

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_k = x_k^0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

где $\varphi$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Не ограничивая общности, для краткости записи будем считать далее $k = n$, т. е. начальное условие запишем так:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{17.5}$$

**Схема решения задачи Коши (17.1), (17.5).**

**I этап.** Построим базис интегралов системы (17.2). Пусть это будет совокупность $U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

**II этап.** Положим $x_n = x_n^0$ в этих интегралах и обозначим

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{U}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{U}_{n-1}. \end{cases} \tag{17.6}$$

**III этап.** Разрешим функциональную систему (17.6) относительно переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Пусть

$$x_1 = \omega_1(\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_{n-1}), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_{n-1}). \tag{17.7}$$

**IV этап.** Подставим в начальную функцию $u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ выражения (17.7), в которых вместо $\bar{U}_i$ ставим интегралы $U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n-1$, получим *искомое решение начальной задачи* $u = \varphi\big(\omega_1(U_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ U_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \ \ldots, \omega_{n-1}(U_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ U_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))\big)$.

**В задачах 17.1–17.10 построить общее решение уравнений.**

**17.1.** $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + x_4\dfrac{\partial u}{\partial x_4} = 0.$

Р е ш е н и е. Составим соответствующую систему в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{x_4}$$

и найдём какой-либо её базис интегралов. Например, из уравнений $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2}$, $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_3}{x_3}$ и $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_4}{x_4}$ сразу получаем первые интегралы $\dfrac{x_2}{x_1} = C_1$, $\dfrac{x_3}{x_1} = C_2$ и $\dfrac{x_4}{x_1} = C_3$, которые, очевидно, функционально независимы и образуют базис первых интегралов. Отсюда следует, что общее решение исходного уравнения определяется равенством $u = \Phi\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_3}{x_1}, \dfrac{x_4}{x_1}\right)$, где $\Phi$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция*. □

**17.2.** $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + (y - x)z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

*Далее эту информацию о функции $\Phi$ опускаем.

Р е ш е н и е. Находим интегралы соответствующей ДС в симметричной форме

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{(y-x)z}.$$

Из первого уравнения $\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{-y^2}$ получаем сразу *первый интеграл* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=C_1$. Используя свойство производной пропорции, построим вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{dz}{(y-x)z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x+y)}{x+y} = -\frac{dz}{z}.$$

Отсюда находим другой *первый интеграл* $(x+y)z = C_2$.

Полученные интегралы $U_1(x,y,z) = \dfrac{x+y}{xy}$ и $U_2(x,y,z) = (x+y)z$ образуют *базис интегралов* системы в симметрической форме. Следовательно, *общее решение* исходного уравнения определяется функцией $u = \Phi\left(\dfrac{x+y}{xy}, (x+y)z\right)$. □

**17.3.** $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + yz^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Р е ш е н и е. Соответствующая уравнению ДС в симметрической форме имеет вид

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{yz^2}.$$

Очевиден *первый интеграл* $y = C_1$. Для получения *другого первого интеграла* подставим $y = C_1$ в последнюю дробь и решим уравнение $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dz}{C_1z^2}$. Получим функциональное соотношение $-\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{C_1z} + C_2$, откуда следует $C_2 = \dfrac{1}{yz} - \dfrac{1}{x} = = \dfrac{x-yz}{xyz}$. Функции $y$, $\dfrac{x-yz}{xyz}$ образуют *базис интегралов системы*, а *все решения* исходного ДУ выражаются формулой $u = \Phi\left(y, \dfrac{x-yz}{xyz}\right)$. □

**17.4.** $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - xz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**17.5.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**17.6.** $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2zx\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**17.7.** $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} + (y^2-x^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**17.8.** $(y-x-z)\dfrac{\partial u}{dx} + 2y\dfrac{\partial u}{dy} + (x+y+z)\dfrac{\partial u}{dz} = 0.$

**17.9.** $(y^2-z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + z^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**17.10.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (2z - x^2y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

**В задачах 17.11–17.15 найти решения, удовлетворяющие поставленным начальным условиям.**

**17.11.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (y - x)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $u = y^2 + z$ при $x = 1.$

Р е ш е н и е. Составим соответствующую ДС в симметрической форме

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{y - x}.$$

Интегрируя систему, получаем её *общий интеграл*

$$xy = C_1, \quad x + y + z = C_2.$$

Найдём решение заданной начальной задачи по предложенной выше схеме:

1) базис интегралов образуют функции $U_1 = xy,$ $U_2 = x + y + z;$

2) далее подставляем $x = 1$ в интегралы и обозначим

$$y = \bar{U}_1, \quad 1 + y + z = \bar{U}_2;$$

3) решим эту функциональную систему относительно $y$ и $z,$ получим

$$y = \bar{U}_1, \quad z = \bar{U}_2 - \bar{U}_1 - 1;$$

4) для построения решения поставленной задачи Коши подставим эти значения для $y$ и $z$ в начальную функцию $u = y^2 + z,$ заменяя $\bar{U}_i$ на интегралы $U_i(x, y, z),$ $i = 1, 2,$ получим представление искомого решения в виде

$$u = U_1^2 + U_2 - U_1 - 1.$$

Наконец, подставив в последнюю формулу выражения для интегралов $U_i,$ получим *решение задачи Коши*

$$u = x^2y^2 + x + y + z - xy - 1. \qquad \square$$

**17.12.** $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $u = x + z$ при $y = 1.$

**17.13.** $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} - x_4\dfrac{\partial u}{\partial x_4} = 0;$ $u = x_1 + x_2 + x_3$ при $x_4 = 1.$

**17.14.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z + x^2 + y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $u = x + z$ при $y = -1.$

**17.15.** $2xz\dfrac{\partial u}{dx} - 2yz\dfrac{\partial u}{dy} + (z^2 + 1)\dfrac{\partial u}{dz} = 0;$ $u = x^2 + y^2$ при $z = 1.$

**Мини-самоконтроль.** Найти общее решение ДУ $(x+z)\dfrac{\partial u}{dx} + (y-z)\dfrac{\partial u}{dy} + z\dfrac{\partial u}{dz} = 0$ и решение, удовлетворяющее начальному условию $u = xy$ при $z = 1.$

# § 18. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

*Квазилинейные (линейные неоднородные) уравнения в частных производных первого порядка. Соответствующая ему ДС в симметрической форме. Характеристическая система, характеристики ДУ. Общее решение. Задача Коши.*

*Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка* имеет вид

$$f_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,\dots,x_n,u), \quad (18.1)$$

в котором $f_i,\ i=1,\dots,n;\ g$ — заданные функции в области $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$; $u=u(x_1,\dots,x_n)$ — искомая функция.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения $f_i,\ i=1,\dots,n$, и неоднородность $g$ уравнения (18.1) непрерывно дифференцируемы в $G$ и выполнено условие $\sum_{i=1}^n f_i^2(x_1,\dots,x_n,u)+g^2(x_1,\dots,x_n,u)\neq 0$, если $(x_1,\dots,x_n,u)\in G$.

Заметим, что отличие квазилинейного уравнения от линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка состоит в наличии хотя бы одного из факторов: 1) неоднородный член $g\not\equiv 0$; 2) по меньшей мере один из коэффициентов $f_i,\ i=1,\dots,n$, явно зависит от искомой функции $u$.

Уравнению (18.1) ставится в соответствие ДС в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\dots,x_n,u)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{du}{g(x_1,\dots,x_n,u)}. \quad (18.2)$$

Пусть $U_1(x_1,\dots,x_n,u),U_2(x_1,\dots,x_n,u),\dots,U_n(x_1,\dots,x_n,u)$ — базис интегралов системы (18.2). Тогда **общее решение ДУ (18.1)** *в неявной форме определяется функциональным уравнением*

$$\Phi(U_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,U_n(x_1,\dots,x_n,u))=0, \quad (18.3)$$

где $\Phi$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Это означает, что функция $u=u(x_1,\dots,x_n)$ является решением ДУ (18.1) в некоторой окрестности точки $M$ своего графика тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению (18.3) при какой-либо функции $\Phi\in C^1$, такой что $\Phi(M)=0,\ \Phi'_u(M)\neq 0$.

*Характеристическая система* для ДУ (18.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \quad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{u} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \end{cases} \tag{18.4}$$

Её $n$ функционально независимых *стационарных интегралов* $U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ образуют *базис интегралов равносильной ей системы* (18.2).

*Траектории* системы (18.4) называются *характеристиками* ДУ (18.1). Поверхность $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (18.1) тогда и только тогда, когда она целиком состоит из характеристик.

Решение линейного однородного ДУ (17.1) можно проводить по схеме решения квазилинейного ДУ, при этом в системе (18.2) надо положить $g \equiv 0$, однако характеристики для однородного уравнения будут отличаться от характеристик этого уравнения, рассматриваемого как квазилинейное.

Как один из вариантов **задача Коши для ДУ (18.1)** ставится так же, как и для линейного однородного ДУ:

среди всех решений уравнения (18.1) найти такое решение $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое при $x_n = x_n^0$ удовлетворяет условию

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{18.5}$$

где $\varphi$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

**Схема решения задачи Коши (18.1), (18.5).**

**I этап.** Построим базис интегралов ДС (18.2) в симметрической форме. Пусть это будет совокупность

$$U_1(x_1, \ldots, x_n, u), \quad \ldots, \quad U_n(x_1, \ldots, x_n, u).$$

**II этап.** Подставим $x_n = x_n^0$ в эти интегралы, имеем

$$\begin{cases} U_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \bar{U}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, u) = \bar{U}_n. \end{cases} \tag{18.6}$$

**III этап.** Разрешим функциональную систему (18.6) относительно переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$, получим

$$x_1 = \omega_1(\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_n), \ldots, x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_n), u = \omega(\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_n).$$

**IV этап.** *Искомое решение начальной задачи* задаётся неявно следующим функциональным соотношением:

$$\omega(U_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,U_n(x_1,\dots,x_n,u)) = \varphi\big(\omega_1(U_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots$$
$$\dots,U_n(x_1,\dots,x_n,u)),\dots,\omega_{n-1}(U_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,U_n(x_1,\dots,x_n,u))\big).$$

В заключение проводят, если это возможно, аналитическое упрощение полученных формул как в случае общего решения, так и решения задачи Коши.

Более общая **задача Коши для уравнения (18.1)** состоит в нахождении решения соответствующего уравнения, удовлетворяющего начальному условию $u(x_1,\dots,x_n)|_S = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ с заданной начальной функцией $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in S$, на начальной гиперповерхности $S\subset G$. Ниже проиллюстрируем схему решения этой задачи на примерах.

**Для уравнений 18.1–18.11 построить общее решение.**

**18.1.** $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} - yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = x.$

Решение. Это квазилинейное уравнение. Соответствующая ДС в симметрической форме $\dfrac{dz}{xz} = \dfrac{dy}{-yz} = \dfrac{dz}{x}$ имеет первые функционально независимые интегралы $xy = C_1$, $z^2 - 2x = C_2$. Тогда *общее решение* исходного ДУ определяется в неявном виде формулой $\Phi(xy, z^2-2x) = 0$, где $\Phi$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция*. □

**18.2.** $(y^2+z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2xz.$

Решение. Для соответствующей ДС в симметрической форме

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

построим две интегрируемые комбинации

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{xy^2+xz^2-x^3-2xy^2-2xz^2} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{-2x(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dy}{-2xy} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz} \Rightarrow \frac{z}{y} = C_2.$$

Интегралы $(x^2+y^2+z^2)/y$ и $z/y$ образуют *базис интегралов* ДС. *Общее решение* исходного ДУ определяется формулой

$$\Phi\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0. \qquad \square$$

*Как и в § 17, эту информацию о функции $\Phi$ далее опускаем.

**18.3.** $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Р е ш е н и е. Уравнение является *квазилинейным, так как один из коэффициентов уравнения зависит от искомой функции* $z$. Соответствующая ДС в симметрической форме имеет вид

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Сразу получаем *первый интеграл* $z = C_1$. Подставив $z = C_1$ в первое уравнение, получим интегрируемое уравнение

$$\frac{dx}{yC_1} = \frac{dy}{x} \quad \Rightarrow \quad x\,dx = yC_1\,dy \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}C_1 + C_2,$$

откуда следует ещё один *первый интеграл* $x^2 - zy^2 = C_2$. Построенные интегралы $z,\ x^2 - zy^2$ функционально независимы. Следовательно, *общее решение* исходного ДУ определяется неявно уравнением $\Phi(z, x^2 - zy^2) = 0$. □

**18.4.** $(z-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=y-x.$

**18.5.** $x\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

**18.6.** $z(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

**18.7.** $yu\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+yx\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

**18.8.** $2y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2.$

**18.9.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z$, где $z = z(x, y)$.

**18.10.** $(z+x)x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z+y)y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2 - xy.$

**18.11.** $(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (u-y)\dfrac{\partial u}{\partial z} - z + x = 0.$

**В задачах 18.12–18.23 найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.**

**18.12.** $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy,\ z > 0;\ z - y^2 = 0$ при $x = 1$.

Р е ш е н и е. Соответствующая уравнению ДС в симметрической форме

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$$

имеет очевидные *первые интегралы* $y/x = C_1,\ z^2 - xy = C_2$. *Базис интегралов* ДС — функции $U_1 = y/x,\ U_2 = z^2 - xy$.

Построение решения задачи Коши проводим по предложенной выше схеме:

1) подставим начальное значение $x = 1$ в интегралы, получим $y = \bar{U}_1,\ z^2 - y = \bar{U}_2$;

2) разрешим функциональную систему относительно $y$ и $z,\ z > 0$, имеем $y = \bar{U}_1,\ z = \sqrt{\bar{U}_1 + \bar{U}_2}$;

3) подставим в начальное условие $z^2 - y = 0$ полученные выражения $z$ и $y$, заменив $\bar{U}_i$ на интегралы $U_i(x, y, z)$, находим *решение задачи Коши* в форме

$$\sqrt{U_1 + U_2} - U_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y/x + z^2 - xy} - y^2/x^2 = 0, \quad z > 0.$$

Отсюда следует, что $z^2 = xy - y/x + y^4/x^4$, $z > 0$.

*Приведённая выше схема решения задачи Коши может быть заменена на эквивалентную ей следующим образом.*

Исключим переменные $x$, $y$, $z$ из соотношений

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad z^2 - xy = C_2, \quad x = 1, \quad z - y^2 = 0.$$

Имеем $z - y^2 = 0$, $y = C_1$, $z^2 - y = C_2$, отсюда следует связь между $C_1$ и $C_2$ на кривой $x = 1$, $z - y^2 = 0$: $C_1^4 = C_1 + C_2$.

Подставляя в полученное соотношение вместо $C_1$ и $C_2$ соответствующие интегралы базиса, получаем, что *искомое решение задачи Коши* задаётся функциональным уравнением

$$y^4/x^4 = y/x + z^2 - xy, \quad z > 0. \qquad \square$$

**18.13.** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y;\ y = x,\ z = x.$

Р е ш е н и е. Составим соответствующую систему в симметрической форме

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x - y},$$

для которой функциональные соотношения

$$xy = C_1, \quad x + y - z = C_2$$

образуют *общий интеграл* системы.

Для решения задачи Коши составляем систему уравнений, объединяющую интеграл и уравнение начальной кривой, и из неё исключим $x$, $y$, $z$:

$$\begin{cases} xy = C_1, \\ x + y - z = C_2, \\ y = x, \\ z = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = C_1, \\ x + x - x = C_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_2^2 = C_1.$$

Тем самым мы получили связь между $C_1$ и $C_2$ на начальной кривой $y = x$, $z = x$.

Искомое решение задачи Коши находится путём постановки в полученное соотношение $C_2^2 = C_1$ значений $C_1$ и $C_2$ из первых интегралов. Таким образом, *уравнение искомой поверхности* имеет вид

$$(x + y - z)^2 = xy. \qquad \square$$

**18.14.** $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;\ \ z = x^2$ при $y = 1$.

**18.15.** $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2(x+y);\ \ y = x^2,\ \ z = x$.

**18.16.** $(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz;\ \ y^2+z^2 = a^2$ при $x = a$.

**18.17.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z;\ \ z = 2x^3,\ \ y = 2x^3$.

**18.18.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy;\ \ z = y^2+1$ при $x = 2$.

**18.19.** $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0;\ \ x - y = 0,\ \ x - yz = 1$.

**18.20.** $2xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2-x^2-y^2;\ \ x+y+z = 0,\ \ x^2+y^2+z^2 = a^2$.

**18.21.** $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} + xy = 0;\ \ xy = a^2,\ \ z = h$.

**18.22.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z;\ \ y = x,\ \ z = x^3$.

**18.23.** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2;\ \ y = x^2,\ \ z = -x^4$.

**18.24.** Найти уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом конусы $xy = \alpha z^2$.

**18.25.** Найти уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом поверхности семейства $z^2 = Cxy$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Найти общее решение уравнений и выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям: **а)** $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0;\ \ u = x_1 + \ldots + x_{n-1}$ при $x_n = 1$; **б)** $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = u;$ $u = x_1 + \ldots + x_{n-1}$ при $x_n = 1$. В чём различие решения этих задач? **2.** Построить общее решение ДУ $(az - by)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (bx - cz)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (cy - ax)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

# Варианты контрольной работы к главам II–V

## Вариант I

1. Проинтегрировать уравнение $xy'^2 - 2yy' + x = 0$. Найти особые решения ДУ, если они есть, или доказать их отсутствие.

2. Решить задачу Коши $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3. Проинтегрировать систему $y' = \dfrac{y^2}{z - x}$, $y' = y + 1$.

4. Построить общее решение уравнения $x(y - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(y + z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + $ $+ z(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ и найти решение, удовлетворяющее начальному условию $u = y^2 - x$ при $z = 1$.

## Вариант II

1. Проинтегрировать уравнение $y = \dfrac{xy'}{2} + \dfrac{y'^2}{x^2}$. Исследовать уравнение на особые решения.

2. Решить задачу Коши $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$.

3. Проинтегрировать систему $y' = y^2 z$, $z' = \dfrac{z}{x} - yz^2$.

4. Построить общее решение уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - 2y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$ и найти решение, удовлетворяющее начальному условию $z = y^2 + 2$ при $x = 1$.

## Вариант III

1. Проинтегрировать уравнение $y = 2xy' - 4y'^3$. Найти особые решения ДУ, если они есть, или доказать их отсутствие.

2. Решить уравнение $x(y''y - y'^2) = yy' + xy^2$.

3. Проинтегрировать систему $y' = 1 - \dfrac{1}{z}$, $z' = \dfrac{1}{y - x}$.

4. Построить общее решение уравнения $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ и найти решение, удовлетворяющее начальному условию $z = x^2$ при $y = 1$.

# Глава VI

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ $n$-го ПОРЯДКА

## § 19. Основные понятия и определения. Линейное однородное уравнение $n$-го порядка

*Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка (однородные и неоднородные). Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Линейный дифференциальный оператор $n$-го порядка. Принцип суперпозиции. Линейная зависимость и независимость функций. Признаки линейной зависимости и независимости. Определитель Вронского. Линейное однородное уравнение (ЛОДУ). Фундаментальная система решений (ФСР). Общее решение ЛОДУ $n$-го порядка. Критерий линейной независимости $n$ решений линейного однородного уравнения $n$-го порядка. Формула Абеля — Лиувилля — Остроградского. Составление ЛОДУ по заданной ФСР.*

*Линейным дифференциальным уравнением $n$-го порядка* называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad x \in (a, b), \tag{19.1}$$

в котором $a_i(x)$, $i = 1 \ldots n$, — непрерывные функции на интервале $(a, b)$, называемые коэффициентами уравнения (19.1), и $f(x)$ — заданная непрерывная на $(a, b)$ функция, называемая правой частью или неоднородностью уравнения (19.1)*.

Уравнение (19.1) называется *неоднородным* (ЛНДУ), если $f(x) \not\equiv \not\equiv 0$, $x \in (a, b)$, и *однородным* (ЛОДУ), если $f(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$.

Рассматривая в связи с (19.1) однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{19.2}$$

будем называть его *линейным однородным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению* (19.1).

**Для линейных однородных уравнений (19.2) имеет место так называемый принцип суперпозиции**.

*Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения* (19.2), *а $C_1$, $C_2$ — произвольные числа, то линейная комбинация $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ также является решением линейного однородного уравнения* (19.2).

*В дальнейшем все результаты для линейных уравнений будут формулироваться для ДУ в стандартных формах (19.1) и (19.2).

**Для линейного неоднородного уравнения (19.1) принцип суперпозиции** формулируется следующим образом.

*Если* $y = y_i^*(x)$, $i = 1, 2$, *— решения уравнения* (19.1) *с неоднородностями* $f_i(x)$, $i = 1, 2$, *соответственно, то* $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ *является решением уравнения* (19.1) *с неоднородностью* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

С помощью линейного дифференциального оператора $n$-го порядка

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y$$

уравнения (19.1) и (19.2) можно соответственно переписать в компактной форме $L(y) = f(x)$ и $L(y) = 0$.

**Теорема о существовании и единственности решения для ЛДУ *n*-го порядка.** *Если коэффициенты уравнения* $a_i(x)$, $i = 1 \ldots n$, *и неоднородность* $f(x)$ *непрерывны на интервале* $(a, b)$, *то существует единственное решение* $y = y(x)$ *ДУ* (19.1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{19.3}$$

*где* $x_0 \in (a, b)$, *а* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *— любые заданные числа, причём это решение заведомо определено на интервале* $(a, b)$.

Определение интервала существования решения поставленной задачи Коши (19.1), (19.3), гарантированного теоремой существования для конкретного уравнения (19.1), сводится к выделению максимального интервала непрерывности всех коэффициентов $a_i(x)$ и неоднородности $f(x)$, содержащего точку $x_0$.

**Контрольные вопросы**

**1.** Объяснить, почему разность $y^*(x) = y_1^*(x) - y_2^*(x)$ двух решений $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ ЛНДУ (19.1) является решением соответствующего ЛОДУ (19.2).

**2.** Доказать, что если функции $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, — решения ЛОДУ (19.2), то линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x)$, где $C_i$ — произвольные постоянные, $i = 1, \ldots, k$, является решением ЛОДУ (19.2).

**3.** Доказать, что если $y_i^*(x)$ есть решение ЛНДУ $L(y) = f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, то $y^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i^*(x)$ — решение ЛНДУ $L(y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$, где $\alpha_i$ — любые числа.

Иногда именно свойства п. 2 и 3 называют *принципом суперпозиции* соответственно для ЛОДУ (19.2) и ЛНДУ (19.1).

Пусть на интервале $J = (a, b)$ задана совокупность функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x). \tag{19.4}$$

Функции $f_1, \dots, f_n$ называются *линейно зависимыми (ЛЗ) на интервале* $J$, если существуют такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \neq 0$, что выполняется тождество

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) \equiv 0, \quad x \in J.$$

Если последнее тождество имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$ $\cdots = \alpha_n = 0$, то совокупность функций (19.4) называется *линейно независимой (ЛНЗ) на интервале* $J$.

Пусть функции $f_i$, $i = 1, \dots, n$, имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно. Функция

$$W(x) \equiv W[f, \dots, f_n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* (*вронскианом*) совокупности функций (19.4).

*Если функции* (19.4) *ЛЗ на интервале (a, b), то* $W(x) = W[y_1, \dots, y] \equiv 0, x \in (a, b)$.

**Достаточное условие линейной независимости функций.** *Для того чтобы совокупность функций* (19.4), *где* $f_i \in C^{(n-1)}(a, b)$, $i = 1, \dots, n$, *была линейно независимой на интервале* $(a, b)$, *достаточно, чтобы определитель Вронского* $W(x)$ *этой совокупности был отличен от нуля хотя бы в одной точке* $x_0 \in (a, b) : W(x_0) \neq 0$.

Рассмотрим теперь линейное однородное уравнение (19.2).

Любая совокупность из $n$ линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (19.2) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения или *базисом пространства* его решений.

Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (19.2), то его *общее решение* определяется по формуле

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

ФСР $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется *нормированной в точке* $x_0 \in (a,b)$, если для её решений выполнены следующие начальные условия:

$$
\begin{array}{llll}
y_1(x_0)=1, & y_1'(x_0)=0, & \ldots, & y_1^{(n-1)}(x_0)=0;\\
y_2(x_0)=0, & y_2'(x_0)=1, & \ldots, & y_2^{(n-1)}(x_0)=0;\\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\
y_n(x_0)=0, & y_n'(x_0)=0, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0)=1.
\end{array}
$$

Если фундаментальная система решений ДУ(19.2) нормирована в точке $x_0 \in (a,b)$, то решение задачи Коши

$$L(y)=0, \quad y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

допускает представление $y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x)$.

**Критерий линейной независимости $\boldsymbol{n}$ решений.** *Для того чтобы решения* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *ЛОДУ* (19.2) *с непрерывными на* $(a,b)$ *коэффициентами были линейно независимы на интервале* $(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы вронскиан* $W(x) \equiv$ $\equiv W[y_1, \ldots, y_n]$ *был отличен от нуля хотя бы в одной точке* $x_0 \in$ $\in (a,b)$.

Для определителя Вронского любых $n$ решений ЛОДУ (19.2) имеет место *формула Абеля* $(n=2)$ *— Лиувилля — Остроградского*

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = W(x_0)\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\right\}.$$

Пусть $y_1, \ldots, y_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ — совокупность $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций, для которых $W(x) \equiv W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$, тогда *единственным* (в стандартной форме) ЛОДУ $n$-го порядка (с непрерывными коэффициентами), для которого $y_1, \ldots, y_n$ образуют ФСР на $(a,b)$, является уравнение

$$W^{-1}(x) W[y_1(x), \ldots, y_n(x), y] = 0.$$

**В задачах 19.1–19.3 рассматривается совокупность функций (19.4), определённых на интервале $\boldsymbol{J = (a,b)}$.**

**19.1.** Показать, что совокупность функций (19.4) является линейно зависимой на $J$, если среди этих функций есть хотя бы одна, тождественно равная нулю на $J$, или если среди этих функций есть по меньшей мере две тождественно равные на $J$.

**19.2.** Известно, что совокупность функций (19.4) линейно зависима на интервале $(\alpha, \beta) \subset J$. Является ли она зависимой и на интервале $J$?

**19.3.** Доказать, что совокупность функций (19.4) линейно независима на интервале $J$, если она является ЛНЗ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset J$?

**19.4.** Доказать, что если для двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определённых на интервале $J$, $f_2(x) \not\equiv 0$, $x \in J$, выполнено условие $f_1(x)/f_2(x) \not\equiv \text{const} \neq 0$ на некотором интервале $J_1 \subseteq J$, где $f_2(x) \neq 0$, то эти функции линейно независимы на интервале $J$.

Р е ш е н и е. Пусть выполнено условие $f_1(x)/f_2(x) \not\equiv \text{const} \neq 0$, если $x \in J_1$, $f_2(x) \neq 0$ на $J_1$. Докажем, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ линейно независимы на $J_1$. Предположим противное. Тогда на $J_1$ имеет место тождество $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv 0$, причём $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$. При этом $\alpha_1 \neq 0$, ибо в противном случае в силу условия $f_2(x) \neq 0$ на $J_1$ следует, что $\alpha_2 = 0$, что противоречит сделанному предположению. Тогда имеем $f_1(x)/f_2(x) \equiv -\alpha_2/\alpha_1 = \text{const}$, $x \in J_1$, что противоречит условию задачи.

Из доказанной линейной независимости этих функций на $J_1$, используя результат предыдущей задачи, получаем линейную независимость на $J$. □

**19.5.** Пусть определитель Вронского совокупности функций (19.4), где $f_i \in C^{(n-1)}(a, b)$, $i = 1, \ldots, n$, равен нулю при всех $x \in (a, b)$. Могут ли эти функции быть линейно независимыми на интервале $(a, b)$?

**В задачах 19.6–19.16 исследовать на линейную зависимость функции в области их определения.**

**19.6.** $1, \sin^2 x, \cos 2x$.

Р е ш е н и е. Данные функции определены и линейно зависимы на $\mathbb{R}$, так как на $\mathbb{R}$ имеет место тождество

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x - \cos 2x \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$ □

**19.7.** $\sin x$, $\cos x$.

Р е ш е н и е. Эти функции определены на $\mathbb{R}$ и на интервале $(0, \pi/2)$ их отношение $\sin x/\cos x = \operatorname{tg} x \not\equiv \text{const}$. Из результата задачи 19.4 следует, что эти функции линейно независимы на $\mathbb{R}$.

Этот вывод также можно сделать по их определителю Вронского

$$W(x) = W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$ □

**19.8.** $x$, $x^5$, $|x^5|$.

Р е ш е н и е. Вычислим определитель Вронского $W(x)$ этой совокупности функций, получим $W(x) \equiv 0$ в их области определения $(-\infty, +\infty)$, т. е. вывод о линейной зависимости данных функций сделать нельзя, так как условие $W(x) \equiv 0$, $x \in J$, является лишь необходимым для ЛЗ на интервале $J$, и, следовательно, требуется дополнительное исследование.

Покажем, что эти функции ЛНЗ на $\mathbb{R}$. Предположим противное: эти функции ЛЗ на $\mathbb{R}$. Тогда на этом промежутке имеет место тождество

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^5 + \alpha_3 |x^5| \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i| \neq 0.$$

Отсюда следуют тождества

$$\alpha_1 x + (\alpha_2 + \alpha_3) x^5 \equiv 0, \quad x \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 x + (\alpha_2 - \alpha_3) x^5 \equiv 0, \quad x < 0.$$

Функции $x$ и $x^5$ ЛНЗ на любом промежутке, поэтому из последних двух тождеств следует, что

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Откуда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, данная совокупность функций ЛНЗ на $\mathbb{R}$. $\square$

**19.9.** $x$, $|x|$.

**19.10.** $1$, $x$, $x^2$.

**19.11.** $1$, $e^x$, $e^{2x}$.

**19.12.** $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $e^x$.

**19.13.** $\sin x$, $\sin(x+1)$, $\sin(x+2)$.

**19.14.** $2 + x$, $3x + 4$, $3x + 2$.

**19.15.** $1$, $\ln x$, $\ln 2x$.

**19.16.** $\sin \alpha_1 x$, $\sin \alpha_2 x$, $\sin \alpha_3 x$.

**19.17.** Определить интервал существования решения уравнений с указанными начальными условиями:

**а)** $x(x-2)y'' + (2x+1)y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$.

Р е ш е н и е. Для применения теоремы существования и единственности для линейного уравнения $n$-го порядка найдём интервал непрерывности коэффициентов уравнения, записанного в стандартной форме $y'' + \dfrac{2x+1}{x(x-2)} y = 0$, содержащий начальную точку $x_0 = 1$. Точки разрыва коэффициента $x = 0$ и $x = 2$. Отсюда следует, что максимальный интервал непрерывности коэффициентов, содержащий точку $x = 1$, есть $(0, 2)$, и, следовательно, *решение* поставленной задачи Коши заведомо *определено на интервале* $(0, 2)$; $\square$

**б)** $(x^2 - 3x + 2)y'' + xy' + y \operatorname{tg} x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
**в)** $y'' + y \sin x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
**г)** $(2x-1)y'' + x^2 y' + e^x y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

**19.18.** Доказать, что линейное однородное уравнение $n$-го порядка с непрерывными коэффициентами на интервале $(a, b)$ не может иметь на нём более чем $n$ линейно независимых частных решений.

**19.19.** Показать, что при условии нарушения непрерывности коэффициентов на интервале $(a, b)$ утверждение предыдущей задачи, вообще говоря, не верно.

Р е ш е н и е. Рассмотрим уравнение $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$, решениями которого (убеждаемся в этом подстановкой их в уравнение) будут функции $y_1 = x$, $y_2 = x^3$, $y_3 = |x^3|$, определённые на интервале $(-\infty, +\infty)$. Как и в примере 19.8, аналогично доказывается, что эта совокупность трёх функций линейно независима на $\mathbb{R}$. Это кажущееся противоречие с максимальным числом линейно независимых решений на $\mathbb{R}$, равным порядку уравнения 2, возникло в связи с тем, что в соответствующем уравнении в стандартной форме $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{3}{x^2}y = 0$ точка $x = 0$ разбивает $\mathbb{R}$ на два интервала непрерывности коэффициентов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, на каждом из которых работает вышеприведённая теорема задачи 19.18. $\square$

**19.20.** Доказать, что единственным решением уравнения (с непрерывными коэффициентами на $\mathbb{R}$) $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$, удовлетворяющим нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = 0$, является нулевое решение $y = 0$.

**19.21.** При каких $n$ уравнение задачи 19.20 имеет частное решение $y_1 = x^k$, где $k$ — целое положительное число?

Р е ш е н и е. Заметим, что $y_1^{(m)}(x)|_{x=0} = (x^k)^{(m)}|_{x=0} = 0$, если $m < k$, $y_1^{(k)}(x) = (x^k)^{(k)} = k!$, т. е. решение $y_1(x) = x^k$ удовлетворяет при $x = 0$ нулевым начальным условиям

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \quad \ldots, \quad y_1^{(k-1)}(0) = 0, \quad \text{но уже } y_1^{(k)}(0) = k! \neq 0.$$

Тогда из результата задачи 19.20 получаем, что *ненулевое решение* $y_1(x) = x^k$ *не может быть решением ЛОДУ порядка* $n \leqslant k$, ибо в этом случае таким нулевым начальным условиям удовлетворяет единственное решение $y = 0$. С другой стороны, существует уравнение $(k+1)$-го порядка $y^{(k+1)} = 0$, которому удовлетворяет функция $y_1(x) = x^k$.

Итак, *для любого* $n \geqslant k+1$ *существует ЛОДУ с непрерывными коэффициентами на* $\mathbb{R}$, *имеющее частное решение* $y_1(x) = x^k$. $\square$

**В задачах 19.22–19.27 составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.**

**19.22.** $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$.

Р е ш е н и е. Так как для этих функций выполнено условие $W(x) = W[x^2, x^3] = x^4 \neq 0$, если $x \neq 0$, то искомое ДУ второго порядка имеет вид

$$W^{-1}[x^2, x^3]W[x^2, x^3, y] = \frac{1}{x^4}\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & y \\ 2x & 3x^2 & y' \\ 2 & 6x & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты *полученного уравнения* $y'' - \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{6}{x^2}y = 0$ терпят разрыв при $x = 0$, что объяснимо, так как $W(0) = 0$. $\square$

**19.23.** $x$, $x^3$, $|x^3|$.

Р е ш е н и е. Для этих функций имеем

$$W(x) = W[x, x^3, |x^3|] = \begin{vmatrix} x & x^3 & |x^3| \\ 1 & 3x^2 & 3x^2 \operatorname{sgn} x \\ 0 & 6x & 6x \operatorname{sgn} x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Данные функции линейно независимы на $\mathbb{R}$ (см. задачу 19.8), однако на $\mathbb{R}_+$ и на $\mathbb{R}_-$ эта совокупность соответственно имеет вид $x$, $x^3$, $x^3$ и $x$, $x^3$, $-x^3$, т. е. она линейно зависима на каждой из полуосей $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$. Учитывая, что $W(x) = W[x, x^3] = 2x^3 \neq 0$, если $x \neq 0$, то искомое ДУ будет второго порядка:

$$W^{-1}[x, x^3]W[x, x^3, y] = \frac{1}{2x^3}(2x^3y'' - 6x^2y' + 6xy) = 0 \text{ или } y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{3y}{x^2} = 0. \quad \square$$

**19.24.** $\sin x$, $\cos x$.

**19.25.** $1$, $e^x$, $e^{-x}$.

**19.26.** $x^2 - 3$, $x^2 + 2$, $1$.

**19.27.** $(x-1)^2$, $x^2 + 1$, $2x$.

**Контрольные вопросы**

**1.** Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения ДУ

$$(x^2 - 4)y'' + xy' + \sqrt{1 - 2x}y = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$; $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$: **а)** определить, на каком интервале $(a, b)$ эти решения заведомо существуют; **б)** найти определитель Вронского этих решений на интервале $(a, b)$; **в)** проверить, образуют ли данные решения ФСР; **г)** найти решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.

**2.** Может ли функция $y = \sin x^2$ быть решением ЛОДУ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

с непрерывными коэффициентами на интервале $(a, b)$, содержащем точку $x = 0$?

**3.** Может ли график нетривиального решения ЛОДУ второго порядка с непрерывными на $\mathbb{R}$ коэффициентами: **а)** пересекать ось $Ox$; **б)** касаться оси $Ox$?

**4.** Как связаны две ФСР ЛОДУ $n$-го порядка?

**5.** Может ли график функции $W = W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$, где $y_1, \ldots, y_n$ — различные нетривиальные решения ЛОДУ $n$-го порядка с непрерывными на интервале $(\alpha, \beta)$ коэффициентами: **а)** пересекать ось $Ox$ в некоторой точке $x_0 \in (\alpha, \beta)$; **б)** касаться оси $Ox$ в точке $x_0$?

**Мини-самоконтроль. 1.** Являются ли ЛЗ на $\mathbb{R}$ функции: **а)** $x$, $e^x$; **б)** $x$, $x$, $x^2$; **в)** $x$, $x^2$, $0$; **г)** $x$, $(x+1)^2$, $(x-1)^2$. **2.** Составить ЛОДУ наименьшего порядка с данными частными решениями: **а)** $x$, $x^2$; **б)** $x$, $(x+1)^2$, $(x-1)^2$. **3.** Пусть для ЛОДУ второго порядка известны два частных решения $y_1 = x + 1$, $y_2 = x^2 - 1$. Найти решение этого ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

# § 20. Линейные однородные дифференциальные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

*Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Характеристический полином. Характеристическое уравнение. Характеристические числа. Определение $k$-кратного корня алгебраического уравнения. Формула Муавра. Формула Эйлера. Общее комплексное решение уравнения. Построение действительной фундаментальной системы решений. Линейный осциллятор.*

Рассмотрим линейное однородное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{20.1}$$

**Правило построения действительной фундаментальной системы решений уравнения (20.1)**

**По методу Эйлера** решение уравнения (20.1) строим в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{20.2}$$

Подставляя (20.2) в уравнение (20.1), получаем, что число $\lambda$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{20.3}$$

которое называется *характеристическим уравнением,* его корни — *характеристическими числами,* а полином $P(\lambda)$ — *характеристическим полиномом.*

Очевидно, что *характеристическое уравнение можно построить сразу,* заменяя в уравнении (20.1) $y^{(k)}$ на $\lambda^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Далее находим его характеристические числа — все корни уравнения (20.3) $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, l$, с учётом их кратности $m_j$, $\sum_{j=1}^{l} m_j = n$.

Напомним, что *корень* $\lambda = \lambda_0$ алгебраического уравнения $P(\lambda) = 0$ называется *$k$-кратным,* если справедливо представление

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k P_1(\lambda),$$

где $P_1(\lambda)$ — полином, для которого $P_1(\lambda_0) \neq 0$. Отсюда также следует, что число $\lambda = \lambda_0$ — $k$-кратный корень уравнения $P(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены условия $P(\lambda_0) = 0$, $P'(\lambda_0) = 0$, $\ldots$, $P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$, но $P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.

**Контрольный вопрос.** Проверить, являются ли указанные корни кратными (какой кратности) для следующих уравнений: **а)** $\lambda^3-1=0$, $\lambda=1$; **б)** $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $\lambda=1$; **в)** $\lambda^6+2\lambda^4+\lambda^2=0$, $\lambda=0$; **г)** $\lambda^7-\lambda^2+\lambda-1=0$, $\lambda=i$.

Для множества характеристических чисел возможны следующие случаи.

**I.** *Все характеристические числа* $\lambda_j$, $j=1,\ldots,n$, *действительные и различные.* Тогда ФСР уравнения есть совокупность решений

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=e^{\lambda_2 x},\quad \ldots,\quad y_n=e^{\lambda_n x}. \tag{20.4}$$

**II.** Пусть среди характеристических чисел есть *действительное* $\lambda=\lambda_1$ *кратности* $k$. Тогда в ФСР ему отвечают следующие $k$ ЛНЗ решений:

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=xe^{\lambda_1 x},\quad \ldots,\quad y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1 x}. \tag{20.5}$$

**III.** Пусть среди корней характеристического уравнения есть *простая пара комплексно сопряжённых чисел* $\lambda_1=a+bi$ и $\lambda_2=a-bi$. Этим двум характеристическим числам соответствуют два комплексных решения $e^{(a+bi)x}$ и $e^{(a-bi)x}$. Используя *формулу Эйлера*

$$e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),$$

получаем, что *в действительной фундаментальной системе решений этой паре комплексно сопряжённых характеристических чисел отвечают два действительных решения*

$$y_1=e^{ax}\cos bx,\quad y_2=e^{ax}\sin bx. \tag{20.6}$$

Это следует из *утверждения:* если коэффициенты уравнения (20.1) действительные и $y=y(x)$ — его комплексное решение, то действительная и мнимая части этого решения

$$u(x)=\operatorname{Re}y(x),\quad v(x)=\operatorname{Im}y(x)$$

также являются решениями ДУ (20.1).

**IV.** Пусть среди корней характеристического уравнения есть *комплексный корень* $\lambda=a+bi$ *кратности* $k$. Тогда комплексно сопряжённый корень $\overline{\lambda}=a-bi$ имеет ту же кратность $k$. *Этим* $2k$ *характеристическим числам в действительной ФСР соответствуют* *следующие* $2k$ *действительные решения*:

$$\begin{array}{ll} y_1 = e^{ax}\cos bx, & y_2 = e^{ax}\sin bx, \\ y_3 = xe^{ax}\cos bx, & y_4 = xe^{ax}\sin bx, \\ \dots & \dots \\ y_{2k-1} = x^{k-1}e^{ax}\cos bx, & y_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{array} \tag{20.7}$$

Далее на основе построенной фундаментальной системы решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ получаем *общее решение*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные действительные постоянные.

В случае $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, *комплексная фундаментальная система решений* строится при помощи пунктов **I** и **II**. Пусть $\lambda_j$, $j = 1, \dots, l$, — все разные корни характеристического уравнения (20.3) с кратностями $m_j$, $\sum_{j=1}^{l} m_j = n$. Тогда *общее комплексное решение* ДУ (20.1) допускает представление

$$y = P_{m_1-1}(x)e^{\lambda_1 x} + P_{m_2-1}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_{m_l-1}(x)e^{\lambda_l x},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени $m$, коэффициентами которого служат комплексные произвольные постоянные.

**В задачах 20.1–20.25 построить действительное общее решение.**

**20.1.** $y'' + 3y' = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$.

Отсюда (см. (20.4)) следует, что функции $y_1(x) = e^{0x} = 1$ и $y_2(x) = e^{-3x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения, а его *общее решение* есть $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. □

**20.2.** $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Отсюда следует, что *ФСР имеет вид* $y_1(x) = e^{-3x}$ и $y_2(x) = xe^{-3x}$, а *общее решение ДУ* определяется равенством $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$. □

**20.3.** $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ — комплексно сопряжённая пара $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. *Действительная ФСР* строится по формуле (20.6) и имеет вид $y_1(x) = e^{-x}\cos x$, $y_2(x) = e^{-x}\sin x$. Тогда *общее решение ДУ* определяется по формуле $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

**Замечание 20.1.** К этой действительной ФСР можно прийти, исходя из комплексного решения $\tilde{y} = e^{\lambda_1 x} = e^{(-1+i)x} = e^{-x}(\cos x + i \sin x)$, выделяя его действительную и мнимую части $y_1(x) = \operatorname{Re} \tilde{y}(x) = e^{-x} \cos x$, $y_2(x) = \operatorname{Im} \tilde{y}(x) = e^{-x} \sin x$. Второе комплексное решение $y = e^{(-1-i)x}$ не порождает новых действительных ЛНЗ решений. $\square$

## 20.4. $y'' + \omega^2 y = 0, \ \omega > 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, поэтому функции $y_1(x) = \cos \omega x$ и $y_2(x) = \sin \omega x$ образуют *действительную ФСР* исходного уравнения, а *общее решение* ДУ — $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. $\square$

## 20.5. $y''' - y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - 1 = 0$, которое представим в виде $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$. Тогда корни этого уравнения есть $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Действительная ФСР имеет структуру $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$, $y_3 = e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$, а *общее решение* —

$$y = C_1 e^x + e^{-x/2} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right),$$

где $C_j$, $j = 1, 2, 3$, — произвольные постоянные. $\square$

## 20.6. $y^{(4)} + 4y = 0.$

Решение. При вычислении корней характеристического уравнения $\lambda^4 + 4 = 0$ целесообразно воспользоваться *формулой Муавра* извлечения корня $n$-й степени из комплексного числа $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$\sqrt[n]{w} = r^{1/n} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

согласно которой

$$\lambda_{k+1} = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тогда имеем $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$, $\lambda_4 = \overline{\lambda}_1$ и *фундаментальную систему решений* образуют функции $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$, $y_3 = e^{-x} \cos x$, $y_4 = e^{-x} \sin x$, а *общее решение* имеет вид

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x),$$

где $C_j$, $j = 1, \ldots, 4$, — произвольные постоянные. $\square$

**Замечание 20.2.** Построение корней уравнения $\lambda^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, можно оформить и так: пусть $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |a| e^{i\varphi}$. Тогда при $a > 0$ имеем $\varphi = 0$; при $a < 0$ — $\varphi = \pi$, и $n$ различных корней $\lambda_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, этого уравнения определяются по формулам:

1) $\lambda_{k+1} = \sqrt[n]{a}e^{2k\pi i/n}$, если $a > 0$;
2) $\lambda_{k+1} = \sqrt[n]{|a|}e^{(\pi+2k\pi)i/n}$, если $a < 0$.

**20.7.** $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0.$

Решение. Решаем характеристическое уравнение $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$, которое можно представить в виде $(\lambda^2 + 9)^2 = 0$ (или решаем его как биквадратное). Отсюда следует, что оно имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = 3i$ и $\lambda_{3,4} = -3i$ кратности 2. Согласно формулам (20.7) ФСР есть совокупность функций $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, $y_3 = x\cos 3x$, $y_4 = x\sin 3x$, а *общее решение* —

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3 x\cos 3x + C_4 x\sin 3x. \qquad \square$$

**20.8.** $y''' - 4y'' + 3y' = 0$

**20.9.** $y'' - 3y' + 2y = 0.$

**20.10.** $y''' - y'' - y' + y = 0.$

**20.11.** $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0.$

**20.12.** $y''' - 8y = 0.$

**20.13.** $y''' + 8y = 0.$

**20.14.** $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

**20.15.** $y'' + 2y' + 5y = 0.$

**20.16.** $y^{(7)} - 2y^{(5)} + y''' = 0.$

**20.17.** $y^{(4)} - 16y = 0.$

**20.18.** $y^{(6)} + 64y = 0.$

**20.19.** $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0.$

**20.20.** $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0.$

**20.21.** $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0.$

**20.22.** $y''' - y'' + y' - y = 0.$

**20.23.** $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$

**20.24.** $y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0.$

**20.25.** $y^{(6)} + 3y^{(5)} + 3y^{(4)} + y''' = 0.$

**В задачах 20.26–20.32 найти решения, удовлетворяющие начальным или краевым условиям.**

**20.26.** $y'' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Общее решение уравнения $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Подставляя начальные данные в $y(x)$ и $y'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x$, получаем из начальных условий систему для определения $C_1$ и $C_2$: $1 = C_1$, $0 = C_2$. Тогда *решение задачи Коши* примет вид $y = \cos x$. $\square$

**20.27.** $y'' + y = 0$: **а)** $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$; **б)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$.

Решение. Используя для общего решения $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ поочередно краевые условия, получим системы для определения $C_1$ и $C_2$ соответственно:

**а)** $0 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0$ и $1 = C_1\cos(\pi/2) + C_2\sin(\pi/2)$, которая имеет (что априори в отличие от начальной задачи не гарантировано) единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, отсюда следует, что решение краевой задачи а) существует и единственно: $y = \sin x$;

**б)** $1 = C_1$, $1 = -C_1$, т. е. система несовместна, что означает, что решение краевой задачи б) не существует. $\square$

**20.28.** $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Решение. Используя краевые условия и формулу общего решения $y = C_1\cos x + C_2\sin x$, получаем систему для определения $C_1$ и $C_2$: $0 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0$, $0 = C_1\cos\pi + C_2\sin\pi$ или $C_1 = 0$, $C_2\sin\pi = 0$, из которой следует, что

$C_1 = 0$, а $C_2$ — любое число из $\mathbb{R}$, т. е. *краевая задача имеет бесконечно много решений* $y = C\sin x$, где $C$ — произвольная постоянная. $\square$

**20.29.** $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

**20.30.** $y''' + y'' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

**20.31.** $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$.

**20.32.** $y'' - y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$.

**В задачах 20.33–20.37 построить линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.**

**20.33.** $y_1 = x^2$, $y_2 = \cos x$.

Решение. Очевидно, что первое решение искомого уравнения соответствует корню $\lambda_1 = 0$ кратности 3 характеристического уравнения, а второе решение получается при наличии однократной пары комплексно сопряжённых характеристических чисел $\pm i$. Отсюда следует, что характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^3(\lambda^2 + 1) = 0$ или $\lambda^5 + \lambda^3 = 0$. Восстанавливая по нему ЛОДУ, получим $y^{(5)} + y''' = 0$. $\square$

**20.34.** $y_1 = x^2 \cos x$.

**20.35.** $y_1 = xe^{-x}$, $y_2 = e^{2x}$.

**20.36.** $y_1 = xe^x \cos x$.

**20.37.** $y_1 = e^x \sin x$, $y_2 = e^x$.

**20.38.** При каких $a$ и $b$ все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены: **а)** на положительной полуоси $(0, +\infty)$; **б)** на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$?

**20.39.** При каких $a$ и $b$ все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ являются периодическими функциями?

**20.40.** Определить значения параметра $\alpha$, для которых все решения ДУ $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1) = 0$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

**20.41.** Вывести условия на коэффициенты уравнения $y'' + ay' + by = 0$ для того, чтобы его траектории (т. е. траектории соответствующей системы в переменных $y_1 = y$ и $y_2 = y'$) были окружностями (эллипсами).

**20.42.** Вывести все основные свойства функций $\sin x$ и $\cos x$, рассматривая их как решения ДУ $y'' + y = 0$ с начальными условиями соответственно $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ и $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**При решении задач 20.43–20.46 принять, что при отклонении груза от положения равновесия на расстояние $x$ пружина действует на него с силой $kx$, направленной к положению равновесия.**

**20.43.** Один конец пружины закреплён неподвижно, а к другому прикреплён груз массой $m$. При отклонении груза от положения равновесия на величину $x$ на него действует сила, пропорциональная отклонению $x$ и равная $-kx$, $k$ — жёсткость пружины, $k > 0$, знак минус означает, что сила действует против движения. Предположим, что сопротивление среды отсутствует. Описать движение груза (массой пружины пренебречь).

Решение. Начало координат $O$ выберем в точке, в которой груз находится в положении равновесия, ось $Ox$ — вертикально вниз. Тогда в произвольной точке, удалённой на $x$ от положения равновесия, действуют силы, равные $P+f_1+f_2$, при этом $P + f_1 = 0$, $f_2 = -kx$, $k > 0$ (рис. 20.1). Таким образом, на груз действует сила $-kx$. На основании закона Ньютона получаем ДУ движения груза

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} > 0, \quad \omega > 0. \tag{20.8}$$

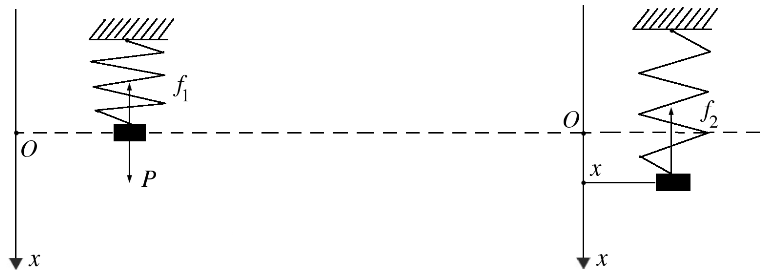



*Рис. 20.1.* Свободные колебания: $P$ — сила веса; $f_1$ — сила упругости пружины; $f_2$ — сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия; $f_2 = -kx$, $k > > 0$. Пунктиром обозначено положение равновесия

*Общее решение* полученного стационарного ЛОДУ имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$x = A\left(\frac{C_1}{A}\cos \omega t + \frac{C_2}{A}\sin \omega t\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{20.9}$$

где

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{C_1}{A}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{C_2}{A}.$$

Величина $A$ наибольшего отклонения груза от положения равновесия называется *амплитудой колебания*, величина $\varphi_0$ — *начальной фазой.*

Таким образом, груз совершает *гармонические колебания* с периодом $T = = 2\pi/\omega$, который не зависит от амплитуды колебания, $\omega$ — частота колебаний точки, $\omega = 2\pi/T$. Систему (не обязательно механическую), процесс в которой описывает ЛОДУ (20.8), называют *гармоническим осциллятором.* Форма записи общего решения (20.9) удобна тем, что новые произвольные постоянные $A$, $\varphi_0$ и параметр $\omega$ имеют вполне определённый физический смысл. □

**20.44.** Один конец пружины закреплён неподвижно, а к другому подвесили груз массой $m$, в результате чего она удлинилась на $l$, а затем добавили ещё один груз такой же массы. Составить математическую модель движения совместного груза и найти закон его движения. Определить период колебания.

**20.45.** Материальная точка $M$ массой $m$ притягивается двумя равномощными центрами $A$ и $B$, расположенными один от другого на расстоянии 2 м. Сила притяжения пропорциональна расстоянию от центра до точки $M$. Найти закон движения точки, если при $t = 0$ она находится в покое на расстоянии 0,5 м от центра $A$. Определить период колебания точки.

**20.46.** Пусть тело $M$ массой $m$ совершает горизонтальные движения под действием двух одинаковых пружин, прикреплённых к телу и вертикальным опорам (рис. 20.2). Принять, что сила трения пропорциональна скорости движущегося тела и равна $hv$. При $t=0$ телу, находившемуся в положении равновесия, сообщена скорость $v_0$. Исследовать движение груза при малом трении $h^2<4km$. Найти промежуток времени между последовательными прохождениями колебательной системы через положения равновесия. Этот промежуток называется «условным периодом» затухающего процесса, а его ДУ при условии $0 \leqslant h^2 < 4km$ называют *линейным осциллятором* (при $h = 0$ имеем *гармонический осциллятор*).

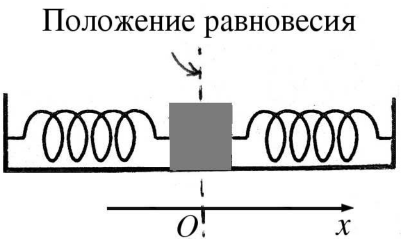



*Рис. 20.2.* Затухающие колебания

**Мини-самоконтроль. 1.** Найти действительное общее решение следующих ЛОДУ: **а)** $y'' - 3y' + 2y = 0$; **б)** $y'' + 4y = 0$; **в)** $y'' + 4y' + 5y = 0$; **г)** $y^{(4)} - y = 0$; **д)** $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$; **е)** $y'' - 2y' + y = 0$. **2.** Построить решение задачи Коши $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. **3.** Найти все ограниченные при $t \geqslant 0$ решения ДУ $y''' + 2y'' - 8y' = 0$.

# § 21. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения $n$-го порядка

*Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Метод Коши. Функция Коши. Формула Коши. Интегрируемость в квадратурах линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.*

Рассматриваем линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (21.1)$$

в котором функции $f(x)$, $a_j(x)$ $j = 1, \ldots, n$, непрерывны на интервале $J = (a, b)$. *Общее решение* уравнения (21.1) имеет структуру

$$y = y_{\text{оо}}(x) + y^*(x), \quad x \in (a, b), \qquad (21.2)$$

где $y_{\text{оо}}(x)$ — общее решение соответствующего ЛОДУ, а $y^*(x)$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (21.1).

Если известна фундаментальная система решений соответствующего ЛОДУ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in (a, b)$, то его *общее решение* определяется по формуле

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (21.3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, и формула (19.2) для *общего решения неоднородного уравнения* (21.1) принимает вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y^*(x). \qquad (21.4)$$

Зная фундаментальную систему решений соответствующего (21.1) ЛОДУ (19.2), можно всегда построить общее решение ЛНДУ (21.1) в квадратурах с помощью **метода вариации произвольных постоянных (метода Лагранжа).**

*Следуя Лагранжу*, общее решение уравнения (21.1) строим в таком же виде, как и общее решение (21.3) соответствующего ЛОДУ, заменяя произвольные постоянные некоторыми (подлежащими определению) непрерывно дифференцируемыми функциями $C_i = C_i(x)$, $x \in (a, b)$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. положим

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x). \qquad (21.5)$$

Для определения функций $C_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, получаем алгебраическую систему для $C'_1(x), \ldots, C'_n(x)$ следующего вида:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + \ldots + C'_n(x)y_n(x) = 0, \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + \ldots + C'_n(x)y'_n(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{21.6}$$

Эту систему можно записать компактно в виде

$$(W(x))\,\mathrm{colon}\,(C'_1(x), \ldots, C'_n(x)) = \mathrm{colon}\,(0, \ldots, 0, f(x)), \tag{21.6$'$}$$

где $(W(x))$ — матрица определителя Вронского ФСР $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, который отличен от нуля, если $x \in (a, b)$. Поэтому система (21.6) имеет единственное решение

$$C'_1(x) = \varphi_1(x), \quad C'_2(x) = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad C'_n(x) = \varphi_n(x).$$

Отсюда находим

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1, \quad \ldots, \quad C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + C_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, а знак интеграла означает фиксированную первообразную. Тогда, учитывая формулу (21.5), получаем *общее решение* линейного неоднородного уравнения (21.1):

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)\,dx.$$

Используя формулы Крамера для решений $\varphi_i(x)$ системы (21.6), частное решение уравнения (21.1) можно записать в виде

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int W^{-1}(x)W_{ni}(x)f(x)\,dx,$$

где $W_{ni}(x)$ — алгебраическое дополнение элемента $y_i^{(n-1)}$ в $W(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Отсюда следует, что *линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \tag{21.7}$$

при любой неоднородности $f \in C(a,b)$ *интегрируемо в квадратурах* на $(a,b)$, так как соответствующее ЛОДУ разрешимо в элементарных функциях.

**Контрольные вопросы**

**1.** Пусть для ЛНДУ второго порядка с непрерывными коэффициентами и неоднородностью $f(x)=x^2$ известны два частных решения $y_1(x)=x^2+1$ и $y_2(x)=$ $=x+1$ соответствующего ЛОДУ. Проинтегрировать это ЛНДУ.

**2.** Пусть для ЛНДУ второго порядка известны три частных решения $y_1(x)=$ $=x^2$, $y_2(x)=x-1$ и $y_3(x)=1$. Найти решение этого ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=1$. Ответ обосновать.

Для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения (21.1) может быть использован **метод Коши.** Он очень эффективен при построении нескольких решений уравнения (21.1), удовлетворяющих различным начальным условиям в данный начальный момент времени $x=x_0\in(a,b)$ и при любой непрерывной на $(a,b)$ неоднородности $f(x)$.

Согласно этому методу частное решение уравнения (21.1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(x_0)=0,\quad y'(x_0)=0,\quad \dots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=0,$$

находится по **формуле Коши**

$$y^*(x)=\int\limits_{x_0}^{x}K(x,s)f(s)\,ds,\quad x\in(a,b), \tag{21.8}$$

в которой $K(x,s)$ — *функция Коши*, являющаяся при каждом фиксированном значении $s\in(a,b)$ решением соответствующего ЛОДУ, удовлетворяющим условиям

$$K(s,s)=K'(s,s)=\dots=K^{(n-2)}(s,s)=0,\quad K^{(n-1)}(s,s)=1. \tag{21.9}$$

Если $y_1(x),\dots,y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, то функция Коши $K(x,s)$ может быть найдена из формулы общего решения

$$y(x)=K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}C_i(s)y_i(x),$$

где коэффициенты $C_i(s)$, $i=1,\dots,n$, определяются так, чтобы были выполнены условия (21.9).

Предположим, что построена ФСР соответствующего ЛОДУ для уравнения (21.1), нормированная при $x = x_0$, тогда решение этого ЛНДУ (21.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (21.10)$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые действительные числа, представимо по формуле

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x) + y^*(x),$$

в которой $y^*(x)$ — частное решение уравнения (21.1) вида (21.8).

**Упражнения к методу Коши для ЛДУ с постоянными коэффициентами. 1.** Пусть $y = y(x)$ — решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Доказать, что для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $y = y(x + c)$ — также решение этого ДУ. **2.** Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — ФСР стационарного ЛОДУ, нормированная при $x = 0$. Доказать, что $y_1(x - x_0), y_2(x - x_0), \ldots, y_n(x - x_0)$ — ФСР этого уравнения, нормированная при $x = x_0$.

*В случае линейного неоднородного уравнения (21.7) с постоянными коэффициентами* $a_i, i = 1, \ldots, n$, *реализация метода Коши упрощается.* В этом случае **функция Коши** $K(x)$ уравнения (21.7) является решением задачи Коши

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1,$$

**формула Коши (21.8)** принимает вид

$$y^*(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x - s) f(s)\, ds, \qquad (21.11)$$

а *решение уравнения* (21.7), *удовлетворяющее начальным условиям* (21.10), допускает представление

$$y = y_0 y_1(x - x_0) + y_0' y_2(x - x_0) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x - x_0) + y^*(x), \qquad (21.12)$$

в котором $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего для (21.7) однородного уравнения, нормированная при $x = 0$, а $y^*(x)$ — частное решение уравнения (21.7), построенное по формуле Коши (21.11).

**В задачах 21.1–21.12 найти общие решения уравнений методом вариации произвольных постоянных (решения рассматриваются на интервалах непрерывности коэффициентов и неоднородности).**

**21.1.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x+1}.$

Решение. Построим общее решение $y_{oo}(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, характеристическое уравнение которого $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2, и, следовательно, $y_{oo}(x) = C_1e^x + C_2xe^x$. По методу Лагранжа *общее решение* неоднородного уравнения строим в виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$, где функции $C_i(x)$, $i = 1, 2$, определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x+1}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_1'(x) = -\frac{x}{x+1}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Интегрируя, имеем

$$C_1(x) = -x + \ln|x+1| + C_1, \quad C_2(x) = \ln|x+1| + C_2,$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Наконец, подставляя эти значения в формулу для $y$, получаем *общее решение* исходного уравнения

$$y = (-x + \ln|x+1| + C_1)e^x + (\ln|x+1| + C_2)xe^x =$$
$$= C_1e^x + \tilde{C}_2xe^x + xe^x\ln|x+1| + e^x\ln|x+1|,$$

где $\tilde{C}_2 = C_2 - 1$. □

**21.2.** $y''' + y' = \cos x/\sin^2 x.$

Решение. Построим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''' + y' = 0$, получаем $y_{oo} = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$, где функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $C_3(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0, \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0, \\ -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}. \end{cases}$$

Решим эту алгебраическую систему относительно $C_i'(x)$, получим

$$C_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad C_2'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}, \quad C_3'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Интегрируя последние уравнения, находим

$$C_1(x) = -(\sin x)^{-1} + C_1, \quad C_2(x) = x + \operatorname{ctg} x + C_2, \quad C_3(x) = -\ln|\sin x| + C_3.$$

Следовательно, *общее решение* исходного уравнения определяется по формуле

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - (\sin x)^{-1} + (x + \operatorname{ctg} x)\cos x - \sin x \ln|\sin x| =$$

$$= C_1 + C_2\cos x + \tilde{C}_3\sin x - (\sin x)^{-1} + x\cos x - \sin x\ln|\sin x|,$$

где $\tilde{C}_3 = C_3 + 1$. □

**21.3.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{x^2}{x+1}$. (Дополнительная информация: $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ образуют ФСР соответствующего однородного уравнения).

Решение. Общее решение однородного уравнения: $y_{оо} = C_1x + C_2x^2$. Общее решение неоднородного уравнения, согласно методу Лагранжа, ищем в виде $y = C_1(x)x + C_2(x)x^2$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x^2 = 0, \\ C_1'(x) + 2C_2'(x)x = \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

(заметим, что в последнем уравнении системы (21.6) в качестве функции $f(x)$ нужно взять неоднородность заданного уравнения, записанного в стандартной форме, т. е. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} : x^2 = \dfrac{1}{x+1}$).

Решая построенную алгебраическую относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ систему, получаем

$$C_1'(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x(x+1)},$$

откуда

$$C_1(x) = -\ln|x+1| + C_1, \quad C_2(x) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C_2,$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Следовательно, *общее решение* исходного уравнения есть

$$y = C_1x + C_2x^2 - x\ln|x+1| + x^2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|. \quad □$$

**21.4.** $y'' + y = 2\sec^3 x$.

**21.5.** $y''' + y'' = \dfrac{x-2}{x^3}$.

**21.6.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = \dfrac{e^x}{x}$.

**21.7.** $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

**21.8.** $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \cos x}$.

**21.9.** $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

**21.10.** $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.

**21.11.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

**21.12.** $y''+\dfrac{2}{x}y'-y = 4e^x$ (для соответствующего однородного уравнения известны частные решения $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$ и $y_2 = \dfrac{e^{-x}}{x}$).

**В задачах 21.13 и 21.14 найти решения, удовлетворяющие поставленным начальным условиям.**

**21.13.** $y'' - 2y' + y = e^x\sqrt{x} + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**21.14.** $y'' - y = \operatorname{th} x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

**21.15.** Показать, что функция $y = \int_{x_0}^{x} k(x-s)f(s)\,ds$ есть решение задачи Коши $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, если $y = k(x)$ — решение начальной задачи $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$.

**В задачах 21.16–21.20, где $f(x)$ — непрерывная на интервале $(a, b)$ функция, найти решения уравнений, удовлетворяющие поставленным начальным условиям, методом Коши.**

**21.16.** $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$. Выделить решения, удовлетворяющие начальным условиям: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; **б)** $y(2) = 1$, $y'(2) = 3$; **в)** $y(-2) = 0$, $y'(-2) = 4$; **г)** $y(3) = 2$, $y'(3) = 1$.

Р е ш е н и е. Общее решение линейного однородного уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$ имеет вид $y_{\text{оо}}(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. Построим его фундаментальную систему решений, нормированную при $x = 0$. Для этого найдём решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$1)\ y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0 \text{ и } 2)\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

Из уравнений $y_{\text{оо}} = C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$, $y'_{\text{оо}} = 3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}$ получаем условия для определения $C_i$, $i = 1, 2$, в представлении решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$1)\ \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 3C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4},\quad C_2 = \frac{3}{4};\qquad 2)\ \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4},\quad C_2 = -\frac{1}{4}.$$

Тогда $y_1(x) = \dfrac{1}{4}e^{3x} + \dfrac{3}{4}e^{-x}$, $y_2(x) = \dfrac{1}{4}e^{3x} - \dfrac{1}{4}e^{-x}$, а функция Коши $K(x)$, удовлетворяющая начальному условию $K(0) = 0$, $K'(0) = 1$, совпадает с решением $y_2(x)$, и, следовательно, $K(x) = \dfrac{1}{4}e^{3x}-\dfrac{1}{4}e^{-x}$. Применяя формулу Коши (21.11), получаем частное решение $y^*(x)$ неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями $y^*(x_0)=0$, $y'^*(x_0)=0$ в следующем виде:

$$y^*(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{1}{4}e^{3(x-\tau)}-\frac{1}{4}e^{-(x-\tau)}\right]e^{4\tau}\,d\tau=\frac{1}{5}e^{4x}-\frac{1}{4}e^{3x+x_0}+\frac{1}{20}e^{-x+5x_0}.$$

Тогда решение $y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, определяется по формуле (21.12)

$$y=y_0y_1(x-x_0)+y_0'y_2(x-x_0)+y^*(x).$$

Применим эту формулу для построения **частного решения**, например, в случае **б)**, когда $x_0=2$, $y_0=1$, $y_0'=3$. Получим

$$y=1\left[\frac{1}{4}e^{3(x-2)}+\frac{3}{4}e^{-(x-2)}\right]+3\left[\frac{1}{3}e^{3(x-2)}-\frac{1}{4}e^{-(x-2)}\right]+\frac{1}{5}e^{4x}-$$
$$-\frac{1}{4}e^{3x+2}+\frac{1}{20}e^{-x+10}=e^{3x}\left(e^{-6}-\frac{1}{4}e^{2}\right)+e^{-x}\frac{e^{10}}{20}+\frac{1}{5}e^{4x}.$$

Закончить построение в оставшихся случаях теперь не представляет трудности. □

**21.17.** $y''+\omega^2y=f(x)$, где $\omega=\mathrm{const}>0$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, $x_0\in(a,b)$.

Р е ш е н и е. Решим уравнение $y''+\omega^2y=0$. Имеем $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$. Построим фундаментальную систему решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ этого уравнения, нормированную при $x=0$. Для этого решим две начальные задачи с начальными условиями 1) $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$ и 2) $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$. Подставляя в $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$, $y'=-\omega C_1\sin\omega x+\omega C_2\cos\omega x$ начальные данные, получаем уравнения

$$1)\ \begin{cases}1=C_1,\\0=\omega C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\C_2=0;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}0=C_1,\\1=\omega C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0,\\C_2=1/\omega.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $y_1(x)=\cos\omega x$, $y_2(x)=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega x$.

Функция Коши как решение $y=y(x)$ однородного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$, $y'(0)=1$, совпадает с построенным решением $y_2(x)$ и, следовательно, $K(x)=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega x$. Применяя теперь формулу Коши (21.11), получаем частное решение неоднородного уравнения

$$y^*(x)=\frac{1}{\omega}\int\limits_{x_0}^{x}\sin\omega(x-s)f(s)\,ds,$$

а искомое решение заданной начальной задачи при $x\in(a,b)$ примет вид (см. (21.12)):

$$y=y_0\cos\omega(x-x_0)+\frac{1}{\omega}y_0'\sin\omega(x-x_0)+\frac{1}{\omega}\int\limits_{x_0}^{x}\sin\omega(x-s)f(s)\,ds.$$ □

**21.18.** $y'' - y = f(x)$; $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $x_0 \in (a, b)$.

**21.19.** $y''' + y'' = f(x)$; $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, $x_0 \in (a, b)$.

**21.20.** $y'' - \omega^2 y = f(x)$; $\omega > 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $x_0 \in (a, b)$.

**Задания для самостоятельной работы**

**1.** Дано уравнение

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

где $f(x)$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, $|f(x)| \leqslant m < +\infty$. Пусть корни характеристического уравнения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2$. Доказать, что существует единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение заданного ДУ.

**2.** Доказать, что все решения ДУ $y'' + ay' + by = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная исчезающая на $+\infty$ функция, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, а корни характеристического уравнения удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2$, стремятся к нулю при $x \to +\infty$.

**3.** Решить методом вариации произвольных постоянных уравнение $y'' + y = f(x)$, где $f \in C(\mathbb{R}_+)$. Доказать, что все решения уравнения ограничены на $\mathbb{R}_+$, если выполнено условие

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

**4.** Доказать, что уравнение

$$y'' = q(x)y + f(x),$$

в котором $q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, $|f(x)| \leqslant M$, $a \leqslant q(x) \leqslant b$, $0 < a < b$, имеет единственное решение, ограниченное на $\mathbb{R}$. Доказать, что если $q(x) = c^2 = \mathrm{const} \neq 0$, то это решение задаётся формулой

$$y(x) = -\frac{1}{2c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-\tau|} f(\tau)\, d\tau.$$

**Мини-самоконтроль. 1.** Методом вариации произвольных постоянных решить ДУ: **а)** $y'' + y' = \dfrac{x+1}{x}$; **б)** $y'' + y = \sec x$. **2.** Решить задачу Коши: $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. **3.** Найти решения начальных задач методом Коши: $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; **б)** $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

# § 22. Линейные неоднородные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

*Специальная правая часть — комплексные и действительные квазиполиномы. Контрольное число правой части. Нерезонансный случай. Резонанс $k$-го порядка. Структура частного решения. Метод Эйлера (метод неопределённых коэффициентов). Применение тригонометрических рядов к нахождению частного решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами и периодической неоднородностью.*

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{22.1}$$

с непрерывной на $(a, b)$ функцией $f(x)$, $a_j = \text{const}$, $a_j \in \mathbb{R}$ (или $a_j \in \mathbb{C}$), $j = 1, \ldots, n$.

Так как фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами может быть найдена в виде элементарных функций, то для построения общего решения неоднородного уравнения (22.1) достаточно построить частное решение этого уравнения.

В предыдущем параграфе мы показали, что *методом вариации произвольных постоянных* (*методом Лагранжа*) или *методом Коши* частное решение можно построить при помощи квадратур.

Если правая часть уравнения (22.1) является *квазиполиномом,* то частное решение этого уравнения (22.1) может быть построено **методом неопределённых коэффициентов (методом Эйлера).**

*Рассмотрим простейшие квазиполиномы и правила построения частных решений:*

**I.** *Комплексный квазиполином*

$$f(x) = P_m(x) e^{\sigma x}, \tag{22.2}$$

в котором число $\sigma$ и коэффициенты полинома $P_m(x)$ степени $m$, как и коэффициенты уравнения $a_j$, $j = 1, \ldots, n$, могут быть комплексными.

Число $\sigma$ называется *контрольным числом правой части уравнения* (22.1) *с неоднородностью* (22.2).

**Правило I.** *Пусть контрольное число* $\sigma$ *является корнем характеристического уравнения для ДУ* $L(y) = 0$ *кратности* $k$ (если $\sigma$

не является корнем характеристического уравнения, то считаем $k=0$). *Тогда уравнение* (22.1) *с неоднородностью* $f(x)$ *вида* (22.2) *имеет единственное частное решение вида*

$$y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\sigma x}, \tag{22.3}$$

в котором коэффициенты полинома $Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots$ $\ldots + q_{m-1}x + q_m$ могут быть найдены *методом неопределённых коэффициентов.*

Если $k > 0$, то говорят, что *имеет место резонанс* (*кратности* $k$ [29, с. 141]). Случай $k = 0$ называется *нерезонансным.*

**II.** *Действительный квазиполином*

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x], \tag{22.4}$$

где числа $\alpha, \beta$ и коэффициенты полиномов $P_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$ соответственно степеней $m_1$ и $m_2$ — действительные.

В дальнейшем предполагается, что коэффициенты уравнения тоже действительные.

Число $\sigma = \alpha + \beta i$ называется *контрольным числом правой части уравнения* (22.1) с $f(x)$ вида (22.4).

**Правило II.** Пусть *контрольное число* $\sigma = \alpha + \beta i$ *является характеристическим числом кратности* $k > 0$ (если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения для $L(y) = 0$, то полагаем $k = 0$, этот случай называется *нерезонансным*; в случае $k > 0$ имеет место *резонанс кратности* $k$). *Тогда уравнение* (22.1), (22.4) *имеет единственное решение вида*

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x], \tag{22.5}$$

где $R_m(x)$, $S_m(x)$ — полиномы степени $m$ общего вида; $m = \max(m_1, m_2)$. Заметим, что *частное решение ищется в развёрнутом виде* (22.5), если даже один из полиномов в представлении (22.4) тождественно равен нулю.

*Для того чтобы найти коэффициенты полиномов* $Q_m(x)$, $R_m(x)$ *и* $S_m(x)$, *надо подставить решения указанного вида с неопределёнными коэффициентами в ДУ* (22.1) *и приравнять коэффициенты при одинаковых линейно независимых функциях справа и слева уравнения.*

Указанный метод неопределённых коэффициентов можно применять к уравнению (22.1) $(a_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n)$ с неоднородностью — *действительным квазиполиномом общего вида*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} P_{n_k} e^{\sigma_k x} + \sum_{j=1}^{q} e^{\alpha_j x}(R_{m_j}(x) \cos \beta_j x + Q_{l_j}(x) \sin \beta_j x),$$

используя *принцип суперпозиции,* согласно которому можно сначала найти частные решения $y_l^*(x)$ вспомогательных уравнений $L(y) = f_l(x),\ l = 1, 2, \ldots, p+q,$ где $f_l$ — простейший квазиполином вида (22.2) или (22.4), входящий в функцию $f(x)$, а затем построить частное решение уравнения (22.1) по формуле

$$y^*(x) = \sum_{l=1}^{p+q} y_l^*(x).$$

Иногда значительно упрощает и сокращает выкладки, связанные с нахождением частных решений ЛНДУ с неоднородностью вида (22.4), *переход от действительного квазиполинома к комплексному квазиполиному.*

В некоторых случаях полезно использовать *представления*

$$q_1(x) \equiv P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x = \operatorname{Re} P_m(x) e^{(\alpha + \beta i)x},$$

$$q_2(x) \equiv P_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x = \operatorname{Im} P_m(x) e^{(\alpha + \beta i)x},$$

из которых следует, что если $y^*(x)$ — частное решение уравнения $L(y) = P_m(x) e^{(\alpha+\beta i)x}$, то $y_1^*(x) = \operatorname{Re} y^*(x)$ — частное решение уравнения $L(y) = q_1(x)$, а $y_2^*(x) = \operatorname{Im} y^*(x)$ — частное решение уравнения $L(y) = q_2(x)$.

**22.1.** Найти контрольное число $\sigma$ правой части уравнения $L(y) = f(x)$, если:

**I. а)** $f(x) = x^3 + 1$; **б)** $f(x) = 5$; **в)** $f(x) = (x^2+1)e^x$; **г)** $f(x) = e^{ix}$.

Решение. Все функции $f(x)$ в предложенных примерах имеют специальный вид (22.2). Сравнивая их с квазиполиномом (22.2), имеем:

**а)** $\sigma = 0$ (при этом $m = 3$); **б)** $\sigma = 0$ $(m = 0)$; **в)** $\sigma = 1$ $(m = 2)$; **г)** $\sigma = i$ $(m = 0)$;

**II. д)** $f(x) = \cos x + x^2 \sin x$; **е)** $f(x) = e^{2x} \sin x$; **ж)** $f(x) = e^x(\sin x + x \cos x)$.

Правая часть уравнения в случаях **д)–ж)** имеет специальный вид (22.4), тогда **д)** $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \sigma = \alpha + \beta i = i\ \ (m = 2)$; **е)** $\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \sigma = \alpha + \beta i = 2 + i$ $(m = 0)$; **ж)** $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \sigma = \alpha + \beta i = 1 + i\ \ (m = 1)$. □

**Найти действительное общее решение неоднородных уравнений 22.2–22.18 со специальной правой частью, используя метод неопределённых коэффициентов (метод Эйлера) для построения частного решения.**

**22.2.** $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$. Поэтому общее решение линейного однородного уравнения имеет вид $y_{\text{оо}} = C_1e^x + C_2xe^x$. Правая часть данного уравнения $f(x) = e^{2x}$ — квазиполином вида (22.2), для которого $\sigma = 2 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$, т. е. имеет место *нерезонансный случай*, $k = 0$, а полином, равный 1, степени 0, т. е. $m = 0$. По **правилу I** частное решение строим в виде $y^*(x) = Q_0(x)e^{2x}$, где $Q_0(x)$ — полином степени 0, т. е. $y^*(x) = ae^{2x}$. Подставим $y = y^*(x)$ в данное уравнение, получим $4ae^{2x} - 4ae^{2x} + ae^{2x} = e^{2x}$, откуда $a = 1$ и $y^* = e^{2x}$. Тогда *общее решение* исходного уравнения есть

$$y = y_{\text{оо}}(x) + y^*(x) = C_1e^x + C_2xe^x + e^{2x}.$$ □

**22.3.** $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda_{1,2} = 2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения определяется по формуле $y_{\text{оо}} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = e^{2x}$ — квазиполином вида (22.2), для которого $\sigma = 2$, $m = 0$. Контрольное число $\sigma = 2$ — корень характеристического уравнения кратности 2, поэтому $k = 2$, т. е. имеет место *резонанс кратности* 2, и частное решение по формуле (22.3) имеет вид $y^*(x) = x^2Q_0(x)e^{2x}$, т. е. $y^*(x) = ax^2e^{2x}$. Подставив $y^*(x)$ в исходное уравнение, получим

$$(4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x} - 4(2ax + 2ax^2)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 2e^{2x},$$

откуда $2ae^{2x} = 2e^{2x}$ и $a = 1$. Отсюда следует, что $y^*(x) = x^2e^{2x}$, а *общее решение* неоднородного уравнения определяется по формуле

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x}.$$ □

**22.4.** $y'' + y' = 3x^2 + 1 + 2e^x$.

Решение. Решение уравнения начнём, как всегда, с построения общего решения соответствующего линейного однородного уравнения. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ и $y_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^{-x}$.

Правая часть данного уравнения есть сумма *двух простейших квазиполиномов* $f_1(x) = 3x^2 + 1$ и $f_2(x) = 2e^x$. Находим частные решения $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ соответственно уравнений $y'' + y' = 3x^2 + 1$ и $y'' + y' = 2e^x$:

1) $y'' + y' = 3x^2 + 1$, для этого уравнения *имеет место резонанс кратности* 1, так как контрольное число правой части $\sigma = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$, полином степени $m = 2$, поэтому частное решение по методу Эйлера имеет вид $y_1^* = x(ax^2 + bx + c) \equiv ax^3 + bx^2 + cx$, после подстановки которого в уравнение имеем $6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = 3x^2 + 1$, откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ справа и слева, получаем $3a = 3$, $6a + 2b = 0$, $2b + c = 1$, т. е. $a = 1$, $b = -3$, $c = 7$ и $y_1^*(x) = x(x^2 - 3x + 7)$;

2) $y'' + y' = 2e^x$, *случай нерезонансный*, так как контрольное число правой части $\sigma = 1$ не является характеристическим числом, т. е. $k = 0$, степень полинома $m = 0$ и частное решение по правилу I имеет вид $y_2^*(x) = de^x$, после подстановки которого в уравнение получаем $2de^x = 2e^x$, откуда $d = 1$ и $y_2^* = e^x$.

Тогда согласно *принципу суперпозиции* частное решение $y^*(x)$ исходного неоднородного уравнения есть сумма построенных частных решений двух ЛНДУ с неоднородностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = x(x^2 - 3x + 7) + e^x.$$

*Общее решение* этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + x(x^2 - 3x + 7) + e^x.$$

*Заметим, что построение частного решения можно проводить сразу по формуле* $y^* = x(ax^2 + bx + c) + de^x$. □

**22.5.** $y'' - 5y' + 6y = 5\cos x + 10\sin x$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения, имеющего характеристические числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, строится по формуле $y_{\text{оо}}(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Правая часть уравнения $f(x) = 5\cos x + 10\sin x$ имеет специальный вид (22.4), $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m = 0$. Отсюда следует, что контрольное число правой части $\sigma = i$. Рассматриваемый случай — *нерезонансный*, так как контрольное число $\sigma = i$ не является корнем характеристического уравнения, т. е. $k = 0$, а частное решение уравнения **по правилу II** строится по формуле (22.5) $y^*(x) = a\cos x + b\sin x$. Подставив $y^*(x)$ в данное уравнение, получим тождество $(5b - 5a)\cos x + (5a + 5b)\sin x = 5\cos x + 10\sin x$. В силу линейной независимости функций $\cos x$ и $\sin x$ приравняем коэффициенты слева и справа при этих функциях, получаем систему для определения неопределённых коэффициентов $a$ и $b$:

$$5a + 5b = 5, \quad 5a - 5b = 10,$$

откуда $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ и $y^*(x) = \dfrac{3}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x$.

*Общее решение* исходного ДУ имеет вид

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$ □

**22.6.** $y'' + y = x\cos x$.

Р е ш е н и е. Общее решение соответствующего однородного уравнения — $y_{\text{оо}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, так как его характеристические числа есть $\lambda_{1,2} = \pm i$. Контрольное число $\sigma = i$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$ (*резонанс кратности* 1), $m = 1$, и частное решение имеет вид

$$y^*(x) = x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x].$$

Нахождение неопределённых коэффициентов требует здесь громоздких вычислений. Целесообразнее заметить, что $f(x) = x\cos x = \operatorname{Re}(xe^{ix})$ и, следовательно, частное решение исходного уравнения $y^*(x) = \operatorname{Re}\tilde{y}^*(x)$, где $\tilde{y}^*(x)$ — частное решение уравнения $y'' + y = xe^{ix}$. По правилу I (имеем *резонанс*, $k = 1$) решение $\tilde{y}^*$ ищем в виде $\tilde{y}^* = x(Ax+B)e^{ix} = (Ax^2+Bx)e^{ix}$. После подстановки $\tilde{y}^*$ в уравнение $y'' + y = xe^{ix}$ получаем $[2A + 4Aix + 2Bi]e^{ix} = xe^{ix}$. Откуда следует, что $4Ai = 1$, $2A + 2iB = 0$, и, следовательно, $A = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$. Тогда

$$y^*(x) = \operatorname{Re}\tilde{y}^*(x) = \operatorname{Re}\left[\left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^{ix}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)(\cos x + i\sin x)\right] = \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x.$$

Поэтому *общее решение* данного уравнения имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x. \qquad \square$$

**22.7.** $y'' + 2y' + 2y = 5xe^x$.

**22.8.** $y'' + y' = 2$.

**22.9.** $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + 2e^{2x}$.

**22.10.** $y^{(4)} - y = 4e^{-x}$.

**22.11.** $y''' + y'' = x + 1$.

**22.12.** $y'' - 2y' - 3y = \sin x$.

**22.13.** $y'' + 4y = \sin x + \cos 2x$.

**22.14.** $y''' + y' = 1 + \sin x$.

**22.15.** $y'' + 4y' + 5y = e^x(\sin x + 2\cos x)$.

**22.16.** $y^{(4)} - y = \cos x$.

**22.17.** $y''' - 2y'' + y' = x + 1 + 2\sin x$.

**22.18.** $y'' + y = x\sin x$.

**В задачах 22.19–22.33 указать вид частного решения с неопределёнными коэффициентами (их не находить).**

**22.19.** $y'' - 2y' + 2y = e^x x\cos x$.

Р е ш е н и е. Найдём корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, получаем $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Неоднородность уравнения $f(x) = e^x x\cos x$ — квазиполином вида (22.4), для которого $\alpha = 1, \beta = 1$, контрольное число $\sigma = 1 + i$ — корень характеристического уравнения кратности $k = 1$, полином $x$ степени $m = 1$. Отсюда следует, что *частное решение* $y^*(x)$ ДУ имеет вид

$$y^*(x) = xe^x((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x). \qquad \square$$

**22.20.** $y^{(7)} + 2y'' - 3y = x^2e^x + 1.$

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ — $\lambda^7 + 2\lambda^2 - 3 = 0$. Разрешить это уравнение не представляется возможным. Однако для ответа на поставленный вопрос решать это алгебраическое уравнение не обязательно. Правая часть есть сумма двух квазиполиномов $f_1(x) = x^2e^x$ и $f_2(x) = 1$. Проверим, являются ли контрольные числа $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 0$ соответственно для квазиполиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ корнями характеристического уравнения $P(\lambda) \equiv \equiv \lambda^7 + 2\lambda^2 - 3 = 0$.

Для $\sigma_1 = 1$ имеем $P(1) = 0$, но производная $P'(\lambda) = 7\lambda^6 + 4\lambda$ при $\lambda=1$ не равна нулю, следовательно, число $\lambda_1 = 1$ является однократным корнем характеристического уравнения. Это означает, что для первого квазиполинома имеет место *резонанс кратности* 1. Согласно правилу I частное решение ЛНДУ с неоднородностью $f_1(x) = x^2e^x$ имеет вид $y_1^*(x) = x(ax^2 + bx + c)e^x$.

Для $\sigma_2 = 0$ имеем *нерезонансный случай*, так как $P(0) \neq 0$. Тогда частное решение ЛНДУ для неоднородности $f_2(x) = 1$ ищем в виде $y_2^*(x) = A$.

Отсюда в силу принципа суперпозиции следует, что *частное решение* для исходного ДУ имеет вид

$$y^*(x) = x(ax^2 + bx + c)e^x + A. \qquad \square$$

**22.21.** $y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x + xe^{-x} \sin x.$

**22.22.** $y''' + 4y'' + 4y' = x^2 + 1 + e^{-2x} \cos x.$

**22.23.** $y''' - 2y'' + 5y' = x \sin 2x + e^x \cos 2x.$

**22.24.** $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' + 2y = x \cos x + \sin x.$

**22.25.** $y'' - \omega_1^2 y = xe^{\omega_2 x}.$

**22.26.** $y'' + \omega_1^2 y = \sin \omega_2 x,\ \ \omega_i > 0,\ \ i = 1, 2.$

**22.27.** $y'' + \omega_1^2 y = x \sin \omega_2 x + 2 \cos \omega_3 x$, где параметры $\omega_i$ — положительны и попарно различны: $\omega_i \neq \omega_j,\ \ i \neq j,\ \ i, j = \overline{1, 3}.$

**22.28.** $y''' + y' = x^2 + x \sin x.$ **22.29.** $y^{(4)} + y = x \cos x + \sin 2x.$

**22.30.** $y^{(4)} - y' = x + e^x.$ **22.31.** $y^{(5)} - y = x \sin x + \cos 2x.$

**22.32.** $y'' - y = \sin^4 x.$ **22.33.** $y'' - y = 4 \operatorname{sh} x + x^2 \operatorname{ch} x.$

**В задачах 22.34–22.37 найти решения предложенных начальных задач.**

**22.34.** $y'' + y = \sin 2x;\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 1.$

**22.35.** $y'' - 2y' + y = e^x;\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

**22.36.** $y''' - y' = e^x;\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 3,\ \ y''(0) = 1.$

**22.37.** $y^{(5)} - y' = 30\sin 2x,\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0.$

**22.38.** Найти периодические решения ДУ $y'' + y = \sin^4 x$. Указать наименьший период этих решений.

**22.39.** При каких значениях параметров $k$ и $w$ дифференциальное уравнение $y'' + k^2 y = \sin \omega x$ : **а)** имеет хотя бы одно периодическое решение; **б)** все его решения являются периодическими?

**22.40.** ДУ колебаний материальной точки массой $m$ (см. задачи § 20) под действием вынуждающей внешней силы $f(t)$ имеет вид $m\ddot{x} + kx = f(t)$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)/k$, $\omega^2 = k/m$, $\omega > 0$. Рассмотреть случай $f(t) = M\sin\omega_1 t$. Построить общее решение этого ДУ в нерезонансном и резонансном случаях. Найти амплитуду *вынужденного колебания* (т. е. колебания, вызванного внешней периодической силой) в нерезонансном случае и исследовать её поведение при стремлении частоты колебания внешней периодической силы $\omega_1$ к частоте свободных колебаний $\omega$ $(\omega_1 \to \omega)$. Изучить поведение амплитуды вынужденного колебания при $t \to +\infty$ в случае резонанса $(\omega_1 = \omega)$.

**22.41.** Определить закон движения материальной точки массой $m$ под действием силы, притягивающей точку к неподвижному центру $O$ и прямо пропорциональной (с коэффициентом пропорциональности $k$) удалению $x$ частицы от центра притяжения $O$, силы сопротивления $hv$, пропорциональной скорости движения, и внешней силы $f(t) = M\sin wt$ в случае, если сопротивление мало: $0 < h^2 < 4km$.

Показать, что при любых начальных условиях движение будет приближаться к периодическому и найти это периодическое (*вынужденное*) движение.

**Ряды Фурье и периодические решения.** Рассмотрим для колебательных систем общий случай внешней периодической силы $f(t)$. Если $f(t)$ — непрерывная $2\pi$-периодическая функция, то для неё можно построить тригонометрический *ряд Фурье*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{22.6}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad (22.7)$$

Если $f(t)$ — $2l$-периодическая ($l \neq \pi$) непрерывная функция, то для построения ряда Фурье этой функции в формулах (22.6) и (22.7) нужно заменить $\pi$ на $l$ и аргументы гармоник $nt$ на $n\pi t/l$.

Рассмотрим ЛНДУ

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad \omega > 0, \qquad (22.8)$$

с непрерывной $2\pi$-периодической функцией $f(t)$.

Согласно *методу Фурье* частное $2\pi$-периодическое решение $x^*(t)$ будем строить методом неопределённых коэффициентов в виде

$$x^*(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt). \qquad (22.9)$$

Подставим (22.9) в (22.8), в котором функция $f(t)$ представима рядом Фурье (22.6), и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках слева и справа. Если число $w$ не является целым, то полученная алгебраическая система для определения искомых коэффициентов $A_0$, $A_n$ и $B_n$, $n = 1, 2, \dots$, однозначно их определяет*. Отсюда следует, что в этом случае ДУ *имеет $2\pi$-периодическое частное решение.* Этот случай называется *нерезонансным.*

**Контрольный вопрос.** Имеет ли ДУ (22.8) в нерезонансном случае другие периодические решения?

В *резонансном случае*, если имеет место равенство $\omega = m \in \mathbb{N}$, то коэффициенты $A_0$, $A_n$ и $B_n$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq m$, определяются, как и выше, однозначно. Если же $n = m$, то решение алгебраической системы будет существовать только при выполнении условия $a_m = b_m = 0$, причём коэффициенты $A_m$ и $B_m$ можно взять любыми: $A_m = C_1$, $B_m = C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Отсюда следует, что в этом случае *все решения* ДУ являются *$2\pi$-периодическими функциями.*

---

*Известно (см., например, [1, с. 214]), что построенный ряд (22.9) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и допускает почленное дифференцирование 2 раза.

Если же $|a_m| + |b_m| \neq 0$, то ДУ *не имеет $2\pi$-периодических решений.*

**Замечание.** *Метод Фурье* можно применять также для ЛНДУ $y'' + py' + qy = f(x)$ с $T$-периодической функцией $f(x)$, $f(x+T) = f(x)$; $p, q$ — постоянные.

**В задачах 22.42–22.50 построить методом Фурье периодические решения, если они существуют, или обосновать их отсутствие.**

**22.42.** $\ddot{x} + x = |\cos t|$.

Решение. Неоднородность ДУ $|\cos t|$ — непрерывная $\pi$-периодическая ($2l = \pi$) чётная функция, поэтому её ряд Фурье содержит только косинусы вида $\cos 2nt$, т. е.

$$|\cos t| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt,$$

где коэффициенты $a_n$ вычисляются по аналогичным (22.7) формулам, полагая $l = \pi/2$, и равны

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cos 2nt \, dt = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Следовательно, справедливо представление

$$|\cos t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt.$$

В данном примере $w = 1$ — целое число, однако в разложении $|\cos t|$ в ряд Фурье отсутствует резонирующий член $a_1 \cos t + b_1 \sin t$, что гарантирует существование $\pi$-периодического решения исходного ДУ.

Учитывая левую часть ДУ и разложение в ряд Фурье функции $|\cos t|$, очевидно, что искомое частное решение $x^*(t)$ нужно строить в виде

$$x^*(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2nt. \tag{22.10}$$

Подставив решение (22.10) в данное ДУ, приходим к тождеству

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1-4n^2) A_n \cos 2nt \equiv \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках слева и справа, получаем бесконечную алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов $A_n$:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2}{\pi}, \quad (1-4n^2)A_n = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Разрешая эту систему, находим искомые коэффициенты

$$A_0 = \frac{4}{\pi}, \quad A_n = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда следует *искомое π-периодическое решение*

$$x^*(t) = \frac{4}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}\cos 2nt\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из представления общего решения $x = C_1\cos t + C_2\sin t + x^*(t)$ исходного ДУ видно, что $x = x^*(t)$ — единственное решение ДУ с периодом $\pi$, все остальные решения $(|C_1| + |C_2| \neq 0)$ являются периодическими с периодом $2\pi$. □

**22.43.** $y'' - y = \left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

**22.44.** $y'' + y' + y = |\sin x|$.

**22.45.** $y'' + y = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$.

**22.46.** $y'' + 4y = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

**22.47.** $y'' + y = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k^2}$.

**22.48.** $y'' + 4y = \cos^2 x$.

**22.49.** $y'' - y = f(x)$; $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$, $f(x+\pi) = f(x)$.

**22.50.** $y'' + 4y = f(x)$; $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

## Задания для самостоятельной работы

Исследовать вопрос о существовании периодических решений уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, $f(x+2\pi) = f(x)$, в следующих случаях:

**а)** $q = 0$: выяснить, при каком условии ДУ имеет периодические решения;

**б)** $q \neq 0$: выяснить при каких условиях ДУ имеет единственное $2\pi$-периодическое решение; не имеет периодических решений; каждое его решение — $2\pi$-периодическая функция.

Решить аналогичную задачу для $\omega$-периодической функции $f(x)$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Построить общее решение ДУ методом Эйлера: **а)** $y'' - y = e^{2x}$; **б)** $y'' - y = e^x$; **в)** $y''' + y' = 1$; **г)** $y'' - y = \cos x + 2\sin x$; **д)** $y'' + 9y = \sin 3x$; **е)** $y'' + 4y' + 4y = e^{2x} + e^{-2x}$; **ж)** $y' + y = e^x \sin x$. **2.** Указать вид частного решения с неопределёнными коэффициентами (их не находить) следующих ДУ: **а)** $y^{(4)} - y = \sin x + xe^x$; **б)** $y'' + 6y' + 13 = x^2e^{-3x} + x\sin 2x$; **в)** $y^{(9)} + 2y^{(4)} + y''' - 2y = xe^{-x} + \sin x$. **3.** Найти периодические решения ДУ $y'' - y = |\sin x/2|$.

# § 23. Линейные уравнения, приводящиеся к стационарным линейным уравнениям

*Замены независимой переменной и искомой функции в ЛДУ. Уравнения Эйлера, Лагранжа, Чебышева. Канонический вид ЛОДУ второго порядка.*

Рассмотрим линейное однородное ДУ $n$-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \tag{23.1}$$

в котором коэффициенты $p_j(x)$ — непрерывные функции на промежутке $J = |\alpha, \beta|$, $j = 1, \ldots, n$.

Известно, что если ЛОДУ (23.1) *может быть приведено к ЛОДУ с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной,* то только по формуле вида

$$t = c\int \sqrt[n]{p_n(x)}dx, \tag{23.2}$$

но в любом случае эта замена всегда делает постоянным коэффициент при искомой функции.

Для *линейного однородного уравнения Эйлера*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0, \tag{23.3}$$

где $a_j = \mathrm{const}$, $j = 1, \ldots, n$, замена независимой переменной по формуле (23.2) принимает при $x > 0$ вид $x = e^t$ и не только делает постоянным коэффициент при искомой функции, но и все остальные коэффициенты. При $x < 0$ замена $x = -e^t$ приводит ДУ (23.3) к тому же стационарному ЛОДУ, что и при $x > 0$. Поэтому достаточно найти общее решение ДУ (23.3) при $x > 0$, а затем заменить в нём $x$ на $|x|$.

Однако *более эффективный метод интегрирования уравнения Эйлера* состоит в том, что его решение ищется в виде $y = x^\lambda$ при $x > 0$ (по аналогии с $y = e^{\lambda t}$ в стационарном ЛОДУ). Подставляя функцию $y = x^\lambda$, для которой $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$, $\ldots$, $y^{(n)} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)x^{\lambda-n}$, после сокращения на $x^\lambda$ получим *характеристическое уравнение ДУ Эйлера*

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{23.4}$$

которое, очевидно, является характеристическим уравнением того стационарного ЛОДУ, к которому приводится ДУ (23.3) с помощью замены независимой переменной $x = e^t$, и его легко восстановить по характеристическому уравнению (23.4), заменив $\lambda^m$ на $y^{(m)}$, $m = 1, \ldots, n$.

Отсюда следует, что для решения ДУ (23.3) можно *найти корни характеристического уравнения* (23.4) и по ним *построить общее решение* соответствующего стационарного ЛОДУ, в котором далее производим обратную замену $t = \ln|x|$.

С другой стороны, по корням характеристического уравнения (23.4) можно сразу строить базисные решения уравнения Эйлера (см. [1, с. 169]).

Обобщение уравнения Эйлера — *уравнение Лагранжа*

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0, \quad (23.5)$$

где $a, b, a_j$ — const, $j = 1, \ldots, n$, сводится к стационарному ЛОДУ *заменой независимой переменной* $ax + b = e^t$ при $ax + b > 0$; $ax + b = -e^t$ при $ax + b < 0$ в ДУ (23.5). Можно также вначале *сделать замену* $ax + b = t$, приводящую ДУ (23.5) к уравнению Эйлера (23.3), или, подставив $y = (ax+b)^\lambda$ в (23.5), получить его характеристическое уравнение.

*Для решения ЛНДУ Эйлера*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (23.6)$$

нужно *построить общее решение* соответствующего ЛОДУ Эйлера (23.3) любым способом, а затем *решить ДУ* (23.6) *методом Лагранжа* или *методом неопределённых коэффициентов,* если в преобразованном стационарном ЛНДУ неоднородность после замены $x = e^t$ становится квазиполиномом.

Рассмотрим более подробно общее ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad p \in C^1(J), \quad q \in C(J). \quad (23.7)$$

С помощью *линейной замены искомой функции*

$$y = \alpha(x)z, \quad z = z(x), \quad \alpha(x) = \exp\left\{-\int \frac{p(x)}{2}\,dx\right\}, \quad (23.8)$$

ДУ (23.7) приводится к *каноническому виду*

$$z'' + G(x)z = 0, \quad G(x) = q(x) - \frac{1}{2}\frac{dp(x)}{dx} - \frac{1}{4}p^2(x). \quad (23.9)$$

Функция $G(x)$ называется *инвариантом* ДУ (23.7). Если $G(x) = \text{const}$ или $G(x) = c/(ax + b)^2$, то ДУ (23.9) и, следовательно, *ДУ* (23.7) *интегрируемо в квадратурах.*

*Обнуления коэффициента* при первой производной искомой функции можно также добиться и *заменой независимой переменной*

$$t = \int e^{-\int p(x)\,dx}\,dx \;\Rightarrow\; x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{dt^2} + [\varphi'(t)]^2 q(\varphi(t))y = 0. \quad (23.10)$$

*Замена* (23.2) *независимой переменной* $t = c\int\sqrt{q(x)}\,dx$ в ДУ (23.7) делает *коэффициент* при искомой функции *постоянным.*

**В задачах 23.1–23.20 решить уравнения Эйлера.**

**23.1.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Р е ш е н и е. **I способ.** Выполним в исходном ДУ при $x > 0$ замену независимой переменной $x = e^t$. Тогда по правилу производной сложной функции имеем

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t}, \quad y''_{x^2} = (y''_{t^2}e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}.$$

Подставив эти выражения в данное ДУ, приходим к ЛОДУ с постоянными коэффициентами $y'' - 3y' + 2y = 0$. Корни его характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ — числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Общее решение стационарного ЛОДУ — $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^t$. Выполнив обратную замену $t = \ln x$, получим *общее решение* исходного ДУ

$$y = C_1x^2 + C_2x.$$

Эта формула общего решения имеет место и при $x < 0$.

**II способ.** Подставив $y = x^\lambda$ при $x > 0$ в рассматриваемое ДУ, получим после сокращения на $x^\lambda$ *характеристическое уравнение*

$$\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1,$$

т. е. ФСР данного уравнения Эйлера образуют функции $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x$. Отсюда следует его *общее решение* в виде $y = C_1x^2 + C_2x$ как при $x > 0$, так и при $x < 0$. □

**23.2.** $x^2y'' + xy' + y = 0.$

Р е ш е н и е. *Запишем сразу характеристическое уравнение ДУ Эйлера* (см. (23.4))

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = \lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = i.$$

Это уравнение будет характеристическим и для *соответствующего (полученного после замены $x = e^t$ в уравнении Эйлера) стационарного ЛОДУ.* Отсюда следует его общее решение $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$. Произведя обратную замену $t = \ln|x|$, получим *общее решение* исходного ДУ

$$y = C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x|.$$ □

**23.3.** $x^2y'' - xy' + y = 0.$

Р е ш е н и е. Поскольку характеристическое уравнение стационарного ЛОДУ, полученного с помощью замены $x = e^t$ при $x > 0$ $(x = e^{-t}$ при $x < 0)$ в данном ДУ, $\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то его общее решение $y(t) = C_1e^t + C_2te^t$. Выполнив обратную замену $t = \ln|x|$, получим *общее решение* уравнения Эйлера

$$y = C_1x + C_2x\ln|x|. \qquad \square$$

**23.4.** $(2x + 1)^2y'' + 4(2x + 1)y' + y = 0.$

Р е ш е н и е. Подставим $y = (2x + 1)^\lambda$ при $2x + 1 > 0$ в данное уравнение, получим после сокращения на $(2x + 1)^\lambda$ *характеристическое уравнение*

$$4\lambda(\lambda - 1) + 8\lambda + 1 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/2$. Тогда общее решение *соответствующего стационарного ЛОДУ* определяется по формуле $y(t) = C_1e^{-t/2} + C_2te^{-t/2}$. Учитывая замену $2x+1 = e^t$, $t = \ln(2x+1)$, получим *общее решение* уравнения Эйлера как при $x > -1/2$, так и при $x < -1/2$:

$$y = C_1|2x + 1|^{-1/2} + C_2|2x + 1|^{-1/2}\ln|2x + 1|. \qquad \square$$

**23.5.** $x^2y'' - 3xy' + 3y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}.$

Р е ш е н и е. Решим соответствующее ЛОДУ $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, а ФСР состоит из двух функций $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x^3$. Тогда *общее уравнение ЛОДУ* Эйлера определяется по формуле $y_{\text{оо}} = C_1x+C_2x^3$. Исходное неоднородное уравнение Эйлера будем решать *методом Лагранжа*, согласно которому его общее решение строится в виде $y = C_1(x)x + C_2(x)x^3$, при этом искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)x+C_2'(x)x^3=0, \\ C_1'(x)+3C_2'(x)x^2=\dfrac{2x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}, \\ C_2'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_1, \\ C_2(x)=\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C_2, \end{cases}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Тогда *общее решение неоднородного уравнения Эйлера* имеет вид

$$y = C_1x + C_2x^3 - \frac{1}{2}x\ln(x^2 + 1) + x^3\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

**23.6.** $x^2y'' + xy' + y = 2\ln x + 2\cos\ln x.$

Р е ш е н и е. Область определения ДУ $x > 0$. Заметим, что замена $x = e^t$ в этом неоднородном ДУ Эйлера преобразует *его неоднородность в квазиполином.*

Поэтому в данном уравнении выполним замену $x = e^t$, получим стационарное ЛНДУ со специальной правой частью:

$$y'' + y = 2t + 2\cos t, \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 2t + 2\cos t, \tag{23.11}$$

при этом *соответствующее ЛОДУ восстановили по характеристическому уравнению Эйлера*

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Общее решение однородного ДУ $y'' + y = 0$ есть $y_{\text{оо}}(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Частное решение $y^*(t)$ ДУ (23.11) найдём *методом неопределённых коэффициентов* в виде $y^*(t) = at + b + t(c\cos t + d\sin t)$, поскольку контрольное число первого слагаемого правой части $\sigma_1 = 0 \notin \{i, -i\}$, а для второго слагаемого — $\sigma_2 = i \in \in \{i, -i\}$. После подстановки $y^*(t)$ в ДУ (23.11) получаем $a = 2$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 1$. *Общее решение* этого преобразованного ДУ есть $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t - - 2 + \sin t$, *а общее решение исходного уравнения Эйлера*, учитывая замену $x = e^t$, представимо в виде

$$y = C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x + 2\ln x - 2 + \sin\ln x. \qquad \square$$

**23.7.** $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$

**23.8.** $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$

**23.9.** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$

**23.10.** $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 4xy' - 4y = 0.$

**23.11.** $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0.$

**23.12.** $(3x+1)^2y'' + 3(3x+1)y' - 9y = 0.$

**23.13.** $x^2y''' + 3xy'' + 2y' = 0.$

**23.14.** $(2x+1)^2y'' + 2(2x+1)y' + 4y = 1.$

**23.15.** $x^4y''' + 2x^3y'' = 1.$

**23.16.** $x^2y'' + xy' + y = \ln x \cdot \sin\ln x.$

**23.17.** $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{x^2}{2x-1}.$

**23.18.** $(3x + 2)^2y'' - 18y = 18x + 12.$

**23.19.** $x^2y'' + xy' + y = \dfrac{1}{\sin\ln x}.$

**23.20.** $x^2y'' + 3xy' + y = 12x\ln x.$

**В уравнениях 23.21–23.25 с помощью замены независимой переменной избавиться от члена с первой производной искомой функции и проинтегрировать полученное уравнение.**

**23.21.** $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,\; |x| < 1,\; n = \text{const} \neq 0.$

Решение. Данное уравнение называется *уравнением Чебышева.* Выполним замену независимой переменной, уничтожающую коэффициент при первой производной искомой функции, по формуле (23.10), где $p(x) = -x/(1 - x^2)$. Тогда при $|x| < 1$ имеем замену

$$t = \int \exp\left(\int \frac{x}{1-x^2}\,dx\right)dx = \int \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \;\Rightarrow\; x = \sin t.$$

По правилу производной сложной функции находим

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{\cos t}, \quad y''_{x^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{\cos t}\right)\frac{1}{\cos t} = \frac{y''_{t^2}\cos t + y'_t \sin t}{\cos^3 t}.$$

Эта замена приводит заданное ДУ к стационарному ЛОДУ

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0 \Rightarrow y(t) = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt.$$

Отсюда, произведя обратную замену, получим *общее решение исходного ДУ*

$$y = C_1 \cos(n \arcsin x) + C_2 \sin(n \arcsin x).$$

Заметим, что эта же замена $t = \arcsin x$ получается и по формуле (23.2), приводящей *коэффициент при искомой функции в исходном ДУ к постоянному.* □

**23.22.** $x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$, $x > 0$. **23.23.** $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$, $x > 0$.

**23.24.** $2xy'' + y' - 2y = 0$, $x > 0$. **23.25.** $x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0$.

**В уравнениях 23.26–23.30 линейной заменой искомой функции уничтожить член с первой производной и проинтегрировать ДУ.**

**23.26.** $xy'' + 2y' + xy = 0$.

Решение. В ДУ делаем замену $y = \alpha(x) z$, где $\alpha(x) = e^{-\int (1/x)\,dx} = 1/x$. (см. (23.8)). Имеем $y' = \dfrac{1}{x} z' - \dfrac{1}{x^2} z$, $y'' = \dfrac{1}{x} z'' - \dfrac{2}{x^2} z' + \dfrac{2}{x^3} z$. *Преобразованное* ДУ $z'' + z = 0$ имеет *общее решение* $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, а *общее решение* заданного ДУ допускает представление

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}.$$ □

**Замечание.** Можно сразу *построить инвариант* $G(x)$ по формуле (23.9), в которую подставляем $q(x) = 1$, $p(x) = 2/x$, получаем $G(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right) - \dfrac{4}{4x^2} = 1$ и преобразованное ДУ $z'' + z = 0$.

**23.27.** $y'' + 2y' \operatorname{tg} x + (2\sec^2 x + 3) y = 0$. **23.28.** $xy'' + 2y' + 4xy = 0$.

**23.29.** $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2) y' + y = 0$. **23.30.** $y'' + 2xy' + (x^2 + 5) y = 0$.

**В задачах 23.31–23.35 уравнение с помощью замены независимой переменной привести к уравнению с постоянными коэффициентами при искомой функции и проинтегрировать.**

**23.31.** $y'' + (2x - 1/x) y' + x^2 y = 0$, $x > 0$.

Р е ш е н и е. Делаем замену по формуле (23.2) $t = C\int\sqrt{x^2}\,dx = x^2$, $C = 2$. Отсюда $x = \sqrt{t}$. Вычислим

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t/x'_t = 2y'_t\sqrt{t}, \quad y''_x = (2y''_{t^2}\sqrt{t} + y'_t/\sqrt{t})2\sqrt{t} = 4ty''_{t^2} + 2y'_t.$$

После замены ДУ примет вид

$$4ty''_{t^2} + 2y'_t + (2\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})2\sqrt{t}y'_t + ty = 0 \;\Rightarrow\; 4y''_{t^2} + 4y'_t + y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $4\lambda^2+4\lambda+1=0$ — числа $\lambda_1=\lambda_2=-1/2$. *Общее решение* преобразованного ДУ $y(t) = C_1e^{-t/2} + C_2te^{-t/2}$. Произведя обратную замену $t = x^2$, получим *общее решение данного ДУ*:

$$y = C_1e^{-x^2/2} + C_2x^2e^{-x^2/2}, \quad x > 0. \qquad \square$$

**23.32.** $y'' + (6x^2 - 2/x)y' + 9x^4y=0$. **23.33.** $2xy'' + y' - 2y=0$, $x>0$.

**23.34.** $2xy'' + y' - 2y = 0$. **23.35.** $x^4y'' + 2x^3y' - 4y = 0$.

**В задачах 23.36–23.38 проинтегрировать ДУ, комбинируя вышерассмотренные замены независимой переменной и искомой функции.**

**23.36.** $x^4y'' - y = 0$.

Р е ш е н и е. С помощью замены (23.2) независимой переменной $t = C\int\sqrt{p_2(x)}\,dx = C\int\sqrt{1/x^4}\,dx = 1/x$ $(C = -1)$ приведём ДУ к уравнению с постоянным коэффициентом при искомой функции:

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t/x'_t = -t^2y'_t, \quad y''_{x^2} = (-2ty'_t - t^2y''_t)(-t^2) \;\Rightarrow\; y''_{t^2} + \frac{2}{t}y' - y = 0.$$

В последнем ДУ сделаем линейную замену (23.8) $y = z/t$, уничтожающую член с первой производной, получим $z'' - z = 0$. Отсюда $z = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Тогда в силу замен получаем *общее решение* данного ДУ $y = x(C_1e^{1/x} + C_2e^{-1/x})$. $\square$

**23.37.** $x^4y'' + y = 0$. **23.38.** $y'' + 2xy' - \left(\dfrac{2}{x^2} - 1 - x^2\right)y = 0$.

### Задание для самостоятельной работы

Для уравнений: **а)** $y''+q(x)y = 0$; **б)** $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$, где $p$, $p'$, $q$ — непрерывные функции на $|a, b|$, найти условия для коэффициентов ДУ, при которых они приводятся к стационарным ЛОДУ.

**Мини-самоконтроль. 1.** Найти общие решения следующих уравнений: **а)** $x^2y'' + xy' + y = 0$; **б)** $x^2y'' - xy' + y = 0$; **в)** $x^2y'' + xy' + 9y = \sin(3\ln x)$; **г)** $2(2x+1)^2y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$; **д)** $x^2y'' - 2xy' + 3y = x^4/(x+1)$. **2.** С помощью соответствующей замены искомой функции или независимой переменной свести следующие ДУ к уравнениям с постоянными коэффициентами и проинтегрировать: **а)** $xy'' - y' - 4x^3y = 0$; **б)** $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$; **в)** $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$.

# § 24. Понижение порядка линейных уравнений

*Понижение порядка ЛОДУ с помощью известного частного ($\not\equiv 0$) решения. Применение формулы Абеля — Лиувилля — Остроградского для построения общего решения ЛОДУ второго порядка, для которого известно решение $y = y_1(x) \not\equiv 0$. Нахождение частного решения ДУ в виде функции заданного вида. Применение общих методов понижения порядка ДУ.*

Если для ЛОДУ $n$-го порядка известно нетривиальное частное решение $y = y_1(x)$, то подстановка $y = y_1(x)\int z\,dx$, где $z = z(x)$ — новая искомая функция, приводит его к ЛОДУ $(n-1)$-го порядка относительно $z$.

Отсюда следует, что для построения общего решения ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{24.1}$$

достаточно знать одно решение $y = y_1(x) \not\equiv 0$. Тогда вышеуказанным способом ДУ (24.1) сводится к ЛОДУ первого порядка.

Однако удобнее воспользоваться *формулой Абеля — Лиувилля — Остроградского*, которую запишем для решений $y = y_1(x)$ и любого $y = y(x)$:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y \\ y_1'(x) & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)\,dx} \;\Rightarrow\; y'y_1(x) - yy_1'(x) = C_1 e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Это ЛДУ первого порядка легко интегрируется известными методами.

Однако проще всего его решить следующим образом. Разделим обе части этого ДУ на $y_1^2(x)$, получим

$$\frac{y'y_1(x) - yy_1'(x)}{y_1^2(x)} = \frac{C_1 e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)} \quad \text{или} \quad \left(\frac{y}{y_1(x)}\right)' = \frac{C_1 e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}.$$

Интегрируя последнее уравнение, сразу находим общее решение ДУ (24.1)

$$y = C_1 y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx + C_2 y_1(x). \tag{24.2}$$

Если для ЛОДУ $n$-го порядка известны $k$ линейно независимых решений $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, то его порядок можно понизить на $k$ единиц. Для этого с помощью первой подстановки $y = y_1(x)\int z\,dx$ приведём его к ЛОДУ $(n-1)$-го порядка, для которого в силу этой подстановки известны $(k-1)$ линейных независимых решений $z_1(x) =$

$= (y_2(x)/y_1(x))'$, $\ldots$, $z_{k-1}(x) = (y_k(x)/y_1(x))'$. Далее, последовательно понижая порядок, приведём его к ЛОДУ $(n-k)$-го порядка.

Если известны два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, $y_1(x) \not\equiv y_2(x)$, ЛНДУ $n$-го порядка, то *их разность* $y_1(x) - y_2(x)$ в силу принципа суперпозиции *является нетривиальным решением* соответствующего ЛОДУ и, следовательно, порядок ЛОДУ можно понизить на единицу. Отсюда следует, что в этом случае ЛНДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{24.3}$$

интегрируемо в квадратурах.

Отметим, что *нет общих методов* построения частных решений ЛДУ.

К ЛДУ можно также применять известные методы понижения порядка ДУ высших порядков.

ЛОДУ (24.1) является однородным уравнением относительно искомой функции и её производных. С помощью замены $y' = yz$ его порядок можно понизить на единицу, однако преобразованное ДУ уже не будет линейным $z' = -z^2 - p(x)z - q(x)$. Это уравнение Риккати не интегрируется в квадратурах в общем случае, однако иногда для него проще построить частное решение.

ЛНДУ (24.3) будет уравнением в точных производных тогда и только тогда, когда $q(x) = p'(x)$, в этом случае путём интегрирования оно приводится к виду $y' + p(x)y = \int f(x)\,dx + C_1$ и, следовательно, интегрируемо в квадратурах.

**В задачах 24.1–24.11 найти общее решение ЛОДУ, зная их частные решения или найдя их путём подбора.** Например, в виде полинома $y = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ (такие решения, возможно, стоит испытывать для ДУ с рациональными коэффициентами) или в виде показательной функции $y = e^{ax}$.

**24.1.** $x^2y'' - (x^2 - 2x + 2)y = 0$, $y_1(x) = e^x/x$.

Решение. По формуле Абеля — Лиувилля — Остроградского для решения $y_1(x)$ и любого решения $y = y(x)$ данного ДУ получим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y \\ y_1'(x) & y' \end{vmatrix} = C_1 \;\Rightarrow\; y'y_1(x) - yy_1'(x) = C_1.$$

Построенное ДУ является линейным первого порядка относительно $y$. Проще его решать, не подставляя сразу явное выражение $y_1(x)$ в ДУ, следующим образом.

Разделим обе части последнего ДУ на $y_1^2(x)$, при этом его левая часть становится точной производной дроби $y/y_1(x)$. Действительно,

$$\frac{y'y_1(x) - yy_1'(x)}{y_1^2(x)} = \left(\frac{y}{y_1(x)}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2(x)} \;\Rightarrow\; \frac{y}{e^x/x} = \int \frac{C_1}{(e^x/x)^2}\,dx + C_2.$$

Интегрируя последнее соотношение, находим *общее решение* заданного ДУ

$$y = C_1\frac{e^x}{x}\int x^2e^{-2x}dx + C_2\frac{e^x}{x} = \tilde{C}_1(2x^2+2x+1)\frac{e^{-x}}{x} + C_2\frac{e^x}{x}, \quad \tilde{C}_1 = -\frac{1}{4}C_1. \qquad \square$$

## 24.2. $x(x+2)y'' - 2y = 0.$

Р е ш е н и е. Для построения предполагаемого решения в виде полинома $y_1(x) = x^n + \ldots$ (коэффициент при старшей степени в силу линейности и однородности ДУ можно взять равным 1) найдём сначала его степень. Подставив $y_1(x)$, $y_1'(x) = nx^{n-1} + \ldots$, $y_1''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$ в ДУ, получим тождество (следим только за старшей степенью $x$)

$$x(x+2)[n(n-1)x^{n-2} + \ldots] - 2(x^n + \ldots) \equiv 0 \Rightarrow (n(n-1)-2)x^n + \ldots \equiv 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени $x^n$, имеем равенство $n(n-1) - 2 = 0$. Отсюда $n_1 = 2$, $n_2 = -1$. Следовательно, если существует решение в виде полинома, то только второй степени ($n = -1$ не подходит). Полагая $y_1(x) = x^2+ax+b$ и подставляя его в ДУ, приходим к полиномиальному тождеству

$$x(x+2)2 - 2(x^2+ax+b) = 0 \;\Rightarrow\; x(4-2a) - 2b = 0.$$

Следовательно, $4-2a = 0$, $b = 0$. Отсюда $a = 2$, $b = 0$, и полином $y_1(x) = x^2+2x$ является решением ДУ.

Общее решение строим, используя формулу Абеля — Лиувилля — Остроградского:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y \\ y_1'(x) & y' \end{vmatrix} = C_1 \;\Rightarrow\; \frac{y'y_1(x) - yy_1'(x)}{y_1^2(x)} = \frac{C}{y_1^2(x)} \;\Rightarrow\; \left(\frac{y}{y_1(x)}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2(x)},$$

$$\left[\frac{y}{(x^2+2x)}\right]' = \frac{C_1}{(x^2+2x)^2} \;\Rightarrow\; y = (x^2+2x)\int\frac{C_1}{(x^2+2x)^2}\,dx + C_2(x^2+2x).$$

Проведя интегрирование, получим *общее решение* данного ДУ:

$$y = C_1(x^2+2x)\int -\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right)\right]dx + C_2(x^2+2x) =$$

$$= -\frac{C_1}{4}(x^2+2x)\left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right] + C_2(x^2+2x) =$$

$$= \tilde{C}_1[(x^2+2x)\ln|x/(x+2)| + 2 + 2x] + C_2(x^2+2x). \qquad \square$$

**24.3.** $xy'' - (x+1)y' - 3(2x-1)y = 0.$

Р е ш е н и е. Попытаемся построить частное решение в виде полинома $y_1(x) = x^n + \ldots$ . После подстановки $y_1(x)$ в ДУ получим

$$x(n(n-1)x^{n-2} + \ldots) - (x+1)(nx^{n-1} + \ldots) - 3(2x-1)(x^n + \ldots) = 6x^{n+1} + \ldots = 0.$$

Очевидно, что старшая степень $x^{n+1}$ не уничтожается. Следовательно, ДУ не имеет решений в виде полинома.

Ищем решение в виде $y_1(x) = e^{ax}$. Подставив $y_1(x)$ в ДУ, после сокращения на $e^{ax}$ получим тождество $xa^2 - (x+1)a - 3(2x-1) \equiv 0$, т. е. коэффициент $a$ удовлетворяет системе

$$a^2 - a - 6 = 0, \quad -a + 3 = 0 \ \Rightarrow \ a = 3.$$

Отсюда следует, что $y_1(x) = e^{3x}$ — решение ДУ.

Второе решение из ФСР найдём по формуле из представления (24.2):

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx = e^{3x}\int \frac{e^{\int(1+1/x)\,dx}}{e^{6x}}\,dx =$$

$$= e^{3x}\int \frac{e^x x}{e^{6x}}\,dx = e^{3x}\int e^{-5x}x\,dx = e^{-2x}\left(-\frac{x}{5} - \frac{1}{25}\right).$$

Тогда *общее решение* исходного ДУ можно представить в виде

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}(5x+1). \qquad \square$$

**24.4.** $xy''' - y'' - xy' + y = 0, \ y_1 = e^x, \ y_2 = x.$

Р е ш е н и е. С помощью подстановки $y = e^x \int z\,dx$ (или $y = x\int z\,dx$) понизим порядок ДУ на единицу. Имеем $y' = e^x \int z\,dx + e^x z$, $y'' = e^x\int z\,dx + 2e^x z + e^x z'$, $y''' = e^x \int z\,dx + 3e^x z + 3e^x z' + e^x z''$. Подставляя значения $y$, $y'$, $y''$, $y'''$ в ДУ и сокращая на $e^x$, получаем $xz'' + (3x-1)z' + (2x-2)z = 0$. В силу замены $y = e^x\int z\,dx$ решением полученного ДУ второго порядка является функция $z_1(x) = (y_2(x)/y_1(x))' = (xe^{-x})' = e^{-x}(1-x)$.

Далее решаем, как и выше, используя формулу Абеля — Лиувилля — Остроградского, получаем

$$\left(\frac{z}{e^{-x}(1-x)}\right)' = \frac{C_1 e^{-\int p(x)\,dx}}{z_1^2(x)} = C_1\frac{e^{-\int(3-1/x)\,dx}}{e^{-2x}(1-x)^2} = C_1\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} = C_1\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)',$$

$$\frac{z}{e^{-x}(1-x)} = C_2 + C_1\int\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}\,dx = C_1\frac{e^{-x}}{1-x} + C_2, \quad z = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}(1-x).$$

Отсюда в силу замены $y = e^x\int z\,dx$ следует *общее решение* данного ДУ $y = e^x\int[C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}(1-x)]dx = e^x\left[-\dfrac{C_1e^{-2x}}{2} - C_2e^{-x} + C_2 e^{-x} + C_3\right] = \tilde{C}_1 e^{-x} + C_2 x + C_3 e^x$. $\square$

**24.5.** $xy'' + (2-3x)y' + (2x-3)y = 0,\ y_1 = \dfrac{e^x}{x}.$

**24.6.** $xy'' + 2y' + xy = 0,\ y_1 = \dfrac{\cos x}{x}.$

**24.7.** $x(x+2)y'' + 2y' = 0.$

**24.8.** $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0.$

**24.9.** $x^2y''' - x(x+2)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0,\ y_1 = e^x,\ y_2 = x+1.$

**24.10.** $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0,\ y_1 = x,\ y_2 = 1/x.$

**24.11.** $a(x)y'' + (-a(x)+b(x))y' - b(x)y = 0,\ a, b \in C(\mathbb{R}).$

**В задачах 24.12–24.16 найти общее решение ЛНДУ, если известно, что частное решение соответствующего ЛОДУ является полиномом.**

**24.12.** $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = x - \dfrac{1}{x}.$

Решение. Построим частное решение соответствующего ЛОДУ $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ в виде полинома $y_1(x) = x^n + \ldots$ . Для определения степени $n$ подставим $y_1(x)$ в ДУ. Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени полученного полиномиального тождества, приходим к уравнению $n(n-1) - 2n + 2 = 0$. Отсюда $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$. Первое полиномиальное решение ищем в виде $y_1(x) = x + a$. Получим $a = 0$ и $y_1(x) = x$ (впрочем это решение было очевидным). Попытаемся построить и второе решение в виде полинома $y_2(x) = x^2 + bx + c$. Подставив $y_2(x)$ в ЛОДУ, получим $2(x^2-1) - 2(2x+b) + 2(x^2+bx+c) = 2bx + (2c-2-2b) = 0$. Отсюда следует, что $b = 0$, $c = 1$, $y_2(x) = x^2+1$. Решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2+1$ образуют ФСР. Тогда общее решение соответствующего ЛОДУ есть $y_{oo}(x) = C_1x + C_2(x^2+1)$.

Общее решение ЛНДУ с неоднородностью $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x} : (x^2-1) = \dfrac{1}{x}$ строим методом вариации произвольных постоянных в виде $y = C_1(x)x + C_2(x)(x^2+1)$, где $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)(x^2+1) = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)2x = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)x}, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right| + C_1, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C_2. \end{cases}$$

Тогда *общее решение* данного ДУ допускает представление

$$y = C_1x + C_2(x^2+1) + x\ln\left|\frac{x}{x^2-1}\right| + \frac{1}{2}(x^2+1)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|. \qquad \square$$

**24.13.** $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3e^x.$

**24.14.** $xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^x$.

**24.15.** $(x^2 - x)y'' - (2x^2 - 1)y' + y(4x - 2) = (x-1)^2$.

**24.16.** $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = x - 3$.

**В задачах 24.17, 24.18 найти общее решение ЛНДУ, зная два его частных решения.**

**24.17.** $y'' + (2x-1)y' - 2y = -1;\ \ y_1^*(x) = x,\ \ y_2^*(x) = 1/2$.

Решение. По принципу суперпозиции соответствующее ЛОДУ имеет решение $\tilde{y}_1 = y_1^*(x) - y_2^*(x) = x - 1/2$ или $y_1(x) = 2x - 1$.

Используя представление (24.2), построим общее решение ЛОДУ

$$y_{\text{оо}}(x) = C_1(2x-1)\int \frac{e^{-\int (2x-1)\,dx}}{(2x-1)^2}\,dx + C_2(2x-1) = C_1(2x-1)\int \frac{e^{-x^2+x}}{(2x-1)^2}\,dx + C_2(2x-1).$$

Тогда *общее решение* ЛНДУ можно записать в виде квадратур

$$y = C_1(2x-1)\int \frac{e^{-x^2+x}}{(2x-1)^2}dx + C_2(2x-1) + x. \qquad \square$$

**24.18.** $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2;\ \ y_1 = 2x,\ \ y_2 = (x+1)^2$.

**В задачах 24.19, 24.20 найти решение ЛНДУ, если все их решения — полиномиальные функции.**

**24.19.** $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. Построим решения соответствующего ЛОДУ в виде полинома $y(x) = x^n + \ldots$. Выделяя только старшую степень $x$, после подстановки $y(x)$ в ДУ получаем $(n(n-1) - 2n + 2)x^n + \ldots = 0$. Откуда следует, что $n(n-1) - 2n + 2 = 0$, т. е. $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Полагая $y_1(x) = x + a$ и $y_2(x) = x^2 + bx + c$ и подставляя решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в ЛОДУ, получаем для первого — равенство $-(2x-1) + 2x + 2a = 0 \ \Rightarrow\ 1 + 2a = 0 \ \Rightarrow\ a = -1/2 \ \Rightarrow\ y_1 = x - 1/2$ или $y_1(x) = 2x - 1$, а для второго — $x(x-1)2 - (2x-1)(2x+b) + 2(x^2 + bx + c) = 0 \ \Rightarrow\ -b + 2c = 0$. Положим $b = c = 0$, т. е. $y_2(x) = x^2$ будет решением ЛОДУ. Отсюда следует общее решение соответствующего ЛОДУ $y_{\text{оо}}(x) = C_1(2x-1) + C_2x^2$.

Анализ результата подстановки решения полиномиального вида $y^*(x) = Ax^n + \ldots$ в исходное ЛНДУ $(n(n-1) - 2n + 2)Ax^n + \ldots = 2x^3 - 3x^2$ показывает, что целесообразно испытать на решение полином 3-й степени $y^*(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. После подстановки имеем

$$2Ax^3 - (3A + 4B)x^2 + 2(B - C)x + C + 2D = 2x^3 - 3x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получаем совместную систему для определения коэффициентов:

$$2A = 2, \quad -3A - 4B = -3, \quad -2C + 2B = 0, \quad C + 2D = 0 \ \Rightarrow\ A = 1, \quad B = C = D = 0.$$

Искомое частное решение $y^*(x) = x^3$, а *общее решение* заданного ДУ представимо в виде $y = C_1(2x-1) + C_2x^2 + x^3$. □

**24.20.** $x(x+2)y'' - 2(x+1)y' + 2y = x^3 + 9x^2$.

**Проинтегрировать ЛДУ 24.21–24.25, допускающие понижение порядка.**

**24.21.** $xy''' + 2y'' = 3x$.

Решение. С помощью замены $y'' = z$ понизим порядок ДУ, получим $xz' + 2z = 3x \ \Rightarrow\ z = x + 9/x^2 \ \Rightarrow\ y'' = x + C_1/x^2$. Отсюда следует *общее решение* заданного ДУ $y = \dfrac{x^3}{3} - C_1 \ln|x| + C_2x + C_3$. □

**24.22.** $y'' + 4\cos^2 x \cdot y' - 4\sin 2x \cdot y = 0$.

**24.23.** $y''' + x^2y'' + 2xy' = 0$.

**24.24.** $xy'' + (1+x^2)y' + 2xy = 0$.

**24.25.** $\cos^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y' + 2y = 0$.

**Уравнения 24.26–24.28 привести к уравнениям Риккати и проинтегрировать.**

**24.26.** $y'' - 2e^xy' + (e^{2x} - e^x)y = 0$.

Решение. С помощью замены $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$, $z = z(x)$, данное ЛОДУ приводится к уравнению Риккати

$$z' + z^2 - 2e^xz + e^{2x} - e^x = 0, \quad [y = 0\,?],$$

для которого $z = e^x$ очевидно является решением. Выполним замену

$$z = e^x + 1/u, \quad u = u(x), \quad [z = e^x\,?],$$

приходим к ДУ $u' = 1 \Rightarrow u = x + C_1 \Rightarrow z = e^x + 1/(x+C_1) \Rightarrow y'/y = e^x + 1/(x+C_1)$.

Интегрируя, получаем $y = C_2(x+C_1)e^{e^x}$. Решение исходного ДУ также в силу $z = e^x$ доставляет уравнение $y'/y = e^x \ \Rightarrow\ y = Ce^{e^x}$. *Полное семейство решений* данного ДУ можно представить в виде $y = C_1e^{e^x} + C_2xe^{e^x}$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. □

**24.27.** $y'' - y' - e^{2x}y = 0$.

**24.28.** $x^3y'' - xy' + 2y = 0$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Найти общее решение ЛОДУ, допускающих частные решения в виде полинома: **а)** $(2x^3+3x)y'' - 6(x+1)y' + 6y = 0$; **б)** $(2x-x^2)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0$. **2.** Проинтегрировать ЛНДУ $(x^2-x)y'' + (2x-3)y' - 2y = x$, если соответствующее ЛОДУ допускает решение в виде полинома. **3.** Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — нетривиальные решения ЛОДУ (24.1), $p, q \in C(J)$. Доказать, используя формулу Абеля — Лиувилля — Остроградского, что дробь $y_1(x)/y_2(x)$ не имеет точек локального экстремума в области её определения.

# § 25. Интегрирование линейных уравнений при помощи степенных рядов

*Голоморфные (аналитические) функции. Целые функции. Голоморфное решение. Теорема Коши для ЛДУ $n$-го порядка. Обобщённый степенной ряд. Регулярная особая точка ЛОДУ 2-го порядка. Определяющее уравнение. Теорема Фукса.*

Функция $f(x)$ называется *голоморфной в окрестности* $|x-x_0|<r$ *точки* $x_0$, если она представима в этой окрестности в виде *сходящегося степенного ряда* по степеням $(x-x_0)$, т. е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0|<r.$$

Если $r=\infty$, то функция $f(x)$ называется *целой*.

Рассмотрим для ЛДУ $n$-го порядка

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \tag{25.1}$$

*задачу Коши* с начальными условиями

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{25.2}$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные (любые) числа, $x_0$ — заданная точка.

**Теорема Коши.** *Если коэффициенты $p_k$, $k=1,\ldots,n$, и неоднородность $f$ ЛДУ* (25.1) *— голоморфные функции в окрестности $|x-x_0|<r$ точки $x_0$, то начальная задача* (25.1), (25.2) *имеет единственное решение $y(x)$, голоморфное по меньшей мере в той же окрестности $|x-x_0|<r$, т. е.*

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0|<r. \tag{25.3}$$

В силу начальных условий (25.2) и формул для коэффициентов ряда Тейлора это решение может быть записано в виде

$$y(x)=y_0+y_0'(x-x_0)+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \tag{25.4}$$

искомые коэффициенты $c_k$, $k\geqslant n$, могут быть найдены *методом неопределённых коэффициентов* путём подстановки решения (25.4) (или (25.3), если строятся сразу несколько начальных задач (25.1), (25.2)) в ЛДУ (25.1), в которых коэффициенты $p_k$ и неоднородность $f$ заменяются их степенными представлениями. *Коэффициенты* $c_k$ *также могут быть определены по формулам Тейлора* $c_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$, где производные $y^{(k)}(x_0)$, $k \geqslant n$, находятся из ДУ (25.1) путём последовательного дифференцирования.

Теорема Коши не применима, если коэффициенты ЛДУ не являются голоморфными функциями.

Однако возможны случаи, когда решение может быть представимо в виде так называемого *обобщённого степенного ряда.*

*Обобщённым степенным рядом* называется ряд вида

$$(x - x_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{25.5}$$

где $\rho$ — некоторое число (действительное или комплексное), а ряд из выражения (25.5) сходится в некоторой окрестности $|x - x_0| < r$ точки $x_0$.

Рассмотрим более подробно ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{25.6}$$

для которого $x_0$ — *регулярная особая точка,* т. е.

$$p(x) = \frac{1}{x - x_0} \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \tag{25.7}$$

где ряды в числителях дробей сходятся в окрестности $|x - x_0| < r$ точки $x_0$, $|p_0| + |q_0| + |q_1| \neq 0$.

**Теорема Фукса.** *Линейное дифференциальное уравнение* (25.6), *для которого* $x_0$ *— регулярная особая точка,* ***всегда*** *имеет решение в виде обобщённого степенного ряда.*

Заметим, что область голоморфности степенного ряда в представлении решения (25.5) по меньшей мере $|x - x_0| < r$.

*Для определения числа* $\rho$ *и коэффициентов* $c_k$ нужно подставить ряд (25.5) в ДУ (25.6), (25.7). Сократив на $(x - x_0)^{\rho}$, получим слева степенной ряд, в котором нужно приравнять к нулю коэффициенты при всех одинаковых степенях $(x-x_0)^k$, при этом число $\rho$ удовлетворяет так называемому *определяющему уравнению в особой точке* $x_0$

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0. \tag{25.8}$$

Коэффициенты $p_0, q_0$ определяющего уравнения можно также находить по формулам $p_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$, $q_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$.

Обозначим $\rho_1$, $\rho_2$ — его корни, $\operatorname{Re}\rho_1 \geqslant \operatorname{Re}\rho_2$. Тогда, если:

1) $\rho_1\neq\rho_2$, $(\rho_1-\rho_2)\notin\mathbb{N}$, то ЛДУ (25.6), (25.7) имеет *два линейно независимых решения в виде обобщённых степенных рядов*

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(1)}(x-x_0)^k, \quad c_0^{(1)}\neq 0;$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(2)}(x-x_0)^k, \quad c_0^{(2)}\neq 0;$$

2) $\rho_1\neq\rho_2$, $(\rho_1-\rho_2)\in\mathbb{N}$, то ЛОДУ (25.6), (25.7) имеет решение $y_1(x)$, второе решение имеет вид $\widetilde{y_2}(x)=y_2(x)+\gamma y_1(x)\ln|x-x_0|$, где постоянная $\gamma$ может оказаться и равной нулю;

3) $\rho_1=\rho_2$, то уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $\widetilde{y_2}(x)$, где $\gamma\neq 0$.

**Контрольные вопросы**

**1.** Обосновать существование и единственность голоморфного решения задачи Коши для уравнений: **а)** $y''+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$; **б)** $y''+\dfrac{1}{x^2+1}y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$. Указать область голоморфности этих решений.

**2.** Является ли точка $x_0=0$ регулярной для ДУ $x^2y''-xy'+(x^2-1/4)y=0$? Построить определяющее уравнение.

## В задачах 25.1–25.8 найти два линейно независимых решения в виде степенных рядов и построить общее решение.

**25.1.** $y''+x^2y=0$.

Решение. Коэффициенты ЛДУ $p(x)=0$, $q(x)=x^2$ — *голоморфные в окрестности* $|x|<\infty$ *точки* $x_0=0$ *(целые) функции*. Тогда по теореме Коши решение $y=y(x)$ с начальными условиями $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$ представимо в виде сходящегося ряда $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $|x|<\infty$.

Подставляя этот ряд в ДУ, получаем тождество

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+x^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\equiv 0.$$

Собирая слева коэффициенты при одинаковых степенях $x$ и приравнивая их к нулю, получаем

$$\begin{aligned} x^0:&\quad 2c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0;\\ x:&\quad 3\cdot 2c_3 = 0 \;\Rightarrow\; c_3 = 0;\\ x^2:&\quad 4\cdot 3c_4 + c_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_4 = -\frac{c_0}{3\cdot 4};\\ \dots&\\ x^{k-2}:&\quad k(k-1)c_k + c_{k-4} = 0 \;\Rightarrow\; c_k = -\frac{c_{k-4}}{k(k-1)}. \end{aligned}$$

Используя *рекуррентную формулу* $c_k = -\dfrac{c_{k-4}}{k(k-1)}$, *построим два линейно независимых решения* $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ *с начальными условиями*:

1) $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0$; 2) $y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$.

Тогда для решения $y_1(x)$ в силу начальных условий имеем $c_0 = 1,\ c_1 = 0$, а из рекуррентной формулы следует $c_2 = 0$; $c_3 = 0$; $c_4 = -\dfrac{1}{3\cdot 4}$; $c_k = 0$, если $k \ne 4m$; $c_{4m} = \dfrac{(-1)^m}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4m-1)4m}$. Аналогично для второго решения имеем $c_0 = 0,\ c_1 = 1$ и $c_2 = c_3 = c_4 = 0$; $c_5 = -\dfrac{1}{4\cdot 5}$; $c_k = 0$, если $k \ne 4m+1$; $c_{4m+1} = \dfrac{(-1)^m}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots 4m(4m+1)}$.

Тогда ФСР состоит из двух решений

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m}}{3\cdot 4\cdots(4m-1)4m}, \quad y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m+1}}{4\cdot 5\cdots 4m(4m+1)},$$

а *общее решение* имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $|x| < +\infty$. □

**25.2.** $y'' - y\sin x = 0$.

Р е ш е н и е. Коэффициент уравнения $\sin x$ — *голоморфная в окрестности* $|x| < +\infty$ *точки* $x_0 = 0$ *(целая) функция.* Тогда по теореме Коши решение $y = y(x)$ с начальными условиями $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'$ представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < +\infty, \quad c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0'. \tag{25.9}$$

Построим ФСР $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с начальными условиями соответственно $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ и $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ в виде сходящегося степенного ряда (25.9).

Подставим решение (25.9) в данное уравнение, заменяя в нём $\sin x$ известным его разложением в степенной ряд $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x| < +\infty$, получим тождество

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \equiv 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему уравнений для определения $c_k$ (ограничимся первыми коэффициентами):

$$x^0: 2\cdot 1\cdot c_2 = 0, \qquad x^3: 5\cdot 4c_5 - c_2 + \frac{c_0}{3!} = 0,$$
$$x^1: 3\cdot 2\cdot c_3 - c_0 = 0, \qquad x^4: 6\cdot 5c_6 + \frac{c_1}{3!} - c_3 = 0,$$
$$x^2: 4\cdot 3\cdot c_4 - c_1 = 0, \qquad x^5: 7\cdot 6\cdot c_7 - \frac{c_0}{5!} + \frac{c_2}{3!} - c_4 = 0.$$

Для решения $y_1(x)$ в силу начальных условий имеем $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Из полученных рекуррентных соотношений последовательно находим

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{3!}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = -\frac{1}{5!}, \quad c_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}, \quad c_7 = \frac{1}{7!}.$$

Отсюда следует искомое разложение *решения* $y = y_1(x)$ в степенной ряд до $x^7$:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{4x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad |x| < +\infty.$$

Для решения $y_2(x)$ имеем $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Из реккурентной системы получаем

$$c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{4\cdot 3!} = \frac{2}{4!}, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = -\frac{1}{3!\cdot 5\cdot 6} = -\frac{4}{6!}, \quad c_7 = -\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} = \frac{10}{7!},$$

и разложение решения $y = y_2(x)$ в степенной ряд до $x^7$ имеет вид

$$y_2(x) = x + \frac{2}{4!}x^4 - \frac{4}{6!}x^6 + \frac{10}{7!}x^7 + \ldots, \quad |x| < +\infty,$$

отсюда следует общее решение ДУ $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. □

**25.3.** $y'' - xy = 0$ (уравнение Эйри). **25.4.** $y'' + xy = 0$.
**25.5.** $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$. **25.6.** $xy'' + y\ln(1 - x) = 0$.
**25.7.** $y'' - xy' - y = 0$. **25.8.** $y'' + y\cos x = 0$.

## В задачах 25.9–25.18 найти два ЛНЗ решения в окрестности точки $x = 0$ в виде обобщённых рядов или рядов, содержащих дополнительно $\ln x$, и построить общее решение.

**25.9.** $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, $x > 0$, $\nu = \text{const} > 0$.

Решение. Данное уравнение называется *уравнением Бесселя порядка* $\nu$. Рассмотрим случай, когда $\nu \notin \mathbb{N}$. Точка $x_0 = 0$ является *регулярной особой точкой*, $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \dfrac{-\nu^2 + x^2}{x^2}$, $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$. Корни определяющего уравнения $\rho(\rho - 1) - \rho - \nu^2 = 0$ или $\rho^2 = \nu^2$ — числа $\rho_1 = \nu > \rho_2 = -\nu$.

Согласно теореме Фукса ДУ имеет решение в виде обобщённого степенного ряда

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\nu}, \quad c_0 \neq 0, \quad x > 0. \qquad (25.10)$$

Подставляя (25.10) в исходное ДУ, получаем после объединения некоторых слагаемых в одну сумму тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\nu)(k+\nu-1)+(k+\nu)-\nu^2]c_kx^{k+\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\nu+2}\equiv 0,$$

которое после сокращения на $x^\nu$ примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\nu)^2-\nu^2]c_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2}\equiv 0.$$

Приравняв к нулю коэффициенты при всех степенях $x$, получим при $k\geqslant 2$ рекуррентное уравнение для искомых коэффициентов

$$((k+\nu)^2-\nu^2)c_k+c_{k-2}=0.$$

При $k=0$ имеем равенство $0\cdot c_0=0$, т. е. $c_0$ — любое не равное нулю число, при $k=1$ получаем $(1+2\nu)c_1=0$, т. е. $c_1=0$, а рекуррентная формула принимает вид

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)},\quad k\geqslant 2,$$

и поэтому $c_{2k+1}=0$, $k=0,1,2,\ldots$,

$$c_2=-\frac{c_0}{2(2+2\nu)}=-\frac{c_0}{2^2(1+\nu)},\quad c_4=\frac{c_2}{4(4+2\nu)}=\frac{c_2}{4\cdot 2(2+\nu)}=\frac{c_0}{2^{2\cdot 2}\cdot 2!(1+\nu)(2+\nu)},$$

$$c_6=-\frac{c_4}{6(6+2\nu)}=-\frac{c_0}{2^{2\cdot 3}3!(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)},$$

$$c_{2k}=(-1)^k\frac{c_0}{2^{2k}k!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Далее, положив $1/c_0=2^\nu\Gamma(\nu)\nu$, где $\Gamma(\nu)=\int\limits_0^{+\infty}t^{\nu-1}e^{-t}dt$, $\nu>0$, в силу свойства гамма-функции $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$, $\Gamma(1)=1$, упростим знаменатели в построенных коэффициентах $c_k$. С таким выбором $c_0$ мы имеем решение, которое обозначается $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},\quad x>0,\tag{25.11}$$

и называется *функцией Бесселя 1-го рода порядка* $\nu$.

Из предыдущих выкладок очевидно, что существует второе частное решение в виде обобщённого степенного ряда $y_2=x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ для $\rho_2=-\nu$, которое может быть получено из (25.11) заменой $\nu$ на $-\nu$, так как ДУ содержит $\nu$ в чётной степени и не меняется при замене $\nu$ на $-\nu$. Таким образом приходим к *функции Бесселя 1-го рода порядка* $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu},\quad x>0,$$

т. е. в любом случае $\nu > 0$ существует второе решение в виде обобщённого степенного ряда с показателями $\rho_2 = -\nu$, при этом, если $\nu$ не равно целому, функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ являются ЛНЗ и образуют ФСР. Если же $\nu$ есть целое число, $\nu = n$, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, т. е. $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ — линейно зависимые функции при $x > 0$ (при $\nu = (2n+1)/2$, $2\nu \in \mathbb{N}$ число $\gamma$ в возможном представлении решения $y_2(x)$ равно нулю).

Следовательно, *общее решение уравнения Бесселя* в случае $\nu \notin \mathbb{N}$ может быть записано $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

**Замечание.** Для целого $\nu = n$ вместо $J_{-n}(x)$ строят другое решение ЛНЗ с $y_1(x) = J_n(x)$, например, с помощью формулы Абеля — Лиувилля — Остроградского

$$y_2(x) = J_n(x) \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}}{J_n^2(x)} = J_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)},$$

которое после умножения на упрощающий коэффициенты разложения $y_2(x)$ множитель называется функцией *Бесселя 2-го рода порядка* $n$, $y_2(x) = Y_n(x)$. □

## 25.10. $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$, $x > 0$.

Решение. Уравнение $y'' - \dfrac{1}{x}y' - 4x^2 y = 0$ удовлетворяет условиям теоремы Фукса в окрестности $|x| < \infty$ точки $x_0 = 0:$ $p(x) = \dfrac{-1}{x}$, $q(x) = \dfrac{-4x^4}{x^2}y$, т. е. $p_0 = -1$, $q_0 = 0$. *Определяющее уравнение* $\rho(\rho - 1) - \rho = 0$ имеет корни $\rho_1 = 2 > \rho_2 = 0$. Так как $(\rho_1 - \rho_2) \in \mathbb{N}$, то существует решение в виде обобщённого степенного ряда

$$y_1(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}, \quad c_0 \neq 0, \tag{25.12}$$

а второе ЛНЗ с ним решение допускает представление

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \gamma y_1(x) \ln|x|, \tag{25.13}$$

где постоянная $\gamma$ может быть равной нулю.

Первое решение строим методом неопределённых коэффициентов. Подставив (25.12) в исходное ДУ, получим, объединив первые две суммы в одну, тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+2) c_k x^{k+1} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+5} \equiv 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой части ДУ, получаем соотношения

$$x:\ 0 \cdot c_0 = 0, c_0 \text{ — любое число } \neq 0, \text{ положим } c_0 = 1;$$

$$x^2:\ 3 \cdot c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \quad x^3:\ 2 \cdot 4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$$
$$x^4:\ 3 \cdot 5c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0; \quad x^5:\ 4 \cdot 6c_4 = 4c_0 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}.$$

Далее имеет место рекуррентная формула

$$x^{k+1}: \quad k(k+2)c_k = 4c_{k-4} \Rightarrow c_k = \frac{4}{k(k+2)}c_{k-4}.$$

Отсюда следует, что $c_k = 0$, если $k \neq 4n$,

$$c_{4n} = \frac{4}{4n(4n+2)}c_{4n-4} = \frac{1}{2n(2n+1)\cdots 4\cdot 5\cdot 3\cdot 2} = \frac{2}{(2n+1)!}.$$

Итак,

$$y_1(x) = x^2 + \frac{x^6}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots = x^2 + \frac{(x^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Сравнивая полученное разложение $y_1(x)$ с рядом Тэйлора для функций $e^{x^2}$ и $e^{-x^2}$, заметим, что $y_1(x) = \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2}$, т. е. $y_1(x) = \operatorname{sh} x^2$. Второе решение $y_2(x)$ построим, используя формулу Абеля — Лиувилля — Остроградского (см. § 19)

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{\int \frac{1}{x}\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx = \operatorname{sh} x^2 \int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2 x^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{sh} x^2 \cdot \operatorname{cth} x^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{ch} x^2,$$

т. е. в представлении (25.13) $\gamma = 0$ и $y_2(x)$ — голоморфное решение.

*Общее решение* исходного ДУ есть $y = C_1 \operatorname{sh} x^2 + C_2 \operatorname{ch} x^2$. □

**25.11.** $xy'' + y' - xy = 0, \ x > 0.$

Решение. Уравнение удовлетворяет условиям теоремы Фукса в окрестности $|x| < +\infty$ точки $x_0 = 0$. *Определяющее уравнение* $\rho(\rho-1) + \rho = 0$ имеет корни $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Согласно теореме Фукса ДУ имеет решение $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Методом неопределённых коэффициентов находим

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \ldots + \frac{x^{2k}}{2^2\cdot 4^2\cdots (2k)^2} + \ldots .$$

Так как $\rho_1 = \rho_2$, то второе решение имеет вид

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \gamma y_1(x)\ln|x|, \quad \text{где} \quad \gamma \neq 0.$$

Вычислим $y_2'(x)$, $y_2''(x)$ и подставим $y_2(x)$ в исходное ДУ, получим

$$x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \underline{x\gamma y_1''(x)\ln|x|} + 2\gamma y_1'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} +$$

$$+\underline{\gamma y_1'(x)\ln|x|} - x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \underline{x\gamma y_1(x)\ln|x|} = 0.$$

Так как $y_1(x)$ — решение исходного ДУ, то подчёркнутые члены уничтожаются. В результате получим:

$$x\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}+2\gamma\left[\frac{2x}{2\cdot 2}+\frac{4x^3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2kx^{2k-1}}{2^2\cdot 4^2\cdots(2k)^2}+\ldots\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}-x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\equiv 0.$$

Собирая коэффициенты при $x^k$, найдём соотношения для определения первых коэффициентов $a_k$:

$$x^0:\ a_1=0;$$

$$x:\ 2\cdot 1\cdot a_2+2a_2-a_0+\gamma=0,\quad 4a_2=a_0-\gamma\ \ (\text{полагаем } \gamma{=}1,\ \ a_0{=}0)\ \Rightarrow\ a_2{=}-\frac{1}{4};$$

$$x^2:\ 6a_3+3a_3-a_1=0\ \Rightarrow\ a_3=0;$$

$$x^3:\ 4\cdot 3\cdot a_4+4a_4-a_2+\gamma\frac{1}{8}=0\ \Rightarrow\ a_4=-\frac{3}{128}.$$

Получим

$$y_2(x)=y_1(x)\ln|x|-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{128}x^4+\ldots,\quad x>0.$$

*Все решения исходного ДУ* определяются по формуле $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где $C_1,C_2$ — произвольные постоянные. □

**25.12.** $xy''+y'+xy=0$ (уравнение Бесселя порядка $\nu=0$), $x>0$.

**25.13.** $xy''-xy'-y=0$.

**25.14.** $x(x-1)^2y''+x(x-1)y'-y=0$.

**25.15.** $xy''+2y'+xy=0$.

**25.16.** $2x^2y''+(3x-2x^2)y'-(x+1)y=0$.

**25.17.** $xy''+y'+2y=0$.

**25.18.** $x(x-1)y''+(-1+3x)y'+y=0$.

**25.19.** Уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-1/4)y=0$, $x>0$, привести с помощью линейной замены искомой функции к ЛОДУ с постоянными коэффициентами и проинтегрировать исходное ДУ.

**25.20.** Проверить, что функция $y=x^{-1}J_1(x)$ — частное решение уравнения $xy''+3y'+xy=0$.

**25.21.** Выразить функции Бесселя $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ через элементарные функции.

**Контрольный вопрос.** Указать, имеют ли предложенные уравнения решения в виде степенного или обобщённого степенного ряда по степеням $x$: **а)** $(1+x)+3xy'+y=0$; **б)** $x^2y''+y\ln(1+x^2)=0$; **в)** $x^2y''+xy'+(x-4)y=0$; **г)** $4xy''+2y'+y=0$.

**Мини-самоконтроль.** Найти ФСР каждого из данных уравнений в виде степенных или обобщённых степенных рядов по степеням $x$: **а)** $(1-x)y''-2y'+y=0$; **б)** $xy''+y\ln(1-x)=0$; **в)** $xy''+2y'+xy=0$; **г)** $xy''+y=0$.

# § 26. Линейные однородные уравнения второго порядка. Колебательный характер решений. Краевые задачи

*Нуль решения. Колеблющиеся и неколеблющиеся решения. Теорема о конечности числа нулей нетривиального решения ЛОДУ второго порядка на отрезке. Теорема Штурма о сравнении. Оценка расстояния между соседними нулями нетривиального решения. Теорема Штурма о нулях двух линейно независимых решений. Краевые условия. Краевая задача. Функция Грина.*

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad p, q \in C(J), \quad J = [a, b]. \tag{26.1}$$

*Нулём* решения $y = y(x)$, $x \in J$, называется значение аргумента $x_1 \in J$, при котором выполнено условие $y(x_1) = 0$.

*Нуль* $x_1$ нетривиального решения $y = y(x)$, $x \in J$, ДУ (26.1) *не может быть кратным*, т. е. если $y(x_1) = 0$, то $y'(x_1) \neq 0$.

Любое нетривиальное решение ДУ (26.1) *не может иметь бесконечное число нулей* на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subseteq J$.

Решение называется *колеблющимся* на промежутке $|\alpha, \beta| \subseteq J$, если оно имеет на нём не менее двух нулей, в противном случае — *неколеблющимся.*

Нули $x_1$ и $x_2$ решения $y = y(x)$, $x \in J$, называются *последовательными* (*соседними*), если $y(x_1) = y(x_2) = 0$, но $y(x) \neq 0$, если $x \in (x_1, x_2)$.

**Теорема Штурма о чередовании нулей.** *Пусть* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *— два линейно независимых решения ЛОДУ* (26.1). *Если* $x_1$ *и* $x_2$ *— последовательные нули одного решения, то на отрезке* $[x_1, x_2]$ *расположен точно один нуль* $x_*$ *другого решения, причём* $x_* \in (x_1, x_2)$.

Исследование колеблемости решения ДУ (26.1) $(p, p', q \in C)$ можно ограничить ЛОДУ *в канонической форме*, так как с помощью линейного преобразования $y = \alpha(x)z$, $\alpha(x) = \exp\{-(1/2)\int p(x)\,dx\}$, ДУ (26.1) приводится к виду

$$z'' + G(x)z = 0, \quad G(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x). \tag{26.2}$$

В силу неравенства $\alpha(x) > 0$ соответствующие решения $y(x)$ и $z(x)$ имеют одни и те же нули.

Рассмотрим два ЛОДУ в канонической форме:

$$y'' + r(x)y = 0 \tag{\textbf{I}}$$

и

$$y'' + R(x)y = 0, \tag{\textbf{II}}$$

где $r, R \in C(J)$.

**Теорема Штурма о сравнении.** *Если коэффициенты уравнений* (**I**) *и* (**II**) *удовлетворяют неравенству*

$$r(x) \leqslant R(x), \quad x \in J, \tag{\textbf{III}}$$

*то между (нестрого) любыми последовательными нулями любого нетривиального решения $y = y_1(x)$ ДУ* (**I**) *расположен хотя бы один нуль любого решения $y = y_2(x)$ ДУ* (**II**).

С помощью этой теоремы легко установить, что все нетривиальные решения ДУ (**I**) являются неколеблющимися на $J$, если $r(x) \leqslant 0$, $x \in J$.

**Оценка расстояния между соседними нулями.** Если коэффициент $G(x)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$0 < m^2 \leqslant G(x) \leqslant M^2, \quad x \in [a, b],$$

то расстояние между последовательными нулями $x_1$ и $x_2$ любого нетривиального решения ЛОДУ (26.2) удовлетворяет оценке

$$\pi/M \leqslant |x_1 - x_2| \leqslant \pi/m. \tag{26.3}$$

**26.1.** При каких значениях параметров $p$ и $q$ любое нетривиальное решение ДУ $y'' + py' + qy = 0$ с постоянными коэффициентами $p, q \in \mathbb{R}$ является колеблющимся в достаточно большом интервале?

Решение. Рассмотрим случай, когда корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ — действительные числа. Тогда любое решение ДУ имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$, если $\lambda_2 = \lambda_1$. Отсюда очевидно, что любое нетривиальное решение не может иметь более одного нуля на всей числовой прямой, т. е. является неколеблющимся на $\mathbb{R}$.

Пусть теперь $\lambda_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ — комплексные числа и, следовательно, $p^2/4 - q < 0$. Обозначим $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a = -p/2$, $b = \sqrt{q - p^2/4}$. Тогда любое решение рассматриваемого ДУ допускает представление

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx = A e^{ax} \sin(bx + \varphi_0),$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi_0$, определяемое из системы $C_1/A = \sin\varphi_0$, $C_2/A = \cos\varphi_0$ — новые произвольные постоянные. Из полученного представления следует, что нуль любого нетривиального решения встречается периодически с периодом $T = \pi/b$, где $b = \sqrt{q - p^2/4}$.

Итак, при выполнении условия $q > p^2/4$ *любое нетривиальное решение ДУ является колеблющимся на любом интервале* $(\alpha, \beta)$, $\beta - \alpha > 2T$. □

**26.2.** Исследовать колебательный характер решений уравнения Эйлера $x^2y'' + a^2y = 0$, $0 < a^2 < 1/4$, в интервале $(0, +\infty)$.

**26.3.** При каких значениях параметров $a$ и $b$ нетривиальные решения ДУ Эйлера $x^2y'' + axy' + by = 0$ являются: **а)** неколеблющимися на интервале $(0, +\infty)$; **б)** колеблющимися в любом достаточно большом интервале?

**В задачах 26.4–26.9 оценить расстояние между последовательными нулями любого нетривиального решения следующих уравнений на заданном отрезке $J$.**

**26.4.** $y'' + (3x + 1)y = 0$, $J = [3, 33]$.

Решение. Данное ДУ имеет канонический вид (26.2), где $G(x) = 3x + 1$, при этом $m^2 = \inf\limits_{x\in J}(3x+1) = 10$, $M^2 = \sup\limits_{x\in J}(3x+1) = 100$. Применяя неравенства (26.3), получим следующую оценку расстояния $d = |x_1 - x_2|$ между соседними нулями $x_1$ и $x_2$ любого нетривиального решения ДУ на отрезке $J$:

$$0,314 < \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{\sqrt{100}} \leqslant d \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{10}} < 0,994.$$ □

**26.5.** $xy'' + 2y' + x^4y = 0$, $J = [1, 10]$.

Решение. Предварительно приведём данное ДУ к каноническому виду с помощью замены $y = \alpha(x)z$, где $\alpha(x) = \exp\{-\int(1/x)\,dx\} = 1/x$. Вычислим

$$y' = -\frac{1}{x^2}z + \frac{1}{x}z', \quad y'' = \frac{2}{x^3}z - \frac{2}{x^2}z' + \frac{1}{x}z''.$$

Преобразованное уравнение примет вид $z'' + x^2z = 0$. Оценим инвариант ДУ $G(x) = x^2$ снизу и сверху на отрезке $[1, 10]$. Получим оценку: $m^2 = 1 \leqslant x^2 \leqslant 10^2 = M^2$. Тогда в силу двойного неравенства (26.3) имеем следующие оценки расстояния $d$ между последовательными нулями $x_1$ и $x_2$ любого нетривиального решения данного ДУ на отрезке $J$:

$$0,314 < \pi/10 \leqslant d \leqslant \pi < 3,1416.$$ □

**26.6.** $\sqrt{x}y'' + y = 0$, $J = [1, 100]$.

**26.7.** $y'' + x^2y = 0$, $J = [1, 20]$.

**26.8.** $(x+1)y'' + 2y' + x^2y = 0$, $J = [10, 100]$.

**26.9.** $y'' - 4xy' + (8x^2 - 2)y = 0$, $J = [1, 10]$.

**26.10.** Описать колебательный характер нетривиальных решений уравнения Эйри $y'' - xy = 0$ на интервалах $(-\infty, 0)$ и $[0, +\infty)$.

**26.11.** Доказать, что если одно нетривиальное решение уравнения $y'' + r(x)y = 0$, $r(x) \in C[0, +\infty)$, имеет бесконечно много нулей на $\mathbb{R}_+$, то этим свойством обладает и любое другое решение уравнения.

**26.12.** Доказать, что расстояние между последовательными нулями любого нетривиального решения ДУ $x^3y'' + xy' + (x^3 - 1/4)y = 0$, $0 < x < +\infty$, стремится к $\pi$ при $x \to +\infty$.

**26.13.** Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения Бесселя нулевого порядка $xy'' + y' + xy = 0$ имеет бесконечно много нулей $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ на $\mathbb{R}_+$, причём $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \pi$.

**26.14.** Доказать, что расстояние между последовательными нулями всякого ($\not\equiv 0$) решения уравнения Бесселя $\nu$-го порядка ($\nu \neq 0$) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ стремится к $\pi$ при $x \to +\infty$.

Наряду с ЛОДУ (26.1) рассмотрим ЛНДУ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad p, q, f \in C[a, b]. \tag{26.4}$$

Как известно, *начальная задача Коши* для ДУ (26.4) состоит в нахождении его решения, удовлетворяющего *начальным условиям* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где $x_0 \in [a, b]$, $y_0$, $y'_0$ — любые заданные числа. Эта задача всегда *однозначно разрешима*, причём её решение определено на всём отрезке $[a, b]$.

В *краевой задаче* для ДУ (26.4) задаются *дополнительные условия при двух различных значениях* $x$. Такие условия называются *краевыми.* Мы будем рассматривать **линейные краевые условия:** левые части условий — линейные комбинации значений искомой функции и её производной в заданных точках $x_i$, $i = 1, 2$, а правые части — заданные постоянные числа.

Примеры линейных краевых условий для ДУ (26.4):

$$\alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = A, \quad \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = B, \tag{26.5}$$

где $x_1 < x_2$, $x_i \in [a, b]$, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2$.

Если правая часть краевого условия равна нулю, то условие называется *однородным*, если не равна нулю — *неоднородным*. Краевая задача называется *однородной*, если само ДУ и краевые условия (26.5) линейные и однородные.

В отличие от начальной задачи *краевая задача может иметь как одно, так и много решений, а может и не иметь решения.*

**Теорема об альтернативе.** *Рассмотрим ЛНДУ* (26.4) *с двумя линейными краевыми условиями. Возможны только два случая*:

1) *краевая задача имеет единственное решение при любых правых частях в ДУ и краевых условиях;*

2) *соответствующая однородная задача имеет бесконечно много решений, неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при всех других — не имеет решений.*

Эта теорема справедлива и для ЛНДУ $n$-го порядка.

**Контрольные вопросы**

**1.** Известно, что ЛДУ $y'' + y = f(x)$, $f \in C[0, 2\pi]$ — заданная функция, имеет решение, удовлетворяющее краевому условию $y(0) = a$, $y(\pi) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Является ли это решение единственным?

**2.** Пусть $y_1(x)$ — решение краевой задачи (26.4), (26.5), $y_0(x)$ — решение соответствующей однородной краевой задачи. Доказать, что их сумма $y_0(x) + y_1(x)$ есть решение неоднородной краевой задачи (26.4), (26.5).

**3.** Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения неоднородной краевой задачи (26.4), (26.5). Доказать, что их разность $y_1(x) - y_2(x)$ является решением соответствующей однородной краевой задачи.

Рассмотрим подробно линейную краевую задачу для ЛНДУ (26.4) с линейными однородными краевыми условиями вида

$$\begin{gathered} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{26.6}$$

Решение этой задачи может быть получено либо конструктивно путём построения общего решения ЛНДУ (26.4), которое затем надо подставить в краевые условия (26.6) для определения (если это возможно) значений произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ из формулы общего решения, либо с помощью функции Грина, если она существует. Последний метод особенно полезен при решении краевой задачи сразу для нескольких неоднородностей $f(x)$.

*Функцией Грина* краевой задачи (26.4), (26.6) называется функция $G(x, s)$, $x \in [a, b]$, $s \in (a, b)$, обладающая следующими свойствами:

1) для каждого фиксированного $s$ функция $y(x) = G(x, s)$, $x \neq s$, удовлетворяет соответствующему ЛОДУ (26.1);

2) при $x = a$ и $x = b$ функция $y(x) = G(x, s)$ удовлетворяет заданным краевым условиям (26.6);

3) при $x = s$ функция $G(x, s)$ непрерывна по $x$, а её производная $G'_x(x, s)$ терпит разрыв — скачок, равный 1, т. е.

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad G'_x(s+0, s) = G'_x(s-0, s) + 1. \tag{26.7}$$

*Условием существования функции Грина для краевой задачи* (26.4), (26.6) *является единственность решения линейной однородной краевой задачи* (26.1), (26.6) (таковым является решение $y = 0$).

**Контрольные вопросы**

**1.** Является ли функция $G(x, s)$ непрерывной, если $a \leqslant x \leqslant b$, $a < s < b$?

**2.** До какого порядка существует производная по $x$ функции $G(x, s)$, $x \neq s$?

**3.** Выполнены ли условия существования функции Грина для краевой задачи $y'' + 4y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(2) = 0$ ?

При выполнении условий существования *функция Грина* имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} h_1(s) y_1(x), & a \leqslant x \leqslant s, \\ h_2(s) y_2(x), & s \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{26.8}$$

где $y_1$ и $y_2$ — нетривиальные решения ЛОДУ (26.1), удовлетворяющие соответственно первому и второму из краевых условий (26.6), множители $h_1$ и $h_2$ зависят от $s$ и определяются из требования, чтобы функция (26.8) удовлетворяла условиям (26.7), т. е.

$$h_1 y_1(s) = h_2 y_2(s), \quad h_2 y'_2(s) = h_1 y'_1(s) + 1. \tag{26.9}$$

Если функция Грина $G(x, s)$ существует, то решение краевой задачи (26.4), (26.6) *записывается в следующей интегральной форме*:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds.$$

**В задачах 26.15–26.25 найти решения, удовлетворяющие поставленным краевым условиям.**

**26.15.** $y'' + \pi^2 y = -2\pi \sin \pi x$ : **а)** $y(0) = 0$, $y(1) = -1$; **б)** $y(0) = 0$, $y'(1/2) = \pi/2$.

Р е ш е н и е. Построение искомых решений в обоих случаях проведём конструктивно. Предварительно найдём общее решение данного ДУ. Получим $y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x + x \cos \pi x$. Определим теперь $C_1$ и $C_2$ так, чтобы были выполнены краевые условия:

**а)** подставив общее решение в краевые условия а), получим систему

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \quad -1 = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi - 1,$$

откуда следует, что $C_1 = 0$, а $C_2$ — любое число, т. е. *первая краевая задача имеет бесконечно много решений* $y = C \sin \pi x + x \cos \pi x$, $C \in \mathbb{R}$;

**б)** для краевых условий б) получаем систему для определения $C_1$ и $C_2$:

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0;$$

$$\pi/2 = -C_1 \pi \cos \pi/2 + C_2 \pi \cos \pi/2 + \cos \pi/2 - (1/2) \sin \pi/2 \;\Rightarrow\; C_1 = 1,$$

т. е. система несовместна и, следовательно, *вторая краевая задача не имеет решения.*

**Замечание.** В нашем случае линейная однородная краевая задача $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1/2) = 0$, имеет ненулевые решения вида $y = C \sin \pi x$, $C \in \mathbb{R}$. Поэтому имеет место второй случай альтернативы, причём для первого краевого условия искомых решений существует бесконечно много, а для второго — краевая задача не имеет решения. □

**26.16.** $y'' + y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y(+\infty) = 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Р е ш е н и е. Общее решение ДУ имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Используем сначала второе краевое условие $y(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$. Из представления решения $y(x)$ следует, что для искомого решения необходимо положить $C_1 = 0$, т. е. $y(x) = C_2 e^{-2x}$. Удовлетворим теперь $y(x)$ условию $y(0) = 1$: $1 = C_2 e^0 \Rightarrow C_2 = 1$. *Искомое решение краевой задачи* есть $y(x) = e^{-2x}$. □

**26.17.** $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$, $x > 0$; $y(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 3$.

Р е ш е н и е. Общее решение уравнения (уравнения Эйлера) находим известным способом: $y = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$, $x > 0$. Первое краевое условие удовлетворяется при $C_1 = 0$, второе — приводит к уравнению для $C_2$: $3 = C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 3$. *Искомое решение* имеет вид $y = 3x^2$, $x > 0$. □

**26.18.** $y'' + y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(1) + y(1) = 1$.

Р е ш е н и е. Общее решение исходного ДУ $y = C_1 + C_2 e^{-x}$ подставим в краевые условия, получим систему для определения $C_1$ и $C_2$:

$$C_1 + C_2 = 0; \; -C_2 e^{-1} + C_1 + C_2 e^{-1} = 1 \Rightarrow C_1 = 1, \; C_2 = -1.$$

Таким образом, $y = 1 - e^{-x}$ есть *решение данной краевой задачи.* □

**26.19.** $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

**26.20.** $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = 0$, $y'(\pi/2) = 1$.

**26.21.** $y'' - y' = 0;\ \ y(0) + y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1 + e.$

**26.22.** $y'' - 2y' - 3y = 0;\ \ y(0) = 1,\ \ y(+\infty) = 0.$

**26.23.** $y'' + y = 1;\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0.$

**26.24.** $x^2y'' - xy' - 3y = 0,\ \ x > 0;\ \ y(1) = 1,\ \ y(+\infty) = 0.$

**26.25.** $x^2y'' - 2y = \cos\ln x,\ \ x > 0;\ \ y'(1) = 2,\ \ y(1) = 0.$

**Для каждой из следующих 26.26–26.31 краевых задач, где $\boldsymbol{f(x)}$ — непрерывная функция на рассматриваемом промежутке, построить функцию Грина.**

**26.26.** $y'' = f(x);\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Решение. Общее решение соответствующего ЛОДУ $y'' = 0$ есть $y_{\text{oo}} = C_1 + C_2x$. Для данной краевой задачи функция Грина существует, так как линейная однородная краевая задача

$$y'' = 0, \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{26.10}$$

имеет, очевидно, только нулевое решение.

Для построения функции Грина $G(x,s)$ надо найти две ненулевые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, каждая из которых является решением ЛОДУ $y'' = 0$, причём решение $y_1(x)$ удовлетворяет первому в (26.10) краевому условию $y(0) = 0$, а решение $y_2(x)$ удовлетворяет второму — $y(1) = 0$.

Из условия $y_1(0) = 0$ получаем $C_1 + C_2 \cdot 0 = 0$, т. е. $C_1 = 0$, а $C_2$ — любое число. Полагая $C_2 = 1$, запишем искомую функцию $y_1(x) = x$. Аналогично строится решение $y_2(x)$, $y_2(1) = 0$, в качестве которого может быть взято $y_2(x) = 1 - x$.

Функцию Грина $G(x,s)$ предлагаемой краевой задачи определим по формуле (26.8), которая в нашем случае примет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} h_1(s)x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ h_2(s)(1-x), & s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

где функции $h_1$ и $h_2$ определяются из условий (26.9):

$$h_2(s)\cdot(1-s) = h_1(s)\cdot s, \quad -h_2(s) = h_1(s) + 1.$$

Отсюда следует, что $h_1(s) = s - 1$, $h_2(s) = -s$.

Таким образом, *искомая функция Грина* определяется соотношениями

$$G(x,s) = \begin{cases} (1-s)x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ s(x-1), & s \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \qquad \square$$

**26.27.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = f(x);\ \ y(1) = 0,\ \ y(2) = 0;\ \ 1 \leqslant x \leqslant 2.$

Решение. Построим общее решение соответствующего ЛОДУ (уравнения Эйлера) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ с помощью решений $y = x^\lambda$, где число $\lambda$ удовлетворяет характеристическому уравнению $\lambda(\lambda-1)-2\lambda+1=0$, из которого находим $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Тогда $y_{oo}=C_1x+C_2x^2$ есть общее решение ЛОДУ.

Условие существования функции Грина выполнено, так как соответствующая линейная однородная краевая задача

$$x^2y''-xy'+2y=0;\quad y(1)=0,\quad y(2)=0,$$

имеет только нулевое решение:

$$y|_{x=1}=C_1+C_2=0,\quad y|_{x=2}=2C_1+4C_2=0\ \Rightarrow\ C_1=0,\quad C_2=0.$$

Функцию Грина строим, как и выше, на основе нетривиальных решений $y_1(x)$, $y_1(1)=0$ и $y_2(x)$, $y_2(2)=0$ соответствующего ЛОДУ. Получаем $y_1(x)=x-x^2$ и $y_2(x)=2x-x^2$.

Функция Грина данной краевой задачи согласно формуле (26.8) допускает представление

$$G(x,s)=\begin{cases} h_1(s)(x-x^2), & 1\leqslant x\leqslant s,\\ h_2(s)(2x-x^2), & s\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

где функции $h_1$ и $h_2$ определяются из условий (26.9):

$$h_2(s)(2s-s^2)=h_1(s)(s-s^2),\quad h_2(s)(2-2s)=h_1(s)(1-2s)+1.$$

Отсюда находим

$$h_1(s)=(2-s)s^{-1},\quad h_2(s)=(1-s)s^{-1}.$$

Окончательно *искомая функция Грина* имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases} (2-s)s^{-1}(x-x^2), & 1\leqslant x\leqslant s,\\ (1-s)s^{-1}(2x-x^2), & s\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}\qquad\square$$

**26.28.** $y''+y=f(x);\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=0.$

**26.29.** $y''-2y'+y=f(x);\ y(0)=0,\ y(1)=0.$

**26.30.** $y''-y=f(x);\ y(0)=0,\ y(+\infty)=0.$

**26.31.** $x^2y''+xy'-y=f(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0,\ y(1)=y'(1).$

**Мини-самоконтроль. 1.** Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого нетривиального решения следующих уравнений: **а)** $y''+3xy=0$, $3\leqslant x\leqslant 12$; **б)** $xy''+2y'+x(x^2+1)y=0$, $1\leqslant x\leqslant 10$. **2.** Доказать, что при $x\to+\infty$ последовательные нули всякого нетривиального решения уравнения $y''+(x^2+1)y=0$ неограниченно сближаются. **3.** Решить следующие краевые задачи: **а)** $y''-y'=0$; $y(0)=2$, $y'(1)-y(1)=2$; **б)** $y''-y'-2y=0$; $y'(0)=1$, $y(+\infty)=0$. **4.** Построить функцию Грина краевой задачи: **а)** $y''+y'=f(x)$; $y(0)=0$, $y(+\infty)=0$; **б)** $y''-y=f(x)$; $y'(0)=0$, $y'(1)+y(1)=0$.

# Варианты контрольной работы к главе VI

## Вариант I

1. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y = 4\operatorname{tg}^3 2x$.

2. Найти общее решение уравнения $xy'' + (1-x)y' - y = e^{2x}$, если известно, что оно допускает решение в виде полинома или функции $e^{ax}$.

3. Проинтегрировать уравнение методом Эйлера $y''' + y' = x^2 + \sin x$.

4. Доказать, что расстояние между последовательными нулями любого ненулевого решения уравнения $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$, $0 < x < +\infty$, стремится к $\pi$ при $x \to +\infty$.

## Вариант II

1. Проинтегрировать уравнение $y'' + (1-x)y' + y = 1$, если известны два его частных решения $y_1(x) = 1$ и $y_2(x) = x$.

2. Проинтегрировать уравнение $x^2y'' - 2y = \dfrac{3x^2}{x+1}$.

3. Найти общее решение уравнения, применяя метод Эйлера для нахождения частного решения: $y^{(4)} - y = 4\sin x + 8e^{-x} + 1$.

4. Используя метод Коши, построить решение линейного неоднородного уравнения $y'' - 4y = f(x)$, $f \in C[a,b]$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ $(x_0 \in (a,d),\ y_0, y_0' \in \mathbb{R})$.

## Вариант III

1. Доказать, что решение задачи Коши $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, существует и единственно. Указать интервал, на котором оно заведомо существует, а затем построить это решение.

2. Решить уравнение $y'' + 4y = \sin x + x\cos x + \sin 2x$, используя метод Эйлера при построении частного решения.

3. Проинтегрировать уравнение $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = (2x+3)^2$.

4. Найти фундаментальную систему решений уравнения $y'' - x^2y = 0$ в виде рядов по степеням $x$, нормированную в точке $x = 0$, и построить общее решение.

# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 27. Основные определения и понятия. Метод исключения

*Линейная система дифференциальных уравнений (ЛДС, однородная и неоднородная). Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Принцип суперпозиции. Определитель Вронского. Необходимый признак линейной зависимости и достаточный признак ЛНЗ $n$ вектор-функций. Фундаментальная система решений. Критерий линейной независимости $n$ решений линейной однородной системы. Соответствующее линейной системе матричное уравнение. Фундаментальная (интегральная, базисная) матрица (ФМ). Связь между двумя фундаментальными матрицами. Формула Абеля — Лиувилля — Остроградского. Метод исключения.*

*Линейной системой дифференциальных уравнений* в нормальной форме (*$n$-мерной линейной системой*) называется система вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$

где $a_{ij}$, $f_i$ — непрерывные на промежутке $|a,b|$ функции.

Обозначим $\boldsymbol{x} = \operatorname{colon}(x_1,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{f}(t) = \operatorname{colon}(f_1(t),\ldots,f_n(t))$, $A(t) = (a_{ij}(t))$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \operatorname{colon}(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$. Тогда ЛДС можно переписать в векторно-матричной форме в виде *векторного уравнения*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t). \tag{27.1}$$

**Теорема о существовании и единственности решения для ЛДС.** *Если коэффициенты системы $a_{ij}(t)$ и неоднородные члены $f_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, — непрерывные функции на промежутке $|a,b|$, то существует единственное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t_0 \in |a,b|, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{27.2}$$

*причём это решение заведомо определено на промежутке $|a,b|$.*

Если в системе (27.1) $\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$, то система

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{27.3}$$

называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной.*

Как и для линейного однородного уравнения $n$-го порядка, для линейной однородной дифференциальной системы (27.3) имеет место **принцип суперпозиции**:

*если* $\boldsymbol{x}_1(t)$ *и* $\boldsymbol{x}_2(t)$ *— решения системы* (27.3), *то вектор-функция* $\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1(t) + C_2\boldsymbol{x}_2(t)$, *где* $C_1$ *и* $C_2$ *— произвольные постоянные, также является решением системы* (27.3).

Если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ — комплексное решение системы (27.3), то оно порождает два действительных решения $\boldsymbol{x}_1(t) = \operatorname{Re}\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t) = \operatorname{Im}\boldsymbol{x}(t)$.

Будем говорить, что вектор-функции $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ *линейно зависимы* над полем $\mathbb{R}$ (над полем $\mathbb{C}$) на промежутке $|a, b|$, если существуют такие числа $\alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\alpha_i \in \mathbb{C})$, $i = \overline{1, n}$, не все одновременно равные нулю, что для всех $t \in |a, b|$ имеем

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t) + \alpha_2\boldsymbol{x}_2(t) + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n(t) \equiv 0.$$

В противном случае эти вектор-функции называются *линейно независимыми.*

**Контрольный вопрос.** Пусть векторные функции $\boldsymbol{x}_1(t)$ и $\boldsymbol{x}_2(t)$ являются линейно независимыми на промежутке $|a, b|$. Являются ли ЛНЗ постоянные векторы $\boldsymbol{x}_1(t_0)$ и $\boldsymbol{x}_2(t_0)$, $t_0 \in |a, b|$?

*Фундаментальной системой решений (базисом решений)* системы (27.3) называется совокупность $n$ линейно независимых решений $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$, $t \in |a, b|$, системы.

**Общее решение** линейной однородной системы (27.3) в области $G = |a, b| \times \mathbb{R}^n$ определяется по формуле

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1(t) + C_2\boldsymbol{x}_2(t) + \ldots + C_n\boldsymbol{x}_n(t), \tag{27.4}$$

где $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ — ФСР системы (27.3), $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим $\boldsymbol{x}_i(t) = \operatorname{colon}(x_{1i}(t), \ldots, x_{ni}(t))$. Тогда покоординатно **общее решение** (27.4) можно записать в виде

$$\begin{gathered} x_1 = C_1x_{11}(t) + C_2x_{12}(t) + \ldots + C_nx_{1n}(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1x_{n1}(t) + C_2x_{n2}(t) + \ldots + C_nx_{nn}(t). \end{gathered}$$

Если $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ — фундаментальная система решений ДС (27.3), $t \in |a, b|$, то матрица $X(t) = [\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)]$ является решением соответствующего матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \tag{27.5}$$

для которого выполнено условие $\det X(t) \neq 0$, $t \in |a, b|$.

Непрерывно дифференцируемая матрица $X = X(t)$, $\det X(t) \neq 0$, $t \in |a, b|$, удовлетворяющая уравнению (27.5), называется *фундаментальной* (или *интегральной*, или *базисной*).

Вектор-столбцы фундаментальной матрицы образуют базис пространства решений линейной однородной системы (27.3).

**Общее решение** системы (27.3) можно представить в векторно-матричной форме $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{C}$, где $X(t)$ — ФМ уравнения (27.5), $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_n)^\top$ — произвольный постоянный вектор, а решение задачи Коши (27.2), если $\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$, имеет вид $\boldsymbol{x} = X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0$.

Фундаментальная матрица $X(t)$, удовлетворяющая условию $X(t_0) = E$, называется *нормированной в точке* $t_0$. Тогда решение начальной задачи (27.2), где $\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$, допускает представление $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{x}(t_0)$.

Определитель $W(t)$ матрицы $X(t) = [\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)]$, $W(t) = \det X(t)$, называется *определителем Вронского* (*вронскианом*) системы вектор-функций $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$, $t \in |a, b|$.

Пусть $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ — $n$ решений системы (27.3). Тогда для определителя Вронского этой совокупности решений имеет место векторный аналог *формулы Абеля — Лиувилля — Остроградского*

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau,$$

где $t_0 \in |a, b|$ — любая фиксированная точка, след $\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ (часто след матрицы $A(t)$ обозначают $\operatorname{Sp} A(t)$).

Для того чтобы матрица решений $X = X(t)$ уравнения (27.5) *была фундаментальной на промежутке* $|a, b|$, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского $W(t) = \det X(t)$ *был отличен от нуля хотя бы в одной точке промежутка* $|a, b|$.

Две ФМ $X_1(t)$ и $X_2(t)$ уравнения (27.5) связаны *соотношением* $X_1(t) = X_2(t)S$, где $S$ — некоторая постоянная невырожденная матрица, и наоборот, если $X(t)$ — некоторая фундаментальная матрица уравнения (27.5), а $S$ — любая постоянная невырожденная матрица, то матрица $X_1(t) = X(t)S$, $t \in |a, b|$, также является фундаментальной.

**Контрольные вопросы**

**1.** Пусть $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ — $n$ ЛНЗ решений системы (27.3): **а)** могут ли постоянные векторы $\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t_0)$, $t_0 \in |a, b|$, быть ЛЗ? **б)** может ли график $W = W(t)$, где $W(t)$ — вронскиан этой совокупности решений, пересекать ось $Ot$?

**2.** Указать возможный интервал существования и единственности решения задачи Коши: $\dot{x} = \dfrac{1}{1-t}x + \dfrac{1}{2t+1}y + e^t$, $\dot{y} = x\operatorname{tg} t + y\sin t + \dfrac{1}{t+1}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Методом исключения, ранее используемым (см. § 15) для любых дифференциальных систем, $n$-мерная линейная система сводится или к одному линейному уравнению $n$-го порядка относительно одной неизвестной, или к нескольким таким уравнениям, причём сумма их порядков равна $n$.

Иногда при таком исключении искомых переменных получается, что сумма порядков построенных уравнений равна числу $m$, $m > n$. Если эти уравнения удаётся проинтегрировать, то совокупность решений искомых компонент содержит $m$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_m$, $m > n$. Подставив найденные компоненты в исходные уравнения, получим связь между постоянными.

Метод исключения можно применять и к линейным системам, не приведённым к нормальному виду.

### Решить системы 27.1–27.24 методом исключения.

**27.1.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

Решение. Исключим $y$ из системы. Для этого из первого уравнения найдём $y = 2x - \dot{x}$ и подставим $y$, учитывая, что $\dot{y} = 2\dot{x} - \ddot{x}$, во второе уравнение системы, получим $2\dot{x} - \ddot{x} = x + 2(2x - \dot{x})$. Это линейное однородное уравнение второго порядка относительно $x$: $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Тогда *общее решение системы* определяется по формуле

$$x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \quad y = 2x - \dot{x} = 2e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t) -$$

$$- e^{2t}(-C_1\sin t + C_2\cos t - 2C_1\cos t - 2C_2\sin t) = e^{2t}(C_1\sin t - C_2\cos t). \qquad \square$$

**27.2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + e^t, \\ \dot{y} = -x - 2y + 2e^t. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Исключим $x$ из системы. Из второго уравнения выразим $x = -\dot{y}-2y+2e^t$ и, подставив $x$ в первое уравнение, получим ЛНДУ второго порядка $\ddot{y}-y = 3e^t$, общее решение которого находим, используя метод неопределённых коэффициентов: $y = C_1e^t+C_2e^{-t}+3te^t/2$. Тогда *общее решение* исходной системы определяется соотношениями

$$x = -\frac{d}{dt}\left(C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{3}{2}te^t\right) - 2\left(C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{3}{2}te^t\right) + 2e^t =$$

$$= -3C_1e^t - C_2e^{-t} - \frac{9}{2}te^t - \frac{5}{2}e^t, \quad y = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{3}{2}te^t. \qquad \square$$

**27.3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y, \\ \dot{y} = \left(\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{2}{t} - 2\right)x + \left(\dfrac{2}{t} - 2\right)y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Исключаем $y$. Из первого уравнения имеем $y = \dot{x}/2 - x$. Подставляя это значение $y$ во второе уравнение, получаем уравнение Эйлера $t^2\ddot{x} - 2t\dot{x} - 4x = 0$. Его определяющее уравнение $\lambda(\lambda-1) - 2\lambda - 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Отсюда следует *общее решение данной системы* $x = C_1t^4+C_2t^{-1}$, $y = \dot{x}/2 - x = -C_1t^4 + 2C_1t^3 - C_2t^{-1} - (C_2t^{-2})/2$. $\square$

**27.4.** $\begin{cases} x^2y' = -y - 2z, \\ x^2z' = 3y + 4z. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Исключая $z$, получаем уравнение $x^2y'' + (2x-3)y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0$, которое можно записать в стандартной форме $y'' + \dfrac{2x-3}{x^2}y' + \dfrac{2}{x^4}y = 0$. Сделаем попытку привести это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной по формуле $t = c\displaystyle\int\sqrt{\frac{2}{x^4}}\,dx = \frac{1}{x}$ $(c = -1/\sqrt{2})$. Выразим производные от $y$ по $x$ через производные по новой независимой переменной $t$, получим $y'_x = y'_tt'_x = y'_t/x'_t = -y'_tt^2$, $y''_{x^2} = (-y''_{t^2}t^2 - 2ty'_t)(-t^2) = (y''_{t^2}t^2+2ty'_t)t^2$. Подставив эти выражения в исходное уравнение, имеем линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами $y''_{t^2} + 3y'_t + 2y = 0$.

Тогда *общее решение системы* имеет вид

$$y = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} = C_1e^{-1/x} + C_2e^{-2/x}, \quad z = -\frac{y}{2} - \frac{x^2y'}{2} = -C_1e^{-1/x} - \frac{3}{2}C_2e^{-2/x}. \quad \square$$

**Замечание.** Замену независимой переменной $t = 1/x$ можно сделать сразу в исходной системе. Она приведёт ДС к линейной системе с постоянными коэффициентами (см. далее § 28).

**27.5.** $\dot{x} = -z$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = x + y + z$.

Р е ш е н и е. Решим систему методом исключения, действуя по описанной в § 15 схеме. Дифференцируем первое уравнение системы по $t$ последовательно 2 раза, подставляя вместо $\dot{y}$ и $\dot{z}$ их значения из системы. Имеем совокупность уравнений

$$\dot{x} = -z, \quad \ddot{x} = -\dot{z} = -x - y - z, \quad \dddot{x} = -\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} = -\dot{x} - y - z.$$

Определим $y$ и $z$ из первых двух уравнений $z = -\dot{x}$, $y = -\ddot{x} - x + \dot{x}$ и подставим эти выражения в третье уравнение, получим ЛОДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами $\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0$, *общее решение* которого есть $x = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t$. Наконец, подставляя $x$ в полученные ранее представления для $y$ и $z$, находим $z = -C_1e^t + C_2\sin t - C_3\cos t$, $\quad y = -C_1e^t - C_2\sin t + C_3\cos t$. $\square$

**27.6.** $\ddot{x} = 3x - y, \ \ddot{y} = 4x - y.$

Решение. Исключаем $y$. Из первого уравнения находим $y = 3x - \ddot{x}$. Подставляя во второе уравнение, получаем $x^{(4)} - 2\ddot{x} + x = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$ — числа $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_{3,4} = -1$. Отсюда следует *общее решение исходной системы* $x = (C_1 + C_2t)e^t + (C_3 + C_4t)e^{-t}$, $y = 3x - \ddot{x} = 2(C_1 - C_2 + C_2t)e^t + 2(C_3 + C_4 + C_4t)e^{-t}$. $\square$

**27.7.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y + \cos t. \end{cases}$

**27.8.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 2e^{-t}. \end{cases}$

**27.9.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$

**27.10.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^t, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{2t}. \end{cases}$

**27.11.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + e^t\sin t, \\ \dot{y} = 4x - y + e^t\cos t. \end{cases}$

**27.12.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

**27.13.** $\begin{cases} t\dot{x} = -x + yt, \\ t^2\dot{y} = 4x + yt. \end{cases}$

**27.14.** $\begin{cases} \dot{x} = x - e^{2t}y, \\ \dot{y} = xe^{-2t} - y. \end{cases}$

**27.15.** $\begin{cases} t\dot{x} = -2x + 2y + t, \\ t\dot{y} = -x - 5y + t^2. \end{cases}$

**27.16.** $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ x^3z' + 6y = 0. \end{cases}$

**27.17.** $\begin{cases} t^2\dot{x} + t\dot{y} - y - t^2 = 0, \\ \dot{y} + x - t = 0. \end{cases}$

**27.18.** $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

**27.19.** $\begin{cases} \ddot{x} - x - \ddot{y} - \dot{y} = 0, \\ \dot{x} + \dot{y} - y = 0. \end{cases}$

**27.20.** $\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} = 4x + 3y, \\ 2\dot{x} - \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$

**27.21.** $\begin{cases} \ddot{x} - x + \ddot{y} + y = 0, \\ \dot{x} - x + \dot{y} = 0. \end{cases}$

**27.22.** $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$

**27.23.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2z + t^2 + 1, \\ \dot{y} = x - y + 2z + t - 1, \\ \dot{z} = x + y - z + 1. \end{cases}$

**27.24.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z + e^t, \\ \dot{y} = -2x + y + 2e^t, \\ \dot{z} = -x + y - z + 3e^t. \end{cases}$

**Мини-самоконтроль.** Проинтегрировать методом исключения системы: **1.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 4y; \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x; \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + \cos t + \sin t, \\ \dot{y} = x - y - \sin t; \end{cases}$ **4.** $\ddot{x} = y, \ \ddot{y} = -x$; **5.** $\dot{x} = y + t^2, \ \dot{y} = x + e^t$; **6.** $\ddot{x} = x - y, \ \ddot{y} = 2x - y$; **7.** $\dot{x} = y/t^2, \ \dot{y} = 3x + 3y/t$.

## § 28. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

*Линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Собственные значения (характеристические числа) и соответствующие собственные векторы матрицы. Линейная независимость собственных векторов матрицы, отвечающих различным собственным значениям. Число линейно независимых собственных векторов матрицы, отвечающих собственному значению кратности $k$. Построение действительного базиса решений системы методом Эйлера. Присоединённые векторы и жорданова цепочка.*

Рассмотрим *линейную однородную систему с постоянными коэффициентами*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

В векторно-матричной форме эта система записывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \tag{28.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{x} = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, $A = (a_{ij})$ — постоянная матрица с элементами $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Эта стационарная система, как и ЛОДУ $n$-порядка с постоянными коэффициентами, интегрируема в элементарных функциях.

Согласно **методу Эйлера** решение системы (28.1) строим в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma} e^{\lambda t}$, где $\lambda$ – постоянное число, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — ненулевой постоянный вектор, т. е.

$$x_1 = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = \gamma_2 e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad x_n = \gamma_n e^{\lambda t}. \tag{28.2}$$

После подстановки решения (28.2) в систему (28.1) получаем, что $(A - \lambda E)\boldsymbol{\gamma} = 0$. Отсюда следует, что число $\lambda$ удовлетворяет так называемому характеристическому уравнению $|A - \lambda E| = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — *собственные значения* матрицы $A$. Они называются также *характеристическими числами* системы (28.1).

Тогда в зависимости от характеристических чисел при построении действительной ФСР проводим следующие построения.

**1.** Любому простому характеристическому числу, например $\lambda = \lambda_1 \in \mathbb{R}$, соответствует базисное решение

$$x_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = \gamma_2 e^{\lambda_1 t}, \quad \ldots, \quad x_n = \gamma_n e^{\lambda_1 t},$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — собственный вектор матрицы $A$, соответствующий её собственному значению $\lambda_1$, его координаты удовлетворяют системе $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{\gamma} = 0$, которая подробно запишется в виде

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda_1)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0,\\
&a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_1)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_1)\gamma_n = 0.
\end{aligned}$$

**2.** Каждой простой паре комплексно сопряжённых характеристических чисел $\lambda_1 = a + bi$ и $\lambda_2 = a - bi$ соответствуют два линейно независимых действительных решения. Для их построения находим предварительно комплексное решение вида (28.2) для одного значения из этой пары, например $\lambda_1 = a + bi$, как и в случае **1**, $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\gamma} e^{(a+bi)t}$. Применив формулу Эйлера, представим решение $\boldsymbol{x}(t)$ в виде $\boldsymbol{x}(t) = \operatorname{Re}\boldsymbol{x}(t) + i\operatorname{Im}\boldsymbol{x}(t)$. Отсюда, отделив действительную и мнимую части $\boldsymbol{x}(t)$, получим два действительных линейно независимых решения

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \operatorname{Re}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}_2(t) = \operatorname{Im}\boldsymbol{x}(t).$$

Построение решения для второго корня $\lambda_2 = a - bi$ не проводим, оно будет комплексно сопряжённым с первым построенным комплексным решением и не приводит к новым действительным решениям.

**3.** В случае $k$-кратного корня $\lambda_0$, $k > 1$, которому соответствуют также $k$ линейно независимых собственных векторов матрицы $A$ (это будет иметь место при выполнении равенства $k = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_0 E)$), проводим построения, описанные в пункте **1**.

**4.** В случае $k$-кратного корня $\lambda_0$, $k > 1$, которому соответствуют лишь $m$ $(m < k)$ ЛНЗ собственных векторов, решения, отвечающие этому корню, можно строить методом неопределённых коэффициентов. Заметим, что число $m$ равно числу клеток Жордана, отвечающих корню $\lambda_0$ в нормальной жордановой форме $J$ матрицы $A$ и вычисляется по формуле $m = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_0 E)$. Искомые решения строим в виде

$$\begin{aligned} &x_1 = (a_{01} + a_{11}t + \ldots + a_{k-m\,1}t^{k-m})e^{\lambda_0 t},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_n = (a_{0n} + a_{1n}t + \ldots + a_{k-m\,n}t^{k-m})e^{\lambda_0 t}, \end{aligned} \tag{28.3}$$

которые* подставляем в исходную систему (28.1), далее после сокращения на $e^{\lambda_0 t}$ приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $t$. Для полученной алгебраической системы нужно найти её общее решение, при этом искомые коэффициенты $a_{01}, \ldots, a_{k-m\,n}$ зависят от $k$ произвольных постоянных.

*Другой способ построения решения* основан на нахождении *канонического базиса.*

Для любой матрицы существует базис, в котором матрица имеет жорданову форму. Каждой клетке с собственным значением $\lambda_0$ порядка $s \geqslant 1$ нормальной жордановой формы матрицы $A$ соответствует *жорданова цепочка* $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_s$ векторов базиса, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} &A\boldsymbol{h}_1 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_1, \quad \boldsymbol{h}_1 \neq 0,\\ &A\boldsymbol{h}_2 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A\boldsymbol{h}_s = \lambda_0 \boldsymbol{h}_s + \boldsymbol{h}_{s-1}. \end{aligned} \tag{28.4}$$

Вектор $\boldsymbol{h}_1$ является собственным для $\lambda_0$, векторы $\boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_s$ называются *присоединёнными.* Каждой совокупности $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_s$ в фундаментальной системе решений соответствуют $s$ *линейно независимых решений* $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_s(t)$ системы (28.1) следующего вида:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1 = e^{\lambda_0 t}\boldsymbol{h}_1,\\ &\boldsymbol{x}_2 = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t}{1!}\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2\right),\\ &\boldsymbol{x}_3 = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{h}_1 + \frac{t}{1!}\boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\boldsymbol{x}_s = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\boldsymbol{h}_1 + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + \frac{t}{1!}\boldsymbol{h}_{s-1} + \boldsymbol{h}_s\right). \end{aligned} \tag{28.5}$$

*Заметим, что в случае $k \leqslant 3$ степень полинома $k - m$ не может быть уменьшена.

Метод Эйлера можно применять и для линейных стационарных систем, не приведённых к нормальному виду. Например, для системы

$$a_{10}x^{(m)} + a_{11}x^{(m-1)} + \ldots + a_{1m}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0,$$

$$a_{20}x^{(p)} + a_{21}x^{(p-1)} + \ldots + a_{2p}x + b_{20}y^{(q)} + b_{21}y^{(q-1)} + \ldots + b_{2q}y = 0$$

строим, как и в методе Эйлера, решение в виде $x = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $y = \gamma_2 e^{\lambda t}$, $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$, где число $\lambda$ удовлетворяет *характеристическому уравнению*

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^m + a_{11}\lambda^{m-1} + \ldots + a_{1m} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^p + a_{21}\lambda^{p-1} + \ldots + a_{2p} & b_{20}\lambda^q + b_{21}\lambda^{q-1} + \ldots + b_{2q} \end{vmatrix} = 0. \quad (28.6)$$

Далее находим корни этого уравнения и строим решения согласно схеме метода Эйлера.

Этим приёмом можно проинтегрировать некоторые ранее решённые методом исключения системы из § 27.

Рассмотрим векторный аналог скалярного дифференциального уравнения Эйлера $n$-го порядка

$$t\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad t \neq 0.$$

Как и в случае уравнения Эйлера, произведём замену аргумента $t$ по формуле $\tau = \ln|t|$, $t \neq 0$. В силу соотношения $t\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = t\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\dfrac{d\tau}{dt} = t\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\dfrac{1}{t} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}$ приходим к линейной стационарной системе

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = A\boldsymbol{x}.$$

**В задачах 28.1–28.25 построить действительное общее решение данных систем методом Эйлера или с помощью канонического базиса.**

**28.1.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

По методу Эйлера для простого корня $\lambda_1 = 1$ находим первое базисное решение в виде $x = \gamma_1 e^t$, $y = \gamma_2 e^t$, где собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^1 = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2)$ * определяется из системы $\begin{pmatrix} 4-1 & -2 \\ 3 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$ Из этой системы следует, что $3\gamma_1 = 2\gamma_2$. Полагая $\gamma_1 = 2$, получаем $\gamma_2 = 3$ и собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^1 = \operatorname{colon}(2, 3)$, а соответствующее базисное решение имеет вид $x = 2e^t$, $y = 3e^t$.

Аналогично для второго простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^2 = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2)$ из системы $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$. Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем $\gamma_2 = 1$, собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^2 = \operatorname{colon}(1, 1)$ и второе базисное решение $x = e^{2t}$, $y = e^{2t}$.

Отсюда следует *общее решение системы*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ 3C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**28.2.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Для корня $\lambda = i$ построим комплексное решение $x = \gamma_1 e^{it}$, $y = \gamma_2 e^{it}$, где собственный вектор $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2)$ определяется из системы

$$\begin{cases} (1-i)\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + (-1-i)\gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\gamma_2 = (1-i)\gamma_1.$$

Положим $\gamma_1 = 2$, тогда $\gamma_2 = 1 - i$. Получим комплексное решение $x(t) = 2e^{it}$, $y(t) = (1-i)e^{it}$. Используя *формулу Эйлера* $e^{it} = \cos t + i \sin t$, представим это решение в виде $x(t) = 2\cos t + 2i \sin t, y(t) = (1-i)(\cos t + i \sin t) = \cos t + \sin t + i(\sin t - \cos t)$.

Так как коэффициенты системы — действительные числа, то решениями исходной системы будут действительная и мнимая части построенного комплексного решения, т. е. получаем два действительных линейно независимых решения

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Эти решения образуют ФСР исходной системы, а её *общее решение* имеет вид

$$x = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t, \quad y = C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t). \qquad \square$$

**28.3.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

---

*В дальнейшем, чтобы избежать двойной индексации, искомые координаты различных собственных векторов будем обозначать одинаково.

Р е ш е н и е. Для простого действительного корня находим решение в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma} e^t$, где $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — собственный вектор для $\lambda_1 = 1$. Для этого решим систему $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 = 0. \end{cases}$ Отсюда следует $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -3\gamma_3$. Собственный вектор можно взять $\boldsymbol{\gamma}^1 = \operatorname{colon}(0, 3, -1)$ и первое частное решение в фундаментальной системе решений примет вид $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$.

Для построения оставшихся *двух действительных* ЛНЗ решений для корня $\lambda_2 = 1 + 2i$ находим собственный вектор $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ из системы

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 & 3 \\ -1 & -2i & 0 \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2i\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 - 2i\gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 - 2i\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следуют равенства $\gamma_1 = -2i\gamma_2$, $\gamma_1 = -2i\gamma_3$ (первое уравнение алгебраической системы линейно зависимо с двумя последними). Полагая $\gamma_1 = -2i$, получаем $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$. Тогда имеем комплексное решение $\boldsymbol{x} = (-2i, 1, 1)^\top e^{(1+2i)t}$. Используя формулу Эйлера, представим это решение в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t(\cos 2t + i \sin 2t) = e^t \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Для построения двух действительных базисных решений выделим действительную и мнимую части найденного комплексного решения. Имеем

$$\boldsymbol{x}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

*Общее решение системы* определяется по формуле

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1(t) + C_2\boldsymbol{x}_2(t) + C_3\boldsymbol{x}_3(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 e^t \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}. \quad \square$$

**28.4.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Р е ш е н и е. Для простого корня $\lambda_1 = 0$ найдём собственный вектор $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, решая систему $A\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \end{cases}$ получаем $\gamma_2 = \gamma_1$, $\gamma_3 = -\gamma_1$. Полагая $\gamma_1 = 1$, имеем $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = -1$. Тогда соответствующее $\lambda_1 = 0$ базисное решение имеет вид $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, -1)^\top$.

Для двукратного корня $\lambda_{2,3} = 1$ вычислим число ЛНЗ соответствующих собственных векторов. Оно совпадает с числом $m$ клеток Жордана, отвечающих этому корню, и равно $m = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_2 E) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$

Для определения двух линейно независимых собственных векторов при $\lambda_2 = 1$ получаем систему уравнений $(A - \lambda_2 E)\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow\; \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0.$

Полагая $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, имеем $\gamma_3 = -1$. Этому собственному вектору отвечает решение $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$. Другое базисное решение для этого корня получим с помощью второго линейно независимого собственного вектора, полагая $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, а из условия $\gamma_3 = \gamma_2 - \gamma_1$ имеем $\gamma_3 = 1$. Отсюда следует, что другим базисным решением для корня $\lambda_2 = 1$ является вектор-функция $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$.

*Общее решение* запишется по формуле

$$\boldsymbol{x} = C_1 \boldsymbol{x}_1(t) + C_2 \boldsymbol{x}_2(t) + C_3 \boldsymbol{x}_3(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t. \qquad \square$$

**28.5.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 = 0$. Собственное значение $\lambda_1 = 1$ матрицы $A$ имеет кратность $k = 2$. Вычислим число $m$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, $m = 2 - \operatorname{rank}(A - E) = 2 - 1 = 1$, т. е. $m < k$ и $k - m = 1$.

Решения, соответствующие этому корню, будем строить согласно формуле (28.3) в виде

$$x = (at + b)e^t, \quad y = (ct + d)e^t. \tag{28.7}$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов подставим (28.7) в исходную систему. После сокращения на $e^t$ получим систему тождеств

$$a + at + b \equiv -at - b + 2ct + 2d, \quad c + ct + d \equiv -2at - 2b + 3ct + 3d.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t$, получаем линейную алгебраическую систему

$$a = -a + 2c, \quad c = -2a + 3c, \quad a + b = -b + 2d, \quad c + d = -2b + 3d.$$

Построим общее решение этой системы, из которой следует, что $a = c$, $a + 2b = 2d$, т. е. коэффициенты $c$ и $d$ выражены через $a$ и $b$. Положим $a = 2C_1$, $b = C_2$, тогда $c = 2C_1$, $d = C_1 + C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Подставим найденные значения коэффициентов в представления (28.7), получим *общее решение* исходной системы

$$x = (2C_1 t + C_2)e^t, \quad y = (2C_1 t + C_1 + C_2)e^t.$$

Приведём *другой способ* построения общего решения, основанный на *построении канонического базиса.*

Выше установлено, что двукратному корню $\lambda_1 = 1$ отвечает один собственный вектор (с точностью до множителя), поэтому жорданова цепочка состоит из собственного вектора $\boldsymbol{h}_1$ и присоединённого вектора $\boldsymbol{h}_2$, удовлетворяющих первым двум уравнениям системы (28.4), где надо положить $\lambda_0 = 1$:

$$A\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_1, \quad A\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1.$$

Собственный вектор $\boldsymbol{h}_1$ определяется из системы $(A-E)\boldsymbol{h}_1 = 0$, $\boldsymbol{h}_1 = \alpha(1,1)^\top$, $\alpha \neq 0$. Положим $\alpha = 2$, тогда $\boldsymbol{h}_1 = \operatorname{colon}(2,2)$. Присоединённый вектор $\boldsymbol{h}_2$ удовлетворяет системе $(A-E)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_1$. Обозначим $\alpha_1$ и $\alpha_2$ координаты вектора $\boldsymbol{h}_2$, которые определяются из системы

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 - 1.$$

Положим $\alpha_2 = 1$, получим $\alpha_1 = 0$ и присоединённый вектор $\boldsymbol{h}_2 = \operatorname{colon}(0,1)$. Тогда по формулам (28.5) имеем фундаментальную систему решений

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^t \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

и *общее решение исходной системы* $x = 2C_1 e^t + 2C_2 t e^t$, $y = 2C_1 e^t + C_2 e^t (2t+1)$.

Оно совпадает с ранее полученным общим решением, если произвести очевидное переобозначение произвольных постоянных. □

**28.6.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Р е ш е н и е. Для собственного значения $\lambda_1 = 0$ по методу Эйлера строим решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Координаты собственного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ для $\lambda_1 = 0$ удовлетворяют системе $A\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$: $\begin{cases} \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$

Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем $\gamma_3 = -1$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{colon}(1,0,-1)$. Первое базисное решение имеет вид $\boldsymbol{x}_1 = \operatorname{colon}(1,0,-1)$. Для двукратного корня $\lambda = 1$ число линейно независимых собственных векторов равно $m = n - \operatorname{rank}(A-E) = 3 - 2 = 1$, т. е. $k = 2$, $m = 1$.

Так как $k > m$, то решения, отвечающие этому двукратному корню, будем строить методом неопределённых коэффициентов в виде вектор-функции $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_{k-m}(t)e^t$, где $k = 2$, $m = 1$, $k - m = 1$, т. е. $x_1 = (a_1 t + b_1)e^t$, $x_2 = (a_2 t + b_2)e^t, x_3 = (a_3 t + b_3)e^t$, $a_i$, $b_i$, $i = \overline{1,3}$, — неопределённые коэффициенты. Для их нахождения подставим $x_i(t)$, $i=\overline{1,3}$, в систему. После подстановки и сокращения на $e^t$ получаем систему тождеств $\begin{cases} a_1+a_1t+b_1 \equiv a_2t+b_2, \\ a_2+a_2t+b_2 \equiv a_1t+b_1+a_2t+b_2+a_3t+b_3, \\ a_3+a_3t+b_3 \equiv a_1t+b_1-a_2t-b_2+a_3t+b_3. \end{cases}$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t$ слева и справа, получаем систему для определения искомых коэффициентов:

$$t^1: \begin{cases} a_1=a_2, \\ a_2=a_1+a_2+a_3, \\ a_3=a_1-a_2+a_3, \end{cases} \qquad t^0: \begin{cases} a_1+b_1=b_2, \\ a_2+b_2=b_1+b_2+b_3, \\ a_3+b_3=b_1-b_2+b_3. \end{cases}$$

Отсюда находим общее решение алгебраической системы $a_1=C_1$, $a_2=C_1$, $a_3=$ $=-C_1$, $b_1=C_2$, $b_2=C_1+C_2$, $b_3=C_1-C_2$. В силу этого, учитывая первое базисное решение, *все решения исходной системы* задаются по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1t+C_2 \\ C_1t+C_1+C_2 \\ -C_1t+C_1-C_2 \end{pmatrix} e^t + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**28.7.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2,3}=2$.

Р е ш е н и е. Найдём число $m$ клеток Жордана, отвечающих корню $\lambda=2$ кратности $k=3$: $m=3-\operatorname{rank}(A-2E)=3-2=1$, $k-m=2$. Отсюда следует, что все решения системы могут быть построены методом неопределённых коэффициентов в виде $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2(t)e^{2t}$, где $\boldsymbol{P}_2(t)$ — вектор-полином второй степени.

С вычислительной точки зрения второй способ решения представляется более прозрачным. Жорданова цепочка состоит из собственного вектора $\boldsymbol{h}_1$, отвечающего собственному значению $\lambda=2$, и двух присоединённых векторов $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$(A-2E)\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{0}; \quad (A-2E)\boldsymbol{h}_2=\boldsymbol{h}_1; \quad (A-2E)\boldsymbol{h}_3=\boldsymbol{h}_2.$$

Обозначим $\boldsymbol{h}_1=\operatorname{colon}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. Для его компонент имеем систему

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\gamma_1+8\gamma_3=0, \\ \gamma_1-2\gamma_2-12\gamma_3=0, \\ \gamma_2+4\gamma_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1=4\gamma_3, \\ \gamma_2=-4\gamma_3. \end{cases}$$

Полагая $\gamma_3=1$, получаем $\gamma_1=4$, $\gamma_2=-4$, собственный вектор $\boldsymbol{h}_1=(4,-4,1)^\top$ и первое базисное решение $\boldsymbol{x}_1(t)=e^{2t}(4,-4,1)^\top$.

Пусть $\boldsymbol{h}_2=\operatorname{colon}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Система для определения его координат примет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1+8\alpha_3=4, \\ \alpha_1-2\alpha_2-12\alpha_3=-4, \\ \alpha_2+4\alpha_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=4\alpha_3-2, \\ \alpha_2=-4\alpha_3+1. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_3 = 1$, получаем $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, первый присоединённый вектор $\boldsymbol{h}_2 = (2, -3, 1)^\top$ и второе базисное решение $\boldsymbol{x}_2(t) = e^{2t}[t(4, -4, 1)^\top + (2, -3, 1)^\top]$.

Аналогично координаты второго присоединённого вектора $\boldsymbol{h}_3 = \text{colon}\,(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta_1 + 8\beta_3 = 2, \\ \beta_1 - 2\beta_2 - 12\beta_3 = -3, \\ \beta_2 + 4\beta_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 4\beta_3 - 1, \\ \beta_2 = -4\beta_3 + 1. \end{cases}$$

Полагая $\beta_3 = 1$, получаем $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = -3$, $\boldsymbol{h}_2 = (3, -3, 1)^\top$ и третье базисное решение

$$\boldsymbol{x}_3(t) = e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}(4, -4, 1)^\top + t(2, -3, 1)^\top + (3, -3, 1)^\top\right].$$

Подставляя эти решения в представление

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1(t) + C_2\boldsymbol{x}_2(t) + C_3\boldsymbol{x}_3(t),$$

получаем *общее решение* исходной системы. □

**28.8.** $\begin{cases} y' = -2y + z, \\ z' = y - 2z. \end{cases}$

**28.9.** $\begin{cases} y' = 2y + 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

**28.10.** $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$

**28.11.** $\begin{cases} y' = y + 3z, \\ z' = -3y + z. \end{cases}$

**28.12.** $\begin{cases} y' = -3y + 2z, \\ z' = -2y + z. \end{cases}$

**28.13.** $\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ z' = 3y - 2z. \end{cases}$

**28.14.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$
$(\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

**28.15.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$
$(\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2)$.

**28.16.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i)$.

**28.17.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_3 \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

**28.18.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 \end{cases}$
$(\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = -2)$.

**28.19.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$
$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1)$.

**28.20.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 6x_2 + 4x_3, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3 \end{cases}$

$(\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 0)$.

**28.21.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

**28.22.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = 4x_2 - 2x_3 \end{cases}$

$(\lambda_1 = 12,\ \lambda_{2,3} = -1)$.

**28.23.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 6x_2 - 4x_3, \\ \dot{x}_3 = 3x_1 + 13x_2 + 8x_3 \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

**28.24.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

**28.25.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$.

**В задачах 28.26–28.30 проинтегрировать системы, не приведённые к нормальной форме.**

**28.26.** $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} + y = 0, \\ \dot{x} + x + \dot{y} + y = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Как и в методе Эйлера, решения этой системы строим в виде $x = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $y = \gamma_2 e^{\lambda t}$, $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$. Составим характеристическое уравнение для данной системы по формуле (28.6)

$$\begin{vmatrix} \lambda^3 + \lambda & \lambda^2 + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^4 - 1 = 0.$$

Найдём его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, т. е. корни однократные.

Для корня $\lambda_1 = 1$ матрица в (28.6) равна $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ и имеет собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^1 = \operatorname{colon}(1, -1)$. Получаем первое базисное решение

$$x_1 = e^t, \quad y_1 = -e^t.$$

Для корня $\lambda_2 = -1$ матрица в (28.6) равна $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Она имеет собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^2 = \operatorname{colon}(1, 1)$, которому соответствует второе базисное решение

$$x_2 = e^{-t}, \quad y_2 = e^{-t}.$$

Для корня $\lambda_3 = i$ аналогичным образом построим комплексное решение. Матрица в (28.6) при $\lambda = i$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i+1 & i+1 \end{pmatrix}$, её собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $(i+1)\gamma_1 + (i+1)\gamma_2 = 0$, т. е. $\gamma_1 = -\gamma_2$. Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем $\gamma_2 = -1$ и $\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{colon}\,(1, -1)$. Комплексное базисное решение имеет вид

$$x = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad y = -e^{it} = -\cos t - i \sin t.$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем два действительных базисных решения

$$(x_3, y_3)^\top = \mathrm{colon}\,(\cos t, -\cos t), \quad (x_4, y_4)^\top = \mathrm{colon}\,(\sin t, -\sin t).$$

*Общее решение* предложенной системы является линейной комбинацией построенных четырёх решений

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \quad y = -C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t. \quad \square$$

**28.27.** $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} = 0, \\ \ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} + y = 0. \end{cases}$ **28.28.** $\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} - 8x - 9y = 0, \\ 2\dot{x} + \dot{y} - 7x - 6y = 0. \end{cases}$

**28.29.** $\begin{cases} \dot{x} + x + \ddot{y} - y = 0, \\ \dot{x} + \dot{y} - y = 0. \end{cases}$ **28.30.** $\begin{cases} \ddot{x} + x - 4\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} + y - \dot{x} = 0. \end{cases}$

**Проинтегрировать системы в задачах 28.31–28.34, приведя их с помощью замены независимой переменной к стационарной системе.**

**28.31.** $t\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, $t > 0$. **28.32.** $t\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, $t > 0$.

**28.33.** $t^2\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, $t > 0$. **28.34.** $t^4 \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, $t > 0$.

**28.35.** С помощью какой замены независимой переменной система $t^\alpha \dot{x} = Ax$, $\alpha = \cos t \neq 1$, $t > 0$, приводится к линейной системе с постоянными коэффициентами?

**Контрольные вопросы**

**1.** Известно, что первая компонента некоторого частного решения системы (28.1) имеет вид $x_1(t) = 2t^3 \cos t + t^2$. Какой наименьший возможный порядок матрицы $A$?

**2.** При каких матрицах $A$ все действительные решения системы (28.1) являются линейными комбинациями синусов и косинусов?

**3.** Для каких матриц $A$ каждое решение системы (28.1) ограничено: **а)** на $\mathbb{R}_+$; **б)** на $\mathbb{R}_-$; **в)** на $\mathbb{R}$?

**Мини-самоконтроль.** Проинтегрировать системы ДУ методом Эйлера:

**а)** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$; **б)** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$; **в)** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$;
**г)** $\ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0$, $\dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0$; **д)** $t\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $t\dot{x}_2 = 3x_2 - x_1$, $t > 0$.

## § 29. Матричный метод решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

*Матричная экспонента и её свойства. Алгебраический метод вычисления матричной экспоненты. Нормальная жорданова форма матрицы. Формула для вычисления числа клеток Жордана в нормальной жордановой форме матрицы. Матрица трансформации (трансформирующая матрица). Представление матричной экспоненты для жордановой формы матрицы. Матричный метод интегрирования. Системы Лаппо-Данилевского.*

Для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} \tag{29.1}$$

приведём ещё один метод интегрирования, основанный на понятии матричной экспоненты.

Пусть $A$ — квадратная комплексная матрица. *Матричной экспонентой* $e^{At}$ называется матрица

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Связь матричной экспоненты $e^{At}$ и системы (29.1) устанавливает следующая **теорема**: *матрица* $X(t) = e^{At}$ *является фундаментальной матрицей для системы* (29.1), *нормированной при* $t = 0$.

Отсюда следует, что общее решение системы (29.1) определяется по формуле

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^\top,$$

а решение, удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, представимо в векторно-матричном виде

$$\boldsymbol{x} = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0.$$

При построении матрицы $e^{At}$ проводим следующие построения. Из курса алгебры известно, что с помощью преобразования подобия матрицу $A$ можно привести к нормальной жордановой форме $J_A$:

$$A = SJ_AS^{-1},$$

где $S$ — постоянная невырожденная матрица (*матрица трансформации*), $J_A = \operatorname{diag}[J_{\rho_1}(\lambda_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lambda_s)]$, $\rho_1 + \ldots + \rho_s = n$, $J_{\rho_i}(\lambda_i)$ — клетка

Жордана порядка $\rho_i$, $i = \overline{1, s}$, $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n$,

$$J_{\rho_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

По свойству матричной экспоненты квазидиагональной матрицы имеем $e^{J_A t} = \operatorname{diag}[e^{J_{\rho_1}(\lambda_1)t}, \ldots, \quad e^{J_{\rho_s}(\lambda_s)t}]$, где

$$e^{J_{\rho_i}(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \ldots & \dfrac{t^{\rho_i - 2}}{(\rho_i - 2)!} & \dfrac{t^{\rho_i - 1}}{(\rho_i - 1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \dfrac{t^{\rho_i - 3}}{(\rho_i - 3)!} & \dfrac{t^{\rho_i - 2}}{(\rho_i - 2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (29.2)$$

Тогда фундаментальная матрица $X(t)$, нормированная при $t = 0$, задаётся выражением $X(t) = e^{At} = Se^{J_A t}S^{-1}$.

На практике при построении общего решения в качестве фундаментальной матрицы можно взять матрицу $X_1(t) = e^{At}S = Se^{J_A t}$. И тогда общее решение системы (29.1) представимо в виде

$$\boldsymbol{x} = Se^{J_A t}\boldsymbol{C},$$

где $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_n)^\top$ — произвольный постоянный вектор.

Трансформирующую матрицу $S$ можно найти методом неопределённых коэффициентов из условия $A = SJ_AS^{-1}$, которое перепишем в виде $AS = SJ_A$.

Другой способ построения *трансформирующей матрицы* $S$ основан на следующих сведениях из курса алгебры.

*Если матрица* $A$ *имеет диагональную нормальную жорданову форму* $J_A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, *то* $i$*-м столбцом матрицы* $S$ *является собственный вектор матрицы* $A$, *отвечающий собственному значению* $\lambda_i$, $i = \overline{1, n}$.

*В общем случае матрицы* $A$ *столбцами матрицы* $S$ *являются собственные и присоединённые векторы матрицы* $A$, *определяемые по формуле (28.3) и расположенные в порядке следования клеток Жордана в матрице* $J_A$.

Метод матричной экспоненты используется также для линейных систем, матрица коэффициентов которых $A(t)$ удовлетворяет *условию Лаппо-Данилевского*

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau \cdot A(t), \quad t \geqslant t_0.$$

В случае системы Лаппо-Данилевского фундаментальная матрица $X(t)$, нормированная при $t = t_0$, определяется по формуле

$$X(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}.$$

**В задачах 29.1–29.20 построить действительное общее решение, применяя матричный метод.**

**29.1.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Матрица коэффициентов $A$ уже имеет нормальную жорданову форму. Используя форму представления матричной экспоненты, получаем фундаментальную матрицу системы $X(t) = e^{At} = \operatorname{diag}[e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t}, e^{3t}] = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$. Фундаментальная система решений исходной системы — столбцы этой матрицы

$$\boldsymbol{x}_1 = (e^{2t}, 0, 0)^\top, \quad \boldsymbol{x}_2 = (te^{2t}, e^{2t}, 0)^\top, \quad \boldsymbol{x}_3 = (0, 0, e^{3t})^\top,$$

а *общее решение* системы имеет вид

$$\boldsymbol{x} = C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**29.2.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ имеет вид $(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0$, а его корни: однократный $\lambda_1 = 1$ и двукратный $\lambda_{2,3} = -2$. Однако матрица $A$ — симметрическая и, как следует из курса алгебры, она имеет диагональную нормальную жорданову форму $J = \operatorname{diag}[1, -2, -2]$, и, следовательно, существует три линейно независимых собственных вектора $\boldsymbol{\gamma}^1$, $\boldsymbol{\gamma}^2$, $\boldsymbol{\gamma}^3$. Для построения трансформирующей матрицы найдём их. В случае однократного корня $\lambda_1 = -1$ находим систему для вектора $\boldsymbol{\gamma}^1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top$:

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3, \\ \gamma_2 = \gamma_3. \end{cases}$$

Полагая $\gamma_3 = 1$, находим $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$ и $\boldsymbol{\gamma}^1 = (1, 1, 1)^\top$.

В случае двукратного собственного значения $-2$, получаем два линейно независимых собственных вектора, их координаты удовлетворяют системе $(A+2E)\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, что соответствует одному уравнению для координат вектора $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top$: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Отсюда имеем $\gamma_3 = -\gamma_1 - \gamma_2$. Полагая свободные постоянные поочерёдно $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, имеем в обоих случаях $\gamma_3 = -1$ и два линейно независимых собственных вектора $\boldsymbol{\gamma}^2 = (1, 0, -1)^\top$, $\boldsymbol{\gamma}^3 = (0, 1, -1)^\top$.

Отсюда следует матрица трансформации

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

фундаментальная матрица

$$X(t) = Se^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix},$$

а *общее решение* примет вид

$$\boldsymbol{x} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**29.3.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Решение. Построим нормальную жорданову форму $J$ матрицы $A$. Для этого найдём её собственные значения из уравнения $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$, т. е. собственное значение $\lambda = 1$ кратности 2. Вычислим число клеток Жордана $m$, отвечающих этому корню: $m = 2 - \operatorname{rank}(A - E) = 2 - 1 = 1$.

Отсюда следует, что

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Матрицу трансформации $S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ найдём методом неопределённых коэффициентов, исходя из равенства $AS = SJ$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем системы

$$\begin{cases} 3a_1 - 4a_2 = a_1, \\ -a_1 - a_2 = a_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b_1 - 4b_2 = a_1 + b_1, \\ b_1 - b_2 = a_2 + b_2. \end{cases}$$

Отсюда следуют две связи на искомые коэффициенты $2a_1 - 4a_2 = 0$, $2b_1 - - 4b_2 = a_1$ или $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2 + \dfrac{a_1}{2}$. Полагая $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, получаем $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, так что матрица $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det S \neq 0$.

Трансформирующую матрицу $S$ можно также построить на основе жордановой цепочки, состоящей из собственного вектора $\boldsymbol{h}_1 = \operatorname{colon}(\gamma_1, \gamma_2)$ матрицы $A$, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$, и присоединённого вектора $\boldsymbol{h}_2 = = \operatorname{colon}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Для их определения имеем системы:

1) $(A - E)\boldsymbol{h}_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 2\gamma_2$. Полагая $\gamma_2 = 1$, получаем $\gamma_1 = 2$ и собственный вектор $\boldsymbol{h}_1 = \operatorname{colon}(2, 1)$;

2) $(A - E)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_1 \Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1$. Полагая $\alpha_2 = 1$, получаем $\alpha_1 = 3$ и присоединённый вектор $\boldsymbol{h}_2 = \operatorname{colon}(3, 1)$.

Столбцы матрицы $S$ совпадают с векторами $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$, что приводит к ранее построенной матрице, что, вообще говоря, необязательно.

Отсюда следует, что фундаментальная система решений ДС есть

$$X(t) = Se^{Jt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & (2t+3)e^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix},$$

а общее решение примет вид

$$\boldsymbol{x} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 2t+3 \\ t+1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**29.4.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -5x + y. \end{cases}$

Решение. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Нормальная жорданова форма $J = \operatorname{diag}[2i, -2i]$. Трансформирующую матрицу $S$ построим на основе двух линейно независимых собственных векторов, отвечающих двум простым корням $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$. Если $\lambda_1 = 2i$, то координаты собственного вектора $\boldsymbol{\gamma}^1 = (\gamma_1, \gamma_2)^\top$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (-1 - 2i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -5\gamma_1 + (1 - 2i)\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = (1 + 2i)\gamma_1.$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, получаем $\gamma_2 = (1 + 2i)$. Вектор $\boldsymbol{\gamma}^2$, отвечающий комплексно сопряжённому с $\lambda_1$ корню $-2i$, является комплексно сопряжённым с построенным ранее вектором $\boldsymbol{\gamma}^1$, т. е. $\boldsymbol{\gamma}^1 = (1, 1+2i)^\top$, $\boldsymbol{\gamma}^2 = (1, 1-2i)^\top$. Комплексная матрица трансформации строится на их основе $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+2i & 1-2i \end{pmatrix}$, а комплексная фундаментальная матрица $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+2i & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & e^{(1-2i)t} \\ (1+2i)e^{(1+2i)t} & (1-2i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}.$$

Для построения действительной фундаментальной системы решений рассмотрим лишь одно из пары комплексных решений, например $x_1 = e^{(1+2i)t}$, $x_2 = (1 + 2i)e^{(1+2i)t}$. Используя формулы Эйлера, перепишем это решение в следующем виде: $x_1 = e^t(\cos 2t + i \sin 2t)$, $x_2 = e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) + ie^t(2\cos 2t + \sin 2t)$. Отделяя теперь действительную и мнимую части этого решения, получим два действительных ЛНЗ частных решения $x_1 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix} e^t$, $x_2 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^t$, а *действительное общее решение* задаётся по формуле

$$\boldsymbol{x} = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Замечание.** Построение действительной ФМ можно провести, используя действительную жорданову форму матрицы $A$ с собственными значениями $\lambda_{1,2} = 1 \pm \pm 2i$. Она имеет вид $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Далее, как и выше, находим невырожденную постоянную матрицу $B$ из равенства $BA = J_A B$ методом неопределённых коэффициентов. Тогда действительная ФМ $X(t)$ находится по формуле $X(t) = Be^{J_A t}$. Построение матрицы $e^{J_A t}$ см. далее в задаче 29.28. $\square$

**Решить системы 29.5–29.20, записанные в векторной форме $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ с заданными матрицами $\boldsymbol{A}$, применяя матричный метод интегрирования.**

**29.5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**29.6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**29.7.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**29.8.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**29.9.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$).

**29.10.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$).

**29.11.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

($\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$).

**29.12.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

($\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$).

**29.13.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = 1,\, \lambda_{2,3} = \pm i)$.

**29.14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = 1,\, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

**29.15.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$.

**29.16.** $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2)$.

**29.17.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = 1,\, \lambda_{2,3} = -2)$.

**29.18.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = 1,\, \lambda_{2,3} = -1)$.

**29.19.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$.

**29.20.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$.

**В задачах 29.21–29.26 с помощью матричной экспоненты найти решение задачи Коши для векторного уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ с заданными матрицами $\boldsymbol{A}$.**

**29.21.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$.

Р е ш е н и е. Решение задачи Коши $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, имеет вид $\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}(0)$. Так как матрица $A$ уже задана в нормальной жордановой форме, то матрица $e^{At}$ строится сразу по формуле (29.2) и искомое решение есть

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \dfrac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t + t^2 \\ 1 + t \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**29.22.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(1) = \mathrm{colon}\,(1, 2)$.

Р е ш е н и е. Искомое решение имеет вид $\boldsymbol{x} = e^{A(t-1)}\boldsymbol{x}(1)$. Для построения матричной экспоненты найдём нормальную жорданову форму $J$ матрицы $A$. Из уравнения $|A - \lambda E| = 0$, $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$ находим собственные значения матрицы $A$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Отсюда жорданова форма матрицы $A$ имеет вид

$$J = \mathrm{diag}\,[-2, -4].$$

Трансформирующую матрицу $S$, для которой $A = SJS^{-1}$, определим из равенства $AS = SJ$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

которое равносильно системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -3a + c &= -2a, \\ -3b + d &= -4b, \\ a - 3c &= -2c, \\ b - 3d &= -4d \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} -a + c &= 0, \\ b + d &= 0. \end{aligned}$$

За решение возьмём $a = 1, \;\; b = 1, \;\; c = 1, \;\; d = -1 \;\; \Rightarrow$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем матричную экспоненту $e^{A(t-1)} = Se^{J(t-1)}S^{-1}$ и искомое решение задачи Коши

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2(t-1)} & 0 \\ 0 & e^{-4(t-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2(t-1)} & e^{-4(t-1)} \\ e^{-2(t-1)} & e^{-4(t-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{-2(t-1)} + e^{-4(t-1)} \\ 3e^{-2(t-1)} - e^{-4(t-1)} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**29.23.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**29.24.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**29.25.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; (\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = -1).$

**29.26.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; (\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = \lambda_3 = -1).$

**29.27.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Доказать, что $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

**29.28.** Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Доказать, что $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$.

**В задачах 29.29–29.31 найти определитель матрицы $e^{A}$, не вычисляя матрицу $e^{A}$.**

**29.29.** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. По формуле Абеля — Лиувилля — Остроградского $\det e^{At} = \exp\int_0^t \operatorname{tr} A\, d\tau$, так как $X(t) = e^{At}$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $X(0) = E$. Отсюда имеем $\det e^{A} = \exp\int_0^1 \operatorname{tr} A\, d\tau = \exp\int_0^1 \operatorname{tr} A\, d\tau = e^5$. □

**29.30.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

**29.31.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

## Задания для самостоятельной работы

**1.** Доказать, что матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & \alpha c(t)\\ \beta c(t) & a(t)+\gamma c(t)\end{pmatrix},$$

где $a(t), c(t)$ — произвольные непрерывные функции на промежутке $J$, $\alpha, \beta, \gamma$ — постоянные, является функционально-коммутативной, т. е. $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$ при любых $t_1, t_2 \in J$. Указать общий вид двумерных функционально-коммутативных матриц [19].

**2*.** Описать общий вид двумерных систем Лаппо-Данилевского [18].

### Контрольные вопросы

**1.** Вывести условия на собственные значения матрицы $A$, чтобы: **а)** $e^{tA} \to 0$ при $t \to +\infty$; **б)** $e^{tA}$ — ограниченная матрица при $t \geqslant 0$; **в)** $e^{tA}$ — ограниченная матрица при $t \in \mathbb{R}$.

**2.** Используя матричную экспоненту, найти фундаментальную матрицу системы $t\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$.

**3.** Показать, что все решения линейной системы $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ — полиномиальные функции тогда и только тогда, когда матрица $A$ нильпотентна, т. е. при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполнено условие $A^k = 0$.

**Мини-самоконтроль. 1.** Решить следующие системы матричным методом: **а)** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **б)** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}-1 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **в)** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$. **2.** Найти матрицу $e^{At}$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 0$. **3.** Используя матрицу $e^{At}$ из предыдущего примера, построить решение задачи Коши $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \operatorname{colon}(0, 1, 1)$.

# § 30. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

*Линейные неоднородные системы. Структура общего решения. Принцип суперпозиции. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Матричный вариант метода вариации произвольных постоянных. Общее решение в форме Коши. Интегрируемость в квадратурах линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами.*

Рассмотрим линейную неоднородную дифференциальную систему

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{x} = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n), \tag{30.1}$$

с матрицей коэффициентов $A(t) = (a_{ij}(t))$, элементы которой $a_{ij}(t)$ — непрерывные функции на промежутке $|a, b|$, и с неоднородностью вектор-функцией $\boldsymbol{f}(t) = \operatorname{colon}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ с непрерывными на $|a, b|$ компонентами $f_i(t)$, $i, j = \overline{1, n}$.

*Общее решение линейной неоднородной системы* (30.1) *есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{30.2}$$

*и какого-нибудь одного частного решения неоднородной системы.*

Отсюда следует: если $X(t)$, $X(t) = [\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)]$ — фундаментальная матрица системы (30.2), а $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t)$ — какое-либо частное решение системы (30.1), то любое решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ системы (30.1) представимо в векторно-матричной форме

$$\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{C} + \boldsymbol{x}^*(t) \tag{30.3}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1(t) + C_2\boldsymbol{x}_2(t) + \ldots + C_n\boldsymbol{x}_n(t) + \boldsymbol{x}^*(t), \tag{30.4}$$

где $\boldsymbol{C} = \operatorname{colon}(C_1, \ldots, C_n)$ — произвольный постоянный вектор.

Для линейной неоднородной системы имеет место **принцип суперпозиции**: если вектор-функции $\boldsymbol{x}_1^*(t)$ и $\boldsymbol{x}_2^*(t)$ — частные решения системы (30.1), когда соответственно $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_1(t)$ и $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_2(t)$, то $\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{x}_1^*(t) + \boldsymbol{x}_2^*(t)$ — решение системы (30.1) с неоднородностью $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_1(t) + \boldsymbol{f}_2(t)$.

Если $\boldsymbol{x}_1^*(t)$ и $\boldsymbol{x}_2^*(t)$ — частные решения неоднородной системы (30.1), то их разность $\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{x}_1^*(t) - \boldsymbol{x}_2^*(t)$ является решением соответствующей линейной однородной системы (30.2).

Решение неоднородной системы (30.1) можно найти **методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), если известна фундаментальная матрица $\boldsymbol{X(t)}$** соответствующей линейной однородной системы (30.2), общее решение которой есть $\boldsymbol{x}_{\text{оо}}(t) = X(t)\boldsymbol{C}$.

По этому методу общее решение системы (30.1) ищем в виде

$$\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{C}(t), \tag{30.5}$$

где вектор-функция $\boldsymbol{C}(t) = \operatorname{colon}(C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t))$ определяется из системы уравнений

$$X(t)\frac{d\boldsymbol{C}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t), \tag{30.6}$$

которая может быть переписана в векторной форме

$$\dot{C}_1(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\boldsymbol{x}_2(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)\boldsymbol{x}_n(t) = \boldsymbol{f}(t). \tag{30.7}$$

Определитель этой алгебраической относительно $\dot{C}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, системы — определитель Вронского $W(t)$ фундаментальной матрицы $X(t)$, $W(t) \neq 0$, $t \in |a,b|$, поэтому система (30.7) имеет единственное решение, обозначим его

$$\dot{C}_1(t) = \varphi_1(t), \quad \ldots, \quad \dot{C}_n(t) = \varphi_n(t), \quad \varphi_i \in C(|a,b|).$$

Отсюда

$$C_1(t) = \int \varphi_1(t)\,dt + C_1, \quad \ldots, \quad C_n(t) = \int \varphi_n(t)\,dt + C_n,$$

где $C_i$, $i = \overline{1,n}$, — произвольные постоянные. Подставляя найденные выражения для $C_i(t)$ в формулу (30.5), получим *общее решение* системы (30.1).

Учитывая, что из уравнения (30.6) следует $\dot{\boldsymbol{C}}(t) = X^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$, это решение в силу (30.5) можно сразу записать в векторно-матричной форме

$$\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{C} + \int X(t)X^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau, \tag{30.8}$$

а решение системы (30.1), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $t_0 \in |a, b|$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, примет вид

$$\boldsymbol{x} = X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau.$$

Последняя формула, в которой $t_0 \in |a, b|$ фиксировано, а начальное данное $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ играет роль произвольного постоянного вектора, носит название *общего решения в форме Коши.*

Матрица $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ называется *матрицей Коши* системы (30.1).

**Контрольный вопрос.** Доказать, что для линейной системы с постоянными коэффициентами матрица Коши допускает представление $X(t, \tau) = X(t - \tau)$.

Метод Лагранжа позволяет проинтегрировать в квадратурах линейную неоднородную систему

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{30.9}$$

с постоянной матрицей $A$, так как ФСР соответствующей линейной однородной системы $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ может быть найдена (см. § 29) в виде элементарных функций. В качестве фундаментальной матрицы $X(t)$ можно взять, например, матричную экспоненту $X(t) = e^{At}$. Тогда *общее решение* системы (30.9) представимо в векторно-матричном виде

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{C} + \int e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau,$$

где под неопределённым интегралом понимается какая-либо первообразная. Решение, удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, примет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau. \tag{30.10}$$

В случае, если компоненты $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^\top$ — квазиполиномы, то частное решение системы (30.9) может быть *найдено методом неопределённых коэффициентов.* Например, если $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\alpha t}$, где $P_{m_i}(t)$ — полином степени $m_i$, то частное решение системы (30.9) строим в виде $x_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\alpha t}$, $i = \overline{1, n}$, где $Q^i_{m+s}$ — полиномы степени $m + s$ с неопределёнными коэффициентами, $m = \max m_i$, $s = 0$ в нерезонансном случае, когда $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$, если же $\alpha$ — корень этого уравнения, то $s$ можно взять равным кратности этого корня. В последнем случае, вообще говоря, степень можно уменьшить до числа $k = l + 1$, где $l$— максимальная степень полиномов, на которые умножается $e^{\alpha t}$ в общем решении однородной системы.

Аналогично определяются степени полиномов в случае квазиполиномов $f_i$, содержащих функции $e^{at}\cos bt$ и $e^{at}\sin bt$. В этом случае контрольным числом является число $\sigma = a + bi$.

Впрочем, в случае двумерных стационарных линейных систем с неоднородностями специального вида часто проще решать систему методом исключения, особенно в последнем случае.

**В задачах 30.1–30.7 проинтегрировать системы, используя метод неопределённых коэффициентов при построении частного решения неоднородной системы.**

**30.1.** $\dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 8e^t,\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + te^{2t}.$

Решение. Найдём решение соответствующей однородной системы $\dot{x} = 2x+y$, $\dot{y} = 3x + 4y$, используя метод Эйлера. Из уравнения $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ находим собственные числа матрицы $A$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Тогда для $\lambda_1 = 1$ собственный вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)^\top$ находится из условия $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Полагая $\gamma_1 = 1$, имеем $\gamma_2 = -1$. Первое базисное решение имеет вид $x = e^t$, $y = -e^t$.

Для корня $\lambda_2 = 5$ значения компонент $\gamma_1$, $\gamma_2$ соответствующего собственного вектора определяем из уравнения $-3\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Одно из его решений $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 3$ и второе базисное решение определяется по формуле $x = e^{5t}$, $y = 3e^{5t}$.

Тогда общее решение однородной системы запишется в виде

$$x_{\text{оо}} = C_1e^t + C_2e^{5t}, \quad y_{00} = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Компоненты неоднородности системы — квазиполиномы $e^t$, $te^{2t}$. Тогда предварительно найдём частные решения следующих систем:

$$\dot{x} = 2x + y + 8e^t, \quad \dot{y} = 3x + 4y \quad \text{и} \quad \dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y + te^{2t}.$$

Для первой системы контрольное число $\alpha = 1$. Оно является однократным характеристическим числом, т. е. $s = 1$, а $m = 0$. Согласно методу неопределённых коэффициентов частное решение можно искать в виде

$$x_1^* = (a_1t + b_1)e^t, \quad y_1^* = (c_1t + d_1)e^t.$$

Подставляя эти выражения в первую систему, получаем после сокращения на $e^t$ тождества

$$\begin{array}{l} a_1 + a_1 t + b_1 \equiv 2a_1 t + 2b_1 + c_1 t + d_1 + 8, \\ c_1 + c_1 t + d_1 \equiv 3a_1 t + 3b_1 + 4c_1 t + 4d_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_1 = 2a_1 + c_1, & a_1 + b_1 = 2b_1 + d_1 + 8, \\ c_1 = 3a_1 + 4c_1, & c_1 + d_1 = 3b_1 + 4d_1. \end{array}$$

В качестве решения алгебраической системы возьмём $a_1 = 6$, $c_1 = -6$ (они определяются однозначно), $b_1 = -1$, $d_1 = -1$ (они удовлетворяют соотношению $b_1 + d_1 = -2$). Таким образом, частное решение первой системы допускает представление

$$x_1^* = (6t - 1)e^t, \quad y_1^* = (-6t - 1)e^t.$$

Для второй системы контрольное число $\alpha = 2$ не является характеристическим числом, максимальная степень $m$ полинома в неоднородности равна 1. Следовательно, частное решение этой системы может быть представлено в виде

$$x_2^* = (a_2 t + b_2)e^{2t}, \quad y_2^* = (c_2 t + d_2)e^{2t}.$$

Подставляя эти выражения во вторую систему, получаем после сокращения на $e^{2t}$ тождества

$$a_2 + 2a_2 t + 2b_2 \equiv 2a_2 t + 2b_2 + c_2 t + d_2, \quad c_2 + 2c_2 t + 2d_2 \equiv 3a_2 t + 3b_2 + 4c_2 t + 4d_2 + t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t$, получаем алгебраическую систему

$$\begin{array}{ll} 2a_2 = 2a_2 + c_2, & a_2 + 2b_2 = 2b_2 + d_2, \\ 2c_2 = 3a_2 + 4c_2 + 1 & c_2 + 2d_2 = 3b_2 + 4d_2. \end{array}$$

Отсюда следует, что $a_2 = -1/3$, $b_2 = 2/9$, $c_2 = 0$, $d_2 = -1/3$. Следовательно, частное решение второй системы имеет вид

$$x_2^* = \left(-\frac{1}{3}t + \frac{2}{9}\right)e^{2t}, \quad y_2^* = -\frac{1}{3}e^{2t}.$$

Тогда по принципу суперпозиции *частное решение* исходной системы равно сумме двух найденных решений

$$x^*(t) = (6t - 1)e^t + \left(-\frac{1}{3}t + \frac{2}{9}\right)e^{2t}, \quad y^*(t) = (-6t - 1)e^t - \frac{1}{3}e^{2t},$$

а её *общее решение* есть

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} + x^*(t), \quad y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} + y^*(t). \qquad \square$$

**30.2.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t, \\ \dot{y} = -2x - y + t^2. \end{cases}$ **30.3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 2\sin t, \\ \dot{y} = x + 4y + \cos t. \end{cases}$

**30.4.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = -x - y + 2e^{3t}. \end{cases}$ **30.5.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + \cos t, \\ \dot{y} = x + 2y + \sin t. \end{cases}$

**30.6.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + t + 1, \\ \dot{y} = 8x + y + 2. \end{cases}$ **30.7.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + y + e^t \sin t. \end{cases}$

**В задачах 30.8–30.12 решить системы методом вариации постоянных.**

**30.8.** $\dot{x} = -x + 2y + e^t/(t^2+1),\ \dot{y} = -2x + 3y + 2e^t/(t^2+1).$

Р е ш е н и е. Решим соответствующую линейную однородную систему методом исключения. Исключая $y$, получаем линейное однородное уравнение относительно $x$: $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$. Его общее решение имеет вид $x_{\text{оо}} = C_1e^t + C_2te^t$. Тогда $y_{\text{оо}} = \frac{1}{2}(\dot{x} + x) = C_1e^t + C_2\left(t + \frac{1}{2}\right)e^t$.

Общее решение неоднородной системы будем искать в виде

$$x = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t, \quad y = C_1(t)e^t + C_2(t)\left(t + \frac{1}{2}\right)e^t, \tag{30.11}$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются из системы

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t)e^t + \dot{C}_2(t)te^t = \dfrac{e^t}{t^2+1}, \\ \dot{C}_1(t)e^t + \dot{C}_2(t)\left(t + \dfrac{1}{2}\right)e^t = \dfrac{2e^t}{t^2+1}. \end{cases}$$

Отсюда находим $\dot{C}_1(t) = \dfrac{1}{t^2+1} - \dfrac{2t}{t^2+1}$, $\dot{C}_2(t) = \dfrac{2}{t^2+1}$ и $C_1(t) = \operatorname{arctg} t - \ln(t^2+1) + C_1$, $C_2(t) = 2\operatorname{arctg} t + C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_i(t)$, $i = 1, 2$, в представление общего решения (30.11), получаем *общее решение* исходной системы

$$x = C_1e^t + C_2te^t + (\operatorname{arctg} t + 2t\operatorname{arctg} t - \ln(t^2+1))e^t,$$

$$y = C_1e^t + \left(\frac{C_2}{2} + C_2t\right)e^t + (2\operatorname{arctg} t + 2t\operatorname{arctg} t)e^t - e^t\ln(t^2+1). \qquad \square$$

**30.9.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + \dfrac{e^{2t}}{t}, \\ \dot{y} = x + y + \dfrac{e^{2t}}{t^2}. \end{cases}$

**30.10.** $\begin{cases} \dot{x} = y + \dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\cos^3 t}. \end{cases}$

**30.11.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}, \\ \dot{y} = 6x - y. \end{cases}$

**30.12.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$

**Построить общее решение систем в задачах 30.13–30.15, используя векторно-матричную интерпретацию метода Лагранжа.**

**30.13.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е. Построим общее решение соответствующей линейной однородной системы матричным методом. Собственные значения матрицы $A$ — числа $\lambda_{1,2}=\pm i$, следовательно, её жорданова форма $J=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Находим матрицу трансформации $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из условия $AS=SJ$ методом неопределённых коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_1=1, & b_1=1, \\ a_2=1-i, & b_2=1+i. \end{array}$$

Тогда комплекснозначная фундаментальная матрица однородной системы —

$$X(t)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ (1-i)e^{it} & (1+i)e^{it} \end{pmatrix}.$$

Выделяя из первого столбца действительную и мнимую части, получаем действительные ФСР, фундаментальную матрицу

$$X_0(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t+\sin t & -\cos t+\sin t \end{pmatrix}$$

и общее решение соответствующей линейной однородной системы $\boldsymbol{x}_{\text{оо}}(t)=X_0(t)\boldsymbol{C}$.

Общее решение исходной неоднородной системы по методу Лагранжа будем искать в виде $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=X_0(t)\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}=X_0(t)\boldsymbol{C}(t)$, где $\boldsymbol{C}(t)$ — искомая вектор-функция.

Система для определения вектор-функции $\boldsymbol{C}(t)$ имеет вид

$$X_0(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{C}'(t)=X_0^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t),$$

где $X_0^{-1}(t)=\begin{pmatrix} \cos t-\sin t & \sin t \\ \cos t+\sin t & -\cos t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} 1/\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\boldsymbol{C}'(t)=\begin{pmatrix} \cos t-\sin t & \sin t \\ \cos t+\sin t & -\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\sin t}{\cos t} \\ 1+\dfrac{\sin t}{\cos t} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{C}(t)=\begin{pmatrix} t+\ln|\cos t|+C_1 \\ t-\ln|\cos t|+C_2 \end{pmatrix},$$

где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

*Общее решение* данной системы ДУ запишется в виде

$$\boldsymbol{x}(t)=X_0(t)\boldsymbol{C}(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t+\sin t & -\cos t+\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t+\ln|\cos t|+C_1 \\ t-\ln|\cos t|+C_2 \end{pmatrix}=$$

$$=C_1\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t+\sin t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t+\sin t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t| \\ 2t\sin t+2\cos t\ln|\cos t| \end{pmatrix}.$$

□

**30.14.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 + \dfrac{1}{t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + \dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$ **30.15.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 4x_2 + \dfrac{e^t}{t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \dfrac{e^t}{t^2}. \end{cases}$

**Построить общее решение в форме Коши системы в задачах 30.16–30.20.**

**30.16.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + e^t/t, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 3x_2 + e^t, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\boldsymbol{f}(t) = \operatorname{colon}(e^t/t, e^t)$.

Р е ш е н и е. Для построения общего решения в форме Коши согласно формуле (30.10) предварительно построим матричную экспоненту $e^{At}$ известным способом (см. § 29). Нормальная жорданова форма $J$ матрицы $A$ имеет вид $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, где матрицу $S$ определим методом неопределённых коэффициентов из условия $A = SJS^{-1}$ или системы $AS = SJ$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют связи $c = 2a$, $d = a + 2b$. Одно из решений системы есть $a = 1$, $c = 2$, $b = 0$, $d = 1$, т. е. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$, то $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 1-2t & t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix}$,

$$e^{A(t-\tau)} = e^{t-\tau}\begin{pmatrix} 1-2(t-\tau) & t-\tau \\ -2(t-\tau) & 1+2(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Подставив полученные представления матричных экспонент и $\boldsymbol{f}(t)$ в формулу (30.10), получим *искомое общее решение* данной системы в форме Коши ($t_0 \neq 0$)

$$\boldsymbol{x} = e^{t-t_0}\begin{pmatrix} 1-2(t-t_0) & t-t_0 \\ 2(t-t_0) & 1+2(t-t_0) \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t_0) +$$

$$+e^t\int\limits_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} 1-2(t-\tau) & t-\tau \\ -2(t-\tau) & 1+2(t-\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\tau \\ 1 \end{pmatrix}d\tau \equiv \boldsymbol{F}_1(t) + \boldsymbol{F}_2(t),$$

где вектор-функция $\boldsymbol{F}_2(t)$ после вычисления интеграла примет вид

$$\boldsymbol{F}_2(t) = e^t\begin{pmatrix} (1-2t)\ln|t/t_0| + (t+2)(t-t_0) - t^2/2 + t_0^2/2 \\ -2t\ln|t/t_0| + (2t+3)(t-t_0) - t^2 + t_0^2 \end{pmatrix}.$$

Эта форма решения сразу задаёт решение исходной системы, удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $t_0 \neq 0$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, ею полезно пользоваться при решении нескольких задач Коши. $\square$

**30.17.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 + \dfrac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{x}_2 = 10x_1 + 6x_2. \end{cases}$ **30.18.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 4x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + \dfrac{e^t}{\sin t}. \end{cases}$

**30.19.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$ **30.20.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \sqrt{t}, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$

**30.21.** По горизонтальной плоскости перемещаются два тела $M_1$ и $M_2$ соответственно массой $m_1$ и $m_2$, причём тело $M_1$ связано с неподвижной опорой пружиной с жёсткостью $k_1$, а с с телом $M_2$ — пружиной жёсткости $k_2$. Отклоним каждое из них от положения равновесия с некоторой скоростью. Кроме того, на тело $M_1$ действует сила с периодической горизонтальной составляющей $F = F_0 \sin \omega t$. Через $x_1$ и $x_2$ обозначим перемещения тел $M_1$ и $M_2$ от положения равновесия (рис. 30.1), $x_i = x_i(t)$, $\quad i = 1, 2$.

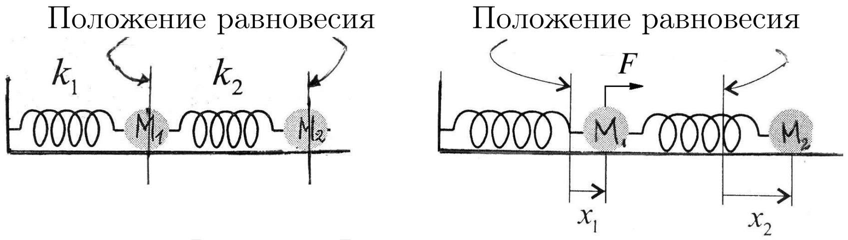



*Рис. 30.1.* Явление антирезонанса

Построить математическую модель колебательной системы и найти её частное решение, удовлетворяющее условиям $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_0 \sin \omega t, \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1). \end{cases} \tag{30.12}$$

Искомое частное решение будем искать в виде $x_1 = A \sin \omega t$, $\quad x_2 = B \sin \omega t$. Подставим последние выражения в систему (30.12), приравняем коэффициенты при sin $\omega t$ слева и справа, получим алгебраическую систему для определения коэффициентов $A$ и $B$:

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2B = F_0, \\ -k_2A + (k_2 - m_2\omega^2)B = 0. \end{cases} \tag{30.13}$$

Если определитель системы $\Delta = (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_1\omega^2) - k_2^2 \neq 0$, то система (30.13) имеет единственное решение $A = F_0(k_2 - m_2\omega^2)/\Delta$, $B = F_0k_2/\Delta$.

Если частота $\omega$ удовлетворяет условию $\omega^2 = k^2/m_2$, то определитель $\Delta = -k_2^2 \neq 0$, следовательно, при таком значении частоты амплитуды $A = 0$, $B = -F_0/k_2$ и *искомое решение* принимает вид $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) = -(F_0/k_2) \sin \omega t$, т. е. тело $M_1$, к которому прикладывается вынуждающая сила, остаётся неподвижным. Это явление в механике называется *антирезонансом* и используется в динамических гасителях колебаний. □

**30.22.** Построить общее решение системы (30.12), если $k_1 = k_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$.

**30.23.** Рассмотрим, как и в предыдущей задаче, два тела $M_1$ и $M_2$, движущихся по столу без трения (рис. 30.2), причём тело $M_2$ прикреплено также пружиной жёсткости $k_3$ к неподвижной опоре. Предположим, что на тело $M_1$ действует вынужденная сила с горизонтальной составляющей $F = F_0 \omega t$. Построить математическую модель этой колебательной системы и найти закон изменения перемещений $x_1$ и $x_2$, если $k_1 = k_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$, $\omega = 2$.

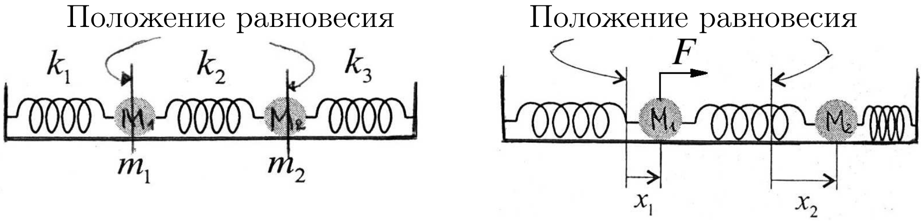


*Рис. 30.2.* Механическая система двух масс, связанных тремя пружинами

### Задания для самостоятельной работы

**1.** Рассмотрим линейную неоднородную систему (30.9), где $A$ — постоянная матрица; $\boldsymbol{f}(t)$ — непрерывная и ограниченная при $t \geqslant 0$ вектор-функция, $\|\boldsymbol{f}(t)\| \leqslant M$, $t \geqslant 0$.

Указать размерность аффинного пространства ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений системы (30.9) при различных предположениях:

**а)** $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = \overline{1,n}$; **б)** $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $j = \overline{1,n}$; **в)** $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = \overline{1,k}$, $k < n$, $\operatorname{Re}\lambda_m > 0$, $m = \overline{k+1,n}$.

**2.** Какое условие достаточно наложить на собственные значения матрицы $A$, чтобы система уравнений $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t)$ имела периодическое решение при всякой непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{f}(t)$ периода $\omega$?

**Мини-самоконтроль. 1.** Решить систему $\dot{x} = x + 2y + \sin t$, $\dot{y} = 2x + y + \cos t$ различными методами: **а)** методом исключения; **б)** методом неопределённых коэффициентов; **в)** методом Лагранжа. **2.** Проинтегрировать систему $\dot{x} = -3x - 4y + e^{-t}/t$, $\dot{y} = x + y + e^{-t}$ методом вариации произвольных постоянных. **3.** Построить каким-либо методом решение задачи Коши $\dot{x} = -x + 2y + e^t$, $\dot{y} = -x + 2y + 2e^t$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. **4.** Построить общее решение в форме Коши системы $\dot{x} = x + 2y + 1/\sin t$, $\dot{y} = -x - y$.

# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 31. Понятие устойчивости решения. Критерии устойчивости линейной стационарной системы

*Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения линейных стационарных системы и уравнения $n$-го порядка. Критерий Рауса — Гурвица.*

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{31.1}$$

где $\boldsymbol{x} = \operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \operatorname{colon}(f_1(t, \boldsymbol{x}), \ldots, f_n(t, \boldsymbol{x}))$.

Предположим, что функции $f_i$, $\partial f_i/\partial x_j$, $i, j = \overline{1, n}$, непрерывны в области $G = \{(t, \boldsymbol{x}) : a < t < +\infty,\ \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n\}$. Эти условия в силу теоремы Пикара — Линделёфа обеспечивают существование и единственность решения системы (31.1), удовлетворяющего начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, где $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G$, причём это решение заведомо определено в некоторой окрестности $J$ точки $t_0$. Кроме того, эти условия гарантируют непрерывную зависимость решения от $t$ и начальных данных $\boldsymbol{x}_0 = \operatorname{colon}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ на любом конечном промежутке $[t_0, T] \subset J$. *Непрерывная зависимость решения от начальных данных на полупрямой* $t \geqslant t_0$ приводит к понятию *устойчивости решения в смысле Ляпунова.*

Решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = \operatorname{colon}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ системы (31.1), определённое при всех $t \geqslant t_0$, называется **устойчивым по Ляпунову** *в положительном направлении* (или просто *устойчивым*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех решений $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ системы (31.1), удовлетворяющих условию $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta$, выполнено неравенство $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) :\ \|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta,\ \forall t \geqslant t_0 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| < \varepsilon.$$

Из определения следует, что все решения, выходящие в момент $t = t_0$ из достаточно малой окрестности начальной точки $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ устойчивого решения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, продолжимы на полуось $[t_0, +\infty)$.

В силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве определение устойчивости не зависит от выбора нормы.

Условие устойчивости для нормы $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ можно записать в виде

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \equiv \operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)):$$

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta, \quad \forall t \geqslant t_0 \Rightarrow |x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}.$$

Решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \geqslant t_0$, системы (31.1) называется **неустойчивым по Ляпунову**, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существуют решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\delta(t)$ и момент времени $t_\delta > t_0$ такие, что выполнены неравенства $\|\boldsymbol{x}_\delta(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta$ и $\|\boldsymbol{x}_\delta(t_\delta) - \boldsymbol{\varphi}(t_\delta)\| \geqslant \varepsilon$.

Из этих определений вытекает, что следует считать *неустойчивым* решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, *непродолжаемое* при $t \to +\infty$, а также такое, для которого в любой окрестности $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ найдётся точка $\boldsymbol{x}_0$, из которой выходит *непродолжаемое* на $[t_0, +\infty)$ решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$.

Решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \geqslant t_0$, называется **асимптотически устойчивым** (в положительном направлении), если:

1) оно устойчиво;

2) $\exists\Delta > 0$, $\forall \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$: $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| = 0$.

Если в последнем определении $\Delta$ можно считать равным $+\infty$, то решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ называется **асимптотически устойчивым в целом**.

Следуя Ляпунову, исходное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ будем называть *невозмущённым*, а все остальные, с которыми оно сравнивается, *возмущёнными*.

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора точки $t_0$ в силу гарантированной условиями на функцию $\boldsymbol{f}$ непрерывной зависимости решения от начальных данных на любом конечном промежутке $[t_0, t_1]$.

Исследование устойчивости решения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \geqslant t_0$, системы (31.1) можно свести к исследованию устойчивости *тривиального* (нулевого) решения системы, полученной из исходной при помощи замены

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varphi}(t)$. *Траектория нулевого решения* $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, $t \geqslant t_0$, есть точка $\boldsymbol{y} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^\top$ фазового пространства, т. е. *нулевое положение равновесия.*

Устойчивость нулевого решения (*нулевого положения равновесия* $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$) преобразованной системы означает (рис. 31.1), что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall \boldsymbol{y}(t) : \|\boldsymbol{y}(t_0)\| < \delta, \quad \forall t \geqslant t_0 \Rightarrow \|\boldsymbol{y}(t)\| < \varepsilon.$$

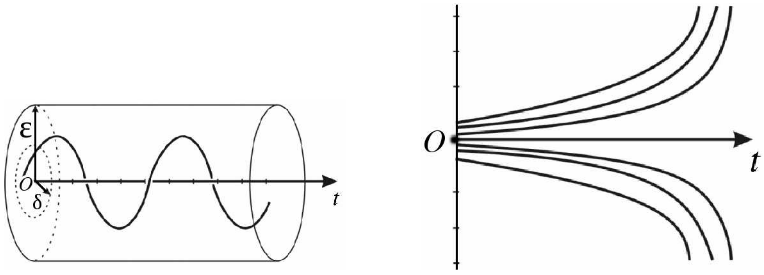



*Рис. 31.1.* Устойчивое и неустойчивое нулевые решения (положения равновесия)

Решение $x = 0$ уравнения

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \quad f(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad t \geqslant 0,$$

называется *устойчивым по Ляпунову (асимптотически устойчивым)*, если устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) нулевое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$ равносильной ему системы в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \ldots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которая получена путём введения новых переменных: $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $\ldots$, $x^{(n-2)} = x_{n-1}$, $x^{(n-1)} = x_n$.

Для линейной стационарной однородной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{31.2}$$

справедлива следующая теорема.

**Теорема Ляпунова.** *Нулевое решение системы* (31.2) *тогда и только тогда является:*

1) *устойчивым, когда действительные части всех собственных значений (характеристических чисел) матрицы* $A$ *неположительны, т. е.* $\operatorname{Re} \lambda_k(A) \leqslant 0$, $k = \overline{1, n}$, *причём собственным значениям с нулевой действительной частью соответствуют одномерные клетки Жордана в нормальной жордановой форме матрицы* $A$;

2) *асимптотически устойчивым, когда действительные части всех собственных значений матрицы $A$ отрицательны, т. е.* $\operatorname{Re}\lambda_k(A) < 0,\ \ k = \overline{1, n}$;

3) *неустойчивым, когда среди собственных значений матрицы $A$ существует хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, либо собственное значение с нулевой действительной частью, которому отвечает жорданова клетка порядка* $\geqslant 2$.

В случае линейного однородного стационарного уравнения $n$-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (31.3)$$

**критерии устойчивости и асимптотической устойчивости** имеют соответственно следующие формулировки.

*Нулевое решение линейного стационарного уравнения* (31.3) *устойчиво тогда и только тогда, когда действительные части корней его характеристического уравнения неположительны, причём характеристические числа с нулевой действительной частью являются простыми.*

*Нулевое решение уравнения* (31.3) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда действительные части его характеристических чисел отрицательны.*

При исследовании на отрицательность действительных частей всех корней алгебраического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (31.4)$$

используют

**Критерий Рауса — Гурвица.** *Действительные части всех корней уравнения (31.4) отрицательны тогда и только тогда, когда положительны все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

*т. е., когда* $\Delta_1 = a_1 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \ \ldots,\ \ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0.$

При построении матрицы Гурвица заметим, что в каждой её строке индекс каждого элемента на 1 меньше индекса предыдущего элемента, причём числа $a_i$ с индексами $i > n$ или $i < 0$ заменяются нулями, $a_0 = 1$.

**Необходимое условие.** Для того чтобы действительные части всех корней уравнения (31.4) были отрицательны, необходимо выполнение условия $a_i > 0,\ i = \overline{1, n}$. В случае $n \leqslant 2$ это условие является и достаточным.

Условия теоремы Гурвица можно заменить на **условия Льенара — Шипара**:

1) $a_i > 0,\ i = \overline{1, n}$;

2) $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots$ .

**В задачах 31.1–31.10, пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения данных дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющие указанным начальным условиям.**

**31.1.** $\dot{x} = x - 2tx,\ x(0) = 0$.

Решение. Очевидно, что $x = 0$ является решением данной начальной задачи, т. е. невозмущённое решение — $\varphi(t) \equiv 0$. Интегрируя уравнение, получаем общее решение в виде $x = Ce^{t-t^2}$. Запишем его в форме Коши, полагая $t_0 = 0$. Для этого найдём решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t)|_{t=0} = x(0)$. Тогда *общее решение в форме Коши* имеет вид $x = x(0)e^{t-t^2}$.

Покажем, что исследуемое решение $x = 0$ асимптотически устойчиво (рис. 31.2). Предварительно докажем, что решение $x = 0$ устойчиво: т. е. для любого $\varepsilon > 0$ укажем такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех решений $x = x(t)$, удовлетворяющих условию $|x(0)| < \delta$, при всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - \varphi(t)\| = \|x(t)\| = \|x(0)\|e^{t-t^2} < \varepsilon.$$

Оценим функцию $f(t) = e^{t-t^2}$ при $t \geqslant 0$. Имеем $f(0) = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Учитывая, что $f'(t) = (1-2t)e^{t-t^2} = 0$ при $t = 1/2$ и $f(1/2) = e^{1/4}$, получаем неравенство $f(t) \leqslant \max\{1, e^{1/4}\} < 2$. Отсюда следует оценка

$$|x(t)| \leqslant |x(0)|e^{1/4} < 2|x(0)|.$$

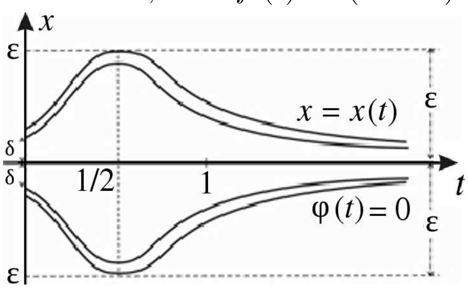


*Рис. 31.2.* Интегральные кривые

Тогда, если $|x(0)| < \delta = \varepsilon/2$, получаем требуемое неравенство $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$. *Устойчивость нулевого решения установлена.* Так как справедливо предельное соотношение

$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ при любом значении $x(0)$, то *нулевое решение асимптотически устойчиво в целом.* $\square$

**31.2.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases}$ $\quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0;\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top.$

Решение. Построим общее решение данной системы в форме Коши ($t_0 = 0$): $x_1(t) = x_1(0)\cos t + x_2(0)\sin t$, $x_2(t) = -x_1(0)\sin t + x_2(0)\cos t$. Очевидно, что исследуемое на устойчивость невозмущённое решение есть $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, т. е. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (0,0)^\top$. Рассмотрим евклидову норму вектора, тогда

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| = \|\boldsymbol{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \equiv \sqrt{x_1^2(0) + x_2^2(0)} = \|\boldsymbol{x}(0)\|$$

при $\forall t,\ t \in \mathbb{R}$ (рис. 31.3, 31.4).

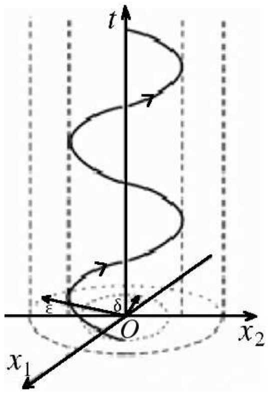



*Рис. 31.3.* Интегральные кривые — винтовые линии

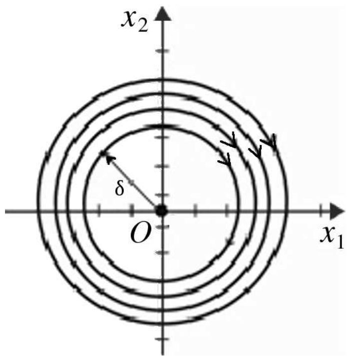



*Рис. 31.4.* Фазовый портрет. Траектории системы — $x_1^2 + x_2^2 = C^2$, $C \geqslant 0$

Отсюда очевидна устойчивость нулевого решения:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon, \quad \forall \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : \|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta, \quad \forall t \geqslant 0 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon.$$

*Нулевое решение системы устойчиво но не асимптотически*, так как любое её нетривиальное решение $x = x(t)$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$. $\square$

**31.3.** $\dot{x} = -x^2,\ x(0) = 0.$

Решение. Решения исходного уравнения определяются по формулам

$$x = \frac{1}{t + C}, \quad x = 0.$$

Тогда невозмущённое решение, удовлетворяющее условию $x(0) = 0$, есть $x = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$.

Если $x(0) = x_0$, то общее решение в форме Коши допускает представление $x(t) = x_0/(x_0 t + 1)$. Очевидно, что любое решение $x = x(t)$ при любом $x_0 < 0$, каким бы малым не был $|x_0|$, непродолжимо на всю полуось $t \geqslant 0$ (прямая $t = -1/x_0$ — асимптота этого решения, рис. 31.5). Отсюда следует *неустойчивость нулевого решения.* □

**31.4.** $\dot{x} = \sin^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad x(0) = 0.$

Р е ш е н и е. Решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$, есть $x \equiv 0$. При $x(0) = x_0$, $0 < x_0 < \pi$, имеем $x(t) = \operatorname{arcctg}(-t + \operatorname{ctg} x_0)$.

Пусть $0 < \varepsilon_0 < \pi$. Тогда любое возмущённое решение $x = x(t)$, начинающееся в точке $(0, x_0)$, $0 < x_0 < \pi$, обязательно при достаточно больших $t$ выйдет из полосы $\Pi = \{(t, x) : 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon_0,\ t \geqslant 0\}$. Это следует из того, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arcctg}(-t + \operatorname{ctg} x_0) = \pi$ (рис. 31.6). Следовательно, нулевое решение *неустойчиво.* □

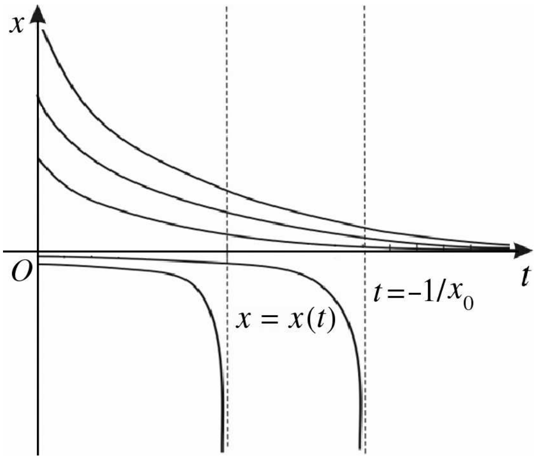



*Рис. 31.5.* Решения $x = x(t)$, $x(0) < 0$, непродолжаемы на весь интервал $(0, +\infty)$: $x = 0$ — неустойчивое решение

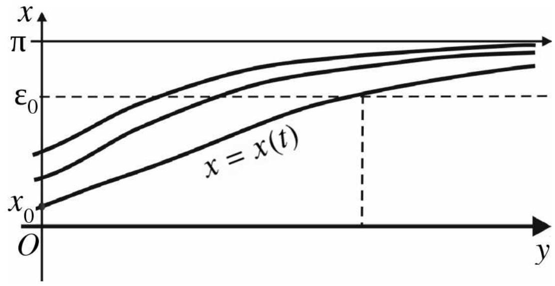



*Рис. 31.6.* Для всех решений $x = x(t)$, $0 < x(0) < \pi$, имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \pi$: решение $x = 0$ неустойчиво

**31.5.** $\dot{x} = (1 - 2t)x$, $x(0) = 0$.

**31.6.** $\dot{x} = -x^3$, $x(0) = 0$.

**31.7.** $\dot{x} + \dfrac{1}{t}x = 3t$, $x(1) = 1$.

**31.8.** $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 0$.

**31.9.** $3t^2\dot{x} + 2t^2x^2 + 1 = 0$, $x(1) = 1$.

**31.10.** $\dot{x} = \alpha x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x(0) = 0$.

**В задачах 31.11–31.22 начертить на плоскости траектории данных систем, а в случаях уравнений — соответствующих им систем, вблизи точки $(0, 0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение (нулевое положение равновесия).**

**31.11.** $\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -2y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. ДУ траекторий: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$, $x \neq 0$; $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{2y}$, $y \neq 0$. Проинтегрировав эти уравнения, получим траектории: $y = Cx^2$, $x \neq 0$; $x = 0$, $y \neq 0$, присоединяем к ним также положение равновесия $O(0,0)$. Движение по траекториям при возрастании времени $t \to +\infty$ направлено к особой точке $O(0,0)$. Траектории, начинающиеся при $t = 0$ в $\delta$-окрестности ($\delta = \varepsilon$) точки $(0,0)$ при $t \to +\infty$ остаются в ней и стремятся к началу координат, более того, все траектории при $t \to +\infty$ обладают последним свойством. *Нулевое решение системы асимптотически устойчиво в целом* (рис. 31.7). ☐

**31.12.** $\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Траектории системы: $y = Cx^{-1}$, $x \neq 0$; $x = 0$, $y \neq 0$, положение равновесия $O(0,0)$. Направление движения по траекториям определяем с помощью вектора $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y})|_{(0,1)} = (0,1)$. Траектории ($y \neq 0$), начинающиеся в любой $\delta$-окрестности точки $(0,0)$, при $t \to +\infty$ покидают любую её $\varepsilon$-окрестность, $\delta < \varepsilon$. *Нулевое решение* $x = 0$, $y = 0$ *(нулевое положение равновесия* $(0,0)$*) — неустойчиво* (рис. 31.8). ☐

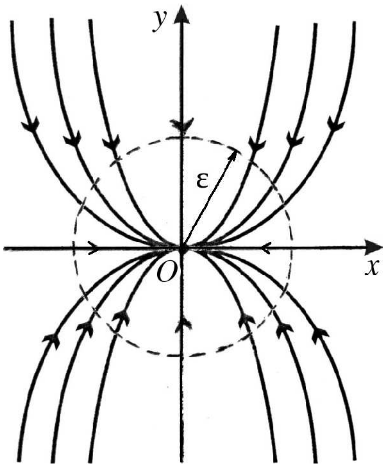



*Рис. 31.7.* Положение равновесия $(0,0)$ асимптотически устойчиво

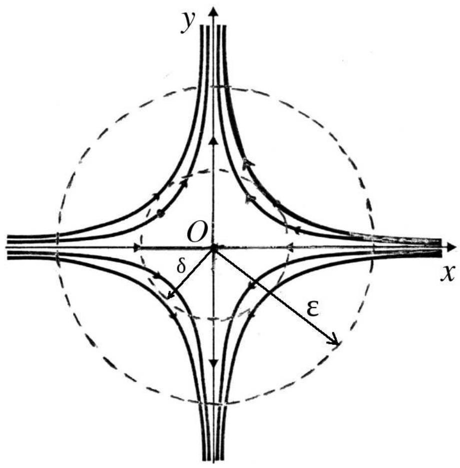



*Рис. 31.8.* Положение равновесия $(0,0)$ неустойчиво

**31.13.** $\ddot{x} + 4\sin x = 0$.

Р е ш е н и е. Полагая $y = \dot{x}$, получим равносильную систему в нормальной форме $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -4\sin x$. Проинтегрируем дифференциальное уравнение траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4\sin x}{y} \;\Rightarrow\; y^2 - 8\cos x = C.$$

Перепишем последнее уравнение в виде $y^2 + 8(1 - \cos x) = C_1$ или $y^2 + 16\sin^2 x/2 = C_1$. Траектории симметричны относительно начала и осей координат и при достаточно малых $x$ и $y$ представляют замкнутые кривые, окружающие начало координат, и в силу эквивалентности $\sin x/2 \sim x/2$ при $x \to 0$ мало отличаются от кривых $y^2 + 16(x/2)^2 = C_1$, т. е. эллипсов $y^2 + 4x^2 = C_1$. Положение равновесия $O(0,0)$ — центр, а движение по замкнутым траекториям происходит по часовой стрелке (направление движения по траекториям определяем с помощью вектора скорости в какой-либо неособой точке, например,

$$\boldsymbol{v}(0,1) = (\dot{x}(0,1), \dot{y}(0,1))^\top = (1,0)^\top).$$

Все траектории, выходящие при $t = 0$ из $\delta$-окрестности точки $(0,0)$, остаются в её $\varepsilon$-окрестности; $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(0,1) = (1,0)^\top$ (рис. 31.9). *Нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.* □

**31.14.** $\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -x^2. \end{cases}$

Решение. Данная система имеет целую линию $x = 0$ положений равновесия $(0, y_0)$. Остальные траектории являются интегральными кривыми в широком смысле для уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, т. е. полуокружностями $x^2 + y^2 = C$, с исключением из них точек пересечения с осью $Oy$. *Нулевое положение равновесия устойчиво, но не асимптотически.* Заметим, что положения равновесия $(0, y_0)$ неустойчивы, если $y_0 > 0$, и устойчивы, но не асимптотически, если $y_0 \leqslant 0$ (рис. 31.10). □

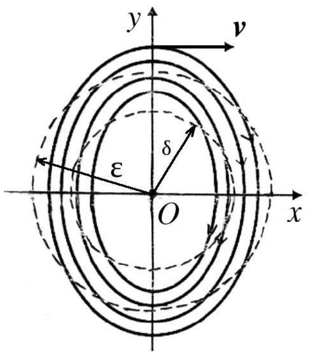



*Рис. 31.9.* Нулевое решение устойчиво

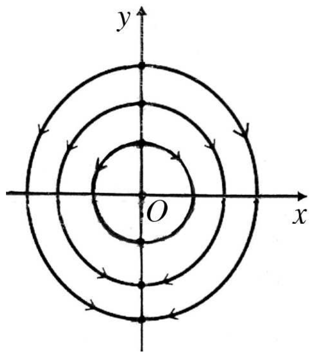



*Рис. 31.10.* Все положения равновесия $(0, y_0)$, $y_0 > 0$, устойчивы

**31.15.** $\dot{x} = -y^3$, $\dot{y} = x^3$.

**31.16.** $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = -y$.

**31.17.** $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x^3(1 + y^2)$.

**31.18.** $\ddot{x} + x^3 = 0$.

**31.19.** *а*) $\ddot{x} + x = 0$; *б*) $\ddot{x} - x = 0$; *в*) $\ddot{x} = 0$.

**31.20.** $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x(1 + y^2)$.

**31.21.** $\ddot{x} = \sin x$.

**31.22.** $\ddot{x} = x - x^3$.

**В задачах 31.23–31.25 выяснить, является ли устойчивым нулевое решение системы, если известно, что общее решение этой системы имеет указанный вид.**

**31.23.** $x = C_1 \cos t + C_2 \sin^2 t,\ \ y = -C_1 + C_2 \cos t.$

Решение. Представим *общее решение в форме Коши*, полагая $t_0 = 0$. Произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin^2 0 = x(0), \\ -C_1 + C_2 \cos 0 = y(0). \end{cases}$$

Отсюда следует, что $C_1 = x(0)$, $C_2 = y(0) + x(0)$, а *общее решение в форме Коши* примет вид

$$x = x(0) \cos t + (x(0) + y(0)) \sin^2 t, \quad y = -x(0) + (x(0) + y(0)) \cos t.$$

Докажем, что нулевое решение $x = 0$, $y = 0$ устойчиво.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано (любое). По этому $\varepsilon$ найдём $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $|x(0)| < \delta$, $|y(0)| < \delta$ при всех $t \geqslant 0$ следуют неравенства $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$. Мы имеем при $t \geqslant 0$ оценки

$$|x(t)| \leqslant |x(0)||\cos t| + |x(0) + y(0)| \sin^2 t \leqslant 2|x(0)| + |y(0)|, \quad |y(t)| \leqslant 2|x(0)| + |y(0)|.$$

Из построенных оценок следует, что если $|x(0)| < \delta$, $|y(0)| < \delta$, где $\delta = \varepsilon/3$, то $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$.

Таким образом, *нулевое решение устойчиво (но не асимптотически)*. □

**31.24.** $x = (C_1 - C_2 t)e^{-t},\ \ y = C_1\sqrt{t} + C_2.$

**31.25.** $x = C_1^2 \sin t + C_2 \cos t,\ \ y = C_1 \cos t + C_1 C_2 \sin t.$

**В задачах 31.26–31.30, пользуясь теоремами Ляпунова об устойчивости линейных стационарных систем, исследовать, при каких значениях параметров устойчиво нулевое решение следующих систем и уравнений.**

**31.26.** $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = ax.$

Решение. Собственные значения матрицы коэффициентов системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ — числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Если $a \neq 0$, то нормальная жорданова форма матрицы $A$ — есть клетка Жордана порядка 2 с нулевой диагональю. В случае $a = 0$ двукратному корню $\lambda = 0$ отвечают две одномерные клетки Жордана. Отсюда следует, что в случае $a \neq 0$ *нулевое решение неустойчиво*, а в случае $a = 0$ — *устойчиво, но не асимптотически*. □

**31.27.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = -x + ay. \end{cases}$

**31.28.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y, \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y. \end{cases}$

**31.29.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + ay, \\ \dot{y} = -bx - 4y. \end{cases}$

**31.30.** $\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$

**В задачах 31.31–31.36 исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение, пользуясь критерием Рауса — Гурвица.**

**31.31.** $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения имеет вид $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Составим для него матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

для которой имеем

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \Delta_4 = 2\Delta_3 = 14 > 0.$$

Отсюда в силу критерия Рауса — Гурвица выполнено условие $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, $k = \overline{1,4}$, и, следовательно, *нулевое решение* $y = 0$ *асимптотически устойчиво.* □

**31.32.** $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ имеет вид $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 10 = 0$. Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 10 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

положительны, $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 26$, $\Delta_3 = 260$.

Отсюда на основании критерия Рауса — Гурвица следует, что действительные части собственных значений матрицы коэффициентов отрицательны и *нулевое решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво.* □

**31.33.** $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = 0.$

**31.34.** $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 8y' + 3y = 0.$

**31.35.** $y''' + 2y'' + 3y' + y = 0.$

**31.36.** $y^{(4)} + 3y''' + y'' + y' + y = 0.$

### Задания для самостоятельной работы

**1.** Доказать, что для асимптотической устойчивости нулевого решения скалярного уравнения

$$\dot{x}=f(t,x);\quad f(t,x)\in C^{0,1}_{t,x}(Z),\quad Z=\{(t,x):t\geqslant 0,\ |x|\leqslant\Delta\},\quad f(t,0)\equiv 0,$$

достаточно стремления всех решений к нулю при $t\to+\infty$.

**2.** Траектории автономной системы уравнений

$$\dot{x}=P(x,y),\quad \dot{y}=Q(x,y),$$

где $P,\ P'_x,\ P'_y,\ Q,\ Q'_x,\ Q'_y$ непрерывны, изображены на фазовой плоскости (в заштрихованной области траектории — замкнутые кривые с выколотой точкой $(0,0)$, а остальные траектории, огибая овал, входят при $t\to+\infty$ в начало координат, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)|=\lim\limits_{t\to+\infty}|y(t)|=0$) (рис. 31.11).

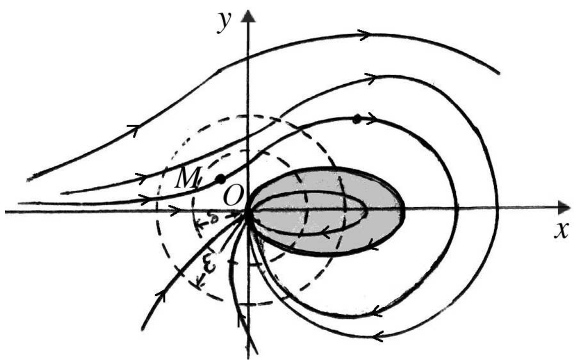



*Рис. 31.11.* $(0,0)$ — неустойчивый аттрактор*

Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову?

**3.** Доказать, что нулевое решение линейной однородной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x}$$

асимптотически устойчиво (устойчиво) тогда и только тогда, когда все её решения $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ стремятся к нулю при $t\to+\infty$ (каждое её решение ограничено на полуоси $(t_0,+\infty)$).

**4.** Доказать, что нулевое решение ДУ $\ddot{x}+q(t)x=0$ с непрерывным и ограниченным коэффициентом $q(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, устойчиво, если каждое его решение ограничено на $\mathbb{R}_+$.

---
*Аттрактор — англ. «to attract» — притягивать.

**5.** Доказать,что нулевое решение уравнения $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0$, $p,q\in C(\mathbb{R}_+)$, не может быть асимптотически устойчивым ни при какой функции $q(t)$, если $p(t)\leqslant 0$, $t\geqslant 0$.

**6.** Показать, что для нелинейной дифференциальной системы из $n$ уравнений, $n\geqslant 2$, стремление к нулю всех решений при $t\to+\infty$, вообще говоря, не является достаточным условием для асимптотической устойчивости нулевого решения. Рассмотреть пример:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f(t,x_1,x_2),\\ \dot{x}_2=-\dfrac{x_2}{t}, & t\geqslant 1,\end{cases}$$

где $f(t,x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1}{t}-t^2x_1x_2, & x_2\neq 0;\\ -x_1, & x_2=0.\end{cases}$

Доказать, что для любого решения системы $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^\top$ имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty}x_i(t)=0$, $i=1,2$. Однако нулевое решение системы не является устойчивым, а тем более асимптотически устойчивым.

**7.** Пусть $A(t)$ — кососимметрическая матрица, $A^\top(t)=-A(t)$. Показать, что нулевое решение системы $\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x}$ устойчиво.

**8.** Пусть $A$ — постоянная кососимметрическая матрица. Показать, что нулевое решение системы $\dot{\boldsymbol{x}}=A^2\boldsymbol{x}$ устойчиво.

**9.** Докажите, что нулевое решение системы

$$\dot{x}=-y(x^2+y^2)^{1/2},\quad \dot{y}=x(x^2+y^2)^{1/2}$$

устойчиво по Ляпунову, но любое другое её решение неустойчиво.

**Мини-самоконтроль. 1.** Исследовать на устойчивость нулевое решение следующих уравнений и системы: **а)** $\dot{x}=-x/t$, $t\geqslant 1$; **б)** $\dot{x}=x/t$; **в)** $\dot{x}=x^3$; **г)** $\dot{x}=-3x+2y$, $\dot{y}=-3x+y$. **2.** Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия систем: **а)** $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x^3$; **б)** $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x^n$, $n\in\mathbb{N}$; **в)** $\dot{x}=y^2-x^2$, $\dot{y}=2xy$. **3.** Система $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, $A$ — постоянная матрица, имеет частное решение, у которого известна только первая координата $x_1=e^{-2t}+\sin 2t$. Является ли устойчивым, асимптотически устойчивым нулевое решение этой системы? **4.** Система $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$, где $A$ — постоянная матрица, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4$, имеет частное решение, у которого известна лишь одна компонента $x_1=t\cos t$. Устойчиво ли нулевое решение этой системы? **5.** Доказать, что нулевое решение ЛОДУ $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ с постоянными коэффициентами $a$ и $b$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $a$, $b>0$.

## § 32. Фазовые портреты линейных двумерных стационарных систем

*Особая точка (положение равновесия, точка покоя) системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$. Особая точка уравнения $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$. Узел. Дикритический узел. Вырожденный узел. Седло. Центр. Фокус. Определение типа особой точки двумерной линейной стационарной (автономной) системы по корням характеристического уравнения. Построение фазовых портретов.*

Рассмотрим *автономную (стационарную) двумерную систему*

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{32.1}$$

где $P$ и $Q$ — непрерывно дифференцируемые функции в области $D \subset \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in J$, — решение, определённое на некотором промежутке $J \subset \mathbb{R}$.

Тогда множество точек $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$, $t \in J$, фазовой плоскости $Oxy$ называется *фазовой траекторией (фазовой кривой) системы* (32.1) или *траекторией решения* $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.

Всякая фазовая траектория системы (32.1) принадлежит к одному из трёх типов: 1) гладкая кривая без самопересечений; 2) замкнутая гладкая кривая (*цикл*); 3) точка.

Точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ называется *состоянием равновесия (точкой покоя)* системы (32.1), если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Эта же точка является *особой точкой* векторного поля $\boldsymbol{v} = (P, Q)^\top$ и соответствующего ДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{32.2}$$

Фазовые траектории системы (32.1) совпадают с интегральными кривыми ДУ (32.2) (и «перевёрнутого» для него ДУ $dx/dy = = P(x, y)/Q(x, y))$ и его особыми точками.

Направление движения изображающей точки на фазовой траектории определяется с помощью *вектора скорости* $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y})^\top = = (P(x, y), Q(x, y))^\top$.

*Фазовый портрет системы* — чертёж фазовых траекторий системы с указанием направления движения точки по траекториям с возрастанием времени $t$.

Рассмотрим двумерную линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \tag{32.3}$$

Будем предполагать, что *определитель* матрицы её коэффициентов $A = (a_{ij})$ отличен от нуля. Тогда система (32.3) имеет *единственную особую точку (положение равновесия, точку покоя)* $(0,0)$.

Качественное поведение траекторий системы (32.3) определяется собственными значениями матрицы $A$, т. е. корнями $\lambda_1$ и $\lambda_2$ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Рассмотрим *фазовые портреты* системы (32.3) для разных соотношений между корнями $\lambda_1$ и $\lambda_2$ ($\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$, так как $\det A \neq 0$).

**I. Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные числа одного знака ($\lambda_1\lambda_2 > 0$):**

**а)** если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то особая точка (0,0) – *обыкновенный узел* или просто *узел* (рис. 32.1);

**б)** если $\lambda_1 = \lambda_2$, то особая точка может быть или *вырожденным узлом* (рис. 32.2), или *дикритическим узлом* (рис. 32.3), причём дикритический узел будет тогда и только тогда, когда система имеет вид $\dot{x} = ax$, $\dot{y} = ay$.

Если $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$, то узел любого типа — *асимптотически устойчивое положение равновесия* (на рис. 32.1–32.3 направление движения по траекториям указано для $\lambda_i < 0$). Если $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, то *узел неустойчивый*.

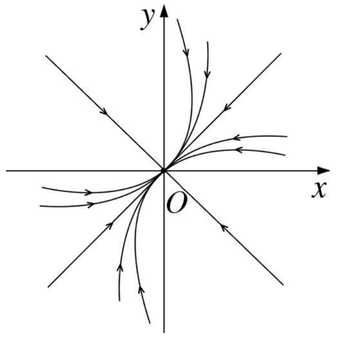



*Рис. 32.1.* Особая точка $(0,0)$ — обыкновенный узел

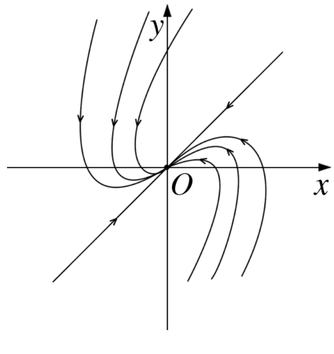



*Рис. 32.2.* Особая точка $(0,0)$ — вырожденный узел

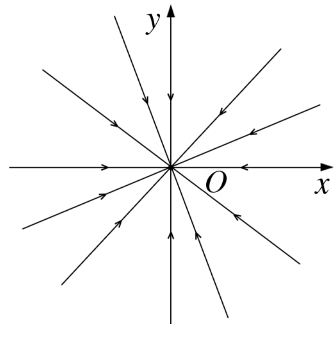



*Рис. 32.3.* Особая точка $(0,0)$ — дикритический узел

**II. Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные числа разных знаков ($\lambda_1\lambda_2 < 0$).**

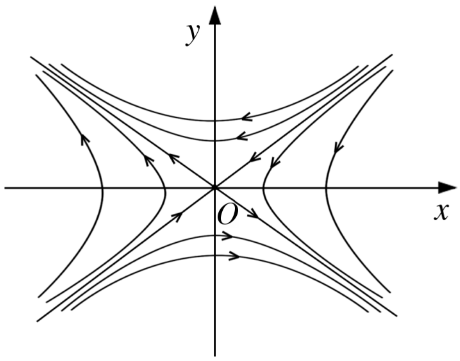



*Рис. 32.4.* Особая точка $(0,0)$ — седло

В этом случае особая точка $(0,0)$ — *седло.* Седло — всегда *неустойчивая точка покоя.* В этом случае выделяются две прямые (*сепаратрисы седла*), проходящие через $O(0,0)$, на каждой из которых лежат особая точка $(0,0)$ и две траектории-полупрямые. Они являются асимптотами траекторий типа гипербол, расположенных в углах, образованных этими лучами (рис. 32.4).

Чтобы построить *траектории* системы (32.3) в случае узлов и седла, нужно сначала найти *лучеобразные траектории*, примыкающие к началу координат (0,0). *Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов системы* (32.3), причём в случае обыкновенного узла траектории касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению из $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Прямые, содержащие траектории-полупрямые системы (32.3), можно также искать в виде $y = kx$ или $x = 0$, подставляя эти выражения в соответствующее ДУ первого порядка вида (32.2) или в его «перевёрнутое».

**III. Корни $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ — комплексно сопряженные числа.**

**а)** если $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, то особая точка $(0,0)$ — *фокус* (рис. 32.5);

**б)** если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, то особая точка $(0,0)$ — *центр* (рис. 32.6).

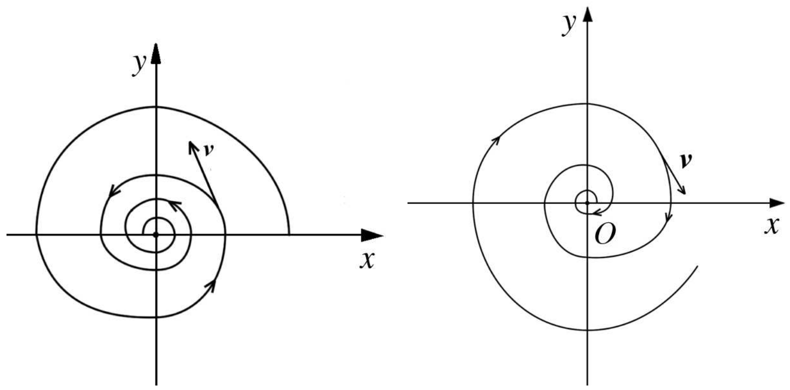



*Рис. 32.5.* Особая точка $(0,0)$ — фокус ($\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y})^\top$, $a < 0$)

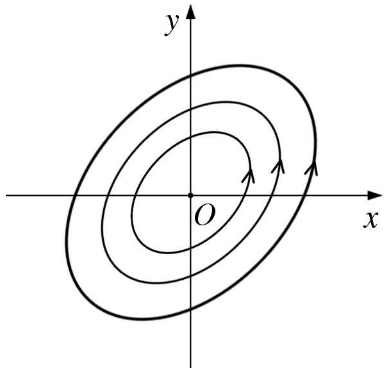



*Рис. 32.6.* Особая точка $(0,0)$ — центр ($a = 0$)

В случае фокуса траектории ДС — *спирали,* наматывающиеся на точку $(0,0)$. Если $a<0$, то *фокус — асимптотически устойчивое* положение равновесия, движение фазовой точки по этим спиралям происходит к точке $(0,0)$ (спирали закручиваются). Если $a>0$, то точка $(0,0)$ — *неустойчивый фокус* (спирали при $t\to+\infty$ раскручиваются). Для определения *направления* (по часовой стрелке или против) *закручивания* или соответственно *раскручивания* спиралей достаточно построить вектор скорости в какой-либо неособой точке $\boldsymbol{v}=(\dot{x},\dot{y})^{\top}$, определяемый системой (32.3).

В случае *центра* траектории — замкнутые кривые, являющиеся эллипсами с центром (0,0), соответствующие óси которых расположены на одной прямой. Центр всегда *устойчив по Ляпунову* и всегда *не асимптотически.*

*В вырожденном случае*, когда $\det A=0$, возможны случаи $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$ или $\lambda_1=\lambda_2=0$. Тогда система (32.3) принимает вид $\dot{x}=ax+by$, $\dot{y}=k(ax+by)$, для которой *особые точки* заполняют сплошь прямую $ax+by=0$, а траектории — полупрямые, расположенные на прямой $y=kx+C$, где $C$ — произвольная постоянная, либо прямые $y=kx+C$, $C\neq 0$, если $k=-a/b$.

Рассмотрим также *стационарное линейное однородное уравнение*

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0.$$

*Фазовыми траекториями* этого уравнения называют траектории равносильной ему системы в нормальной форме $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-bx-ay$, которые изображаются на фазовой плоскости $Oxy$, где $y=\dot{x}$.

**В задачах 32.1–32.19 исследовать особые точки (положения равновесия) данных ДС и ДУ. Начертить фазовые траектории (интегральные кривые) на плоскости $\boldsymbol{Oxy}$. Для ДС указать направление движения по траекториям при $\boldsymbol{t\to+\infty}$.**

**32.1.** $\begin{cases}\dot{x}=-x+2y,\\ \dot{y}=2x-y,\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ \det A\neq 0.$

Р е ш е н и е. Точка $(0,0)$ — единственное положение равновесия ДС. Составим характеристическое уравнение ДС

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2+2\lambda-3=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=-3,\quad \lambda_2=1.$$

Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные и разных знаков, следовательно, *особая точка* $(0,0)$ — *седло* и эта точка *неустойчива.*

Найдём *сепаратрисы* седла. Ищем их в виде $y = kx$. Подставляем последнее выражение в ДУ $dy/dx = (2x - y)/(-x + 2y)$. Получим уравнение для определения $k$:

$$k = \frac{2-k}{-1+2k} \quad \Rightarrow \quad 2k^2 - k = 2 - k \quad \Rightarrow \quad k^2 = 1, \quad k = \pm 1.$$

Итак, прямые $y = x$ и $y = -x$ — *сепаратрисы седла*, каждая из которых состоит из трёх траекторий: особой точки $(0,0)$ и двух полупрямых. Остальные траектории — кривые, напоминающие ветви гипербол, для которых сепаратрисы являются асимптотами.

Можно (но не обязательно) вычислить, под каким углом траектории пересекают оси координат. Для этого найдём направление поля ДУ на осях координат. Имеем

$$dy/dx|_{x\neq 0,\ y=0} = -2, \quad dy/dx|_{x=0,\ y\neq 0} = -1/2.$$

Для выяснения направления движения точки по траекториям достаточно построить вектор скорости системы в какой-либо неособой точке, например

$$\boldsymbol{v}(1,1) = (\dot{x}(1,1), \dot{y}(1,1))^\top = (1,1)^\top,$$

а далее строим направление движения фазовой точки по траекториям в силу непрерывности поля направлений ДС в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ (рис. 32.7). $\square$

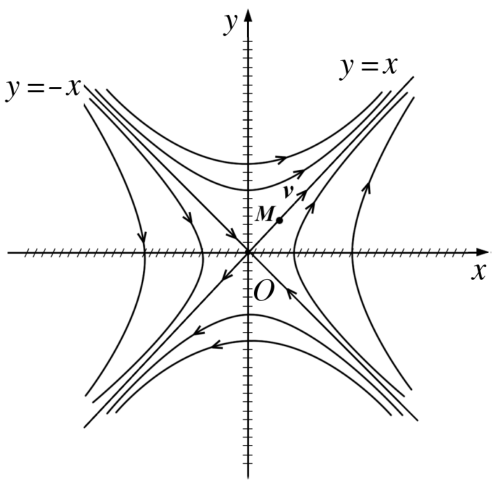



*Рис. 32.7.* Особая точка $(0,0)$ — седло, $\boldsymbol{v}(M) = \boldsymbol{v}(1,1) = (1,1)^\top$

**32.2.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = x - 2y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0.$

Р е ш е н и е. Единственная особая точка $(0,0)$ данной ДС — *обыкновенный узел*, так как собственные значения матрицы $A$, удовлетворяющие уравнению $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ — действительные, различные и одного знака, причём $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Из отрицательности $\lambda_i$, $i = 1, 2$, следует *асимптотическая устойчивость* узла.

Построение *лучеобразных траекторий* можно провести, как и выше. Однако в случае обыкновенного узла целесообразнее найти собственные векторы матрицы $A$: 1) для $\lambda_1 = -1$ имеем вектор $\boldsymbol{\gamma}_1 = (1, 1)^\top$; 2) для $\lambda_2 = -3$ имеем вектор $\boldsymbol{\gamma}_2 = (1, -1)^\top$.

Прямые, расположенные вдоль векторов $\boldsymbol{\gamma}_1$ и $\boldsymbol{\gamma}_2$, каждая из которых содержит две траектории-полупрямые и точку $(0, 0)$, есть соответственно $x - y = 0$ и $x + y = 0$ (рис. 32.8).

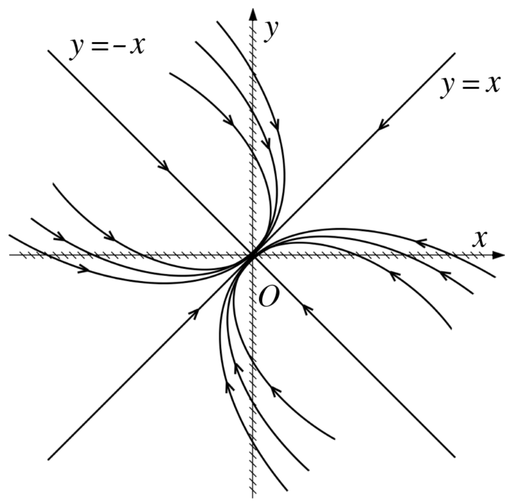



*Рис. 32.8.* Особая точка $(0, 0)$ — устойчивый узел

Остальные траектории — кривые вида полупарабол, входящие в точку (0,0) при $t \to \infty$ и касающиеся при подходе к ней прямой $x - y = 0$, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Можно также вычислить, под каким углом траектории пересекают оси координат. Для соответствующего ДУ $dy/dx = (x - 2y)/(y - 2x)$ имеем

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,\ y\neq 0} = -\frac{1}{2}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,\ y\neq 0} = -2. \qquad \square$$

**32.3.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0.$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение ДС $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ с положительной действительной частью. Следовательно, положение равновесия (0,0) — *неустойчивый фокус*, траектории — *спирали, наматывающиеся на точку* $(0, 0)$, а движение фазовой точки по ним при $t \to +\infty$ происходит от точки $(0, 0)$.

Для более адекватного построения спиралей построим некоторые элементы поля соответствующего ДУ $dy/dx = (x + y)/(x - y)$:

1) 0-изоклина — прямая $y = -x$, $x \neq 0$;

2) $\infty$-изоклина — прямая $y = x$, $x \neq 0$;

3) направление поля в точках оси $Ox (y \neq 0)$ имеет угловой коэффициент $y' = 1$, на оси $Oy (x \neq 0)$ — $y' = -1$.

Для определения направления раскручивания спиралей вычислим в некоторой неособой точке, например, в точке (1,0), вектор скорости $\boldsymbol{v}(1,0) = (\dot{x}(1,0), \dot{y}(1,0))^\top = (1,1)^\top$. Так как $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, то *движение* по спиралям при возрастании времени $t$ происходит в направлении от точки $(0,0)$ *против часовой стрелки* (рис. 32.9). $\square$

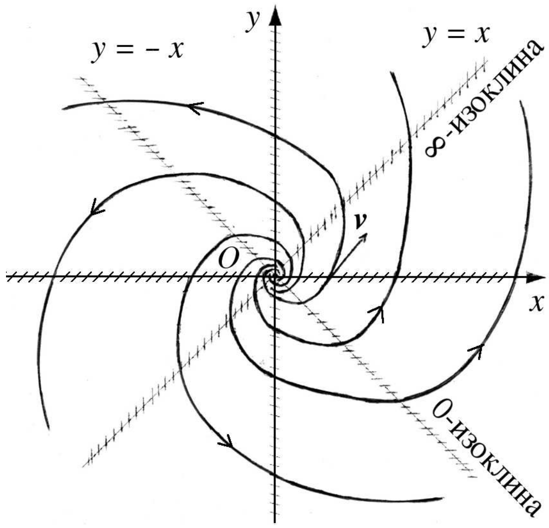



*Рис. 32.9.* Особая точка $(0,0)$ — неустойчивый фокус, $\boldsymbol{v}(1,0) = (1,1)^\top$

**32.4.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0.$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9 = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Следовательно, точка $(0,0)$ — *центр*, он *устойчив*, но *не асимптотически.* Фазовые траектории — замкнутые кривые, а именно эллипсы с центром в точке $(0,0)$. Для ДУ $dy/dx = (2x - y)/(x - 5y)$ имеем: $y = 2x$ — 0-изоклина; $y = x/5$ — $\infty$-изоклина; направление поля вдоль осей имеет угловые коэффициенты $dy/dx|_{x \neq 0,\ y=0} = 2$, $dy/dx|_{x=0,\ y \neq 0} = 1/5$.

Полезно также найти прямые $y = kx$, на которых лежат оси эллипсов. Для этого найдём экстремумы функции $R(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $y = kx$, $\dot{x} = x - 5y$, $\dot{y} = 2x - y$. Из необходимого условия экстремума следует $dR/dt = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$. Подставляя в последнее равенство указанные выше условия, получаем, что число $k$ определяется из уравнения $k^2 + 3k - 1 = 0$, $k_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{13})/2$, значит, оси эллипсов расположены на прямых $AB$ и $CD$ (рис. 32.10): $y = (-3 + \sqrt{13})x/2$ и $y = (-3 - \sqrt{13})x/2$. *Направление движения* при возрастании времени $t$ согласовываем с вектором скорости $\boldsymbol{v}(1,0) = (\dot{x}(1,0), \dot{y}(1,0))^\top = (1,2)^\top$, т. е. оно *происходит против часовой стрелки* (рис. 32.10). $\square$

**32.5.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0, \ \lambda_{1,2} = 1.$

Р е ш е н и е. Единственная особая точка (0,0) — *вырожденный неустойчивый узел*, так как $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Пара лучеобразных траекторий определяется путём подстановки $y = kx$ в соответствующее ДУ $dy/dx = x/(2x - y)$. Получаем уравнение для определения $k$: $k = 1/(2-k)$, $k = 1$. Следовательно, траектории — полупрямые ДС $y = x$ $(x > 0)$ и $y = x$ $(x < 0)$. Остальные траектории, не равные особой точке $(0,0)$, при подходе к ней касаются прямой $y = x$.

Для ДУ $y' = x/(2x - y)$ найдём характерные элементы поля направлений:

1) $x = 0$, $y \neq 0$ — 0-изоклина;

2) $y = 2x$, $x \neq 0$ — $\infty$-изоклина;

3) $dy/dx|_{x \neq 0,\ y=0} = 1/2$, $dy/dx|_{x=0,\ y \neq 0} = 0$.

Известно (легко проверить), что для любого нетривиального решения $(x(t), y(t))^\top$ в случае вырожденного узла имеет место соотношение $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)/x(t) = k = 1$. Полученная информация позволяет схематически изобразить фазовые траектории исходной ДС и указать направление движения по траекториям при $t \to +\infty$ (рис. 32.11). $\square$

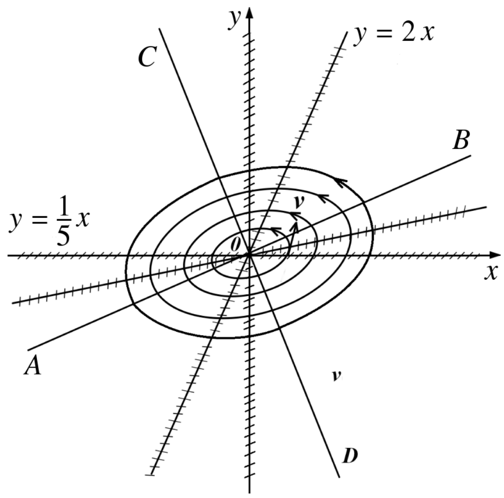



*Рис. 32.10.* Особая точка $(0,0)$ — центр, $\boldsymbol{v}(1,0) = (1,2)^\top$

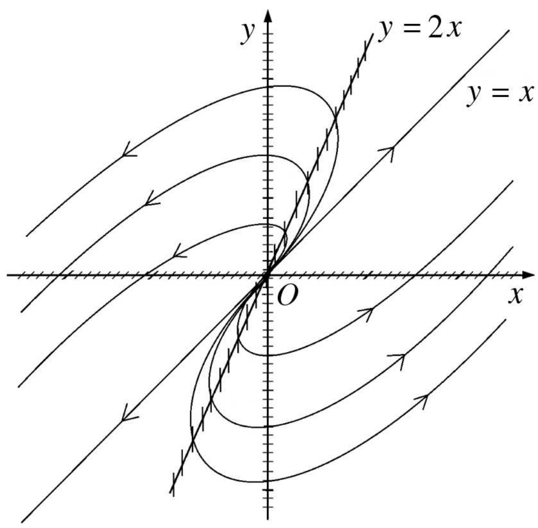



*Рис. 32.11.* Особая точка $(0,0)$ — неустойчивый вырожденный узел

**32.6.** $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0.$

Р е ш е н и е. Фазовый портрет исходного ДУ — это фазовый портрет равносильной ему линейной ДС $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 3x - 2y$, который строится на фазовой плоскости $Oxy$, где $y = \dot{x}$. Собственные значения матрицы коэффициентов ДС (корни характеристического уравнения ДУ) определяются из характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$. Имеем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Отсюда следует, что *особая точка* (0,0) — *седло*. Это *неустойчивое положение равновесия*. Подробное построение фазового портрета в случае седловидной особой точки см. в решении задачи 32.1. $\square$

**32.7.** $y' = \dfrac{x - 2y}{-2x + y}$.

Р е ш е н и е. Для построения интегральных кривых (в расширенном смысле) данного ДУ первого порядка можно перейти к соответствующей линейной ДС $\dot{x} = -2x + y$, $\dot{y} = x - 2y$, траектории которой (отличные от (0,0)) совпадают с интегральными кривыми ДУ. Построение траекторий этой ДС дано в решении задачи 32.2. Чертёж интегральных кривых проводится так же, как на рис. 32.5, но *без указания направления* движения. □

**32.8.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - x, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Р е ш е н и е. Определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Система имеет *бесконечно много положений равновесия*, заполняющих сплошь прямую $y = x$.

Траектории, отличные от положений равновесия, являются интегральными кривыми соответствующего ДУ $dy/dx = (y - x)/(x - y)$ или $dy/dx = -1$, $y \neq x$.

Отсюда следует, что траектории ДС, отличные от положений равновесия, получаются из семейства прямых $y = -x + C$ путём исключения из них положений равновесия.

Движение по траекториям происходит в направлении от положений равновесия. В этом можно убедиться, изучив знак, например, производной $\dot{y} = y - x$: если $y > x$, то $\dot{y} > 0$ и ордината точки на траектории возрастает; если же $y < x$, то $\dot{y} < 0$ и ордината точки убывает, т. е. все положения равновесия являются неустойчивыми (рис. 32.12). □

**32.9.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x, \\ \dot{y} = 3y - 9x, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$, $\lambda_{1,2} = 0$.

Р е ш е н и е. Система имеет бесконечное число положений равновесия, заполняющих сплошь прямую $y = 3x$ (рис. 32.13).

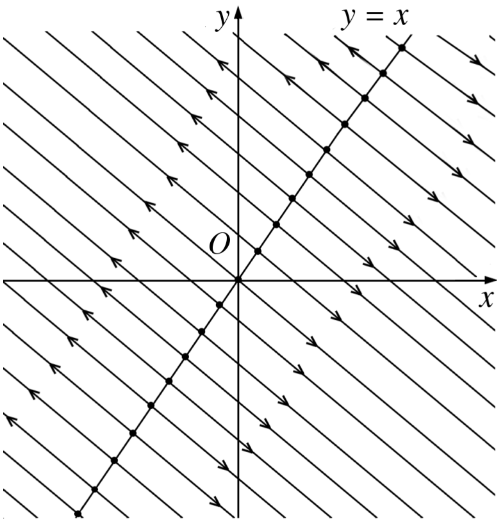



*Рис. 32.12.* Точки линии $y = x$ — положения равновесия

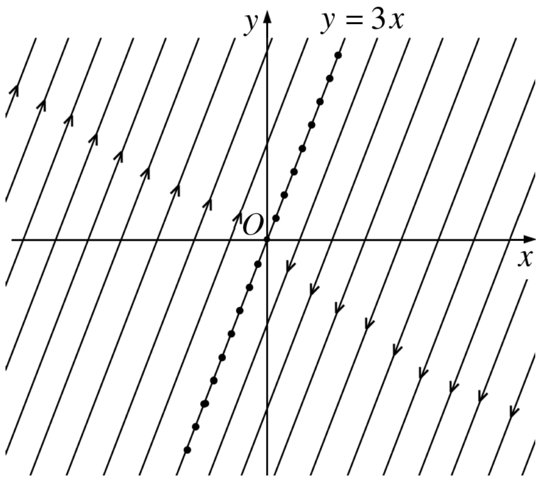



*Рис. 32.13.* Точки $(x_0, 3x_0)$ — положения равновесия, $x_0 \in \mathbb{R}$

Интегральные кривые ДУ $dy/dx = (3y - 9x)/(y - 3x) = 3$, где $y \neq 3x$, — прямые $y = 3x + C$, $C \neq 0$, они являются траекториями данной ДС.

Направление движения по траекториям так же, как и выше, определяем по знаку производной $\dot{y} = 3y - 9x:$ если $y > 3x$, то $\dot{y} > 0 \Rightarrow$ ордината фазовой точки на траекториях, расположенных в этой полуплоскости, возрастает; если $y < 3x$, то $\dot{y} < 0 \Rightarrow$ ордината точки убывает. Отсюда следует *неустойчивость всех положений равновесия системы.* □

**32.10.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

**32.11.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

**32.12.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

**32.13.** $y' = \dfrac{y}{x}$.

**32.14.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2y}{-2x + y}$.

**32.15.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y}{y - 2x}$.

**32.16.** $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$.

**32.17.** $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$.

**32.18.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

**32.19.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$

**32.20.** Определить тип нулевого положения равновесия ДУ $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = 0$ и его устойчивость в зависимости от параметра $\alpha$.

**32.21**. При каких значениях параметров $\alpha$ и $\beta$ траектории ДУ $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ — замкнутые кривые?

**32.22.** Дать механическую интерпретацию типа особой точки (0,0) (в зависимости от сопротивления $p \geqslant 0$) ДС, равносильной ДУ свободных колебаний $\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0:$ **а)** $p = 0$; **б)** $p^2 < q$; **в)** $p^2 > q$; **г)** $p^2 = q$.

**32.23.** Определить тип особой точки $(0, 0)$ системы $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = -x - \alpha y$ и исследовать её на устойчивость в зависимости от параметра $\alpha$.

**Мини-самоконтроль.** Определить тип положений равновесия нижеследующих ДС и ДУ. Начертить схему расположения траекторий и соответственно интегральных кривых: **1.** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **2.** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **3.** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **4.** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **5.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y - x}{x + y}$; **6.** $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; **7.** $\ddot{x} + 4x = 0$; **8.** $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$.

# § 33. Устойчивость по линейному приближению

*Линеаризация системы (линейное или первое приближение). Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Теорема Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Исследование характера особой точки двумерной нелинейной автономной системы. Построение фазовых портретов.*

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{33.1}$$

где вектор-функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{colon}(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, дважды дифференцируема в некоторой окрестности начала координат. Разложим $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в этой окрестности по формуле Тейлора $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$, где матрица $A = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0)}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \equiv \left(\dfrac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}\right)$, $i, j = \overline{1, n}$, — матрица Якоби функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ — остаточный член в форме Пеано:

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\| = o(\|\boldsymbol{x}\|) \ \text{ при } \ \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}. \tag{33.2}$$

Тогда система (33.1) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}). \tag{33.3}$$

Линейная система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{33.4}$$

называется *линеаризацией системы* (33.3) *в точке* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ или *системой линейного (первого) приближения для системы* (33.3).

Устойчивость нулевого решения (нулевого положения равновесия) системы (33.3) часто можно исследовать с помощью следующих теорем Ляпунова.

**Теорема об устойчивости по линейному приближению.** *Нулевое решение системы* (33.3) *асимптотически устойчиво, если все собственные значения* $\lambda_j(A)$ *матрицы* $A$, $j = \overline{1, n}$, *имеют отрицательные действительные части.*

**Теорема о неустойчивости по линейному приближению.** *Нулевое решение системы* (33.3) *неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение матрицы* $A$ *имеет положительную действительную часть.*

В *критическом случае*, когда выполнено *условие* $\operatorname{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0$, $j = \overline{1,n}$, но существует хотя бы одно собственное значение с нулевой действительной частью, исследование устойчивости с помощью системы линейного приближения невозможно, так как (как правило) на устойчивость начинают влиять нелинейные члены разложения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. В этом случае используют другие методы, например метод функций Ляпунова.

Приведённые выше *теоремы Ляпунова справедливы и для неавтономных систем вида*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}),$$

где $A$ — постоянная матрица, $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$ и выполнено условие $\|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\|/\|\boldsymbol{x}\| \underset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}{\overset{t\geqslant a}{\rightrightarrows}} 0$.

На практике матрицу коэффициентов $A$ линейного приближения (33.4) системы (33.1) можно строить, используя матрицу Якоби $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{0})$ или выделяя линейные члены известных разложений коэффициентов системы.

Если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ — ненулевое положение равновесия системы (33.1), $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, то преобразование переноса $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ переводит это положение равновесия в нулевое для преобразованной системы $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$. Однако систему линейного приближения $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ для этой системы можно строить сразу, не выполняя указанную замену, что особенно целесообразно при исследовании нескольких положений равновесия, с помощью матрицы Якоби функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$:

$$A = \left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{a})}{\partial x_j}\right), \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Исследование качественного поведения траекторий в окрестности нулевого положения равновесия двумерной автономной системы

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + \varphi_1(x,y), \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + \varphi_2(x,y), \tag{33.5}$$

где $a_{ij}$, $i, j = 1, 2$, — постоянные; $\varphi_i(x,y) = o(r)$ при $r \to 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, в некритическом случае можно провести на основе системы линейного приближения

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \tag{33.6}$$

следующим образом.

*Пусть положение равновесия* $(0,0)$ *линеаризованной системы* (33.6) *есть узел, седло или фокус. Тогда особая точка* $(0,0)$ *системы* (33.5) *будет таких же видов устойчивости или неустойчивости и типа, что и особая точка системы* (33.6).

При этом угловые коэффициенты направлений, по которым траектории входят в особую точку (в случае узла и седла), для систем (33.5) и (33.6) одинаковы, а в случае фокуса направления закручивания спиралей совпадают.

Такие положения равновесия, когда собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ матрицы $A$ удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0, \tag{33.7}$$

называются *грубыми* положениями равновесия.

Положение равновесия $(0,0)$ называется *негрубым*, если не выполнено одно из условий (33.7). В окрестности негрубого положения равновесия траектории системы (33.5) и её линейного приближения (33.6) могут, вообще говоря, вести себя существенно по-разному. Например, центр — негрубое положение равновесия: если у линеаризованной системы (33.6) точка $(0,0)$ — центр, то у нелинейной системы (33.5) эта точка может быть или центром, или фокусом, или центрофокусом. Если $f(x)$ — голоморфная функция в некоторой окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то последний случай исключается.

**В задачах 33.1–33.13 с помощью теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению исследовать на устойчивость нулевое решение. Определить тип нулевого положения равновесия в случае двумерных систем.**

**33.1.** $\begin{cases} \dot{x} = xy - x - 2y, \\ \dot{y} = x^2 + xy + y^2 + x - 3y. \end{cases}$

Решение. Выделяя линейные члены правых частей системы, получим *систему линейного приближения* $\dot{x} = -x - 2y$, $\dot{y} = x - 3y$. Собственные значения её матрицы коэффициентов удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

корни которого — числа $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ и $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$. Следовательно, *нулевое решение как системы линейного приближения, так и исходной системы асимптотически устойчиво.* Особая точка $(0,0)$ линеаризованной системы —

устойчивый фокус, т. е. грубое положение равновесия. *Нулевое положение равновесия исходной системы также является устойчивым фокусом.* □

**33.2.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1+x) - \sin y, \\ \dot{y} = \operatorname{tg}(x+y) + \ln(1+y). \end{cases}$

Р е ш е н и е. Учитывая известные разложения $\ln(1+z) = z+o(z)$, $\sin z = z+o(z)$ при $z \to 0$, получим систему линейного приближения

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + 2y.$$

Соответствующее ей характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0$$

имеет комплексные корни, и их действительные части положительны. Отсюда следует, что нулевое решение исходной системы неустойчиво, а *нулевое положение равновесия как линеаризованной, так и исходной систем — неустойчивый фокус*. □

**33.3.** $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - e^{-y}, \\ \dot{y} = \sqrt{4-8x} - 2\operatorname{tg} y - 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Матрицу коэффициентов $A$ линейного приближения системы найдём с помощью матрицы Якоби функций

$$f_1 = e^{x+y} - e^{-y}, \quad f_2 = \sqrt{4-8x} - 2\operatorname{tg} y - 2$$

в точке $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + e^{-y} \\ \dfrac{-4}{\sqrt{4-8x}} & \dfrac{-2}{\cos^2 y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы линейного приближения есть

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Его корни — комплексные числа $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ с отрицательной действительной частью; таким образом, нулевое решение $x = 0, y = 0$ исходной системы *асимптотически устойчиво, а нулевое положение равновесия — устойчивый фокус.* □

**33.4** $\begin{cases} \dot{x} = -2\sin x + e^z - \cos z, \\ \dot{y} = \ln(1+x) - 4\sqrt{1+y}, \\ \dot{z} = \sin y + \ln(1-2z). \end{cases}$

Р е ш е н и е. Используя известные разложения коэффициентов системы в окрестности точки $x = y = z = 0$:

$$\sin x = x + o(x), \quad \cos z = 1 + o(z), \quad \ln(1 + x) = x + o(x), \quad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$$

при $x \to 0$, $y \to 0$, $z \to 0$, выделяем систему линейного приближения

$$\dot{x} = -2x + z, \quad \dot{y} = x - 2y, \quad \dot{z} = y - 2z,$$

характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 7 = 0,$$

$$a_1 = 12, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 7.$$

Составим матрицу Гурвица для полученного уравнения

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

главные диагональные миноры которой $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = 65$, $\Delta_3 = 7\Delta_2$ положительны.

Отсюда в силу критерия Рауса — Гурвица следует отрицательность всех действительных частей корней характеристического уравнения матрицы коэффициентов, а, следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению *нулевое решение* как системы линейного приближения, так и исходной системы *асимптотически устойчиво.* □

## 33.5. $\ddot{x} + 2\sin\dot{x} + 5\,\mathrm{tg}\,x = 0.$

Р е ш е н и е. *Устойчивость нулевого решения* (нулевого положения равновесия) данного уравнения означает *устойчивость нулевого решения* эквивалентной ему системы уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -5\,\mathrm{tg}\,x - 2\sin y.$$

Линеаризуем эту систему в окрестности точки $(0, 0)$ любым известным способом. Имеем

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -5x - 2y.$$

Собственные значения матрицы коэффициентов этой системы определяются из уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Тогда $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$. Отсюда следует, что *нулевое решение* данного уравнения *асимптотически устойчиво.*

Однако *рациональнее* сразу линеаризовать исходное ДУ. Получаем ЛОДУ $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$, для которого корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ — числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Следовательно, *нулевое решение* и линейного приближения, и исходного ДУ *асимптотически устойчиво.* □

**33.6.** $\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{1-x} + \ln(1+y+x^2) - 2e^{x^2}, \\ \dot{y} = -\sin x - 3\operatorname{tg} y. \end{cases}$

**33.7.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2y + 2x - y^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^2x + 2y. \end{cases}$

**33.8.** $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1+x^2-2y} + \sin x - 1, \\ \dot{y} = 4e^x - 3\operatorname{tg} y - 4\sqrt{1+x^2}. \end{cases}$

**33.9.** $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh} x + \operatorname{tg} y, \\ \dot{y} = \ln(1-5x) - 3\sqrt{1+2y} + 3. \end{cases}$

**33.10.** $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x-y) + \operatorname{sh}(x+y), \\ \dot{y} = 6\operatorname{arctg} x + \ln(1+4x-3y). \end{cases}$

**33.11.** $\begin{cases} \dot{x} = e^y - \sqrt[3]{1+6x}, \\ \dot{y} = 4\sin x + \ln(1-3\sin y). \end{cases}$

**33.12.** $\begin{cases} \dot{x} = -2\sin x + \operatorname{tg} y + 2\ln(1+z), \\ \dot{y} = 2\operatorname{arctg} x - \ln(1+x+y), \\ \dot{z} = -2\sin x + y - 3\operatorname{sh} x. \end{cases}$

**33.13.** $\begin{cases} \dot{x} = -\operatorname{tg} z + \sin y, \\ \dot{y} = \operatorname{sh} x - \ln(1-z+x^2), \\ \dot{z} = 2\sin(x+y) - 3\operatorname{arctg} x. \end{cases}$

**В задачах 33.14–33.22 для данных систем и уравнений найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.**

**33.14.** $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x-y), \\ \dot{y} = x^2 - 3y + 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Приравнивая правые части системы $f_1(x,y) = \operatorname{sh}(x-y)$ и $f_2(x,y) = x^2 - 3y + 2$ к нулю, находим её положения равновесия $M_1$ и $M_2$:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = y, \\ x^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad M_1(1,1),\quad M_2(2,2).$$

Для построения линеаризованной системы построим матрицу Якоби $A$:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x-y) & -\operatorname{ch}(x-y) \\ 2x & -3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица в случае точки $M_1(1,1)$ примет вид

$$A\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x-y) & -\operatorname{ch}(x-y) \\ 2x & -3 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы линейного приближения данной системы для положения равновесия $(1,1)$ определяются из уравнения $\lambda^2+2\lambda-1=0$, $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -1-\sqrt{2}$, при этом $\lambda_1 > 0$. Значит, *положение равновесия* $(1,1)$ *неустойчиво.*

Для второго положения равновесия $M_2(2, 2)$ матрица коэффициентов линейного приближения имеет вид

$$A\Big|_{\substack{x=2\\y=2}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Её характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+1=0$, корни которого $\lambda_1=\lambda_2 = -1$ отрицательны. Тогда по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению *точка* $M_2(2,2)$ *асимптотически устойчива.* □

**33.15.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(x+y+1), \\ \dot{y} = x^2+3y-4. \end{cases}$ **33.16.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x^2-xy+2, \\ \dot{y} = x^2-x-2. \end{cases}$

**33.17.** $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(1-x^2), \\ \dot{y} = \ln(1+x-y^2). \end{cases}$ **33.18.** $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(x-y^2), \\ \dot{y} = 2+x-3y. \end{cases}$

**33.19.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3-3x+x^2), \\ \dot{y} = \operatorname{sh}(x^2-y). \end{cases}$ **33.20.** $\begin{cases} \dot{x} = 1-e^{x^2-y^2}, \\ \dot{y} = \ln(2-y^2). \end{cases}$

**33.21.** $\begin{cases} \dot{x} = \sin(x+y), \\ \dot{y} = x. \end{cases}$ **33.22.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y+\sqrt{1-3y-\sin x}, \\ \dot{y} = \sin x. \end{cases}$

**Мини-самоконтроль. 1.** Исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем: **а)** $\dot{x} = \ln(e^x+y)$, $\dot{y} = \sqrt{1-2x}-e^{-y}$; **б)** $\dot{x} = -2\operatorname{tg} x+y+xy$, $\dot{y} = e^x-\sin y-\cos x$. **2.** Найти все положения равновесия ДС $\dot{x} = (x-1)(y-1)$, $\dot{y} = xy-2$ и исследовать их на устойчивость. **3.** Исследовать, при каких значениях параметра $a$ асимптотически устойчиво нулевое решение системы $\dot{x} = ax+\operatorname{tg} y + x^2$, $\dot{y} = x+\sin(ay)+y^2$.

# § 34. Метод функций Ляпунова

*Функции знакопостоянные, знакоопределённые. Производная функции по времени $t$ в силу системы. Теоремы Ляпунова и Барбашина — Красовского об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теоремы Ляпунова, Четаева и Красовского о неустойчивости.*

Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{34.1}$$

для которой $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, т. е. $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ — решение системы (34.1).

Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, определённая и непрерывная в некоторой окрестности начала координат $U = \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\| < h\}$, называется *знакоположительной* (*знакоотрицательной*) в области $U$, если $v(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, $\boldsymbol{x} \in U$ $(v(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, $\boldsymbol{x} \in U)$.

Например, функции $v_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$, $v_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2$ являются соответственно знакоположительной и знакоотрицательной. Функцию, тождественно равную нулю, можно считать как знакоположительной, так и знакоотрицательной.

Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, $v(\boldsymbol{x}) \in C(U)$, называется *положительно определённой* (*отрицательно определённой*) в области $U$, если выполнены условия $v(\boldsymbol{x}) > 0$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\|\boldsymbol{x}\| < h$; $v(\mathbf{0}) = 0$ $(v(\boldsymbol{x}) < 0$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\|\boldsymbol{x}\| < h$; $v(\mathbf{0}) = 0)$.

Например, функция $v_3(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ — положительно определённая, а $v_4(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ — отрицательно определённая; знакопостоянные функции $v_1(x_1, x_2)$ и $v_2(x_1, x_2, x_3)$ не являются знакоопределёнными.

Пусть функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в $U$.

*Производной функции* $v(x)$ *по времени* $t$ *в силу системы* (34.1) *называется функция*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(34.1)} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n.$$

**Первая теорема Ляпунова (теорема об устойчивости).** *Если для системы* (34.1) *в некоторой окрестности начала координат существует положительно определённая непрерывно дифференциру-*

*емая скалярная функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *производная которой по времени* $t$ *в силу системы* (34.1) *есть функция знакоотрицательная, то нулевое решение данной системы устойчиво.*

**Вторая теорема Ляпунова (теорема об асимптотической устойчивости).** *Если для системы* (34.1) *в некоторой окрестности начала координат существует положительно определённая непрерывно дифференцируемая функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *производная которой по* $t$ *в силу системы* (34.1) *есть отрицательно определённая функция, то нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.*

**Третья теорема Ляпунова (теорема о неустойчивости).** *Если для системы* (34.1) *в некоторой окрестности начала координат существует непрерывно дифференцируемая функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *производная которой по времени* $t$ *в силу этой системы является знакоопределённой в некоторой окрестности* $\|x\| < \Delta$, *а сама функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$ *в любой окрестности* $\|x\| < h \leqslant \Delta$ *может принимать значения одного знака с функцией* $dv/dt|_{(34.1)}$, *то нулевое решение системы* (34.1) *неустойчиво.*

Функции $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условиям первой, второй или третьей теоремы Ляпунова, называют соответственно *функциями Ляпунова 1-го, 2-го и 3-го рода.*

Приведём также теоремы, доказанные советскими математиками Е. А. Барбашиным, Н. Н. Красовским и Н. Г. Четаевым, в которых ослаблены некоторые условия основополагающих теорем Ляпунова.

**Теорема Четаева о неустойчивости**. *Пусть* $U$ — *окрестность точки* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $U_1$ — *область, которая содержится в* $U$ *и имеет* $\mathbf{0}$ *своей граничной точкой* (рис. 34.1).

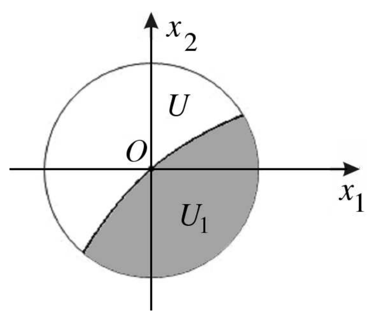



*Рис. 34.1*

*Если существует непрерывно дифференцируемая в* $U_1$ *функция* $v(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $v(\boldsymbol{x}) > 0$, $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(34.1)} > 0$, *если* $\boldsymbol{x} \in U_1$;

2) $v(\boldsymbol{x}) = 0$ *в тех граничных точках области* $U_1$, *которые лежат внутри области* $U$, *то нулевое решение системы* (34.1) *неустойчиво.*

Функции, удовлетворяющие условиям последней теоремы, называются *функциями Четаева.*

**Теорема об асимптотической устойчивости** (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский [16]). *Пусть в некоторой окрестности* $U(\mathbf{0})$ *точки* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *существует определённо положительная функция* $v\colon U(\mathbf{0}) \to \to \mathbb{R}$ *такая, что её производная* $\dot{v}$ *в силу системы* (34.1) *является знакоотрицательной функцией,* $\dot{v} \leqslant 0$, *причём равенство* $\dot{v} = 0$ *имеет место на некотором множестве* $M \subset U(\mathbf{0})$, *не содержащем целых траекторий, кроме самой точки* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

*Тогда нулевое решение системы* (34.1) *асимптотически устойчиво.*

**Теорема Красовского о неустойчивости** [16]. *Пусть в некоторой окрестности* $U(\mathbf{0})$ *точки* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *существует функция* $v:$ $U(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$, $v(\mathbf{0}) = 0$, *не являющаяся знакоотрицательной в любой окрестности точки* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, *производная которой по времени* $t$ *в силу системы (34.1)* $\dot{v}$ *является знакоположительной,* $\dot{v} \geqslant 0$, *причём равенство* $\dot{v} = 0$ *имеет место на некотором множестве* $M \subset U(\mathbf{0})$, *не содержащем целых траекторий, кроме особой точки* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

*Тогда нулевое решение системы* (34.1) *неустойчиво.*

Общих методов построения функций Ляпунова или Четаева, удовлетворяющих соответствующим теоремам, не существует. Иногда функцию Ляпунова удаётся построить в виде квадратичной формы или в виде суммы квадратичной формы и интегралов от нелинейных функций, входящих в правую часть данной системы. При отыскании функции Ляпунова полезны также первые интегралы системы, так как их производная по $t$ в силу системы равна нулю.

**В задачах 34.1–34.18 исследовать устойчивость нулевого решения при помощи теорем Ляпунова, Барбашина, Красовского или Четаева, построив соответствующую функцию $\boldsymbol{v(x_1, \ldots, x_n)}$.**

**34.1.** $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^2. \end{cases}$

Решение. Исследовать данную систему по линейному приближению нельзя, так как у линейной системы $\dot{x} = y - x$, $\dot{y} = x - y$ есть характеристическое число $\lambda_1 = 0$, а $\lambda_2 < 0$. Покажем, что функция $v(x, y) = x^2 + y^2$ в окрестности начала координат является функцией Ляпунова 2-го рода:

1) $v(x, y)$ — положительно определённая функция;

2) $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dot{y} = 2x(y - x + xy) + 2y(x - y - x^2 - y^2) = -2(x - y)^2 - 2y^4$ — отрицательно определённая функция.

Отсюда в силу второй теоремы Ляпунова следует, что *нулевое решение системы асимптотически устойчиво.* □

**34.2.** $\dfrac{dx_i}{dt} = -\dfrac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, где $F(x)$ — функция класса $C^1$, имеющая строгий минимум в начале координат.

Решение. Покажем, что нулевое решение данной системы устойчиво. Составим функцию $v(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) - F(0, \ldots, 0)$. Покажем, что в достаточно малой окрестности начала координат эта функция является функцией Ляпунова 1-го рода. Действительно:

1) $v(x_1, \ldots, x_n)$ — положительно определённая функция, так как $v(0, \ldots, 0) = 0$ и $v(x_1, \ldots, x_n) > 0$ при достаточно малых $x$, $0 < |x| < h$, в силу того, что в $x = 0$ реализуется строгий минимум;

2) функция $\dfrac{dv}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \leqslant 0$ — знакоотрицательная.

Применяя первую теорему Ляпунова, получаем, что *нулевое решение* по меньшей мере *устойчиво.* □

**34.3.** $\ddot{x} + \sin x = 0.$

Решение. Это уравнение колебаний математического маятника без трения. Исследование устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка равносильно исследованию нулевого положения равновесия эквивалентной двумерной системы в нормальной форме $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\sin x_1$, где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Для системы линейного приближения $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$, имеет место *критический случай*, так как её характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, т. е. исследование на устойчивость по линейному приближению невозможно. Исследование устойчивости нулевого решения проведём при помощи второго метода Ляпунова.

Известно, что эта система имеет интеграл энергии

$$v(x_1, x_2) = \int\limits_0^{x_1} \sin \xi \, d\xi + \frac{x_2^2}{2} = 1 - \cos x_1 + \frac{x_2^2}{2}.$$

Действительно, имеем

$$\frac{dv}{dt} = \sin x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = (\sin x_1)x_2 - x_2 \sin x_1 \equiv 0.$$

Сама функция $v(x_1, x_2)$ — положительно определённая в окрестности $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, в ней мы имеем $v(0,0) = 0$ и $v(x_1, x_2) > 0$, если $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Отсюда следует, что интеграл энергии является функцией Ляпунова 1-го рода и *нулевое решение исходного уравнения устойчиво.* □

**34.4.** $\ddot{x} + \dot{x} + \sin x = 0.$

Решение. Это дифференциальное уравнение маятника с трением равносильно системе $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2$, где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Нулевое решение линейного приближения $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$ асимптотически устойчиво, так как собственные значения его матрицы коэффициентов имеют отрицательную действительную часть. Отсюда в силу теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению следует, что *нулевое решение исходного уравнения асимптотически устойчиво.*

Попытаемся обосновать это заключение и при помощи второго метода Ляпунова, взяв, как и выше, в качестве функции Ляпунова полную энергию $v(x_1, x_2) = x_2^2/2 + (1 - \cos x_1)$, которая является положительно определённой функцией в окрестности нуля. Для неё имеем

$$\frac{dv}{dt} = x_2 \cdot \dot{x}_2 + \sin x_1 \cdot \dot{x}_1 = x_2(-\sin x_1 - x_2) + \sin x_1 \cdot x_2 = -x_2^2.$$

Последняя функция является лишь знакоотрицательной, и *первая теорема Ляпунова гарантирует лишь устойчивость нулевого решения.*

Однако здесь работает теорема Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости, так как выполнены все её условия, а множество $M$, на котором $\dot{v} = 0$, есть $x_2 = 0$, т. е. на оси $Ox_1$ нет целых траекторий, кроме положения равновесия $(0,0)$. В противном случае вдоль неё имели бы равенство $x_1 = 0$, т. е. пришли бы к траектории $(0,0)$. Отсюда также следует *асимптотическая устойчивость нулевого решения.*

Покажем, что функция $v(x_1, x_2) = x_2^2 + (x_2 + x_1)^2 + 4(1 - \cos x_1)$ для данной системы является функцией Ляпунова 2-го рода. Очевидно, что $v(x_1, x_2)$ — положительно определённая функция в некоторой окрестности точки $(0,0)$. С другой стороны, производная

$$\frac{dv}{dt} = 2x_2\dot{x}_2 + 2(x_2 + x_1)(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) + 4\dot{x}_1 \sin x_1 = -2(x_2^2 + x_1 \sin x_1)$$

является отрицательно определённой в достаточно малой окрестности начала координат. Отсюда следует *обоснование асимптотической устойчивости нулевого решения* и с помощью *второй теоремы Ляпунова.* □

**34.5.** $\begin{cases} \dot{x} = xy + x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 + y^2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Рассмотрим области $U=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ и $U_1=\{(x,y)\mid x>0, y>0, x^2+y^2<1\}$. Имеем $U_1\subset U$, точка $(0,0)$ принадлежит границе области $U_1$ (рис. 34.2).

В качестве функции Четаева возьмём функцию $v(x,y)=xy$. Покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы Четаева в области $U_1$:

1) функция $v(x,y)=xy$ обращается в нуль вдоль границы области $U_1$, содержащейся в $U$, $v|_{x=0}=0$, $v|_{y=0}=0$;

2) $v(x,y)=xy>0$, если $(x,y)\in U_1$, $dv/dt=\dot{x}y+x\dot{y}=(xy+x^3+y^3)y+x(x^2+ +y^2)>0$, если $(x,y)\in U_1$.

Следовательно, по теореме Четаева, *нулевое решение неустойчиво.* □

Вопрос: укажите классы систем, для которых применение теоремы Четаева также тривиально.

**34.6.** $\begin{cases}\dot{x}=xy^2-x^3y^2,\\ \dot{y}=-xy+y^3.\end{cases}$

Р е ш е н и е. В качестве функции Четаева возьмём функцию $v(x,y)=x^2-y^2$ в области $U_1=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ |y|<x\}\subset U=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ (рис. 34.3).

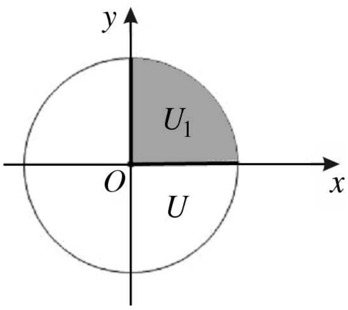



*Рис. 34.2*

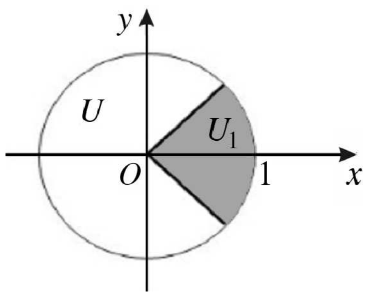



*Рис. 34.3*

По построению точка $(0,0)$ принадлежит границе области $U_1$. Функция $v(x,y)=x^2-y^2$ на границе области $U_1$, содержащейся в $U$, обращается в нуль:

$$v(x,y)|_{y=x}=0,\quad v(x,y)|_{y=-x}=0.$$

Функция $v(x,y)>0$ в области $U_1$, а её производная в силу системы

$$\frac{dv}{dt}=2\dot{x}x-2y\dot{y}=2x(xy^2-x^3y^2)-2y(-xy+y^3)=2y^2(x^2-y^2)+2xy^2(1-x^3)>0,$$

если $(x,y)\in U_1$.

Следовательно, согласно теореме Четаева, нулевое решение системы *неустойчиво.* □

**34.7.** $\begin{cases}\dot{x}=-f_1(x)-f_2(y),\\ \dot{y}=f_3(x)-f_4(y),\end{cases}$ где $f_i\in \mathrm{C}[-1,1]$ и $\operatorname{sgn} f_i(z)=\operatorname{sgn} z$, $i=\overline{1,4}$.

Р е ш е н и е. Будем пытаться строить функцию Ляпунова в виде $v(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$. Тогда производная по $t$ функции $v$ в силу данной системы равна

$$\dot{v} = F_1'(x)\dot{x} + F_2'(y)\dot{y} = F_1'(x)(-f_1(x) - f_2(y)) + F_2'(y)(f_3(x) - f_4(x)).$$

Потребуем, чтобы функция $\dot{v}$ имела такую же структуру, что и функция $v$. Для этого достаточно, чтобы было выполнено тождество $F_1'(x)f_2(y) \equiv F_2'(y)f_3(x)$, в котором, разделив переменные, получим тождество

$$\frac{F_1'(x)}{f_3(x)} \equiv \frac{F_2'(y)}{f_2(y)}.$$

Отсюда следует, что каждая из дробей должна быть постоянной, например, равной 1.

Таким образом, имеем следующие выражения искомых функций:

$$F_1(x) = \int\limits_0^x f_3(z)\,dz, \quad F_2(y) = \int\limits_0^y f_2(z)\,dz,$$

т. е.

$$v(x, y) = \int\limits_0^x f_3(z)\,dz + \int\limits_0^y f_2(z)\,dz.$$

Функция $v(x, y)$ в силу свойств функций $f_i$ (знак $f_i(\cdot)$ совпадает со знаком аргумента) является положительно определённой.

Производная в силу системы

$$\dot{v} = f_3(x)\dot{x} + f_2(y)\dot{y} = -f_1(x)f_3(x) - f_2(y)f_4(y)$$

является знакоотрицательной по той же причине. Следовательно, *нулевое решение устойчиво.*

**Замечание.** Метод построения функции Ляпунова, проведённый при решении задачи, носит название *метода разделения переменных.* □

**34.8.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = -x - 3y^3. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Методом разделения переменных, как и в предыдущей задаче, построим функцию Ляпунова вида $v(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$. Получим $v(x, y) = x^2 + 2y^2$, для которой производная по $t$ в силу системы равна

$$\dot{v} = 2x(2y) + 4y(-x - 3y^3) = -12y^4.$$

Так как $v(x, y)$ является положительно определённой функцией, а функция $\dot{v}$ — знакоотрицательной, то выполнены условия первой теоремы Ляпунова, согласно которой *нулевое решение* системы *устойчиво.*

Однако в данном случае работает также теорема Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости. Действительно, множеством $M$, вдоль которого $\dot{v} = 0$, является множество $y = 0$, т. е. ось $Ox$. Но на оси $Ox$ нет целых траекторий, кроме точки $(0,0)$, так как если бы такая траектория лежала на оси $Ox$, то мы бы имели вдоль неё $y=0$, $\dot{y}=0$ и из второго уравнения данной системы получили бы, что и $x=0$, т. е. пришли бы к траектории-положению равновесия $(0,0)$. Таким образом, *нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.* $\square$

**34.9.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3 + y, \\ \dot{y} = -x + 3y^3. \end{cases}$

**34.10.** $\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = -2x + y^3. \end{cases}$

**34.11.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - y^3, \\ \dot{y} = x - y + xy^2 - y^3. \end{cases}$

**34.12.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y^3, \\ \dot{y} = -y^3 - 2x^3y^2. \end{cases}$

**34.13.** $\begin{cases} \dot{x} = x + yx^2 + y^3, \\ \dot{y} = y^3 + x^3. \end{cases}$

**34.14.** $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases}$

**34.15.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 2xy^2 + y^3, \\ \dot{y} = 2x - y + x^3 - x^2y. \end{cases}$

**34.16.** $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y, \\ \dot{y} = -x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$

**34.17.** $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3. \end{cases}$

**34.18.** $\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases}$

**34.19.** Исследовать на устойчивость решение $x=0$ скалярного ДУ

$$\dot{x} = \alpha x^n + f(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \neq 0, \quad f(x) = o(x^n) \text{ при } x \to 0,$$

в зависимости от параметра $\alpha$.

**34.20.** Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(0)=0$, $xf(x)>0$, $x \neq 0$, в некоторой окрестности нуля. Доказать, что нулевое решение системы $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-f(x)$ устойчиво.

**34.21.** Исследовать на устойчивость все положения равновесия уравнения маятника $\ddot{x} + k\sin x = 0$, $k>0$.

**34.22.** Исследовать на устойчивость нулевое решение ДУ

$$\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0,$$

где $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $xf(x)>0$, $x \neq 0$; $a>0$.

**Мини-самоконтроль.** Исследовать при помощи теорем Ляпунова, Четаева и Барбашина — Красовского устойчивость нулевого решения следующих систем: **а)** $\dot{x}=x^3-y$, $\dot{y}=x+y^3$; **б)** $\dot{x}=-y$, $\dot{y}=x-y^3$; **в)** $\dot{x}=-x^3-y$, $\dot{y}=x$; **г)** $\dot{x}=y^2+x^3y$, $\dot{y}=x+x^2y$.

# § 35. Двумерные автономные системы

*Предельный цикл. Бифуркации в ДС.*

Рассмотрим двумерную автономную систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{35.1}$$

где функции $P$ и $Q$ будем считать непрерывно дифференцируемыми в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$.

Известно, что замкнутая траектория (*цикл*) системы (35.1) окружает по меньшей мере одну особую точку этой системы.

*Предельным циклом* называется замкнутая траектория, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, по которым фазовая точка неограниченно приближается к этой кривой при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, при этом возможны случаи:

1) (орбитально) *устойчивый цикл* — все траектории из этой окрестности спиралевидно приближаются к нему при $t \to +\infty$ (рис. 35.1);

2) (орбитально) *неустойчивый цикл* — все траектории спиралевидно приближаются к нему при $t \to -\infty$ (рис. 35.2);

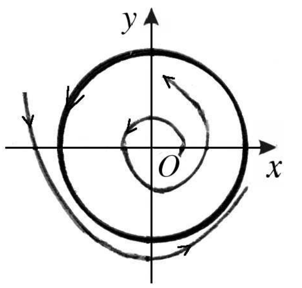



*Рис. 35.1.* Устойчивый предельный цикл

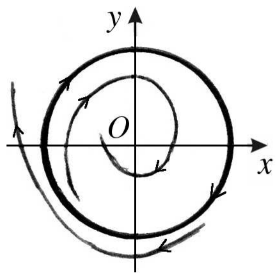



*Рис. 35.2.* Неустойчивый предельный цикл

3) (орбитально) *полуустойчивый цикл* — траектории с одной стороны приближаются к нему при $t \to +\infty$, а с другой — при $t \to -\infty$, т. е. возможны полуустойчивые циклы двух типов (рис. 35.3).

Задача о нахождении предельных циклов для системы (35.1) является, как правило, трудной задачей.

Приведём лишь просто формулируемые признаки *отсутствия предельных циклов* (и даже замкнутых траекторий) в односвязной области $G$.

Эта область *не содержит предельных циклов*, если в ней нет особых точек.

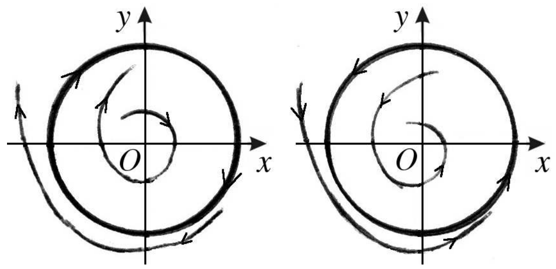



*Рис. 35.3.* Полуустойчивые предельные циклы

**Признак Бендиксона.** *Если дивергенция векторного поля* $(P, Q)^\top$, *равная* $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$, *сохраняет знак в* $G$, *то система* (35.1) *не имеет в этой области предельных циклов.*

Иногда в системе (35.1) целесообразно выполнить переход к полярным координатам. Ниже будут рассмотрены простые иллюстративные примеры систем, имеющих предельные циклы.

Пусть теперь функции $P$ и $Q$ непрерывно зависят от параметра $\alpha$: $P = P(x, y, \alpha)$, $Q = Q(x, y, \alpha)$.

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = P(x, y, \alpha), \quad \dot{y} = Q(x, y, \alpha). \tag{35.2}$$

Как правило, малое изменение параметра $\alpha$ приводит лишь к количественному изменению решений, но сохраняет в целом качественное поведение траекторий. Однако иногда ДС (35.2) имеет такое критическое значение параметра $\alpha^*$, называемое *бифуркационным значением* или *точкой бифуркации*, что при проходе $\alpha$ через это значение происходит существенное изменение фазового портрета, например, рождение или исчезновение положений равновесия, смена их типов, изменение устойчивости, рождение или исчезновение предельных циклов. В этом случае говорят, что имеет место *бифуркация* дифференциальной системы.

Проиллюстрируем введённые понятия на примере системы

$$\dot{x} = \alpha x, \quad \dot{y} = -y, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{35.3}$$

Покажем, что ДС (35.3) имеет *точку бифуркации* $\alpha = 0$.

Для любого $\alpha < 0$ нулевое положение равновесия — *асимптотически устойчивый узел* (рис. 35.4,*a*).

При $\alpha = 0$ система (35.3) имеет *бесконечное число устойчивых точек равновесия* $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (рис. 35.4,*б*).

Для любого $\alpha > 0$ фазовый портрет системы (35.3) — *седло*, неустойчивое положение равновесия (рис. 35.4,*в*).

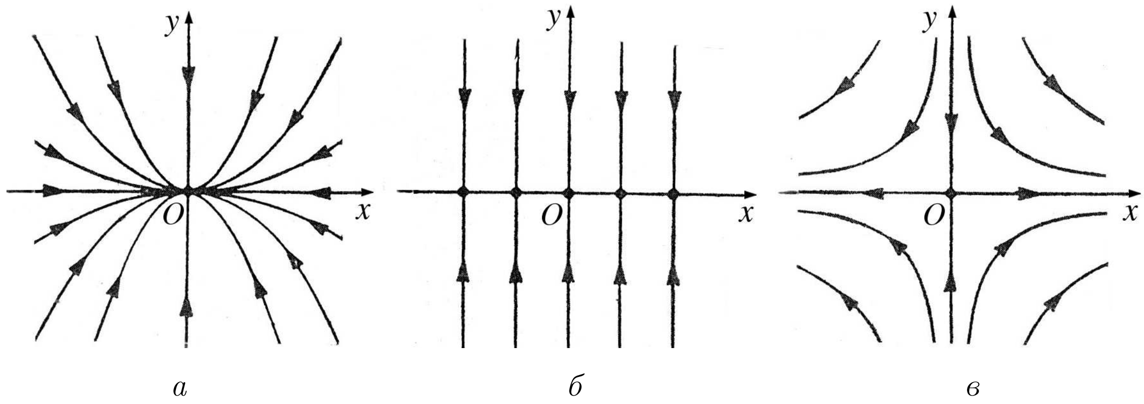



*Рис. 35.4.* Фазовые портреты системы $\dot{x} = \alpha x$, $\dot{y} = -y$ в зависимости от знака $\alpha$: $\alpha < 0$ (*а*), $\alpha = 0$ (*б*), $\alpha > 0$ (*в*) ($\alpha = 0$ — точка бифуркации)

Таким образом, здесь имеют место качественно различные фазовые портреты при $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha > 0$. Это означает, что число $\alpha = 0$ — *бифуркационное значение* для системы (35.3).

**35.1.** С помощью признака Бендиксона доказать отсутствие замкнутых траекторий:

**а)** для системы $\dot{x} = 2x + y^3 - 2xy$, $\dot{y} = 3y + x^3 + y^2$;

**б)** для линейного осциллятора с трением $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0$, $h > 0$;

**в)** для системы $\dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}$, $\dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$.

**В задачах 35.2–35.9 начертить фазовые траектории систем, записанных в полярных координатах, и исследовать, имеют ли они предельные циклы.**

**35.2.** $\dfrac{d\rho}{dt} = \rho(\rho - 1)$, $\dot{\varphi} = 1$.

Решение. Система имеет единственное положение равновесия $O(0, 0)$. Проинтегрируем данную систему, получим, что

$$\rho = \frac{1}{1 + Ce^t}, \quad \varphi = t + t_0.$$

При $C = 0$ получим замкнутую траекторию $\rho = 1$, $\varphi = t + t_0$, т. е. окружность $x^2 + y^2 = 1$, движение по которой при $t \to +\infty$ проходит против часовой стрелки. Из представления $\rho$, если $C \neq 0$, следует, что $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$ и $\rho \to 1$ при

$t \to -\infty$. Это означает, что существует единственная замкнутая траектория $\rho = 1$, а остальные траектории закручиваются вокруг неё с обеих сторон при $t \to -\infty$. Траектории, расположенные внутри круга $\rho < 1$, стремятся при $t \to +\infty$ к особой точке $(0, 0)$ по спиралям, т. е. положение равновесия — *устойчивый фокус*, а *предельный цикл* $\rho = 1$ *является неустойчивым* (рис. 35.5). □

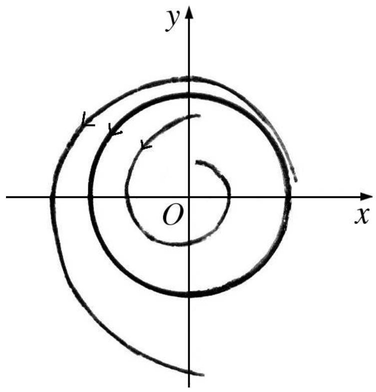



*Рис. 35.5.* $\rho = 1$ — неустойчивый цикл

**35.3.** $\dfrac{d\rho}{dt} = \rho(\rho - 1)(\rho - 2), \ \ \dot{\varphi} = 1.$

Решение. Исследование проведём, не интегрируя это уравнение.

Первое ДУ системы имеет решения $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\rho = 2$, им соответствуют единственная особая точка $(0, 0)$ и две замкнутые траектории данной системы — окружности с центром в начале координат, задаваемые соответственно уравнениями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.

Из второго ДУ системы следует равенство $\varphi(t) = t + t_0$, что определяет направление движения точки против часовой стрелки по всем траекториям системы.

Других траекторий вида $\rho = \rho_0$, отличных от указанных, данная система не имеет.

Пусть $0 < \rho < 1$, тогда из первого ДУ следует неравенство $\dfrac{d\rho}{dt} > 0$, т. е. функция $\rho(t)$ монотонно возрастает при $t \to +\infty$ $(\varphi \to +\infty)$. Отсюда из ограниченности траекторий, расположенных в области $0 < \rho < 1$, следует существование предела

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(t) = \rho_0 \leqslant 1,$$

причём $\rho_0$ обязательно равно единице, ибо в противном случае у системы существовал бы цикл $\rho = \rho_0$, $\rho_0 \neq 1$, чего не может быть. Это устанавливает предельное соотношение $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(t) = 1$.

Аналогично, если $1 < \rho < 2$, то справедливо неравенство $\dot{\rho}(t) < 0$, т. е. $\rho(t)$ — убывающая функция при $t \to +\infty$. Отсюда, как и выше, делаем заключение, что для траекторий, расположенных в этом кольце, справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(t) = 1$. Из вышеизложенного следует, что траектории системы в области $0 < \rho < 2$ являются спиралями, накручивающимися при $t \to -\infty$ на особую точку $(0, 0)$ и при $t \to +\infty$ на цикл $\rho = 1$ с обеих сторон.

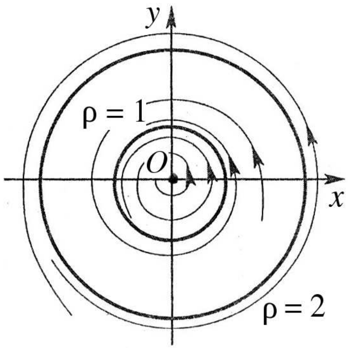



*Рис. 35.6.* Предельные циклы — $\rho = 1$ и $\rho = 2$

Таким образом, замкнутая траектория $x^2+y^2=1$ — *устойчивый предельный цикл*, а *особая точка* $(0,0)$ — *неустойчивый фокус*.

Пусть теперь $\rho > 2$, тогда $\dot\rho(t) > 0$ и $\rho(t)$ — монотонно возрастающая функция при $t \to +\infty$. Учитывая предыдущие построения, делаем вывод, что траектории, расположенные вне круга $\rho \leqslant 2$, спиралевидно приближаются к циклу $\rho = 2$ при $t \to -\infty$ и удаляются от него при $t \to +\infty$, т. е. *окружность*, определяемая уравнением $x^2 + y^2 = 4$, является *неустойчивым предельным циклом*.

Других замкнутых траекторий данная система не имеет (рис. 35.6). $\square$

**35.4.** $\dot\rho = \rho(1-\rho)^2,\ \dot\varphi = 1.$ **35.5.** $\dot\rho = \rho(1-\rho),\ \dot\varphi = 1.$

**35.6.** $\dot\rho = \rho\sin\dfrac{1}{\rho},\ \dot\varphi = 1.$ **35.7.** $\dot\rho = -\rho^2\sin\dfrac{\pi}{\rho},\ \dot\varphi = 1.$

**35.8.** $\dot\rho = \rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3),\ \ \dot\varphi = 1.$

**35.9.** $\dot\rho = \rho(\alpha-\rho^2),\ \ \dot\varphi = 1,\ \ \alpha\in\mathbb{R}.$

## В задачах 35.10–35.15 начертить фазовые траектории систем и исследовать, имеют ли они предельные циклы.

**35.10.** $\begin{cases}\dot x = y + x[1-(x^2+y^2)],\\ \dot y = -x + y[1-(x^2+y^2)].\end{cases}$

Р е ш е н и е. В данной системе перейдём к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \geqslant 0$. Получим

$$\begin{cases}\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi = \rho\sin\varphi + \rho(1-\rho^2)\cos\varphi,\\ \dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi = -\rho\cos\varphi + \rho(1-\rho^2)\sin\varphi.\end{cases}$$

Система в полярных координатах примет вид

$$\dot\rho = \rho(1-\rho^2), \quad \dot\varphi = -1.$$

Из первого уравнения следует, что $\rho = 0$ и $\rho = 1$ — решения (других траекторий вида $\rho = \rho_0$ нет), что соответствует точке покоя $(0,0)$ и циклу $x^2+y^2=1$. Из второго уравнения получаем $\varphi(t) = -t+t_0$, что определяет направление движения по траекториям системы при $t \to +\infty$ по часовой стрелке.

При $0 < \rho < 1$ справедливо неравенство $\dot\rho(t) > 0$, т. е. $\rho(t)$ — монотонно возрастающая при $t \to +\infty$ функция. Проведя аналогичные рассуждения, как в задаче 35.3, получаем, что $\rho(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ и спиралевидно приближается к циклу $\rho = 1$ при $t \to +\infty$ изнутри.

Если $\rho > 1$, то $\dot\rho < 0$ и $\rho(t)$ — монотонно убывающая функция при $t \to +\infty$, и, следовательно, траектории извне спиралевидно приближаются к циклу $\rho = 1$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, система имеет *единственный* предельный цикл, определённый уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Этот *цикл* является *устойчивым*, а *особая точка* $(0, 0)$ — *неустойчивый фокус* (рис. 35.7). □

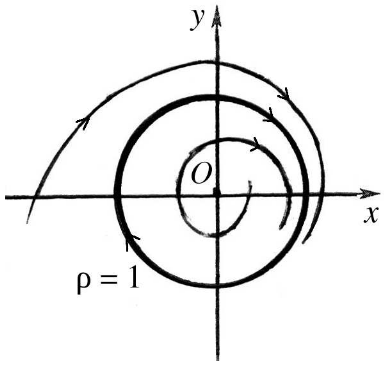



*Рис. 35.7.* Цикл $\rho = 1$ — устойчивый

**35.11.** $\begin{cases} \dot x = -y - x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot y = x - y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$

**35.12.** $\begin{cases} \dot x = -y - x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2, \\ \dot y = x - y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2. \end{cases}$

**35.13.** $\begin{cases} \dot x = -y + x - x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot y = x + y - y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

**35.14.** $\begin{cases} \dot x = -y - x(4 - x^2 - y^2), \\ \dot y = x + y(4 - x^2 - y^2). \end{cases}$

**35.15.** $\begin{cases} \dot x = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}\sin\pi\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot y = x - y\sqrt{x^2 + y^2}\sin\pi\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

**В задачах 35.16–35.21 найти точки бифуркации предложенных дифференциальных систем и построить их фазовые портреты в зависимости от параметра $\boldsymbol{\alpha}$.**

**35.16.** $\begin{cases} \dot x = \alpha x - 4y, \\ \dot y = 9x + \alpha y. \end{cases}$

**35.17.** $\begin{cases} \dot\rho = \alpha\rho^2, \\ \dot\varphi = 1. \end{cases}$

**35.18.** $\begin{cases} \dot x = y - x^3, \\ \dot y = -x + \alpha y - x^2 y. \end{cases}$

**35.19.** $\begin{cases} \dot x = -\alpha x - y, \\ \dot y = x + y^3. \end{cases}$

**35.20.** $\ddot x + \alpha x = 0.$

**35.21.** $\begin{cases} \dot\rho = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot\varphi = 1. \end{cases}$

**В задачах 35.22–35.24 найти особые точки данных систем, определить их тип и построить траектории на фазовой плоскости.**

**35.22.** $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^2. \end{cases}$

Решение. Особые точки (положения равновесия) определяются из системы $y = 0$, $x - x^2 = 0$. Отсюда находим две особые точки $(0,0)$ и $(1,0)$. Система линейного приближения, соответствующая особой точке $(0,0)$, имеет вид: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$, её характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Значит, особая точка $(0,0)$ — седло, она неустойчива. Седло — грубое положение равновесия и, следовательно, $(0,0)$ — седло и для исходной нелинейной системы, причём угловые коэффициенты направлений, по которым траектории входят в особую точку обеих систем, одни и те же. Найдём сепаратрисы системы линейного приближения, подставляя $y = kx$ в ДУ траекторий $dy/dx = y/x$, получаем $k = 1/k \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$, т. е. $y = \pm x$, $x \neq 0$, — сепаратрисы седла линейной системы, тогда соответствующие сепаратрисам интегральные кривые примыкают к точке $(0,0)$, касаясь в нуле этих полупрямых.

Для исследования особой точки $(1,0)$ построим матрицу Якоби для коэффициентов исходной системы в точке $(1,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & 0 \end{pmatrix}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

собственные значения которой $\lambda_{1,2} = \pm i$, т. е. для линейного приближения точка $(1,0)$ — центр, она не является грубым положением равновесия, и для исходной системы может быть или центром, или фокусом. Покажем, что она не может быть фокусом. Проинтегрируем ДУ траекторий $dy/dx = (x - x^2)/y$, его общий интеграл имеет вид $3(y^2 - x^2) + 2x^3 = C$. Интегральные кривые симметричны относительно оси $Ox$, поскольку при замене $y$ на $-y$ уравнение этих кривых не меняется. Отсюда следует, что особая точка может быть только центром. Используя эти данные, строим семейство фазовых траекторий. □

**35.23.** $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$ **35.24.** $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

**Задание для самостоятельной работы.** При каких условиях система $dr/dt = f(r)$, $d\varphi/dt = 1$, где $f(r)$ непрерывна, имеет предельный цикл? При каких условиях этот цикл устойчив? Неустойчив? Полуустойчив?

**Мини-самоконтроль. 1.** Выяснить типы положений равновесия систем уравнений: **а)** $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2x$; **б)** $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -y - 2x + x^2$. **2.** Найти точки бифуркации систем: **а)** $\dot{x} = ax - 2y + x^4$, $\dot{y} = x + y + xy$; **б)** $\dot{x} = -2x + \alpha y$, $\dot{y} = 2x + 2y$.

# Варианты контрольной работы к главам VII–VIII

## Вариант I

1. Проинтегрировать систему методом Эйлера

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \text{где} \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i.$$

2. Проинтегрировать систему методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + \dfrac{e^t}{t^2+1}, \\[2ex] \dot{y} = -2x + 3y + \dfrac{2e^t}{t^2+1}. \end{cases}$$

3. Решить систему методом исключения

$$\begin{cases} y'' - z = 0, \\ x^3 z' - 2y = 0. \end{cases}$$

4. Найти все положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ y = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$$

## Вариант II

1. Проинтегрировать систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \text{где} \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 1.$$

2. Решить линейную неоднородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 4e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 3e^t. \end{cases}$$

3. Решить систему методом исключения

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 5x - 3y \end{cases}$$

и построить её фазовый портрет на плоскости $Oxy$.

## Вариант III

1. Проинтегрировать матричным методом систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -2.$$

2. Проинтегрировать систему методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + \dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ \dot{y} = x + y + \dfrac{1}{\cos^3 t}. \end{cases}$$

3. Решить систему методом исключения

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2} z = x + 1, \\ z' + y = x^2. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3\ln(1 + y), \\ \dot{y} = -e^x - 4e^y + 5\cos y \end{cases}$$

и определить тип особой точки $(0, 0)$.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Амелькин, В. В.* Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. В. Амелькин. Минск, 2012.

2. *Бибиков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Ю. Н. Бибиков. М., 1991.

3. *Богданов, Ю. С.* Курс дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид. Минск, 1996.

4. *Еругин, Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. 3-е изд. Минск, 1979.

5. *Креер, Л. И.* Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям / Л. И. Креер. М. 1940.

6. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Н. П. Еругин [и др.]. Киев, 1974.

7. *Матвеев, Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Н. М. Матвеев. М., 1967.

8. *Матвеев, Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учеб. пособие / Н. М. Матвеев. Минск, 1987.

9. *Пономарёв К. К.* Составление дифференциальных уравнений : учеб. пособие / К. К. Пономарёв, Минск, 1973.

10. *Самойленко, А. М.* Дифференциальные уравнения : примеры и задачи : учеб. пособие / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. 2-е изд. М., 1989.

11. *Федорюк, М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / М. В. Федорюк. 2-е изд. М., 1985.

12. *Филиппов, А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений : учебник / А. Ф. Филиппов. М., 2004.

13. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие / А. Ф. Филиппов. 3-е изд. М., 2009.

14. *Амелькин, В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. 3-е изд. М., 2009.

15. *Арнольд, В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. И. Арнольд. 3-е изд. М., 2012.

16. *Барбашин, Е. А.* Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. М., 1967.

17. *Богданов, Ю. С.* О простейшем неполном дифференциальном уравнении / Ю. С. Богданов // Докл. АН БССР. 1961. Т. 5, № 10.

18. *Богданов, Ю. С.* О матрицах, коммутирующих со своей производной / Ю. С. Богданов, Г. Н. Чеботарёв // Изв. вузов. Математика. 1959. № 4.

19. *Бярозкіна, Н. С.* Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні : вучэб. дапам. / Н. С. Бярозкіна, С. А. Мінюк. Гродна, 2000.

20. *Боярчук, А. К.* Справочное пособие по высшей математике : в 5 т. Т. 5 : Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. 4-е изд. М., 2003.

21. *Гюнтер Н. М.* Сборник задач по высшей математике : в 2 т. / Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин. М., 1958. Т. 2.

22. *Демидович, Б. П.* Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. СПб., 2003.

23. Дифференциальные уравнения. Практикум : учеб. пособие / Л. А. Альсевич [и др.]. Минск, 2012.

24. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М., 1961.

25. *Краснов, М. Л.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. 3-е изд. М., 1978.

26. *Плейс, К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / К. М. Плейс, Д. Эрроусмит. М., 1986.

27. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / Л. С. Понтрягин. 4-е изд. М., 1974.

28. *Романко, В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления : учеб. пособие / В. К. Романко. М. ; СПб., 2000.

29. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко [и др.]. М., 2002.

30. *Сергеев, И. Н.* Дифференциальные уравнения : учебник / И. Н. Сергеев. М., 2013.

31. *Тихонов, А. Н.* Дифференциальные уравнения : учебник / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. 3-е изд. М., 1998.

32. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. 6-е изд. М., 1966. Т. 1.

33. *Betounes, D.* Differential Equations : Theory and Applications / D. Betounes. Second Edition. Heidelberg ; London, 2010.

34. *Dobrushkin, V. A.* Applied Differential Equations. The Primary Course / V. A. Dobrushkin. Boca Raton ; London ; New York, 2015.

# ОТВЕТЫ

**1.7.** $y = -\ln|\cos x| + C$; $y = 2 - \ln|\cos x|$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. **1.8.** $y = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + C$; $y = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + 2$. **1.9.** $y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. **1.10.** $-\frac{1}{y} = x + C$, $y = 0$; $y = 0$. **1.11.** $27y^2 = 8(x + C)^3$, $y = 0$; $27y^2 = 8x^3$, $y = 0$. **1.12.** $-\frac{2}{y} + \ln\left|\frac{y+2}{y}\right| = 4x + C$, $y = -2$, $y = 0$. **1.13.** $y = \frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x + C$. **1.14.** $\sqrt{|y|}\operatorname{sgn} y = x + C$, $y = 0$. **1.15.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{4x+y-1}{2}\right) = 2x + C$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{4x+y-1}{2}\right) = 2x$. **1.16.** $2\sqrt{y-x} = x + C$, $y = x$; $2\sqrt{y-x} = x - 1$, $y = x$. **1.17.** $\operatorname{ctg}(y - x) = 2x + C$, $y - x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ . **1.18.** $y = x^2 + C$, $x \geqslant 0$, $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$, $x < 0$. **1.19.** $3(y - 3x)^{2/3} = 2x + C$, $y = 3x$. **1.20.** $y = |x| + C$. **1.21.** $y' = -(1 + y^2)/(1 + x^2)$. **1.22.** $y'^2 = 4y$. **1.23.** $y' = -(1 + y^2)/(1 + x^2)$. **1.24.** $y' = -\sin\left(\frac{x}{y}\sqrt{1 - y'^2}\right)$. **1.25.** $y'^2 = 1 + 2yy'/x$. **1.26.** $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$. **1.27.** $y'^2 + y^2 = 1$. **1.28.** $\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. **1.29.** $2y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$. **1.30.** $y'' + y = 0$. **1.31.** $y = -xy'^3$. **1.32.** $y[(y'^2 + 1)\operatorname{arctg} y' - y'] = x$. **1.33.** $2xy' = y$. **1.34.** $(x - y)^2(y'^2 + 1) = (1 + y')^2$. **1.35.** $2yy' + x = 0$. **1.36.** $xy' + y = 0$. **1.37.** $yy' + x = 0$. **1.38.** $\rho' = \rho\ \operatorname{ctg}(2\varphi)$.

**2.2.** $y(C \pm x) = 2a^2$. **2.3.** $y^2 = 2x + C$. **2.4.** $y = \frac{k}{3}x^3$. **2.5.** $x + a\ln|a^2 - y^2| = C$. **2.7.** Время распада $T \approx 2425$ дней. **2.8.** Возраст горной породы $T = 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{\ln(61{,}55/50)}{\ln 2} \approx 135 \cdot 10^7$ лет. **2.9.** $N = N_0e^{kt}$. **2.10.** $x = \frac{x_0e^t}{x_0e^t - x_0 + 1}$. **2.11.** Скорость $v(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{m}\,d\tau$, координата $x(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{f(\xi)}{m}\,d\xi$. **2.13.** ДУ движения точки $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$, закон движения $v = a_1\frac{C_0e^{2at} - 1}{C_0e^{2at} + 1}$, где $a = \sqrt{kg/m}$, $a_1 = \sqrt{mg/k}$, $C_0 = \frac{a_1 + v_0}{a_1 - v_0}$. **2.14.** Скорость $v = 30$ м/с, пройденный путь $S \approx 762{,}43$ м.

**2.15.** $v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \cdot \dfrac{e^{2t\sqrt{kg/m}} - 1}{e^{2t\sqrt{kg/m}} + 1}$. **2.16.** Время $T$ до раскрытия парашюта определяется соотношением $4 = \ln \operatorname{ch}(0,2T)$, $T \approx 23$ с. **2.18.** Время истечения $T \approx 2485$ с. **2.19.** $T = \dfrac{2\pi \cdot (5/16)^2 \cdot 16^{5/2}}{3\pi \cdot 0,5^2 \cdot \sqrt{2g}} \approx 59,6$ с. **2.20.** $T = \dfrac{14\pi \cdot 100^2 \cdot 10^2}{15 \cdot 1 \cdot 0,6\sqrt{2g}} \approx 109222\,\text{с} \approx 30\,\text{ч}\,19\,\text{мин}$. **2.24.** Количество соли $x(t) = 5e^{-t/5}$; $x(t_1) = 0,5$ при $t_1 = 5\ln 10 \approx 11,5$ мин.

**4.4.** $\dfrac{\sin y}{\cos x} = C$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **4.5.** $y = C|x|^{\alpha}$. **4.6.** $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} = C$, $x = \pm 2$, $y = \pm 2$; $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} = 2$, $y = 2$; $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} = 2 + \sqrt{3}$. **4.7.** $\ln\left|\dfrac{x}{y}\right| - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = C$, $x = 0$, $y = 0$; $y = 0$, $x = 0$; $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2$. **4.8.** $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = C$, $y = 1$; $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$; $y = 1$. **4.9.** $x = \ln\left|\sqrt{y^2 - y} - y + \dfrac{1}{2}\right| + C$, $y < 0$; $x = \arcsin(2y - 1) - \ln 2 + \dfrac{\pi}{2} + C$, $0 < y < 1$; $y = 0$; $y = 1$. **4.10.** $\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt + \int_0^y \dfrac{\sin t}{t}\,dt = C$, $x = 0$, $y = 0$; $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt + \int_0^y \dfrac{\sin t}{t}\,dt = 0$, $y = 0$. **4.11.** $x + 2\ln|x - 1| + y + 3\ln|y - 2| = C$, $x = 1$, $y = 2$. **4.12.** $(y - 1)x = C(y + 1)$, $y = -1$; $y = -1$. **4.13.** $\operatorname{sgn} y \ln|y| = x + C$, $y = 0$; $y = 0$; $y = e^x$. **4.15.** $xy = C$; $xy = 2$. **4.16.** $y = Ce^{1/x - 1}$, $x > 0$. **4.17.** $y = \dfrac{(x+1)}{x}$. **4.18.** $y^2 = Cx$. **4.19.** $y^2 - x^2 = C$. **4.20.** $y^2 - x^2 = C(x^2 + y^2)^2$. **4.22.** $T = \dfrac{\operatorname{arctg}(100\sqrt{k/g})}{\sqrt{gk}}$.

**5.4.** $\ln|x + y| + \dfrac{x}{x + y} = C$, $y = -x$. **5.5.** $\sqrt{x^2 + y^2} + y = C$. **5.6.** $x^2 + 2yx - y^2 = C$. **5.7.** $(y - x)x = C_1(y + x)$, $y = -x$. **5.8.** $e^{-y^2/x^2} + 2\ln|x| = C$. **5.9.** $\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2y\right)^2 = C$. **5.10.** $\dfrac{x^2}{2y^2} - \ln|y| = C$, $y = 0$. **5.11.** $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$, $x = 0$. **5.12.** $y^2 = x^2(C + 2\ln|x|)$. **5.13.** $\ln|x| + \sin\dfrac{y}{x} = C$. **5.16.** $7y^2 - 6y(x - 1) + 7(x - 1)^2 = C$. **5.17.** $(y - x - 2)(y + x)^3 = C$. **5.18.** $x + 2y +$

$+ 2\ln|1+2x-y| = C$, $y = 2x+1$. **5.19.** $x - 2y - \ln|x-y+2| = C$, $y = x+2$. **5.21.** $\ln(x^4+y^2) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x^2} = C$. **5.22.** $\ln|x| = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{y^3}{x} - 1} + C$, $y^3 = x$. **5.23.** $\ln|x| - \dfrac{y}{x^3} - \dfrac{4}{3}\ln|3y - x^3| = C$, $x = 0$, $x^3 = 3y$. **5.24.** $y = -x$. **5.25.** $y = \dfrac{(x^2+1)}{2}$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$. **5.26.** $\ln(x^2+y^2-2y+1) + 2\operatorname{arctg}((y-1)/x) = 0$. **5.27.** $y = x+2$. **5.28.** $y = x^2$. **5.29.** $y = 0$. **5.32.** $(y + \sqrt{x^2+y^2})x^{1/k} = C$, $x \geqslant 0$. **5.33.** $\operatorname{arctg} y/x - \dfrac{k}{2}\ln|x^2+y^2| = C$. **5.34.** $(y-x)^2(2y+x) = C$. **5.35.** $x^2 - y^2 = 2x^4$.

**6.6.** $y = C/x^2 + x^2 + x^3$. **6.7.** $x = C(y-y^2) - y$, $y = 0$, $y = 1$. **6.8.** $x = C\sin y + 2\sin y \ln|\sin y|$, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.9.** $y = Ce^{-x^2} + e^{-x^2}(\sin x - x\cos x)$. **6.10.** $y = C\sqrt{|x|} + x^2/3$, $x = 0$. **6.11.** $x = Cy^2 + y^3$, $y = 0$. **6.12.** $y = C/x + \ln^2 x/(2x)$. **6.13.** $y = Ce^{-\sin x} + \dfrac{x^2}{2}e^{-\sin x}$. **6.14.** $y = 3x/2 + x^3/2$. **6.15.** $y = 2x^2/3 + \sqrt{x}/3$, $x > 0$. **6.16.** $3xy - y^3 = 2$. **6.17.** $y = x$. **6.18.** $y = -1 + e^{x^2}\int_{+\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt$. **6.20.** $y = 2e^{2x} - 4x - 2$. **6.21.** $y = (x^2+1)e^{x^2}$. **6.23.** $y = C\sqrt{|x|} - x$. **6.24.** $y = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{2}{3}x$. **6.25.** $i(t) = \dfrac{E\sin(\omega t - \varphi)}{\varphi \operatorname{arctg}(\omega/2)}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(L\omega/R)$. **6.26.** $xy = Cy^3 + 2a^2$. **6.27.** $y = Cx^2, C > 0, x \geqslant 0$. **6.28.** $v = \dfrac{g}{m-k}\left[-M + mt + \left(1 - \dfrac{m}{M}t\right)^{k/m} M\right]$.

**7.5.** $1/y = Ce^{-x^2} - x^2 + 1$, $y = 0$. **7.6.** $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$. **7.7.** $1/y = x^3 - x^3\ln x + Cx^2$, $y = 0$. **7.8.** $\ln y = x^2\ln|x| + Cx^2$, $x = 0$, $y = 0$. **7.9.** $\sqrt{y} = Ce^{-e^x} + 1$, $y = 0$. **7.10.** $\cos y = Ce^x + 3x^2 + 6x + 6$. **7.11.** $x^3 = e^y y^2/2 + Ce^y$. **7.12.** $\cos x = C\sqrt{|y|} - y^2/3$, $y = 0$. **7.13.** $e^{-x} = Cx - x\ln|x|$. **7.14.** $2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 = C$. **7.15.** $e^{-y}(x+y)^2 = C(x^2+1)$. **7.18.** $y = 1 + e^{2x - x^2/2}(C - \int_0^x e^{2t - t^2/2}\,dt)^{-1}$, $y = 1$. **7.19.** $y = x + \dfrac{2x}{Cx-1}$, $y = x$. **7.20.** $y = 1/x + 3x^2(x^3 + C_1)^{-1}$, $y = 1/x$. **7.21.** $y = e^x + e^{e^x}(\int_1^x \dfrac{e^t}{t}\,dt + C)^{-1}$, $y = e^x$. **7.22.** $\sqrt{x}\operatorname{arctg}(y/\sqrt{x}) = C\sqrt{x} - 2$. **7.23.** $y = \sqrt{x}/(C - 2\sqrt{x})$. **7.24.** $\operatorname{arctg}(yx/2) + 2\ln|x| = C$. **7.25.** $y = u(x) + (C + \int_a^x u^2(t)\,dt)^{-1}$, $y = u(x)$. **7.27.** $x^2 = Cy^2 -$

$-\,2y^2\ln|y|$. **7.28.** $y=x(y^2+C)$.

**8.3.** $x^2+y^2+2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}=C$. **8.4.** $x^3+y^3+e^xy^2=C$. **8.5.** $x+\sqrt{x^2+y^2}=C$. **8.6.** $x^3y+xy^2=C$. **8.7.** $x^2+\dfrac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C$. **8.8.** $\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{\sin^2 x}{y}=C$. **8.9.** $x\sin y-y\cos x=C$. **8.10.** $\sqrt{x^2+y^2}+y/x=C$. **8.13.** $3x^2\ln y+(y^2+1)^{3/2}=C,\ y=0$. **8.14.** $x^3/3+\dfrac{\sin^2 y}{x}=C,\ x=0$. **8.15.** $\ln^2 x+y^3/x^2=C,\ x=0$. **8.16.** $e^x(x^2+y^2)=C$. **8.17.** $e^x(\sin y+x-1)=C$. **8.18.** $x+x^2/y-y^2/2=C,\ y=0$. **8.19.** $x^4/2-7/y-y^2x=C,\ y=0$. **8.20.** $xy+1/x-y^2/2=C,\ x=0$. **8.23.** $2\ln|x|-2\ln|y|-1/(xy)=C,\ x=0,\ y=0$. **8.24.** $x^2y^2+2\ln|x/y|=C,\ x=0,\ y=0$. **8.25.** $\ln|xy^3|-xy=C,\ x=0,\ y=0$. **8.26.** $x^2+y^2-2\,\mathrm{arctg}(x/y)=C$. **8.27.** $x^2+y^2=C(y-1)^2,\ y=1$. **8.28.** $x^2-y^2-1=Cx,\ x=0$. **8.30.** $x^2+y^2+2\,\mathrm{arctg}(y/x)=0$. **8.31.** $(C-\ln^2 y)xy=2,\ x=0,\ y=0$. **8.32.** $x^2+y^2+\ln\left|\dfrac{x+y}{x-y}\right|=C$, $y=x,\ y=-x$. **8.33.** $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|y+\sqrt{x^2+y^2}|-\ln|x|=C,\ x=0$. **8.34.** $x^3y^{-1}-4y=Cx^{1/3}y^{1/3},\ x=0,\ y=0$. **8.35.** $(1-y)^2=C_1x^2$. **8.36. а)** $a=5,\ b=1$. **8.37.** $\sqrt{x^2+y^2}=y+C$.

**9.4.** $y_0=1,\ y_1=1-x+\dfrac{x^3}{3},\ y_2=-\dfrac{x^7}{63}-\dfrac{2x^5}{12}-\dfrac{x^4}{6}-x^2-x+1$; $|y(x)-y_2(x)|\leqslant 0{,}9,\ |x|\leqslant\dfrac{1}{5}$; $k=5$. **9.5.** $y_0=1,\ y_1=-x^2$, $y_2=\dfrac{x^5}{5}-x^2$; $|y(x)-y_2(x)|<\dfrac{1}{4},\ |x|\leqslant\dfrac{1}{2}$; $k=6$. **9.11.** $\mathbb{R}^2$. **9.12.** $y\neq 0,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **9.13.** $|y|>|x|$. **9.14.** $x\neq 0,\ y\neq -1$. **9.15.** $x\neq 2y$. **9.16.** $y\neq x^2,\ y\neq 2x$. **9.23.** Если $a\neq 1$, то особых решений нет, при $a=1$ $y=x$ — особое решение. **9.24.** Особых решений нет. **9.25.** Если $0<\alpha<1$, то $y=0$ — особое решение, в остальных случаях особых решений нет. **9.26.** $y=2x$. **9.29.** Особых решений нет. **9.30.** $y=\pm x$. **9.31. а)** Нет касания; **б)** касание в точках $(x_0,0), x_0\in\mathbb{R}$. **9.32. а), в)** особых решений нет; **б)** если $0<\alpha<1$, то $y=0$ — особое решение. **9.33.** $y=0$. **9.34. а)** $y_0=1,\ y_1=1+x$,

$y_2 = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{3}$, $|x| < \dfrac{1}{4}$; $y = \dfrac{1}{(1-x)}$, $-\infty < x < 1$; **б)** $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + x$, $y_2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $y_k = \sum\limits_{m=0}^{k} \dfrac{x^m}{m!}$, $|x| < \dfrac{1}{2}$; $y = e^x$, $|x| < +\infty$; **в)** $y_0 = 1$, $y_1 = 1 - x$, $y_2 = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, $|x| < \dfrac{1}{4}$; $y = \dfrac{1}{(1+x)}$, $-1 < x < +\infty$. **9.35.** $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

**10.5.** $\ln^2 y = C_1 e^x - x - 1$. **10.6.** $\operatorname{tg} \dfrac{x}{y} = \dfrac{y^2}{2} + C$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.7.** $\arcsin y = \ln|xy| + C$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm 1$. **10.8.** $\ln|x/y| + xy = C$, $x = 0$, $y = 0$. **10.9.** $x + \ln|x^2 - y^2| = C$, $y = \pm x$. **10.10.** $\sin y = -x + 1 - \dfrac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$. **10.11.** $\ln \dfrac{x}{y} + 1 = Ce^x$. **10.12.** $xe^{-y} + x = C$. **10.13.** $(x + y^2)\sqrt{x+y} = C$. **10.14.** $x \cos xy = C$. **10.15.** $xy - \ln|y| = C$, $x = 0$, $y = 0$, $xy = -1$. **10.16.** $x \operatorname{tg} y - x^3 = C$, $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.17.** $x = -2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + C$, $y = 0$, $x = 0$. **10.18.** $(x^2 + y^2)^2 + 4xy = C$. **10.19.** $(2xy^2 - 1)^2 = Cxy^3$, $x = 0$, $y = 0$. **10.20.** $\operatorname{tg} y = -x + \dfrac{1}{2} + Ce^{-2x}$, $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.21.** $x^2 + y^3 = Cxy$, $x = 0$, $y = 0$. **10.22.** $x = C(\sqrt{x} + \sqrt{x - y})$, $y = x$. **10.23.** $e^{y/x} = 2x + C$. **10.24.** $\sin y = C\dfrac{e^{-x}}{x} + \dfrac{1}{x} - 1$, $x = 0$. **10.25.** $\sqrt{y} = -x^2 - 1 + Ce^{x^2}$, $y = 0$. **10.26.** $2x^2 - \dfrac{x}{y} - y^2 = C$, $y = 0$. **10.27.** $y^2 - 1 = C(y^2 + 1)e^{x^2}$. **10.28.** $e^{-y} = Cx^2 + \dfrac{1}{3x}$, $x = 0$. **10.29.** $y = \dfrac{1}{x} + 4(x \ln|x| + Cx)^{-1}$, $y = \dfrac{1}{x}$. **10.30.** $y^2 = x(C_1 + 2\ln|y|)$. **10.31.** $x = \dfrac{C}{\sqrt{|y|}} + \dfrac{y^2}{5}$, $y = 0$. **10.32.** $xy + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{x} = C$, $x = 0$. **10.33.** $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$. **10.34.** $e^x = C\cos y - \sin y \cos y$. **10.35.** $y = x + e^{x^2/2}\left[C - \int e^{x^2/2}\,dx\right]^{-1}$, $y = x$. **10.36.** $y = 2x + e^{x^2}\left(C - \int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^{-1}$, $y = 2x$. **10.37.** $x^{10}(y\sqrt{x} - 2)^{28}(y\sqrt{x} + 3)^7 = C(y\sqrt{x} - 1)^{35}$, $y\sqrt{x} = 1$. **10.38.** $\sqrt{y - 3x} = x + C$, $y = 3x$. **10.39.** $y^3 = Ce^{-x} + \dfrac{\cos x + \sin x}{2}$. **10.40.** $y = e^{-x}(C - x)^{-1}$, $y = e^{-x}$. **10.41.** $\ln\left(x^4 + y^2\right) + 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = C$. **10.42.** $x^2 = Cy^2 +$

$+\dfrac{y^5}{3}-y$. **10.44.** $x-2\sqrt{y-x^2}=C,\ y=x^2$. **10.45.** $x^3+2xy=Cy^2$, $y=0$. **10.46.** $2x+4y-\ln|2x-1|-8\ln|y+1|=C,\ 2x=1,\ y=-1$. **10.47.** $x-y+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{y^3}{3}-xy=C$. **10.48.** $x^4+2x^2y+\dfrac{x^3y^3}{3}=C$. **10.49.** $2x+y+3\ln|x+y-2|=C,\ x+y=2$. **10.50.** $\left(y^2+1\right)\sqrt{x}=$ $=2y^{5/2}+C,\ x=0$. **10.51.** $2\sqrt{1-2\dfrac{y^2}{x^2}}+\sqrt{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{2}y}{x}=C$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}x}{2}$. **10.52.** $\left(x^2-y^2\right)^2=Cx^2-2xy+\dfrac{2y^3}{3x},\ y=\pm x,\ x=0$. **10.53.** $\left(e^{y/x}-1\right)x^2=C_1\left(e^{y/x}+1\right),\ y=0$. **10.54.** $\sin\dfrac{x+y}{x}=$ $=Cx$. **10.55.** $(x-1)^2(x+3y+2)=C$. **10.56.** $e^{3x}\left(3x^2y+y^3\right)=C$. **10.57.** $(x+y)(4x+y-3)^2=C$.

**11.4.** $y=Cx^2+C^2;\ y=-x^4/4$ — особое решение. **11.5.** $\pm2y-$ $-2\ln|1\pm y|=x+C;\ y=\pm1$. **11.6.** $2yC=x^2+C^2;\ y=x$ и $y=-x$ — особые решения. **11.7.** $y=\dfrac{1}{(x+C)^2+1},\ y=0;\ y=1$ — особое решение; $y=0;\ y=1,\ y=\dfrac{1}{x^2+1}$. **11.8.** $e^{-y}=Ce^{-x^2/2}\pm$ $\pm\, e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt$. **11.9.** $\arcsin y=\pm x+C$; особые решения — $y=\pm1;\ y=1,\ \arcsin y=\pm x+\dfrac{\pi}{2};\ \arcsin y=\pm x$. **11.10.** $y^2+$ $+2xC+C^2=0$; особые решения — $y=\pm x$. **11.11.** $y=2x^2+C$; $4y=(x+C)^2;\ y=0$ — особое решение. **11.12.** $y=x+4-(x+$ $+C)^2/4;\ y=x+4$ — особое решение. **11.13.** $\sqrt{y}=-\dfrac{2}{1+Ce^{\pm x}}+1$; $y=1$; особое решение — $y=0;\ y=1;\ y=0,\ \sqrt{y}=1-\dfrac{2}{1+e^{\pm x}}$. **11.17.** $x=\operatorname{sh}p+p,\ y=p\operatorname{ch}p-\operatorname{sh}p+p^2/2$. **11.18.** $x=a\cos^3p$, $y=3a^2\left(C+\dfrac{\sin^4p}{64}+\dfrac{\sin^3 2p}{48}-\dfrac{p}{16}\right)$. **11.19.** $x=\ln\left|\dfrac{e^p-1}{e^p+1}\right|+C$, $y=\ln\left|\dfrac{e^p-1}{e^p+1}\right|=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2p$. **11.20.** $x=2p\arcsin p-2\sqrt{1-p^2}+\dfrac{3}{2}p^2+C$, $y=p^2\arcsin p-p^3$. **11.21.** $x=-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(1+p)^2}{p^2-p+1}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2p-1}{\sqrt{3}}+$ $+C,\ y=\dfrac{3p}{1+p^3}$. **11.22.** $x=-\cos2p,\ y=2p-\sin2p+C$. **11.23.** $x=$

$= \dfrac{3}{4}\ln|2p-1| - \dfrac{1}{4(2p-1)} + C,\ y = \dfrac{p^3}{2p-1};\ y=0.$ **11.24.** $x = \cos^3 p,$ $y = -\sin^3 p + C,\ \dfrac{\pi}{2} < p < \dfrac{\pi}{2}.$ **11.25.** $x = -5\operatorname{ctg} p + 5p + \dfrac{5}{3}\operatorname{ctg}^3 p + C,$ $y = a\cos^5 p;\ y = \pm a.$ **11.26.** $x = \dfrac{p}{1-p^3},\ y = \dfrac{4p^3-1}{6(1-p^3)^2}.$ **11.27.** $y^2 \pm$ $\pm x^2 = C.$ **11.28.** $\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^n + a_1\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\dfrac{y-C}{x}\right) + a_n = 0.$

**12.2.** $y = Cx + C^2 + \dfrac{x^2}{2};\ y = \dfrac{x^2}{4};$ **12.3.** $xyp = p^3 + y^2,\ y^2 =$ $= p^4/(2p+C);\ y = 0.$ **12.4.** $x = C\,|p|^{-3/2} - 1/p^2,\ y = xp - x^2p^3;\ y = 0.$ **12.5.** $x = Cp,\ y = Cp^2/2 + 1/(8C^3);\ x^4 = -3p^2/4,\ y = xp/2 + p^3/(8x^3);$ $y = 0.$ **12.6.** $y = Cx^2 + C^2;\ y = -\dfrac{x^4}{4}.$ **12.12.** $x = 3\sqrt{p} + \dfrac{C}{\sqrt{p}},\ y =$ $= p^{3/2} - \dfrac{C}{\sqrt{p}};\ y = 0.$ **12.13.** $y = Cx + \ln C;\ y = -1 - \ln(-x).$ **12.14.** $y = Cx \pm \sqrt{C},\ y = \dfrac{1}{2x} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ **12.15.** $x = 3p^2 + Cp^{-2},$ $y = 2p^3 + 2Cp^{-1};\ y = 0.$ **12.16.** $y = (x+1)C + C^2;\ y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}.$ **12.17.** $x = \dfrac{5}{8}p^{3/2} + \dfrac{C}{\sqrt{p}},\ y = -C\sqrt{p} + \dfrac{3}{8}p^{5/2};\ y = 0.$ **12.18.** $x =$ $= C\sqrt{|p|} + \dfrac{4}{5}p^{-3},\ y = -Cp\sqrt{p} - \dfrac{16}{5}p^{-2}.$ **12.19.** $y = Cx + \dfrac{1}{C};$ $y = \pm 2\sqrt{x}.$ **12.20.** $m = 2.$ **12.22.** $y = 0;\ y = x.$ **12.23.** $xy^2 = 4.$ **12.24.** $y = \dfrac{x^2}{4}.$ **12.25.** $y = 4x.$ **12.26.** $y = 0.$ **12.27.** $y = 0,\ y =$ $= \dfrac{4}{27x}.$ **12.29**. Эллипсы и гиперболы вида: $cx^2 + dy^2 = cd,\ c = \pm a,$ $d = b^2 \pm a^2.$ **12.30.** $xy = \pm a^2.$ **12.31.** $x = \dfrac{1}{3\sqrt{|p|}} - \dfrac{1}{3}p,\ y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{p} - \dfrac{p^2}{6}.$

**13.5.** $y = C_1x + C_2 + \dfrac{x^2}{2} - \ln|x+1| - x\ln|x+1|\,.$ **13.6.** $y = C_1x +$ $+ C_2 + \int_1^x \dfrac{e^t}{t}(x-t)\,dt;\ y = \int_1^x \dfrac{e^t}{t}(x-t)\,dt + 2x - 1.$ **13.7.** $x = p^3 + p,$ $y = \left(C_1 + \dfrac{1}{6}\right)p^3 + C_1p + C_2 + \dfrac{9}{27}p^7 + \dfrac{11}{20}p^5.$ **13.8.** $x = e^p + p,\ y =$

$= C_1(e^p+p)+C_2+\dfrac{p^3}{6}+e^p\left(\dfrac{p^2}{2}-1\right)+e^{2p}\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{3}{4}\right)$. **13.9.** $x=\cos^3 p$, $y=C_1\cos^3 p+C_2+\dfrac{3}{16}p-\dfrac{3}{64}\sin 4p-\dfrac{1}{16}\sin^3 2p$, $-\dfrac{\pi}{2}<p<\dfrac{\pi}{2}$. **13.10.** $x = (-1)^k 2\sin p$, $y=-2p-\sin 2p+C_1^{(k)}\sin t+C_2^{(k)}$, $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<p<k\pi+\dfrac{\pi}{2}$. **13.13.** $y=\dfrac{C_1x^2}{2}-\dfrac{C_1^4}{4}x+C_2$; $y=\dfrac{3}{7}x^{7/3}+C$. **13.14.** $x=-\dfrac{1}{3p^2}+C_1p$, $y=\dfrac{4}{27p^3}-\dfrac{1}{3}C_1\ln|p|+\dfrac{C_1^2}{6}p^3+C_2$. **13.15.** $y=\dfrac{1}{C_1}-\dfrac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x|+C_2$; $y=\dfrac{x^2}{2}+C$; $y=C$. **13.16.** $x=\dfrac{1}{2}p^2+C_1p^3$, $y=\dfrac{p^3}{3}+\dfrac{3}{4}C_1p^4+ C_2$; $y=C$. **13.17.** $y=\dfrac{xe^{C_1x}}{C_1}-\dfrac{e^{C_1x}}{C_1^2}+C_2$; $y=\dfrac{x^2}{2}+C$; $y=C$. **13.18.** $y=\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3+C_1\right|+C_2$; $y=C$. **13.24.** $y\ln|y|+C_1y=x+C_2$; $y=C$. **13.25.** $x=-\dfrac{1}{2p^2}+C_1$, $y=\dfrac{1}{3p^3}+\dfrac{C_2}{p^2}+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **13.26.** $2\sqrt{C_1y-1}=\pm xC_1+C_2$. **13.27.** $2\ln\left|\sqrt{y}+C_1\right|+\dfrac{2C_1}{\sqrt{y}+C_1} = x+C_2$; $y=C$. **13.28.** $3C_1(C_1-2y)^{1/2}-(C_1-2y)^{3/2}=\pm 6x+C_2$. **13.29.** $\sqrt{C_1y(C_1y-2)}+2\ln\left|\sqrt{C_1y-2}+\sqrt{C_1y}\right|=\pm 2C_1\sqrt{C_1}x+C_2$. **13.30.** $y^2=C_1+C_2e^{2x}$. **13.31.** $y=\dfrac{1}{C_1}\ln|\cos(C_1x+C_2)|+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **13.32.** $e^y+C_1=(x+C_2)^2$. **13.33.** $2C_2y^2=2C_1C_2+ C_2^2e^{2x}+\left(C_1^2-1\right)e^{-2x}$, $y=\pm 1$. **13.34.** $y+C_1/2+\sqrt{y^2+C_1y}=C_2e^{\pm x}$, $C_1\neq 0$; $\ln|y|=\pm x+C$; $y=Ce^{\pm x}$; $y=C$. **13.35.** $x=\ln|p|+2C_1p+ C_2$, $y=p+C_1p^2+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **13.38.** $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $x<1$. **13.39.** $y=e^x$. **13.40.** $y=\dfrac{4}{3}(x+1)^{3/2}-\dfrac{1}{3}$. **13.41.** $x=p^3+2p$, $y=\dfrac{9}{28}p^7+\dfrac{9}{10}p^5+\dfrac{8}{3}p^3+4p+1$. **13.42.** $y=\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$. **13.43.** $y=\dfrac{\pi}{2}$. **13.44.** $y=-x+1$. **13.45.** $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$, $x\geqslant -1$. **13.46.** $y=\ln\dfrac{2}{2-x}$, $x<2$.

**14.5.** $\ln|y|=x^3+C_1x^2+C_2$; $y=0$. **14.6.** $y^3=C_2e^{C_1x^3}/x$.

**14.7.** $\ln|y| = -\dfrac{1}{C_1x} + \dfrac{1}{C_1^2}\ln\left|\dfrac{x+C_1}{x}\right| + C_2$; $y = C$. **14.8.** $y = C_2\sqrt{|x^2+C_1|}$. **14.9.** $y = C_2xe^{-C_1/x}$. **14.10.** $8\ln|y| = \ln|x| + C_1x + C_2$; $y = 0$. **14.12.** $y^{3/2}x^{3/2} = \pm 3\ln x + C$; $\sqrt{C_1z(z+2C_1)} - 2C_1\sqrt{C_1}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{z/(z+C_1)}}{1-\sqrt{z/(z+C_1)}}\right| = \pm\ln|x| + C_2$, $C_1 > 0$; $\sqrt{|C_1|}\sqrt{z(z+C_1)} - 2C_1\operatorname{arctg}\sqrt{-z/(2C_1+z)} = \pm\ln|x| + C_2$, $C_1 < 0$. **14.13.** $y = x\left(C_1 - \arcsin\dfrac{C_2}{x}\right)$. **14.14.** $2\left(C_1z^2-1\right)^{1/2} = \pm C_1t + C_2$, где $z = y/\sqrt{x}$, $t = \ln x$. **14.15.** $y = x^2 + x^2/(C - \ln x)$; $y = x^2$; $\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\dfrac{y-x^2}{x^2\sqrt{C_1}} = \ln x + C_2$, $C_1 > 0$; $\dfrac{1}{2\sqrt{-C_1}}\ln\left|\dfrac{y-\sqrt{-C_1}x^2}{y+\sqrt{-C_1}x^2}\right| = \ln x + C_2$, $C_1 < 0$. **14.16.** $y = 0$; $xy = C_2 + \int_0^t \dfrac{d\tau}{C_1e^\tau + 2\tau + 1}$, $t = \ln x$. **14.17.** $y = x\ln\dfrac{x}{C_2 - C_1x}$; $y = Cx$. *Указание.* ДУ – однородное в дифференциальной форме. **14.20.** $y = e^{-x^2/2}\int_0^x\left(\dfrac{t^2}{2} + C_1\right)e^{t^2/2}\,dt + C_2e^{-x^2/2}$. **14.21.** $\int_0^y e^{-t^2}\,dt = C_1x + C_2$. **14.22.** $y^2 = x^3 + C_1x^2 + C_2$. **14.23.** $y^{2/3} = C_1x + C_2$. **14.24.** $3y + y^3 = C_1x + C_2$. **14.25.** $y = \dfrac{1}{C-x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$, $C_1 > 0$; $\dfrac{1}{2\sqrt{|C_1|}}\ln\left|\dfrac{y-\sqrt{|C_1|}}{y+\sqrt{|C_1|}}\right| = x + C_2$, $C_1 > 0$. **14.27.** $y' = z$ : $z'z + yz^2 = y^2$. **14.28.** $x = e^t$, $y = ze^t$ : $z'' + z' = (z'+2z)^2$. **14.29.** $y' = z$ : $z' + xz = z^3$. **14.30.** $y' = yz$ : $x^2(z' + 2z^2) = z$. **14.31.** $y' = z$ : $yzz' - z^3 = y^2\ln y$. **14.32.** $x = e^t$, $y = ze^{2t}$ : $z'' + 3z' + 2zz' - 1 = 0$. **14.33.** $y'' = Cy'$. **14.34.** $y' = y/x + x + C_1$. **14.35.** $y' = yz$ : $z' + z^2(x^2 - x + 1) = 0$. **14.36.** *Указание.* ДУ — однородное в дифференциальной форме; $x = e^t$, $y = ze^t = zx$ : $(z+z')z' + z(z''+z') = 1$; $z' = u$, $u = u(z)$ : $z(u'u + 2zu + u^2) = 1$. **14.38.** $t = a^2/\sqrt{k}$. **14.39.** $\approx 0{,}0012$ с. **14.40.** $v_0 = 11{,}2$ км/ч. **14.41.** $Cx = y^{2k-1}$ $(k > 1/2)$.

**15.9.** $1/x = C_1e^t + C_2e^{-t}$, $1/y = -C_1e^t + C_2e^{-t}$. *Указание.* Полезна замена $1/x = u$, $1/y = v$. **15.10.** $y = C_1x$, $1 + xyt^2 = C_2x^2$. **15.11.** $x + y + z = C_1(x-y)^2$, $(y-z)^2 - (x-z)^2 = C_2$. **15.12.** $x^2 - y^2 = C_1$,

$y^2-z^2=C_2$. **15.13.** $y=C_1x$, $(x^2+y^2+z^2)^2=C_2(x^2+y^2)$. **15.14.** $1/y-1/z=C_1$, $(x-y)^2\ln|y|-2y^2=C_2(x-y)^2$. **15.15.** $y^2-z^2=C_1$, $2x+(z-y)^2=C_2$. **15.16.** $x+y=C_1z$, $x^2-y^2=C_2y^3$. **15.17.** $y^2-x^2=C_1$, $(x+y)^2-2t=C_2$. **15.18.** $xy=C_1$, $3xy\ln|x|+t^3=C_2$. **15.19.** $x+y+z=C_1$, $x^2+y^2+z^2=C_2$. **15.20.** $x+y+z=C_1$, $x^2+y^2+2z^2=C_2$. **15.21.** $x+z=C_1$, $y+u=C_2$, $(x-z)^2+(y-u)^2=C_3$. **15.22.** $Ax^2+By^2+Cz^2=C_1$, $A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2=C_2$. **15.24.** **б)** $\varphi_2$ не является интегралом, $\varphi_1,\varphi_3$ — базис интегралов, **в)** $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ — интегралы, в качестве базиса интегралов можно взять любые два из них. **15.25.** **а)** $y^2/2+\cos x=C$; **б)** $y^2+x^2-x^4/12=C$; **в)** $2x^2y-2xy+y^2=C$.

**16.1.** **б)** $\frac{8}{9}\leqslant t\leqslant\frac{10}{9}$; **в)** $-\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}$; **г)** $-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{1}{5}$; **д)** $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$. **16.2.** **б)** $x_0=1$, $y_0=2$; $x_1=4t-3$, $y_1=1+t^2$; $x_2=-\frac{1}{3}+t+\frac{t^3}{3}$, $y_2=-\frac{69}{20}+\frac{4t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+\frac{4}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4$. **г)** $y_0=1$; $y_1=1+x$; $y_2=1+\frac{x^2}{2}$. **16.5.** **а)** пересекаться не могут, могут касаться; **б)** пересекаться могут, касаться – нет; **в)** могут и пересекаться, и касаться. **16.6.** $n\geqslant 3$.

**17.4.** $u=\Phi(xy,ze^{x/(2y)})$. **17.5.** $u=\Phi(y/x,x-y-z)$. **17.6.** $u=\Phi(y,ze^{x^2/(y^2)}$. **17.7.** $u=\Phi(x^2+y^2,(x+y)^2-2z)$. **17.8.** $u=\Phi(x-y+z,2y-2z+(x+z-y)\ln|y|)$. **17.9.** $u=\Phi(y^3+z^3,x+y+z)$. **17.10.** $u=\Phi(xy,y-8/x)$. **17.12.** $u=z+xy+\frac{y^2}{3x}-\frac{1}{3xy}$. **17.13.** $u=x_1x_4+x_2/x_4+x_3x_4$. **17.14.** $u=1-x-y+(2x+z)/y$. **17.15.** $u=\frac{4x^2}{(z^2+1)^2}+\frac{y^2(z^2+1)^2}{4}$.

**18.4.** $\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$. **18.5.** $\Phi(x,ze^{-y/x})=0$. **18.6.** $\Phi\left(z,\frac{y(x+z)}{y+z}\right)=0$. **18.7.** $\Phi(u,y^2-2z,x^2-uy^2)=0$. **18.8.** $\Phi(x^2+y^2,4z-x^2+y^2)=0$. **18.9.** $z=e^x\varphi(y)$. **18.10.** $\Phi(\ln|y|+z/x,\ln|x|+z/y)=0$. **18.11.** $\Phi(x+z,u-y,x+y+z+u+2xz(u-y)^{-1})=0$. **18.14.** $z=\frac{x^2}{y^2}$. **18.15.** $z^2x^2=4x^3-4xy+4x^2y-3y^2$.

**18.16.** $z^2 = x^2 - y^2$. **18.17.** $(x + 2y)^2 = 2x(z + xy)$. **18.19.** $(1 + yz)^3 = 3yz(1 + yz - x) + y^3$. **18.20.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$. **18.21.** $z^2 + xy = h^2 + a^2$. **18.22.** $z = x^2 y$. **18.23.** $y = x^2 + y^2 + z$. **18.24.** $z^2 + 2x^2 = F(x^2 - y^2)$. **18.25.** $\Phi(x^2 - y^2, 2x^2 + z^2) = 0$.

**19.9.** ЛНЗ. **19.10.** ЛНЗ. **19.11.** ЛНЗ. **19.12.** ЛЗ. **19.13.** ЛЗ. **19.14.** ЛЗ. **19.15.** ЛЗ. **19.16.** ЛЗ, если $\alpha_i = \pm\alpha_j$, для какой-либо пары $i, j$, $i \neq j$, или $\alpha_i = 0$ хотя бы для одного значения $i$. **19.17. б)** $(-\pi/2, 1)$; **в)** $(-\infty, \infty)$; **г)** $(-\infty, 1/2)$. **19.24.** $y'' + y = 0$. **19.25.** $y''' - y' = 0$. **19.26.** $y'' - \dfrac{1}{x}y' = 0$. **19.27.** $y'' - 2x(x^2 - 1)^{-1}y' + 2(x^2 - 1)^{-1}y = 0$.

**20.8.** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x}$. **20.9.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. **20.10.** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$. **20.11.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$. **20.12.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. **20.13.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x\cos\sqrt{3}x + C_3e^x\sin\sqrt{3}x$. **20.14.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}$. **20.15.** $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **20.16.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^x(C_4 + C_5x) + e^{-x}(C_6 + C_7x)$. **20.17.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$. **20.18.** $y = e^{x\sqrt{3}}(C_1\cos x + C_2\sin x) + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + e^{-x\sqrt{3}}(C_5\cos x + C_6\sin x)$. **20.19.** $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + C_5x\cos x + C_6x\sin x$. **20.20.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5xe^x$. **20.21.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$. **20.22.** $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x$. **20.23.** $y = (C_1 + C_2x)e^x\cos x + (C_3 + C_4x)e^x\sin x$. **20.24.** $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\cos 2x + (C_4 + C_5x + C_6x^2)\sin 2x$. **20.25.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{-x}(C_4 + C_5x + C_6x^2)$. **20.29.** $y = xe^{-2x}$. **20.30.** $y = x$. **20.31.** Решений нет. **20.32.** $y = 1 - 2e^{-1} + 2e^{-1}e^x$. **20.34.** $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$. **20.35.** $y''' - 3y' - 2y = 0$. **20.36.** $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$. **20.37.** $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. **20.38. а)** $a > 0$, $b \geqslant 0$; $a = 0$, $b > 0$. **б)** $a = 0$, $b > 0$. **20.39.** $a = 0$, $b > 0$. **20.40.** $\alpha < 0$. **20.41.** эллипсы, если $a = 0$, $b > 0$ (окружности при $a = 0$, $b = 1$).

**21.4.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$. **21.5.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} - \ln|x|$. **21.6.** $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + \dfrac{x^2e^x}{2}\ln|x|$. **21.7.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + xe^{2x}\ln|x|$. **21.8.** $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x +$

$+ e^{-x}(\cos x \ln|\cos x| + x\sin x)$. **21.9.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{x}$. **21.10.** $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x - xe^x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$. **21.11.** $y = C_1e^x + C_2xe^x - \dfrac{1}{2}e^x\ln|x^2+1| + xe^x\operatorname{arctg} x$. **21.12.** $y = C_1\dfrac{e^x}{x} + C_2\dfrac{e^{-x}}{x} + e^x(x-1)$. **21.13.** $y = 1 + \dfrac{4}{15}e^x x^{5/2}$. **21.14.** $y = e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + e^x\operatorname{arctg} e^{-x} + \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)e^x + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{-x}$. **21.18.** $y = \dfrac{y_0}{2}\left(e^{x-x_0} + e^{-x-x_0}\right) + \dfrac{y_0'}{2}\left(e^{x-x_0} - e^{-x+x_0}\right) + \dfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left[e^{x-s} - e^{s-x}\right]f(s)\,ds$. **21.19.** $y = y_0 + y_0'(x - x_0) + y_0''(x + e^{x_0-x} - x_0 - 1) + \int_{x_0}^{x}\left(e^{s-x} - s + x - 1\right)f(s)\,ds$.

**22.7.** $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + (x - 4/5)\,e^x$. **22.8.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + 2x$. **22.9.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + xe^{-x} + e^{2x}/6$. **22.10.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - xe^{-x}$. **22.11.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + x^3/6$. **22.12.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \dfrac{\cos x}{10} - \dfrac{\sin x}{5}$. **22.13.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{\sin x}{3} + \dfrac{x\cos 2x}{4}$. **22.14.** $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\cos x - \dfrac{1}{2}x\sin x + x$. **22.15.** $y = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x + \dfrac{4}{39}e^x\cos x + \dfrac{7}{39}e^x\sin x$. **22.16.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - \dfrac{1}{4}x\sin x$. **22.17.** $y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + \dfrac{x^2}{2} + 3x + \sin x$. **22.18.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{x^2}{4}\cos x + \dfrac{x}{4}\sin x$. **22.21.** $y^* = e^x\ (a\cos x + b\sin x) + xe^{-x}\left[(a_1x + b_1)\cos x + (a_2x + b_2)\sin x\right]$. **22.22.** $y^* = x(ax^2 + bx + x) + e^{-2x}(a_1\cos x + b_1\sin x)$. **22.23.** $y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + xe^x(a_1\cos 2x + b_1\sin 2x)$. **22.24.** $y^* = x\left[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x\right]$. **22.25.** $y^* = (ax + b)e^{w_2x}$, если $|w_2| \neq |w_1|$; $y^* = x(ax + b)e^{w_2x}$, если $|w_2| = |w_1|$. **22.26.** $y^* = a\cos w_2x + b\sin w_2x$, если $w_2 \neq w_1$; $y^* = x(a_1\cos w_2x + b_1\sin w_2x)$, если $w_2 = w_1$. **22.28.** $y^* = x(ax^2 + bx + c) + x\left[(a_1x + b_1)\cos x + (a_2x + b_2)\right]$. **22.29.** $y^* = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x + a_1\cos 2x + b_1\sin 2x$. **22.30.** $y^* = x(ax + b) + cxe^x$. **22.31.** $y^* = x(ax + b)\cos x + x(cx + d)\sin x + a_1\cos 2x + a_2\sin 2x$. **22.32.** $y^* = a + b\sin 2x + c\cos 2x + a_1\cos 4x + b_1\sin 4x$. **22.33.** $y^* = x[(ax^2 + bx + c)e^x + (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{-x}]$. **22.34.** $y = -2\cos x + \dfrac{5}{3}\sin x -$

$-\dfrac{1}{3}\sin 2x$. **22.35.** $y = e^x + xe^x + \dfrac{x^2}{2}e^x$. **22.36.** $y = -1 + \dfrac{5}{4}e^x - \dfrac{5}{4}e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x$. **22.37.** $y = -15 + 3e^x + 3e^{-x} + 10\cos x - \cos 2x$. **22.38.** Все решения $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{136}\cos 4x$ — периодические; $T = 2\pi$, если $|C_1| + |C_2| \neq 0$; $T = \pi$, если $C_1 = C_2 = 0$. **22.39. а)** $|k| \neq |\omega|$, $\omega = k = 0$; **б)** $\omega$ и $k$ соизмеримы: $\left|\dfrac{\omega}{k}\right| = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. **22.40.** $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{M_1}{\omega^2 - \omega_1^2}\sin\omega_1 t$, $M_1 = \dfrac{M}{m}$, $\omega_1^2 \neq \omega^2$; $x^*(t) = \dfrac{M_1}{\omega^2 - \omega_1^2}\sin\omega_1 t$, $A = \dfrac{M_1}{|\omega^2 - \omega_1^2|} \underset{\omega_1\to\omega}{\longrightarrow} +\infty$; $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{M_1}{2\omega}t\sin\omega t$, $\omega_1^2 = \omega^2$; $x^*(t) = \dfrac{M_1}{2\omega}t\sin\omega t$, $A = \dfrac{M_1 t}{2\omega}$. **22.43.** $y = -\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{(n^2+1)(4n^2-1)}$. **22.44.** $y = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{16n^4 - 4n^2 + 1}\left(\cos 2nx - \dfrac{2n}{4n^2-1}\sin 2nx\right)$. **22.45.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(1-n^2)}\sin nx$. **22.46.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2\left(4-(2n+1)^2\right)}$. **22.47.** Периодических решений нет. **22.48.** Периодических решений нет. **22.49.** $y = \dfrac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(1+4n^2)}\cos 2nx$. **22.50.** $y = C_1 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2\left[(2n+1)^2-4\right]}$.

**23.7.** $y = C_1x + C_2x^2$. **23.8.** $y = C_1x + C_2x\ln|x| + C_3x^2$. **23.9.** $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln|x|$. **23.10.** $y = C_1x + C_2x\ln|x| + C_3|x|^{-1+\sqrt{5}} + C_4|x|^{-1-\sqrt{5}}$. **23.11.** $y = \dfrac{C_1}{x}\sin\ln|x| + \dfrac{C_2}{x}\cos\ln|x|$. **23.12.** $y = C_1(3x+1) + C_2(3x+1)^{-1}$. **23.13.** $y = C_1 + C_2\sin\ln|x| + C_3\cos\ln|x|$. **23.14.** $y = C_1\cos\ln|2x+1| + C_2\sin\ln|2x+1| + \dfrac{1}{4}$. **23.15.** $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x - \dfrac{1}{2}x^{-1}$. **23.16.** $y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x - \dfrac{\ln^2 x}{4}\cos\ln x + \dfrac{\ln x}{4}\sin\ln x$. **23.17.** $y = C_1x + C_2x^{-1} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}(x^{-1} + 4x)\ln|2x-1|$. **23.18.** $y = C_1(3x+2)^2 + C_2(3x+2)^{-1} - x - \dfrac{2}{3}$.

**23.19.** $y = C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x) + \sin(\ln x) \cdot \ln|\sin(\ln x)| - \ln x \cdot \cos(\ln x)$. **23.20.** $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-1} \ln|x| + 3x(\ln x - 1)$. **23.22.** $y = C_1 e^{1/x} + C_2 e^{-1/x}$. **23.23.** $y = C_1 e^{x^2} + C_2 e^{-x^2}$. **23.24.** $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$. **23.25.** $y = C_1 \cos\dfrac{n}{x} + C_2 \sin\dfrac{n}{x}$. **23.27.** $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \cos x$. **23.28.** $y = C_1 \dfrac{\cos 2x}{x} + C_2 \dfrac{\sin 2x}{x}$. **23.29.** $y = \dfrac{C_1 + C_2 x}{\sqrt{1+x^2}}$. **23.30.** $y = e^{-x^2/2}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. **23.32.** $y = C_1 e^{-x^3} + C_2 x^3 e^{-x^3}$. **23.33.** $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$. **23.34.** $y = C_1 \cos(n \arcsin x) + C_2 \sin(n \arcsin x)$. **23.35.** $y = C_1 e^{2/x} + C_2 e^{-2/x}$. **23.37.** $y = x\left(C_1 \cos\dfrac{1}{x} + C_2 \sin\dfrac{1}{x}\right)$. **23.38.** $y = e^{-x^2/2}\left(C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x}\right)$.

**24.5.** $y = \dfrac{C_1 e^x}{x} + C_2 e^{-4x}\left(x^3 + \dfrac{4x^2}{5} + \dfrac{12x}{5^2} + \dfrac{24}{5^3} + \dfrac{24}{5^4} \cdot \dfrac{1}{2}\right)$. **24.6.** $y = C_1 \dfrac{\cos x}{x} + C_2 \dfrac{\sin x}{x}$. **24.7.** $y = C_1(x + 2\ln|x|) + C_2$. **24.8.** $y = C_1\left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right) + C_2 e^{-2x}$. **24.9.** $y = C_1 e^x + C_2(x+1) + C_3 x^2$. **24.10.** $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3(x \ln|x| + 1)$. **24.11.** $y = C_1 e^x + C_2 e^x \int e^{-x} \cdot e^{-\int (b(x)/a(x))\,dx}\,dx$. **24.13.** $y = C_1 x + C_2 x e^x + x(x-1)e^x$. **24.14.** $y = C_1(x+1) + C_2 e^x + \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)e^x$. **24.15.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$. **24.16.** $y = C_1(x^2+1) + C_2 e^x + x e^x$. **24.18.** $y = C_1(x^2+1) + C_2 x^{-1} + 2x$. **24.20.** $y = C_1(x+1) + C_2 x^2 + 2x^3$. **24.22.** $y = e^{-2x - \sin 2x}\left(\int C_1 e^{2x + \sin 2x}\,dx + C_2\right)$. **24.23.** $y = C_3 + \int(e^{-x^3/3}\,dx) \int e^{x^3/3}(C_1 x + C_2)\,dx$. **24.24.** $y = C_1 e^{-x^2/2} \int \dfrac{e^{x^2/2}}{x}\,dx + C_2 e^{-x^2/2}$. **24.25.** $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos^2 x$. **24.26.** $y = C_2(x + C_1)e^{e^x}$; $y = Ce^{e^x}$. **24.27.** $y = C_2 x|1 + C_1 e^{1/x}|^{1/C_1}$, $C_1 \neq 0$; $y = Cx$; $y = Cxe^{-1/x}$.

**25.3.** $y_1(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1)3k}$; $y_2(x) = x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3k(3k+1)}$; $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. **25.4.** $y = 1 +$

$+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3k-1)3k}$; $y_2(x)=x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k(3k+1)}$.
**25.5.** $y_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}=\dfrac{1}{1+x^2}$; $y_2(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}=\dfrac{x}{1+x^2}$.
**25.6.** $y_1(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x^3+\dfrac{5}{72}x^4+\ldots$; $y_2(x)=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots$.
**25.7.** $y_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$; $y_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. **25.8.** $y_1(x)=1-$ $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{240}x^6+\ldots$; $y_2(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{5\cdot 6}x^5-\dfrac{19}{5040}x^7+\ldots$.
**25.12.** $y_1(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{(k!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$; $y_2(x)=y_1(x)\ln x+$ $+\dfrac{x^2}{2^2 4^2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{x^6}{2^2 4^2 6^2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\ldots$. **25.13.** $y_1(x)=x+x^2+$ $+\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^4}{3!}+\ldots=xe^x$; $y_2(x)=xe^x\ln x+1+x-\dfrac{9}{24}x^3-\dfrac{19}{120}x^4+\ldots$.
**25.14.** $y_1(x)=x\left(1+x+x^2+\ldots\right)=\dfrac{x}{1-x}$; $y_2(x)=1+x+x^2+$ $+\ldots\quad+y_1(x)\ln x=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x}{1-x}\ln x$. **25.15.** $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$; $y_2(x)=$ $=\dfrac{\cos x}{x}$. **25.16.** $y_1(x)=x^{1/2}\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^2}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2k+3)}\right)$; $y_2(x)=$ $=\dfrac{1}{x}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^k}{k!}+\ldots\right)=\dfrac{e^x}{x}$. **25.17.** $y_1(x)=1-2x+x^2-$ $-\dfrac{2^3}{2^2 3^2}x^3+\ldots+(-1)^k\dfrac{2^k}{2^2 3^2\cdots k^2}x^k+\ldots$; $y_2(x)=y_1(x)\int\dfrac{e^{-\int(1/x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx=$ $=y_1(x)\int\dfrac{1}{x(1-4x+6x^2+\ldots)}\,dx=y_1(x)\int\dfrac{1}{x}(1+4x+10x^2+\ldots)\,dx=$ $=y_1(x)\ln x+y_1(x)(4x+5x^2+\ldots)$. **25.18.** $y_1(x)=1+x+\ldots+$ $+x^n+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$; $y_2(x)=\dfrac{1}{1-x}\ln x$. **25.20.** С помощью замены $y=\dfrac{z}{\sqrt{x}}$ ДУ приводится к $z''+z=0$; $y(x)=C_1\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
**25.21.** $J_{1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$.

**26.2.** Все нетривиальные решения — неколеблющиеся на $\mathbb{R}_+$. **26.3.** Если $(a-1)^2-4b<0$, то все решения ДУ — колеблющиеся на любом достаточно большом интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}_+$; в противном случае нетривиальные решения — неколеблющиеся на $\mathbb{R}_+$. **26.6.** $3,14 < d < 9,94$. **26.7.** $0,157 < d < 3,142$. **26.8.** $3,14 < d < 3,295$. **26.9.** $0,157 < d < 1,571$. **26.10.** Решения — неколеблющиеся на $[0,+\infty)$; на интервале $(-\infty,0)$ каждое нетривиальное решение имеет бесконечное число нулей $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$, $x_n \to -\infty$ и $x_n - x_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. **26.19.** $y = (\sin x)/\sin 1$. **26.20.** $y = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin x$. **26.21.** $y = -1 - \operatorname{ch} 1 + (1+e^{-1})e^x$. **26.22.** $y = e^{-x}$. **26.23.** $y = -\cos x + \left(\operatorname{ctg} 1 - \dfrac{1}{\sin 1}\right)\sin x + 1$. **26.24.** $y = 1/x$. **26.25.** $y = \dfrac{4}{5}x^2 - \dfrac{1}{2}x^{-1} - \dfrac{3}{10}\cos\ln x - \dfrac{1}{10}\sin\ln x$. **26.28.** $G(x,s) = -\sin x\cos s$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G(x,s) = -\cos x \sin x$, $s \leqslant x \leqslant \pi/2$. **26.29.** $G(x,s) = (-e^{-s} + se^{-s})xe^x$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G(x,s) = -se^{-s}(e^x - xe^x)$, $s \leqslant x \leqslant 1$. **26.30.** $G(x,s) = e^{-s}\operatorname{sh} x$, $0 \leqslant x \leqslant s$; $G(x,s) = e^{-x}\operatorname{sh} s$, $s \leqslant x < +\infty$. **26.31.** $G(x,s) = \dfrac{s^2}{2x}$, $1 \leqslant x \leqslant s$; $G(x,s) = \dfrac{1}{2}x$, $s \leqslant x < +\infty$.

**27.7.** $x = C_1\cos t + C_2\sin t - \dfrac{1}{2}t\cos t$, $y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \left(1 - \dfrac{1}{2}t\right)\sin t + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t\right)\cos t$. **27.8.** $x = (C_1 t + C_2)\,e^{-t} - t^2e^{-t}$, $y = \left(C_1 - \dfrac{C_2}{2} + C_2 t\right)e^{-t} + \left(\dfrac{1}{2} + t - t^2\right)e^{-t}$. **27.9.** $x = (C_1 + C_2 t)\,e^t$, $y = -(2C_1 + C_2 + 2C_2 t)\,e^{-t}$. **27.10.** $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{1}{4}te^{2t}$, $y = C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - e^t + \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{4}te^{2t}$. **27.11.** $x = C_1e^t\cos 2t + C_2e^t\sin 2t - \dfrac{1}{3}e^t\cos t + \dfrac{2}{3}e^t\sin t$, $y = (C_1 - C_2)\,e^t\cos 2t + (C_1 + C_2)\,e^t\sin 2t + \dfrac{2}{3}e^t\cos t + e^t\sin t$. **27.12.** $x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t + t\sin t - t\cos t + \cos t \cdot \ln|\sin t| + \sin t \cdot \ln|\sin t| - \cos t + 1$, $y = 2C_1\cos t + 2C_2\sin t - 2t\cos t + 2\sin t \cdot \ln|\sin t|$. **27.13.** $x = C_1t^2 + C_2t^3$, $y = 3C_1t + 4C_2t^2$. **27.14.** $x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$, $y = e^{-t}(C_1\sin t + C_2\cos t)$. **27.15.** $x = -5C_1t^{-3} - 5C_2t^{-4} + \dfrac{1}{4}e^t$, $y = C_1t^{-3} + C_2t^{-4} - \dfrac{1}{5}e^{2t} - \dfrac{1}{20}e^t$. **27.16.** $y = C_1e^x + e^{2x}\left(C_2\cos\sqrt{2}x + C_3\sin\sqrt{2}x\right)$, $z = y''$.

**27.17.** $x = t - C_1 - C_2 - C_2 \ln|t|$, $y = C_1 t + C_2 t \ln|t|$. **27.18.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t}$, $y = 2C_1 e^t + \dfrac{C_3}{2} e^{-2t}$. **27.19.** $x = -2C_1 e^{-t} + e^{t/2}\left(C_2 \sin\dfrac{t}{2} - C_3 \cos\dfrac{t}{2}\right)$, $y = C_1 e^{-t} + e^{t/2}\left(C_2 \cos\dfrac{t}{2} + C_3 \sin\dfrac{t}{2}\right)$. **27.20.** $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t)$. **27.21.** $x = C_1 e^t + C_2 t e^t$, $y = -C_2 e^t$. **27.22.** $x = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t}$, $y = -(2C_1 + C_2) e^t - 2C_2 t e^t - 4C_3 e^{-t}$.

**28.8.** $y = C_1 e^{-x} - C_2 e^{-3x}$, $z = C_1 e^x - C_2 e^{-3x}$. **28.9.** $y = 2C_1 e^x + C_2 e^{4x}$, $z = -C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. **28.10.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $z = C_1(2\cos x + \sin x) + C_2(2\sin x - \cos x)$. **28.11.** $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^x$, $z = (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) e^x$. **28.12.** $y = (2C_1 x + C_2) e^{-x}$, $z = (2C_1 x + C_1 + C_2) e^{-x}$. **28.13.** $y = (3C_1 x + C_2) e^x$, $z = (3C_1 x + C_2 - C_1) e^x$. **28.14.** $x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t}$, $x_2 = -3C_1 e^{-t} + C_2 e^t$, $x_3 = -5C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t}$. **28.15.** $x_1 = C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$, $x_2 = -C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$, $x_3 = C_2 e^{-t} + 2C_3 e^{2t}$. **28.16.** $x_1 = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$, $x_2 = -C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$, $x_3 = -C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t$. **28.17.** $x_1 = 2C_2 \sin 2t - 2C_3 \cos 2t$, $x_2 = -3C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$, $x_3 = C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$. **28.18.** $x_1 = C_1 e^t + C_3 e^{-2t}$, $x_2 = C_2 e^t + C_3 e^{-2t}$, $x_3 = -C_1 e^t - C_2 e^t + C_3 e^{-2t}$. **28.19.** $x_1 = C_1 + C_2 e^t$, $x_2 = -C_1 + C_3 e^t$, $x_3 = C_1 + (C_2 + C_3) e^t$. **28.20.** $x_1 = -2C_1 t + 2C_1 - 2C_2 - 3C_2 e^{-t}$, $x_2 = C_1 t + C_2 + C_3 e^{-t}$, $x_3 = 2C_1 t - C_1 + 2C_2 + 3C_3 e^{-t}$. **28.21.** $x_1 + (C_1 t + C_2) e^t$, $x_2 + (-C_1 t + C_3) e^t$, $x_3 + (-C_1 t + C_2 + 2C_3) e^t$. **28.22.** $x_1 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}$, $x_2 = C_2 e^{-t} + C_3 (t+1) e^{-t}$, $x_3 = 3C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{-t} + 4C_3 t e^{-t}$. **28.23.** $x_1 = C_1 e^t + C_2 (t+1) e^t + C_3\left(t^2/2 + t + 1\right) e^t$, $x_2 = 3C_1 e^t + C_2 (3t+2) e^t + C_3\left(3t^2/2 + 2t + 1\right) e^t$, $x_3 = -6C_1 e^t + C_2(-6t-5) e^t + C_3(-3t^2 - 5t - 3) e^t$. **28.24.** $x_1 = (C_1 t + C_2) e^t$, $x_2 = (-C_1 t + C_3) e^t$, $x_3 = (-C_1 t + C_2 + 2C_3 - C_1) e^t$. **28.25.** $x_1 = C_1 + C_2 (t+1) + C_3\left(t^2/2 + t + 1\right)$, $x_2 = C_1 + C_2(-t+1) + C_3(t^2 - t + 1)$, $x_3 = -C_1 - C_2 + C_3\left(-t^2/2 - 1\right)$. **28.27.** $x = C_1 + C_2 e^t + 8C_3 e^{t/2} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2} t + 8C_4 e^{t/2} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} t$, $y = C_3 e^{t/2}\left(-3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2} t - 13\sqrt{3}\right) \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} t + C_4\left(13\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2} t - 3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} t\right)$. **28.28.** $x = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$, $y = -C_1 e^t + C_2 e^{5t}$. **28.29.** $x = -2C_1 e^t + C_2 e^t$,

$y = C_1e^t - C_2e^t + C_3e^t$. **28.30.** $x = 2(C_1t + C_2)e^t - 2(C_3t + C_4)e^{-t}$, $y = (C_1t + C_2)e^t + (C_3t + C_4)e^{-t}$. **28.31.** $x_1 = C_1/t + C_2t^3$, $x_2 = -2C_1/t + 2C_2t^3$. **28.32.** $x_1 = t(C_1\cos 2\ln t + C_2\sin 2\ln t)$, $x_2 = t(-C_1\sin 2\ln t + C_2\cos 2\ln t)$. **28.33.** $x_1 = e^{t/2}(-C_1/t + C_2)$, $x_2 = e^{2/t}(C_1/t + C_1 - C_2)$. **28.34.** $x_1 = e^{-1/t^3}\left(-C_1/t^2 + C_2\right)$, $x_2 = e^{-1/t^3}\left(-C_1/t^2 + C_2 - C_1\right)$. **28.35.** $\tau = t^{-\alpha+1}/(-\alpha+1)$, $\alpha \neq 1$.

**29.5.** $x = C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. **29.6.** $x = C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$.

**29.7.** $x = C_1\begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$.

**29.8.** $x = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} t + 1/2 \\ -t - 1 \end{pmatrix} e^t$.

**29.9.** $x = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**29.10.** $x = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**29.11.** $x = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**29.12.** $x = C_1e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**29.13.** $x = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} 3\cos t - \sin t \\ -\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ \cos t - \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

**29.14.** $x = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2e^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_3e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}$.

**29.15.** $x = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3\begin{pmatrix} -2t - 1 \\ t + 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$.

**29.16.** $x = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} t+1 \\ t-2 \\ -t \end{pmatrix} e^{2t}.$

**29.17.** $x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$

**29.18.** $x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} t+1 \\ -t-3 \\ -2t-1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

**29.19.** $x = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t+3 \\ -t+1 \\ t \end{pmatrix}.$

**29.20.** $x = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -t^2-2t+1 \\ t^2/2+t \\ t^2/2-2 \end{pmatrix} e^{2t}.$

**29.23.** $x_1 = e^{-t},\ x_2 = e^{-t}$. **29.24.** $x_1 = 1-t,\ x_2 = t$. **29.25.** $x_1 = 2 + e^{t-1} - 2e^{1-t},\ x_2 = 2 - 2e^{1-t},\ x_3 = -2 - e^{t-1} + 4e^{1-t}$. **29.26.** $x_1 = 2 + e^{t-1} - 2e^{1-t},\ x_2 = 2 - 2e^{1-t},\ x_3 = -2 - e^{t-1} - 4e^{1-t}$. **29.30.** $\det e^A = 1$. **29.31.** $\det e^A = e^{13}$.

**30.2.** $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t^2 + t - 1,\ y = -C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\cos t - \sin t) - t^2 + 2$. **30.3.** $x = -3C_1e^t + C_2e^{5t} - \dfrac{12}{13}\cos t - \dfrac{21}{13}\sin t,\ y = C_1e^t + C_2e^{5t} + \dfrac{1}{13}\cos t + \dfrac{5}{13}\sin t$. **30.4.** $x = -2C_1e^t - C_2(1+2t)e^t + e^t(t+t^2) + 2e^{3t},\ y = C_1e^t + C_2te^t - \dfrac{t^2}{2}e^t$. **30.5.** $x = e^{2t}\left(C_1\cos t + C_2 \sin t\right) - \dfrac{1}{2}\cos t,\ y = C_1e^{2t}(2\cos t - \sin t) + C_2e^{2t}(2\sin t + \cos t) - \dfrac{1}{2}\sin t$. **30.6.** $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + \dfrac{1}{9}t - \dfrac{2}{9}$, $y = 4C_1e^{3t} - 2C_2e^{-3t} - \dfrac{8}{9}t - \dfrac{10}{9}$. **30.7.** $x = e^t\left(C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t\right) - e^t \sin t,\ y = e^t\left(C_1\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t - C_2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\right) + e^t\cos t$. **30.9.** $x = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + \left(2\ln|t| + t\ln|t| - t\right)e^{2t},\ y = C_1e^{2t} + C_2(t-1)e^{2t} + \left(\ln|t| + t\ln|t| - t - 1/t\right)e^{2t}$. **30.10.** $x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$, $y = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t$, где $C_1(t) = C_1 - 2/\sin^2 2t,\ C_2(t) = -\operatorname{ctg} t + \operatorname{tg} t$. **30.11.** $x = C_1e^t + C_2e^{2t} - 2e^t\ln(e^t+1) + 3te^{2t} - 3e^{2t}\ln(e^t +$

$+ 1)$, $y = 3C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 6e^t\ln(e^t + 1) - 6e^{2t}\ln(e^t + 1) + 6te^{2t}$. **30.12.** $x = C_1\cos t + C_2\sin t - \sin t\ln|\mathrm{tg}\,(t/2)|$, $y = C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t) + 1 + \cos t\ln|\mathrm{tg}(t/2)| - \sin t\ln|\mathrm{tg}(t/2)|$. **30.14.** $x_1 = C_1(1+2t) + 2C_2 + 5\ln|t| - 2t + 4$, $x_2 = C_1t + C_2 + t\ln|t| + 2\ln|t| - t - 1/t + 2$.

**31.5.** Асимптотически устойчиво в целом. **31.6.** Асимптотически устойчиво в целом. **31.7.** Асимптотически устойчиво в целом. **31.8.** Неустойчиво. **31.9.** Неустойчиво. **31.10.** Если $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \ldots$, $\alpha < 0$, то асимптотически устойчиво, $\alpha > 0$, то неустойчиво; если $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\alpha \neq 0$, то неустойчиво. **31.15.** Устойчиво. **31.16.** Неустойчиво. **31.17.** Неустойчиво. **31.18.** Устойчиво. **31.19.** **а)** Устойчиво; **б)** неустойчиво; **в)** неустойчиво. **31.20.** Неустойчиво. **31.21.** Неустойчиво. **31.22.** Неустойчиво. **31.24.** Неустойчиво. **31.25.** Устойчиво. **31.27.** Асимптотически устойчиво, если $-\frac{5}{2} < a < -2$; устойчиво, но не асимптотически, если $a = -2$ или $a = -\frac{5}{2}$. **31.28.** Асимптотически устойчиво, если $a + d < 0$, $ad - bc > 0$; устойчиво, если $a + d = 0$, $ad - bc > 0$ или $a + d < 0$, $ad - bc = 0$. **31.29.** Асимптотически устойчиво, если $ab < -8$; устойчиво, если $ab = -8$. **31.30.** Асимптотически устойчиво, если $\alpha < 0$; устойчиво, если $\alpha = 0$. **31.33.** Асимптотически устойчиво. **31.34.** Не является асимптотически устойчивым. **31.35.** Асимптотически устойчиво. **31.36.** Не является асимптотически устойчивым.

**32.10.** Неустойчивый фокус. **32.11.** Неустойчивый вырожденный фокус. **32.12.** Центр. **32.13.** Дикритический узел. **32.14.** Устойчивый узел. **32.15.** Седло. **32.16.** Седло. **32.17.** Устойчивый узел. **32.18.** Особые точки заполняют прямую $y = x$, они являются устойчивыми, но не асимптотически. **32.19.** Особые точки заполняют линию $y = 2x$, они неустойчивы. **32.20.** Если $\alpha > 0$, асимптотически устойчиво; $\alpha = 0$ устойчиво; $\alpha < 0$ неустойчиво; центр, если $\alpha = 0$; фокус, если $|\alpha| < 1$; узел, если $|\alpha| > 1$; вырожденный узел, если $|\alpha| = 1$. **32.21.** $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

**33.7.** Неустойчиво. **33.8.** Асимптотически устойчиво. **33.9.** Асимптотически устойчиво. **33.10.** Неустойчиво. **33.11.** Асимптотически устойчиво. **33.15.** $(-1,1)$, $(4,-4)$ неустойчивы. **33.16.** $(2,7)$ неустойчиво, $(-1,-4)$ асимптотически устойчиво. **33.17.** $(1,1)$ асимптотически устойчиво, $(1,-1)$ неустойчиво. **33.18.** $(1,-1)$, $(4,-2)$ неустойчивы. **33.19.** $(2,4)$ неустойчиво, $(1,1)$ асимптотически устойчиво. **33.20.** $(1,1)$ асимптотически устойчиво; $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ неустойчивы. **33.21.** $(0,2k\pi)$ неустойчивы, $(0,(2k+1)\pi)$ асимптотически устойчивы. **33.22.** $(k\pi,-1)$ неустойчивы, $k=0,\pm1,\ldots$ .

**34.9.** Неустойчиво. **34.10.** Неустойчиво. **34.11.** Асимптотически устойчиво. **34.12.** Асимптотически устойчиво. **34.13.** Неустойчиво. **34.14.** Асимптотически устойчиво. **34.15.** Асимптотически устойчиво. **34.16.** Асимптотически устойчиво. **34.17.** Неустойчиво. **34.18.** Асимптотически устойчиво, если $a<0$, $d<0$, $bc>0$ или $a=0$, $b>0$, $d<0$, $c>0$. Неустойчиво, если $bc<0$, $ad<0$ или $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$. **34.19.** Асимптотически устойчиво, если $a<0$, $n=2k-1$, $k=1,2,\ldots$ . Неустойчиво, если $n=2k$ или $a>0$, $n=2k-1$, $k=1,2,\ldots$ . **34.21.** $(m\pi,0)$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ; $(0,0)$ устойчиво; $(\pm\pi,0)$ неустойчивы; $(2m\pi,0)$ устойчивы; $((2m-1)\pi,0)$ неустойчивы. **34.22**. Асимптотически устойчиво.

**35.4.** $\rho=1$ — полуустойчивый предельный цикл. **35.5.** $\rho=1$ — устойчивый предельный цикл. **35.6.** Предельные циклы $\rho=1/(k\pi)$, $k\in\mathbb{N}$; они устойчивы, если $k=2m$, и неустойчивы, если $k=2m-1$. **35.7.** Предельные циклы $\rho=1/k$, $k\in\mathbb{N}$; они устойчивы, если $k=2m-1$, и неустойчивы, если $k=2m$, $m\in\mathbb{N}$. **35.8.** Предельные циклы $\rho=1$, $\rho=2$, $\rho=3:$ один устойчивый $(\rho=2)$ и два неустойчивых $(\rho=1,\ \rho=3)$. **35.9.** Если $\alpha\leqslant0$, то нет предельных циклов; если $\alpha=a^2$, $a>0$, то один предельный цикл $\rho=a$, он устойчивый. **35.11.** Неустойчивый предельный цикл $\rho=1$. **35.12.** Полуустойчивый предельный цикл $\rho=1$. **35.13.** Устойчивый предельный цикл $\rho=1$. **35.14.** Устойчивый предельный цикл $\rho=2$. **35.15.** Предельные циклы $r=k$, $k\in\mathbb{N}$; устойчивые, если $k=2m$, и неустойчивые, если $k=2m-1$, $m\in\mathbb{N}$. **35.16.** $\alpha=0$ — точка бифуркации. **35.17.** $\alpha=0$ — точка бифуркации. **35.18.** Точки бифуркации $\alpha=0$, $\alpha=\pm2$. **35.19.** Точки бифуркации $\alpha=0$, $\alpha=\pm2$. **35.20.** Точка бифуркации $\alpha=0$. **35.21.** Точка бифуркации $\alpha=0$.

# НЕКОТОРЫЕ НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## Простейшие неопределённые интегралы

$$\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad \mu \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right), \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln \operatorname{sh} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

## Некоторые неберущиеся интегралы (неэлементарные интегралы элементарных функций)

$$\int e^{\pm x}\,dx \qquad \int \sin x^2\,dx \qquad \int \cos x^2\,dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \int \frac{\sin x}{x^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int \frac{x}{\sin x}\,dx \qquad \int \frac{x^2}{\sin x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx$$

$$\int \ln\cos x\,dx \qquad \int e^x \ln x\,dx \qquad \int \frac{x}{\ln x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1$$

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава IV. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



## Глава V. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА



## Глава VI. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ $n$-го ПОРЯДКА



## Глава VII. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное издание

**Прохорова** Римма Александровна

**ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**Учебное пособие**

Редактор *Т. Н. Крюкова*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовского*
Корректор *Е. В. Демидова*

Подписано в печать 30.11.2017. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,85. Уч.-изд. л. 19,8.
Тираж 100 экз. Заказ 790.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.