Лабораторная работа №5

Математические модели с запаздыванием

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
апрель 2022
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Метод последовательного интегрирования (метод шагов)

Напишите пользовательскую функцию **solveDelay[f_, T_, {t0_, tend_}, phi_]**, которая реализует метод последовательного интегрирования (метод шагов) для *численного решения* начальной задачи для одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t), x(t-T)), && t_0 < t \le t_{end} \\ &x(t) = \phi(t), && t_0 - T \le t \le t_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

где $T = \text{const} > 0$ определяет величину запаздывания, начальная функция $\phi(t)$ полагается заданной на начальном множестве $I_0 := [t_0 - T,\ t_0]$.

Рекомендации по реализации Задания 1

Используйте функцию **NDSolve** для решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения без запаздывания на каждом шаге метода.

Реализация последовательности шагов возможна с помощью оператора повторных действий **NestList** и функции **Piecewise** для представления кусочной гладкой функции решения на интервалах $I_k := [t_0 + (k-1)\,T,\ t_0 + k\,T]$.

```
? Piecewise
```

Piecewise[{{val_1, $cond_1$}, {val_2, $cond_2$}, …}] represents a piecewise function with values val_i in the regions defined by the conditions $cond_i$.

Piecewise[{{val_1, $cond_1$}, …}, val] uses default value val if none of the $cond_i$ apply. The default for val is 0. >>

Задание 2. Линейное дифференциальное уравнение уравнение с запаздывающим аргументом

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом вида

$$x'(t) = -\frac{\pi\, x(t-T)}{2\,T}. \tag{2}$$

Задание 2.1 (Аналитическое решение)

Покажите с помощью символьных преобразований, что функция $x(t) = C\cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ является решением уравнения (2) для произвольного значения константы C и заданного значения параметра запаздывания $T = \text{const} > 0$.

Задание 2.2 (Численное решение)

Сформулируйте произвольную начальную задачу для уравнения с запаздывающим аргументом (2).

Решите численно сформулированную начальную задачу с помощью пользовательской функции **solveDelay** из Задания 1 и с помощью встроенной функции **NDSolve. Сравните** два численных решения графически и численно.

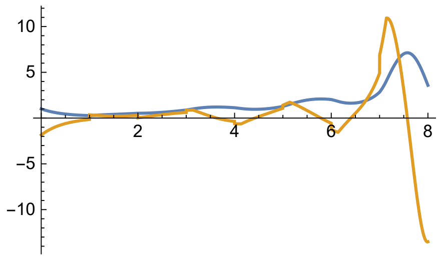
Рекомендации по реализации Задания 2.2

Пример из справочной системы *Mathematica* применения встроенной функции **NDSolve** для решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

```
In[•]:= sol = NDSolve[{x'[t] == x[t] (x[t - Pi] - x'[t - 1]), x[t /; t ≤ 0] == Cos[t]}, x, {t, 0, 8}];

In[•]:= Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. First[sol]], {t, 0, 8}, PlotRange → All]
```

Out[•]=



Задание 3. Начальная задача для уравнения Хатчинсона

Математическая модель

Рассмотрим начальную задачу для уравнения Хатчинсона в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} &N'(t) = N(t)\,(1 - N(t-T)), && t > 0 \\ &N(t) = \phi(t), && -T \le t \le 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где начальная функция $\phi(t) = 1 + \frac{t}{T}$ задана на начальном множестве $I_0 = [-T, 0]$, параметр запаздывания $T = \text{const} > 0$.

Задание 3.1 (Численное решение)

Изобразите в одной системе координат графики решений $N(t)$ модели Хатчинсона (3), построенные с помощью пользовательской функции **solveDelay** из Задания 1 для различных значений T. Рассмотрите случаи $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$.

Проверьте корректность построенных численных решений сравнением с решениями модели Хатчинсона (3), полученными с помощью **NDSolve**.

Задание 3.2 (Качественное поведение)

На основании построенных графиков решений в Задании 3.1 сформулируйте выводы о характере устойчивости положения равновесия $N(t) \equiv 1$ модели Хатчинсона (3) для случаев $0 < T < \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{\pi}{2}$, $T > \frac{\pi}{2}$.

Задание 4. Модель регуляции концентрации клеток крови

Математическая модель

$$\begin{aligned} c'(t) &= \frac{\lambda\, a^m\, c(t-T)}{a^m + (c(t-T))^m} - g\, c(t), \quad t > 0 \\ c(t) &= \phi(t), \qquad\qquad\qquad\qquad -T \le t \le 0 \end{aligned} \tag{4}$$

где $c(t) \ge 0$ -- концентрация клеток крови, $T = \text{const} > 0$ -- временная задержка в воспроизводстве новых клеток крови и поступлении их в кровоток, $\lambda = \text{const} > 0$, $a = \text{const} > 0$, $m = \text{const} > 0$, $g = \text{const} > 0$ -- заданные параметры модели. Первое слагаемое в правой части уравнения отвечает за воспроизводство клеток, второе слагаемое -- за гибель клеток.

При обезразмеривании концентрации вида $c^* = c/a$ уравнение модели (4) запишется в виде

$$\frac{d c^*(t)}{d t} = \frac{\lambda\, c^*(t-T)}{1 + (c^*(t-T))^m} - g\, c^*(t). \tag{5}$$

Математическая модель (4) впервые предложена в [3].

Задание 4.1 (Численное решение)

Решите численно начальную задачу для уравнения (5) с помощью пользовательской функции **solveDelay** для следующих значений параметров, соответствующих процессу регуляции лейкоцитов,

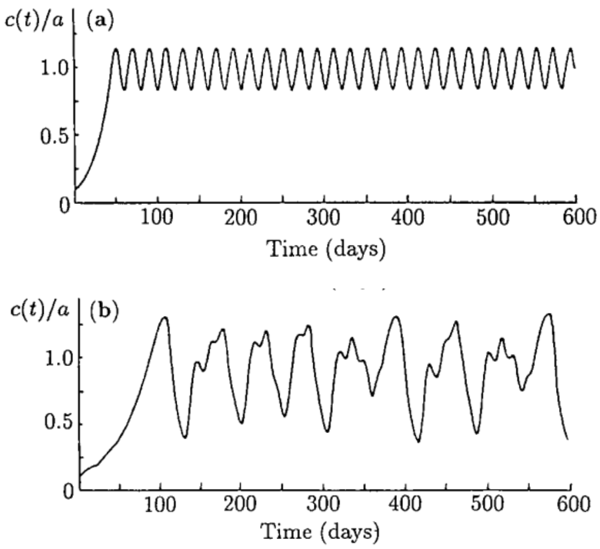
(a) $\lambda = 0.2$ день$^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1$ день$^{-1}$, $T = 6$ дней,
(b) $\lambda = 0.2$ день$^{-1}$, $m = 10$, $g = 0.1$ день$^{-1}$, $T = 20$ дней

и для начальной функции $\phi(t) = 0.1$, заданной на начальном множестве $I_0 = [-T, 0]$, при

$0 \le t \le 600$ дней.

Анализируя уравнение (5), **покажите**, что одним из положений равновесия для параметров (a) и (b) является решение вида $c^*(t) \equiv 1$.

Сравните построенные численные решение с приведенными ниже решениями из [1, стр. 27, Рис. 1.15] для случаев (a) и (b), соответственно.



По графикам численных решений видно, что величина запаздывания T в воспроизводстве лейкоцитов влияет на динамику изменения концентрации: периодическое или апериодическое поведение.

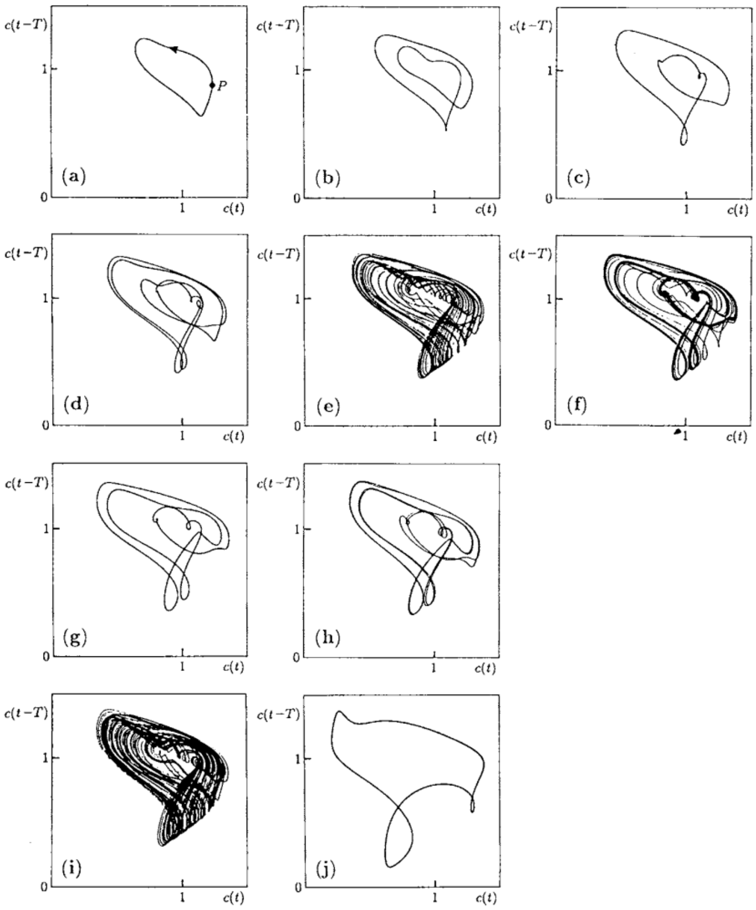
Шестидневный период ($T = 6$) является нормой для изменения концентрации лейкоцитов в крови человека. Увеличение периода приводит к апериодическому изменению концентрации и может являться причиной нарушений здоровья и заболеваний человека.

Задание 4.2 (Фазовый портрет)

Качественное поведение решения для рассматриваемой модели регуляции концентрации клеток крови (периодическое поведение или апериодическое поведение) можно определить по траекториям в фазовой плоскости $(c(t),\ c(t-T))$.

Изобразите фазовые траектории решений начальной задачи для уравнения (5) при фиксированных значениях параметров $\lambda = 2$, $g = 1$, $T = 2$ и различных значениях параметра $m = \{7,\ 7.75,\ 8.5,\ 8.79,\ 9.65,\ 9.69715,\ 9.6975,\ 9.76,\ 10,\ 20\}$. Начальная функцию $\phi(t) = 0.9$ на начальном множестве $I_0 = [-T,\ 0]$.

Сравните с аналогичными фазовыми траекториями численных решений из [1, стр. 29, Рис. 1.16] и [3, Рис. 6].



На основании построенных фазовых траекторий **сформулируйте выводы** о качественном поведении решения математической модели для уравнения (5) в окрестности положения равновесия $c(t) \equiv 1$ для различных значений параметра *m*.

Рекомендации по реализации Задания 4.2

Для построения фазового портрета можно воспользоваться примером (Mackey-Glass delay differential equation) из справочной системы *Mathematica* для функции **NDSolve.**

Литература

[1] Д. Мюррей. Математическая биология. Том I. Введение. -- М.-Ижевск, 2009.

[2] Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. -- М.: Наука, 1971.

[3] L. Glass, M. C. Mackey. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. Ann. N. Y. Acad. Sci., 316:214--235, 1979.

[4] А. Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. -- М.: Наука, 1972.

[5] Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков. Математические модели динамических систем с запаздыванием. -- Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012.