Лабораторная работа №6

Дискретные математические модели

Мат. моделирование динамических процессов 1
БГУ, ММФ, 3 курс, 6 семестр
специальность Компьютерная математика и системный анализ
апрель 2022
ММФ, КМ и СА, доц. Лаврова О.А., доц. Щеглова Н.Л.

Задание 1. Дискретные модели популяционной динамики

Рассмотрим дискретные динамические системы, которые используются в качестве математических моделей популяционной динамики:

Модель Бевертона-Холта

$$N_{n+1} = \frac{k\,N_n}{1 + N_n}, \quad \text{где } k = \text{const} > 0. \tag{1}$$

Безразмерная **модель Рикера**

$$N_{n+1} = N_n\, e^{k(1-N_n)}, \text{ где } k = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Задание 1.1 (Неподвижные точки)

- **Найдите** неподвижные точки N^* дискретных динамических систем (1) и (2) при условии, что численность популяции $N \geq 0$.
- **Исследуйте** неподвижные точки на устойчивость.
- **Найдите** первые бифуркационные значения параметров -- значения параметров, при которых собственное значение одномерной дискретной динамической системы, вычисленное в неподвижной точке, равно по модулю 1.

Задание 1.2 (Графики решений)

Постройте графики решений дискретных динамических систем (1) и (2) для начальных состояний N_0, взятых в окрестности неподвижных точек N^*. При этом **постройте** решения при различных значениях параметра k, когда одна и та же неподвижная точка N^* является абсолютно устойчивой или неустойчивой.

Для построения решений дискретных динамических систем можно использовать функцию **RecurrenceTable**.

In[∘]:=
```
?RecurrenceTable
```

Out[∘]=

Symbol

RecurrenceTable[*eqns*, *expr*, {*n*, n_{max}}] generates a list of values of *expr* for successive *n* based on solving the recurrence equations *eqns*.

RecurrenceTable[*eqns*, *expr*, *nspec*] generates a list of values of *expr* over the range of *n* values specified by *nspec*.

RecurrenceTable[*eqns*, *expr*, {n_1, …}, {n_2, …}, …] generates an array of values of *expr* for successive n_1, n_2, … .

Пример построения последовательности чисел Фибоначчи как решения двумерной дискретной динамической системы

In[∘]:=
```
RecurrenceTable[{fib[n+1] == (1 1; 1 0).fib[n], fib[0] == {1, 1}}, fib, {n, 0, 20}][[ ;; , 2]]
```

Out[∘]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946}

In[∘]:=
```
Table[Fibonacci[n], {n, 20}]
```

Out[∘]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765}

Задание 2. Дискретная модель регуляции численности насекомых-вредителей с помощью стерильных насекомых

[1, стр. 99, упр. 3.2], [4, стр. 77, упр. 6], [7, стр. 128, упр. 6] Для контроля численности насекомых-вредителей *N* была предложена стратегия внесения извне в общую популяцию стерильных насекомых с постоянной численностью $S = \text{const} > 0$. Одна из математических моделей, описывающих получающуюся в результате популяционную динамику, имеет следующий вид:

$$N_{n+1} = \frac{R\, N_n^2}{(R-1)\, N_n^2 / M + N_n + S}, \text{ где параметры } R = \text{const} > 1,\ M = \text{const} > 0,\ S = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Задание 2.1 (Неподвижные точки)

Найдите неподвижные точки N^* дискретной динамической системы (3) и исследуйте их на устойчивость.

Задание 2.2 (Условие вымирания насекомых-вредителей)

Найдите критическое значение численности стерильных насекомых $S_c = S_c(R, M)$, такое, что если $S > S_c$, то популяция насекомых-вредителей вымирает ($N^* = 0$ является устойчивой неподвижной точкой, при этом нетривиальное положение равновесия является неустойчивой неподвижной точкой).

Постройте графики решений дискретной динамической системы (3) при $S < S_c$ и $S > S_c$.

Задание 3. Бифуркационная диаграмма дискретной логистической модели

Рассмотрим дискретную логистическую модель

$$N_{n+1} = k\, N_n\, (1 - N_n), \quad 0 < k \le 4. \tag{4}$$

Известно, что для значений параметра $0 < k < 1$ неподвижная точка $N^* = 0$ является асимптотически устойчивой (аттрактор). Это означает, что при любом начальном значении N_0 из окрестности неподвижной точки $N^* = 0$ решение дискретной логистической модели стремится к $N^* = 0$.

Построим решение дискретной логистической модели (4) с помощью функции **RecurrenceTable** при $k = 0.9$ и начального состояния $N_0 = 0.5$ и убедимся, что решение стремится к нулю.

```
In[∘]:= k = 0.9;
```

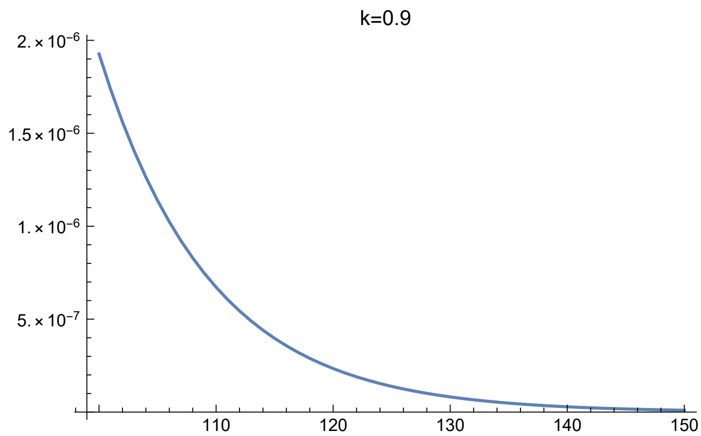
```
In[∘]:= data = RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.5}, NN, {n, 100, 150}];
```

Определим координаты соответствующих точек и построим график

```
In[∘]:= data = {Range[100, 150], data} // Transpose;
```

```
In[∘]:= ListPlot[data, Joined → True, PlotLabel → "k=0.9"]
```

Out[∘]=



Известно, что для значений параметра $1 < k < 3$ неподвижная точка $N^* = 1 - \frac{1}{k}$ является асимптотически устойчивой (аттрактор). Это означает, что при любом начальном значении N_0 из окрестности неподвижной точки $N^* = 1 - \frac{1}{k}$ решение дискретной динамической системы стремится к значению $N^* = 1 - \frac{1}{k}$.

Построим решение дискретной динамической системы при $k = 2$ и начального состояния $N_0 = 0.5$ и убедимся, что решение стремится к $N^* = 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$.

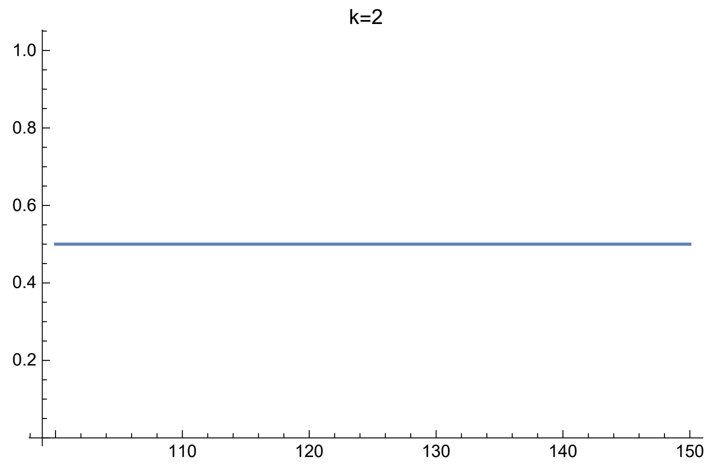
```
In[∘]:= k = 2;
```

```
In[∘]:= data = RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.5}, NN, {n, 100, 150}];
```

```
In[∘]:= data = {Range[100, 150], data} // Transpose;
```

In[∘]:=
```
ListPlot[data, Joined → True, PlotLabel → "k=2"]
```

Out[∘]=



Задание 3.1 (Анализ циклов длины 2)

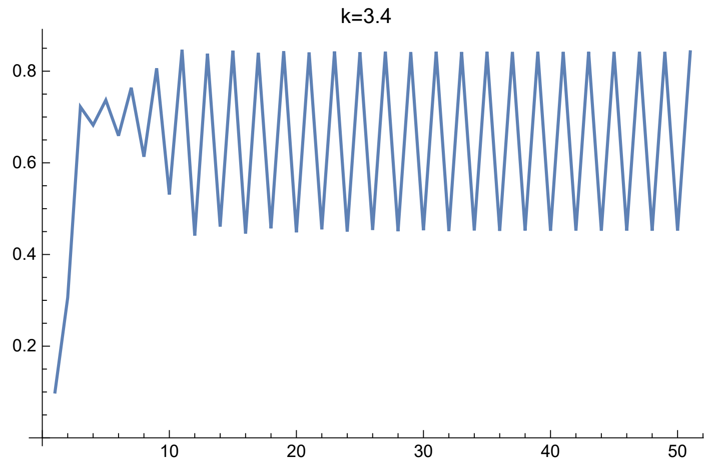
Проанализируйте устойчивость неподвижных точек для композиции $f^2(x)$ и **покажите**, что для значений $3 < k \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ периодические решения с циклом длины 2 являются асимптотически устойчивыми.

Построим решение дискретной динамической системы при $k = 3.4$ и начального состояния $N_0 = 0.1$ и убедимся, что решение стремится к периодическому решению с циклом длины 2.

In[∘]:=
```
k = 3.4;
```

In[∘]:=
```
ListPlot[RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.1}, NN, {n, 0, 50}],
 Joined → True, PlotLabel → "k=3.4"]
```

Out[∘]=



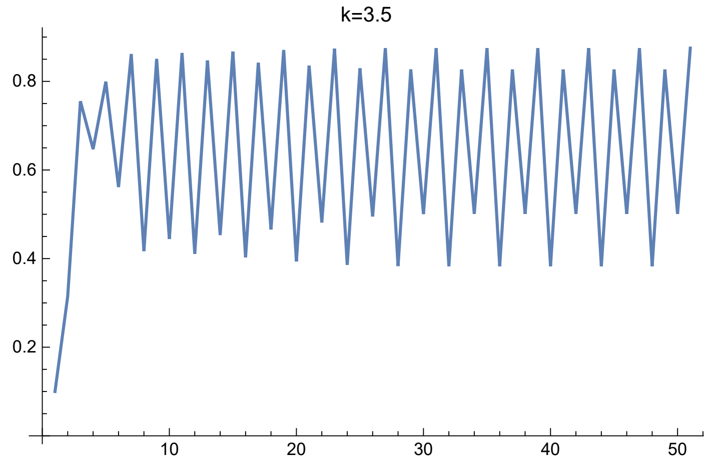
Задание 3.2 (Анализ циклов длины 4)

Проанализируйте устойчивость неподвижных точек для композиции $f^4(x)$ и покажите, что для значений $3.449 < k < 3.54409$ периодические решения с циклом длины 4 являются устойчивыми.

Построим решение дискретной динамической системы при $k = 3.5$ и начального состояния $N_0 = 0.1$ и убедимся, что решение стремится к периодическому решению с циклом длины 4.

In[∘]:=
```
k = 3.5;
```

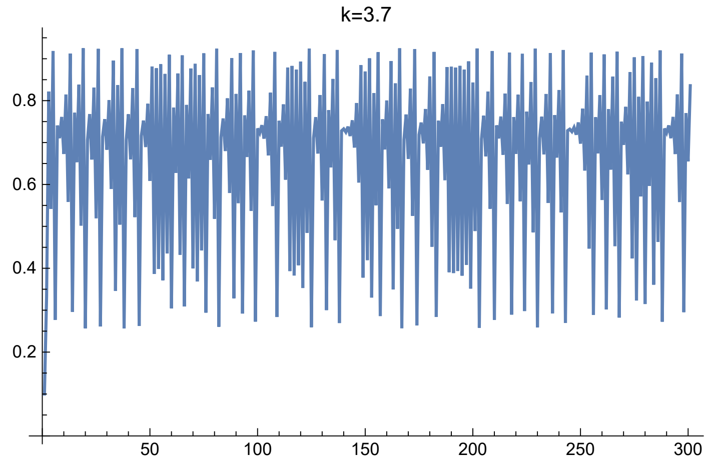
In[∘]:=
```
ListPlot[RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.1}, NN, {n, 0, 50}],
 Joined → True, PlotLabel → "k=3.5"]
```

Out[∘]=


$k^* \approx 3.569946$ является пределом формирования циклов с периодом 2^m и при k^* осуществляется переход к хаотическому поведению решения дискретной логистической модели, т.е. при $k > k^* \approx 3.569946$ решение является непериодическим. Это пример детерминированного хаоса.

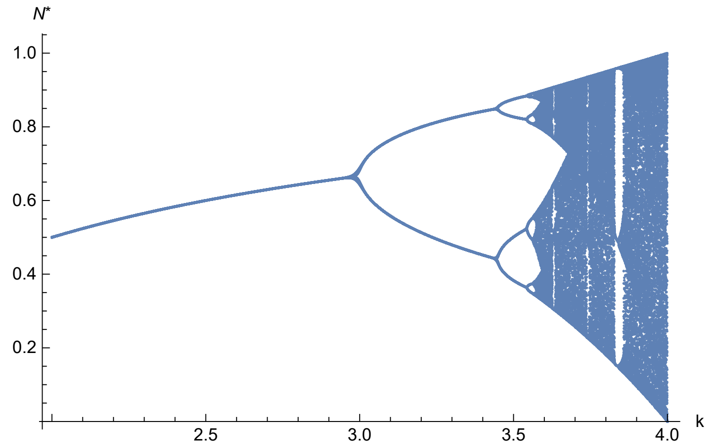
In[∘]:=
```
k = 3.7;
```

In[∘]:=
```
ListPlot[RecurrenceTable[{NN[n + 1] == k NN[n] (1 - NN[n]), NN[0] == 0.1}, NN, {n, 0, 300}],
 Joined → True, PlotLabel → "k=3.7"]
```

Out[∘]=


Задание 3.3 (Бифуркационная диаграмма)

Постройте бифуркационную диаграмму в фазово-параметрическом пространстве (k, N^*) для дискретной логистической модели (4) при $2 \le k \le 4$.



Обратите внимание на появление “светлых” промежутков с периодическим поведением при $k > k^* \approx 3.569945$.

Рекомендации по выполнению

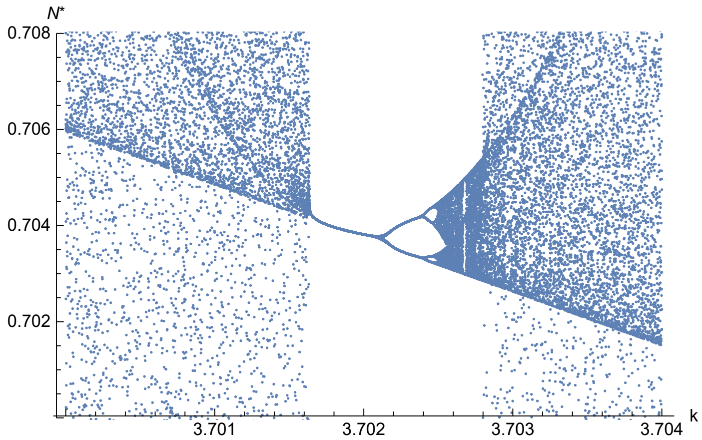
- Для построения решения дискретной логистической модели можно использовать следующую рекурсивную функцию

```
In[•]:= NN[k_][0] = 0.5;
NN[k_][n_Integer?Positive] := NN[k][n] = k NN[k][n - 1] * (1 - NN[k][n - 1])
```

- Для построения бифуркационной диаграммы необходимо изменять значение параметра k с малым шагом, например, равным 0.001, и для каждого значения параметра изображать на графике значения соответствующего решения на итерациях $100 \leq n \leq 150$, полагая, что заданные значения n будут соответствовать установлению решения на неподвижных точках.

Задание 3.4 (Свойство самоподобия решения)

Постройте бифуркационную диаграмму в фазово-параметрическом пространстве (k, N^*) для дискретной логистической модели (4) при $3.7 \leq k \leq 3.704$.



Это является иллюстрацией **свойства самоподобия** детерминированных систем с хаотическим поведением или фрактальной структуры решения, когда поведение фрагмента области подобно всей области.

Задание 4. Бифуркационная диаграмма дискретной

модели Рикера

Рассмотрим безразмерную модель Рикера (2) из Задания 1

$N_{n+1} = N_n\, e^{k(1-N_n)}$, где $k > 0$.

Постройте бифуркационную диаграмму в фазово-параметрическом пространстве (k, N^*) для модели Рикера при $k > 0$.

Задание 5. Генерация последовательности псевдослучайных чисел

Существование режимов хаотического поведения дискретных динамических систем используется для построения последовательностей псевдослучайных чисел.

Примером может служить следующая дискретная динамическая система для генерации чисел, равномерно распределенных на отрезке [0, 1]

$$x_{n+1} = |\, 100 \operatorname{Log}[x_n] \bmod 1 \,|, \qquad (5)$$

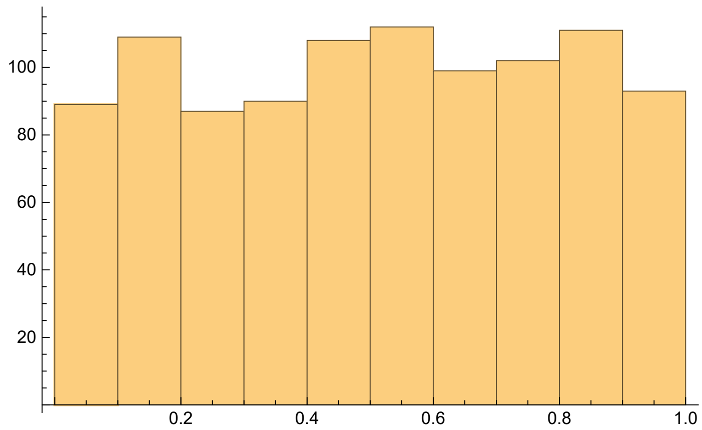
где остаток от деления на 1 возвращает дробную часть для положительного числа

```
In[∘]:= {Mod[0.3, 1], Mod[-0.3, 1]}
Out[∘]= {0.3, 0.7}
```

Для генерации последовательности псевдослучайных чисел используется начальное состояние $x_0 = 0.1$

```
In[∘]:= Histogram@
         RecurrenceTable[{x[n + 1] == Abs[Mod[100 Log[x[n]], 1]], x[0] == 0.1}, x, {n, 1, 1000}]
```

Out[∘]=



Задание 5.1 (Сравнение)

Сравните математическое ожидание (**Mean**) и дисперсию (**Variance**) для сгенерированной последовательности с аналогичными характеристиками встроенной функции **UniformDistribution**, имитирующей непрерывное равномерное распределение случайной величины на заданном отрезке.

In[∘]:=
```
? UniformDistribution
```

Out[∘]=

Symbol

UniformDistribution[{*min*, *max*}] represents a continuous uniform statistical distribution giving values between *min* and *max*.

UniformDistribution[] represents a uniform distribution giving values between 0 and 1.

UniformDistribution[{{x_{min}, x_{max}}, {y_{min}, y_{max}}, …}] represents a multivariate uniform distribution over the region {{x_{min}, x_{max}}, {y_{min}, y_{max}}, …}.

UniformDistribution[*n*] represents a multivariate uniform distribution over the standard *n* dimensional unit hypercube.

In[∘]:=
```
? RandomVariate
```

Out[∘]=

Symbol

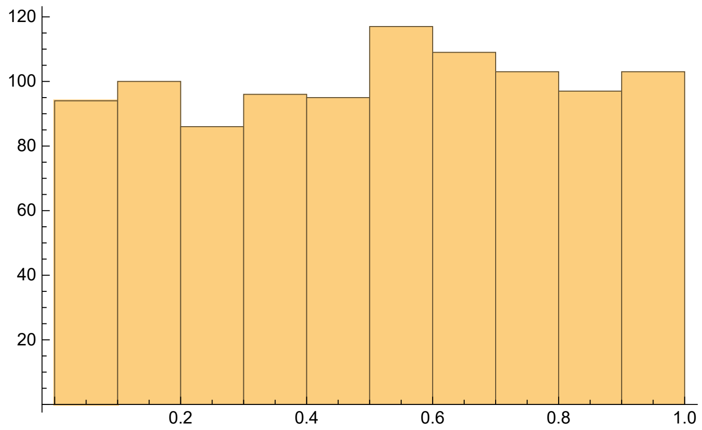
RandomVariate[*dist*] gives a pseudorandom variate from the symbolic distribution *dist*.

RandomVariate[*dist*, *n*] gives a list of *n* pseudorandom variates from the symbolic distribution *dist*.

RandomVariate[*dist*, {n_1, n_2, …}] gives an $n_1 \times n_2 \times \ldots$ array of pseudorandom variates from the symbolic distribution *dist*.

In[∘]:=
```
Histogram@ RandomVariate[UniformDistribution[{0, 1}], 1000]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
? Mean
```

Out[∘]=

Symbol

Mean[*list*] gives the statistical mean of the elements in *list*.

Mean[*dist*] gives the mean of the distribution *dist*.

In[∘]:=
```
? Variance
```

Out[∘]=

Symbol

Variance[*list*] gives the sample variance of the elements in *list*.

Variance[*dist*] gives the variance of the distribution *dist*.

Задание 5.2 (Дискретная динамическая система)

Найдите в литературе другой пример дискретной динамической системы для генерации псевдослучайных чисел, например, см. [6]. **Укажите** ссылку на источник, который Вы нашли.

Изобразите случайные числа, **вычислите** математическое ожидание и дисперсию, **сравните** с аналогичными характеристиками встроенной функции, имитирующей соответствующее распределение (например, **UniformDistribution**, **NormalDistribution, LogNormalDistribution, BetaDistribution, BinomialDistribution, NegativeBinomialDistribution, PoissonDistribution**).

In[∘]:=
```
Names["*Distribution"] // Length
```

Out[∘]= 166

Литература

[1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. -- 2011.

[2] М. Г. Юмагулов. Введение в теорию динамических систем. -- СПб.: Издательство “Лань”, 2015.

[3] S. Lynch. Dynamical Systems with Applications using Mathematica.. -- Birkhauser, 2007.

[4] J. D. Murray. Mathematical biology. I. An introduction. -- Springer, 2002.

[5] R. A. Holmgren. A first course in discrete dynamical systems. -- Springer, 1996.

[6] Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. Т.2: . -- М.: Мир, 1977.

[7] Д. Мюррей. Математическая биология. Т.1. Введение: . -- М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2009.