

# Многошаговые разностные методы.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), t > 0 \quad (1)$$

$$u(0) = u_0.$$

Введем сетку  $\omega_\tau = \{n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$  шаг сетки  $\tau$  – постоянный  $t_n = n\tau$ .

Обозначим  $y_n = y(n\tau)$  и через  $f(t_n, y_n) = f(n\tau, y(n\tau))$ .

Функции  $y_n, f(t_n, y_n)$  – функции определенные на сетке  $\omega_\tau$ .

Линейным  $m$ –шаговым разностным методом называется система разностных уравнений.

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m}}{\tau} = \\ & = b_0 f(t_n, y_n) + b_1 f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \dots + b_m f(t_{n-m}, y_{n-m}), \quad (2) \\ & n = m, m+1, \dots \end{aligned}$$

$a_k, b_k$  – числовые коэффициенты независимые от  $n$  причем  $a_0 \neq 0$ .

Уравнение (2) следует рассматривать как рекуррентное соотношение, выражающее новое значение  $y_n = y(t_n)$  через найденные ранее значения  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}$ .

Расчет начинается с номера  $n = m$  т. е. с уравнения

$$\frac{a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_m y_0}{\tau} = b_0 f(t_m, y_m) + \dots + b_m f(t_0, y_0). \quad (3)$$

Из последнего равенства следует, что для начала расчета необходимо задать  $m$  начальных значений  $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ . Значение  $y_0$  определяется исходной задачей, а именно полагают  $y_0 = u_0$ . Величины  $y_1, \dots, y_{m-1}$  можно вычислить с помощью, например, метода Рунге-Кутты или Эйлера. В дальнейшем мы будем предполагать, что начальные значения  $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$  заданы. Из уравнения (2) следует,

что в отличие от метода Рунге-Кутты, многошаговые методы допускают вычисление значений правых частей дифференциального уравнения только в точках основной сетки. Метод (2) называется явным, если  $b_0 = 0$ , и следовательно искомое значение  $y_n$  явным образом выражается через предыдущие значения  $y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$ . Когда  $b_0 \neq 0$  метод называется неявным. Тогда для нахождения  $y_n$  придется решать нелинейное уравнение

$$\frac{a_0 y_n}{\tau} - b_0 f(t_n, y_n) = F(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}),$$

где  $F(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) = \sum_{k=1}^m (b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}) - \frac{a_k y_{n-k}}{\tau})$ .

Обычно это уравнение решается методом Ньютона. Начальное приближение  $y_n^{(0)} = y_{n-1}$ .

Отметим, что коэффициент уравнения (2) определяется с точностью до множителя. Чтобы устранить это будем считать, что выполняется условие

$$\sum_{k=0}^m b_k = 1. \quad (4)$$

Это условие означает, что правая часть разностного уравнения (2) аппроксимирует правую часть дифференциального уравнения (1). В практике наибольшее применение получили методы Адамса, которые представляют собой частный случай многошаговых методов (2), когда  $u'(t)$  аппроксимируется только по двум точкам  $t_n, t_{n-1}$ , причем  $a_0 = 1, a_1 = -1, a_k = 0, k = \overline{2, m}$ .

Методы Адамса имеют вид:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}). \quad (5)$$

Если  $b_0 = 0$ , то методы Адамса называются явными, если  $b_0 \neq 0$ , то неявными.

Рассмотрим, как влияет выбор коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  на погрешность аппроксимации, и исследуем тесно связанные между собой вопросы устойчивости и сходимости метода (2).

Погрешностью аппроксимации на решении или невязкой разностного метода (2) называется функция

$$\psi_n = -\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\tau} u_{n-k} + \sum_{k=0}^n b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}). \quad (6)$$

Получающаяся в результате подстановки точного решения  $u(t)$  дифференциальной задачи (1) в разностное уравнение (2).

Выясним вопрос о порядке погрешности аппроксимации при  $\tau \rightarrow 0$  в зависимости от выбора коэффициентов  $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, m$ . Все функции обладают необходимой гладкостью. Разложим функцию  $u_{n-k} = u(t_{n-k})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_n$ .

Имеем:

$$u_{n-k} = \sum_{l=0}^p (-k\tau)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} + o(\tau^{p+1})$$

$$f(t_{n-k}, u_{n-k}) = u'(t_{n-k}) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-k\tau)^l u^{(l+1)}(t_n)}{l!} + o(\tau^p), k = 1, 2, \dots, m.$$

Подставим эти разложения в выражение (6), получим

$$\psi_n = -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} \sum_{l=0}^p (-k\tau)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} + \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=0}^{p-1} (-k\tau)^l \frac{u^{(l+1)}(t_n)}{l!} + o(\tau^p) =$$

(поменяем порядки суммирования и во второй сумме перейдем к суммированию по  $l$  от 1 до  $p$ )

$$\begin{aligned} &= -\sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} (-k\tau)^l \frac{u^{(l)}(t_n)}{l!} + \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^m b_k (-k\tau)^{l-1} \frac{u^{(l)}(t_n)}{(l-1)!} + o(\tau^p) = \\ &= -\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} u(t_n) + \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^m (-k\tau)^{l-1} (a_k \frac{k}{l} + b_k) \frac{u^{(l)}(t_n)}{(l-1)!} + o(\tau^p). \end{aligned} \quad (7)$$

Из полученного равенства следует, что погрешность аппроксимации имеет порядок  $p$  если выполнены условия:

$$\sum_{k=0}^m a_k = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{k=0}^m k^{l-1} (ka_k + lb_k) = 0, l = 1, 2, \dots, p. \quad (9)$$

Условия (8) и (9) вместе с условиями нормировки (4) образуют систему из  $p + 2$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2m + 2$  неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$ .

Упростим эту систему. Положим в (9)  $l = 1$ , получим

$$\sum_{k=0}^m ka_k + \sum_{k=0}^m b_k = 0.$$

Учитывая, что  $\sum_{k=0}^m b_k = 1$  из последнего равенства получим

$$\sum_{k=0}^m ka_k = -1 \quad (10)$$

Вместо (8) запишем

$$\sum_{k=0}^m k^{l-1} (ka_k + lb_k) = 0, l = 2, \dots, p. \quad (11)$$

Полученная система содержит  $p$  уравнений и  $2m$  неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$ . Коэффициенты  $a_0, b_0$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} b_0 &= -\sum_{k=1}^m b_k + 1, \\ a_0 &= -\sum_{k=1}^m a_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Для того, чтобы система (11), (12) не была переопределена необходимо потребовать  $p \leq 2m$ . Это требование означает, что порядок аппроксимации линейных  $m$ -шаговых разностных методов не превышает  $2m$ . Таким образом наивысший порядок аппроксимации линейных неявных  $m$ -шаговых методов равен  $2m$ , а явных методов равен  $(2m - 1)$ .

Однако оказывается, что методы наивысшего порядка аппроксимации практически не пригодны для расчетов, так как они неустойчивы.

Рассмотрим наряду с разностным уравнением (2) однородное разностное уравнение

$$a_0 v_n + a_1 v_{n-1} + \dots + a_m v_{n-m} = 0, \quad n = m, m+1, \dots \quad (13)$$

будем искать решение уравнения (13) в виде  $v_n = q^n$ , где  $q$  подлежит определению (число), получим

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (14)$$

(14)–характеристическое уравнение разностного метода (2). Говорят, что разностный метод (2) удовлетворяет условию корней, если все корни  $q_1, q_2, \dots, q_m$  характеристического уравнения (14) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости. Причем на границе нет кратных корней. Разностный метод (2), удовлетворяющий условию корней, называют устойчивым методом.

Если РМ (2) удовлетворяет условию корней и начальные погрешности  $y_j - u(t_j), 0 \leq j \leq m-1$  и погрешность аппроксимации  $\psi_k, k = \overline{0, n-m}$  являются величинами порядка  $o(\tau^p)$ , то и величина  $y_n - u(t_n)$  также имеет порядок аппроксимации  $o(\tau^p)$ . Т.е. разностный метод (2) сходится и имеет  $p$ -ый порядок аппроксимации.

Исследование сходимости метода (2) сводится к анализу погрешности аппроксимации и проверки условия корней. Отметим, что методы Адамса

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}) \quad (15)$$

всегда удовлетворяют условию корней, так как для них  $a_0 = 1, a_1 = -1, q_1 = 1$ .

Рассмотрим примеры многошаговых разностных методов. Наивысший порядок аппроксимации явных  $m$ –шаговых разностных методов Адамса:  $\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = b_1 f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \dots + b_m f(t_{n-m}, y_{n-m})$  равен  $m$ .

Решая систему (11), (12) можно найти коэффициент  $b_k$  для разностного метода (15) при каждом конкретном значении  $m$ .

При  $m = 1$ , получим метод Эйлера

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = f_{n-1},$$

при  $m = 2$ , получим метод 2-го порядка аппроксимации

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{3}{2}f_{n-1} - \frac{1}{2}f_{n-2} \text{ и т.д.}$$

Для неявных  $m$  –шаговых методов Адамса

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = b_0 f(t_n, y_n) + b_1 f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \dots + b_m f(t_{n-m}, y_{n-m}), \quad (16)$$

$$b_0 \neq 0$$

Наивысший порядок аппроксимации равен  $m + 1$ , коэффициенты метода (16) находятся из системы (11),(12), когда  $p = m + 1$ .

При  $m = 1$ , получим метод 2-го порядка аппроксимации

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}(f_n + f_{n-1}),$$

который называется методом трапеции.

При  $m = 2$ , получим метод 3-го порядка аппроксимации

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}).$$

Выписанные методы содержат искомое значение (неизвестную величину)  $y_n$  в правой части. Для её нахождения следует использовать итерационные методы решения уравнений.

Можно построить методы любого достаточно высокого порядка аппроксимации.

# Численное интегрирование жёстких систем для ОДУ

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= f(t, u), t > 0 \\ u(0) &= u_0\end{aligned}\tag{1}$$

Для решения этой задачи рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^m \frac{\alpha_k}{\tau} y_{n-k} = \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}), n = m, m+1, \dots\tag{2}$$

Устойчивость и сходимость метода (2) определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k q^{m-k} = 0\tag{3}$$

Требуется, чтобы все корни (3) удовлетворяли условию  $|q| \leq 1$ , причем среди корней, удовлетворяющих условию  $|q| = 1$ , не должно быть кратных.

Эти условия устойчивости являются очень общими и не могут учесть многих характерных свойств исходной задачи, а также РУ (2). Эти условия означают только, что все решения однородного уравнения соответствующих (2), должны быть ограничены при  $n \rightarrow \infty$ . В частности, при таком определении не учитываются коэффициенты  $b_k$ , входящие в правую часть (2).

Предположим, что заранее известна та или иная характерная особенность задачи. Тогда естественно требовать, чтобы эта особенность сохранялась и у решения РУ. Это требование приведёт к сужению класса рассматриваемых РМ.

Будем рассматривать РМ, предназначенные для расчёта асимптотически устойчивых решений (1).

Рассмотрим ДУ:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \lambda u, t > 0 \\ u(0) &= u_0, \text{ где } \lambda < 0\end{aligned}\tag{4}$$

Это уравнение имеет решение  $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ , которое монотонно убывает при  $t \rightarrow \infty$ . При малых значениях  $\tau > 0$  для решения (4) справедливо неравенство:

$$|u(t + \tau)| \leq |u(t)|\tag{5}$$

Оно означает устойчивость решения  $u(t)$ . Естественно

требовать, чтобы для решения разностной задачи, выполнялось и (5).

Рассмотрим метод (явный) Эйлера.

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} &= \lambda y_n, \\ y_{n+1} &= q y_n, \\ q &= 1 + \tau \lambda\end{aligned}\tag{6}$$

Оценка вида (5), т.е. неравенство

$$|y_{n+1}| \leq |y_n|\tag{7}$$

для метода (6) будет выполняться, если  $|q| \leq 1$ .

В случае с  $\lambda < 0$  это условие приводит к следующему ограничению на  $\tau$

$$0 < \tau \leq \frac{2}{|\lambda|}.\tag{8}$$

РМ (6) устойчив в смысле выполнения оценки (7), если шаг  $\tau$  удовлетворяет (8).

Разностный метод (2) называется абсолютно устойчивым, если он устойчив для  $\forall \tau > 0$ , и условно устойчивым, если он устойчив при некоторых ограничениях на шаг  $\tau$ .

Метод (6) устойчив при выполнении (8).

Абсолютно устойчивым при  $\lambda < 0$  является неявный метод Эйлера

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \lambda y_{n+1},\tag{9}$$

здесь  $|q| = |(1 - \lambda\tau)^{-1}| < 1$ , если  $\lambda < 0$ .

Условная устойчивость является существенным недостатком разностных методом, т.к. вынуждает брать слишком маленьким шаг  $\tau$ . Абсолютная устойчивость лишена его.

Многие из численных методом интегрирования ОДУ переносятся без изменений на систему ОДУ, однако в случае численного решения систем уравнений могут появляться дополнительные трудности, связанные с разномасштабностью процессов, описываемых ДУ.

Рассмотрим трудности, которые могут возникнуть на примере 2 ДУ с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + a_1 u_1 = 0 \\ \frac{du_2}{d\tau} + a_2 u_2 = 0 \end{cases}\tag{10}$$



Предположим, что  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 \gg a_2$ .

Система (10) имеет решение

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1(0)e^{-a_1 t} \\ u_2(t) = u_2(0)e^{-a_2 t} \end{cases}$$

Тогда компонента  $u_1(t)$  затухает гораздо быстрее, чем компонента  $u_2(t)$ , то начиная с некоторого номера  $t$  решение системы (10) почти полностью определяется  $u_2(t)$ . Однако, если при решении системы (10) использовать РМ, то шаг интегрирования определяется, как правило, компонентой  $u_1(t)$ , несущественной с точки зрения поведения системы (10).

Рассмотрим явный метод Эйлера (ЯМЭ)

$$\begin{cases} \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\tau} + a_1 u_1^n = 0 \\ \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\tau} + a_2 u_2^n = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Этот метод будет устойчив, если  $\tau_1$  и  $\tau_2$  удовлетворяют условию

$$\begin{cases} \tau a_1 \leq 2 \\ \tau a_2 \leq 2 \\ \tau \leq \frac{2}{a_1} \\ \tau \leq \frac{2}{a_2} \end{cases}$$

Т.к.  $a_1 \gg a_2$  и если для решения системы будем использовать 1 шаг, то условие для  $\tau$  будет выполняться при  $\tau \leq \frac{2}{a_1}$ .

Данный пример может показаться искусственным, т.к. каждое из уравнений можно решить со своим шагом интегрирования. Но аналогичные трудности возникают, если будем решать систему ОДУ

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (12)$$

матрица которых имеет большой разброс СЗ.

Пусть матрицу (12) можно привести преобразованием подобия к диагональному виду  $Q^{-1} A Q$ , на диагонали будут СЗ матрицы  $A$ .

Тогда замена  $u = Q v$  преобразует (12) в систему независимых переменных

$$\frac{dv}{dt} = Q^{-1} A Q V$$

матрица которой имеет те же СЗ, что и матрица  $A$ .

Сформулируем определение жёсткой системы ОДУ.

Рассмотрим (12) с постоянной  $m \times m$  матрицей  $A$ .

Система ДУ (12) называется **жёсткой**, если:

1)  $Re \lambda_k < 0, k = \overline{1, m}$

Данное требование означает, что (12) асимптотически устойчива по Ляпунову.

2)  $S = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |Re \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |Re \lambda_k|}$  - является величиной порядка  $O(10^2)$  и выше.

Если матрица  $A = A(t)$ , то СЗ  $\lambda_k = \lambda_k(t)$ . В этом случае определяют число жёсткости для каждого  $t$

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |Re \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |Re \lambda_k|}$$

и система ОДУ с матрицей  $A(t)$  называется жёсткой если:

1)  $Re \lambda_k < 0, t \in (0, T)$ .

2) Величина  $\sup_{t \in (0, T)} S(t)$  является величиной порядка  $O(10^2)$ ,

$t \in (0, T)$ .

Если рассматривается нелинейная система ОДУ, то используя разложение в ряд Тейлора, она сначала линеаризуется, а потом рассматривается матрица линейной системы и исследуются её СЗ. Определение, в этом случае, жёсткости будет аналогичным, как при  $A = A(t)$ .

Можно сделать для жёстких систем следующее заключение:

- решение жесткой системы содержит быстро и медленно убывающие составляющие;
- начиная с некоторого  $t > 0$ , решение системы почти полностью определяется медленно убывающей составляющей.

При использовании ЧМ быстро убывающая составляющая отрицательно влияет на устойчивость, что вынуждает брать маленький шаг интегрирования. Это можно исправить, применяя неявные абсолютно устойчивые РМ.

Например, для (10)

$$\begin{cases} \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\tau} + a_1 u_1^{n+1} = 0 \\ \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\tau} + a_2 u_2^{n+1} = 0 \end{cases}$$

- неявный метод Эйлера, устойчивый для  $\forall \tau > 0$ .

Поэтому  $\tau$  можно выбирать, руководствуясь условием точности, а не устойчивости.

При исследовании ЧМ для решения жестких систем рассматривают модельное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \lambda a \quad (13)$$

$\lambda$  - произвольное комплексное число

Свойства различных методов изучают на примере (12).

Для этого, чтобы (13) моделировало исходную систему (10), необходимо его рассматривать при всех таких  $\lambda$ , которые являются СЗ матрицы  $A$ .

РМ

$$\sum_{k=0}^m \frac{\alpha_k}{\tau} y_{n-k} = \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, y_{n-k}) \quad (14)$$

примененный к уравнению (13), принимает вид

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) y_{n-k} = 0 \quad (15)$$

где  $\mu = \tau \lambda$  - числовой параметр.

Если искать решение (15) в виде  $y = q^n$ , то для нахождения  $q$  получим характеристическое уравнение (ХУ)

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) q^{m-k} = 0 \quad (16)$$

которое отличается от ХУ

$$\sum_{k=0}^m a_k q^{m-k} = 0 \quad (17)$$

тем, что его коэффициенты зависят от параметра  $\mu = \tau \lambda$ .

При малых значениях  $\mu$  корни (16) и (17) будут близки друг к другу. Однако, не будем делать предположений о малости величины  $\mu$ .

Кроме обычного определения устойчивости, когда все корни ХУ (16) по модулю  $\leq 1$ , в случае жестких систем используют более узкие определения устойчивости.

$A$  - устойчивый метод и

$A(\alpha)$  - устойчивый метод

Области устойчивости РМ (14) - множество всех точек комплексной плоскости  $\mu = \tau\lambda$ , для которых данный метод, примененный к (13), является устойчивым.

Рассмотрим ЯМЭ

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n).$$

В применении к (13) он принимает вид:

$$y_{n+1} = (1 + \mu)y_n, \mu = \tau \lambda.$$

Условие устойчивости

$$|1 + \mu| \leq 1 \text{ для } \mu \in C, \mu = i\mu_1 + \mu_0$$

приведет к ограничению

$$(\mu_1)^2 + (1 + \mu_0) \leq 1.$$

Т.о. областью устойчивости (ОУ) является круг единичного радиуса с центром в т.  $(-1; 0)$ .

Для НМЭ:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

ОУ будет внешность круга единичного радиуса с центром в т.  $(1,0)$ .

РМ называется А - устойчивым, если ОУ содержит некую полуплоскость  $Re \mu < 0$ .

Отметим, что (13) абсолютно устойчиво, если  $Re \lambda < 0$ .

Поэтому сущность приведенного метода состоит в том, что А-устойчивый метод является абсолютно устойчивым, если устойчиво исходное решение.

НМЭ является устойчивым, а ЯМЭ не является.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) \quad (18)$$

- неявный РМ 2-го порядка точности.

Для (18) (13) принимает вид

$$y_{n+1} = q y_n$$
$$q = \frac{1 + \frac{1}{2}\mu}{1 - \frac{1}{2}\mu}$$

значит условие  $|q| \leq 1$  выполняется  $Re \mu \leq 0$ . Следовательно РМ (18) является А-устойчивым.

При решении жестких систем для ОДУ было бы желательно пользоваться А-устойчивыми РМ, т.е. условие их устойчивости не накладывают ограничений на шаг  $\tau$ . Однако установлено, что шаг

А-устойчивых методов весьма узок. В частности, среди методов вида (14) нет явных А-устойчивых методом. Доказано, что среди неявных многошаговых РМ нет А-устойчивых методом, имеющих порядок точности выше 2-го.

Примером РМ является (18).

Рассмотрим определение, которое менее ограничительное, чем определение А-устойчивости.

РМ называется  $A(\alpha)$ -устойчивым, если ОУ содержит угол

$$|\arg(-\mu)| \leq \alpha, \mu = \tau \lambda.$$

Метод  $A(\frac{\pi}{2})$  является А-устойчивым.

Доказано, что ни для какого  $\alpha \nexists$  явного  $A(\alpha)$ -устойчивого линейного многошагового РМ.

Построенные  $A(\alpha)$ -устойчивые неявные методы 3 и 4 порядка точности. К ним относятся чисто неявные РМ, у которых правая часть  $f(t, u)$  вычисляется только в точке  $t_n$ , а  $u'(t)$  аппроксимируется в т.  $t_n$  по некоторым предыдущим значениям.

Разностной схемой (РС) 4-го порядка точности является

$$\frac{25 y_n - 48 y_{n-1} + 36 y_{n-2} - 16 y_{n-3} + 3 y_{n-4}}{12\tau} = f(t_n, y_n)$$

которая  $A(\alpha)$ -устойчива при некотором  $\alpha$ .

В настоящее время при интегрировании жёстких систем уравнений широко используется метод Гира, в основу которого положены чисто неявные многошаговые разностные методы высокого порядка точности.

РМ

$$\sum_{k=0}^m \frac{\alpha_k}{\tau} y_{n-k} = f(t_n, y_n) \quad (19)$$

является чисто неявным РМ.

Он является частным случаем многошагового разностного метода (14), когда  $b_0 = 1, b_1 = \dots = b_m = 0$ . Для отыскания  $y_n$  из (19) рассматривается нелинейное уравнение

$$a_0 y_n - \tau f(t_n, y_n) = - \sum_{k=1}^m a_k y_{n-k} \quad (20)$$

которое решается чаще всего методом Ньютона.

Наивысший порядок аппроксимации чисто неявного  $m$ -шагового РМ равен  $m$ .

Метод Гира использует чисто неявные РС наивысшего порядка

аппроксимаций.

Система уравнений для определения коэф.  $a_1, \dots, a_m$  имеет вид

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + \dots + m a_m = -1 \\ a_1 + 2^2 a_2 + \dots + m^2 a_m = 0 \\ \dots \\ a_1 + 2^m a_2 + \dots + m^m a_m = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы (определитель Ван-дер-Монда) отличен от 0.

При  $m = 1$  метод (20) совпадает с НМЭ.

При  $m = 2$  метод имеет вид

$$\frac{3}{2} y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2} y_{n-2} = \tau f(t_n, y_n)$$

который является методом 2-го порядка точности.

При  $m = 3$  метод имеет вид

$$\frac{11}{6} y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2} y_{n-2} - \frac{1}{3} y_{n-3} = \tau f(t_n, y_n)$$

являющийся методом 3-го порядка точности.

Для практических расчётов построений и используются методы вплоть до 10-го порядка точности и выше.

Неявные РМ обладают хорошими свойствами устойчивости.

## Граничные задачи для ОДУ

Мы рассмотрели ЗК для решения ОДУ.

В таких задачах дополнительные условия, которые присоединяются к ДУ, чтобы единственным образом определить его решение, относятся к единой точке, но существует большое число задач, в которых дополнительные условия устанавливают связь между значениями функции и её производными в нескольких точках отрезка, где ищется решение. Это многоточечные задачи.

Их пример - задача о нахождении средней линии нагруженной строительной балки или задача о провисании нагруженной гибкой нити, закреплённой в 2-х точках.

Такую задачу приходится решать, например, при строительстве цепных мостов или проведении электрических линий передач.

Среди многоточечных задач простейшие и наиболее часто встречающиеся - граничные задачи, в которых разыскивается решение на некотором отрезке по условиям, дающим связь между значениями решения и его производными на концах отрезка.

Например, задача о прогибе нагруженной балки, опирающейся на опоры или задача о нахождении траектории снаряда или ракеты.

## Методы решения граничных задач

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ x &\in [a, b], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a &= x_1 < \dots < x_k = b \\ y(x_i), y'(x_i), \dots, y^{(n-1)}(x_i) \end{aligned} \quad (*)$$

Образуем по  $\forall$  правилу уравнения, связывающее эти величины.

$$Y_j \left( x, y(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1), \dots, y(x_k), \dots, y^{(n-1)}(x_k) \right) = 0 \quad (2)$$

- уравнение, связывающее (1) и (\*),  $j = \overline{1, n}$

Рассмотрим задачу: найти на  $[a, b]$  решение  $Y(x)$  уравнения (1), которое удовлетворяет поставленным условиям (2). Эта задача с условиями в  $k$  точках.

Если  $k = 1$ , тогда  $x_1 = a$  - задача Коши.

Если  $k = 2, x_1 = a, x_2 = b$  - задача называется граничной задачей.

Если  $k = m$ , то задача (1), (2) называется  $m$ -точечной

(многоточечной) граничной задачей.

Многоточечная задача является линейной, если ДУ (1) и условие (2) линейны.

Если ДУ (1) и/или граничное условие (2) нелинейны, то задача называется нелинейной.

Рассмотрим линейную 2-х точечную граничную задачу:

$$L y(x) = y''(x) + p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x), x \in [a, b] \quad (3)$$

$$l_0(y(a)) = \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0 \quad (4)$$

$$l_1(y(b)) = \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1 \quad (5)$$

В задаче (3),(4),(5)  $p, q, f$  - заданные функции,  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, y(x)$  - заданные величины.

Предполагаем, что решение задачи (3),(4),(5)  $\exists$  на  $[a, b]$  и удовлетворяет необходимым условиям гладкости.

## Методы решения граничных задач

---

### Метод вариации произвольной постоянной

Из курса ОДУ известно, что решение ДУ (3) можно представить в виде

$$y(x) = z(x) + c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) \quad (6)$$

где  $z(x)$  - решение задачи Коши

$z(x)$ :

$$z''(x) + p(x)z'(x) - q(x)z(x) = f(x), x \in [a, b], \quad (7)$$

$$z(a) = 0, z'(a) = 0$$

$z_1(x)$ :

$$z_1''(x) + p(x)z_1'(x) - q(x)z_1(x) = 0, x \in [a, b], \quad (8)$$

$$z_1(a) = 0, z_1'(a) = 1$$

$z_2(x)$ :

$$z_2''(x) + p(x)z_2'(x) - q(x)z_2(x) = 0, x \in [a, b], \quad (9)$$

$$z_2(a) = 1, z_2'(a) = 0$$

Решив задачи (7),(8),(9) и подставив в  $y(x)$  граничное условие (4),(5) получим



$$\begin{aligned}
& a_0(z(a) + c_1 z_1(a) + c_2 z_2(a)) + \\
& + \beta_0(z'(a) + c_1 z'_1(a) + c_2 z'_2(a)) = \gamma_0 \\
& a_1(z(b) + c_1 z_1(b) + c_2 z_2(b)) + \\
& + \beta_1(z'(b) + c_1 z'_1(b) + c_2 z'_2(b)) = \gamma_1
\end{aligned} \tag{10}$$

Перепишем (10) в виде

$$\begin{aligned}
c_1(a_0 z_1(a) + \beta_0 z'_1(a)) + c_2(a_0 z_2(a) + \beta_0 z'_2(a)) &= \\
&= \gamma_0 - a_0 z(a) - \beta_0 z'(a) \\
c_1(a_1 z_1(b) + \beta_1 z'_1(b)) + c_2(a_1 z_2(b) + \beta_1 z'_2(b)) &= \\
&= \gamma_1 - a_1 z(b) - \beta_1 z'(b)
\end{aligned} \tag{11}$$

Решив систему (11) и вычислив коэффициенты  $c_1, c_2$ , запишем решение задачи (3),(4),(5) в виде (6).

Описываемый алгоритм имеет недостатки:

- он применим только для решения граничных задач для линейных ДУ;
- при его реализации возможна потеря точности. Например, если  $z_1(x)$  быстро растёт при увеличении  $x$ , а  $y(x)$  - небольшая величина, то даже при небольшой погрешности при нахождении  $c_1$  можно получить большую погрешность при нахождении  $y(x)$ .

---

### Метод пристрелки

При использовании метода пристрелки граничная задача сводится к задаче Коши, т.е. задаются 2 некоторых приближения к решению, затем (по найденным значениям) уточняются найденные приближения и снова решается задача Коши.

Граничная задача сводится к решения 3-х задач Коши.

Рассмотрим задачу (3),(4),(5).

Если  $\beta_0 \neq 0$ , решается задача Коши

$$\begin{aligned}
z''(x, t) + p(x)z'(x, t) - q(x)z(x, t) &= f(x), x \in [a, b], \\
\alpha_0 z(a, t) + \beta_0 z'(a, t) &= \gamma_0 \\
z(a, t) &= t
\end{aligned} \tag{12}$$

здесь  $t$  - параметр

Если  $\beta_0 = 0$ , то решается задача Коши

$$\begin{aligned}
z''(x, t) + p(x)z'(x, t) - q(x)z(x, t) &= f(x), x \in [a, b], \\
\alpha_0 z(a, t) &= \gamma_0 \\
z(a, t) &= t
\end{aligned} \tag{13}$$

Решив задачи (12) или (13):

при  $t = t_0$  и  $t_1$  вычисляется

$$t_2 = t_1 - \frac{\varphi(t_1)(t_1 - t_0)}{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}, t_0 \neq t_1 \quad (14)$$

$$\varphi(t) = \alpha_1 z(b, t) + \beta_1 z'(b, t) - \gamma_1$$

После нахождения  $t_2$  снова решаем (12), (13).

Тогда решение задачи (3), (4), (5)  $y(x)$  вычисляется как:

$$y(x) = z(x, t_2)$$

Метод пристрелки можно использовать для нелинейных задач.

При реализации метода так же, как и в метода вариации возможна потеря точности.

Сейчас разработано много методов пристрелки, в которых используются свойства функций, задаваемых в постановке задач.

### Метод Галёркина

Метод Галёркина даёт возможность найти приближённое решение граничной задачи в виде суммы некоторых функций.

Рассмотрим применение метода Галёркина для решение задачи (3), (4), (5).

При использовании этого метода строится система функций, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) функции  $\varphi_k(x) \in C_2[a, b], k = 1, 2, \dots$
- 2) функции  $\varphi_k(x)$  образуют замкнутую на  $[a, b]$  систему, т.е.  $\nexists$  непрерывной заданной на  $[a, b]$  функции, отличной от 0 и ортогональной ко всем функциям  $\varphi_k(x)$  на  $[a, b]$
- 3) при  $\forall k$  конечном, функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$  являются независимыми на  $[a, b]$
- 4)  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет заданным условиям
$$\alpha_0 \varphi_0(a) + \beta_0 \varphi_0'(a) = \gamma_0$$
$$\alpha_1 \varphi_0(b) + \beta_1 \varphi_0'(b) = \gamma_1$$

Остальные функции удовлетворяют нулевым граничным условиям

$$\alpha_0 \varphi_k(a) + \beta_0 \varphi_k'(a) = 0$$
$$\alpha_1 \varphi_k(b) + \beta_1 \varphi_k'(b) = 0$$

- 5) функции  $\varphi_k(x)$  образуют в классе  $C_2[a, b]$  полную систему

Чаще всего в качестве функции  $\varphi_k(x)$  берут алгебраические многочлены и строят из них такие комбинации, которые будут удовлетворять заданным граничным условиям.

Решение (3), (4), (5) ищем в виде линейной комбинации

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \quad (15)$$

Коэффициенты  $a_k$  вычисляются из условия, чтобы первые  $n$  моментов величины

$R(x, a_1, \dots, a_n) = y_n''(x) + p(x)y_n'(x) - q(x)y_n(x) - f(x)$  были равны 0, т.е.

$$\int_a^b R(x, a_1, \dots, a_n) \varphi_i(x) dx = 0, i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Перепишем равенство (16) в виде:

$$\sum_{k=1}^n c_{ki} a_k - d_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$c_{ki} = \int_a^b (\varphi_k''(x) + p(x)\varphi_k'(x) - q(x)\varphi_k(x)) \varphi_i(x) dx \quad (17)$$

$$d_i = \int_a^b (f(x) - \varphi_0''(x) - p(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x)) \varphi_i(x) dx$$

Определим коэффициенты  $a_k$  из системы (17).

Решение задачи (3),(4),(5) записывают в виде (15).

Увеличение значения  $n$  может повлиять на точность приближенного решения.

### **Метод сеток решения граничных задач ОДУ**

Метод имеет следующие шаги:

- 1) на  $[a, b]$  выбирается сетка
- 2) граничная задача (3)-(5) заменяется САУ, неизвестными которой являются величины, близкие к решению граничной задачи в узлах сетки. Полученная САУ называется разностной схемой (РС).
- 3) находится решение РС и тем самым определяется решение граничной задачи.

Количество и расположение узлов сетки выбирается в зависимости от требуемой точности решаемой задачи. Сетка может быть равномерной и неравномерной.

Равномерная:

$$w_{(h)} = \begin{cases} x_{i+1} = x_i + ih, x_0 = a \\ i = \overline{0, N}, N = \left[ \frac{b-a}{h} \right] \end{cases}$$

Простейший способ построения разностной схемы - замена производных по  $x$  в узлах сетки разностными производными.

В ДУ (3) вместо  $x$  положим  $x_i$ . Тогда:

$$y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) - q(x_i)y(x_i) = f(x_i), i = \overline{1, N-1} \quad (18)$$

$$\alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 y'(x_0) = \gamma_0 \quad (19)$$

$$\alpha_1 y(x_N) + \beta_1 y'(x_N) = \gamma_1 \quad (20)$$

Определим разностные производные.

Разностной производной 1-го порядка точности для сеточной функции называются величины

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Данные величины называются, соответственно, левой и правой разностными производными.

Для аппроксимации производных первого порядка также используются разностные производные 2-го порядка точности.

$y_{\dot{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$  — аппроксимация производной со 2-м порядком  $o(h^2)$ .

$$h = \max |h_i|$$

В случае неравномерной сетки могут быть использованы следующие производные

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - 1 \text{ порядок } o(h)$$

$$y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - 1 \text{ порядок } o(h)$$

$$y_{\dot{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{2\bar{h}_i} - 2 \text{ порядок } o(h^2)$$

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

Для аппроксимации разностой производной 2-го порядка используется  $y_{\bar{x}x,i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$

Заменим в (18)  $\{y(x_i), y'(x_i), y''(x_i)\}$  на  $\{y_{x,i}, y_{\dot{x},i}, y_{\bar{x}x,i}\}$ .

Получим разностное уравнение относительно сеточной функции  $y_i$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i y_{i-1} &= t_i, \quad i = \overline{1, N-1} \\
\alpha_i &= 1 + \frac{h}{2} p(x_i) \\
b_i &= -(2 + h^2 q(x_i)) \\
c_i &= 1 - \frac{h}{2} p(x_i) \\
t_i &= h^2 f(x_i)
\end{aligned} \tag{21}$$

Для аппроксимации производных в граничных условиях (19),(20) используют следующие производные:

$$\begin{aligned}
y'(x_0) &\rightarrow y_{\bar{x},0} \\
y'(x_N) &\rightarrow y_{x,N}
\end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\left(\alpha_0 - \frac{\beta_0}{h}\right) y_0 + \frac{\beta_0}{h} y_1 &= \gamma_0; \\
-\frac{\beta_1}{h} y_{N-1} + \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{h}\right) y_N &= \gamma_N
\end{aligned}$$

Обозначим:

$$\alpha_{01} = \alpha_0 - \frac{\beta_0}{h}$$

$$\beta_{01} = \frac{\beta_0}{h}$$

$$\alpha_{11} = -\frac{\beta_1}{h}$$

$$\beta_{11} = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{h}$$

$$\gamma_{01} = \gamma_0, \gamma_{11} = \gamma_1$$

Граничные условия запишутся в виде:

$$\alpha_{01} y_0 + \beta_{01} y_1 = \gamma_{01} \tag{22}$$

$$\alpha_{11} y_{N-1} + \beta_{11} y_N = \gamma_{11} \tag{23}$$

### Метод прогонки

Метод разностной прогонки используется для решения РУ, возникающих при аппроксимации дифференциальной разностной задачи.

Рассмотрим разностную задачу:

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i y_{i-1} = t_i, i = \overline{1, N-1} \tag{24}$$

$$\alpha_{01} y_0 + \beta_{01} y_1 = \gamma_{01} \tag{25}$$

$$\alpha_{11} y_N + \beta_{11} y_{N-1} = \gamma_{11} \tag{26}$$

$\alpha_{01}, \alpha_{11}, \beta_{01}, \beta_{11}, \gamma_{01}, \gamma_{11}$  - некоторые заданные числа.

Решение задачи (24) без граничных условий (ГУ) (25) и (26) представляет собой 2-х параметрическое семейство функций.

Удовлетворяя ГУ (25) и (26) определяем 2 параметра.

Если рассмотреть РЗ (24) и (25), то решением такой задачи будет однопараметрическое семейство функций.

Этому семейству соответствует некоторое РУ 1-го порядка вида:

$$y_{i-1} = X_i y_i + Z_i \quad (27)$$

Найти решение этой задачи можно, находя  $Z_i$  и  $X_i$ , а потом последовательно находить решение  $y_i$ .

Используем, что

$$y_i = X_{i+1} y_{i+1} + Z_{i+1} \quad (28)$$

$$y_{i-1} = X_i(X_{i+1} y_{i+1} + Z_{i+1}) + Z_i \quad (29)$$

(28) и (29) подставляем в (24):

$$a_i y_{i+1} + b_i(X_{i+1} y_{i+1} + Z_{i+1}) + c_i(X_i(X_{i+1} y_{i+1} + Z_{i+1}) + Z_i) = t_i \quad (30)$$

(30) должно выполняться при  $\forall y_i$  и  $\forall i$ .

Это будет в том случае, если коэффициенты при  $y_{i+1}$  в (30), а также свободные члены будут совпадать между собой, откуда получаем:

$$\begin{cases} a_i + b_i X_{i+1} + c_i X_i X_{i+1} = 0 \\ b_i Z_{i+1} + c_i X_i Z_{i+1} + c_i Z_i = t_i \end{cases}$$

$$X_{i+1} = -\frac{a_i}{b_i + c_i X_i}$$

$$Z_{i+1} = \frac{t_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i}$$

$$i = 1, N-1 \quad (31)$$

Для нахождения начальных условий  $Z_i$  и  $X_i$  подставим (28) при  $i = 0$  в (25):

$$\alpha_{01}(X_1 y_1 + Z_1) + \beta_{01} y_1 = \gamma_{01}$$

Данное равенство также должно выполняться для  $\forall y_1$ . Это верно, если

$$\alpha_{01} X_1 + \beta_{01} = 0$$

$$\alpha_{01} Z_1 = \gamma_{01}$$

Откуда получаем, что:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}} \\ Z_1 &= \frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}} \end{aligned} \quad (32)$$

Из формул (32) и (31) последовательно вычисляются  $X_1, Z_1; X_2, Z_2; \dots; X_{N-1}, Z_{N-1}; X_N, Z_N$ .

Нахождение коэффициентов  $X_i$  и  $Z_i$  по (31), (32) называется прямой прогонкой.

Мы, как бы, все коэффициенты “перегоняем” с начала отрезка на конец.

Далее вычислим коэффициенты  $X_i, Z_i$ .

В (27) полагаем  $i = N$  и рассматриваем систему:

$$\begin{aligned} y_{N-1} &= X_N y_N + Z_N \\ \alpha_{11} y_N + \beta_{11} y_{N-1} &= \gamma_{11} \end{aligned} \quad (33)$$

из которой определяем значение  $y_N$ .

Далее, в (27) полагаем, последовательно,  $i = N, N-1, \dots, 1$  и находим значения  $y_{N-1}, y_{N-2}, \dots, y_1$ .

Нахождение решения по (27) называется обратной прогонкой.

Метод разностной прогонки осуществим при условии  $\alpha_{01} \neq 0$  и  $b_i + c_i X_i \neq 0$ .

Этот метод будет также устойчив к погрешностям округления, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} |\alpha_{01}| &\geq |\beta_{01}| \\ |b_i| &\geq |a_i| + |c_i| \\ i &= \overline{1, N} \end{aligned}$$

Если выполняются условия

$$\begin{aligned} |\beta_{11}| &\geq |\alpha_{11}| \\ |b_i| &\geq |a_i| + |c_i| \\ i &= \overline{1, N} \end{aligned}$$

то может быть предложена другая схема метода прогонки, которая называется методом левой прогонки.

Этот метод состоит в следующем:

1) вычисляются

$$\begin{aligned} X_{N-1}^{(1)} &= -\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} \\ Z_{N-1}^{(1)} &= \frac{\gamma_{11}}{\beta_{11}} \end{aligned} \quad (34)$$

2) вычисляются

$$X_{i-1}^{(1)} = -\frac{c_i}{b_i + a_i X_i^{(1)}} \quad (35)$$

$$Z_{i-1}^{(1)} = \frac{t_i - c_i Z_i^{(1)}}{b_i + c_i X_i^{(1)}}$$

3) решается система уравнений

$$y_1 = X_0^{(1)} y_0 + Z_0^{(1)} \quad (36)$$

$$\alpha_{01} y_0 + \beta_{01} y_1 = \gamma_{01}$$

из которой находится  $y_0$ .

Тогда решение РЗ определяется по правилу:

$$y_{i+1} = X_i^{(1)} y_i + Z_i^{(1)} \quad (37)$$

Если неосуществимы предложенные методы прогонки, то могут быть использован ортогональный метод прогонки, метод двухсторонней прогонки.



## Метод дифференциальной прогонки решения граничных задач для ОДУ

Пусть задано линейное ДУ 2-го порядка:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [a, b] \quad (1)$$

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0 \quad (2)$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1 \quad (3)$$

Предполагаем, что решение задачи (1),(2),(3)  $\exists$  и !, удовлетворяет необходимым условиям гладкости.

Запишем общее решение ДУ (1) в виде:

$$y(x) = Y(x) + c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) \quad (4)$$

где  $Y(x)$  частное решение (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} Y''(x) + p(x)Y'(x) + q(x)Y(x) &= f(x) \\ Y(0) &= 0 \\ Y'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$z_1(x)$  и  $z_2(x)$  линейно независимые соответствующие решения однородных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} z_1''(x) + p(x)z_1'(x) + q(x)z_1(x) = 0 \\ z_1(a) = 1 \\ z_1'(a) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} z_2''(x) + p(x)z_2'(x) + q(x)z_2(x) = 0 \\ z_2(a) = 0 \\ z_2'(a) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим  $\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0$ .

Если в (4) подставить  $x = a$ , то получим

$$\begin{aligned} y(a) &= c_1 \\ y'(a) &= c_2 \\ \alpha_0 c_1 + \beta_0 c_2 &= \gamma_0, \end{aligned}$$

откуда

$$c_2 = \frac{\gamma_0}{\beta_0} - \frac{\alpha_0 c_1}{\beta_0}, \beta \neq 0. \quad (8)$$

Подставив (8) в формулу общего решения (4), получим, что функция  $y(x)$  удовлетворяет равенству:

$$\begin{aligned} y(x) &= \psi(x) + c_1 \varphi(x), \text{ где} \\ \psi(x) &= Y(x) + \frac{\gamma_0}{\beta_0} z_2(x) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varphi(x) = z_1(x) - \frac{\alpha_0}{\beta_0} z_2(x)$$

Следует отметить, что  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  являются решениями задачи Коши:

$$\begin{aligned} L(\psi) &= f(x) \\ \psi(a) &= 0; \psi'(a) = -\frac{\gamma_0}{\beta_0} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= 0 \\ \varphi(a) &= 1; \varphi'(a) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} \end{aligned} \quad (11)$$

$$L(y(x)) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

Формула (9) определяет линейное однопараметрическое семейство функций. Его можно рассматривать как общее решение линейного ДУ 1-го порядка:

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x) \quad (12)$$

Т.о. воспользовавшись ДУ (1) и ГУ(2), мы построили ДУ 1-го порядка (12).

Чтобы получить правило для нахождения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , подставили (9) в (12).

Получили

$$\psi'(x) + c_1 \varphi'(x) + \alpha(x)(\psi(x) + c_1 \varphi(x)) = \beta(x) \quad (13)$$

Потребуем, чтобы полученные равенства выполнялись при всех  $c_1$  и всех  $x$  из рассматриваемого отрезка.

Это даёт

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \alpha(x)\varphi(x) &= 0 \\ \psi'(x) + \alpha(x)\psi(x) &= \beta(x) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \\ \beta(x) &= \psi'(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\psi(x), \quad \varphi(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Используя эти формулы, можно определить  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  в т.  $x = a$

$$\alpha(a) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}, \beta(a) = -\frac{\gamma_0}{\beta_0} \quad (15)$$

Для определения значений функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  в других точках  $[a, b]$  построим ДУ для  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ .

Для этого будем считать, что  $y(x)$  - это произвольное решение,

записанное в виде (9).

Перепишем его в виде:

$$y'(x) = \beta(x) - \alpha(x)y(x)$$

Тогда

$$y''(x) = \beta'(x) - \alpha'(x)y(x) - \alpha(x)(\beta(x) - \alpha(x)y(x))$$

Подставим эти выражения  $y'(x)$  и  $y''(x)$  в ДУ (1). Тогда получим:

$$p'(x) - \alpha'(x)y(x) - \alpha(x)(\beta(x) - \alpha(x)y(x)) + p(x)(\beta(x) - \alpha(x)y(x)) + q(x)y(x) = f(x) \quad (16)$$

Полученное равенство должно выполняться для всех  $x$  и всех решений ДУ (1).

Тогда, собирая коэф. при  $y(x)$  и свободном члене, получим уравнение для нахождения  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ :

$$\alpha'(x) + p(x)\alpha(x) - \alpha^2(x) = q(x) \quad (17)$$

$$\beta(x) - p(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta(x) = f(x) \quad (18)$$

Процесс нахождения  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  по формулам (17),(15) и (18),(15) называется прямой прогонкой.

Т.о. мы как бы перегоняем ГУ из т. а в т. б.

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  известны. Тогда искомое решение ГЗ (1),(2),(3) может быть найдено по ДУ

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$$

и начальному условия, задаваемому на правом конце отрезка в т. б.

Это значение определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} y'(b) + \alpha(b)y(b) = \beta(b) \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1 \end{cases} \quad (19)$$

Из (19) достаточно определить  $y(b)$ .

Т.о. искомое решение задачи (1),(2),(3) может быть найдено по ДУ

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$$

и по решения системы (19)  $y(b)$ .

Этот процесс называется обратной прогонкой.

Если определитель системы (19) равен 0, то краевая задача (1),(2),(3) будет иметь бесконечное множество решений или вообще не будет их иметь.

Это зависит от того, совместна или не совместна система уравнений (19)

### Теорема

Для того, что бы метод дифференциальной прогонки был

применим к граничной задаче (1),(2),(3) необходимо и достаточно, что бы:

1) решение  $\varphi(x)$  задачи Коши

$$\begin{cases} \varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) = 0 \\ \varphi(a) = 1, \varphi'(a) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0} \end{cases}$$

не обращалось в 0 ни в одной точке  $[a, b]$

2)  $\det (19) \neq 0$

## Численные решения Дифференциальных Уравнений в частных производных.

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют широкие приложения в гидродинамике, акустике, электронике, и других областях. В большинстве своём такие уравнения в явном виде не решаются, следовательно, распространение получили методы приближённых решений, в частности метод сеток.

В построении различных методов сеток в случае уравнений в частных производных зависит и от типа уравнений, и от вида граничных условий, присоединяемых к уравнениям.

Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

Пусть  $D$ -некоторая область изменения параметров контура  $\Gamma$ . Говорят, что в области  $D$  задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции  $u(x; y)$  если для любой точки из области  $D$  имеет место соотношение

$$Lu \equiv a(x; y) \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x^2} + 2b(x; y) \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial x \partial y} + c(x; y) \frac{\partial^2 u(x; y)}{\partial y^2} + 2d(x; y) \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + 2e(x; y) \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + g(x; y)u(x; y) = f(x; y) \quad (1)$$

здесь:

$a(x; y)$ ,  $b(x; y)$ ,  $c(x; y)$ ,  $d(x; y)$ ,  $e(x; y)$ ,  $g(x; y)$  - коэффициенты уравнения

$f(x; y)$  - свободный член уравнения

Эти функции считаются известными и их обычно считают определёнными в замкнутой области  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ .

Обозначим

$$\delta(x; y) = b^2(x; y) - a(x; y)c(x; y)$$

1) Уравнение  $Lu = f$  называется эллиптическим, если

$$\delta(x; y) < 0, \forall (x; y) \in D$$

2) Уравнение  $Lu = f$  называется параболическим, если

$$\delta(x; y) = 0, \forall (x; y) \in D$$

3) Уравнение  $Lu = f$  называется гиперболическим, если

$$\delta(x; y) > 0, \forall (x; y) \in D$$

Будем рассматривать частные случаи уравнения (1)

А. Уравнение эллиптического типа (уравнение Пуассона)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x; y) \quad (2)$$

В. Уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x; t), t > 0, 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

С. Уравнение гиперболического типа (уравнение колебания струны)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x; t), t > 0, 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

Граничные и начальные условия для уравнения (2):

$$\alpha) u|_{\Gamma} = \mu_1(M), M \in \Gamma - \text{условие Дирихле} \quad (2.1)$$

$$\beta) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \mu_2(M), M \in \Gamma - \text{условие Неймана} \quad (2.2)$$

$$\gamma) (\alpha(x; y)u + \beta(x; y) \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Gamma} = \mu_3(M), M \in \Gamma - \quad (2.3)$$

условие третьего рода

Задача  $A_1$ : (2), (2.1) – первая краевая задача

$A_2$ : (2), (2.2) – вторая краевая задача

$A_3$ : (2), (2.3) – третья краевая задача

Начальные условия для уравнения (3):

$$u(x; t)|_{t=0} = u_0(x), 0 \leq x \leq l \quad (3.1)$$

Задача  $B_1$ : (3), (3.1) – задача Коши для уравнения теплопроводности.

$B_2$ : (3), (3.1), (2.1) – первая смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности.

**$B_3$** : (3), (3.1), (2.2) – вторая смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности.

**$B_4$** : (3), (3.1), (2.3) – третья смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности.

Начальные условия для уравнения (4):

$$\begin{aligned} u(x; t)|_{t=0} &= v_0(x) \\ \frac{\partial u(x; t)}{\partial t}|_{t=0} &= v_1(x) \\ 0 &\leq x \leq l \end{aligned} \quad (4.1)$$

Задача  **$C_1$** : (4), (4.1) – задача Коши для уравнения колебания струны

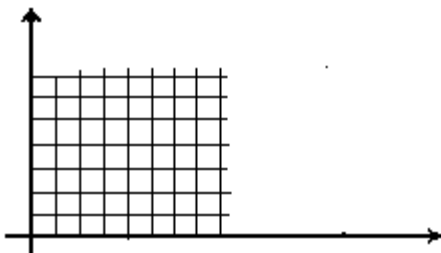
**$C_2$** : (4), (4.1), (2.1) – первая смешанная краевая задача для уравнение колебания струны

**$C_3$** : (4), (4.1), (2.2) – вторая смешанная краевая задача для уравнение колебания струны

**$C_4$** : (4), (4.1), (2.3) – третья смешанная краевая задача для уравнение колебания струны

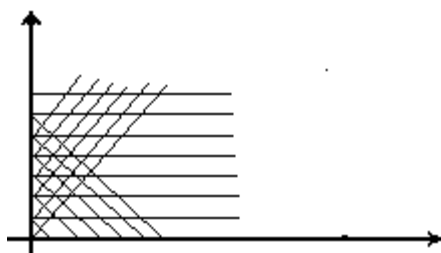
При построении приближённых методов для решения ДУ в частных производных сначала надо выбрать сетку.

1) Прямоугольная сетка с шагом  **$h_1$**  по направлению  **$x_1$**  и с шагом  **$h_2$**  по направлению  **$x_2$**



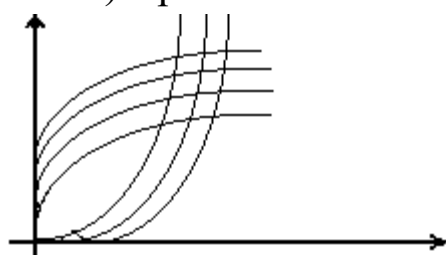
Наиболее часто используемая.

2) Треугольная сетка. В этом случае узлы сетки образуются в результате пересечения трёх групп прямых:



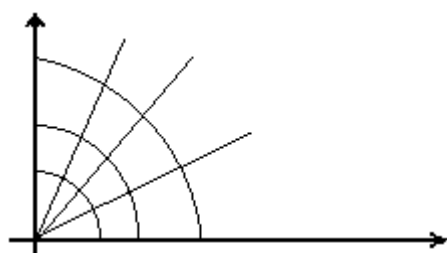
3) Шестиугольная сетка. Пересекаются те же прямые, но точки образуют шестиугольники.

4) Криволинейная сетка.



Узлы сетки - точки пересечения парабол.

5) Радиальная сетка



Узлы сетки – точки пересечения лучей и concentрических окружностей.

6) Сетка произвольной формы.

Узлы сетки – точки пересечения произвольных кривых.

Выбор сетки зависит от дифференциального уравнения, которое аппроксимируется и от свойств, которые мы хотим получить для разностной задачи.

Пусть надо найти решение ДУ

$$Lu = f \quad (5)$$

заданной в  $D$ , ограниченной  $\Gamma$ .



Для решения (5) по методу сеток в  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  выбирается множество точек  $D_h = \{M_h\}$ , число точек зависит от  $h$  (чем меньше  $h$ , тем больше точек).

$D_h$ - сетка,  $M_h$  - узлы сетки.

Функцию, определённую в узлах сетки, будем называть сеточной функцией.

Обозначим  $[u]_h$ - точное решение (5) в узлах сетки  $D_h$ .

Как правило,  $[u]_h$  точно найти не удаётся.

Поэтому ищем сеточную функцию  $u^{(h)}$  как некоторое приближение  $u^{(h)} \approx [u]_h$

Это приближение будем искать как решение задачи

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (6)$$

близкой к задаче (5).

(6) – разностная задача (схема).

Обозначим линейное нормированное пространство, образованное  $u^{(h)}$  -  $U_h$ .

$F_h$  - линейное нормированное пространство, образованное  $f^{(h)}$

Они заданы в соответствии с нормами  $\| \cdot \|_{U_h}$ ,  $\| \cdot \|_{F_h}$

### Определение

Если

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (7)$$

то разностная схема является сходящейся.

Если для всех  $h < h_0$  справедливо неравенство

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq C h^k \quad (8)$$

то имеет место сходимость относительно  $h$ .

### Для решения методом сетки

1. выбрать сетку
2. построить РС
3. исследовать сходимость РС

Исследование сходимости РС проводят в 2 этапа:

1. устанавливают аппроксимацию (5)
2. проверяют устойчивость РЗ

### Определение

Говорят, что РС (6) аппроксимируется ДЗ (5), если невязка, возникающая при подстановке точного решения в РС по норме, стремится к 0, т.е.

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)} \quad (9)$$

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

### Определение

Если при  $\forall h < h_0$

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq M_1 h^k \quad (10)$$

то говорят, что разностная схема (6) аппроксимирует (5) с порядком  $k$  относительно  $h$ .

### Определение

Невязка  $\delta f^{(h)}$  называется погрешностью аппроксимации.

Учитывая, что  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ , (9) перепишем в виде:

$$L_h([u]_h - u^{(h)}) = \delta f^{(h)} \quad (11)$$

Обозначим  $z^{(h)} = [u]_h - u^{(h)}$

### **Определение**

$z^{(h)}$  называется погрешностью разностной схемы.

Погрешность разностной схемы удовлетворяет уравнению

$$L_h z^{(h)} = \delta f^{(h)} \quad (12)$$

### **Определение**

РС (6) называется устойчивой, если  $\exists h_0$  для  $\forall h < h_0$ :

1. разностная задача (6) имеет ! решение
2. малому изменению правых частей РЗ соответствует малое изменение решения, т.е.  $\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq M_2 \|f^{(h)}\|_{F_h}$

### **Определение**

РС называется корректной, если

1. её решение  $\exists$  и !
2. РС является устойчивой

### **Теорема о связи сходимости аппроксимации и устойчивости**

Пусть ДЗ (5) поставлена корректно. РС (6) является корректной и аппроксимирует (5).

Тогда решение РЗ (6) сходится к решению (5), причём порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

### Доказательство

Рассмотрим определение аппроксимации.

Уравнение для погрешности (12) имеет ту же структуру, что и (6).

Из требования корректности получаем

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M_2 \|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \quad (13)$$

Т.к. константа  $M_2$  не зависит от  $h$  из (13) получаем, что если  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , то и  $\|z^{(h)}\|_{U_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Если  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h}$  удовлетворяет оценке (13), то тогда получаем, что

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M_1 M_2 h^k,$$

где константы  $M_1, M_2$  не зависят от  $h$ , т.е. порядок аппроксимации и сходимости совпадают.

## Построение разностных схем интегро-интерполяционным методом (ИИМ).

Задачи математической физики формулируются в виде основного дифференциального уравнения и дополнительных начальных и граничных условий, которые обеспечивают существование решения.

РС – совокупность РУ, аппроксимирующих основное уравнение и дополнительные начальные и граничные условия.

Рассмотрим интегро-интерполяционный метод или метод баланса.

Рассмотрим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) + f(x) = 0, 0 < x < l \quad (1)$$

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_1 \quad (2)$$

$$u(l) = \mu_2 \quad (3)$$

Здесь  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  - заданные функции

$k(0), \beta > 0, \mu_1, \mu_2$  - константы.

При сформулированных требованиях существует единственное решение задачи (1)-(3). Будем считать, что это решение является достаточно гладкой функцией.

Уравнение (1) можно трактовать, как уравнение установившегося распределения температур  $u(x)$  в стержне, длины  $l$ , на одном конце которого при  $x = l$  поддерживается заданная температура  $\mu_2$ , а на другом  $x = 0$  происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

$k(x)$  - коэффициент теплопроводности,

$k(x)u'(x)$  - тепловой поток,

$q(x), f(x)$  - характеризуют плотность тепловых источников.

Для построения разностной схемы введём на отрезке  $[0; l]$  равномерную сетку с шагом  $h$ , т.е.

$$w_h = \{x_i = ih; i = 0, \dots, N; Nh = l\}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}x_{i\pm\frac{1}{2}} &= x_i \pm 0,5h; \\w(x) &= k(x)u'(x); \\w_{i\pm\frac{1}{2}} &= w(x_{i\pm\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Проинтегрируем (1) на отрезке  $[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}]$ , получаем:

$$w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение баланса тепла на отрезке  $[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}]$

Заменим интеграл

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx$$

в результате из (4) получаем

$$\frac{w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}}{h} - d_i u_i + \varphi_i = 0 \quad (5)$$

$$d_i = h \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx$$

$$\varphi_i = h \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g(x)dx$$

Выразим функцию  $w_{i\pm\frac{1}{2}}$  через функцию  $u(x)$  в узлах сетки, для этого проинтегрируем соотношение  $u'(x) = \frac{w(x)}{k(x)}$  на отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$ , тогда получаем

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx \approx w_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx$$

Обозначим

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx \right)^{-1}, \text{ тогда получим:}$$

$$w_{i-\frac{1}{2}} \approx a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = a_i u_{\bar{x},i}$$

$$w_{i+\frac{1}{2}} \approx a_{i+1} u_{x,i}$$

$$u_{\bar{x},i} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$u_{x,i} \approx \frac{-u_i + u_{i+1}}{h}$$

Подставляя эти выражения в (5) получаем разностное уравнение содержащее значение исходной функции в точках  $x_i$ :

$$\frac{a_{i+1}u_{x,i} - a_i u_{\bar{x},i}}{h} - d_i u_i = \varphi_i \text{ или}$$

$$(a u_{\bar{x}})_{x,i} - d_i u_i + \varphi_i = 0 \quad (7)$$

Это уравнение по своему построению является разностным аналогом основного дифференциального уравнения (1).

Записывая уравнение (7) во всех точках сетки, где оно определено то есть  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , получим систему из  $N-1$  уравнения относительно  $N+1$  неизвестного  $u_0, u_1, \dots, u_N$ .

Два недостающих уравнения получаются из аппроксимации граничных условий. Аппроксимируя (3) получаем

$$u_N = \mu_2,$$

а второе может быть получено интегро-интерполяционным методом.

Для этого проинтегрируем уравнение (1) на отрезке  $[0; x_{\frac{1}{2}}]$ , где  $x_{\frac{1}{2}} = 0,5h$ .

Получим

$$w_{\frac{1}{2}} - w_0 - \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx + \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} f(x)dx = 0 \quad (8)$$

Воспользуемся тем, что мы получили

$$w_{i-\frac{1}{2}} \approx a_i u_{\bar{x},i}, \text{ значит } w_{\frac{1}{2}} = a_1 u_{\bar{x},1} = a_1 u_{x,0}$$

Выражение для  $w_0$  найдём из граничного условия (2), а именно:

$$w_0 = -\mu_1 + \beta u_0$$

Будем считать

$$\int_0^{x_1} q(x)u(x)dx \approx u_0 \int_0^{x_1} q(x)dx$$

Обозначим

$$d_0 = \frac{1}{0,5h} \int_0^{x_1} q(x)dx$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{0,5h} \int_0^{x_1} f(x)dx$$

Подставляя это в (8) получаем разностное уравнение

$$a_1 u_{x,0} + \mu_1 - \beta u_0 - u_0 \int_0^{x_1} q(x)dx + \int_0^{x_1} f(x)dx = 0$$

или

$$-a_1 u_{x,0} + (\beta + 0,5hd_0)u_0 = \mu_1 + 0,5h\varphi_0 \quad (9)$$

Из полученной записи следует, что полученное разностное уравнение является разностным аналогом граничного условия

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_1$$

В дальнейшем решение разностной задачи в отличии от решения дифференциальной задачи будем обозначать через  $y$ , то есть

$$y_i = y(x_i), \quad x_i \in w_h$$

Тогда для аппроксимации дифференциальной задачи (1), (2), (3) мы получили разностную задачу:

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i + \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$-a_1 y_{x,0} + (\beta + 0,5hd_0)y_0 = \mu_1 + 0,5h\varphi_0 \quad (10)$$

$$y_N = \mu_2$$

При анализе РС (10) надо ответить на вопросы:

- 1) Существует ли решение систем алгебраических уравнений (10) и, если существует, то единственно ли.
- 2) Каким методом можно находить это решение.
- 3) Если  $h \rightarrow 0$ , переходит ли РС (10) в ДЗ (1).
- 4) Сходится ли решение  $y(x)$  РС (10) к решению  $u(x)$  дифференциальной задачи.



5) Устойчиво ли полученное решение.

# Построение разностных схем (РС) с заменой дифференциального оператора на разностный

Пусть в области  $D$ , ограниченной контуром  $\Gamma$  задано ДУ:

$$L(u) \equiv a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ 2d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + 2e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

Будем считать, что к (1) присоединены граничные условия одного из 3-х типов, приведенных ранее.

Рассмотрим прямоугольную сетку  $Dh$ , заменяющую  $D$ .

Будем в ней точку  $(x_i, y_j)$  называть внутренней, если 4 соседние точки  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j+1})$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  принадлежат замкнутой области  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ .

Заменяет каждую производную, входящую в (1), разностной производной в точке  $(x_i, y_j)$  по правилу:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} + o(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{h} + o(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} + o(h^2)$$

Для вторых производных можно использовать замену  
 $h$  - шаг по  $x$ ,  $l$  - шаг по  $y$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + o(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{l^2} + o(l^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_i, y_j) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_i, y_{j+1}) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_i, y_{j-1})}{2l} + o(l^2) =$$

$$= \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j-1}))}{4hl} +$$

$$+ o(l^2 + h^2)$$

В предположении, что  $\frac{h}{l} = const$ .

Приведенный выражения для замены производных не

являются единственными.

Привлекая дополнительные значения и в узлах сетки, можно получить ряд других замен, которые могут быть точнее.

Перейдем к задаче:

заменить (1) в точке  $(x_i, y_j)$  сеточным уравнением.

Рассмотрим случай, когда  $b(x, y) \equiv 0$ .

Он принципиально не отличается от  $b(x, y) \neq 0$ .

Тогда, используя предложенные разностные замены, можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} [L u](x_i, y_j) &= \\ &= a_{ij} \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + c_{ij} \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} + \\ &+ 2d_{ij} \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + 2e_{ij} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} + g_{ij} u_{ij} + o(h^2 + l^2) = \\ &= f_{ij} \end{aligned}$$

Собрав в этой выражении члены при одинаковых сеточных значениях функции, будем иметь формулу:

$$[L u](x_i, y_j) = L_h(u(x_i, y_j)) + o(h^2 + l^2) = f_{ij},$$

$$\begin{aligned} \text{где } L_h(u(x_i, y_j)) &= A_{ij}u(x_{i+1}, y_j) + B_{ij}u(x_i, y_{j+1}) + \\ &+ D_{ij}u(x_{i-1}, y_j) + E_{ij}u(x_i, y_{j-1}) + G_{ij}u(x_i, y_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{d_{ij}}{h} \\ B_{ij} &= \frac{c_{ij}}{l^2} + \frac{e_{ij}}{l} \\ D_{ij} &= \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{d_{ij}}{h} \\ E_{ij} &= \frac{c_{ij}}{l^2} + \frac{e_{ij}}{l} \\ G_{ij} &= -\frac{2a_{ij}}{h^2} - \frac{2c_{ij}}{l^2} + g_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

Если решение уравнения (1) имеет в  $D$  непрерывные производные до 4-го порядка включительно, то величиной  $o(h^2 + l^2)$  можно пренебречь при малых  $h$  и  $l$ .

Тогда сеточное уравнение, аппроксимирующее (1), имеет вид:

$$L_h(u_{ij}) = f_{ij} \tag{3}$$

где под  $u_{ij}$  понимаются приближённые значения  $u(x, y)$  в точке  $(x_i, y_j)$ .

Переход к этим значениям вызван тем, что в (2) отображён сеточный член  $o(h^2 + l^2)$ .

Этот член имеет смысл погрешности, с которой сеточный оператор  $L_h(u_{ij})$  заменяет дифференциальный оператор  $L(u)$  в точке  $(x_i, y_j)$ .

Для замены дифференциального оператора сеточным в данном случае привлекалась схема точек, имеющая название “крест”.

Сеточное уравнение (3) имеет место во всех внутренних точках области  $D$ .

# Способы замены граничных условий сеточными

Рассмотрим ДУ

$$L(u) = f \quad (1)$$

и будем считать, что в  $D$  оно эллиптическое.

Пусть для этого уравнения в области  $D$  ставится задача Дирихле, т.е. нужно найти функцию  $u(x, y)$ , которая в  $D$  удовлетворяет (1), а на контуре  $\Gamma$  - граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(M), \quad M \in \Gamma \quad (2)$$

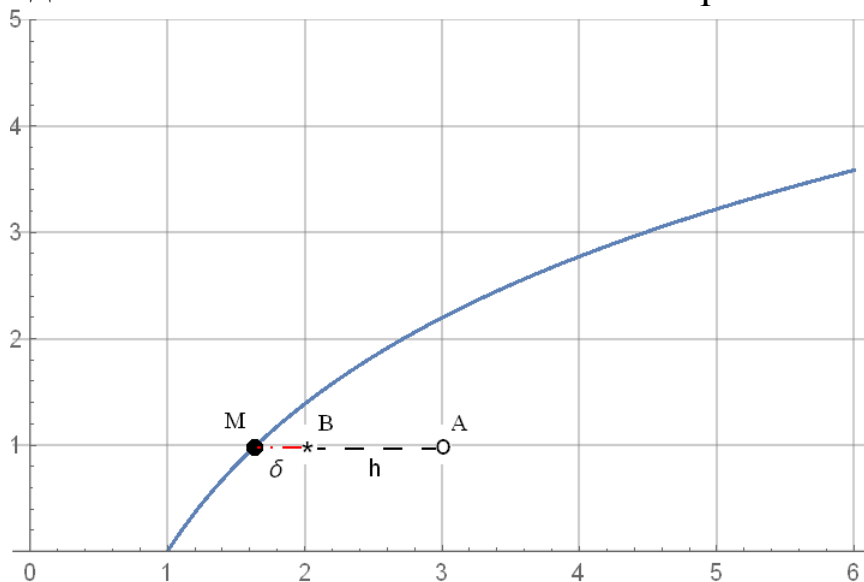
$\varphi$  - известная функция

Будем считать, что выбрали прямоугольную сетку и построили сеточную область  $D_n$ , заменяющую  $D$ . Также выбрали множество внутренних узлов  $D_n^0$  и множество граничных узлов  $\Gamma^*$ .

Задача:

заменить граничные условия (2) некоторыми сеточными уравнениями.

Здесь большое значение имеет геометрическая картинка.



Каждый узел, для которого 4 соседних узла принадлежат области  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ , отнесём к внутренним узлам и обозначим “о”.

Другие узлы, принадлежащие  $\bar{D}$  и не являющиеся внутренними, отнесём к граничным и обозначим “\*”.

М - точка, лежащая на границе Г.

В - граничная.

А - внутренняя.

Надо установить, как следует взять сеточные значения в точке В.

Иногда эту точку не представляется возможным установить. Тогда  $u(B) \approx \varphi(M)$ .

Этот способ замены граничных условий (ГУ) сеточными уравнением получил название “простого сноса” граничных условий в ближайшую точку сетки.

Расстояния:

от М до В =  $\delta$

от А до В =  $h$ .

Т.к.  $dist(A, B) = h$ , то упомянутая замена выполняется с погрешностью  $O(h)$ . Это устанавливается с помощью ряда Тейлора.

При таком способе замены никак не используется значение сеточной функции в других точках, например, в точке А.

Привлечение дополнительных условий должно позволить увеличить точность такой замены.

Рассмотрим метод линейного интерполирования (МЛИ).

Для вычисления  $u$  в точке В используем значение в точке М,

$$M(x, y), A(x + \gamma, y), \gamma = \delta + h$$

Используя разложение в ряд Тейлора,

$$u(B) = u(M) + \frac{\delta}{1!} u'_x(M) + \frac{\delta^2}{2!} u''_{xx}(M) + \dots$$
$$u(A) = u(M) + \frac{\gamma}{1!} u'_x(M) + \frac{\gamma^2}{2!} u''_{xx}(M) + \dots$$

Первое умножим на  $\gamma$ , второе на  $-\delta$  и сложим

$$\gamma u(B) - \delta u(A) = \overbrace{(\gamma - \delta)}^h \overbrace{u(M)}^{\varphi(M)} + o(h^2)$$
$$u(B) = \frac{\delta u(A) + h u(M)}{\delta + h} + o(h^2)$$

Если  $h$  достаточно мало, то остаточным членом можно пренебречь.

Получим разностную формулу для аппроксимации во внутренней точке сетки.

Последнее выражение - формула Колатца.

# Разностные схемы для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности.

В области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T$  нужно найти решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0; t) &= \mu_1(t) \\ u(1; t) &= \mu_2(t) \\ 0 &\leq t \leq T \end{aligned} \quad (3)$$

Функции  $u_0(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $f(x; t)$  - считаются заданными.

Будем считать, что решение задачи (1)-(3) – существует и единственное.

В дальнейшем мы будем предполагать, что решение  $u(x; t)$  обладает необходимыми по ходу изложения числом производных по  $x$  и по  $t$ .

Для построения разностной схемы нужно ввести сетку в области изменения независимых переменных и задать шаблон, то есть множество точек, участвующих в аппроксимации дифференциального выражения.

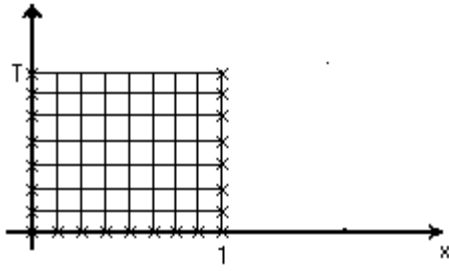
Введём сетку по  $x$  с шагом  $h$

$$w_h = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; Nh = 1\}$$

и сетку по переменной  $t$  с шагом  $\tau$

$$w_\tau = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, K; K\tau = T\}$$

Точки с координатами  $(x_i; t_n)$ ;  $i = 0, 1, \dots, N$ ;  $n = 0, 1, \dots, K$  образуют пространственно временную сетку  $w_{h,\tau} = w_h \times w_\tau$



Узлы  $(x_i, t_n)$  принадлежащие отрезкам

$$I_0 = \{0 \leq x \leq 1; t = 0\}$$

$$I_1 = \{x = 0; 0 \leq t \leq T\}$$

$$I_2 = \{x = 1; 0 \leq t \leq T\},$$

которые обозначили (x) на рисунке, назовём граничными узлами сетки  $w_{h,\tau}$ , остальные узлы назовём внутренними.

Слоем назовём множество всех узлов сетки имеющих одну и ту же временную координату, так  $n$ -ным слоем назовём множество точек

$$(x_0, t_n), (x_1, t_n), \dots, (x_N, t_n)$$

Для функции  $y(x; t)$ , определённой в узлах сетки введём обозначения:

$$y_i^n = y(x_i, t_n)$$

$$y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}$$

$$y_{\bar{t},i}^n = \frac{y_i^n - y_i^{n-1}}{\tau}$$

$$y_{t^0,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau}$$

Это правая, левая и центральная разностные производные, аппроксимирующие  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  с 1, 1 и 2 порядком по  $\tau$ .

Для замены второй производной  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}$  в точке  $(x_i, t_n)$  используется вторая разностная производная

$y_{\bar{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$  аппроксимирующая  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}$  в точке  $(x_i, t_n)$  и 2-м порядком по  $h$ .

## 1. Явный 4-х точечный шаблон



$$\begin{array}{c}
 (x_i, t_{n+1}) \\
 | \\
 \hline
 (x_{i-1}, t_n) \quad (x_i, t_n) \quad (x_{i+1}, t_n)
 \end{array}$$

## 2. Чисто неявный 4-х точечный шаблон

$$\begin{array}{c}
 (x_{i-1}, t_{n+1}) \quad (x_i, t_{n+1}) \quad (x_{i+1}, t_{n+1}) \\
 \hline
 | \\
 (x_i, t_n)
 \end{array}$$

## 3. Симметрический 6-точечный шаблон

$$\begin{array}{c}
 (x_{i-1}, t_{n+1}) \quad (x_i, t_{n+1}) \quad (x_{i+1}, t_{n+1}) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \\
 (x_{i-1}, t_n) \quad (x_i, t_n) \quad (x_{i+1}, t_n)
 \end{array}$$

## 3. Трёхслойный пятиточечный шаблон типа «крест»

$$\begin{array}{c}
 (x_i, t_{n+1}) \\
 | \\
 \hline
 (x_{i-1}, t_n) \quad (x_i, t_n) \quad (x_{i+1}, t_n) \\
 | \\
 (x_i, t_{n-1})
 \end{array}$$

Рассмотрим 1-й шаблон:

Для построения разностной схемы используется шаблон

$$(x_{i+1}, t_n), (x_{i-1}, t_n), (x_i, t_n), (x_i, t_{n+1})$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$  в точке  $(x_i, t_n)$  заменяем разностным отношением  $y_{t,i}^n$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в точке  $(x_i, t_n)$  заменяем разностным отношением  $y_{xx,i}^n$

Правую часть  $f(x, t)$  заменяем на  $f(x_i; t_n)$ ,  $\frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x; t_n) dx$ ,

$$\frac{1}{h\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x; t_n) dx dt$$

В результате такой замены получим РС.

РС – совокупность разностных уравнений аппроксимирующих основное ДУ во всех внутренних узлах сетки и допускающее начальные и граничные условия в граничных узлах сетки.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \varphi_i^n \quad (4)$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

$$n = \overline{0, K-1}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i); \quad i = \overline{0, N} \quad (5)$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n); \quad y_N^n = \mu_2(t_n); \quad n = \overline{0, K} \quad (6)$$

РЗ (4)-(6) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных равных количеству уравнений. Решение на нулевом слое задано (5).

В постановке задачи начальные и граничные условия согласованы

$$y_0^0 = \mu_1(t_0) = u_0(x_0)$$

$$y_N^0 = \mu_2(t_0) = u_0(x_N)$$

Если решение на  $n$ -ном слое известно  $y_i^n$ , то решение на  $(n+1)$  слое находится по явной формуле

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \tau(y_{xx,i}^n + \varphi_i^n); \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

Условия на границе:

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$$

$$y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$$

Т.е. вычисления производятся по конкретным формулам, то схема называется явной.

Погрешность разностной задачи (5) определяется как разность  $z_i^n = y_i^n - u(x_i; t_n)$  между приближенным и точным решениями.

Подставим  $y_i^n = z_i^n + u(x_i; t_n)$  в разностную систему (5). Для погрешности  $z_i^n$  получаем уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} &= \frac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n}{h^2} + \psi_i^n; \\ i &= \overline{1, N-1} \\ n &= \overline{0, K-1} \\ z_0^n &= z_N^n = 0; \quad n = \overline{0, K} \\ z_i^0 &= 0; \quad i = \overline{0, N}\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь  $\psi_i^n = u_{t,i}^n + u_{xx,i}^n + \varphi_i^n$

$\psi_i^n$  - погрешность аппроксимации РС (4)-(6) на решение задачи (1)-(3)

$$\psi_i^n = o(\tau + h^2)$$

Покажем, что явную разностную схему можно применять в случае если  $\tau \leq 0,5h^2$ , то есть шаг по времени оказывается достаточно малым.

Часто используют метод гармоник. Он заключается в том, что рассматривается однородное разностное уравнение, соответствующее уравнению (5)

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n}{h^2} \quad (9)$$

При этом решение разностного уравнения (9) ищется в виде

$$y_j^n(\varphi) = q^n e^{ijh\varphi} \quad (10)$$

Здесь  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

$\varphi$  - произвольное любое действительное число

$q$  - число подлежащее определению

Подставляя (10) в (9) и сокращая на  $q^n e^{ijh\varphi}$ , получим

$$\frac{q - 1}{\tau} = \frac{e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi}}{h^2}$$

откуда получаем

$$q = 1 - 4\gamma \sin^2\left(\frac{\varphi h}{2}\right), \text{ где } \gamma = \frac{\tau}{h^2} \quad (11)$$

Обозначим через начальное условие  $y_j^0(\varphi) = e^{ijh\varphi}$  при  $n = 0$ .

Эти условия ограничены.

Если для некоторого числа  $\varphi$  множитель  $|q|$  станет больше единицы, то решения вида (10) будут неограниченно возрастать при  $n \rightarrow \infty$ , то в этом случае разностное уравнение (9) называется

неустойчивым, так как нарушается непрерывная зависимость его решения от начальных условий.

Если  $|q| \leq 1$ , то разностное уравнение (9) называется устойчивым. В случае неустойчивости найти решение задачи (5) по формуле (7) почти невозможно, так как погрешность округления внесённых в начальный момент времени будут неограниченно возрастать.

Для (9) неравенство  $|q| \leq 1$  согласно (11) будет выполняться, если  $\gamma \leq 0.5$ .

Т.о. использование РС (4)-(6) возможно при выполнении условия  $\tau \leq 0.5 h^2$ .

### Определение

РС, устойчивые лишь при некоторых ограничениях по пространству шагов, называются условно устойчивыми.

РС, устойчивые при  $\forall \tau$  и  $h$ , абсолютно устойчивые.

Чисто неявные РС – абсолютно устойчивые РС.  
Чисто неявная РС для уравнения теплопроводности 0 РС,  
использующая шаблон 2.

Тогда уравнения, аппроксимирующие (1) имеют вид:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_i^n, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N-1} \\ n = \overline{1, K-1} \end{matrix} \quad (12)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}$$

$$\begin{matrix} y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}) \\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}) \end{matrix} \quad n = \overline{0, K-1}$$

Здесь  $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+1}) + o(\tau + h^2)$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по  $\tau$  и 2-й по  $h$ .

Решение РС (12) находится по слоям, начиная от 1-го слоя. Но, в отличие от явной РС, где решение выписывается явным образом, в данном случае на каждом слое составляется система уравнений с числом неизвестных равным числу уравнений.

$y_i^n$  - решение на  $n$ -ом слое. Тогда:

$$\gamma y_{i+1}^{n+1} - (1 + 2\gamma)y_i^{n+1} + \gamma y_{i-1}^{n+1} = -F_i^n, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N-1} \\ n = \overline{1, K-1} \end{matrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y_0^{n+1} &= \mu_1(t_{n+1}) \\ y_N^{n+1} &= \mu_2(t_{n+1}) \end{aligned} \quad n = \overline{0, K-1}$$

$$F_i^n = y_i^n + \tau \varphi_i^n$$

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

Для исследования устойчивости будем искать частные решения однородного уравнения

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \quad \begin{matrix} j = \overline{1, N-1} \\ n = \overline{1, K-1} \end{matrix} \quad (14)$$

$$y_j^n(\varphi) = q^n e^{i\varphi j h} \quad (i - \text{мнимая единица}) \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и сокращая на  $q^n e^{i\varphi j h}$ , для нахождения  $q$  получаем:

$$q = (1 + 4\gamma \sin^2(\frac{\varphi h}{2}))^{-1}$$

$|q| \leq 1$  выполняется для всех  $\varphi, \tau$  и  $h$ . Т.о. РС (12) является абсолютно устойчивой. Абсолютная устойчивость – достаточно большое преимущество неявных систем. Тогда шаги  $\tau$  и  $h$  определяются точностью расчёта, а не соображением устойчивости.

Рассмотрим 6-точечную схему – РС, использующую 3 шаблон, имеющую вид

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} (y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + y_{\bar{x}x,i}^n) + \varphi_i^n, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N-1} \\ n = \overline{0, K-1} \end{matrix} \quad (16)$$

Начальные и граничные условия определяются как в РС (12).

Эта схема имеет 2-й порядок аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ , если

$$\varphi_i^n = f(x_i, t_n + 0.5 \tau) + o(\tau^2 + h^2)$$

Эта схема также абсолютно устойчива.

Обобщением 3-х рассматриваемых схем является однопараметрическое семейство схем с весами. Зададим произвольный действительный параметр  $\delta$  и используем РЗ.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \delta y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1 - \delta) y_{\bar{x}x,i}^n + \varphi_i^n \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N-1} \\ n = \overline{1, K-1} \end{matrix} \quad (17)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}$$

$$\begin{aligned} y_0^{n+1} &= \mu_1(t_{n+1}) \\ y_N^{n+1} &= \mu_2(t_{n+1}) \end{aligned} \quad n = \overline{0, K-1} \quad (18)$$

При  $\delta = 0$  – явная РС,

$\delta = 1$  – чисто неявная схема,

$\delta = 0.5$  – симметрическая схема.

Установлено, что если

$$\delta = \delta_x = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$$

$$\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+0.5}) + \frac{h^2}{12} f''(x_i, t_{n+0.5}) + o(\tau^2 + h^4)$$

то схема с весами (16) имеет 1-й порядок аппроксимации по  $\tau$  и 4-й по  $h$ . Такие схемы называются схемами повышенного порядка аппроксимации.

## РС для уравнения колебания струны

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$
$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} u(0; t) &= \mu_1(t), \\ u(1; t) &= \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} u(x; 0) &= u_0(x), \\ \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} &= \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Область такая же, как в предыдущем параграфе.

Рассматриваем сетку  $w_{\tau, h} = w_{\tau} \times w_h$ , где

$$\begin{aligned} w_h &= \{x_i = ih: i = \overline{0, N}\} \\ w_{\tau} &= \{t_n = n\tau: n = \overline{0, K}\} \end{aligned}$$

и предполагаем, что решение (1)-(3) существует, единственно и обладает достаточно гладкими производными порядка, требуемого по ходу изложения.

Очевидно, что наилучшим шаблоном, на котором может быть аппроксимировано ДУ (1)-(3) является 5-и точечный шаблон типа «крест»

$$\begin{array}{c} (x_i, t_{n+1}) \\ | \\ (x_{i-1}, t_n) (x_i, t_n) (x_{i+1}, t_n) \\ | \\ (x_i, t_{n-1}) \end{array}$$

В этом шаблоне используются три слоя, такие схемы называются трёхслойными. Их использование предполагает, что для нахождения решения на  $(n+1)$  слое решения в памяти машины должны сохраняться решения на  $(n-1)$  и  $(n)$  слоях.

Очевидно, что простейшей разностной схемой, аппроксимирующей дифференциальное уравнение (1) и начальное условие (2) является следующая система уравнений:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N-1} \\ n = \overline{1, K-1} \end{matrix} \quad (4)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}); \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = \overline{0, K-1} \quad (5)$$

РУ (4) имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ .

Решение на  $n+1$  слое выражается явным образом через решения на 2-х предыдущих слоях:

$$\begin{aligned} y_i^{n+1} &= 2y_i^n - y_i^{n-1} + \gamma(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) \\ \gamma &= \frac{\tau^2}{h^2} \\ i &= \overline{0, N-1}; \quad n = \overline{0, K-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Для начала счёта по формуле (6) должны быть заданы  $y_i^0$  и  $y_i^1$ ;  $i = \overline{0, N}$ . Из первого начального условия (3) найдём

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N} \quad (7)$$

Простейшая замена второго начального условия (3) уравнения

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \bar{u}_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}$$

имеет первый порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Поскольку основное ДУ имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ , желательно, чтобы начальное условие имело так же второй порядок аппроксимации по  $\tau$ . Для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора:

$$\frac{u(x; \tau) - u(x; 0)}{\tau} = \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x; 0)}{\partial t^2} + o(\tau^2) \quad (8)$$

Т.к.  $\frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$  и используя (1)

$$\frac{\partial^2 u(x; 0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x; 0)}{\partial x^2} = u_0''(x),$$

то из (8) получим РУ

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \bar{u}_0(x_i) + \frac{\tau}{2} u_0''(x_i) \quad (9)$$

которое аппроксимирует второе начальное условие (3) со вторым порядком аппроксимации по  $\tau$ . Совокупность РУ (4)(5)(7)(9) аппроксимирует дифф. задачу (1)-(3) со 2-м порядком по  $\tau$  и  $h$ .

Для исследования устойчивости будем искать решение однородного разностного уравнения (4) в виде  $y_j^n = q^n e^{ijh\varphi}$  ( $i$  – мнимая единица). Подставляя его в (4)

$$q^2 - 2(1 - 2\gamma \sin^2(\frac{\varphi h}{2}))q + 1 = 0; \quad \gamma = \frac{\tau^2}{h^2} \quad (10)$$

Будем считать, что РС (4)(5)(7)(9) является устойчивой, если оба корня уравнения (10) по модулю меньше единицы.



Если  $q_1$  и  $q_2$  – действительные и различные корни, то так как  $q_1 q_2 = 1$ , значит один из них больше 1 по модулю.

Таким образом разностная схема устойчива, если при выполняется соотношение:

$$|q_1| = |q_2|$$
$$(1 - 2\gamma \sin^2(\frac{\varphi h}{2}))^2 \leq 1$$

т.е.  $\tau \leq h$ .

# Принцип максимума

Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве задано конечное множество точек, сетка  $\Omega$ .

Каждой точке  $x \in \Omega$  поставим в соответствие одно и то же множество точек  $\Pi(x)$ , которое назовем шаблоном – это любое подмножество из  $\Omega$ , содержащее точку  $x$ .

Окрестностью точки  $x$  назовем множество  $\Pi'(x) = \Pi(x) \setminus \{x\}$ ,  $\Pi'(x)$  может быть и пустым.

Пусть заданы функции  $A(x), B(x, \xi), F(x)$ , определенные для  $x \in \Omega, \xi \in \Omega$  принимающие вещественные значения.

Каждой точке  $x \in \Omega$  соотносится одно и только одно уравнение

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), x \in \Omega \quad (1)$$

$y(x)$  – искомая функция,  $A(x), B(x, \xi), F(x)$  – заданные функции.

(1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных.

Введем понятие связанности сетки. Сетку  $\Omega$  называют связанной сеткой, если для  $\forall x_0, x'_0$  – узлов существует множество узлов  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega$  таких, что  $x_1 \in \Pi'(x_0), x_2 \in \Pi'(x_1), \dots, x'_0 \in \Pi'(x_m)$  т.е. каждый последующий узел принадлежит окрестности предыдущего узла.

Наглядный смысл требования связанности состоит в том, что от любого узла  $x_0 \in \Omega$  можно перейти к другому узлу  $x'_0 \in \Omega$  пользуясь только заданным шаблоном.

Определим сеточный оператор  $L$ :

$$Ly(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)y(\xi), x \in \Omega \quad (2)$$

Обозначим

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi), \quad (3)$$

тогда задачу (1) можно записать в виде:

$$Ly(x) = F(x), x \in \Omega \quad (4)$$

Сеточный оператор (1) можно представить в виде

$$Ly(x) = D(x)y(x) + \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)(y(x) - y(\xi))$$

Будем говорить, что в точке  $x \in \Omega$  выполнено условие положительности коэффициентов, если

$$A(x) > 0, B(x, \xi) > 0 \text{ для всех } \xi \in \Pi'(x) \text{ и } D(x) \geq 0 \quad (5)$$

Наряду с сеткой  $\Omega$  будем рассматривать какое-либо ее подмножество и обозначим  $\bar{\omega} = \bigcup_{x \in \omega} \Pi(x)$ .

### Теорема 1. (Принцип максимума)

Пусть сетка  $\Omega$  и любое ее подмножество  $\omega$  являются связанными, причем  $\bar{\omega} \subseteq \Omega$ . Пусть в  $\omega$  выполнено условие положительности коэффициентов (5), тогда если функция  $y(x)$ , заданная на  $\Omega$  не является постоянной на  $\bar{\omega}$  и

$$Ly(x) \leq 0 \text{ (} Ly(x) \geq 0 \text{)}, x \in \omega \quad (6)$$

то  $y(x)$  не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на  $\omega$  среди всех ее значений на  $\bar{\omega}$ .

### Следствие 1.

Если при всех  $x \in \Omega$ :

1) выполнены условия положительности коэффициентов (5);

2)  $Ly(x) \leq 0$  ( $Ly(x) \geq 0$ ) и найдется хотя бы один узел  $x_0 \in \Omega$  в котором

$$D(x_0) > 0 \quad (7)$$

то  $y(x) \leq 0$  ( $y(x) \geq 0$ ),  $\forall x \in \Omega$ .

Точку  $x \in \Omega$  назовем граничной точкой, если  $\Pi'(x)$  - пустое множество. Если сетка  $\Omega$  содержит хотя бы одну граничную точку  $x_0$ , то в этой точке

$$D(x_0) = A(x_0) - \sum_{\xi \in \Pi'(x_0)} B(x_0, \xi) = A(x_0) > 0.$$

В этом случае если сетка содержит граничную точку, то можно применить **Следствие 1**.

### **Следствие 2.**

Пусть коэффициенты оператора  $L$  удовлетворяют условиям положительности коэффициентов (5)  $x \in \Omega$ , и найдется  $x_0 \in \Omega$ , что выполняется (7)

Тогда задача (1) имеет единственное решение.

Наряду с задачей (4):  $Ly(x) = F(x)$ ,  $x \in \Omega$  рассмотрим задачу

$$LY(x) = \bar{F}(x), x \in \Omega \quad (8)$$

которая отличается от задачи (4) только правой частью.

### **Теорема 2. (Теорема сравнения)**

Пусть при  $\forall x \in \Omega$  выполнены условия положительности коэффициентов (5) и выполнено условие (7), тогда если  $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$ ,  $x \in \Omega$ , то

$$|y(x)| \leq Y(x), x \in \Omega. \quad (9)$$

### **Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (1).**

Пусть  $\gamma$  - множество граничных точек сетки  $\Omega$ , т.е. такие точки  $x \in \Omega$ , для которых  $\Pi'(x)$  - пустое множество.

Множество точек сетки  $\Omega$  не являющихся граничными назовем множеством внутренних точек и обозначим  $\omega \Rightarrow \Omega = \omega \cup \gamma$ .

В граничном узле  $x \in \gamma$  уравнение (1) принимает вид

$$A(x)y(x) = F(x) \quad (10)$$

или же

$$y(x) = \mu(x) \quad (11)$$

где  $\mu(x) = \frac{F(x)}{A(x)}$  - заданная функция,  $A(x) \neq 0$ .

Первая краевая задача (ПКЗ) состоит в том, чтобы найти сеточную функцию  $y(x)$ , удовлетворяющую уравнению (1) или (4) при  $x \in \omega$  и условию (11) при  $x \in \gamma$ .

При выполнении условий **Теоремы 1** ПКЗ имеет единственное решение.

Переформулируем **Теорему сравнения** на случай ПКЗ.

Рассмотрим две задачи:

$$Ly(x) = F(x), \quad x \in \omega, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma \quad (12)$$

$$LY(x) = \bar{F}(x), \quad x \in \omega, \quad Y(x) = \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma \quad (13)$$

Если при  $x \in \omega$  выполнены (5) и

$$|F(x)| \leq \bar{F}(x), \quad x \in \omega,$$

$$|\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma$$

то  $|y(x)| \leq Y(x), \quad x \in \Omega$ .

Функция  $Y(x)$ , фигурирующая в **Теореме сравнения** называется мажорантной функцией для решения задачи (4).

Для получения оценки решения  $y(x)$  обычно строят мажорантную  $Y(x)$ , чтобы можно было легко найти решение задач (8), (11) или (13).

**Теорема сравнения** позволяет доказать устойчивость решения ПКЗ по граничным условиям.

Рассмотрим однородное уравнение с неоднородными граничными условиями

$$Ly(x) = 0, \quad x \in \omega, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma \quad (14)$$

### **Теорема 3. (Устойчивость по граничным условиям)**

Пусть при  $x \in \omega$  выполнены условия положительности коэффициентов (5), тогда для решения задачи (14) справедлива оценка:

$$\max_{x \in \omega} |y(x)| \leq \max_{x \in \gamma} |\mu(x)|.$$

# Аппроксимация, устойчивость и сходимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

Найти непрерывную в области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  функцию  $u(x_1, x_2)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in G \quad (1)$$

и граничному условию

$$u(x) = \mu(x), x \in \Gamma \quad (2)$$

$G$  – область,  $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ ,  $\Gamma$  – его граница,  $f(x)$  и  $\mu(x)$  – заданные функции.

Предполагаем, что решение задачи (1) существует и единственное является достаточно гладкой функцией.

Если  $f(x) \equiv 0$ , то получим задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, (x_1, x_2) \in G \quad (3)$$

$$u(x) = \mu(x), x \in \Gamma$$

Одним из основных свойств задачи Дирихле для уравнения Лапласа является выполнение принципа максимума, а именно непрерывное в области  $\bar{G}$  и отличное от константы решение  $u(x_1, x_2)$  может достигать своего максимального по модулю значения только на границе  $\Gamma$ . Отсюда справедлива оценка

$$\max_{(x_1, x_2) \in \bar{G}} |u(x_1, x_2)| \leq \max_{(x_1, x_2) \in \Gamma} |\mu(x_1, x_2)| \quad (4)$$

где  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ .

(4) означает, что (3) устойчива по начальным данным.

Полученные в предыдущем параграфе утверждения позволяют установить аппроксимацию, устойчивость и сходимость РЗ для уравнения Пуассона, которая аппроксимирует ДЗ (1),(2).

Введем в область  $\bar{G}$  прямоугольную сетку  $\Omega$  с шагом  $h_1$  по направлению  $x_1$ , и с шагом  $h_2$  по направлению  $x_2$ .

$$l_1 = N_1 h_1, l_2 = N_2 h_2.$$

Обозначим  $x_1^i = i h_1, x_2^j = j h_2$ .

Сетка  $\Omega$  содержит узлы  $x_{ij} = (x_1^i, x_2^j), i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$ .

Для функций, определенных на  $\Omega$  введем следующие соотношения:

$$y_{ij} = (y_1^i, y_2^j),$$

$$y_{\overline{x_1}x_1, ij} = \frac{y_{(i+1)j} - 2y_{ij} + y_{(i-1)j}}{h_1^2},$$

$$y_{\overline{x_2}x_2, ij} = \frac{y_{i(j+1)} - 2y_{ij} + y_{i(j-1)}}{h_2^2}$$

$$f_{ij} = f(x_{ij}).$$

$y_{\overline{x_1}x_1, ij}$ - вторая разностная производная, аппроксимирующая  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$  в точке  $(x_{ij})$  со 2-м порядком по  $h_1$ .

$y_{\overline{x_2}x_2, ij}$ - вторая разностная производная, аппроксимирующая  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$  в точке  $(x_{ij})$  со 2-м порядком по  $h_2$ .

Задаче (1),(2) будет соответствовать следующая РЗ:

$$y_{\overline{x_1}x_1,ij} + y_{\overline{x_2}x_2,ij} = -f_{ij}, i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1} \quad (5)$$

и граничные условия

$$y_{i0} = \mu_1(x_1^i, 0)$$

$$y_{iN_2} = \mu_1(x_1^i, l_2), i = \overline{1, N_1 - 1} \quad (6)$$

$$y_{0j} = \mu_2(0, x_2^j)$$

$$y_{N_1j} = \mu_2(l_1, x_2^j), j = \overline{1, N_2 - 1} \quad (7)$$

(5),(6),(7) представляет собой СЛАУ с числом уравнений, равных числу неизвестных.

Точки  $x_{ij}$ , в которых записано уравнение (5) принадлежат множеству  $\omega = \{x_{ij}, i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}\}$ , которое называется множеством внутренних узлов.

Точки, в которых записываются (6) и (7) принадлежат множеству

$\gamma = \{x_{0j}; x_{N_1j}\} j = \overline{1, N_2 - 1} \cup \{x_{i0}; x_{iN_2}\} i = \overline{1, N_1 - 1}$ , которое называется множеством граничных узлов.

Точки  $(0,0), (l_1, 0), (0, l_2), (l_1, l_2)$  не участвуют в аппроксимации и поэтому не относятся ни к граничным точкам ни к внутренним.

Построенная РС – СЛАУ из  $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$  алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных.

Она аппроксимирует ДЗ (1),(2) со вторым порядком по  $h_1$  и  $h_2$ , является устойчивой и сходящейся согласно принципу максимума.

При решении (1),(2) по методу сеток в каждой точке сетки  $\Omega$ , исключая угловые точки, надо выписать уравнение, аппроксимирующее либо ДУ, либо граничные условия и тем самым



составить систему уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных.

Полученная система уравнений обладает свойством, что её матрица – сильно разреженная матрица (т.е. много коэффициентов  $= 0$ ).

Для решения таких систем разработано большое число методов, учитывающих специфику матрицы системы, хотя можно решать стандартными методами для решения СЛАУ.