

1 Präsenzübung 1

1.1 Aufgabe 1.1

- a) Es seien M, N beliebige Mengen und $T : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $T^{-1}(A^C) = (T^{-1}(A))^C$. Erinnerung an Schreibweise $T^{-1}(A) = \{a \in M : T(a) \in A\}$ und $T(A) := \{T(a) : a \in A\}$ und setze $A \subset N$ und $B \subset M$.
- b) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ und $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ messbare Räume (oder auch Messräume) und $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, $g : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ messbar ist.
- c) Es sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F} := \left\{ A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar} \vee A^C \text{ ist abzählbar} \right\}$$

eine σ -Algebra über Ω ist.

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \{a \in T^{-1}(A^C)\} &\Leftrightarrow \exists b \in B^C : T(a) = b \\ &\stackrel{(!)}{\Leftrightarrow} \exists c \in B : T(a) = c \\ &\Leftrightarrow a \notin \{T \in A\} \\ &\Leftrightarrow a \in \{T \in A\}^C = a \in (T^{-1}(A))^C \end{aligned}$$

Nun muss man sich noch (!) klar machen. Das Ganze gilt, da T eine Abbildung ist, also wird jedem Element in M genau ein Element in N zugeordnet.

“ \Rightarrow ” folgt aus der Eigenschaft, dass für jedes Element in M *höchstens* ein Element in N abgebildet wird.

“ \Leftarrow ” Gleiches Argument.

- b) $\forall A \in \mathcal{F}_3$ gilt $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}_2} \in f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1$
- c) Dafür muss man nur die drei Axiome der σ -Algebra nachweisen.
- Σ_1 : $\Omega^C = \emptyset$ ist abzählbar $\Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$
 - Σ_2 :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \#A^C \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#(A^C)^C = A \leq \#\mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow A^C \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- Σ_3 : Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Zwei Fälle sind zu bearbeiten.

Fall 1: Es werden genau die Mengen A_n ausgewählt, welche abzählbar sind. Dann folgt aber, dass auch die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ von abzählbare vielen abzählbaren Mengen eine abzählbare Menge ist, also $A \in \mathcal{F}$.

Fall 2: Eine Menge, z.B. A_{n_0} , ist überabzählbar. Dann folgt aus der Definition von \mathcal{F} , dass das Komplement von $A_{n_0}^C$ abzählbar ist. Folglich ergibt sich

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^C \subset A_{n_0}^C.$$

Damit ist auch das Komplement von $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar und liegt in \mathcal{F} . □

1.2 Aufgabe 1.2

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse. Beschreiben Sie mengentheoretisch folgende Ereignisse:

- a) es tritt nur A ein
- b) A und B treten ein, aber C nicht
- c) Mindestens eins der Ereignisse tritt ein
- d) Mindestens zwei der Ereignisse treten ein
- e) A, B, C treten alle ein
- f) Keines der drei Ereignisse A, B, C tritt ein
- g) Höchstens ein Ereignis tritt ein
- h) Höchstens zwei Ereignisse treten ein
- i) Genau zwei Ereignisse treten ein
- j) Höchstens drei der Ereignisse treten ein.

2. Es seien A_1, A_2, \dots Ereignisse. Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

$$\underline{A} := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \overline{A} := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Lösung. 1. Im wesentlichen sind das eigentlich nur Teilmengen der Potenzmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$, wobei $\Omega = \{A, B, C\}$ ist? (Bin mir dabei gar nicht recht sicher, könnte auch eine Partition von $\mathcal{P}(\Omega)$ sein.)

- a) $\{A\}$
- b) $\{A, B\}$
- c) $\{A, B, C, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}\}$

- d) $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}\}$
- e) $\{A, B, C\}$
- f) $\{\emptyset\}$
- g) $\{\emptyset, A, B, C\}$
- h) $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \emptyset, A, B, C\}$
- i) $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$
- j) $\{\{A, B, C\}\}$

2. ...

1.3 Aufgabe 1.3

1. Es sei \mathbb{P} ein WMaß auf (Ω, \mathcal{F}) und $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ beliebige Ereignisse. Zeigen Sie:

- a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- b) $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (endliche Additivität), insbesondere $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1$,
- c) Aus $A \subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonie),
- d) σ -Subadditivität

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i),$$

- e) σ -Stetigkeit, d.h. $A_n \uparrow A$, d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ (oder $A_n \downarrow A$, d.h. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $A = \bigcap_{i \geq 1} A_i$), dann

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A).$$

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.6$ und $\mathbb{P}(B) = 0.4$, sowie $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(A \cup B), \quad \mathbb{P}(B^C), \quad \mathbb{P}(A^C \cap B), \quad \mathbb{P}(A \cup B^C), \quad \mathbb{P}(A^C \cap B^C).$$

Beweis. 1. a) Behauptung: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$$\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset \quad \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) \leq 1.$$

- b) ...

2. ...

□

1.4 Aufgabe 1.4

Es sei X eine stetige, reelle Zufallsvariable ($X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$) mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mit } f(x) = \frac{1}{2c} e^{-cx}$$

- a) Bestimme den Parameter c !
- b) Wie sieht die Verteilungsfunktion von X aus?

Lösung. a) Nach auswerten des Integrals über f auf \mathbb{R}_+ ergibt sich, $c = 1/\sqrt{2}$. Sei \mathbb{P} das WMaß, was normiert ist zu 1, d.h. $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+) \stackrel{!}{=} 1(N)$. Damit lässt sich dann c bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{R}_+) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2c} e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{2c} \left[-\frac{1}{c} e^{-cx} \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2c^2} (\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-c\alpha} - e^{-c \cdot 0}) \\ &= \frac{1}{2c^2} \stackrel{(N)}{\Rightarrow} c = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- b) Damit gibt es folgenden WRaum $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P})$ auf diesem soll sich die Verteilungsfunktion befinden. Nach Definition gilt:

$$F_{\mathbb{P} \circ X^{-1}} = F_X : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1] \text{ mit } F : d \rightarrow \mathbb{P}((X \leq d))$$

$$\text{Im dem Fall sieht das so aus } F_X(d) = \int_0^d \frac{1}{2c} e^{-cx} dx.$$