1 Präsenzübung 1

1.1 Aufgabe 1.1

a) Es seien M, N beliege Mengen und $T : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $T^{-1}(A^C) = (T^{-1}(A))^C$. Erinnerung an Schreibweise $T^{-1}(A) = \{a \in M : T(a) \in B\}$ und $T(A) := \{T(a) : a \in A\}$ und setze $A \subset N$ und $B \subset M$.

b) Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ und $(\Omega_3, \mathscr{F}_3)$ messbare Räume (oder auch Messräume) und $f : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{F}_2)$, $g : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_3, \mathscr{F}_3)$ messbar ist.

c) Es sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F} := \Big\{ A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar } \vee A^C \text{ ist abzählbar} \Big\}$$

eine σ-Algebra über Ω ist.

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
\Big\{ a \in T^{-1}(A^C) \Big\} &\Leftrightarrow \exists b \in B^C : T(a) = b \\
&\overset{(!)}{\Leftrightarrow} \exists c \in B : T(a) = c \\
&\Leftrightarrow a \notin \{T \in A\} \\
&\Leftrightarrow a \in \{T \in A\}^C = a \in (T^{-1}(A))^C
\end{aligned}$$

Nun muss man sich noch (!) klar machen. Das ganz gilt, da T eine Abbildung ist, also wird jedem Element in M genau ein Element in N zugeordnet.
"$\Rightarrow$" folgt aus der Eigenschaft, dass für jedes Element in M *höchstens* ein Element in N abgebildet wird.
"$\Leftarrow$" Analog Argument.

b) $\forall A \in \mathscr{F}_3$ gilt $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ \underbrace{\in \mathscr{F}_2}_{g^{-1}(A)} \in f^{-1}(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{F}_1$

c) Dafür muss man nur die drei Axiome der σ-Algebra nachweisen.

- Σ_1: $\Omega^C = \emptyset$ ist abzählbar $\Rightarrow \Omega \in \mathscr{F}$
- Σ_2:

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{F} &\Leftrightarrow \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \#A^C \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#(A^C)^C = A \leq \#\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow A^C \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

- Σ_3: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$. Zwei Fälle sind zu bearbeiten.

Fall 1: Es werden genau die Mengen A_n ausgewählt, welche abzählbar sind. Dann folgt aber das auch die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ von abzählbare vielen abzählbaren Mengen eine abzählbare Menge sind, also $A \in \mathscr{F}$.

Fall 2: Eine Menge, z.B. A_{n_0}, ist überabzählbar. Dann folgt aber aus der Definition von $\mathscr{F}$, das Komplement von $A_{n_0}^C$ abzählbar ist. Damit folgt für die Folge, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \subset A_{n_0}^C,$$

damit ist auch das Komplement von $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und liegt in $\mathscr{F}$

Damit wurde nachgewiesen, das $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra ist.

$\square$