1 Präsenzübung 1

1.1 Aufgabe 1.1

a) Es seien M, N beliege Mengen und $T : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $T^{-1}(A^C) = (T^{-1}(A))^C$. Erinnerung an Schreibweise $T^{-1}(A) = \{a \in M : T(a) \in B\}$ und $T(A) := \{T(a) : a \in A\}$ und setze $A \subset N$ und $B \subset M$.

b) Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ und $(\Omega_3, \mathscr{F}_3)$ messbare Räume (oder auch Messräume) und $f : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{F}_2)$, $g : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_3, \mathscr{F}_3)$ messbar ist.

c) Es sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F} := \left\{ A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar } \vee A^C \text{ ist abzählbar} \right\}$$

eine σ-Algebra über Ω ist.

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
\left\{ a \in T^{-1}(A^C) \right\} &\Leftrightarrow \exists b \in B^C : T(a) = b \\
&\overset{(!)}{\Leftrightarrow} \exists c \in B : T(a) = c \\
&\Leftrightarrow a \notin \{T \in A\} \\
&\Leftrightarrow a \in \{T \in A\}^C = a \in (T^{-1}(A))^C
\end{aligned}$$

Nun muss man sich noch (!) klar machen. Das ganz gilt, da T eine Abbildung ist, also wird jedem Element in M genau ein Element in N zugeordnet.
"$\Rightarrow$" folgt aus der Eigenschaft, dass für jedes Element in M *höchstens* ein Element in N abgebildet wird.
"$\Leftarrow$" Analog Argument.

b) $\forall A \in \mathscr{F}_3$ gilt $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ \underbrace{\in \mathscr{F}_2}_{g^{-1}(A)} \in f^{-1}(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{F}_1$

c) Dafür muss man nur die drei Axiome der σ-Algebra nachweisen.

- Σ_1: $\Omega^C = \emptyset$ ist abzählbar $\Rightarrow \Omega \in \mathscr{F}$
- Σ_2:

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{F} &\Leftrightarrow \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \#A^C \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#(A^C)^C = A \leq \#\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow A^C \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

- Σ_3: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$. Zwei Fälle sind zu bearbeiten.

Fall 1: Es werden genau die Mengen A_n ausgewählt, welche abzählbar sind. Dann folgt aber das auch die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ von abzählbare vielen abzählbaren Mengen eine abzählbare Menge sind, also $A \in \mathscr{F}$.

Fall 2: Eine Menge, z.B. A_{n_0}, ist überabzählbar. Dann folgt aber aus der Definition von $\mathscr{F}$, das Komplement von $A_{n_0}^C$ abzählbar ist. Damit folgt für die Folge, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \subset A_{n_0}^C,$$

damit ist auch das Komplement von $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und liegt in $\mathscr{F}$.

Damit wurde nachgewiesen, das $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra ist.

□

1.2 Aufgabe 1.2

1. Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $A, B, C \in \mathscr{F}$ drei Ereignisse. Beschreiben Sie mengentheoretisch folgende Ereignisse:
   a) es tritt nur A ein
   b) A und B treten ein, aber C nicht
   c) Mindestens eins der Ereignisse tritt ein
   d) Mindestens zwei der Ereignisse treten ein
   e) A, B, C treten alle ein
   f) Keines der drei Ereignisse A, B, C tritt ein
   g) Höchstens ein Ereigniss tritt ein
   h) Höchstens zwei Ereignisse treten ein
   i) Genau zwei Ereignisse treten ein
   j) Höchstens der drei Ereignisse tretten ein.
2. Es seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse. Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

$$\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Lösung. 1. a)

1.3 Aufgabe 1.3

1. Es sei $\mathbb{P}$ ein WMaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ und $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$ beliebige Ereignisse. Zeigen Sie:
   a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
   b) $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (endliche Additivität), insbesondere $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1$,
   c) σ-Subadditivität
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i),$$
   d) σ-Stetigkeit, d.h. $A_n \uparrow A$, d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i$ (oder $A_n \downarrow A$, d.h. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $A = \bigcap_{i\geq 1} A_i$), dann
   $$\liminf_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A).$$

2. Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $A, B \in \mathscr{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.6$ und $\mathbb{P}(B) = 0.4$, sowie $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten
$$\mathbb{P}(A \cup B), \quad \mathbb{P}(B^C), \quad \mathbb{P}(A^C \cap B), \quad \mathbb{P}(A \cup B^C), \quad \mathbb{P}(A^C \cap B^C).$$

1.4 Aufgabe 1.4

Es sei X eine stetige, reelle Zufallsvariable ($X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$) mit Wahrscheinlichkeitsdichte
$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ mit } f(x) = \frac{1}{2c} e^{-cx}$$

a) Bestimme den Paramter c!

b) Wie sieht die Verteilungsfunktion von X aus?

Lösung. a) Nach auswerten des Integrals über $\mathbb{R}_+$ und f, ergibt sich $c = 1/\sqrt{2}$. Sei $\mathbb{P}$ das WMaß, was normiert ist zu 1, d.h. $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+) \overset{!}{=} 1(N)$. Damit lässt sich dann c

bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{R}_+) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2c} e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{2c} \big[-\frac{1}{c} e^{-cx} \big]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2c^2} \big(\lim_{\alpha \to \infty} e^{-c\alpha} - e^{-c \cdot 0} \big) \\ &= \frac{1}{2c^2} \overset{(N)}{\Rightarrow} c = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b) Damit gibt es folgenden WRaum $(\Omega, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P})$ auf diesem soll sich die Verteilungsfunktion befinden. Nach Definition gilt:

$$F_{\mathbb{P} \circ X^{-1}} = F_X : \mathbb{R}_+ \to [0,1] \text{ mit } F : d \to \mathbb{P}((X \leq d))$$

Im dem Fall sieht das so aus $F_X(d) = \int_0^d \frac{1}{2c} e^{-cx} dx.$