1 Präsenzübung 1

1.1 Aufgabe 1.1

a) Es seien M, N beliege Mengen und $T : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $T^{-1}(A^C) = (T^{-1}(A))^C$. Erinnerung an Schreibweise $T^{-1}(A) = \{a \in M : T(a) \in B\}$ und $T(A) := \{T(a) : a \in A\}$ und setze $A \subset N$ und $B \subset M$.

b) Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ und $(\Omega_3, \mathscr{F}_3)$ messbare Räume (oder auch Messräume) und $f : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{F}_2)$, $g : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f : (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to (\Omega_3, \mathscr{F}_3)$ messbar ist.

c) Es sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F} := \left\{ A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar } \vee A^C \text{ ist abzählbar} \right\}$$

eine σ-Algebra über Ω ist.

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
\left\{ a \in T^{-1}(A^C) \right\} &\Leftrightarrow \exists b \in B^C : T(a) = b \\
&\overset{(!)}{\Leftrightarrow} \exists c \in B : T(a) = c \\
&\Leftrightarrow a \notin \{T \in A\} \\
&\Leftrightarrow a \in \{T \in A\}^C = a \in (T^{-1}(A))^C
\end{aligned}$$

Nun muss man sich noch (!) klar machen. Das Ganze gilt, da T eine Abbildung ist, also wird jedem Element in M genau ein Element in N zugeordnet.
"$\Rightarrow$" folgt aus der Eigenschaft, dass für jedes Element in M *höchstens* ein Element in N abgebildet wird.
"$\Leftarrow$" Gleiches Argument.

b) $\forall A \in \mathscr{F}_3$ gilt $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1}(A)}_{\in \mathscr{F}_2} \in f^{-1}(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{F}_1$

c) Dafür muss man nur die drei Axiome der σ-Algebra nachweisen.

- Σ_1: $\Omega^C = \emptyset$ ist abzählbar $\Rightarrow \Omega \in \mathscr{F}$
- Σ_2:

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{F} &\Leftrightarrow \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \#A^C \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#(A^C)^C = A \leq \#\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow A^C \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

- Σ_3: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$. Zwei Fälle sind zu bearbeiten.

Fall 1: Es werden genau die Mengen A_n ausgewählt, welche abzählbar sind. Dann folgt aber, dass auch die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ von abzählbare vielen abzählbaren Mengen eine abzählbare Menge ist, also $A \in \mathscr{F}$.

Fall 2: Eine Menge, z.B. A_{n_0}, ist überabzählbar. Dann folgt aus der Definition von $\mathscr{F}$,dass das Komplement von $A_{n_0}^C$ abzählbar ist. Folglich ergibt sich

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \subset A_{n_0}^C.$$

Damit ist auch das Komplement von $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und liegt in $\mathscr{F}$.

□

1.2 Aufgabe 1.2

1. Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $A, B, C \in \mathscr{F}$ drei Ereignisse. Beschreiben Sie mengentheoretisch folgende Ereignisse:
   a) es tritt nur A ein
   b) A und B treten ein, aber C nicht
   c) Mindestens eins der Ereignisse tritt ein
   d) Mindestens zwei der Ereignisse treten ein
   e) A, B, C treten alle ein
   f) Keines der drei Ereignisse A, B, C tritt ein
   g) Höchstens ein Ereigniss tritt ein
   h) Höchstens zwei Ereignisse treten ein
   i) Genau zwei Ereignisse treten ein
   j) Höchstens drei der Ereignisse tretten ein.
2. Es seien $A_1, A_2, \dots$ Ereignisse. Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

$$\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Lösung. 1. Im wesentlichen sind das eigentlich nur Teilmengen der Potenzmenge von $\mathscr{P}(\Omega)$, wobei $\Omega = \{A, B, C\}$ ist? (Bin mir dabei gar nicht recht sicher, könnte auch eine Partition von $\mathscr{P}(\Omega)$ sein.)

   a) $\{A\}$
   b) $\{A, B\}$
   c) $\{A, B, C, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}\}$

d) $\{\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\},\{A,B,C\}\}$

e) $\{A,B,C\}$

f) $\{\emptyset\}$

g) $\{\emptyset,A,B,C\}$

h) $\{\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\},\emptyset,A,B,C\}$

i) $\{\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\}\}$

j) $\{\{A,B,C\}\}$

2. ...

1.3 Aufgabe 1.3

1. Es sei $\mathbb{P}$ ein WMaß auf $(\Omega,\mathscr{F})$ und $A,B,A_1,A_2,\dots\in\mathscr{F}$ beliebige Ereignisse. Zeigen Sie:

   a) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$,

   b) $\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$ (endliche Additivität), insbesondere $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^C)=1$,

   c) Aus $A\subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$ (Monotonie),

   d) σ-Subadditivität

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1}A_i\right)\leq\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(A_i),$$

   e) σ-Stetigkeit, d.h. $A_n\uparrow A$, d.h. $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots$ und $A=\bigcup_{i\geq 1}A_i$ (oder $A_n\downarrow A$, d.h. $A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$ und $A=\bigcap_{i\geq 1}A_i$), dann

$$\liminf_{i\to\infty}\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(A).$$

2. Es sei $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ ein WRaum und $A,B\in\mathscr{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A)=0.6$ und $\mathbb{P}(B)=0.4$, sowie $\mathbb{P}(A\cap B)=0.2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(A\cup B),\quad\mathbb{P}(B^C),\quad\mathbb{P}(A^C\cap B),\quad\mathbb{P}(A\cup B^C),\quad\mathbb{P}(A^C\cap B^C).$$

Beweis. 1. a) Behauptung: $\mathbb{P}(\emptyset)=0$

$$\emptyset=\bigcup_{n=1}^{\infty}\emptyset\qquad\mathbb{P}(\emptyset)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(\emptyset)\leq 1.$$

b) Behauptung: $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \uplus B) &= \mathbb{P}(A \cup B \cup \emptyset \cup \dots) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) \\
B = A^C &\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \uplus A^C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1 \\
\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A \setminus B \cup B \setminus A \uplus (A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)}_{\mathbb{P}(A)} + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)}_{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

c) $A, B \in \mathscr{F}, A \subseteq B$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A) \tag{*}$$

d) $A_1, A_2, \dots$
Behauptung: $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) \overset{!?}{\leq} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1}^{\infty} (A_i \setminus \bigcup_{j \geq i} A_j)) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots) \\
&= \sum_{i \geq 1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \setminus \bigcup_{j \geq i} A_j) \overset{\text{Gleichung (*)}}{\leq} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

e) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in F, A_0 = \emptyset$ und $A_n \xrightarrow{n \to \infty} A$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} (A_i \setminus A_{i-1})) \\
&= \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i \setminus A_{i-1}) \\
&= \liminf_{n \to \infty} \sum_{i \geq 1}^{n} \mathbb{P}(A_i \setminus A_{i-1}) \\
&= \liminf_{n \to \infty} \mathbb{P}(\bigcap_{i \geq 1} (A_i \setminus A_{i-1})) \\
&= \liminf_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Und nun nochmal den absteigenden Fall:
$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \in F$ und $B_n \downarrow B \implies B_1 \setminus B_n \uparrow B_1 \setminus B$. Benutze dazu Gleichung (*) und Gleichung (**):

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathbb{P}(B_1 \setminus B)}_{\mathbb{P}(B_1)-\mathbb{P}(B)} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_1 \setminus B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(B_1) - \mathbb{P}(B_1))\end{aligned}$$

2. ...

□

1.4 Aufgabe 1.4

Es sei X eine stetige, reelle Zufallsvariable ($X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$) mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ mit } f(x) = \frac{1}{2c} e^{-cx}$$

a) Bestimme den Parameter c!

b) Wie sieht die Verteilungsfunktion von X aus?

Lösung. a) Nach auswerten des Integrals über f auf $\mathbb{R}_+$ ergibt sich, $c = {}^1/\sqrt{2}$. Sei $\mathbb{P}$ das WMaß, was normiert ist zu 1, d.h. $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+) \stackrel{!}{=} 1(N)$. Damit lässt sich dann c bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{R}_+) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2c} e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{2c} \big[-\frac{1}{c} e^{-cx} \big]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2c^2} \big(\lim_{\alpha\to\infty} e^{-c\alpha} - e^{-c\cdot 0} \big) \\ &= \frac{1}{2c^2} \stackrel{(N)}{\Rightarrow} c = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b) Damit gibt es folgenden WRaum $(\Omega, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P})$ auf diesem soll sich die Verteilungsfunktion befinden. Nach Definition gilt:

$$F_{\mathbb{P}\circ X^{-1}} = F_X : \mathbb{R}_+ \to [0,1] \text{ mit } F : d \to \mathbb{P}((X \leq d))$$

Im dem Fall sieht das so aus: $F_X(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \,\mathrm{d}x = \left(1 - e^{-\frac{d}{\sqrt{2}}}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$.