TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Stochastik, Professur für Angewandte Stochastik

STOCHASTIK

Prof. Dr. Anita Behme

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

EINLEITUNG

Literatur

- *Georgii* : Stochastik (5. Auflage)
- *Schilling* : Wahrscheinlichkeit
- *Bauer* : Wahrscheinlichkeitstheorie (5. Auflage)
- *Krengel* : Einführung in die W-Theorie und Statistik
- *Dehling & Haupt* : Einführung in die W-Theorie und Statistik

Was ist Stochastik ?

Altgriechisch SStochastikos"($\sigma\tau\chi\alpha\tau\iota\kappa\zeta$) $\rightsquigarrow$ ßcharfsinnig im Vermuten"

Fragestellungen stammen insbesondere aus dem Glücksspiel, heute vielmehr auch aus der Versicherungs- und Finanzmathematik - überall da, wo Zufall / Risiko / Chance auftaucht.

Was ist mathematische Stochastik ?

- Beschreibt zufällige Phänomene in einer exakten Sprache.
  Bsp.: "Beim Würfeln erscheint jedes sechste Mal (im Schnitt) die Augenzahl 6"$\rightsquigarrow$ Gesetz der großen Zahlen
- lässt sich in zwei Teilgebiete unterteilen: Wahrscheinlichkeitstheorie & Statistik
  Die W-Theorie beschreibt und untersucht konkret gegebene Zufallssituationen. Dagegen zieht die Statistik Schlussfolgerungen aus Beobachtungen. Dabei benötigt sie die Modelle der W-Theorie - umgekehrt benötigt auch die W-Theorie die Statistik zur Bestätigung der Modelle.
- In diesem Semester konzentrieren wir uns auf die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Kapitel 1

GRUNDBEGRIFFE DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Ergebnisraum

Welche möglichen Ausgänge eines zufälligen Geschehens interessieren uns?

■ Beispiel
Würfeln: Augenzahl, aber nicht Lage, Fallhöhe, usw.

Definition 1.1 (Ergebnisraum)
Die Menge der relevanten Ergebnisse eines Zufallgeschehens nennen wir **Ergebnisraum** und bezeichnen diesen mit Ω.

■ Beispiel

- Würfeln: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
- Wartezeiten: $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (also überabzählbar)

Ereignisse

Oft interessiert man sich gar nicht für das konkrete Ergebnis des Zufallsexperiments, sondern nur für das Eintreten gewisser Ereignisse.

■ Beispiel
Würfeln: Zahl ist > 3
Wartezeiten: Wartezeit ist ≤ 5 Minuten

Wir wollen also Teilmengen des Ergebnisraums betrachten, d.h. Elemente von $\mathcal{P}(\Omega)$ (Potenzmenge), denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann d.h. welche *messbar* sind.

Definition 1.2 (Ereignisraum)
Sei $\Omega \neq \emptyset$ ein Ergebnisraum und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω, d.h. eine Familie von Teilmengen von Ω, sodass

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A^{\complement} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$

Dann heißt $(\Omega, \mathcal{F})$ **Ereignisraum** oder messbarer Raum.

Wahrscheinlichkeit

Wir ordnen nun den Ereignissen Wahrscheinlichkeiten mittels einer Abbildung $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ zu, sodass

(N) Normierung: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A) Additivität: Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ist $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(A_i)$.

(N), (A) und die Nichtnegativität von $\mathbb{P}$ werden als Kolmogorov-Axiome bezeichnet (nach Kolmogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, 1933).

Definition 1.3 (Wahrscheinlichkeit)

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Ereignisraum und $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (N) und (A). Dann heißt $\mathbb{P}$ **Wahrscheinlichkeitsmaß** oder auch **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Aus der Definition folgen direkt die folgenden Eigenschaften:

Satz 1.4 (Rechenregelen für Wahrscheinlichkeitsmaße)

Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Dann gilt:

(1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(2) Endliche Additivität: $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^{\complement}) = 1$

(3) Monotonie: $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(4) σ-Subadditivität: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i)$

(5) σ-Stetigkeit: Wenn $A_n \nearrow A$ (d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ und $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$) oder $A_n \searrow A$, so gilt $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ für $n \to \infty$

Beweis. siehe MINT oder Schillings Lehrbuch □

Beispiel 1.5

Für einen beliebigen Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{F})$ und ein beliebiges Element $\xi \in \Omega$ definiert

$$\delta_\xi(A) := \begin{cases} 1 & \xi \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein (degeneriertes) W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, welches wir als **Dirac-Maß** oder Dirac-Verteilung bezeichnen.

Beispiel 1.6

Wir betrachten das Zufallsexperiment "Würfeln mit einem fairen, 6-seitigen Würfel"mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ und Ereignisraum $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Setzen wir aus Symmetriegründen

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{6}$$

mit $\#A = |A| =$ Kardinalität. Dies definert ein W-Maß.

Beispiel 1.7 (Wartezeiten an der Bushaltestelle)

Ergebnisraum $\Omega = \mathbb{R}_+$ und Ereignisraum Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Ein mögliches W-Maß können wir durch

$$\mathbb{P}(A) := \int_A \lambda e^{-\lambda x} \;\mathrm{d}x$$

für einen Parameter $\lambda > 0$ festlegen. (offensichtlich gelten $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und die σ-Additivität aufgrund der σ-Additivität des Integrals). Wir bezeichnen dieses Maß als **Exponentialverteilung**. (Warum gerade dieses Maß für Wartezeiten gut geeigent ist, sehen wir später.)

Satz 1.8 (Konstruktion von WMaßen mit Dichten)
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Eriegnisraum.

- Ω abzählbar, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$:
  Sei $\rho = (\rho(\omega))_{\omega \in \Omega}$ eine Folge in $[0,1]$ in $\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$, dann definiert

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \rho(\omega), \quad A \in \mathcal{F}$$

  ein (diskretes) WMaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$. ρ wird als **Zähldichte** bezeichnet. Umgekehrt definiert jedes WMaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mittels $\rho(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$ eine Folge ρ mit den obigen Eigenschaften.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$:
  Sei $\rho \colon \Omega \to [0, \infty)$ eine Funktion, sodass

  (1) $\int_\Omega \rho(x) \ \mathrm{d}x = 1$
  (2) $\{x \in \Omega \colon \rho(x) \leq c\} \in \mathcal{B}(\Omega)$ für alle $c > 0$

  dann definiert ρ ein WMaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \rho(x) \ \mathrm{d}x = \int_A \rho \ \mathrm{d}\lambda, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

  Das Integral interpretieren wir stets als Lebesgue-Integral bzgl. Lebesgue-Maß λ. ρ bezeichnet wir als **Dichte**, **Dichtefunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte** von $\mathbb{P}$ und nennen ein solches $\mathbb{P}$ (absolut) **stetig** (bzgl. dem Lebesgue-Maß).

Beweis. Der diskrete Fall ist klar. Im stetigen Fall folgt die Bahuptung aus den bekannten Eigenschaften des Lebesgue-Integrals (↗ Schilling MINT, Lemma 8.9) □

► **Bemerkung.**
- *Die eineindeutige Beziehung zwischen Dichte und WMaß überträgt sich nicht auf den stetigen Fall.*
  - ▷ *Nicht jedes WMaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Dichte.*
  - ▷ *Zwei Dichtefunktionen definieren dasselbe WMaß, wenn sie sich nur auf einer Menge von Lebesgue-Maß 0 unterscheiden.*
- *Jede auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierte Dichtefunktion ρ lässt sich auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen durch $\rho(x) = 0, x \notin \Omega$. Das erzeugte WMaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ lässt mit den WMaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ identifizieren.*
- *Mittels Dirac-Maß δ_x können auch jedes diskrete WMaß auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als WMaß auf $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ interpretieren:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \rho(\omega) = \int_A \mathrm{d}\left(\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega)\delta_\omega\right) \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

- *stetige und diskrete WMaße lassen sich kombinieren z.B. definiert*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\int_A \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \ \mathrm{d}x, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

  ein WMaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Abschließend erinnern wir uns an:

Satz 1.9 (Eindeutigkeitssatz für WMaße)
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ Ereignisraum und $\mathbb{P}$ ein WMaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Sei $\mathcal{F} = \omega(\mathcal{G})$ für ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist $\mathbb{P}$ bereits durch seine Einschränkung $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. $\nearrow$ Schhiling MINT, Satz 4.5. $\square$

Insbesondere definiert z.B.

$$\mathbb{P}([0,a)) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda a}, a > 0$$

bereits die Exponentialverteilung aus Beispiel 1.7.

Definition 1.10 (Gleichverteilung)
Ist Ω endlich, so heißt das WMaß mit konstanter Zähldichte

$$\rho(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

die **(diskrete) Gleichverteilung** auf Ω und wird mit $\mathrm{U}(\Omega)$ notiert (U = *uniform*).

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge mit Lebesgue-Maß $0 < \lambda^n(\Omega) < \infty$ so heißt das WMaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(()\Omega))$ mit konstanter Dichtefunktion

$$\rho(x) = \frac{1}{\lambda^n(\Omega)}$$

die **(stetige) Gleichverteilung** auf Ω. Sie wird ebenso mit $\mathrm{U}(\Omega)$ notiert.

Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 1.11 (Wahrscheinlichkeitsraum)
Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega, \mathcal{F}$ Ereignisraum und $\mathbb{P}$ WMaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, nennen wir **Wahrscheinlichkeitsraum**.

1.2 Zufallsvariablen

Zufallsvariablen dienen dazu von einen gegebenen Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{F})$ zu einem Modellausschnitt $\Omega', \mathcal{F}'$ überzugehen. Es handelt sich also um Abbildungen $X\colon \Omega \to \Omega'$. Damit wir auch jedem Ereignis in $\mathcal{F}'$ eine Wahrscheinlichkeit zuordnen können, benötigen wir

$$A' \in \mathcal{F}' \quad \Rightarrow \quad X^{-1}A' \in \mathcal{F}$$

d.h. X sollte **messbar** sein.

Definition 1.12 (Zufallsvariable)
Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ Ereignisräume. Dann heißt jede messbare Abbildung

$$X\colon \Omega \to \Omega'$$

Zufallsvariable (von $(\Omega, \mathcal{F})$) nach $(\Omega', \mathcal{F}')$/ auf $(\Omega', \mathcal{F}')$ oder **Zufallselement**.

Beispiel 1.13

(1) Ist Ω abzählbar und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, so ist jede Abbildung $X\colon \Omega \to \Omega'$ messbar und damit eine Zufallsvariable.

(2) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, so ist jede stetige Funktion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und damit eine Zufallsvariable.

Satz 1.14
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\Omega', \mathcal{F}')$. Dann definiert

$$\mathbb{P}'(A') := \mathbb{P}\left(X^{-1}(A')\right) = \mathbb{P}\left(\{X \in A'\}\right), \quad A' \in \mathcal{F}'$$

ein WMaß auf $(\Omega', \mathcal{F}')$, welches wir als **Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unter $\mathbb{P}$** bezeichnen.

Beweis. Aufgrund der Messbarkeit von X ist die Definition sinnvoll. Zudem gelten

$$\mathbb{P}'(\Omega') = \mathbb{P}(X^{-1}(\Omega')) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

und für $A'_1, A'_2, \dots \in \mathcal{F}'$ paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}'\left(\bigcup_{i\geq 1} A'_i\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i\geq 1} A'_i\right)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} X^{-1}(A'_i)\right) \\
&= \sum_{1\geq 1} \mathbb{P}(X^{-1}A'_i) \quad \text{da auch } X^{-1}A'_1, X^{-1}A'_2, \dots \text{ paarweise disjunkt sind} \\
&= \sum_{1\geq 1} \mathbb{P}'(A_i)
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}'$ ein WMaß. □

► **Bemerkung.** ▪ *Aus Gründen der Lesbarkeit schreiben wir in der Folge* $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega\colon X(\omega) \in A\})$

- *Ist X die Identität, so fallen die Begriffe Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsverteilung zusammen.*
- *In der (weiterführenden) Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie wird oft auf die Angabe eines zugrundeliegenden WRaumes verzichtet und stattdessen eine "Zufalsvariable mit Verteilung $\mathbb{P}$ auf Ω"*

eingeführt. Gemeint ist (fast) immer X als Identität auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ oder $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

- *Für die Verteilung von X unter $\mathbb{P}$ schreibe $\mathbb{P}_X$ und $X \sim \mathbb{P}_X$ für die Tatsache, dass X gemäß $\mathbb{P}_X$ verteilt ist.*

Definition 1.15

Zwei Zufallsvariablen sind **identisch verteilt**, wenn sie dieselbe Verteilung haben.

Von besonderen Interesse sind für uns die Zufallsvariablen, die nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ abbilden, sogenannte **reelle Zufallsvariablen**.

Da die halboffenen Intervalle $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen, ist die Verteilung einer reellen Zufallsvariable durch die Werte $(-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt.

Definition 1.16 (Verteilungsfunktion)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(()\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum , so heißt

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1] \text{ mit } x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x))$$

(kumulative) Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$. Ist X eine reelle Zufallsvariable auf beliebigen WRaum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so heißt

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1] \text{ mit } x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x])$$

die (kumulative) Verteilungsfunktion von X.