TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Geometrie, Professur für Nichtlineare Analysis

HÖHERE ANALYSIS 1

Prof. Dr. Friedemann Schuricht

Wintersemester 2019/20

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Eric Kunze

Matr.-Nr. 4679202

Höhere Analysis 1 – Übungsblatt 1

Thema: Topologische Räume

15/15 BE

Übung 1

Untersuchen Sie die topologischen Räume $(\mathbb{R}^n, \tau)$ aus dem Beispiel der Vorlesung (τ ist euklidische Topologie, triviale Topologie, diskrete Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ oder Streifentopologie):

(a) Ist $(\mathbb{R}^n, \tau)$ separiert?

(b) Ist τ die von einer Metrik auf $\mathbb{R}^n$ erzeugte Standardtopologie?

(zu a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Definiere $\varepsilon := \frac{1}{2}\mathrm{d}(x, y)$. Dann gilt für die Umgebungen $U = B_\varepsilon(x)$ von u und $V = B_\varepsilon(y)$ von v nach Konstruktion stets $U \cap V = \emptyset$, d.h. $\mathbb{R}^n$ ist separiert bzgl. der euklidischen Topologie.

Sei $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ und seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Angenommen $\mathbb{R}^n$ sei separiert, dann existieren Umgebungen U von u und V von v. Da U und V Umgebungen sind, existieren $M, N \in \tau$ mit $v \in M \subseteq U$ und $v \in N \subseteq V$. Dann muss aber schon $M = N = \mathbb{R}^n$ gelten, da kein Element in $\emptyset$ enthalten ist. Somit folgt daraus auch $U = V = \mathbb{R}^n$. Da $U \cap V = \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ ist $\mathbb{R}^n$ nicht separiert.

Sei $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Verwende stets Umgebungen $U = \{u\} \in \tau$ von u und $V = \{v\} \in \tau$ von v. Für $u \neq v$ ist $U \cap V = \emptyset$, also ist $\mathbb{R}^n$ separiert.

Sei $\tau = \{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in R\} : R \subseteq \mathbb{R} \text{ euklidisch offen}\}$ die Streifentopologie. Angenommen $\mathbb{R}^n$ sei separiert. Seien $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $u_1 = v_1$. Die kleinste Menge $M \in \tau$ mit $u \in M$ ist $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = u_1\}$. Somit muss jede Umgebung U von u auch M enthalten, also $M \subseteq U$. Anderseits ist M auch in jeder Umgebung V von v enthalten, da $u_1 = v_1$ gilt. Somit ist $\emptyset \neq M \subseteq U \cap V$, also $U \cap V \neq \emptyset$ und damit $\mathbb{R}^n$ nicht separiert.

(zu b) Die euklidische Topologie τ ist offensichtlich metrisierbar mit dem euklidischen Abstandsbegriff

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Die triviale Topologie $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist nicht metrisierbar. Angenommen es gäbe eine Metrik d und κ die davon erzeugte Standardtopologie. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ beliebig. Definiere $\varepsilon := \mathrm{d}(x, y) > 0$. Setze außerdem $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $B_\delta(x)$ offen bezüglich κ, d.h. $B_\delta \in \kappa$. Jedoch ist $x \in B_\delta(x)$, aber $y \notin B_\delta(x)$ und somit $B_\delta(x) \neq \emptyset$ und $B_\delta(x) \neq \mathbb{R}^n$, also muss $\tau \neq \kappa$ sein.

Die diskrete Topologie $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist metrisierbar mit

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Damit haben die ε-Kugeln folgende Gestalt: $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x,y) < \varepsilon\} = \{x\}$ für $0 < \varepsilon < 1$. Schließlich können wir die Zugehörigkeit eines Elementes x zu eine Menge $M \in \tau$ mit einer Kugel vom Radius $0 < \varepsilon < 1$ beschreiben, was genau der Definition einer induzierten Topologie entspricht.

Die Streifentopologie ist nicht metrisierbar. Mithilfe der Standardkonstruktion der von einer Metrik d erzeugten Topologie können wir zeigen, dass ein metrischer Raum (X,d) stets separiert ist. Nehmen wir an, dass die Streifentopolgie metrisierbar wäre, dann wäre sie auch separiert, was wir oben bereits widerlegt haben. Somit existiert also keine Metrik, die die Streifentopologie induziert.

Übung 2

Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Für alle Punkte $x, x', y, y' \in X$ gilt die sogenannte Vierecksungleichung

$$\left|\mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y')\right| \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y')$$

(b) Ist (X,d) separabel, so gilt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(zu a) Seien $x, x', y, y' \in X$. Dann gilt mit zweifacher Anwendung der Dreiecksungleichung für eine Metrik d

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,x') &\leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,y') + \mathrm{d}(y',x') = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,y') + \mathrm{d}(x',y') \\ \mathrm{d}(y,y') &\leq \mathrm{d}(y,x) + \mathrm{d}(x,x') + \mathrm{d}(x',y') = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,y') + \mathrm{d}(x',y') \end{aligned}$$

Durch Subtraktion von $\mathrm{d}(x,x')$ bzw. $\mathrm{d}(y,y')$ erhält man schließlich die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y') &\leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y') \\ -\left(\mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y')\right) &\leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y') \end{aligned}$$

woraus schlussendlich die behauptete Gleichung

$$\left|\mathrm{d}(x,x') - \mathrm{d}(y,y')\right| \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(x',y')$$

folgt.

(zu b) Sei (X,d) ein separabler, metrischer Raum, d.h. es existiert eine höchstens abzählbare, dichte Menge D in X. Da D dicht ist bezüglich der von d induzierten Standardtopologie τ, d.h. für alle $x \in D$ und für alle $r > 0$ existiert ein $y \in D$ mit $\mathrm{d}(x,y) < r$. Somit können wir als Basis $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in D, 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ wählen. Da sowohl D als auch $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch $\mathcal{B}$ wieder abzählbar. Nun müssen wir noch zeigen, dass $\mathcal{B}$ auch eine Basis von τ ist. Dies ist jedoch klar, da wir für alle $x \in M \in \tau$ stets die Kugeln $B_\varepsilon(x)$ wählen können und deren Vereinigung bereits M beschreibt, also für hinreichend kleine $0 < \varepsilon_x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} B_{\varepsilon_x}(x)$$

Übung 3

Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist τ die triviale Topologie, so konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt.

(b) Ist τ die diskrete Topologie, so konvergiert eine Folge genau dann gegen $u \in X$, wenn alle bis auf endlich viele Folgenglieder mit u übereinstimmen.

(c) Ist $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ τ die Streifentopologie, so hat keine konvergente Folge einen eindeutigen Grenzwert.

Hinweis: *Eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert per Definition gegen $u \in X$, wenn für jede Umgebung U von u höchstens endlich viele Glieder der Folge nicht in U liegen.*

(zu a) Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $x \in X$ beliebig. Da $\tau = \{\emptyset, X\}$ ist und $\emptyset$ nie eine Umgebung sein kann, existiert nur eine Umgebung X von u. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, also $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liegen alle Glieder der Folge in jeder Umgebung von u und somit $x_n \to x$ für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und alle $x \in X$.

(zu b) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge, d.h. für jede Umgebung U von x liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von U. Da $\{x\} \in \tau$ eine Umgebung von x ist, liegen auch fast alle $x_n \in \{x\}$, was gleichbedeutend ist mit $x_n = x$ für fast alle x_n.

Angenommen es stimmen fast alle (alle bis auf endlich viele) Folgenglieder x_n mit x überein, dann ist stets $\{x\} \subseteq U \in \tau$ für eine Umgebung U von x. Somit liegen stets auch nur endliche viele $x_n \notin \{x\} \subseteq U$.

(zu c) Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige gegen $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge. Wähle $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ mit $v^1 = u^1$, aber $v \neq u$. Dann ist u in jeder Umgebung von v enthalten und vice versa. Sei dazu V eine Umgebung von v, d.h. es existiert eine Menge $M \in \tau$ mit $v \in M \subseteq U$. Die kleinste Umgebung ist genau ein Streifen der Breite Null, d.h. $M^* := \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) : x^1 = v^1\} \subseteq V$ für jede Umgebung V von v. Jedoch ist auch $u \in M^*$, sodass $u \in V$ für jede Umgebung V von v. Mit vertauschten Rollen folgt auch, dass $v \in U$ für jede Umgebung U von u. Erfüllt also U die Konvergenzbedingung, so wird sie auch V erfüllt.

Hausaufgaben

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Höhere Analysis 1 – Übungsblatt 2

Thema: Konvergenz & Kompaktheit in topologischen Räumen

Übung 4

Es sei τ die sogenannte koabzählbare Topologie auf $\mathbb{R}$, das heißt

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus O \text{ ist abzählbar}\}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) τ ist in der Tat eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(b) Eine Folge $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ konvergiert genau dann bezüglich τ gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn alle bis auf endlich viele Folgenglieder mit x übereinstimmen.

(c) Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist folgenabgeschlossen bzgl. τ.

(d) Es gibt eine folgenabgeschlossene Menge in $(\mathbb{R}, \tau)$, die nicht abgeschlossen ist.

(zu a) Es ist $\emptyset \in \tau$ offensichtlich und $\mathbb{R} \in \tau$, weil $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ abzählbar ist. Seien $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$ mit einer beliebigen Indexmenge I. Das bedeutet, dass $\mathbb{R} \setminus U_i$ abzählbar ist für alle $i \in I$. Dann ist

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus U_i)}_{\text{abzählbar}}$$

abzählbar, da der Schnitt abzählbarer Mengen offensichtlich wieder abzählbar ist. Sei nun $I = \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus U_i)$$

wieder abzählbar, da die endliche Vereinigung abzählbarer Mengen gemäß der Vorlesung MINT (oder auch ANAG vllt) wieder abzählbar ist.

(zu b) **($\Rightarrow$)** Sei $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Betrachten wir die Menge $M := \{x_n \colon x_n \neq x\}$. A ist abzählbar, d.h. $V := \mathbb{R} \setminus M \in \tau$. Wegen $x \in V$ ist V eine Umgebung von x. Aufgrund der Konvergenz von $\{x_n\}$ liegen nur endlich viele Folgenglieder nicht in V, d.h. $x_n \in \mathbb{R} \setminus V = M$ für alle $n \in \{1, \ldots, N\}$. Für alle $n \geq N$ gilt $x_n \in V = \mathbb{R} \setminus M$, also $x_n = x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Sei $x_n = x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und U eine Umgebung von x, d.h. insbesondere $x \in U$ und damit auch $x_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Somit liegen also fast alle Folgenglieder in einer beliebigen Umgebung von x und deshalb $x_n \to x$.

(zu c) Sei $\{x_n\} \subset M$ eine Folge mit $x_n \to x$ und $x \in \mathbb{R}$. Nach Teil (b) existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n = x$ für alle $n \geq N$. Damit ist schließlich schon $x \in M$, da $x_n \in M$ vorausgesetzt war.

(zu d) Alle $M \subset \mathbb{R}$ sind folgenabgeschlossen. Es reicht also eine nicht abgeschlossene Menge M zu finden. Es gilt

$$\begin{aligned} M \subset \mathbb{R} \text{ abgeschlossen} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{R} \setminus M \text{ offen, d.h. } (\mathbb{R} \setminus M) \in \tau \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus M) \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \setminus M = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad M \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \subseteq M \end{aligned}$$

Damit erfüllt jedes nicht-abzählbare $M \subsetneq \mathbb{R}$ die Bedingungen, z.B. $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Übung 5

Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Die Vereinigung endlich vieler kompakten Mengen $M_i \subset X$ ist kompakt.

(b) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge $M \subset X$ ist relativ kompakt.

(c) Ist τ die koendliche Topologie auf $X = \mathbb{R}$, also $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus O \text{ ist endlich}\}$, so gibt es eine Teilmenge von X, die kompakt, aber nicht abgeschlossen ist.

(zu a) Seien $M_i \subset X$ kompakt für alle $i \in I = \{1, \dots, n\}$. Betrachten wir nun $M := \bigcup_{i \in I} M_i$ mit einer Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$. Da $M_i \subset M$ existiert für alle $i \in I$ eine endliche Teilüberdeckung $U_{i,1}, \dots, U_{i,k_i}$ von M_i. Somit ist $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} U_{i,k_j}$ endlich und überdeckt alle F_i, also auch F.

(zu b) Sei $M \subset X$ kompakt und $A \subseteq M$ abgeschlossen. A ist genau dann relativ kompakt, wenn $\mathrm{cl}(A)$ kompakt ist. Wegen der Abgeschlossenheit von A und demzufolge $\mathrm{cl}(A) = A$ reicht es zu zeigen, dass A kompakt ist. Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $A \subseteq M$. Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A \in \tau$, d.h. $\widetilde{\mathcal{U}} := \{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}$ ist eine offene Überdeckung von M. Aufgrund der Kompaktheit von M existiert eine endliche Teilüberdeckung $\widetilde{\mathcal{U}}^*$ von M. Wegen $A \subseteq M$ ist $\widetilde{\mathcal{U}}^*$ auch eine endliche Überdeckung von A. Ist $X \setminus A \in \widetilde{\mathcal{U}}^*$, dann wähle $\mathcal{U}^* := \widetilde{\mathcal{U}}^* \setminus \{X \setminus A\}$, sodass $\mathcal{U}^*$ eine endliche Teilüberdeckung von A ist. Somit ist A also kompakt und damit auch relativ kompakt.

(zu c) Wir zeigen, dass jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt bezüglich τ ist. Sei also $M \subseteq \mathbb{R}$ beliebig und $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M. Wähle nun $U_0 \in \mathcal{U}$ beliebig. Da $U_0 \in \tau$, ist $\mathbb{R} \setminus U_0$ endlich, d.h. nur endlich viele Elemente von M liegen nicht in U_0. Schreibe $\{x_1, \dots, x_n\} = (\mathbb{R} \setminus U_0) \cap M$. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ finden wir nun ein $U_i \in \mathcal{U}$ mit $x_i \in U_i$. Dann ist $\{U_0\} \cup \{U_i\}_{i=1}^n$ eine endliche Teilüberdeckung von M und M somit kompakt bezüglich τ. Weiterhin gilt

$$M \text{ abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R} \setminus M \in \tau \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus M) = M \text{ endlich oder } \mathbb{R} \setminus M = \emptyset$$

Somit ist jede nicht-endliche Menge $M^* \subsetneq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen, aber kompakt bezüglich τ.

Übung 6

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede kompakte Teilmenge von X folgenkompakt.

(b) Erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede folgenkompakte Teilmenge von X kompakt.

Hinweis: Gilt das erste Abzählbarkeitsaxiom und hat eine Folge $\{x_n\} \subset X$ keine konvergente Teilfolge, so hat sie auch keinen Häufungspunkt. Das heißt, jedes $x \in X$ hat eine Umgebung, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen.

Hausaufgaben

Eric Kunze
Matr.-Nr. 4679202

Höhere Analysis 1 – Übungsblatt 3

Thema: Netze und normierte Räume

Übung 7

Es seien X ein topologischer Raum, $M \subset X$ und $u \in X$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt genau dann $u \in \mathrm{cl}(M)$, wenn ein Netz $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset M$ gegen u konvergiert.

(b) M ist genau dann kompakt, wenn M Netz-folgenkompakt ist.

Es seien zudem Y ein weiterer topologischer Raum und $F \colon X \to Y$. Beweisen Sie:

(c) F ist genau dann stetig, wenn F Netz-folgenstetig ist.

Hinweis: Hat ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ kein konvergentes Teilnetz, so hat es auch keinen Häufungspunkt. Das heißt, zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x und ein $\alpha \in I$ mit der Eigenschaft, dass für $\beta \in I$ mit $\alpha \leq \beta$ stets $x_\beta \notin U$ gilt. Vergleiche dazu auch den Hinweis zu Aufgabe 6.

(zu a) **(⇒)** Bezeichne mit $I = \mathcal{U}(u)$ die Menge der Umgebungen eines Punktes $u \in X$ und betrachte die Richtung $U \preccurlyeq V \quad :\Leftrightarrow \quad V \subseteq U$. Definieren wir nun ein Netz $u \colon I \to M$ durch Auswahl eines $u_\alpha \in \alpha \cap M$ für alle $\alpha \in I$. Dieses existiert aufgrund des Auswahlaxioms und der Tatsache, dass für $u \in \mathrm{cl}(M)$ gilt $\alpha \cap M \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in I$. Nun konvergiert dieses Netz bereits nach Konstruktion: Sei U eine offene Umgebung von u, d.h. insbesondere $u \in U$. Nach Definition gilt dann $U \in \mathcal{U}(u)$ und wenn $U \preccurlyeq \alpha$ gilt, dann ist $u_\alpha \in \alpha \subseteq U$, d.h. alle Netzglieder beginnend bei U liegen in U.

(⇐) Sei $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq M$ ein gegen u konvergentes Netz. Angenommen $u \notin \mathrm{cl}(M)$, d.h. $u \in X \setminus \mathrm{cl}(M)$, was offen ist. Da $u_\alpha \to u$ existiert ein α_0, sodass für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ gilt $u_\alpha X \setminus \mathrm{cl}(M) \subset X \setminus M$ im Widerspruch zum Definitionsbereich des Netzes $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

(zu b) **(⇒)** Angenommen M sei kompakt und es existiere ein Netz $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ohne Häufungspunkt. Dementsprechend existiert auch kein konvergentes Teilnetz. Dadurch, dass kein $x \in M$ ein Häufungspunkt von $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ist, existiert für alle $x \in M$ eine offene Umgebung $U(x) \subseteq M$ von u und ein Index $\alpha_x \in I$, sodass $x_\alpha \notin U(x)$ für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_x$. Dann ist jedoch $\{U(x)\}_{x \in M}$ eine offene Überdeckung von M, die aufgrund der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. es existieren $x_1, \dots, x_n \in M$, sodass $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$. Da I eine gerichtete Menge ist, existiert ein $\beta \in I$ mit $\beta \succcurlyeq \alpha_{x_i}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt $x_\beta \notin U(x_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ im Widerspruch zur Überdeckung von M durch die $U(x_i)$.

(⇐) Angenommen jedes Netz in M habe einen Häufungspunkt und M besitzt eine offene Überdeckung $\mathcal{O}$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Definieren wir uns nun eine gerichtete Menge I als Menge aller endliche Teilüberdeckungen von $\mathcal{O}$ mit der Richtung $U \preccurlyeq V \quad :\Leftrightarrow \quad U \subseteq V$. Für alle $A \in I$ wird M nicht von

$\bigcup_{U \in A} U$ überdeckt, d.h. wir können für alle $A \in I$ einen Punkt $x_A \in M \setminus \bigcup_{U \in A} U$ auswählen. Dies definiert uns wieder ein Netz $\{x_A\}_{A \in I}$. Dann hat $\{x_A\}_{A \in I}$ einen Häufungspunkt $x \in M$. Da $\mathcal{O}$ die Menge M überdeckt, existiert ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V$ und es gilt $\{V\} \in I$. Also existiert ein $A \succcurlyeq \{V\}$, sodass $x_A \in V$. Das bedeutet jedoch, dass A eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{O}$ ist, die V enthält im Widerspruch zur Wahl von x_A.

(zu c) **($\Rightarrow$)** Angenommen $F\colon X \to Y$ sei stetig und $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq X$ sei ein gegen $u \in X$ konvergentes Netz. Nehmen wir uns eine Umgebung $U \subseteq Y$ von $F(u)$, dann ist das Urbild $F^{-1}(U) \subseteq X$ eine Umgebung von u. Da $u_\alpha \to x$ konvergiert, existiert ein $\alpha_0 \in I$, sodass $u_\alpha \in F^{-1}(U)$ für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$. Dies bedeutet wiederum, dass $F(u_\alpha) \in U$ für alle $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$. Damit konvergiert auch $\{F(u_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ gegen $F(u)$.

($\Leftarrow$) Betrachten wir nun erneut als gerichtete Menge $I = \mathcal{U}(u)$ die Menge aller Umgebungen von u mit Richtung $U \preccurlyeq V \quad :\Leftrightarrow \quad V \subseteq U$. Nehmen wir nun an, dass $F\colon X \to Y$ nicht stetig sei, d.h. es existiert eine offene Menge $U \subseteq Y$, für die $F^{-1}(U)$ nicht offen ist. Dies bedeutet, dass $F^{-1}(U)$ einen Punkt u enthält, für den jede Umgebung $V \subseteq X$ einen Netzpunkt $u_V \notin F^{-1}(U)$ enthält. Die gewählten Punkte u_V bilden dann ein Netz $\{u_V\}_{V \in I}$. Dieses konvergiert gegen u, da für jede offene Umgebung $V \subseteq X$ von u und ein beliebiges $V' \succcurlyeq V$ gilt, dass $u_{V'} \in V' \subseteq V$. Konvergiere nun das Netz $\{F(u_V)\}_{V \in I} \subseteq Y$ gegen $F(u)$. Ist $U \subseteq Y$ eine offene Umgebung von $F(u)$, dann existiert ein $V_0 \in I$, sodass $F(x_V) \in U$ für alle $V \succcurlyeq V_0$. Das bedeutet jedoch auch, dass $x_V \in F^{-1}(U)$ im Widerspruch zur Annahme.

Übung 8

Es sei Ω ein kompakter topologischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Ist Ω ein metrischer Raum, so ist Ω vollständig.

(b) Der Raum $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ der stetigen Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ ausgestattet mit der kanonischen Metrik
$$d(u,v) := \max_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|$$
ist vollständig.

(zu a) Sei $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ eine Cauchy-Folge. Da Ω kompakt und metrisch ist, also insbesondere auch folgenkompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $\{\omega_{n_k}\}_k$ mit $\omega_{n_k} \to \omega \in \Omega$. Daher existiert ein N_1, sodass $d(\omega_{n_k}, \omega) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$. Sei N_2 so gewählt, dass für $n, m \geq N_2$ gilt $d(\omega_n, \omega_m) < \varepsilon/2$. Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann nach Dreiecksungleichung
$$d(\omega_n, \omega) \leq d(\omega_n, \omega_N) + d(\omega_n, \omega) < \varepsilon$$
Also gilt $\omega_n \to \omega$ und Ω ist vollständig.

Übung 9

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$. Beweisen Sie:

(a) Jede Cauchyfolge in X ist beschränkt.

(b) $|\cdot|$ sei eine p-Norm auf $\mathbb{K}^2$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Dann ist

$$\|\cdot\| : \begin{cases} X \times Y & \to & \mathbb{K} \\ (u,v) & \mapsto & \|(u,v)\| := |(\|u\|_X, \|u\|_Y)| \end{cases}$$

eine Norm auf dem linearen Raum $X \times Y$.

(c) $X \times X$ sei mit der Norm $\|(u,v)\| = \|u\|_X + \|v\|_X$ ausgestattet und $\mathbb{K} \times X$ mit der Norm $\|(\alpha, u)\| = |\alpha| + \|u\|_X$. Dann sind Addition, Skalarmultiplikation und Norm stetige Abbildungen.

(zu a) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Mithilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\|x_n\| - \|x_m\| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| < \varepsilon + \|x_m\| \qquad \forall n, m \geq N$$

Setze nun $m = N$, dann ist $\|x_n\| < \|x_N\| + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h.

$$\|x_n\| < \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + \varepsilon\} =: M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist M eine Schranke für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(zu b) (i) Ist $(u,v) = 0$, dann gilt $\|(u,v)\| = |(\|0\|_X, \|0\|_Y)|_p = |(0,0)|_p = 0$. Sei umgekehrt $0 = \|(u,v)\| = |(\|u\|_X, \|v\|_Y)|_p$. Dann ist $(\|u\|_X, \|v\|_Y) = 0$ (Normeigenschaft von $|\cdot|_p$) und da auch $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ Normen sind, folgt daraus $u = 0 = v$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda(u,v)\| = \|(\lambda u, \lambda v)\| &= |(\|\lambda u\|_X, \|\lambda v\|_Y)|_p \\ &= |(|\lambda| \cdot \|u\|_X, |\lambda| \cdot \|v\|_Y)|_p \\ &= ||\lambda| \cdot (\|u\|_X, \|v\|_Y)|_p \\ &= |\lambda| \cdot |(\|u\|_X, \|v\|_Y)|_p \\ &= |\lambda| \cdot \|(u,v)\| \end{aligned}$$

(*iii*) Seien $(u,v),(u',v') \in X \times Y$. Mit $\triangle_X$ bezeichnen wir die Anwendung der Dreiecksungleichung von Norm X.

$$\begin{aligned}
\|(u,v)+(u',v')\| &= \|(u+u',v+v')\| \\
&= \left|\left(\|u+u'\|_X\,,\|v+v'\|_Y\right)\right|_p \\
&\leq \left|\left(\|u\|_X+\|u'\|_X\,,\|v\|_Y+\|v'\|_Y\right)\right|_p && (\triangle_X,\triangle_Y) \\
&= \left|\left(\|u\|_X\,,\|v\|_Y\right)+\left(\|u'\|_X\,,\|v'\|_Y\right)\right|_p \\
&\leq \left|\left(\|u\|_X\,,\|v\|_Y\right)\right|_p+\left|\left(\|u'\|_X\,,\|v'\|_Y\right)\right|_p && (\triangle_p) \\
&= \|(u,v)\|+\|(u',v')\|
\end{aligned}$$