

1 Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{50x}{625x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$g(x) = \left(1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi \cdot x\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$g'(x) = -\frac{\pi \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}{\sqrt[3]{1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}}$$

1.1 Herleitung des linearen Splines

$$s_k^1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h_N} \cdot (x - x_k) \quad \text{für alle } k = 0, \dots, N$$

1.2 Herleitung des kubischen Splines

(vgl. Abschnitt 1.3 im Skript).

$$s_k^3(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}s_k^3(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k \quad (2)$$

$$\triangleright s_k(x_k) = d_k = f(x_k) \quad (\text{Interpolationsbedingung})$$

$$\triangleright \frac{d}{dx}s_k^3(x_k) = c_k = f'(x_k) \quad (\text{Interpolation der Ableitung})$$

$$\triangleright m_k := s'(x_k) = f'(x_k) \quad \text{und } h_k = h_N \quad \text{für alle } k = 0, \dots, N$$

$$\begin{pmatrix} h_N^3 & h_N^2 \\ 3 \cdot h_N^2 & 2 \cdot h_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_{k+1}) - f(x_k) - m_k \cdot h_N \\ m_k \cdot h_N - m_k \end{pmatrix} \quad (3)$$

2 Plots

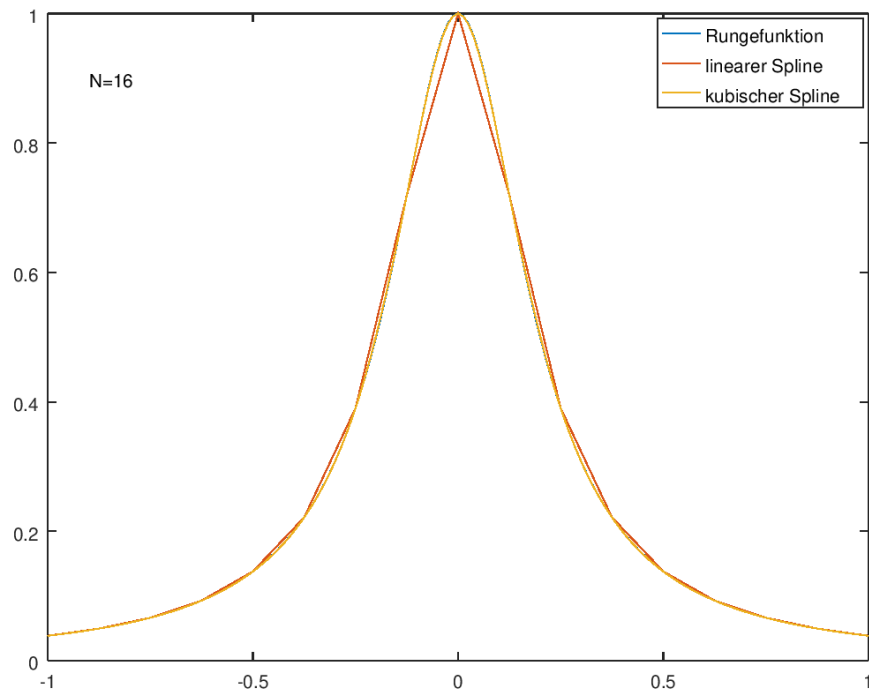


Abbildung 1: Interpolation der Runge-Funktion f

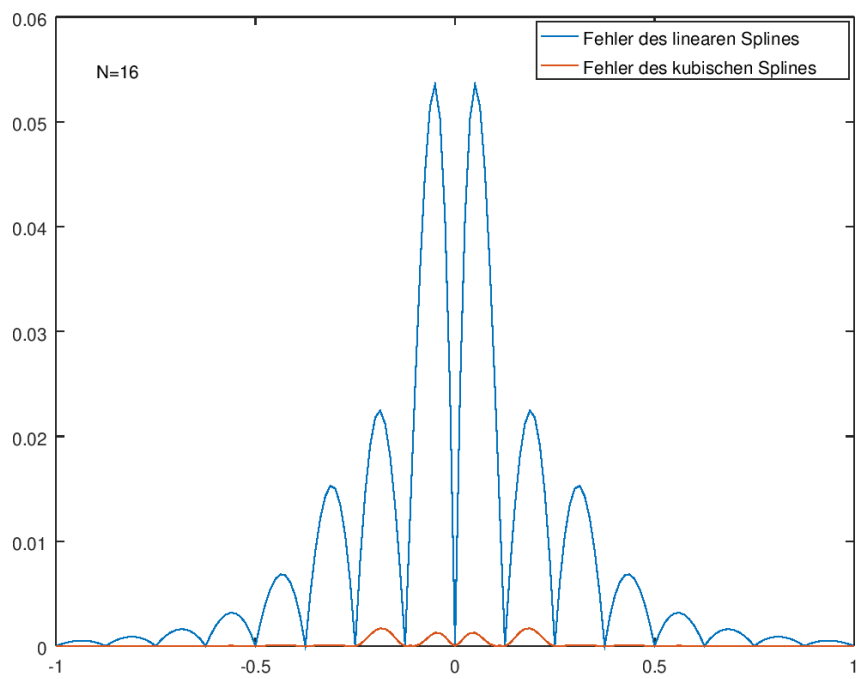


Abbildung 2: Interpolationsfehler der Runge-Funktion f

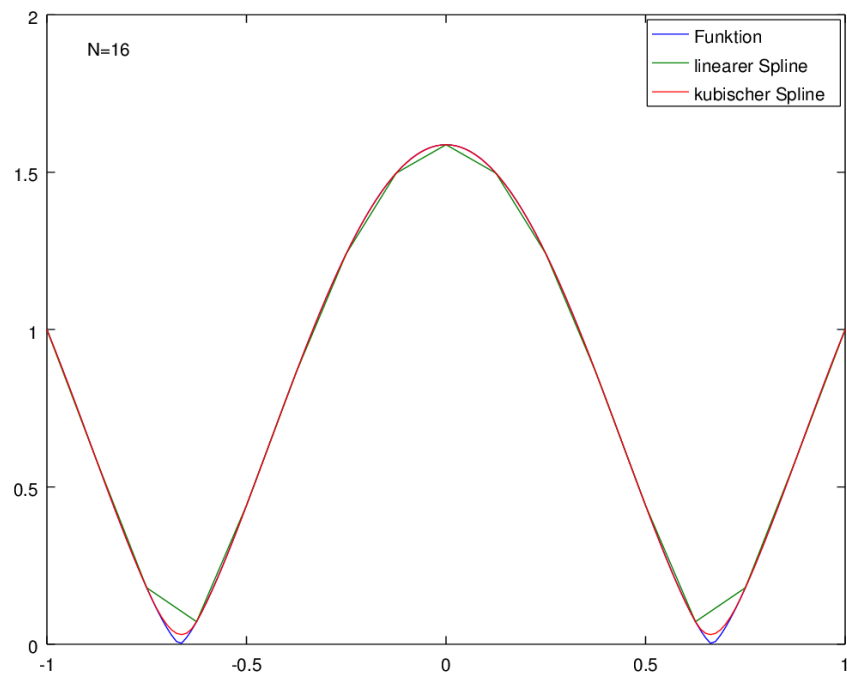


Abbildung 3: Interpolation der anderen Funktion g

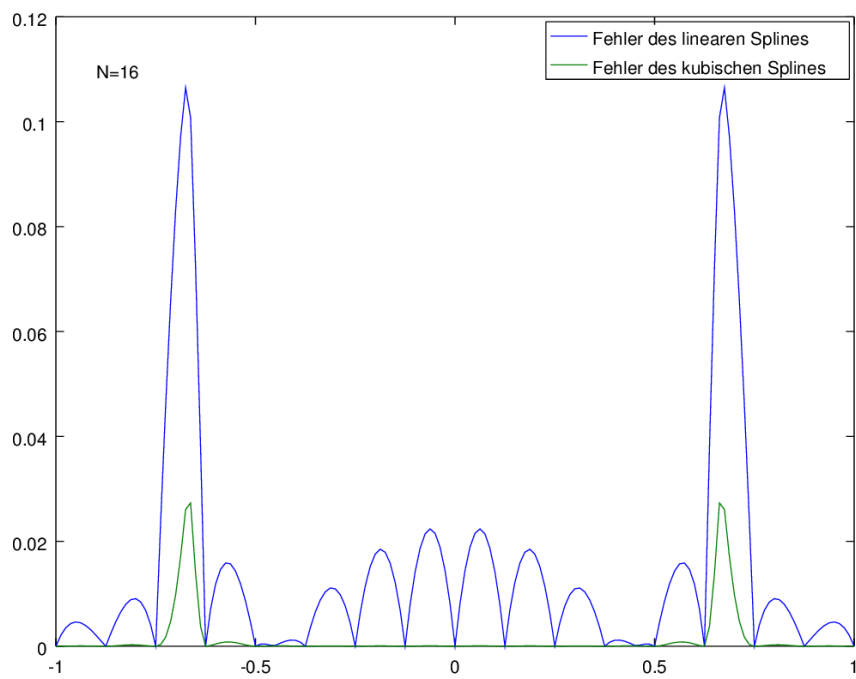


Abbildung 4: Interpolationsfehler der anderen Funktion g

3 Fehler und Tabellen

Tabelle 1: Maximaler Fehler bei Interpolation der Runge-Funktion

k	N_k	$E(h_{N_k})$ linear	$E(h_{N_k})$ kubisch
0	4	0.17872	0.21938
1	8	0.063128	0.035509
2	16	0.053536	0.0016935
3	32	0.020652	0.00038860
4	64	0.0058496	0.000033560

Tabelle 2: Experimentelle Konvergenzordnung bei Interpolation der Runge-Funktion

k	N_k	$EOC(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ linear	$EOC(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ kubisch
0	4	1.5013	2.6272
1	8	0.2378	4.3901
2	16	1.3742	2.1237
3	32	1.8199	3.5334
4	64	1.9541	3.8869
5	128	1.9885	3.9719
6	256	1.9971	3.9930
7	512	1.9992	3.9982
8	1024	1.9998	3.9996
9	2048	2.0000	3.9999
10	4096	2.0000	4.0000

Tabelle 3: Maximaler Fehler bei Interpolation der anderen Funktion

k	N_k	$E(h_{N_k})$ linear	$E(h_{N_k})$ kubisch
0	4	0.61130	0.19577
1	8	0.26300	0.070736
2	16	0.10648	0.027316
3	32	0.042468	0.010764
4	64	0.016874	0.0042640

Tabelle 4: Experimentelle Konvergenzordnung bei Interpolation der anderen Funktion

k	N_k	$EOC(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ linear	$EOC(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ kubisch
0	4	1.2168	1.4686
1	8	1.3045	1.3727
2	16	1.3261	1.3436
3	32	1.3316	1.3359
4	64	1.3328	1.3340
5	128	1.3332	1.3335
6	256	1.3332	1.3334
7	512	1.3333	1.3333
8	1024	1.3333	1.3333
9	2048	1.3333	1.3333
10	4096	1.3333	1.3333