TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Stochastik, Professur für Stoch. Analysis und Finanzmathematik

VERTIEFUNG IN DER STOCHASTIK

Prof. Dr. Martin Keller-Ressel

Wintersemester 2019/20

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
EINFÜHRUNG

1.1 Zentrale Fragestellungen der Finanzmathematik

1.1.1 Bewertung von Derivaten und Abischerung gegen aus deren Kauf/Verkauf entstehende Risiken

Definition 1.1 (Derivat)
Ein **Derivat** ist ein Finanzprodukt, dessen Auszahlung sich vom Preis eines oder mehrerer Basisgüter [underlying] ableitet.

Beispiel 1.2
- Recht in drei Monaten 100.000 GBP gegen 125.000 EUR zu erhalten (Call-Option; underlying: Wechselkurs GBP in EUR)
- Recht innerhalb des nächsten Jahres 100.000 MWh elektrische Energie zum Preis von 30 EUR/MWh zu konsumieren mit Mindestabnahme 50.000 MWh (Swing-Option; underlying: Strompreis)
- Kauf- und Verkaufsoptionen azf Aktien (underlying: Aktienkurs)

Fragestellungen:
- Was ist der "faire“ Preis für solch ein Derivat? ("Pricing“ / Bewertung)
- Wie kann sich der Verkäufer gegen die eingegangenen Risiken absichern? ("Hedging“ / Absicherung)

1.1.2 Optimale Investition: Zusammenstellen von nach Risiko-/ Ertragsgesichtspunkten optimalen Portfolios

- Wie wäge ich Risiko gegen Ertrag ab?
- Was bedeutet optimal?
- Lösung des resultierenden Optimierungsproblems

1.1.3 Risikomanagement und Risikomessung

gesetzliche Vorschriften (Basel und Solvency) sollen Stabilität des Banken- und Versicherungssystems angesichts verschiedener Risiken sicherstellen
$\to$ mathematische Theorie der konvexen und kohärenten Risikomaße

Mathematische Werkzeuge: Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse (Dynamik in der Zeit), zusätzlich etwas lineare Algebra, Optimierung, Maßtheorie

1.2 Mathematisches Finanzmodell

Wir betrachten

(1) einen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, später auch weitere Maße $\mathbb{Q}, \ldots$ auf demselben Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Die $\omega \in \Omega$ werden als **Elementarereignisse** oder **"Szenarien"** bezeichnet.

(2) Zeitachse I entweder $I = \{t_1, t_2, \ldots t_N = T\}$ (N-Perioden-Modell; diskretes Modell) oder $I = [O, T]$ (stetiges Modell) Dabei wird T als **Zeithorizont** bezeichnet.

Definition 1.3 (stochastischer Prozess)
Ein stochastischer Prozess S ist eine messbare Abbildung

$$S : \begin{cases} (\Omega \times I) & \to & \mathbb{R}^d \\ (\omega, t) & \mapsto & S_t(\omega) \end{cases}$$

Insbesondere ist

- $t \mapsto S_t(\omega)$ eine Funktion $I \to \mathbb{R}^d$ für jedes $\omega \in \Omega$
- $\omega \mapsto S_t(\omega)$ eine Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{R}^d$ für jedes $t \in I$

(3) **Definition 1.4 (Filtration)**
Eine Filtration ist eine Folge von σ-Alegbren $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall s, t \in I, s \leq t \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall t \in I$$

Interpretation. *$\mathcal{F}_t$ beschreibt die den Marktteilnehmern zum Zeitpunkt t bekannte bzw. verfügbare Information. Ein Ereignis $A \in \mathcal{F}_t$ gilt als "zum Zeipunkt t bekannt".*

Erinnerung. Eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable X heißt $\mathcal{F}_t$-messbar, wenn

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t \quad \forall \text{ Borelmengen } B \subseteq \mathbb{R}^d$$

Beispiel 1.5
Sei S ein stochastischer Prozess. Dann heißt

$$\mathcal{F}_t^S = \sigma(\{(S_r) : r \in I, r \leq t\})$$

von S erzeugte Filtration.

Definition 1.6 (adaptierter Prozess)
Ein stochastischer Prozess $(S_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **adapiert** bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, wenn gilt S_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \in I$.

Interpretation: Der Wert S_t ist zum Zeitpunkt t "bekannt".

Warum Filtrationen in der Finanzmathematik?
- Unterscheidung Zukunft/Vergangenheit
- Unterscheidung Informationen (Insider/Outsider) Unterscheidung Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ bzw. $(\mathcal{G}_t)_{t\in I}$

(4) Anlagegüter [assets]: $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger stochastischer Prozess mit Komponenten

$$S^i : \begin{cases} (\Omega \times I) & \to \quad \mathbb{R} \\ (\omega, t) & \mapsto \quad S^i_t(\omega) \end{cases} \qquad (i \in \{0, 1, \dots, d\})$$

S^i_t beschreibt dabei den Preis des i-ten Anlageguts zum Zeitpunkt t. S^i $(i \in \{1, \dots, d\})$ ist typischerweise
- Aktien [stock], Unternehmensanteil
- Währung [currency] bzw. Wechselkurs
- Rohstoff [commodity] wie z.B. Öl, Edelmetall, Elektrizität
- Anleihe [bond] ... Schuldverschreibung

Hauptannahme: S^i ist liquide gehandelt (z.B. Börse), d.h. der Kauf und Verkauf zum Preis S^i_t ist jederzeit möglich. Der "Numeraire" S^0 hat eine Sonderrolle und beschreibt die Verzinsung von nicht in $(S^1, \dots, S^d)$ angelegtem Kapital. Er wird als risikolos betrachtet.

Definition 1.7
Ein Finanzmarktmodell (FFM) mit Zeitachse I ist gegeben durch
(1) einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$
(2) einem an $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ adaptierten, $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen stiochastischen Prozess $S_t = (S^0_t, S^1_t, \dots, S^d_t)$ mit $t \in I$.

Beispiel 1.8 (Cox-Ross-Rubinstein-Modell)
Das CRR-Modell ist ein zeitdiskretes Modell beschrieben durch
- $S^0_n = (1 + r)^n$ ...Verzinsung mit konstanter Rate r
- $S^1_n = S^1_0 \prod_{k=1}^n (1+R_k)$, wobei $(R_1, R_2, \dots)$ unabhängige Zufallsvariablen mit zwei möglichen Werten $a < b$ sind

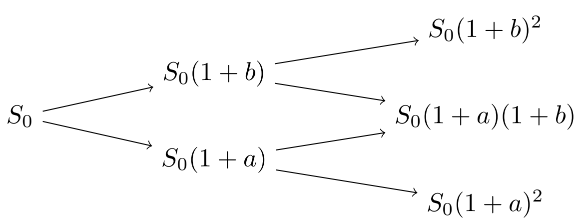

Abbildung 1.1: Cox-Ross-Rubinstein-Modell

$\hookrightarrow$ rekombinierender Baum, Ereignisse ω entsprechen Pfaden im Baum

Beispiel 1.9 (Black-Scholes-Modell, zeitstetig)
Beim Black-Scholes-Modell handelt es sich um ein zeitstetiges Modell auf einem unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum.

$$
\begin{aligned}
S_t^0 &= e^{rt} && \text{(Verzinsung mit konstanter Rate } r\text{)} \\
S_t^1 &= S_0^1 \cdot \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma B_t \right) && \text{mit } \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0^1 > 0
\end{aligned}
$$

Der Term $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ beschreibt dabei eine Trendkomponenten, B_t eine "Brownsche Bewegung" (zeitstetiger Prozess).

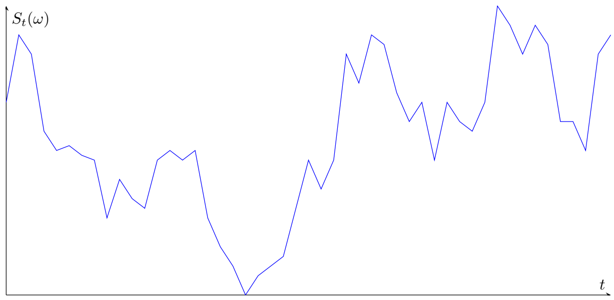

Abbildung 1.2: Black-Scholes-Modell

1.3 Anleihen und grundlegende Beispiele für Derivate

Hier betrachten wir immer nur ein Basisgut $S_t = S_t^1$.

(a) **Anleihe** [bond] (genauer: Null-Kupon-Anleihe [zero-coupon bond])

Der Emittent (Herausgeber) einer Anleihe mit Endfälligkeit [maturity] T garantiert dem Käufer zum Zeitpunkt T den Betrag N (EUR/USD/...) zu zahlen. Typische Emittenten sind z.B. Staaten [government bond] oder Unternehmen (als Alternative zur Kreditaufnahme). Nach Emission werden Anleihen auf dem Sekundärmarkt weiterverkauft, d.h. liquide gehandelte Wertpapiere.

Preis bei Emission:	$B(0,T)$
Preis bei Weiterverkauf zum Zeitpunkt $t \leq T$:	$B(t,T)$

Es ist $B(T,T) = N$ und wir normieren stets $N = 1 \quad \Rightarrow \quad B(T,T) = 1$.

Anleihen von West-/ Nord-/ Mitteleuropäischen Staaten und den USA sowie Kanada werden als risikolos betrachtet (sichere Zahlung). Sonst: Kreditrisiko

Risikofreie Anleihen können als Numeraire $S_t^0 = B(t,T)$ genutzt werden.

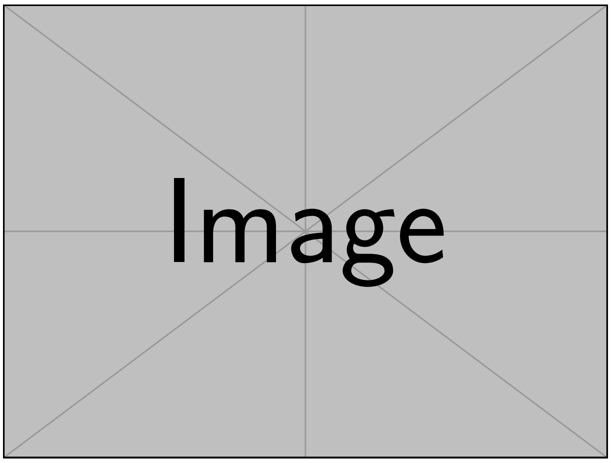

Abbildung 1.3: Zahlungsstrom einer Anleihe

(b) **Terminvertrag** [forward contract]

aus Käufersicht: Vereinbarung zu bestimmtem zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisguts S zum Preis K zu kaufen (Kaufverpflichtung). Beliebt ist dieser bei Rohstoffen und Elektrizität.

Auszahlungsprofil: $F_T = S_T - K$ Preis zum Zeitpunkt t: F_t

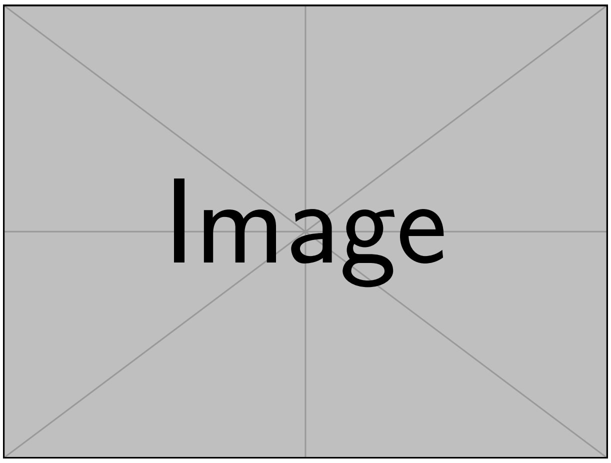

Abbildung 1.4: Auszahlungsprofil eines Terminvertrags

(c) **(Europäische) Put- bzw. Call-Option**

Recht zu einem zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisguts S zum Preis K zu verkaufen (put) bzw. zu kaufen (call) $\rightarrow$ keine Kaufverpflichtung !

Auszahlungsprofil:

- Call: $C_T = \begin{cases} S_T - K & S_T \geq K \\ 0 & S_T < K \end{cases} = (S_T - K)_+$
- Put: $P_T = \begin{cases} 0 & S_T \geq K \\ K - S_T & S_T < K \end{cases} = (K - S_T)_+$

(d) **Amerikanische Put- bzw. Call-Option** wie Put/Call, aber mit Ausübung zu beliebigem Zeitpunkt $\tau \in [0, T]$.

Preis zum Zeitpunkt t:	P_t^{AM}, C_t^{AM}
Auszahlungsprofil zum Zeitpunkt τ:	$(S_\tau - K)_+$, $(K - S_\tau)_+$

Der Zeitpunkt τ muss im Allgemeinen als Lösung eines stochastischen Optimierungsproblems bestimmt werden (optimales Stopp-Problem).

1.4 Elementare Replikations- und Arbitrageargumente

Was können wir (mit elementaren Mitteln) über die "fairen" Preise $B(t, T), F_t, C_t, P_t$ aussagen?

Wir verwenden:

- **Replikationsprinzip**: zwei identische, zukünftige Zahlungsströme haben auch heute denselben Wert (ein Zahlungsstrom "repliziert" den anderen)
- **No-Arbitrage-Prinzip**: "Ohne Kapitaleinsatz kann kein sicherer Gewinn ohne Verlustrisiko erzielt werden." (Arbitrage = risikofreier Gewinn)
- **Superreplikationsprinzip** (schwächere Form des Replikationsprinzips): Ist ein Zahlungsstrom in jedem Fall größer als ein anderer, so hat er auch heute den größeren Wert.

stark	Replikationsprinzip	eingeschränkt anwendbar
$\downarrow$	Superreplikationsprinzip	$\uparrow$
schwach	No-Arbitrage-Prinzip	immer anwendbar

Lemma 1.10
Für den Preis C_T des europäischen Calls gilt:

$$(S_t - KB(t, T))_+ \leq C_t \leq S_t$$

Beweis. untere Schranke: Für Widerspruch nehme an, dass $S_t - KB(t, T) - C_t = \varepsilon > 0$.

Portfolio	Wert in t	Wert in T: $S_T \leq K$	Wert in T: $S_T > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Verkaufe Basisgut	$-S_T$	$-S_T$	$-S_T$
Kaufe Anleihe	$\varepsilon + KB(t, T)$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} + K$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} + K$
Σ	0 kein Anfangskapital	$K - S_T + \frac{\varepsilon}{B(t,T)} > 0$ sicherer Gewinn	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} > 0$ sicherer Gewinn

Dies steht jedoch im Widerspruch zum No-Arbitrage-Prinzip. Somit ist $S_t - KB(t, T) \leq C_T$. Außerdem ist $C_t \geq 0$, d.h. $C_t \geq (S_t - KB(t, T))_+$.

obere Schranke: $\nearrow$ Übung $\square$

Lemma 1.11 (Put-Call-Parität)

Für Put P_t, Call C_t mit selbem Ausübungspreis K und Basisgut S_t gilt

$$C_t - P_t = S_t - B(t,T) \cdot K$$

Beweis. Mit Replikationsprinzip:

Portfolio 1	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Kaufe Anleihe	$K \cdot B(t,T)$	K	K
Wert Portfolio 1	$C_t + K \cdot B(t,T)$	K	S_T

Portfolio 2	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
Kaufe Put	P_t	$K - S_T$	0
Kaufe Basisgut	S_t	S_T	S_T
Wert Portfolio 2	$P_t + S_t$	K	S_T

Replikationsprinzip: $C_t + K \cdot B(t,T) = P_t + S_t \quad \Rightarrow \quad C_t + P_t = S_t - K \cdot B(t,T)$ □