TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Algebra, Professur für Algebra

ALGEBRA & ZAHLENTHEORIE

Hausaufgaben

Prof. Dr. Arno Fehm

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Algebra & Zahlentheorie – Übungsblatt 1

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Freitag 2. DS

Thema: Körpergrad, algebraische Erweiterungen

10 / 10 BE

Lemma 1

Sei K ein Körper. Ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(K)$, so gelten folgende Eigenschaften:

- $a = 0 \quad \Rightarrow \quad b, c \neq 0$
- $b = 0 \quad \Rightarrow \quad a, d \neq 0$
- $c = 0 \quad \Rightarrow \quad a, d \neq 0$
- $d = 0 \quad \Rightarrow \quad b, c \neq 0$
- Sind $a, b, c, d \in K^\times$, so ist $a^{-1}b - c^{-1}d \neq 0$.

Beweis. Ist ein Eintrag der Matrix gleich Null, so müssen die Einträge in der gleichen Zeile und der gleichen Spalte ungleich Null sein, da sonst eine Nullspalte oder Nullzeile den Rangverlust und damit auch den Verlust der Invertierbarkeit bedeuten würde. Daraus folgen bereits die ersten vier Aussagen. Für die letzte Aussage nehmen wir an, dass $a^{-1}b - c^{-1}d = 0$ gilt. Dann gilt auch $a^{-1}b = c^{-1}d$, was sich umstellen lässt zu $ad = bc$ bzw. zu $0 = ad - bc = \det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ im Widerspruch zur Invertierbarkeit. $\square$

Hausaufgabe 7

Ist $\alpha \in L \setminus K$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(K)$, so ist $K(\alpha) = K\left(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right)$.

- $K(\alpha) \subseteq K(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d})$.
  Wir wollen α aus $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ darstellen. Betrachten wir dazu für $x, y \in K(\alpha)$

$$\alpha = x \cdot \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} + y$$

einfacher: $g = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+b}$ nach α umstellen

Wir müssen nun 5 verschiedene Fälle unterscheiden.

(i) Ist $a = 0$, so sind $b, c \in K^\times$ nach Lemma 1. Dann finden wir mit $x = \frac{(c\alpha+d)^2}{bc}$ und $y = -c^{-1}d$

$$x \cdot \frac{b}{c\alpha + d} + y = \frac{(c\alpha + d)^2}{bc} \cdot \frac{b}{c\alpha + d} - \frac{d}{c} = \alpha + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} = \alpha$$

(ii) Ist $b = 0$, so sind nach Lemma 1 $a, d \in K^\times$. Falls $c = 0$ ist, so ist die Aussage mit $x = a^{-1}d$ klar. Sei also $0 \neq c \in K^\times$. Mit $x = -a^{-1}c^2(\alpha + c^{-1}d)^2 d^{-1}$ und $y = \frac{\alpha^2+2\alpha c^{-1}d}{c^{-1}d}$ ist

$$x \cdot \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} + y = \frac{c^2(\alpha + c^{-1}d)^2}{-ad} \cdot \frac{a\alpha}{c\alpha + d} + \frac{\alpha^2 + 2\alpha c^{-1}d}{c^{-1}d} = \alpha$$

(iii) Ist $c = 0$, so sind $a, d \in K^\times$ nach Lemma 1. Mit $x = a^{-1}d$ sowie $y = -a^{-1}b$ ist

$$x \cdot \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} + y = \frac{d}{a} \cdot \frac{a \cdot \alpha + b}{d} - \frac{b}{a} = \alpha + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = \alpha$$

(iv) Ist $a = 0$, so sind $b, c \in K^\times$ nach Lemma 1. Dann gilt mit $x = b^{-1}c\alpha^2$ und $y = -a \cdot \alpha^2 \cdot b^{-1}$

$$x \cdot \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} + y = \frac{c \cdot \alpha^2}{b} \cdot \frac{a \cdot \alpha + b}{c \cdot \alpha} - \frac{a \cdot \alpha^2}{b} = \frac{a \cdot \alpha^2 + b \cdot \alpha - a \cdot \alpha^2}{b} = \alpha$$

(v) Für den allgemeinen Fall seien $0 \neq a, b, c, d \in K^\times$. Zur besseren Nachvollziehbarkeit konstruieren wir hier das α direkt aus $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$. Wir multiplizieren zuerst mit $a^{-1}c$, was $\frac{\alpha+a^{-1}b}{\alpha+c^{-1}d}$ ergibt. Addieren wir eine -1, so liefert dies $\frac{a^{-1}b-c^{-1}d}{\alpha+c^{-1}d}$. Durch Multiplikation mit $\frac{(\alpha+c^{-1}d)^2}{a^{-1}b-c^{-1}d}$ (der Nenner ist wegen Lemma 1 nicht Null) erreichen wir $\alpha + c^{-1}d$. Abschließend eliminiert die Addition von $-c^{-1}a$ noch den letzten Summanden und wir erhalten α. Damit ergibt sich

$$x = \frac{c \cdot (\alpha + c^{-1}d)^2}{b - ac^{-1}d} \quad \text{und} \quad y = -\frac{(\alpha + c^{-1}d)^2}{a^{-1}b - c^{-1}d} - c^{-1}d$$

(vi) Die zwei weiteren Fälle, dass jeweils zwei diagonal zueinander stehende Elemente gleich Null sind ergeben sich unmittelbar aus den Operationen der Fälle, dass je einer von beiden Einträgen Null sind.

Damit gilt für jedes $\xi \in K(\alpha)$ auch $\xi \in K(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d})$.

- $K(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}) \subseteq K(\alpha)$.
  Da $\alpha \in K(\alpha)$ und $a, b \in K$ ist auch $a \cdot \alpha + b \in K(\alpha)$. Analog ist für $c \in K^\times$ und $d \in K$ auch $c \cdot \alpha + d \in K(\alpha)$. Angenommen $c \cdot \alpha + d = 0$, dann gilt $\alpha = -\frac{d}{c} \in K$ im Widerspruch zu $\alpha \in L \setminus K$. Damit ist also $c \cdot \alpha + d \neq 0$, d.h. $c \cdot \alpha + d \in K^\times$. Schließlich ist dann auch $(a \cdot \alpha + b) \cdot (c \cdot \alpha + d)^{-1} = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} \in K(\alpha)$. Daraus folgt nun die Inklusion $K(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}) \subseteq K(\alpha)$.

Schlussendlich folgt aus beiden Inklusionen die Gleichheit der Körper, also $K(\alpha) = K(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d})$

Hausaufgabe 8

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $1+\sqrt{5}/2$ und von $\zeta_5 + \zeta_5^{-1}$ jeweils über $\mathbb{Q}$. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1})$?

- Man stellt schnell fest, dass $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine Nullstelle von $f = X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist, denn

$$f(\alpha) = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} - 1 = 0$$

  Dieses Polynom ist normiert und besitzt die Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

  Somit ist f nach GEO II.7.1 irreduzibel und es gilt $f = \operatorname{MinPol}(\alpha \mid \mathbb{Q})$.

- Betrachten wir einige Potenzen von $\alpha = \zeta_5 + \zeta_5^{-1}$.

$$\alpha^3 = \zeta_5^3 + \zeta_5^{-3} + 3(\zeta_5 + \zeta_5^{-1})$$
$$\alpha^5 = 2 + 5(\zeta_5^3 + \zeta_5^{-3}) + 10(\zeta_5 + \zeta_5^{-1})$$

  Nun ist offensichtlich, dass man eine Null aus diesen Potenzen schreiben kann, nämlich $0 = \alpha^5 - 5\alpha^3 + 5\alpha - 2$. Damit ist erhält man ein Polynom $f = X^5 - 5X^3 + 5X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, welches α als Nullstelle hat. Dieses Polynom ist allerdings nicht irreduzibel, d.h. es gibt eine Zerlegung

$$f = (X-2)(X^2+X-1)^2$$

Da α keine Nullstelle von $X-2$ ist, jedoch von f, muss also α eine Nullstelle von $\overline{f} = X^2+X-1$ sein. Dieses Polynom ist normiert und hat nur die Nullstellen $x_{1/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Somit ist $\overline{f}$ nach GEO II.7.1 irreduzibel und es gilt $\overline{f} = \operatorname{MinPol}(\alpha \mid \mathbb{Q})$.

- Angenommen es gilt $\mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1})$. Ein Polynom mit Nullstelle ζ_5 ist zum Beispiel $\overline{f} = X^5+1 = (X-1)(X^4-X^3+X^2-X+1)$, wobei $f = X^4-X^3+X^2-X+1$ ein normierter, irreduzibler Faktor mit Nullstelle ζ_5 ist, also $f = \operatorname{MinPol}(\zeta_5 \mid \mathbb{Q})$. Damit ist ζ_5 algebraisch über $\mathbb{Q}$ und es gilt nach Satz 2.7 auch $[\mathbb{Q}(\zeta_5):\mathbb{Q}] = \deg(\zeta_5 \mid \mathbb{Q}) = 4$ und dem ersten Teil der Aufgabe $[\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1}):\mathbb{Q}] = \deg(\zeta_5+\zeta_5^{-1} \mid \mathbb{Q}) = 2$. Aufgrund der Multiplikativität des Körpergrades (Satz 1.12) gilt

$$\begin{array}{rcccc} & [\mathbb{Q}(\zeta_5):\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1})] & \cdot & [\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1}):\mathbb{Q}] & = & [\mathbb{Q}(\zeta_5):\mathbb{Q}] \\ \Rightarrow & [\mathbb{Q}(\zeta_5):\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1})] & \cdot & 2 & = & 4 \end{array}$$

woraus also $[\mathbb{Q}(\zeta_5):\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1})] = 4/2 = 2$ folgt, was im Widerspruch zur Annahme steht. Somit ist $\mathbb{Q}(\zeta_5) \neq \mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1})$.

Hausaufgabe 9

Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K mit $\deg(\alpha \mid K)$ ungerade. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$ gilt.

Da α algebraisch über K ist, existiert eine Polynom $f \in K[X]$, für das $f(\alpha) = 0$ gilt. Aus der Eigenschaft algebraisch zu sein folgt mit Satz 2.7 auch, dass $\deg(f) = \deg(\alpha|K) = [K(\alpha):K] = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Betrachte daher $f = \sum_{i=0}^{2k+1} c_i X^i$. Wir können f zerlegen in

$$f = \sum_{i=0}^{k} a_i X^{2i+1} + \sum_{i=0}^{k} b_i X^{2i} = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i X^{2i}\right) \cdot X + \sum_{i=0}^{k} b_i X^{2i}$$

wobei $a_i = c_{2i+1}$ und $b_i = c_{2i}$ für alle $i \in \{0,\dots,k\}$. Definieren wir nun

$$\overline{f} := \left(\sum_{i=0}^{k} a_i (\alpha^2)^i\right) \cdot X + \sum_{i=0}^{k} b_i (\alpha^2)^i \quad \in K(\alpha^2)[X]$$

Weiterhin gilt natürlich $\overline{f}(\alpha) = 0$. Der Leitkoeffizient von $\overline{f}$ ist nicht Null, da sonst der Grad von $\sum_{i=0}^{k} a_i(\alpha^2)^i$ kleiner als der Grad des Minimalpolynoms von α über K wäre. Angenommen $\operatorname{LC}(\overline{f}) = \sum_{i=0}^{k} a_i(\alpha^2)^i = 0$. Dann ist das Polynom $\sum_{i=0}^{k} a_i X^{2i} \in K[X]$ vom Grad $2k$ schon Minimalpolynom und $\deg(\alpha|K) = 2k$ gerade im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist $\operatorname{LC}(\overline{f}) \neq 0$.

Definieren wir also

$$g = X + \frac{\sum_{i=0}^{k} b_i \alpha^{2i}}{\sum_{i=0}^{k} a_i \alpha^{2i}} \quad \in K(\alpha)[X]$$

so hat dieses Grad 1 (ist also irreduzibel), ist normiert und α ist Nullstelle davon. Damit ist $[K(\alpha):K(\alpha^2)] = 1$ und die Körper sind gleich, d.h. $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Hausaufgaben

Algebra & Zahlentheorie – Übungsblatt 2

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Freitag 2. DS

Thema: Wurzelkörper, Zerfällungskörper, algebraischer Abschluss

10/10 BE

Hausaufgabe 23
Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und $[L : K]$ endlich und teilerfremd zu $\deg(f)$. Zeigen Sie, dass f auch in $L[X]$ irreduzibel ist.

Sei α eine Nullstelle von f in einem algebraischen Abschluss von L. Wegen Multiplikativität der Körpergrade ergibt sich $[L(\alpha) : K] = [L(\alpha) : L] \cdot [L : K] = [L(\alpha) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K]$. Also gilt

$$[L(\alpha) : L] = \frac{[L(\alpha) : K(\alpha)] \cdot [K(\alpha) : K]}{[L : K]} = \frac{[L(\alpha) : K(\alpha)] \cdot \deg(f)}{[L : K]}$$

Da $[L : K]$ und $\deg(f)$ teilerfremd sind, ist $[L : K]$ ein Teiler von $[L(\alpha) : K(\alpha)]$. Andererseits gilt auch immer $[L(\alpha) : K(\alpha)] \leq [L : K]$ und deshalb $[L(\alpha) : K(\alpha)] = [L : K]$. Somit folgt dann daraus $[L(\alpha) : L] = \deg(\alpha|L) = \deg(f)$ und f ist als Minimalpolynom über L irreduzibel.

Hausaufgabe 24
Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von $f = X^2 + X + 1$, $f = X^3 + X^2 + X + 1$ und $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ über $\mathbb{Q}$ und geben Sie jeweils den Grad an.

- Wir betrachten das Polynom $f = X^2 + X + 1$. Dies ist offensichtlich das dritte Kreisteilungspolynom Φ_3. Somit hat es die Nullstellen ζ_3 und ζ_3^2. Da $\zeta_3^2 \in \mathbb{Q}(\zeta_3)$ ist $\mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_3^2) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$. Damit ist also $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ der Zerfällungskörper von f. Da Φ_3 gemäß eines Satzes aus Geometrie irreduzibel ist, ist also $f = \operatorname{MinPol}(\zeta \mid \mathbb{Q})$ und somit ist $[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] = 2$.
- Wir betrachten das Polynom $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, welches widerum das fünfte Kreisteilungspolynom Φ_5 ist. Somit hat es die Nullstellen ζ_5^k für $k = 1, 2, 3, 4$ und $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist Zerfällungskörper von f, da wieder alle weiteren Potenzen bereits in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ liegen. Auch f ist als Kreisteilungspolynom wieder irreduzibel und somit $f = \operatorname{MinPol}(\zeta_5 \mid \mathbb{Q})$. Also ist $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = 4$.
- Betrachten wir nun noch das Polynom $f = X^3 + X^2 + X + 1$, so hat dieses auf jeden Fall die Nullstelle -1. Polynomdivision mit $X + 1$ ergibt dann $f = (X + 1)(X^2 + 1)$. Aus dem zweiten Faktor ergeben sich die weiteren Nullstellen i und $-i$. Offensichtlich ist $1 \in \mathbb{Q}$ bereits enthalten und $-i$ lässt sich aus i darstellen. Damit ist also $\mathbb{Q}(i)$ als Zerfällungskörper von f ausreichend. Weiter ist $g = X^2 + 1$ irreduzibel und normiert, also ist g das Minimalpolynom von i über $\mathbb{Q}$. Damit ist $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$.

Hausaufgabe 25

Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von $f = X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Erneut ist $f = X^4 + 1$ ein Kreisteilungspolynom, nämlich Φ_8. Damit erhalten wir alle mit 8 teilerfremden Potenzen von ζ_8 als Nullstellen, d.h. f hat die Nullstellen $\zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^5, \zeta_8^7$. Alternativ ist $\zeta_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und dies zur vierten Potenz ergibt wieder -1, wie auch die drei weiteren Potenzen. Als Zerfällungskörper ist somit wieder $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ ausreichend. f ist normiert und nach V18 irreduzibel, also Minimalpolynom von ζ_8 über $\mathbb{Q}$ und somit ist $\deg(\zeta_8|\mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\zeta_8) : \mathbb{Q}] = 4$.

Da $\zeta_8 = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ist $i = \zeta_8^2 \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$ und auch $\zeta_8 + \zeta_8^7 = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$. Damit ist $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8)$. Es ist bereits bekannt, dass $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2 = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$ und außerdem ist klar, dass $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Also folgt daraus, dass $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(i) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$, also ist $\mathbb{Q}(\zeta_8) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Insbesondere folgt daraus nun auch, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ ist.

Nach Multiplikativität der Körpergrade gilt nun $[\mathbb{Q}(\zeta_8) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_8) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$. Aus dem ersten Teil wissen wir, dass $[\mathbb{Q}(\zeta_8) : \mathbb{Q}] = 4$. Außerdem ist bekannt, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ gilt und somit nur $[\mathbb{Q}(\zeta_8) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$ gelten kann.

Hausaufgaben

Algebra & Zahlentheorie – Übungsblatt 3

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Freitag 2. DS

Thema: Transzendente Erweiterungen & separable Polynome

8/12 BE

Hausaufgabe 38

Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers des Polynoms $f = X^4 + 2X^2 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Ist f separabel?

Wir betrachten das Polynom $f = X^4 + 2X^2 - 2 \in Q[X]$ mit der Substitution $Y := X^2$, was uns $f = Y^2 + 2Y - 2$ liefert. Damit erhält man die Nullstellen $X_{1/2} = \pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}$ und $X_{3/4} = \pm\sqrt{-1-\sqrt{3}}$. Offensichtlich sind alle vier Nullstellen voneinander verschieden und haben alle Vielfachheit eins. Damit ist also die Summer der Vielfachheiten der Nullstellen gleich dem Grad des Polynoms und f somit separabel.

Im Folgenden sei $\alpha_1 = \sqrt{-1+\sqrt{3}}$ und $\alpha_2 = \sqrt{-1-\sqrt{3}}$.

Da mit $a \in K$ für einen Körper K auch schon $-a \in K$ gilt, reicht als Zerfällungskörper für f auch $L := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ aus. Mit Eisenstein und $p = 2$ stellen wir fest, dass f irreduzibel ist. Damit gilt $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = 4$. Um den Grad des Zerfällungskörpers zu bestimmen fehlt nun noch $[L : \mathbb{Q}(\alpha_1)]$. Man kann α_2 auch schreiben als $\alpha_2 = \sqrt{-1-\sqrt{3}} = \sqrt{-1\cdot(1+\sqrt{3})} = i\sqrt{1+\sqrt{3}} \in \mathbb{C}$. Jedoch ist mit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ (da $-1+\sqrt{3} > 0$) auch $\mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq \mathbb{R}$ und damit auf jeden Fall $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}(\alpha_1)$. Somit ist auch $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}(\alpha_1)] > 1$. Andererseits hat das Polynom $g = X^2 - \alpha_1^2 + 2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1)[X]$ mit

$$g(\alpha_2) = \alpha_2^2 + \alpha_1^2 + 2 = -1 - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 2 = 0$$

die Nullstelle α_2. Damit ist es das Polynom kleinsten Grades, welches Minimalpolynom von α_2 über $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ sein kann. Deshalb gilt $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}(\alpha_1)] = 2$. Da der Körpergrad multiplikativ ist, ergibt sich

$$[L : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}(\alpha_1)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8$$

Hausaufgabe 39

Sei $L = K(X)$ ein rationaler Funktionenkörper. Sei $\alpha = \frac{f}{g} \in L \setminus K$ mit $f, g \in K[X]$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass $[L : K(\alpha)] = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

Hausaufgabe 40

Sei $p > 0$, $a \in K$ und $f = X^p - X + a \in K[X]$. Zeigen Sie:

(a) $f(X) = f(X+1)$

(b) f ist separabel

(c) Jeder Wurzelkörper von f ist ein Zerfällungskörper von f.

(d) Hat f keine Nullstelle in K, so ist f irreduzibel.

(zu a) Es ist $f(X+1) = (X+1)^p - (X+1) + a \overset{\text{V1}}{=} X^p + 1^p - X - 1 + a = X^p - X + a = f(X)$.

(zu b) Sei α eine Nullstelle von f, d.h. $f(\alpha) = 0$. Wegen Teil (a) gilt dann auch $0 = f(\alpha) = f(\alpha+1) = \cdots = f(\alpha+p-1)$. Da $\operatorname{char}(K) = p$, sind die $\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+p-1$ paarweise verschieden. Damit hat f genau p Nullstellen. Da f auch Grad p hat, ist f damit separabel.

(zu c) Sei L ein Wurzelkörper von f, d.h. $L = K(\alpha)$ für eine Nullstelle α von f. Nach Teil (b) sind dann $\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+p-1$ die Nullstellen von f. Jedoch ist mit $i \in K$ (bzw. genauer $\iota(i)$) für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ auch $\alpha + i \in K(\alpha)$ und damit ist $K(\alpha) = K(\alpha+i)$ für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Somit ist dann $K(\alpha) = L$ auch schon ein Zerfällungskörper, in dem $f = \prod_{i=0}^{p-1}(X - (\alpha+i))$ in Linearfaktoren zerfällt.

(zu d) Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen f sei reduzibel, dann existiert eine Darstellung $f = \prod_{i=0}^{m} r_i$ mit $r_i \in K[X]$ für alle $i \in \{0, \ldots, m\}$ und ein $m \geq 2$.

Wir zeigen nun, dass alle r_i den gleichen Grad haben. Sei L der Zerfällungskörper von f. Wir betrachten eine Nullstelle $\alpha \in L$ von f. Wie wir bereits gesehen haben, sind dann auch $\alpha+1, \ldots, \alpha+p-1$ Nullstellen. Damit lässt sich f schreiben als $f = \prod_{i=0}^{p-1}(X - (\alpha+i)) =: \prod_{i=0}^{p-1} r_i(X)$. Offensichtlich ist r_i irreduzibel über K für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Dann existiert zu jedem irreduziblen Faktor aber auch ein $s \in \{0, \ldots, p-1\}$, sodass $\overline{r_i}(X) := r_i(X+s)$ gilt und dieses $\overline{r_i}$ ist ebenso irreduzibel. Damit hat r_i für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ den gleichen Grad wie das Minimalpolynom von α.

Da nun alle irreduziblen Faktoren den gleichen Grad besitzen, $m \geq 2$ aufgrund der Reduzibilität gilt und p prim ist, müssen alle r_i Linearfaktoren sein. Somit hat f dann schon Nullstellen in K, nämlich die Nullstellen der Linearfaktoren, also $\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+p-1$.