TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Numerik, Professur für Numerik der Optimierung

NUMERIK

Hausaufgaben

Prof. Dr. Andreas Fischer

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Numerik – Übungsblatt 2

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Do 2. DS, ungerade Woche

Thema: Iterative Verfahren für Gleichungssysteme

2/2 BE

Bachelor Mathematik, Immatrikulationsjahrgang 2017

Übung 1

Sei $\rho(A) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|$ der Spektralradius von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei $\lambda_i(A)$ die Eigenwerte von A sind. Beweise den folgenden Satz für den Vektorraum der Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$: Für jede durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\rho(A) \leq \|A\|$.

Ohne Beschränung der Allgemeinheit sei $\lambda \in \mathbb{R}$ der betragsmäßig größte Eigenwert mit zugehörigem, normiertem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Av\| = \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| = |\lambda| = \rho(A)$$

Da in der Matrixnorm das Supremum jedoch nur über reellwertige Argumente gebildet wird, gilt die (Un-)Gleichungskette nicht unbedingt für komplexwertige Eigenvektoren und Eigenwerte. Deswegen definieren wir uns eine Fortsetzung der Norm auf den komplexen Zahlen mit

$$\dot{\|} \cdot \dot{\|} : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ x + \mathrm{i}y & \mapsto \quad \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Nun macht man sich schnell klar, dass auch $\dot{\|}\cdot\dot{\|}$ eine Norm darstellt, d.h. Definitheit, Homogenität und Dreiecksungleichung erfüllt. Außerdem ist sie eine Fortsetzung von $\|\cdot\|$, d.h. für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{\|}A\dot{\|} = \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \dot{\|}Az\dot{\|} = \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \dot{\|}Ax + Aiy\dot{\|} &= \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \sqrt{\|Ax\|^2 + \|Ay\|^2} \\ &\leq \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \sqrt{\|A\|^2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} \\ &= \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \|A\| \cdot \dot{\|}z\dot{\|} = \|A\| \cdot \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \dot{\|}z\dot{\|} = \|A\| \end{aligned}$$

sowie $\|A\| \leq \dot{\|}A\dot{\|}$, da $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ und das Supremum in der komplexen Norm also über eine echte Obermenge gebildet wird. Somit ist also $\dot{\|}A\dot{\|} = \|A\|$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Nun löst sich die Aufgabe wie im Fall reeller Eigenwerte und Eigenvektoren - sei also wieder λ der betragsmäßig größte Eigenwert mit zugehörigem, normiertem Eigenvektor v, dann gilt

$$\|A\| = \dot{\|}A\dot{\|} = \sup\left\{\dot{\|}Az\dot{\|} : \dot{\|}z\dot{\|} = 1\right\} \geq \dot{\|}Av\dot{\|} = \dot{\|}\lambda v\dot{\|} = |\lambda| \, \dot{\|}v\dot{\|} = |\lambda| = \rho(A)$$

und damit stets $\rho(A) \leq \|A\|$.

Dies gilt natürlich dann auch für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (auch wenn der Spektralradius nach VL und Aufgabenstellung dafür nicht definiert ist).

Übung 2

Sei $\rho(A) := \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i(A)|$ der Spektralradius von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $\lambda_i(A)$ die Eigenwerte von A sind. Beweise den folgenden Satz:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Matrix A existiert eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $|||\cdot|||$ mit $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Wir verwenden die Schur-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus der Linearen Algebra. Demnach gibt es also eine unitäre Matrix U, sodas

$$B := U^{-1}AU = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

eine rechte obere Dreiecksmatrix ist. Insbesondere sind dann A und B ähnlich und haben somit gleiches charakteristisches Polynom $\det(\lambda\mathbb{1} - A) = \det(\lambda\mathbb{1} - B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda - b_{ii}$. Damit sind also die Diagonalelemente von B gerade die Eigenwerte $\lambda_i = b_{ii}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ von A. Definieren wir nun

$$b := \max_{i,j=1,\dots,n} |b_{ij}| \quad \text{und} \quad \delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{(n-1)\cdot b}\right\} \in (0,1]$$

sowie

$$D := \operatorname{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad D^{-1} = \operatorname{diag}(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \dots, \delta^{-n+1})$$

Dann ergibt sich durch Multiplikation der Matrizen

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} b_{11} & \delta\cdot b_{12} & \cdots & \delta^{n-1}\cdot b_{1n} \\ & \delta\cdot b_{22} & \cdots & \delta^{n-1}\cdot b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \delta^{n-1}\cdot b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad C := D^{-1}BD \begin{pmatrix} b_{11} & \delta\cdot b_{12} & \cdots & \delta^{n-1}\cdot b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & \delta^{n-2}\cdot b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Wegen $\delta \leq 1$ gilt

$$\|C\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,n} |b_{ii}| + (n-1)\delta b \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Nun definieren wir uns mit $V := QD$ eine neue Norm

$$|||\cdot|||: \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\|V^{-1}x\right\|_\infty \end{cases}$$

Wegen $C = D^{-1}BD = D^{-1}Q^{-1}AQD = V^{-1}AV$ gilt auch

$$|||Ax||| = \left\|V^{-1}Ax\right\|_\infty = \left\|CV^{-1}x\right\|_\infty \leq \|C\|_\infty \cdot \left\|V^{-1}x\right\|_\infty = \|C\|_\infty \cdot |||x|||$$

und damit

$$|||A||| \leq \|C\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$$

was der zu zeigenden Behauptung entspricht.

Hausaufgaben

Numerik – Übungsblatt 4

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Do 2. DS, ungerade Woche

Thema: CG-Verfahren

Hausaufgabe 5

Das CGNR-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}n \times n$ ist das CG-Verfahren angewendet auf die Gauß'sche Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top b$. Zeige, dass das CGNR-Verfahren angewendet auf das System $\alpha Qx = b$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nach nur einer Iteration die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ findet, wobei der Startwert x^0 beliebig gewählt werden kann.

Wir wenden die Gauß'schen Normalengleichungen an auf das Gleichungssystem $\alpha Qx = b$ und erhalten als mit dem CG-Verfahren zu behandelndes Gleichungssystem

$$\alpha^2 \underbrace{Q^\top Q}_{=\mathbb{1}_n} \cdot x = \alpha \mathbb{1}_n \cdot x = \alpha Q^\top b$$

Die Matrix $\alpha^2 \mathbb{1}_n$ ist offenbar symmetrisch und positiv definit für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. wir dürfen das CG-Verfahren anwenden. Starten wir nun Algorithmus 2.15 mit einem beliebigen $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und setzen zuerst $d^0 := r^0 := \alpha Q^\top b - \alpha^2 \mathbb{1}_n x^0$. Weiter gilt

$$t_0 = \frac{\left\|r^0\right\|_2^2}{\left(d^0\right)^\top (\alpha^2 \mathbb{1}_n) d^0} = \frac{\left\langle r^0 , r^0 \right\rangle}{\alpha^2 \cdot \left\langle d^0 , r^0 \right\rangle} = \frac{\left\langle r^0 , r^0 \right\rangle}{\alpha^2 \cdot \left\langle r^0 , r^0 \right\rangle} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Betrachten wir nun das Residuum nach einer Iteration

$$r^1 = r^0 - t_0 \cdot \alpha^2 \mathbb{1}_n \cdot d^0 = r^0 - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \alpha^2 \mathbb{1}_n \cdot r^0 = r^0 - r^0 = 0$$

Somit erreicht der Algorithmus also für diesen Fall bereits nach einer Iteration die exakte Lösung und bricht somit ab.

Hausaufgaben

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)

Numerik – Übungsblatt 6

Ü-Gruppe: Do 2. DS, ungerade Woche

Thema: Numerische Lösung von Anfangswertaufgaben

Hausaufgabe 9

Gegeben seien die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$, wobei f hinreichend glatt sei und für $\theta \in \mathbb{R}$ das implizite Runge-Kutta-Verfahren

$$\Phi(x,y,h) := \theta k^1 + (1-\theta)k^2$$

mit $k^1 := f(x,y)$ und $k^2 := f(x+h, y+h(\theta k^1 + (1-\theta)k^2))$. Bestimme die Konvergenzordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von θ.

Hausaufgabe 10

Gesucht ist eine Übertragung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens auf die Anfangswertaufgabe

$$v'' = g(x,v,v') \quad \text{mit } v(x_0) = v_0 \text{ und } v'(x_0) = v_0' \tag{6.1}$$

mit $v\colon [x_0,\infty) \to \mathbb{R}$. Dazu kann man wie folgt vorgehen:

(a) Transformiere die gegebene Aufgabe in eine Anfangswertaufgabe für ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.

(b) Wende auf das erhaltene System $y' = F(x,y)$ (und Anfangsbedingungen) die modifizierte Trapezregel (Verfahren von Heun)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[F(x_n,y_n) + F(x_n+h, y_n + hF(x_n,y_n))\Big]$$

an und schreibe anschließend die erhaltene Verfahrensvorschrift so um, dass nur die in (6.1) auftretenden Größen bzw. deren Näherungen vorkommen.

Bemerkung. *Die Schreibweise der Indizes (ob oben oder unten notiert) wechselt im Laufe der Aufgabe, aber ich denke, dass trotzdem stets deutlich sein sollte, welcher Index gemeint ist. Prinzipiell steht der Laufindex immer dort, wo noch Platz ist (d.h. also kein Komponentenindex oder Ableitungsstrich steht).*

Wir transformieren die gegebene Anfangswertaufgabe zweiter Ordnung zuerst in ein System von Aufgaben erster Ordnung. Definiere dafür $v_1 := v$ und $v_2 := v_1'$. Dann ergibt sich das zu (6.1) äquivalente System zu

$$\begin{aligned} v_1' &= v_2 \\ v_2' &= g(x,v,v') = g(x,v_1,v_2) \end{aligned}$$

mit den zugehörigen Anfangswerten $v(x_0) = v_1(x_0) = v_0$ und $v'(x_0) = v_2(x_0) = v_0$. Setzen wir $y := \binom{v_1}{v_2}$ und $y' := \binom{v_1'}{v_2'}$ sowie $F(x,y) := \binom{v_2(x)}{g(x,y)} = \binom{v_2(x)}{g(x,v_1,v_2)}$, so ergibt sich die Form

$$y' = F(x,y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = \binom{v_0}{v_0'} = y_0$$

Nun wenden wir das Verfahren von Heun an und erhalten mit Superskriptnotation für vektorwertige Variablen

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\Big[F(x_n,y^n) + F(x_n+h, y^n + hF(x_n,y^n))\Big]$$

Wir wollen die Vektorwertigkeit rückgängig machen und statt y wieder die Komponenten v_1 und v_2 nutzen. Wir bezeichnen die Iterierten von v_1 und v_2 in Bezug zu y auch wieder mit Superskripts, auch wenn diese nicht mehr mehrdimensional sind. Es gilt

$$y^n + hF(x_n, y^n) = \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} v_2(x_n) \\ g(x_n, v_1^n, v_2^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^n + h \cdot v_2(x_n) \\ v_2^n + h \cdot g(x_n, v_1^n, v_2^n) \end{pmatrix}$$

$$g(x_n + h, y^n + hF(x_n, y^n)) = g(x_n + h, v_1^n + hv_2^n, v_2^n + h \cdot g(x_n, v_1^n, v_2^n))$$

Somit ergibt sich die Verfahrensvorschrift für das Heun-Verfahren dann in Komponentendarstellung zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} v_2(x_n) \\ g(x_n, v_1^n, v_2^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2(x_n + h) \\ g(x_n + h, y^n + F(x_n, y^n)) \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} v_2^n \\ g(x_n, v_1^n, v_2^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2^{n+1} \\ g(x_n + h, v_1^n + hv_2^n, v_2^n + h \cdot g(x_n, v_1^n, v_2^n)) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Ersetzen wir nun wieder rückwärts $v_1 = v$ und $v_2 = v_1' = v'$ dann ergibt sich mit Subskriptnotation

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \left(v_n' + v_{n+1}' \right) \\ v_{n+1}' &= v_n' + \frac{h}{2} \left(g(x_n, v_n, v_n') + g(x_n + h, v_n + hv_n', v_n' + hg(x_n, v_n, v_n')) \right) \end{aligned}$$

Man prüft nun leicht nach, dass die Berechnungen explizit sind, wenn man mit der zweiten Gleichung beginnt, d.h. alle auf der rechten Seite vorkommenden Näherungen sind bereits bekannt. Nun können wir die zweite Zeile des Gleichungssystems in die erste Zeile einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \left(v_n' + v_n' + \frac{h}{2} \Big(g(x_n, v_n, v_n') + g(x_n + h, v_n + hv_n', v_n' + hg(x_n, v_n, v_n')) \Big) \right) \\ &= v_n + hv_n' + \frac{h^2}{4} \Big(g(x_n, v_n, v_n') + g(x_n + h, v_n + hv_n', v_n' + hg(x_n, v_n, v_n')) \Big) \end{aligned}$$

Dies ist wiederum eine explizite Verfahrensvorschrift und somit erhalten wir dies als Ergebnis der Übertragung des klassischen Rungeverfahrens auf das Anfangswertproblem (6.1).