TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Numerik, Professur für Numerik der Optimalen Steuerung

OPTIMIERUNG UND NUMERIK

Dr. John Martinovic

Wintersemester 2019/20

Autor : Eric Kunze
E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

1.1 Aufgabenstellung und Grundbegriffe . . . 2

1.2 Beispiele zur kontinuierlichen Optimierung . . . 3

1.2.1 Transportoptimierung . . . 3

1.2.2 Kürzeste euklidische Entfernung . . . 4

1.3 Beispiele zur diskreten Optimierung . . . 4

1.3.1 Das Rucksackproblem . . . 4

1.3.2 Das Bin-Packing-Problem . . . 5

1.3.3 Standortplanung . . . 6

1.3.4 Quadratisches Zuordnungsproblem . . . 7

2 Grundlagen **8**

2.1 Existenz von Lösungen . . . 8

2.2 Optimalitätsbedingungen . . . 10

2.3 Das Lemma von Farkas . . . 14

3 Lineare Optimierung **17**

3.1 Basislösungen und Ecken . . . 17

3.2 Das primale Simplex-Verfahren . . . 19

3.2.1 Phase 2 des Simplex-Verfahrens . . . 20

3.2.2 Phase 1 (Hilfsfunktionsmethode) . . . 24

3.2.3 Der Simplexalgorithmus . . . 24

3.3 Das duale Simplexverfahren . . . 25

3.4 Dualität . . . 27

3.5 Transportoptimierung . . . 30

3.5.1 Problemstellung . . . 30

Kapitel 1
EINFÜHRUNG

1.1 Aufgabenstellung und Grundbegriffe

Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon G \to \mathbb{R}$ gegeben. In dieser Vorlesung betrachten wir Optimierungsaufgaben (OA) der Form

$$f(x) \to \min \qquad \text{bei } x \in G \tag{1.1}$$

Man nennt

- f die **Zielfunktion**,
- G den **zulässigen Bereich** und
- ein $x \in G$ **zulässigen Punkt** (oder zulässige Lösung).

Ein zulässiger Punkt $x^* \in G$ heißt **optimal** (oder Lösung oder optimale Lösung), wenn für alle $x \in G$ die Ungleichung

$$f(x^*) \leq f(x) \tag{1.2}$$

gilt. Falls das Problem (1.1) lösbar ist, so wird mit $f^* = f(x^*)$ der **Optimalwert** bezeichnet. Das Problem (1.1) ist ein

- **unrestringiertes** (oder freies) Optimierungsproblem, wenn $G = \mathbb{R}^n$ gilt,
- andernfalls (d.h. für $G \neq \mathbb{R}^n$) ein **restringiertes** Problem

und außerdem eine

- **diskrete** (oder ganzzahlige) OA (engl. integer program), falls jede Variable eine diskreten Menge angehört
- **kontinuierliche** (oder stetige) OA, falls alle Variablen stetige Werte annehmen
- gemischt ganzzahlige OA, wenn sowohl stetige als auch diskrete Variablen vorkommen.

Gilt in (1.1) $f(x) = c^\top x$ für ein $c \in \mathbb{R}^n$ und ist G durch lineare Bedingungen beschreibbar, so heißt (1.1) **linear**. In diesem Fall lässt sich (1.1) schreiben als

$$c^\top x \to \min \qquad \text{bei } Ax = a, Bx \leq b \tag{1.3}$$

mit geeigneten Matrizen A und B sowie Vektoren a und b.

Gerade für (gemischt) ganzzahlige OA kann die Lösung der Originalaufgabe schwierig sein. Eine verwandte, jedoch im Allgemeinen leichter zu lösende Aufgabe kann in diesen Fällen wie folgt erhalten werden:

Definition 1.1
Wir betrachten die Optimierungsaufgaben
(P) $f(x) \to \min$ bei $x \in D \cap E$
(Q) $g(x) \to \min$ bei $x \in E$
(Q) heißt **Relaxation** zu (P) falls $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in D \cap E$ gilt. In vielen Fällen wird dabei $g = f$ gewählt.

Der Optimalwert der Relaxation kann als Näherung (bzw. untere Schranke) für den tatsächlichen Optimalwert von (P) genutzt werden. Meistens liefert die Lösung von (Q) jedoch keinen zulässigen Puntk für (P).

Satz 1.1
Ist $\overline{x}$ eine Lösung von (Q) und gilt $\overline{x} \in D$ sowie $f(\overline{x}) = g(\overline{x})$, dann löst $\overline{x}$ auch (P).

Beweis. siehe Übung □

Definition 1.2
Seien (Q1) und (Q2) Relaxationen zu (P). (Q1) heißt **stärker** (oder strenger) als (Q2), wenn die Schranke (d.h. der Optimalwert) von (Q1) größer oder gleich der Schranke (Optimalwert) von (Q2) für jede Instanz von (P) ist.

Anmerkung. *Zur Erklärung des Begriffes "Instanz“ betrachte das folgende Beispiel.*
- *Problemklasse:* $c^\top x \to \min$
- *Instanz der Problemklasse:* $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$

Eine Instanz ist also eine konkrete Belegung.

1.2 Beispiele zur kontinuierlichen Optimierung

1.2.1 Transportoptimierung

$\to$ lineare Optimierung

Es gebe Erzeuger $i \in I = \{0, \dots, n\}$ und Verbraucher $j \in J = \{1, \dots, n\}$. Weiterhin seien die Kosten c_{ij} für den Transport einer Einheit von i nach j sowie der Vorrat $a_i > 0$ und der Bedarf $b_j > 0$ für alle i und j gegeben. Wie muss der Transport organisiert werden, damit die Gesamtkosten minimal sind?

Für jedes mathematische Modell einer OA braucht man
- geeignete Variablen ($\to x$)
- Zielfuntkion ($\to f$)
- Nebenbedingungen ($\to G$)

Variablen $x_{ij} \geq 0$ für alle $i \in I$ und $j \in J$ beschreibe die Einheiten, die von i nach j transportiert werden.

Zielfunktion $f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \min$

Nebenbedingungen

- Kapazitätsbeschränkung der Erzeuger $i \in I$: $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in I)$
- Bedarfserfüllung von Verbrauchern $j \in J$: $\sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j \quad (j \in J)$

Somit können wir als Modell formulieren:

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad \text{bei } & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i \;\; (i \in I), \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j \;\; (j \in J), \\ & x_{ij} \geq 0 \;\; ((i,j) \in I \times J) \end{aligned}$$

1.2.2 Kürzeste euklidische Entfernung

$\to$ nichtlineare Optimierung

Gegeben seien ein Punkt $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \notin G$. Wir betrachten die folgende OA:

$$f(x) = \|x - \widetilde{x}\|_2^2 \to \min \qquad \text{bei } x \in G$$

Ist $G \neq \emptyset$ und abgeschlossen, so existiert eine Lösung. Ist G zusätzlich konvex, so ist die Lösung sogar eindeutig.

Weitere Beispiele und Theorie sind in der Vorlesung "Kontinuierliche Optimierung“ im Master Mathematik zu erfahren.

1.3 Beispiele zur diskreten Optimierung

1.3.1 Das Rucksackproblem

Gegeben seien ein Behälter ("Rucksack“) mit Kapazität $b \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \ldots\}$ sowie m Teile, die jeweils durch ein Gewicht $a_i \in \mathbb{Z}_+$ und einen Nutzen $c_i \in \mathbb{Z}_+$ beschrieben werden $(i = 1, \ldots, m)$. Aus dieser Menge von Objekten ist eine nutzenmaximale Teilmenge auszuwählen.

Variablen

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{wenn Teil } i \text{ eingepackt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Zielfunktion $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max$

Nebenbedingungen Kapazitätsbedingung: $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b$

Als Modell können wir somit formulieren:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max \quad \text{ bei } \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b \text{ und } x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1, \dots, m)$$

Aufgrund der binären Gestalt der Variablen wird das Problem auch als 0/1-Rucksackproblem bezeichnet. Im Gegensatz dazu ist beim klassischen Rucksackproblem jedes Teil mehrfach nutzbar. In diesem Fall ist $x_i \in \mathbb{Z}_+$ zu fordern.

1.3.2 Das Bin-Packing-Problem

Gegeben seien (sehr große) Anzahl an Behältern der Kapazität L sowie b_i Teile des Gewichts oder Volumens ℓ_i mit $i \in I = \{1, \dots, m\}$. Man ermittle die minimale Anzahl an Behältern, die benötigt wird, um alle Objekte zu verstauen. Jede Packung (eines Behälters) kann als Vektor $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ geschrieben werden, wobei a_i angibt, wie oft das Teil i benutzt wird. Ein solcher Vektor ist eine zulässige Packung, wenn

$$\sum_{i=1}^{m} \ell_i a_i \leq L$$

ist.

Modell nach Kantorovich Wir benötigen

- eine obere Schranke $u \in \mathbb{Z}_+$ für die maximal benötigte Anzahl an Behältern
- $y_k = \begin{cases} 1 & \text{wenn Rucksack } k \text{ benutzt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (k = 1, \dots, u)$
- $x_{ik} \in \mathbb{Z}_+$, die angeben, wieviele Objekte vom Typ i in Rucksack k gepackt werden $((i,k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, u\})$

Daraus ergibt sich nun folgendes Modell:

$$\begin{aligned} f^{\text{Kant}}(x,y) = \sum_{k=1}^{u} y_k \to \min \text{ bei } \quad & \sum_{k=1}^{u} x_{ik} = b_i & & (i = 1, \dots, m) \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \ell_i \leq L \cdot y_k & & (k = 1, \dots, u) \\ & y_k \in \{0,1\} & & (k = 1, \dots, u) \\ & x_{ik} \in \mathbb{Z}_+ & & ((i,k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, u\}) \end{aligned}$$

Die erste Nebenbedingung sorgt dafür, dass alle Teile gepackt werden; die zweite Nebenbedingung liefert die Einhaltung der Kapazität unter Berücksichtigung, dass nur bepackte Behälter gezählt werden.

Es kann stets $u = \sum_{i=1}^{m} b_i$ gewählt werden. Das Auffinden besserer Schranken ist im Allgemeinen schwierig. Eine Relaxation kann z.B. durch $y_k \in [0,1]$ und $x_{ik} \in \mathbb{R}_+$ erhalten werden. Diese liefert jedoch keine guten Näherungen.

Modell von Gilmore & Gomory Es seien J eine Indexmenge aller zulässigen Packungen und $x_j \in \mathbb{Z}_+$ $(j \in J)$ die Häufigkeit, wie oft ein Behälter nach dem durch j angegebenen Schema $a^j = (a_1^j, \dots, a_m^j)$ mit $\ell^\top a^j \leq L$ gefüllt wird. Daraus ergibt sich folgendes Modell:

$$f^{GG}(x) = \sum_{j \in J} x_j \to \min \quad \text{bei} \quad \begin{aligned} &\sum_{j \in J} a_i^j \cdot x_j = b_i && (i = 1, \dots, m) \\ &x_j \in \mathbb{Z}_+ && (j \in J) \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung sorgt dafür, dass alle Teile gepackt werden.

Es gibt im Allgemeinen exponentiell viele zulässige Packungen a^j $(j \in J)$, deren Koeffizienten allesamt in den Nebenbedingungen benötigt werden.

Eine Relaxation erhält man zum Beispiel durch $x_j \in \mathbb{R}_+$. Diese stetige Relaxation ist sehr gut; man vermutet, dass folgende Bedingung gilt:

$$f^{GG,*} - f^{GG,*}_{\text{relax}} < 2$$

Erfreulicherweise gibt es zum Gilmore-Gomory-Modell äquivalente Formulierungen, die mit einer polynomiellen Zahl von Variablen arbeiten und eine ebenso gute stetige Relaxation besitzen (z.B. Flussmodelle).

1.3.3 Standortplanung

Ein Dienstleister möchte neue Filialen aufbauen, um seine Kunden $k \in K := \{1, \dots, m\}$ zu versorgen. Dabei sind aus der Menge $S := \{1, \dots, n\}$ mögliche Standorte, die neuen Standorte so auszuwählen, dass der Bedarf aller Kunden befriedigt wird und die Gesamtkosten minimial sind.

Wir benötigen
- $c_s > 0$ ... Fixkosten für den Aufbau von Standort $s \in S$
- $d_{ks} > 0$ ... Kosten, um den Kunden $k \in K$ (vollständig) von Standort $s \in S$ zu beliefern.

Variablen:
- $x_s = \begin{cases} 1 & \text{wenn Standort } s \in S \text{ gebaut wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $y_{ks} \geq 0$ ... Anteil des Bedarfs des Kunden $k \in K$, der vom Standort $s \in S$ bedient wird (implizit: $y_{ks} \in [0, 1]$)

Modell zur Standortplanung:

$$f(x, y) = \underbrace{\sum_{s \in S} x_s c_s}_{\text{Fixkosten}} + \underbrace{\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} y_{ks} d_{ks}}_{\text{variable Kosten}} \to \min$$

bei

$$\begin{aligned} \sum_{s\in S} y_{ks} &= 1 \qquad && (k \in K) \\ y_{ks} &\leq x_s && (s \in S, k \in K) \\ x_s &\in \{0,1\} && (s \in S) \\ y_{ks} &\geq 0 && (k \in K, s \in S) \end{aligned}$$

1.3.4 Quadratisches Zuordnungsproblem

Es sollen n Personen auf n Räume verteilt werden. Person i muss Person j c_{ij} mal am Tag treffen. Außerdem habe Büro k von Büro ℓ die Entfernung $d_{k\ell} > 0$. Wird Person i das Büro k zugewiesen und Person j das Büro ℓ, so ergibt sich eine Gesamtwegstrecke von $2c_{ij}d_{kl}$ (beachte Hin- und Rückweg). Gesucht ist die wegminimale Belegung der Büros.

Variablen: $x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Person } i \text{ das Büro } k \text{ zugewiesen wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i,k) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$

Zielfunktion:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{n} x_{j\ell} x_{ik} \cdot 2c_{ij}d_{kl} \to \min$$

bei

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_{ik} &= 1 \qquad && (k = 1,\dots,n) && \text{Büro } k \text{ bekommt genau einen Einwohner} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{ik} &= 1 && (i = 1,\dots,n) && \text{Person } i \text{ bekommt genau ein Büro} \\ x_{ik} &\in \{0,1\} && (i,k) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele sind in der Vorlesung ”Diskrete Optimierung“ (Master Mathe) zu finden..

Kapitel 2
GRUNDLAGEN

2.1 Existenz von Lösungen

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$f(x) \to \min \qquad \text{bei } x \in G \tag{2.1}$$

wobei folgende Bedingungen erfüllt seinen:

- f ist stetig (zumindest auf G)
- G ist kompakt
- $G \neq \emptyset$

Satz 2.1 (Weierstrass)
Unter diesen Voraussetzungen existiert ein $\overline{x} \in G$ mit

$$f^* := f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in G$$

Beweis. Sei $f^* := \inf_{x \in G} f(x)$. Wegen $G \neq \emptyset$, finden wir eine Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $f_k = f(x_k) \geq f^*$ mit $x_k \in G$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \to \infty} f_k = f^*$. Die daraus resultierende Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt wegen der Kompaktheit von G eine konvergente Teilfolge $\{\widetilde{x_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \to \infty} \widetilde{x_k} = \overline{x} \in G$ (Abgeschlossenheit von G). Die Stetigkeit von f ergibt nun $\lim_{k \to \infty} f(\widetilde{x_k}) = f(\overline{x}) = f^*$ (insbesondere $f^* \in \mathbb{R}$) □

Beispiel 2.1

(1) Satz 2.1 anwendbar (G kompakt, Minimum existiert):

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \to \min \ \text{ bei } x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1$$

Der zulässige Bereich ist eine Ellipse mit Rand.

(2) Satz 2.1 nicht anwendbar (G unbeschränkt, kein Minimum, $f^* = -\infty$):

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \to \min \ \text{ bei } x_1^2 + 4x_2^2 \geq 1$$

(3) Satz 2.1 nicht anwendbar (G unbeschränkt, kein Minimum, $f^* = 0$)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} \to \min \ \text{ bei } x_2 \leq \frac{1}{x_1}, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$$

(4) Satz 2.1 nicht anwendbar (G unbeschränkt, Minimum existiert, $f^* = -1$)

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} \to \min \ \text{ bei } x_2 \leq \frac{1}{x_1}, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$$

Offensichtlich besitzen also nicht alle Optimierungsaufgaben eine (globale) Lösung, insbesondere deshalb, weil Bedingung (**??**) ziemlich stark ist. Stattdessen hat sich in der Literatur auch der folgende "schwächere" Lösungsbegriff etabliert.

Definition 2.1

Ein zulässiger Punkt $\overline{x} \in G$ heißt lokale Lösung von (2.1), falls ein $\rho > 0$ existiert mit

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in G \cap B_\rho(\overline{x})$$

wobei $B_\rho(\overline{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \overline{x}\|_2 \leq \rho\}$ die offene Kugel vom Radius ρ um $\overline{x}$ ist.

Bemerkung 2.1

Jede globale Lösung ist auch lokale Lösung. Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht korrekt.

Sofern eine globale Lösung existiert, ist diese in der Menge der lokalen Lösungen enthalten. Die Betrachtung lokaler Lösungen ist damit im Allgemeinen ausreichend. Für eine spezielle Klasse von Optimierungsaufgaben sind beide Lösungskonzepte sogar äquivalent. Dazu betrachten wir die folgenden Definitionen:

Definition 2.2 (Konvexität)

(1) $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex, falls für alle $x, y \in G$ gilt

$$[x, y] := \{x(\lambda) \in \mathbb{R}^n : x(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0, 1]\} \subseteq G$$

(2) Sei G konvex. Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn gilt

$$f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda\,(f(y) - f(x))$$

für alle $x, y \in G$ und $\lambda \in [0, 1]$.

(3) Sei G konvex. Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ heißt streng konvex, wenn gilt

$$f(x + \lambda(y - x)) < f(x) + \lambda\,(f(y) - f(x))$$

für alle $x, y \in G$ und $\lambda \in [0, 1]$.

Ausgehend von diesen Begrifflichkeiten erhalten wir das folgende Resultat:

Satz 2.2

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f\colon G \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(1) Jede lokale Lösung ist gleichzeitig auch globale Lösung von (2.1).

(2) Falls f sogar streng konvex ist, dann existiert höchstens eine Lösung.

Beweis. (1) Sei $\widetilde{x} \in G$ eine lokale Lösung von (2.1). Wir nehmen an, dass dies jedoch keine globale Lösung ist, d.h. es existiert ein $\overline{x} \in G$ mit $f(\overline{x}) < f(\widetilde{x})$. Wegen der Konvexität von G gilt dann $x(\lambda) = \widetilde{x} + \lambda(\overline{x} - \widetilde{x}) \in G$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Mit der Konvexität von f folgt letzlich

$$f(x(\lambda)) = f(\tilde{x} + \lambda(\overline{x} - \tilde{x})) \overset{f \text{ konvex}}{\leq} f(\tilde{x}) + \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{(f(\overline{x}) - f(\tilde{x}))}_{<0} < f(\tilde{x}) \qquad \forall \lambda \in (0,1]$$

Somit ist $\tilde{x}$ keine lokale Lösung im Widerspruch zur Annahme.

(2) Seien x, y zwei voneinander verschiedene Lösungen., d.h. $f(x) = f(y) = f^*$. Wir erhalten $x(\lambda) \in G$ für alle $\lambda \in [0,1]$ und

$$f(x(\lambda)) = f(x + \lambda(y - x)) \overset{f \text{ streng konvex}}{<} f(x) + \lambda \underbrace{(f(y) - f(x))}_{=0}$$

Somit ist x keine Lösung. □

Für konvexe Optimierungsaufgaben sind lokale und globale Lösungen also äquivalent. Als wichtigen Spezialfall konvexer Mengen halten wir die folgende Darstellung fest.

Aussage 2.3
Sei G gegeben durch

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i \in I, h_j(x) = 0, j \in J\}$$

Dann gilt: falls alle Funktionen g_i $(i \in i)$ konvex und alle Funktionen h_j $(j \in J)$ affin-linear sind, dann ist G konvex.

Beweis. Seien $x, y \in G$ und $\lambda \in (0,1)$. Zur Klärung der Konvexität, stellt sich die Frage, ob $x(\lambda) \in G$?

$$\begin{aligned} g_i(x(\lambda)) &= g_i(x + \lambda(y - x)) \leq g_i(x) + \lambda\left(g_i(y) - g_i(x)\right) = \underbrace{1 - \lambda}_{>0} \underbrace{g_i(x)}_{\leq 0} + \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{g_i(y)}_{\leq 0} \\ &\leq 0 \\ h_j(x(\lambda)) &= h_j(x + \lambda(y - x)) = A_j(x + \lambda(y - x)) + b_j = (1 - \lambda)A_j x + \lambda A_j y + b_j \\ &= (1 - \lambda)[\underbrace{A_j x + b_j}_{h_j(x) = 0}] + \lambda[\underbrace{A_j y + b_j}_{h_j(y) = 0}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist $x(\lambda) \in G$ und G also konvex. □

Jeder zulässige Bereich einer linearen Optimierungsaufgabe (↗ Kapitel 3) hat diese Gestalt.

2.2 Optimalitätsbedingungen

Definition 2.3
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, falls gilt:

$$x \in K \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in K \quad \forall \lambda \geq 0$$

Ein Kegel K ist ein **konvexer Kegel**, falls K eine konvexe Menge bzw. falls gilt

$$x, y \in K \quad \Rightarrow \quad x + y \in K$$

für alle $x, y \in K$. Der **Kegel der zulässigen Richtungen** $Z(\widetilde{x})$ ist definiert durch

$$Z(\widetilde{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{t} := \bar{t}(\widetilde{x}, d) > 0 \text{ sodass } \widetilde{x} + td \in G \;\; \forall t \in [0, \bar{t}]\}$$

Für Optimierungsaufgaben ist der Kegel der zulässigen Richtungen von großer Bedeutung.

Aussage 2.4 (notwendiges Optimalitätskriterium)
Ist f auf G stetig differenzierbar und $\widetilde{x} \in G$ ein lokales Minimum. Dann gilt

$$\nabla f(\widetilde{x})^\top \cdot d \geq 0 \qquad \forall d \in Z(\widetilde{x}) \tag{2.2}$$

Ist G konvex, dann erhält man die Bedingung

$$\nabla f(\widetilde{x})^\top (x - \widetilde{x}) \geq 0 \qquad \forall x \in G \tag{2.3}$$

Beweis. Sei $\widetilde{x}$ ein lokales Minimum und $d \in Z(\widetilde{x})$ eine zulässige Richtung. Dann existiert gemäß Definition ein $\bar{t}$, sodass $\widetilde{x} + td \in G$ für alle $t \in [0, \bar{t}]$ gilt. Weil außerdem $\overline{x}$ eine lokale Lösung ist, gibt es $\rho > 0$ mit $\rho < \bar{t}$ sodass $f(\widetilde{x} + td) \geq f(\widetilde{x})$ für $t \in (0, \rho)$ gilt. Aus dieser Ungleichung folgt

$$\frac{f(\widetilde{x} - td) - f(\widetilde{x})}{t} \geq 0 \qquad \forall t \in (0, \rho)$$

Durch Grenzwertbildung $t \to 0$ auf beiden Seiten erhält man mithilfe der Definition der Richtungsableitung und der Stetigkeit von f die Behauptung (2.2). Für konvexe Mengen gilt stets $x - \widetilde{x} \in Z(\widetilde{x})$ für $x \in G$, also folgt (2.3). □

Dieses Kriterium sagt aus, dass im Punkt $\widetilde{x}$ alle Richtungsableitungen (bezüglich zulässiger Richtungen) nicht-negativ sind, d.h. es keine zulässige Abstiegsrichtung gibt.

Bemerkung 2.2
Ein Punkt, der die Bedingung (2.2) erfüllt, heißt **stationärer Punkt**.

Bemerkung 2.3
Bei der freien Minimierung (d.h. für $G = \mathbb{R}^n$) ergibt sich wegen $Z(\widetilde{x}) = \mathbb{R}^n$ für alle $\widetilde{x} \in G$ die notwendige Bedingung

$$\widetilde{x} \text{ ist lokales Minimum} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\widetilde{x}) = 0$$

Wähle dafür $d \in \{\pm e^i\}_{i=1}^n$.

Für konvexe Optimierungsaufgaben gilt auch die Umkehrung des Resultats der vorherigen Aussage.

Aussage 2.5 (hinreichendes Optimalitätskriterium)
Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $f\colon G \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Falls ein $\widetilde{x} \in G$ existiert, welches der Bedingung (2.3) genügt, dann ist $\widetilde{x}$ (globales) Minimum von (2.1).

Beweis. Wenn f konvex und stetig differenzierbar ist und gilt

$$f(x) \geq f(\widetilde{x}) + \nabla f(\widetilde{x})^\top (x - \widetilde{x}) \qquad \forall x \in G$$

Wegen (2.3) folgt unmittelbar die (globale) Optimalität. Ausführlicher: siehe Übung. □

Im Fall polyedrischer zulässiger Mengen $G \subseteq \mathbb{R}^n$ (wie z.B. in der linearen Optimierung) kann die Bedingung (2.2) präzisiert werden, da dann $Z(x)$ eine einfache Struktur besitzt.

Definition 2.4
$G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **polyedrisch**, falls eine Darstellung $G = \{x \in \mathbb{R}^n\colon Ax \leq b\}$ für eine geeignete Matrix A und einen geeigneten Vektor b existiert. Hierbei gilt

$$Ax \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad \forall i \in I = \{1, \ldots, n\} : a_i^\top x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

Bemerkung 2.4
Eine polyedrische Menge G ist konvex und abgeschlossen, aber im Allgemeinen nicht beschränkt. Implizit können in der Beschreibung von G aus Definition 2.4 auch Gleichungsrestriktionen enthalten sein.

Definition 2.5
Für $x \in G$ ist die **Indexmenge der aktiven Restriktionen** definiert durch

$$I_0(x) := \left\{ i \in I\colon a_i^\top x = b_i \right\}$$

Sei nun ein zulässiger Punkt $x \in G$ gegeben. Damit eine beliebige Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ zulässig ist, nuss ein $\bar{t} > 0$ existieren, sodass $x + td \in G$ für alle $t \in [0, \bar{t}]$ gilt. Für einen polyedrischen Bereich G ist dies äquivalent zu

$$\forall i \in I\colon a_i^\top (x + td) \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I\colon t a_i^\top d \leq b_i - a_i^\top x$$

für alle $t \in [0, \bar{t}]$.

- Für alle inaktiven Restriktionen (also solche $a_i^\top x < b_i$) wäre $t a_i^\top d \leq b_i - a_i^\top x$ zu erfüllen. Egal, welchen Wert $a_i^\top d$ annimmt, es kann stets eine hinreichend kleine Schrittweite (im Sinne der Definition einer zulässigen Richtung) gefunden werden. Somit schränken inaktive Restriktionen die möglichen Richtungen $d \in \mathbb{R}^n$ *nicht* ein.
- Für aktive Restriktionen (also $a_i^\top x = b_i$) erhält man $t a_i^\top d \leq 0$, also (wegen $t > 0$) $a_i^\top d \leq 0$.

Diese Bedingung lässt sich geometrisch interpretieren: das Skalarprodukt der zulässigen Richtungen und des Normalenvektors (nach außen gerichtet) a_i der begrenzenden Hyperebene muss kleiner oder gleich Null sein, d.h. der Schnittwinkel beider Vektoren liegt im Bereich $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Folglich zeigt die zulässige Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ tatsächlich in das Innere von G.

Für einen zulässigen Punkt $x \in G$ kann somit folgende Beobachtung angegeben werden:

$$d \in Z(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I_0(x) \colon a_i^\top d \leq 0 \tag{2.4}$$

Außerdem ist die Größe $\widetilde{t}$ (maximale Schrittweite) wohldefiniert.

$$\widetilde{t} := \widetilde{t} := \min \left\{ \frac{b_i - a_i^\top x}{a_i^\top d} \colon i \in I(x,d) \right\} \tag{2.5}$$

wobei $I(x,d) := \left\{ i \in I \colon a_i^\top d > 0 \right\}$.

Bemerkung 2.5
Falls $I(x,d) = \emptyset$, setzen wir $\widetilde{t} := \infty$.

Beispiel 2.2
Wir betrachten $x := (1,1,1)^\top$ und die polyedrische Menge

$$G := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, x_i \geq 0, i = 1,2,3 \right\}$$

Offenbar gilt $x \in G$. Wir betrachten die Richtungen

$$d^1 = (1,1,1)^\top \text{ und } d^2 = (-1,-2,-1)^\top$$

Als aktive Restriktionen erkennen wir $I_0(x) = \{1\}$ (da nur die erste Nebenbedingung von G mit Gleichheit erfüllt ist).

- Für $d = d^1$ gilt
  $$a_i^\top d = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)^\top \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 4 > 0$$
  Somit ist d^1 keine zulässige Richtung wegen (2.4).
- Für $d = d^2$ gilt
  $$a_i^\top d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 \leq 0$$
  Somit ist d^2 eine zulässige Richtung wegen (2.4). Zur maximalen Schrittweite: Die Ungleichung $(3,1,1)^\top (x + td) \leq 6$ liefert die Bedingung $t \in [-\frac{1}{6}, \infty)$. Aus $x + td \geq 0$ folgt die Bedingung $t \leq \frac{1}{2}$. Insgesamt gilt $\widetilde{t} = \frac{1}{2}$.

Zusammengefasst erhalten wir das folgende Resultat:

Folgerung 2.6
Sei G polyedrisch, d.h. $G = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ und $f \colon G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $\tilde{x}$ eine lokale Lösung von (2.1), so gilt

$$\nabla f(\tilde{x})^\top \cdot d \geq 0 \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ mit } a_i^\top d \leq 0 \ \forall i \in I_0(\tilde{x}) \tag{2.6}$$

Ist f zusätzlich konvex, dann gilt auch die Umkehrung.

2.3 Das Lemma von FARKAS

Das folgende Resultat besitzt vielfältige Anwendungen in der Optimierung ($\nearrow$ Dualität).

Lemma 2.7 (Farkas)
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $a \in \mathbb{R}^m$. Von den Systemen
(i) $Az \leq 0$, $a^\top z > 0$
(ii) $A^\top u = a$, $u \geq 0$.
ist *genau* eines lösbar.

Beweis. ▪ *höchstens* eines der Systeme ist lösbar: Seien (i) und (ii) lösbar. Dann gilt

$$0 < a^\top z = A^\top u^\top z = \underbrace{u^\top}_{\geq 0} \underbrace{Az}_{\leq 0} \leq 0 \quad \lightning$$

▪ *mindestens* eines der Systeme ist lösbar — die Unlösbarkeit von (ii) impliziert die Lösbarkeit von (i): Sei (ii) nicht lösbar. Dann gilt $a \notin K := \left\{x = A^\top u \colon u \geq 0\right\}$, wobei K ein konvexer, abgeschlossener Kegel ist. Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{2} \|a - x\|_2^2 = \frac{1}{2} (a - x)^\top (a - x) \to \min \text{ bei } x \in K$$

Dann existiert eine eindeutige (und globale) Lösung $\overline{x} \in K$ mit

$$(1) \quad \nabla f(\overline{x})^\top \overline{x} = 0 \qquad\qquad (2) \quad \nabla f(\overline{x})^\top x \geq 0 \ \forall x \in K$$

Zunächst folgt gemäß Aussage 2.4, dass $\nabla f(\overline{x})^\top (x - \overline{x}) \geq 0$ für alle $x \in K$. Durch Einsetzen von $x = \frac{1}{2}\overline{x} \in K$ und $x = 2 \cdot \overline{x} \in K$ (beachte: K ist Kegel) erhält man (1). Dies wiederum lässt sich zur notwendigen Bedingung ddazu addieren und man erhält (2). Nun zeigen wir, dass $z := a - \overline{x} \neq 0$ (wegen $a \notin K$) das System (i) löst. Es gilt $\nabla f(\overline{)} = -z$ und damit folgt

$$0 = \nabla f(\overline{x})^\top \overline{x} = -z^\top \cdot (\overline{x} - a + a) = z^\top (z - a) \quad \Rightarrow \quad a^\top z = z^\top z \overset{z \neq 0}{>} 0$$

Weiter gilt $x \in K$ genau dann, wenn ein $u \geq 0$ existiert mit $x = A^\top u$. Aus (2) folgt dann

$$\begin{aligned} \nabla f(\overline{x})^\top x \geq 0 \ \forall x \in K \quad &\Rightarrow \quad -z^\top A^\top u \geq 0 \quad \forall u \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad (Az)^\top u \leq 0 \quad \forall u \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad Az \leq 0 \quad \text{(wähle z.B. wieder } u = e^1, e^2, \dots) \end{aligned}$$

Damit löst z das System (1). □

Damit können die notwendigen Optimalitätsbedingungen (2.6) bzw. äquivalent dazu

$$\forall i \in I_0(x)\colon a_i^\top \cdot d \leq 0 \ \Rightarrow \ \nabla f(\widetilde{x})^\top \cdot d \geq 0 \tag{2.7}$$

wie folgt umformuliert werden: Offenbar ist (2.7) gleichbedeutend mit der Unlösbarkeit von

$$\nabla f(\widetilde{x})^\top \cdot d < 0, \qquad a_i^\top \cdot d \leq 0 \ \forall i \in I_0(\widetilde{x})$$

Wählt man also im Lemma von Farkas $a = -\nabla f(\widetilde{x})$ und A bestehend aus den Zeilen $a_i^\top$, so folgt die Lösbarkeit des Systems

$$\nabla f(\widetilde{x}) + \sum_{i \in I_0(\widetilde{x})} u_i a_i = 0 \qquad (u \geq 0) \tag{2.8}$$

Für konvexe Optimierungsaufgaben ist die Lösbarkeit von (2.8) sogar äquivalent dazu, dass $\widetilde{x}$ Lösung der betrachteten Aufgabe ist.

Gerade im Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit ist (2.8) in der jetzigen Form wenig hilfreich, da $\widetilde{x}$ und damit $I_0(\widetilde{x})$ unbekannt sind. Man betrachtet daher oftmals die folgende äquivalente Umformulierung:

Lemma 2.8
Sei $G := \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon a_i^\top x \leq b_i, i \in I\right\}$ und $f\colon G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ Lösung von

$$f(x) \to \min \ \text{ bei } x \in G$$

ist, dann existiert ein Vektor u, sodass das Paar (x, u) das folgende System löst:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i \in I} u_i a_i = 0 \qquad & u_i \geq 0, \quad a_i^\top - b_i \leq 0 \quad (i \in I) \\ u_i \left(a_i^\top x - b_i\right) = 0 \qquad & (i \in I) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dabei beschreibt $a_i^\top - b_i \leq 0$ die Zulässigkeit von $x \in G$ und $u_i \left(a_i^\top x - b_i\right) = 0$ gleicht die zu große Indexmenge der Summe wieder aus, d.h. für inaktive Restriktionen folgt $u_i = 0$. Ist f konvex, so gilt auch die Umkehrung. Man nennt (2.9) auch ein **KKT-System**.

Bemerkung 2.6

(1) KKT steht für Karush-Kuhn-Tucker.

(2) Die Variablen u heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

(3) Gibt es neben den Ungleichungen auch Gleichungsrestriktionen $a_i^\top x = b_i$ für $i = m + 1, \ldots, \overline{m}$ und $\overline{m} > m$, dann erhält man das KKT-System

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{i=m+1}^{\overline{m}} u_i a_i &= 0 \\ u_i \geq 0, a_i^\top x - b_i &\leq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ a_i^\top x - b_i &= 0 \qquad (i = m+1, \ldots, \overline{m}) \\ u_i \left(a_i^\top x - b_i \right) &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Kapitel 3

LINEARE OPTIMIERUNG

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$z = c^\top x \to \min \text{ bei } x \in G := \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b, x \geq 0\} \tag{3.1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Außerdem nehmen wir an, dass $\operatorname{rg}(A) = m$ gilt und dass $m \leq n$ erfüllt ist.

Bemerkung 3.1

(1) G ist eine polyedrische Menge.

(2) Alle endlich-dimensionalen linearen Optimierungsaufgaben lassen sich **Standardform** (3.1) überführen (↗ Übung).

3.1 Basislösungen und Ecken

Sei $I := \{1, \ldots, n\}$. Da $\operatorname{rg}(A) = m$, existiert eine Indexmenge $I_B \subseteq I$ mit $|I_B| = m$ derart, dass alle Spalten A^i $(i \in I_B)$ linear unabhängig sind. I_B wird **Basis-Indexmenge** genannt. Mit $I_N := I \setminus I_B$ (Nichtbasis) definieren wir

$$\begin{aligned} A_B &= (A^i)_{i \in I_B} & \qquad A_N &= (A^i)_{i \in I_N} \\ c_B &= (c_i)_{i \in I_B} & c_N &= (c_i)_{i \in I_N} \\ x_B &= (x_i)_{i \in I_B} & x_N &= (x_i)_{i \in I_N} \end{aligned}$$

Dann lässt sich (3.1) schreiben als

$$z = c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \to \min \text{ bei } A_B x_B + A_N x_N = b, x_b \geq 0, x_N \geq 0 \tag{3.2}$$

bzw. durch Auflösen der Gleichung nach x_B (beachte: A_B hat Vollrang) als

$$z = \left(c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N\right) x_N + c_B^\top A_B^{-1} b \to \min \text{ bei } x_B = -A_B^{-1} A_N x_N + A_B^{-1} b, x_B \geq 0, x_N \geq 0 \tag{3.3}$$

Definition 3.1

Der Punkt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

heißt **Basislösung** zu I_B. Gilt zusätzlich $A_B^{-1} b \geq 0$, dann heißt $x = (x_B, x_N)$ **zulässige Basislösung**.

Definition 3.2
Der Punkt $x \in G$ heißt **Ecke** (von G), falls aus $x = \frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right)$ mit $x^1, x^2 \in G$ stets $x = x^1 = x^2$ folgt.

Ecken des zulässigen Bereichs können also nicht durch andere zulässige Punkte linear kombiniert werden.

Zur Wiederholung benennen wir im Folgenden (ohne Beweis) einige Eigenschaften von Ecken und zulässigen Basislösungen.

Satz 3.1
Sei $\operatorname{rg}(A) = m$. Dann ist jede zulässige Basislösung auch Ecke von G. Umgekehrt gibt es zu jeder Ecke mindestens eine zulässige Basislösung.

Häufig unterscheidet man zwischen

- **degenerierten** (oder entarteten) Ecken, die mehrere zulässige Basislösungen besitzen
- **nicht-degenerierten** (oder nicht-entarteten) Ecken, die genau eine zulässige Basislösung besitzen.

Dabei gilt: Eine Ecke $x \in G$ ist genau dann degeneriert, wenn ein $i \in I_B$ mit $x_i = 0$ existiert.

Beispiel 3.1
Sei

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ \ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2,\ \ x_1, \dots, x_4 \geq 0\}$$

Hierbei ist die Ecke $E_1 = (0,1,0,1)^\top$ nicht degeneriert, da sie nur die Zerlegung $I_B = \{2,4\}$ und $I_N = \{1,3\}$ gestattet. Die Ecke $E_2 = (1,0,0,0)^\top$ ist degeneriert, weil ein $i \in I_B$ zwangsläufig $x_i = 0$ erfüllen muss.

Satz 3.2
Seo $G \neq \emptyset$. Dann besitzt G

(1) mindestens eine Ecke

(2) höchstens endlich viele Ecken.

Beweis. siehe Übung □

Satz 3.3
Ist (3.1) lösbar, dann gibt es eine Ecke von G, die (3.1) löst.

Bei linearen Optimierungsaufgaben genügt es daher die Ecken von G zu betrachten. Ist die Aufgabe lösbar, so findet man durch systematisches Abschreiten der Ecken eine Lösung. Um dabei zu erkennen, ob Optimalität vorliegt, hilft folgendes Resultat:

Aussage 3.4 (Optimalitätskriterium)
Gilt für die zuässige Basislösung $x = (x_B, x_N) = (A_B^{-1}b, 0)$ die Bedingung

$$c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N \geq 0 \tag{3.4}$$

dann ist x Lösung von (3.1).

Beweis. Sei $x = (x_B, x_N)$ eine zulässige Basislösung. Wir zeigen zunächst:

$$Z(x) \subseteq \{d \in \mathbb{R}^n \colon Ad = 0, d_N \geq 0\}$$

Sei $d \in Z(x)$. Dann existiert $t > 0$ mit $A(x + td) \overset{!}{=} b$ (beachte die Definition von G mit Gleichheitsrestriktionen). Es gilt

$$Ax + tAd = b \quad \Leftrightarrow \quad b + tAd = b \quad \overset{t \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad Ad = 0$$

Wegen $x_N = 0$ ergibt sich aus $x + td \overset{!}{\geq} 0$ (nach Definition von G) sofort $d_N \geq 0$. Insbesondere gilt

$$Ad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_B d_B + A_N d_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_B = -A_B^{-1} A_N d_N \qquad \forall d \in Z(x)$$

Damit folgt unter Berücksichtigung von (3.4)

$$\begin{aligned}
\nabla f(x)^\top d &= c^\top d \\
&= c_B^\top d_B + c_N^\top d_N \\
&= -c_B^\top A_B^{-1} A_N d_N + c_N^\top d_N \\
&= \underbrace{\left(c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N\right)}_{\geq 0} \underbrace{d_N}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \forall d \in Z(x)
\end{aligned}$$

d.h. x genügt der notwendigen Optimalitätsbedingung (2.2), die hier (im konvexen Fall) auch hinreichend ist. □

Eine entsprechende Systematik zum Abschreiten der Ecken wird im Folgenden Abschnitt behandelt.

3.2 Das primale Simplex-Verfahren

Das primale Simplexverfahren durchläuft zwei Phasen (falls nötig):

- Phase 1 besteht aus der Ermittlung einer ersten Ecke (zulässige Basislösung),
- Phase 2 aus der darauf aufbauenden Bestimmung einer optimalen Ecke.

3.2.1 Phase 2 des Simplex-Verfahrens

Wir betrachten die (erste) zulässige Basislösung (Ecke) $x = (x_B, x_N)$ und schreiben (3.3) als Simplex-Tableau:

T_0	x_N	1
$x_B =$	P	p
$z =$	$q^\top$	q_0

$$\begin{aligned} P &= -A_B^{-1} A_N & p &= A_B^{-1} b \\ q^\top &= c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N & q_0 &= c_B^\top A_B^{-1} b \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $x = (x_B, x_N)$ eine nicht-entartete Ecke mit $x_B = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ und $x_N = (x_{m+1}, \ldots, x_n)^\top$ ist. Die hierzu gehörige Basislösung ist $x = (x_B, x_N) = (p, 0)$ und es gilt $p \geq 0$ (da zulässig). Folglich ist $x \in G$.

Frage: Wenn x nicht optimal ist – wie kann eine bessere zulässige Basislösung (Ecke) gefunden werden?

Antwort: Wahl einer zulässigen Richtung $d \in Z(x)$ mit maximaler Schrittweite, die eine Verkleinerung des Zielfunktionswerts ermöglicht.

Nach Aussage 3.4 ist x optimal, falls $q \geq 0$ gilt. Sei nun $q_\tau < 0$ für $\tau \in I_N$. Zur Konstruktion einer neuen Ecke setzen wir $x_\tau = t$ (bisher war $x_\tau = 0$). Dann folgt zunächst $x_N(t) = t \cdot e_\tau$ und wegen der Forderung $x_N(t) \geq 0$ auch $t \geq 0$. Ferner ergibt sich aus Tableau T_0 der Zusammenhang $x_i(t) = P_{i\tau} \cdot x_\tau + p_i = P_{i\tau} \cdot t + p_i$ für alle $i \in I_B$.

Insgesamt verfolgen wir ausgehend von $x = (p, 0)$ die zulässige Richtung $d \in \mathbb{R}^n$

$$d_i = \begin{cases} P_{i\tau} & i \in I_B \\ 1 & i = \tau \\ 0 & i \in I_N \setminus \{\tau\} \end{cases}$$

Die maximale Schrittweite $\bar{t}$ erhält man wie folgt: Für jedes $i \in I_B$ ist $x_i(t) \geq 0$ zu gewährleisten. Gilt $P_{i\tau} \geq 0$, so ergibt dies keine Einschränkung für die Schrittweite (weil $p_i \geq 0$, $t \geq 0$, $P_{i\tau} \geq 0$ $\Rightarrow$ $x_i(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$). Für $P_{i\tau} < 0$ muss hingegen $t \leq -\frac{p_i}{P_{i\tau}}$ (aus Tableauzusammenhang) gewählt werden. Die maximal mögliche Schrittweite ergibt sich folglich zu

$$t \leq \bar{t} = \bar{t}(x, d) := \min \left\{ -\frac{p_i}{P_i\tau} : P_{i\tau} < 0, i \in I_B \right\} \tag{3.6}$$

bzw. $\bar{t} = \infty$, falls $P_{i\tau} \geq 0$ für alle $i \in I_B$.

Aussage 3.5

Im Fall $\bar{t} = \infty$ besitzt (3.1) keine Lösung, da die Zielfunktion nach unten unbeschränkt ist.

Beweis. Wegen $\bar{t} = \infty$ gilt $x(t) \in G$ für alle $t \geq 0$. Dann liefert $q_\tau < 0$ sogleich $Z(t) =$

$\overline{q} \cdot x_N(t) + q_0 \overset{x_N(t)=t\cdot e_\tau}{=} q_\tau \cdot t + q_0 \to -\infty$ für $t \to \infty$. $\square$

Bemerkung 3.2
Die beiden Fälle

(1) $q_i \geq 0$ für alle $i \in I_N$ $\rightsquigarrow$ Optimalität

(2) es existiert ein $\tau \in I_N$ mit $q_\tau < 0$ und $P_{i\tau} \geq 0$ für alle $i \in I_B$ $\rightsquigarrow$ Unbeschränktheit

werden primal entscheidbar genannt.

Im sogenannten nicht-entscheidbaren Fall, d.h. falls

$$(\exists\ \tau \in I_N\colon a_\tau < 0) \wedge \left(\exists\ \sigma \in I_B\colon \overline{t} = -\frac{p_\sigma}{P_{\sigma\tau}} = \min\left\{-\frac{p_i}{P_{i\tau}} : P_{i\tau<0, i\in I_B}\right\} < \infty\right)$$

ergibt die (maximale) Schrittweite $\overline{t}$ den Punkt

$$\overline{x} = x + \overline{t}d \in G \text{ mit } f(\overline{x}) = f(x) + \overline{t}q_\tau = q_0 + \overline{t}q_\tau$$

Für entartete Ecken kann man die Schrittweite $\overline{t} = 0$ erhalten. In diesem Fall ändert sich der Punkt $\overline{x}$ nicht, aber die Menge I_N und I_B. Zum Verlassen einer (noch nicht optimalen) entarteten Ecke können mehrere Schritte nötig sein.

Satz 3.6
$\overline{x}$ ist eine Ecke von G mit Basis-Indexmenge

$$\begin{aligned}\overline{I_B} &= \overline{I_B}(\overline{x}) := (I_B \setminus \{\sigma\}) \cup \{\tau\}\\ \overline{I_N} &= \overline{I_N}(\overline{x}) := (I_N \setminus \{\tau\}) \cup \{\sigma\}\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Matrix $\overline{A_B} := (A')_{i\in\overline{I_B}}$ regulär ist, nutzen wir das folgende Resultat.

Lemma 3.7 (Sherman / Morrison)
Es seien $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulär und $u, v \in \mathbb{R}^m$. Die Matrix $\overline{B} := B + uv^\top$ ist genau dann regulär, wenn $1 + v^\top B^{-1}u \neq 0$ erfüllt ist und dann gilt

$$\overline{B}^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^\top B^{-1}}{1 + v^\top B^{-1}u}$$

Beweis. Übung oder Selbststudium (aber wird nie gefragt werden) $\square$

Beweis (Satz 3.6). Der "Austausch" der Spalten A^τ und A^σ kann durch ein dyadisches Produkt $uv^\top$ beschrieben werden:

$$\overline{A_B} = A_B + uv^\top \text{ mit } u = A^\tau - A^\sigma \text{ und } v = e^\sigma$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 + v^\top B^{-1} u &= 1 + (e^\sigma)^\top A_B^{-1} (A^\tau - A^\sigma) \\ &= 1 + (e^\sigma)^\top A_B^{-1} A^\tau - 1 && (\text{"}A^\sigma \in A_B\text{"}) \\ &= -P_{\sigma\tau} \neq 0 && (P = -A_B^{-1} A_N \text{ und "}A^\tau \in A_N\text{"}) \end{aligned}$$

folgt aus Lemma 3.7 die Regularität von $\overline{A_B}$. □

Beispiel 3.2

Wir betrachten $z = -x_1 - x_2 \to \min$ bei $x_1 + 2x_2 \leq 6$, $4x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1, x_2 \geq 0$. Um aus den Ungleichungen Gleichungsnebenbedingungen zu machen, führen wir sogenannte Schlupfvariablen $x_3, x_4 \geq 0$ ein und erhalten

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \quad 4x_1 + x_2 + x_4 = 10, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 6 - x_1 - 2x_2 \text{ und } x_4 = 10 - 4x_1 + x_2$$

Damit liegt nun eine Optimierungsaufgabe in Standardform (3.1) vor. Notieren wir dies nun in Tableauform mit $I_N = \{1, 2\}$ und $I_B = \{3, 4\}$ (betrachte dazu $x_B = Px_N + p$):

T_0	x_1	x_2	1	
$x_3 =$	-1	-2	6	$\bar{t} = \frac{6}{1}$
$x_4 =$	-4	-1	10	$\bar{t} = \frac{10}{4}$
$z =$	-1	-1	0	

Wir können nun $\tau \in \{1, 2\}$ wählen, oBdA wählen wir hier $\tau = 1$. Für x_3 ergibt sich eine maximale Schittweite $\bar{t} = -\frac{p_i}{P_{i\tau}} = \frac{6}{1}$. Für x_4 ergibt sich $\bar{t} = \frac{10}{4}$. Damit wird $\sigma = 4$ gewählt.

Mit $\tau = 1$ und $\sigma = 4$ sowie $\bar{t} = \frac{5}{2}$ erhält man

$$\overline{x} = x + \bar{t}d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$z(\overline{x}) = -\frac{5}{2}$$

Der Austausch von x_τ und x_σ im Simplextableau kann formal durch die sogenannten Austauschregeln erfolgen.

$$\begin{array}{r|c|c} T_0 & x_N & 1 \\ \hline x_B = & P & p \\ \hline z = & q^\top & q_0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r|c|c} T_1 & x_{\widetilde{N}} & 1 \\ \hline x_{\widetilde{B}} = & \widetilde{P} & \widetilde{p} \\ \hline z = & \widetilde{q}^\top & \widetilde{q}_0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{I_B} &= (I_B \cup \{\tau\}) \setminus \{\sigma\} \\ \widetilde{I_N} &= (I_B \cup \{\sigma\}) \setminus \{\tau\} \end{aligned}$$

Austauschregeln:

$$\widetilde{P}_{\sigma,\tau} := \frac{1}{P_{\sigma,\tau}} \qquad \text{(Pivotelement)}$$

$$\widetilde{P}_{\sigma,j} := -\frac{P_{\sigma,j}}{P_{\sigma,\tau}} \quad (j \in I_N \setminus \{\tau\}) \qquad \widetilde{p}_\sigma = -\frac{p_\sigma}{P_{\sigma,\tau}} \qquad \text{(Pivotzeile)}$$

$$\widetilde{P}_{i,\tau} := -\frac{P_{i,\tau}}{P_{\sigma,\tau}} \quad (i \in I_B \setminus \{\sigma\}) \qquad \widetilde{q}_\tau := \frac{q_\tau}{P_{\sigma,\tau}} \qquad \text{(Pivotspalte)}$$

$$\widetilde{P}_{i,j} := P_{i,j} - \frac{P_{\sigma,j}}{P_{\sigma,\tau}} P_{i,\tau} \quad (i \in I_B \setminus \{\sigma\}, j \in I_N \setminus \{\tau\}) \qquad \text{(sonstige Elemente)}$$

$$\widetilde{p}_i := p_i - \frac{p_\sigma}{P_{\sigma,\tau}} P_{i,\tau} \quad (i \in I_B \setminus \{\sigma\})$$

$$\widetilde{q}_j := q_j - \frac{P_{\sigma,j}}{P_{\sigma,\tau}} q_\tau \quad (j \in I_N \setminus \{\tau\})$$

Vergleiche dazu auch das Merkblatt zum Simplex-Verfahren unter
`https://www.math.tu-dresden.de/~martinovic/Zusammenfassung_Simplexverfahren.pdf`

Beispiel 3.3

Wir betrachten wie in Beispiel 3.2 die Optimierungsaufgabe $z = -x_1 - x_2 \to \min$ bei $x_1 + 2x_2 \leq 6$, $4x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1, x_2 \geq 0$. mit Simplex-Starttableau:

T_0	x_1	x_2	1	
$x_3 =$	-1	$\boxed{-2}$	6	$\bar{t} = 3$
$x_4 =$	-4	-1	10	$\bar{t} = 10$
$z =$	-1	-1	0	
Kellerzeile	$-\frac{1}{2}$	$*$	3	= neue Pivotzeile

Nun wählen wir aber $\tau = 2$, woraus sich $\sigma = 3$ ergibt. Zur besseren Übersicht haben wir eine Kellerzeile eingeführt. Diese entspricht genau der neu berechneten Pivotzeile.

T_1	x_1	x_3	1	
$x_2 =$	$-1/2$	$-1/2$	3	(Division durch -1 * Pivot)
$x_4 =$	$-7/2$	$1/2$	7	
$z =$	$-1/2$	$1/2$	-3	
Kellerzeile	$-2/7$	$1/7$	2	

Nebenrechnung: z.B. $7 = 10 + 3 \cdot (-1)$

Im nächsten Schritt wählen wir nun $\tau = 1$ und $\sigma = 4$.

T_2	x_4	x_3	1
$x_2 =$	$1/7$	$-4/7$	2
$x_1 =$	$-2/7$	$1/7$	2
$z =$	$1/7$	$3/7$	-4

Da $\widetilde{p} = \binom{2}{2} \geq 0$ ist, ist die Lösung zulässig. Außerdem wissen wir wegen $\widetilde{q}^\top = (1/7, 3/7) \geq 0$, dass die Lösung optimal ist. Somit ergibt sich

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (2, 2, 0, 0) \text{ mit } z^* = -4$$

3.2.2 Phase 1 (Hilfsfunktionsmethode)

Wir betrachten das Problem

$$z = c^\top x \to \min \text{ bei } Ax = b, x \geq 0 \tag{3.7}$$

Ohne Einschränkung sei $b \geq 0$. Durch folgendes Hilfsproblem lässt sich eine Startecke ermitteln (sofern eine solche überhaupt existiert).

$$h = e^\top y \to \min \text{ bei } y + Ax = b, x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^m \tag{3.8}$$

mit $e = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$. Eine erste Basislösung für (3.8) ist gegeben durch

T_0	x	1
$y =$	$-A$	b
$h =$	$-e^\top A$	$e^\top b$

(3.9)

Satz 3.8
Das Problem (3.7) besitzt genau dann eine zulässige Lösung, wenn $h_{\min} = 0$ den Optimalwert von (3.8) darstellt.

Beweis. Offenbar gilt $h_{\min} = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$.

(⇒) Besitzt (3.7) eine zulässige Lösung $\widetilde{x}$, dann ist $\binom{\widetilde{x}}{0}$ zulässig für (3.8). Wegen $0 \leq h = e^\top \widetilde{y} = 0$ folgt $h_{\min} = 0$.

(⇐) Hat man umgekehrt $h_{\min} = 0$, so gilt $\widetilde{y} = 0$ für jede optimale Lösung $\binom{\widetilde{x}}{\widetilde{y}}$ von (3.8). Aus der Zulässigkeit von $\binom{\widetilde{x}}{\widetilde{y}}$ für (3.8) folgt dann die Zulässigkeit von $\widetilde{x}$ für (3.7). □

3.2.3 Der Simplexalgorithmus

Mit den zuvor beschriebenen Vorgehensweisen lässt sich das Simplexverfahren zur Lösung der Optimierungsaufgabe (3.1) wie folgt algorithmisch formulieren:

- **Schritt 1** (*Initialisierung*): Ermittle eine erste zulässige Basislösung $x = \left(x_B^\top, x_N^\top\right)^\top = \left(p^\top, 0^\top\right)^\top$ mit $p = (A_B)^{-1}b \geq 0$, wobei I_B die Menge der Basisindizes ist und stelle ein erstes Simplextableau auf.

- **Schritt 2** (*Optimalitätstest*): Berechne entsprechend Aussage 3.4

$$\overline{q} := \min_{j \in I_N} q_j \quad \text{mit} \quad q_J := c_j d^\top A^j \ \ (j \in I_N) \tag{3.10}$$

wobei $d^\top := c_B^\top (A_B)^{-1}$ ist. Gilt $\overline{q} \geq 0$, dann ist x Lösung von (3.1). Andernfalls sei $q_\tau = \overline{q} < 0$.

- **Schritt 3** (*Test auf Unbeschränktheit*): Gilt $P_{i\tau} \geq 0$ für alle $I \in I_B$, so ist die Aufgabe nicht lösbar ($f^* = -\infty$).

- **Schritt 4** (*Austauschschritt*): Bestimme die Pivotzeile σ gemäß

$$-\frac{p_\sigma}{P_{\sigma\tau}} = \min \left\{ -\frac{p_i}{P_{i\tau}} : \overline{P}_{i\tau} < 0, i \in I_B \right\}$$

und führe den Austauschschritt $\sigma \leftrightarrow \tau$ (Aktualisierung Simplextableau) durch. Gehe zu Schritt 2.

Bemerkung 3.3

(i) Der Simplexalgorithmus löst Problem (3.1) nach endlich vielen Schritten exakt oder stellt dessen Unlösbarkeit fest.

(ii) Pro Simplexschritt ist im Wesentlichen die Matrix P (der Dimension $m \times (n-m)$) zu transformieren. Für $n \gg m$ kann das recht aufwendig sein, sodass ggf. alternative Varianten des Simplexalgorithmus' (z.B. das revidierte Simplexverfahren oder die Technik der Spaltengenerierung) effizienter sind.

(iii) Der Test auf Unbeschränktheit der Zielfunktion kann auch für jede Spalte $j \in I_N$ mit $q_j < 0$ erfolgen, sofern dies nicht zu aufwendig ist.

3.3 Das duale Simplexverfahren

Nach Aussage 3.4 ist ein Tableau

T_0	x_N	1
$x_B =$	P	p
$z =$	$q^\top$	q_0

optimal, wenn $p \geq 0$ und $q \geq 0$ gelten. Nach Konstruktion gilt beim primalen Simplexverfahren stets $p \geq 0$. Sei nun ein Tableau T_0 gegeben mit $q \geq 0$, aber *nicht* $p \geq 0$, d.h. es gibt eine Zeile $\sigma \in I_B$ mit $p_\sigma < 0$. Die zu T_0 gehörige Basislösung ist dann *nicht* zulässig. Mithilfe des dualen Simplexverfahrens lässt sich jedoch (unter Beibehaltung von $q \geq 0$) eine zulässige Basislösung (d.h. mit "$p \geq 0$) erzeugen. Entsprechend der bekannten Austauschregeln ergeben sich folgende

Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_j &:= q_j - \frac{P_{\sigma,j}}{P_{\sigma,\tau}} q_\tau \overset{!}{\geq} 0 \qquad \forall j \in I_N \setminus \{\tau\} \\
\widetilde{q}_\tau &:= \frac{q_\tau}{P_{\sigma,\tau}} \qquad\quad \overset{!}{\geq} 0 \\
\widetilde{p}_\sigma &:= -\frac{p_\sigma}{P_{\sigma,\tau}} \qquad \overset{!}{\geq} 0
\end{aligned}$$

Wegen $p_\sigma < 0$ und $q_\tau \geq 0$ ist somit ein Pivotelement mit $P_{\sigma,\tau} > 0$ zu wählen. Zur Sicherstellung von $\widetilde{q}_j \geq 0$ für alle $j \in I_N \setminus \{\tau\}$ muss ferner gelten

$$\frac{q_\tau}{P_{\sigma,\tau}} = \min \left\{ \frac{q_j}{P_{\sigma,j}} : P_{\sigma,j} > 0, j \in I_N \right\}$$

Die eigentlichen Austauschregeln sind analog zu denen des primalen Simplexverfahrens.

Bemerkung 3.4

Da dieses Verfahren mit einem *unzulässigen* Punkt startet, ist die Folge der Zielfunktionswerte (im Gegensatz zum primalen Simplexverfahren) nicht monoton fallend.

Bemerkung 3.5

Falls eine zulässige Basislösung gefunden wird, so ist diese zwangsläufig optimal.

Beispiel 3.4

Betrachten wir die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned}
z = 6x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 9x_5 \to \min \qquad \text{bei} \qquad x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 300, \\
x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 400, \\
x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, 5
\end{aligned}$$

Um daraus Gleichungsrestriktionen zu machen, führen wir Schlupfvariablen $x_6, x_7 \geq 0$ ein, d.h.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 300 + x_6, \\
x_2 + 2x_3 + x_4 &= 400 + x_7, \\
x_i &\geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, 7
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun folgendes Tableau

T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	
$x_6 =$	1	0	1	1	1	-300	
$x_7 =$	0	$\boxed{1}$	2	1	0	-400	
$z =$	6	5	12	8	9	0	$\leftarrow \sigma = 7$
Keller	0	$*$	-2	-1	0	400	

Zur Wahl von $\tau = 2$: $\frac{5}{1}$, $\frac{12}{6} = 6$, $\frac{8}{1} = 8$. Dabei ist 5 minimal, also $\tau = 2$. Fahren wir nun mit den weiteren Tableaus fort:

T_1	x_1	x_7	x_3	x_4	x_5	1	
$x_6 =$	1	0	$\boxed{1}$	1	1	-300	$\leftarrow \sigma = 6$
$x_2 =$	0	1	-2	-1	0	400	
$z =$	6	5	2	3	9	2000	
Keller	0	$*$	$*$	-1	0	400	

T_2	x_1	x_7	x_6	x_4	x_5	1	
$x_3 =$	1	0	1	-1	1	300	
$x_2 =$	2	1	-2	$\boxed{1}$	2	-200	$\leftarrow \sigma = 2$
$z =$	4	5	2	1	7	2600	
Keller	-2	-1	2	$\tau = 4$	-2	200	

T_3	x_1	x_7	x_6	x_2	x_5	1
$x_3 =$	1	1	-1	-1	1	100
$x_4 =$	-2	-1	2	1	-2	200
$z =$	2	4	4	1	5	2800

Somit ergibt sich die Lösung

$$x^* = (0,0,100,200,0,0,0)^\top \qquad \text{und} \qquad z^* = 2800$$

3.4 Dualität

Wir betrachten nun die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} &c^\top x \to \min \text{ bei } Ax \leq b \text{ und } x \in \mathbb{R}^n_+ \\ &I := \{1,\dots,m\} \text{ und } J := \{1,\dots,n\} \end{aligned} \tag{P}$$

Satz 3.9 (Charakterisierungssatz)
Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung von (P), wenn ein $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ existiert, sodass insgesamt das folgende System gelöst wird:

$$\begin{aligned} A\overline{x} - b &\leq 0 & \overline{x} &\geq 0 && (1) \\ A^\top \overline{u} + c &\geq 0 & \overline{u} &\geq 0 && (2) \\ \overline{u}^\top (A\overline{x} - b) &= 0 & \overline{x}^\top \left(A^\top \overline{u} + c\right) &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Beweis. Die vorliegende Optimierungsaufgabe ist äquivalent zu

$$f(x) = c^\top x \to \min \text{ bei } \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ -\mathbb{1}_n \end{pmatrix}}_{=\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}} x \leq \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\widetilde{b} \in \mathbb{R}^{m+n}} \tag{P'}$$

Gemäß Lemma 2.8 ist x genau dann Lösung von (P') (und (P)), wenn ein Vektor $w = \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^{m+n}$ existiert mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i \in I \cup J} w_i \tilde{a}_i &= 0 \\ w_i &\geq 0 \qquad (i \in I \cup J) \\ \tilde{a}_i^\top x - \tilde{b}_i &\leq 0 \qquad (i \in I \cup J) \\ w_i \left(\tilde{a}_i^\top x - b_i\right) &= 0 \qquad (i \in I \cup J) \end{aligned} \tag{KKT}$$

Trennung von I und J führt zu

$$c + \sum_{i \in I} u_i a_i + \sum_{j \in J} v_j(-e^j) = 0 \tag{KKT}$$

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \quad (i \in I) & v_j &\geq 0 \quad (j \in J) \\ a_i^\top x - b_i &\leq 0 \quad (i \in I) & \left(-e^j\right)^\top x - 0 &\leq 0 \quad (j \in J) \\ u_i \left(a_i^\top x - b_i\right) &= 0 \quad (i \in I) & v_j \left(\left(-e^j\right)^\top x - 0\right) &= 0 \quad (j \in J) \end{aligned}$$

Überführt man dieses System in eine Matrix-Vektor-Schreibweise, so ergibt sich

$$\begin{aligned} c + A^\top u - v &= 0 \\ u, v, x &\geq 0 \\ Ax - b &\leq 0 \\ u^\top (Ax - b) &= 0 \\ x^\top v &= 0 \end{aligned}$$

Durch Umstellen der ersten Gleichung nach v lässt sich diese Variable im System "eliminieren" und wir erhalten die Behauptung. □

Definition 3.3

Das Problem

$$\text{(D)} \qquad z_D = -b^\top u \to \max \qquad \text{bei} \qquad A^\top u \geq -c, \;\; u \in \mathbb{R}^m_+ \tag{3.11}$$

heißt duale Optimierungsaufgabe zu (P).

Begründung: Die Anwendung von Satz 3.9 auf (D) ergibt das selbe KKT-System wie im Falle von (P). Dazu müssen wir (D) umformulieren als Minimierungsaufgabe

$$-z_D = b^\top u \to \min \qquad \text{bei} \qquad -A^\top u \leq c, \;\; u \in \mathbb{R}^m_+$$

(damit die selbe Form wie in Satz 3.9 vorliegt). Einsetzen in (1) - (3) ergibt

$$\begin{aligned}
(1) &\leadsto & -A^\top u - c \leq 0, & \quad & u \geq 0 \\
(2) &\leadsto & \left(-A^\top\right)^\top y + b \geq 0, & \quad & y \geq 0 \\
(3) &\leadsto & y^\top \left(-A^\top u - c\right) = 0, & \quad & u^\top \left(\left(-A^\top\right)^\top y + b\right) = 0
\end{aligned}$$

Umformulierung liefert

$$\begin{aligned}
(1) &\leadsto & A^\top u + c \geq 0, & \quad & u \geq 0 & \quad \text{entspricht (2) aus System für (P)} \\
(2) &\leadsto & Ay - b \leq 0, & \quad & y \geq 0 & \quad \text{entspricht (1) aus System für (P) mit } y = x \\
(3) &\leadsto & y^\top \left(A^\top u + c\right) = 0, & \quad & u^\top (Ay - b) = 0 & \quad \text{entspricht (3) aus System für (P)}
\end{aligned}$$

(D) liefert also dasselbe System (1) - (3) wie (P).

Satz 3.10 (schwache Dualität)
Sei x zulässig für (P) und u zulässig für (D). Dann gilt

$$-b^\top u \leq c^\top x$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
-b^\top u &\leq (-Ax)^\top u = -x^\top A^\top u & \qquad (Ax \leq b, u \geq 0) \\
&\leq x^\top c = c^\top x & \qquad (A^\top u \geq -c, x \geq 0)
\end{aligned}$$

□

Satz 3.11 (starke Dualität)
Die Optimierungsaufgabe (P) ist genau dann lösbar, wenn (D) lösbar ist. Für die zugehörigen Lösungen $\overline{x}$ und $\overline{u}$ gilt dann

$$-b^\top \overline{u} = c^\top \overline{x}$$

also die Gleichheit der Optimalwerte.

Beweis. Der erste Teil der Aussage folgt direkt aus der Gleichheit der KKT-Systeme. Aus Eigenschaft (3) des KKT-Systems folgt dann die Gleichheit der Optimalwerte mittels

$$\overline{u}^\top (A\overline{x} - b) = 0 = \overline{x}^\top \left(A^\top \overline{u} + c\right) \quad \Rightarrow \quad -b^\top \overline{u} = \overline{u}^\top A \overline{x} = c^\top \overline{x}$$

□

Aus dem schwachen Dualitätssatz folgt insbesondere auch, dass die Existenz eines dual (primal) zulässigen Punktes eine endliche untere (obere) Schranke für den primalen (dualen) Optimalwert liefert.

Folgerung 3.12

$$\text{(P) lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(D) lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \geq 0, u \geq 0 \colon Ax \leq b, A^\top u \geq -c$$

Die Bedingungen (3) im KKT-System werden **Komplementaritätsbedingungen** genannt.

zum Beispiel: $u^\top(Ax-b)=0, x\geq 0, u\geq 0, Ax-b\leq 0$, d.h. $u_i(Ax-b)_i=0$ für alle i.

Es ist möglich, primale und duale Aufgabe gleichzeitig innerhalb eines Tableaus zu lösen:

$$\begin{array}{llll} (P) & z_P = c^\top x \to \min & \text{bei} & Ax \leq b, x\geq 0 \\ (D) & z_D = -b^\top u \to \max & \text{bei} & -A^\top u \leq c, u\geq 0 \end{array}$$

Durch Einführen von Schlupfvariablen $s\geq 0$, $v\geq 0$ erhält man

$$\begin{array}{llll} (P) & z_P = c^\top x \to \min & \text{bei} & s = b - Ax,\ x\geq 0, s\geq 0 \\ (D) & -z_D = b^\top u \to \min & \text{bei} & v = c + A^\top u, u\geq 0, v\geq 0 \end{array}$$

T_0	x	1
$s =$	$-A$	b
$z_P =$	$c^\top$	0

bzw.

T_0	u	1
$v =$	$A^\top$	c
$-z_D =$	$b^\top$	0

Beide Schemata sind (gewissermaßen) zueinander transponiert. Das duale Simplexverfahren für (P) kann als primales Simplexverfahrens für (D) interpretiert werden.

3.5 Transportoptimierung

3.5.1 Problemstellung

Zur Erinnerung: Es gebe Erzeuger $i\in I=\{0,\dots,r\}$ und Verbraucher $k\in K=\{1,\dots,s\}$. Weiterhin seien die Kosten c_{ik} für den Transport einer Einheit von i nach k sowie der Vorrat $a_i>0$ und der Bedarf $b_k>0$ für alle $i\in I$ und $k\in K$ bekannt. Wie ist der gesamte Transport kostenminimal zu gestalten.

Als Variablen verwenden wir die Transportmenge x_{ik} von i nach k.

$$z=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} c_{ik}x_{ik}\to\min \quad \text{bei} \quad \begin{array}{lll} \sum_{k\in K} x_{ik} = a_i & (i\in I) \\ \sum_{i\in I} x_{ik} = b_k & (k\in K) \\ x_{ik} \geq 0 & (i,k)\in I\times K \end{array} \tag{3.12}$$

Mit

$$\begin{aligned} x &= (x_{11},x_{12},\dots,x_{1s},x_{21},\dots,x_{rs})^\top \\ c &= (c_{11},c_{12},\dots,c_{1s},c_{21},\dots,c_{rs})^\top \\ \bar{b} &= (a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s)^\top \end{aligned}$$

hat (3.12) die Form

$$z=c^\top x\to\min \ \text{bei}\ Ax=\bar{b}, x\geq 0$$