



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

**Fakultät Mathematik** Institut für Numerik, Professur für Numerik der Optimalen Steuerung

---

# OPTIMIERUNG UND NUMERIK

**Dr. John Martinovic**

Wintersemester 2019/20

Autor : Eric Kunze  
E-Mail : `eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de`

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
1.1	Aufgabenstellung und Grundbegriffe . . . . .	2
1.2	Beispiele zur kontinuierlichen Optimierung . . . . .	3
1.2.1	Transportoptimierung . . . . .	3
1.2.2	Kürzeste euklidische Entfernung . . . . .	4
1.3	Beispiele zur diskreten Optimierung . . . . .	4
1.3.1	Das Rucksackproblem . . . . .	4
1.3.2	Das Bin-Packing-Problem . . . . .	5
1.3.3	Standortplanung . . . . .	6
1.3.4	Quadratisches Zuordnungsproblem . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1	Existenz von Lösungen . . . . .	8

# Kapitel 1

## EINFÜHRUNG

### 1.1 Aufgabenstellung und Grundbegriffe

Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. In dieser Vorlesung betrachten wir Optimierungsaufgaben (OA) der Form

$$f(x) \rightarrow \min \quad \text{bei } x \in G \quad (1.1)$$

Man nennt

- $f$  die **Zielfunktion**,
- $G$  den **zulässigen Bereich** und
- ein  $x \in G$  **zulässigen Punkt** (oder zulässige Lösung).

Ein zulässiger Punkt  $x^* \in G$  heißt **optimal** (oder Lösung oder optimale Lösung), wenn für alle  $x \in G$  die Ungleichung

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (1.2)$$

gilt. Falls das Problem (1.1) lösbar ist, so wird mit  $f^* = f(x^*)$  der **Optimalwert** bezeichnet. Das Problem (1.1) ist ein

- **unrestringiertes** (oder freies) Optimierungsproblem, wenn  $G = \mathbb{R}^n$  gilt,
- andernfalls (d.h. für  $G \neq \mathbb{R}^n$ ) ein **restringiertes** Problem

und außerdem eine

- **diskrete** (oder ganzzahlige) OA (engl. integer program), falls jede Variable eine diskreten Menge angehört
- **kontinuierliche** (oder stetige) OA, falls alle Variablen stetige Werte annehmen
- **gemischt ganzzahlige** OA, wenn sowohl stetige als auch diskrete Variablen vorkommen.

Gilt in (1.1)  $f(x) = c^\top x$  für ein  $c \in \mathbb{R}^n$  und ist  $G$  durch lineare Bedingungen beschreibbar, so heißt (1.1) **linear**. In diesem Fall lässt sich (1.1) schreiben als

$$c^\top x \rightarrow \min \quad \text{bei } Ax = a, Bx \leq b \quad (1.3)$$

mit geeigneten Matrizen  $A$  und  $B$  sowie Vektoren  $a$  und  $b$ .

Gerade für (gemischt) ganzzahlige OA kann die Lösung der Originalaufgabe schwierig sein. Eine verwandte, jedoch im Allgemeinen leichter zu lösende Aufgabe kann in diesen Fällen wie folgt erhalten werden:

**Definition 1.1**

Wir betrachten die Optimierungsaufgaben

$$(P) \quad f(x) \rightarrow \min \quad \text{bei } x \in D \cap E$$

$$(Q) \quad g(x) \rightarrow \min \quad \text{bei } x \in E$$

(Q) heißt **Relaxation** zu (P) falls  $g(x) \leq f(x)$  für alle  $x \in D \cap E$  gilt. In vielen Fällen wird dabei  $g = f$  gewählt.

Der Optimalwert der Relaxation kann als Näherung (bzw. untere Schranke) für den tatsächlichen Optimalwert von (P) genutzt werden. Meistens liefert die Lösung von (Q) jedoch keinen zulässigen Punkt für (P).

**Satz 1.1**

Ist  $\bar{x}$  eine Lösung von (Q) und gilt  $\bar{x} \in D$  sowie  $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ , dann löst  $\bar{x}$  auch (P).

*Beweis.* siehe Übung □

**Definition 1.2**

Seien (Q1) und (Q2) Relaxationen zu (P). (Q1) heißt **stärker** (oder strenger) als (Q2), wenn die Schranke (d.h. der Optimalwert) von (Q1) größer oder gleich der Schranke (Optimalwert) von (Q2) für jede Instanz von (P) ist.

**Anmerkung.** Zur Erklärung des Begriffes "Instanz" betrachte das folgende Beispiel.

- Problemklasse:  $c^\top x \rightarrow \min$
- Instanz der Problemklasse:  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

Eine Instanz ist also eine konkrete Belegung.

## 1.2 Beispiele zur kontinuierlichen Optimierung

### 1.2.1 Transportoptimierung

→ lineare Optimierung

Es gebe Erzeuger  $i \in I = \{0, \dots, n\}$  und Verbraucher  $j \in J = \{1, \dots, n\}$ . Weiterhin seien die Kosten  $c_{ij}$  für den Transport einer Einheit von  $i$  nach  $j$  sowie der Vorrat  $a_i > 0$  und der Bedarf  $b_j > 0$  für alle  $i$  und  $j$  gegeben. Wie muss der Transport organisiert werden, damit die Gesamtkosten minimal sind?

Für jedes mathematische Modell einer OA braucht man

- geeignete Variablen ( $\rightarrow x$ )
- Zielfunktion ( $\rightarrow f$ )
- Nebenbedingungen ( $\rightarrow G$ )

**Variablen**  $x_{ij} \geq 0$  für alle  $i \in I$  und  $j \in J$  beschreibe die Einheiten, die von  $i$  nach  $j$  transportiert werden.

**Zielfunktion**  $f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

**Nebenbedingungen**

- Kapazitätsbeschränkung der Erzeuger  $i \in I$ :  $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in I)$
- Bedarfserfüllung von Verbrauchern  $j \in J$ :  $\sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j \quad (j \in J)$

Somit können wir als Modell formulieren:

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad & \text{bei } \sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in I), \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j \quad (j \in J), \\ & x_{ij} \geq 0 \quad ((i, j) \in I \times J) \end{aligned}$$

## 1.2.2 Kürzeste euklidische Entfernung

→ nichtlineare Optimierung

Gegeben seien ein Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  und eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $x \notin G$ . Wir betrachten die folgende OA:

$$f(x) = \|x - \tilde{x}\|_2^2 \rightarrow \min \quad \text{bei } x \in G$$

Ist  $G \neq \emptyset$  und abgeschlossen, so existiert eine Lösung. Ist  $G$  zusätzlich konvex, so ist die Lösung sogar eindeutig.

Weitere Beispiele und Theorie sind in der Vorlesung "Kontinuierliche Optimierung" im Master Mathematik zu erfahren.

## 1.3 Beispiele zur diskreten Optimierung

### 1.3.1 Das Rucksackproblem

Gegeben seien ein Behälter ("Rucksack") mit Kapazität  $b \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\}$  sowie  $m$  Teile, die jeweils durch ein Gewicht  $a_i \in \mathbb{Z}_+$  und einen Nutzen  $c_i \in \mathbb{Z}_+$  beschrieben werden ( $i = 1, \dots, m$ ). Aus dieser Menge von Objekten ist eine nutzenmaximale Teilmenge auszuwählen.

**Variablen**

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{wenn Teil } i \text{ eingepackt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m)$$

**Zielfunktion**  $f(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \max$

**Nebenbedingungen** Kapazitätsbedingung:  $\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b$

Als Modell können wir somit formulieren:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \max \quad \text{bei} \quad \sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b \quad \text{und} \quad x_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, m)$$

Aufgrund der binären Gestalt der Variablen wird das Problem auch als 0/1-Rucksackproblem bezeichnet. Im Gegensatz dazu ist beim klassischen Rucksackproblem jedes Teil mehrfach nutzbar. In diesem Fall ist  $x_i \in \mathbb{Z}_+$  zu fordern.

### 1.3.2 Das Bin-Packing-Problem

Gegeben seien (sehr große) Anzahl an Behältern der Kapazität  $L$  sowie  $b_i$  Teile des Gewichts oder Volumens  $\ell_i$  mit  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ . Man ermittle die minimale Anzahl an Behältern, die benötigt wird, um alle Objekte zu verstauen. Jede Packung (eines Behälters) kann als Vektor  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}_+^m$  geschrieben werden, wobei  $a_i$  angibt, wie oft das Teil  $i$  benutzt wird. Ein solcher Vektor ist eine zulässige Packung, wenn

$$\sum_{i=1}^m \ell_i a_i \leq L$$

ist.

**Modell nach Kantorovich** Wir benötigen

- eine obere Schranke  $u \in \mathbb{Z}_+$  für die maximal benötigte Anzahl an Behältern
- $y_k = \begin{cases} 1 & \text{wenn Rucksack } k \text{ benutzt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, u)$
- $x_{ik} \in \mathbb{Z}_+$ , die angeben, wieviele Objekte vom Typ  $i$  in Rucksack  $k$  gepackt werden  
 $((i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, u\})$

Daraus ergibt sich nun folgendes Modell:

$$\begin{aligned} f^{\text{Kant}}(x, y) = \sum_{k=1}^u y_k \rightarrow \min \quad & \text{bei} \quad \sum_{k=1}^u x_{ik} = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ & \sum_{i=1}^m x_{ik} \ell_i \leq L \cdot y_k \quad (k = 1, \dots, u) \\ & y_k \in \{0, 1\} \quad (k = 1, \dots, u) \\ & x_{ik} \in \mathbb{Z}_+ \quad ((i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, u\}) \end{aligned}$$

Die erste Nebenbedingung sorgt dafür, dass alle Teile gepackt werden; die zweite Nebenbedingung liefert die Einhaltung der Kapazität unter Berücksichtigung, dass nur bepackte Behälter gezählt werden.

Es kann stets  $u = \sum_{i=1}^m b_i$  gewählt werden. Das Auffinden besserer Schranken ist im Allgemeinen schwierig. Eine Relaxation kann z.B. durch  $y_k \in [0, 1]$  und  $x_{ik} \in \mathbb{R}_+$  erhalten werden. Diese liefert jedoch keine guten Näherungen.

**Modell von Gilmore & Gomory** Es seien  $J$  eine Indexmenge aller zulässigen Packungen und  $x_j \in \mathbb{Z}_+$  ( $j \in J$ ) die Häufigkeit, wie oft ein Behälter nach dem durch  $j$  angegebenen Schema  $a^j = (a_1^j, \dots, a_m^j)$  mit  $\ell^\top a^j \leq L$  gefüllt wird. Daraus ergibt sich folgendes Modell:

$$f^{GG}(x) = \sum_{j \in J} x_j \rightarrow \min \quad \text{bei} \quad \sum_{j \in J} a_i^j \cdot x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+ \quad (j \in J)$$

Die Nebenbedingung sorgt dafür, dass alle Teile gepackt werden.

Es gibt im Allgemeinen exponentiell viele zulässige Packungen  $a^j$  ( $j \in J$ ), deren Koeffizienten allesamt in den Nebenbedingungen benötigt werden.

Eine Relaxation erhält man zum Beispiel durch  $x_j \in \mathbb{R}_+$ . Diese stetige Relaxation ist sehr gut; man vermutet, dass folgende Bedingung gilt:

$$f^{GG,*} - f_{\text{relax}}^{GG,*} < 2$$

Erfreulicherweise gibt es zum Gilmore-Gomory-Modell äquivalente Formulierungen, die mit einer polynomiellen Zahl von Variablen arbeiten und eine ebenso gute stetige Relaxation besitzen (z.B. Flussmodelle).

### 1.3.3 Standortplanung

Ein Dienstleister möchte neue Filialen aufbauen, um seine Kunden  $k \in K := \{1, \dots, m\}$  zu versorgen. Dabei sind aus der Menge  $S := \{1, \dots, n\}$  mögliche Standorte, die neuen Standorte so auszuwählen, dass der Bedarf aller Kunden befriedigt wird und die Gesamtkosten minimal sind.

Wir benötigen

- $c_s > 0 \dots$  Fixkosten für den Aufbau von Standort  $s \in S$
- $d_{ks} > 0 \dots$  Kosten, um den Kunden  $k \in K$  (vollständig) von Standort  $s \in S$  zu beliefern.

Variablen:

- $x_s = \begin{cases} 1 & \text{wenn Standort } s \in S \text{ gebaut wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $y_{ks} \geq 0 \dots$  Anteil des Bedarfs des Kunden  $k \in K$ , der vom Standort  $s \in S$  bedient wird (implizit:  $y_{ks} \in [0, 1]$ )

Modell zur Standortplanung:

$$f(x, y) = \underbrace{\sum_{s \in S} x_s c_s}_{\text{Fixkosten}} + \underbrace{\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} y_{ks} d_{ks}}_{\text{variable Kosten}} \rightarrow \min$$

bei

$$x_s = \sum_{k \in K} y_{ks} \quad \text{und} \quad x_s \in \{0, 1\} \quad \text{und} \quad \underbrace{y_{ks} \geq 0}_{\text{bzw. } y_{ks} \in [0, 1]} \quad (k \in K, s \in S)$$

### 1.3.4 Quadratisches Zuordnungsproblem

Es sollen  $n$  Personen auf  $n$  Räume verteilt werden. Person  $i$  muss Person  $j$   $c_{ij}$  mal am Tag treffen. Außerdem habe Büro  $k$  von Büro  $\ell$  die Entfernung  $d_{k\ell} > 0$ . Wird Person  $i$  das Büro  $k$  zugewiesen und Person  $j$  das Büro  $\ell$ , so ergibt sich eine Gesamtwegstrecke von  $2c_{ij}d_{kl}$  (beachte Hin- und Rückweg). Gesucht ist die wegminimale Belegung der Büros.

Variablen:  $x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Person } i \text{ das Büro } k \text{ zugewiesen wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$

Zielfunktion:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \sum_{\ell=1, \ell \neq k}^n x_{j\ell} x_{ik} \cdot 2c_{ij}d_{kl} \rightarrow \min$$

bei

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{ik} &= 1 & (k = 1, \dots, n) & \quad \text{Büro } k \text{ bekommt genau einen Einwohner} \\ \sum_{k=1}^n x_{ik} &= 1 & (i = 1, \dots, n) & \quad \text{Person } i \text{ bekommt genau ein Büro} \\ x_{ik} &\in \{0, 1\} & (i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele sind in der Vorlesung "Diskrete Optimierung" (Master Mathe) zu finden..



# Kapitel 2

## GRUNDLAGEN

### 2.1 Existenz von Lösungen

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$f(x) \rightarrow \min \quad \text{bei } x \in G \quad (2.1)$$

wobei folgende Bedingungen erfüllt seien:

- $f$  ist stetig (zumindest auf  $G$ )
- $G$  ist kompakt
- $G \neq \emptyset$

#### Satz 2.1 (Weierstrass)

Unter diesen Voraussetzungen existiert ein  $\bar{x} \in G$  mit

$$f^* := f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in G$$

*Beweis.* Sei  $f^* := \inf_{x \in G} f(x)$ . Wegen  $G \neq \emptyset$ , finden wir eine Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  mit  $f_k = f(x_k) \geq f^*$  mit  $x_k \in G$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f^*$ . Die daraus resultierende Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt wegen der Kompaktheit von  $G$  eine konvergente Teilfolge  $\{\widetilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{x}_k = \bar{x} \in G$  (Abgeschlossenheit von  $G$ ). Die Stetigkeit von  $f$  ergibt nun  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\widetilde{x}_k) = f(\bar{x}) = f^*$  (insbesondere  $f^* \in \mathbb{R}$ ) □

#### Beispiel 2.1

(1) Satz 2.1 anwendbar ( $G$  kompakt, Minimum existiert):

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \rightarrow \min \quad \text{bei } x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1$$

Der zulässige Bereich ist eine Ellipse mit Rand.

(2) Satz 2.1 nicht anwendbar ( $G$  unbeschränkt, kein Minimum,  $f^* = -\infty$ ):

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \rightarrow \min \quad \text{bei } x_1^2 + 4x_2^2 \geq 1$$

(3) Satz 2.1 nicht anwendbar ( $G$  unbeschränkt, kein Minimum,  $f^* = 0$ )

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} \rightarrow \min \quad \text{bei } x_2 \leq \frac{1}{x_1}, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$$

(4) Satz 2.1 nicht anwendbar ( $G$  unbeschränkt, Minimum existiert,  $f^* = -1$ )

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} \rightarrow \min \quad \text{bei } x_2 \leq \frac{1}{x_1}, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$$

Offensichtlich besitzen also nicht alle Optimierungsaufgaben eine (globale) Lösung, insbesondere deshalb, weil Bedingung (1.2) ziemlich stark ist. Stattdessen hat sich in der Literatur auch der folgende "schwächere" Lösungsbegriff etabliert.

**Definition 2.1**

Ein zulässiger Punkt  $\bar{x} \in G$  heißt lokale Lösung von (2.1), falls ein  $\rho > 0$  existiert mit

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in G \cap B_\rho(\bar{x})$$

wobei  $B_\rho(\bar{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\|_2 \leq \rho\}$  die offene Kugel vom Radius  $\rho$  um  $\bar{x}$  ist.

**Bemerkung 2.1**

Jede globale Lösung ist auch lokale Lösung. Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht korrekt.

Sofern eine globale Lösung existiert, ist diese in der Menge der lokalen Lösungen enthalten. Die Betrachtung lokaler Lösungen ist damit im Allgemeinen ausreichend.