TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Stochastik, Professur für Angewandte Stochastik

STOCHASTIK

Hausaufgaben

Prof. Dr. Anita Behme

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 1

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen

18.5 / 20 BE

Lemma 1

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Dann gilt

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \quad\Rightarrow\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

Beweis. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ ist auch $\left(A_n^{\mathsf{C}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_k = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}}$ und somit weil $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$ und nach Definition einer σ-Algebra auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Insbesondere gilt dies auch falls endliche viele Mengen weggelassen werden, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $\bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$. $\square$

Übung 1.1

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie, dass für jede Menge $B \subseteq \Omega$ das Mengensystem $\overline{\mathcal{F}} := \{A \cap B \colon A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra über dem Grundraum B ist.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ eine Folge von Ereignissen. Zeigen Sie:

$$\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \qquad \overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \qquad \underline{A} \subseteq \overline{A}$$

(a) Wir zeigen die drei Eigenschaften einer σ-Algebra.

- Da $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, ist $\Omega \in \mathcal{F}$. Wählen wir also $A = \Omega \in \mathcal{F}$, so ist $B = \Omega \cap B$, da $B \subseteq \Omega$ und somit $\Omega \in \overline{\mathcal{F}}$.
- Sei $C \in \overline{\mathcal{F}}$, d.h. es existiert $A \in \mathcal{F}$ mit $C = A \cap B$. Dann ist $C^{\mathsf{C}} = B \setminus C = B \setminus (A \cap B) = (B \setminus A) \cap B = A^{\mathsf{C}} \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$.
- Seien $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, d.h. es existiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $C_n = A_n \cap B$. Dann ist
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) = \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}_{\in\mathcal{F}} \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$$

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$.

- Lemma 1 sagt uns, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$ gilt. Mit der Definition von $\mathcal{F}$ folgt schließlich, dass auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$ ist.
- Analog zum ersten Punkt ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$, da sowohl die (abzählbare) Vereinigung als auch der (abzählbare) Schnitt in $\mathcal{F}$ liegen.
- Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq A_{\max\{n,m\}} \subseteq \bigcup_{k\geq m} A_k$. Somit ist für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq A_k \subseteq \bigcup_{k\geq m} A_k$ und dann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq m} A_k$, was bereits $\underline{A} \subseteq \overline{A}$ zeigt.

Übung 1.2

Es sei X eine stetige, reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot (4x - 2x^2) & \text{falls } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > 1)$ und $\mathbb{P}(X = 1)$

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

(a) Sei $\mathbb{P}$ das zur Dichte f gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann gilt nach Satz 1.8

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) \ \mathrm{d}x \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Somit muss auch insbesondere die Normierung erfüllt sein, d.h.

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ \mathrm{d}x \overset{!}{=} 1$$

Die Additivität bleibt durch die Integraleigenschaften erhalten. Also:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x) \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x) \ \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} f(x) \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x) \ \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} c \cdot (4x - 2x^2) \ \mathrm{d}x \quad = \quad 2c \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \quad = \quad 2c \left(4 - \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3}c \quad \overset{!}{=} \quad 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Nun ist noch zu zeigen, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachte dazu die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ von f. Da f Parabelform hat und nach unten geöffnet ist, folgt aus der Stetigkeit von f, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 2]$, insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 1) &= \int_{1}^{\infty} f(x) \ \mathrm{d}x = \int_{1}^{2} f(x) \ \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{1}^{2} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \ \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3 \right]_1^2 \\ &= (3 - 2) - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{12} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X = 1) &= \int_{1}^{1} f(x) \ \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

(c) Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariableist definiert als

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) \ \mathrm{d}\xi$$

Ist $x \leq 0$, so ist $F_X(x) = 0$, da $f(x) = 0$ für alle $x \leq 0$ ist und somit $\int_{-\infty}^{x} f(\xi) \ \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{x} 0 \ \mathrm{d}\xi = 0$.

Für $x \in (0,2)$ ist

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \int_{0}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \left[\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{12}\xi^3\right]_0^x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3$$

Für $x \geq 2$ ist stets $(0,2) \subset (-\infty, x)$ und daher ist

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi &= \int_{-\infty}^{0} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{2} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{2}^{\infty} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{0}^{2} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= \left[\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{12}\xi^3\right]_0^2 \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Schlussendlich ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3 & \text{für } x \in (0,2) \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

die zugehörige Verteilungsfunktion.

Übung 1.3

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$ für Parameter $a, b, t \in \mathbb{R}$ und $s > 0$.

(a) Bestimmen Sie a und b so, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

(a) Nach Satz 1.19 gilt für jede Verteilungsfunktion

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Wenden wir dies auf die obige Funktion F an unter Berücksichtigung, dass $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) = a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

Unterscheiden wir nun den Grenzprozess in die jeweilige Richtung, so erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a - b \cdot \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 0 \\ a + b \cdot \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a = \frac{\pi}{2} b \\ a = 1 - \frac{\pi}{2} b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} b = \pi^{-1} \\ a = 0.5 \end{bmatrix}$$

Somit ist also $F(x) := 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$.

Monotonie. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ist auch $x - t < y - t$ und $\frac{x-t}{s} < \frac{y-t}{s}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}, s > 0$. Da der Arkustangens strikt monoton wachsend ist, ist auch $\arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) < \arctan\left(\frac{y-t}{s}\right)$ und da sich durch die Parameter a und b nichts mehr ändert, gilt

$$0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) < 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y-t}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad F(x) < F(y)$$

d.h. die Funktion F ist (streng) monoton wachsend.

Rechtsstetigkeit. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \searrow x$ für $n \to \infty$. Dann gilt nach den Rechenregeln für Folgen auch $\frac{x_n - t}{s} \searrow \frac{x-t}{s}$. Da der Arkustangens stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist also $\arctan(y_n) \to \arctan(y)$ für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $y_n \to y$, jeweils $n \to \infty$, insbesondere also auch $y_n \searrow y$. Also folgt mit den Rechenregeln für Folgen wiederum

$$0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x_n - t}{s}\right) \longrightarrow 0.5 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) \quad (n \to \infty)$$

was die insbesondere auch die Rechtsstetigkeit von F zeigt.

Damit definiert F nach Satz 1.19 eine Verteilungsfunktion.

(b) Für die Dichtefunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F'(x)$. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x-t}{s}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Also ist schließlich

$$f(x) = F'(x) = \frac{b}{s\left(\left(\frac{x-t}{s}\right)^2 + 1\right)} = \frac{b}{\frac{(x-t)^2}{s} + \frac{s^2}{s}} = \frac{sb}{s^2 + (x-t)^2} = \frac{s}{\pi\left(s^2 + (x-t)^2\right)}$$

die zugehörige Dichtefunktion.

Übung 1.4

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 3/4$ und $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Zeigen Sie: $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) = 0.7 && \mathbb{P}(A\cap B) = 0.4 && \\ &\mathbb{P}(B) = 0.6 && \mathbb{P}(A\cap C) = 0.3 && \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0.1 \\ &\mathbb{P}(C) = 0.5 && \mathbb{P}(B\cap C) = 0.2 && \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ und $\mathbb{P}(A^\complement \cap B^\complement \cap C)$.

(a) Für die Abschätzung nach unten betrachten wir $(A\cap B)^\complement = A^\complement \cup B^\complement$. Dafür gilt die σ-Subadditivität:

$$\mathbb{P}(A^\complement \cup B^\complement) \leq \mathbb{P}(A^\complement) + \mathbb{P}(B^\complement) = 1 - \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(B) = 2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$$

Somit ist $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}((A\cap B)^\complement) \geq \frac{1}{12}$. Für die Abschätzung nach oben verwenden wir die Monotonie des (Wahrscheinlichkeits-)Maßes $\mathbb{P}$. Es ist klar, dass $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$ gilt, d.h. somit ist $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ *und* $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$. Damit folgt nun auch schon $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Somit ist also die Ungleichungskette $1/12 \leq \mathbb{P}(A\cap B) \leq 1/3$ gezeigt.

(b)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.9 + 0.5 - 0.3 - 0.2 + 0.1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A^\complement \cap B^\complement \cap C\right) &= \mathbb{P}\left(\left(A \cap B \cap C^\complement\right)^\complement\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(A \cup B \cup C^\complement\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^\complement) + \mathbb{P}((A \cup B) \cap C^\complement) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^\complement) + \mathbb{P}((A \cap C^\complement) \cup (B \cap C^\complement)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^\complement) + \mathbb{P}(A \cap C^\complement) + \mathbb{P}(B \cap C^\complement) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^\complement) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^\complement) + \mathbb{P}(A \setminus (A \cap C)) + \mathbb{P}(B \setminus (B \cap C)) \\
&\quad - \mathbb{P}((A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - 1 + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap C)) \\
&\quad + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.9 - 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 \\
&= 0.1
\end{aligned}$$

Übung 1.5

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ seien Ereignisse. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - n + 1$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^\complement\right)^\complement\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^\complement\right) \\
&\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^\complement) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\
&= 1 - n + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - n + 1
\end{aligned}$$

Übung 1.6

Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $|f|$ messbar ist. Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung.

Wir zeigen zuerst die Hinrichtung.

- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Dann ist auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, da aus

$$\begin{aligned} x \in \left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > a \right\} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon a < f_{n_0}(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > a\} \end{aligned}$$

  folgt, dass $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x) < a\} \in \mathcal{F}$. Und schließlich ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ genau dann messbar, wenn $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < a\}$ es für alle $a \in \Omega$ ist. Analog zeigt man dies auch für das Infimum und erhält damit die Messbarkeit von Limes inferior und Limes superior. Existiert schließlich auch der Limes, so ist auch dieser messbar.

- Sei $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Dann existiert nach dem Sombrero-Lemma eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ mit $f_n \longrightarrow f$ für $n \to \infty$. Es ist klar, dass alle einfachen Treppenfunktionen f_n messbar sind. Aufgrund des ersten Punktes ist dann auch der Grenzprozess $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ messbar.

- Damit ist dann auch schon $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := -\min(f, 0)$ messbar, da sich f jeweils durch eine Folge einfacher Funktionen annähern lasst und die Null durch die konstante Nullfolge beschreibbar ist. Insbesondere sind dann auch die jeweiligen Extrema von f_n und 0 wieder einfach und somit messbar. Schließlich ist f^+ und f^- messbar.

- Sei f eine messbare Funktion. Dann sind auch f^+ und f^- messbar, was bereits die Messbarkeit von $|f|$ impliziert, da $|f| = f^+ + f^-$.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Zur Konstruktion eines Gegenbeispiels bezeichne V die aus der Übung bekannte Vitali-Menge, welche nicht messbar ist. Betrachten wir dazu die Funktion

$$f(x) := (\mathbb{1}_V - \mathbb{1}_{V^\mathsf{c}})(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in V \\ -1 & \text{falls } x \notin V \end{cases}$$

Offensichtlich ist $|f| \equiv 1$ und damit messbar. Jedoch ist f nicht messbar, weil beispielsweise $f^{-1}(\{1\}) = V \notin \mathcal{F}$ nicht messbar ist.

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 2

Thema: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

15 / 20 BE

Übung 2.1

(a) Aus einer Urne mit n Kugeln werden nacheinander Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Es bezeichne X die Nummer der Ziehung, bei der erstmals eine Kugel erneut gezogen wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > r)$ und $\mathbb{P}(X = r)$ für $r \in \mathbb{N}$.

(b) Am 21. Juni 1995 wurde erstmalig in der Geschichte des deutschen Zahlenlottos „6 aus 49“, und zwar bei der 3016. Ausspielung, eine Gewinnreihe gezogen, die schon einmal gezogen worden war. In der Tagespresse wurde dieses Ereignis als Sensation gefeiert - zu Recht?

Es gilt folgende Äquivalenz:

$$X > r \qquad \Leftrightarrow \qquad A_r := \text{Die ersten } r \text{ Züge bleiben ohne Wiederholung}$$

Angenommen $X > r$, d.h. die erste Wiederholung findet sich erst nach dem r-ten Zug. Dann müssen die ersten r Züge ohne Wiederholung gewesen sein, denn sonst wäre $X < r$. Bleiben die ersten r Züge dagegen ohne Wiederholung, so muss $X > r$ sein, weil bisher noch keine Wiederholung eingetreten ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten r Züge ohne Wiederholung bleiben beträgt

$$\mathbb{P}(A_r) = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-r+1}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot n^{r-1}} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot n^r} = \binom{n}{r} \cdot \frac{r!}{n^r} = \mathbb{P}(X > r)$$

Betrachten wir $X = r$, so heißt das wiederum, dass die ersten $r-1$ Züge ohne Wiederholung blieben und der r-te Zug eine Wiederholung liefert, d.h. im r-ten Zug eine der $r-1$ vorher gezogenen Kugeln erneut gezogen wird. Damit gilt

$$\mathbb{P}(X = r) = \mathbb{P}(A_{r-1}) \cdot \frac{r-1}{n} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{(r-1)!}{n^{r-1}} \cdot \frac{r-1}{n} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{(r-1)!}{n^r} \cdot (r-1)$$

Wenden wir dies nun auf das Lotto-Beispiel an, so interessiert uns z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man hätte länger als bis zur 3016. Ziehung warten müssen. Die Urne besteht nun also aus den $\binom{49}{6}$ möglichen Gewinnreihen und $r = 3016$. Nun wollen wir $\mathbb{P}(X > 3016)$ bestimmen. Da alle meine Rechner spätestens bei $\binom{49}{6}!$ ausgestiegen sind, habe ich auf die explizite Form verzichtet und dafür Octave mit folgendem Code rechnen lassen:

```
function res = prob (n, k)
  res = 1;
  for i=1:(k-1)
    res = res * (n-i)/n;
  end
end
```

Das liefert ein Ergebnis von $\mathbb{P}(X > 3016) \approx 0.7224$. Man hätte als zu 72 % noch länger auf eine sich wiederholende Gewinnreihe warten müssen. In Anbetracht der Tatsache, dass allerdings bisher nur 0.02 %

aller möglichen Gewinnreihen ausgespielt wurden ist dies schon ein wenig erstaunlich.

Übung 2.2

Es sei $|E|$ endlich mit $|E| \geq 2$, $n \geq 1$ und ρ eine diskrete Verteilung auf E. Weiterhin gelte

$$N \to \infty, N_a \to \infty \text{ mit } \frac{N_a}{N} \to \rho(a) \tag{2.1}$$

für alle $a \in E$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Hyper}(N, (N_a)_a, n)$ punktweise gegen $\mathrm{Multi}(n, \rho(a)_a)$ konvergiert.

Da E endlich ist, können wir oBdA annehmen, dass $E = \{1, \ldots, l\}$ gilt. Dann schreiben wir statt N_a auch N_i, statt k_a auch k_i für die Anzahl der gezogenen Kugeln einer Farbe aus E und ρ_i statt $\rho(a)$.

Für die Zähldichte ψ hypergeometrischen Verteilung gilt

$$\psi((k_i)_i) = \frac{\prod_{i=1}^{l} \binom{N_i}{k_i}}{\binom{N}{n}}$$

Dieses können wir umstellen, sodass

$$\begin{aligned}
\psi((k_i)_i) = \frac{\prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{k_i!(N_i-k_i)!}}{\frac{N!}{n!\,(N-n)!}} &= \frac{n!\,(N-n)!}{N!} \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{k_i!\,(N_i-k_i)!} \\
&= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!} \cdot \frac{(N-n)!}{N!} \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{(N_i-k_i)!} \\
&= \binom{n}{(k_i)_{i=1,\ldots,l}} \frac{(N-n)!}{N!} \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{(N_i-k_i)!} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Nun zerlegen wir den Faktor $\frac{(N-n)!}{N!}$ in

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{N - \sum_{j=1}^{i} k_i}{N - \sum_{j=1}^{i-1} k_i}$$

Damit hat jeder Faktor des großen Produkts genau k_i eigene Faktoren und das gesamte Produkt also nach wie vor $\sum_{i=1}^{l} k_i = n$ Faktoren. Setzen wir dies in (2.2) ein und schreiben $\frac{N_i!}{(N_i-k_i)!} = N_i \cdots (N_i - k_i + 1)$ so erhalten wir

$$\frac{(N-n)!}{N!} \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i!}{(N_i-k_i)!} = \prod_{i=1}^{l} \frac{N_i \cdots (N_i - k_i + 1)}{\frac{N-\sum_{j=1}^{i} k_i}{N-\sum_{j=1}^{i-1} k_i}}$$

Insbesondere gilt nun wegen (2.1) auch schon

$$\frac{N_i \cdots (N_i - k_i + 1)}{\frac{N-\sum_{j=1}^{i} k_i}{N-\sum_{j=1}^{i-1} k_i}} \longrightarrow \rho_i^{k_i}$$

und damit

$$\psi((k_i)_i) \longrightarrow \prod_{i=1}^{l} \rho_i^{k_i}$$

Somit konvergiert also $\mathrm{Hyper}(N, (N_a)_a, n) \longrightarrow \mathrm{Multi}(n, \rho(a)_a)$ punktweise.

Übung 2.3

Eine Urne enthält S schwarze “1” und W weiße “0” Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach n Ziehungen ohne Zurücklegen s schwarze und w weiße Kugeln gezogen zu haben?

(a) Wir nummerieren die Kugeln zunächst durch. Geben Sie einen Ergebnisraum an, wenn die Reihenfolge der gezogenen Kugeln beachtet werden muss (sortierte Kugeln).

(b) Bestimmen Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Ereignisraum.

(c) Geben Sie einen Ergebnisraum an, wenn die Reihenfolge der gezogenen, nummerierten Kugeln nicht beachtet werden muss (unsortierte Kugeln).

(d) Finden Sie eine Zufallsvariable, die vom “sortierten” Ergebnisraum in den “unsortierten” Ergebnisraum abbildet und bestimmen Sie ihre Verteilung.

(e) Uns interessiert nun, wie oft die jeweiligen Farben gezogen wurden. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an.

(f) Geben Sie eine Zufallsvariable an, die vom unsortierten Ergebnisraum (aus Teil (c)) in den Ergebnisraum der farbigen Kugeln (aus Teil (e)) abbildet und bestimmen Sie die zugehörige Verteilung.

(a) Wir betrachten sortierte Kugeln, d.h. die Reihenfolge ist relevant. Nummerieren wir die Kugeln durch, so erhalten wir stets einen Vektor mit n Zahleneinträgen aus $\{1, \ldots, N\}$. Ein möglicher Ergebnisraum ist dann

$$\overline{\Omega} = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{1, \ldots, N\}^n : \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

Es gilt

$$\#\overline{\Omega} = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

(b) Da alle Ergebnisse aus $\overline{\Omega}$ gleichwahrscheinlich sind, können wir die Gleichverteilung verwenden, d.h.

$$\overline{\mathbb{P}} = \mathrm{U}(\overline{\Omega})$$

(c) Nun betrachten wir das Experiment ohne Beachtung der Reihenfolge, d.h. das Tupel $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ soll ohne Ordnungsstruktur auskommen. Betrachten wir daher ω als Menge, so können wir als Ergebnisraum

$$\widehat{\Omega} = \{\widehat{\omega} \subseteq \{1, \ldots, N\} : \#\widehat{\omega} = n\}$$

definieren. Da keine Elemente in den Einträgen von $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ mehrfach vorkommen konnten, verlieren wir in der Mengendarstellung kaum Informationen.

(d) Wir suchen eine Zufallsvariable, die uns den Zusammenhang zwischen ungeordneter und geordneter Stichprobe beschreibt. Definiere

$$X : \begin{cases} \overline{\Omega} & \to & \widehat{\Omega} \\ \overline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) & \mapsto & \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \end{cases}$$

Ein mögliches Wahrscheinlichkeitsmaß wird dann definiert durch das Bildmaß $\overline{\mathbb{P}} \circ X^{-1} =: \widehat{\mathbb{P}}$. Man stellt fest, dass $\#\{X = \omega\}$ genau der Anzahl der Möglichkeiten n Elemente auf n Plätze zu verteilen entspricht, also $\#\{X = \omega\} = n!$. Weiter ist $\#\widehat{\Omega}$ die Anzahl der Möglichkeiten eine n-elementige

Teilmenge aus einer N-elementigen Menge auszuwählen, d.h. $\#\overline{\Omega} = {}^{N!}/_{(N-n)!}$. Somit gilt

$$\widehat{\mathbb{P}}(\{\omega\}) = \overline{\mathbb{P}}(X^{-1}(\{\omega\})) = \overline{\mathbb{P}}(X = \omega) = \frac{\#\{X = \omega\}}{\#\overline{\Omega}} = \frac{n!}{{}^{N!}/_{(N-n)!}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\#\widehat{\Omega}}$$

Somit ist auch $\widehat{\mathbb{P}} = \mathrm{U}(\widehat{\Omega})$.

(e) Nun interessieren wir uns nur für die Anzahl der Kugeln in jeder Farbe und setzen daher als Ergebnisraum

$$\Omega = \left\{(w, s) \in \mathbb{N}_0^2 \colon w + s = n\right\}$$

(f) Im Folgenden bezeichne $F_0, F_1 \subseteq \{1, \ldots, N\}$ die Menge aller Nummern der weißen bzw. schwarzen Kugeln. Wir modellieren den Übergang von unsortiertem Ergebnisraum in den Ergebnisraum der Anzahlen durch eine Zufallsvariable Y mit

$$Y \colon \begin{cases} \widehat{\Omega} & \to & \Omega \\ \omega & \mapsto & (\#\omega \cap F_0, \#\omega \cap F_1) \end{cases}$$

Bevor wir das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω konstruieren betrachten wir die Menge $\{Y = \omega = (w, s)\}$. Die Abbildung φ mit $\varphi(A) = (A \cap F_0, A \cap F_1)$ teilt die Menge A auf in die Menge $A \cap F_0$ aller weißen Kugeln und $A \cap F_1$ aller schwarzen Kugeln. Die Umkehrfunktion ist $\varphi^{-1}(B_0 \cap F_0, B_1 \cap F_1) = B_0 \cup B_1$, denn

$$\begin{aligned} A &\overset{\varphi}{\mapsto} (A \cap F_0, A \cap F_1) \\ &\overset{\varphi^{-1}}{\mapsto} (A \cap F_0) \cup (A \cap F_1) = (A \cup A) \cap (A \cup F_1) \cap (F_0 \cup A) \cap (F_0 \cup F_1) = A \\ (B_0 \cap F_0, B_1 \cap F_0) &\overset{\varphi^{-1}}{\mapsto} B_0 \cup B_1 \\ &\overset{\varphi}{\mapsto} (B_0 \cap F_0, B_1 \cap F_1) \end{aligned}$$

Somit ist φ eine Bijektion und

$$\begin{aligned} \#\{Y = (w, s)\} &= \#\{A \subseteq F_0 \colon \#A = w\} \times \{A \subseteq F_1 \colon \#A = s\} \\ &= \#\{A \subseteq F_0 \colon \#A = w\} \cdot \#\{A \subseteq F_1 \colon \#A = s\} \end{aligned}$$

Diese beiden Kardinalitäten repräsentieren die Anzahl der k_i-elementigen Teilmengen von F_i, also

$$\#\{A \subseteq F_0 \colon \#A = w\} = \binom{W}{w} \quad \text{und} \quad \#\{A \subseteq F_1 \colon \#A = s\} = \binom{S}{s}$$

Somit ergibt sich endlich für das Bildmaß $\mathbb{P} := \widehat{\mathbb{P}} \circ Y^{-1}$ auf Ω

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \widehat{\mathbb{P}}(Y^{-1}(\{\omega\})) = \widehat{\mathbb{P}}(Y = \omega) = \frac{\#\{Y = \omega\}}{\#\widehat{\Omega}} = \frac{\binom{W}{w} \cdot \binom{S}{s}}{\binom{N}{n}}$$

was der hypergeometrischen Verteilung entspricht.

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 3

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

19/20 BE

Hausaufgabe 3.1

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Es seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B \mid A)$.

(b) Es seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^\complement\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)$$

(c) Seien $A, B, C \in \mathcal{F}$ mit $0 < \mathbb{P}(C) < 1$. Zeigen Sie, dass aus $\mathbb{P}(A \mid C) \geq \mathbb{P}(B \mid C)$ und $\mathbb{P}(A \mid C^\complement) \geq \mathbb{P}(B \mid C^\complement)$ bereits $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$ folgt.

(d) Es seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A^\complement)$.

(e) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B)$.

(zu a) Offensichtlich ist $A \cap B \subseteq A \cup B$ und somit ist $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$. Weiter ist $A \subseteq A \cup B$ und damit wegen der Monotonie des Maßes $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$, d.h. $\frac{1}{\mathbb{P}(A \cup B)} \leq \frac{1}{\mathbb{P}(A)}$. Schlussendlich ist damit

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \cap B \mid A)$$

(zu b) Nach Lemma 3.16 ist auch die Familie $A_1^\complement, \dots, A_n^\complement \in \mathcal{F}$ stochastisch unabhängig, d.h. es gilt $\mathbb{P}(\bigcap_{k \in J} A_k^\complement) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$ für jede Teilmenge $J \subseteq I = \{1, \dots, n\}$, also insbesondere auch für $J = I$. Dann ist

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k^\complement) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=1}^n \exp(-\mathbb{P}(A_k)) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)$$

Dabei geht in die Ungleichung vor allem die bekannte Abschätzung $1 + x \leq \exp(x)$ ein.

(zu c) Aus den Voraussetzungen folgen

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \geq \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(B \mid C) \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap C) \geq \mathbb{P}(B \cap C)$$
$$\mathbb{P}(A \mid C^\complement) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C^\complement)}{\mathbb{P}(C^\complement)} \geq \frac{\mathbb{P}(B \cap C^\complement)}{\mathbb{P}(C^\complement)} = \mathbb{P}(B \mid C) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap C^\complement) \geq \mathbb{P}(B \cap C^\complement)$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, so erhält man

$$\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C^\complement) \geq \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C^\complement)$$

wobei die Mengen $A \cap C$ und $A \cap C^\complement$ (und analog auch für B) disjunkt sind, d.h. mit endlicher

Additivität folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}((A \cap C) \cup (A \cap C^{\mathsf{C}})) \geq \mathbb{P}((B \cap C) \cup (B \cap C^{\mathsf{C}})) \\ \Rightarrow\ &\mathbb{P}((A \cap C) \cup (A \setminus C)) \geq \mathbb{P}((B \cap C) \cup (B \setminus C)) \\ \Rightarrow\ &\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

(zu d) Wir betrachten den zweifache Würfelwurf mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ (d.h. $\#\Omega = 36$), $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} = \mathrm{U}(\Omega)$. Dazu beschreibe A das Ereignis einer geraden Zahl im ersten Wurf, B das Ereignis, dass die zweite Zahl größer als vier ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} A &= \{(2,i),(4,i),(6,i) : i = 1,\dots,6\} && \Rightarrow \#A = 18 && \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ B &= \{(i,5),(i,6) : i = 1,\dots,6\} && \Rightarrow \#B = 12 && \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \\ A \cap B &= \{(2,5),(2,6),(4,5),(4,6),(6,5),(6,6)\} && \Rightarrow \#A \cap B = 6 && \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, also A und B unabhängig. Jedoch ist $\mathbb{P}(A^{\mathsf{C}}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1/2$ im Gegensatz zu

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

(zu e) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\alpha\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathbb{P}(\emptyset) := 0$, $\mathbb{P}(\Omega) := 1$. Dies definiert offensichtlich einen Wahrscheinlichkeitsraum. Jedoch existiert kein Ereignis $B \in \mathcal{F}$ mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Damit ist die Aussage widerlegt.

Hausaufgabe 3.2

Ein Taschenspieler hat eine faire und eine doppelköpfige Münze in seiner Tasche. Es wird mit genau einer Münze dreimal werfen. Er greift ohne zu schauen in seine Tasche und wählt eine Münze aus (zufällig gleichverteilte Auswahl). Weder der Taschenspieler noch Sie wissen, mit welcher Münze geworfen wird.

(a) Beim ersten Wurf zeigt die Münze Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mit der fairen Münze geworfen?

(b) Der zweite Wurf ist wieder Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mit der fairen Münze geworfen?

(c) Der dritte Wurf ist Zahl. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mit der fairen Münze geworfen?

Wir bezeichnen die Auswahl der fairen Münze mit F, die Auswahl der doppelköpfigen mit D. Weiter sei K das Erscheinen von Kopf und Z das Erscheinen von Zahl. Damit ist dann laut Aufgabenstellung

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(D) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(K \mid F) = \mathbb{P}(Z \mid F) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(K \mid D) = 1 \text{ und } \mathbb{P}(Z \mid D) = 0$$

(zu a) Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(K \mid F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(K \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) = 1/2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 3/4$$

und dann nach dem Satz von Bayes

$$\mathbb{P}(F \mid K) = \frac{\mathbb{P}(K \mid F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{1/2 \cdot 1/2}{3/4} = \frac{1}{3}$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

(zu b) Wir schreiben KK für Kopf im ersten und zweiten Wurf. Dann ist $\mathbb{P}(KK \mid F) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\mathbb{P}(KK) = \mathbb{P}(KK \mid F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(KK \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Dann ergibt sich wieder mit dem Satz von Bayes

$$\mathbb{P}(F \mid KK) = \frac{\mathbb{P}(KK \mid F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(KK)} = \frac{1/4 \cdot 1/2}{5/8} = \frac{1}{5}$$

(zu c) Wir schreiben Z_3 für das Ereignis, dass im dritten Wurf eine Zahl geworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass mit der doppelköpfigen Münze im dritten Wurf eine Zahl geworfen wird, ist $\mathbb{P}(D \mid Z_3) = 0$, da mit der doppelköpfigen Münze nie eine Zahl geworfen werden kann. Genauer ist $\mathbb{P}(Z_3 \mid F) = 1/8$ sowie $P(Z_3 \mid D) = 0$ und nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit dann $\mathbb{P}(Z_3) = \mathbb{P}(Z_3 \mid F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(Z_3 \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(Z_3 \mid F) \cdot \mathbb{P}(F)$. Der Satz von Bayes ergibt also

$$\mathbb{P}(F \mid Z_3) = \frac{\mathbb{P}(Z_3 \mid F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(Z_3 \mid F) \cdot \mathbb{P}(F)} = 1$$

Also muss er die faire Münze gewählt haben.

Hausaufgabe 3.3

Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Indexmenge $I \neq 0$ gegeben. Weiterhin seien A_i $(i \in I)$ unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann auch $\{\Omega, A_i \colon i \in I\}$ unabhängig sind.

Da die A_i $(i \in I)$ unabhängig sind, gilt für jede Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ mit $\#J < \infty$, dass $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$. Da alle $A_i \in \mathcal{F}$ und somit $A_i \subseteq \Omega$ gilt, ist $\bigcap_{i\in J} A_i = \bigcap_{i \in J} \cap \Omega$. Außerdem können wir mit $1 = \mathbb{P}(\Omega)$ multiplizieren, ohne dass die rechte Seite verändert wird. Somit ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i \cap \Omega\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(\Omega)$$

für jede beliebige Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ mit $\#J < \infty$, was gerade der Definition von stochastischer Unabhängigkeit der $\{\Omega, A_i : i \in I\}$ entspricht.

Hausaufgabe 3.4

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}_{i,j} \subseteq \mathcal{F}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m(i))$ unabhängige, $\cap$-stabile Familien mit $\Omega \in \mathcal{F}_{i,j}$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass die Familien

$$\mathcal{F}_i^{\cap} := \left\{F_{i,1} \cap \cdots \cap F_{i,m(i)} : F_{i,j} \in \mathcal{F}_{i,j} \text{ und } 1 \leq j \leq m(i)\right\} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$\cap$-stabil und unabhängig sind sowie, dass $\mathcal{F}_{i,1}, \ldots, \mathcal{F}_{i,m(i)} \subseteq \mathcal{F}_i^{\cap}$ gilt.

Wir fixieren uns ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ und schreiben $\mathcal{F}^{\cap}$ für $\mathcal{F}_i^{\cap}$, sowie $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{i,k}$. Weiter schreiben wir $m = m(i)$.

$\cap$-Stabilität Seien $A^1, A^2 \in \mathcal{F}^{\cap}$ (Index nur zur besseren Unterscheidung oben notiert, keine Potenz). Dann gibt es $(F_k^1)_{k=1,\ldots,m}, (F_k^2)_{k=1,\ldots,m}$ mit $F_k^j \in \mathcal{F}_k$ für alle k und alle j sowie $A^1 = \bigcap_{k=1}^m F_k^1$ bzw.

$A^2 = \bigcap_{k=1}^m F_k^2$. Dann ist auch

$$A^1 \cap A^2 = \left(\bigcap_{k=1}^m F_k^1\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^m F_k^2\right) = \bigcap_{k=1}^m \underbrace{(F_k^1 \cap F_k^2))}_{\in \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}^\cap$$

Unabhängigkeit Wir wählen eine Familie $\left(A^\ell\right)_\ell \subseteq \mathcal{F}^\cap$. Dann existiert zu jedem A^ℓ eine Familie $\left(F_k^\ell\right)_{k=1,\dots,m}$ mit $F_k^\ell \in \mathcal{F}_k$ für alle k und alle ℓ, sodass $A^\ell = \bigcap_{k=1}^m F_k^\ell$ für alle ℓ. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell\in J} A^\ell\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell\in J}\bigcap_{j=1}^m F_j^\ell\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^m\bigcap_{\ell\in J} F_j^\ell\right) \\
&= \prod_{j=1}^m \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell\in J} F_j^\ell\right) = \prod_{j=1}^m\prod_{\ell\in J} \mathbb{P}(F_j^\ell) = \prod_{\ell\in J}\prod_{j=1}^m \mathbb{P}(F_j^\ell) = \prod_{\ell\in J}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^m F_j^\ell\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell\in J}\bigcap_{j=1}^m F_j^\ell\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell\in J} A^\ell\right)
\end{aligned}$$

für eine endliche Teilmenge J.

Hausaufgabe 3.5 ($\star$)

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die von unabhängigen Familien erzeugten σ-Algebren nicht unabhängig sind.

Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ und $\mathbb{P} = \lambda$ das eindimensionale Lebesgue-Maß. Weiter betrachten wir die Familien $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ und $\mathcal{B} = \{B\}$ mit

$$\begin{aligned}
A_1 &:= [0, 1/4) \cup [1/2, 3/4) && \text{mit } \lambda(A_1) = 1/2 \\
A_2 &:= [0, 1/3) \cup [2/3, 1) && \text{mit } \lambda(A_2) = 2/3 \\
B &:= [0, 1/2) && \text{mit } \lambda(B) = 1/2
\end{aligned}$$

Dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ stochastisch unabhängig, da

$$\begin{aligned}
\lambda(A_1 \cap B) = \lambda([0, 1/4)) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \lambda(A_1)\cdot\lambda(B) \\
\lambda(A_2 \cap B) = \lambda([0, 1/3)) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \lambda(A_2)\cdot\lambda(B)
\end{aligned}$$

Definieren wir nun $A := A_1 \cap A_2 = [0, 1/4) \cup [2/3, 3/4) \in \sigma(\mathcal{A})$, dann ist

$$\lambda(A) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Weiter ist $B \in \sigma(\mathcal{B})$ und $A \cap B = [0, 1/4)$, also $\lambda(A\cap B) = 1/4$, aber

$$\lambda(A)\cdot\lambda(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$$

und $\sigma(\mathcal{A})$ und $\sigma(\mathcal{B})$ damit stochastisch abhängig.

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 4

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: Gemeinsame Verteilungen

17/20 BE

Lemma 1

Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell} \cdot \binom{m}{k-\ell} = \binom{n+m}{k} \tag{4.1}$$

Beweis. Seien N und M disjunkte Mengen mit $|N| = n$ und $|M| = m$. Für alle $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ sei $\mathcal{A}_\ell := \{A \in \mathcal{P}(N \cup M) : |A| = k, |A \cap N| = \ell, |A \cap M| = k - \ell\}$. Wie bereits schon in Hausaufgabe 2.3 erläutert gibt es genau $\binom{n}{\ell}$ viele ℓ-elementige Teilmengen von N und $\binom{m}{k-\ell}$ viele $(k-\ell)$-elementige Teilmengen von M. Für die Kardinalität von $\mathcal{A}_\ell$ gilt dann $|\mathcal{A}_\ell| = \binom{n}{\ell} \cdot \binom{m}{k-\ell}$. Da alle $\mathcal{A}_\ell$ paarweise disjunkt sind, gilt

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} |\mathcal{A}_\ell| = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell} \cdot \binom{m}{k-\ell}$$

für die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $N \cup M$. □

Hausaufgabe 4.1

(a) Es seien $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ zwei unabhängige, binomialverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass dann $X + Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$ ebenfalls Binomialverteilt ist, d.h. die Binomialverteilung ist stabil unter Faltungsoperationen.

(b) Es seien $X, Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$ für $0 \le k \le n$.

(zu a) Die unabhängigen Variablen X und Y haben die Zähldichten $\rho_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ und $\rho_Y(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$. Da die Faltung gerade die Addition zweier Zufallsvariablen beschreibt, gilt nach Satz 3.25 $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X \star \mathbb{P}_Y$ und damit nach Proposition 3.26 $\rho_X \star \rho_Y(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \rho_X(\ell) \cdot \rho_Y(k-\ell)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Somit ist dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} \cdot \binom{m}{k-\ell} p^{k-\ell} (1-p)^{m-k+\ell} \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell} p^k (1-p)^{n+m-k} \\
&\overset{(4.1)}{=} \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{(n+m)-k}
\end{aligned}$$

(zu b) Seien $X, Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ unabhängig und identisch verteilt, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$. Aus der Vorlesung in Beispiel 3.27 ist bekannt, dass $\mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}$ gilt. Somit ist dann

$$\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X + Y = n\})}{\mathbb{P}(\{X + Y = n\})} = \frac{\mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)}$$
$$= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda}}{\frac{(2\lambda)^n}{n!} e^{-2\lambda}} = \frac{\lambda^n}{2^n \lambda^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \binom{n}{k} \cdot 2^{-n}$$

Hausaufgabe 4.2

Es sei $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass X gedächtnislos ist, d.h. $\mathbb{P}(X \geq i + j \mid X \geq i)$ für alle $i, j \geq 0$.

Da X geometrische verteilt ist, hat es die Zähldichte $\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1 - p)^k$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \geq j) = 1 - \mathbb{P}(X \leq j - 1) = 1 - \sum_{n=0}^{j-1} p(1 - p)^n = 1 - p \cdot \sum_{n=0}^{j-1} (1 - p)^n$$

Da $1 - p \leq 1$, gilt für die $(j - q)$-te Partialsumme der geometrischen Reihe

$$\frac{1 - (1 - p)^{j-1}}{1 - (1 - p)} = \frac{1 - (1 - p)^{j-1}}{p}$$

Somit gilt dann

$$1 - p \cdot \sum_{n=0}^{j-1} (1 - p)^n = 1 - (1 - (1 - p)^{j-1}) = (1 - p)^{j-1}$$

Analog gilt auch $\mathbb{P}(X \geq i) = (1 - p)^{i-1}$ und $\mathbb{P}(X \geq i + j) = (1 - p)^{i+j-1}$. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt schließlich

$$\mathbb{P}(X \geq i + j \mid X \geq i) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geq i + j\} \cap \{X \geq i\})}{\mathbb{P}(X \geq i)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq i + j)}{\mathbb{P}(X \geq i)}$$
$$= \frac{(1 - p)^{i+j-1}}{(1 - p)^i} = (1 - p)^{j-1} = \mathbb{P}(X \geq j)$$

und X ist somit gedächtnislos.

Hausaufgabe 4.3

X, Y seien zwei Zufallsvariablen, deren gemeinsame Zähldichte aus hausaufgabe 4.3 entnommen werden kann.

X \ Y	-1	1	2	5
-1	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
5	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$	0	0

Tabelle 4.1: Gemeinsame Zähldichte von X und Y

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse "Y gerade" und "$X \cdot Y$ ungerade".
(b) Finden Sie die Verteilung $X + Y$.
(c) Sind X und Y unabhängig.

(zu a)
$$\mathbb{P}(Y \text{ gerade}) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$
$$\mathbb{P}(X \cdot Y \text{ ungerade}) = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{3}{27} + \frac{3}{27} + \frac{6}{27} + 0 + \frac{4}{27} + \frac{3}{27} + 0 = \frac{23}{27}$$

(zu b) Sei $\ell = (-1, 1, 5)$. Dann ist $\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X = \ell_i, Y = k - \ell_i)$.

k	-2	0	1	2	3	4	6	7	10
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{9}$	0	0

Tabelle 4.2: Zähldichte von $X + Y$

(zu c) Wir betrachten $X = 1$ und $Y = 5$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 5 = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(X = 5) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

und somit $\mathbb{P}(X = 1, Y = 5) \neq \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(X = 5)$. Damit sind X und Y nicht stochastisch unabhängig.

Hausaufgabe 4.4

Geben Sie zwei Zufallsvariablen X und Y an, sodass zwar X und Y abhängig sind, aber X^2 und Y^2 unabhängig.

Hausaufgabe 4.5

Auf der (x, y)-Ebene werden parallele Geraden $y = 2a \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit Abstand $2a$ eingezeichnet. Eine Strecke ("Nadel") der Länge 2ℓ mit $\ell < a$ wird zufällig auf die Ebene geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Strecke eine der Geraden schneidet?

Wir betrachten zwei Variablen: x gebe den Abstand des Nadelmittelpunktes von der nächstliegenden Geraden an und φ beschreibe den Winkel zwischen der durch die Nadel beschriebenen Geraden und der nächstliegenden Geraden. Damit die Nadel eine der Geraden kreuzt (oder berührt) muss $x \leq 2\ell \cdot \sin(\varphi)$ gelten. Somit lassen sich alle möglichen Lagepositionen einschränken zur Ergebnismenge $\Omega = \{(x, \varphi) \in [0, a] \times [0, \pi)\}$. Diese hat offensichtlich Lebesgue-Maß $\lambda(\Omega) = a \cdot \pi$. Betrachten wir nun das Ereignis $S = \{(x, \varphi) \in \Omega : x \leq \ell \cdot \sin(\varphi)\}$, was genau die Positionen einer Nadel beschreibt, bei denen es zum Schnitt mit einer der Geraden kommt. Diese Menge repräsentiert also die Fläche unter dem Graphen der Funktion $y(\varphi) = \ell \cdot \sin(\varphi)$. Damit ergibt sich ein Lebesgue-Maß

$$\lambda(S) = \int_S \, \mathrm{d}\lambda = \int \mathbb{1}_{[0, \ell \cdot \sin(\varphi)] \times [0, \pi)} \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^\pi \ell \cdot \sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \ell \cdot [-\cos(\varphi)]_0^\pi = 2\ell$$

Nun können wir den Nadelwurf als zufällig insofern annehmen, dass die Lage des Mittelpunktes vom Winkel unabhängig ist und alle möglichen Positionen gleich wahrscheinlich sind. Dann ergibt sich mit der stetigen Gleichverteilung $\mathbb{P}(S) = \frac{\lambda(S)}{\lambda(\Omega)} = \frac{2\ell}{a\pi}$ als Wahrscheinlichkeit für den Schnitt der Nadel mit einer der Geraden.

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 5

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: bedingte Wahrscheinlichkeit & Erwartungswerte

12/20 BE

Hausaufgabe 5.1

Ein Netzwerk besteht aus vier ähnlichen, aber unabhängig voneinander arbeitenden Komponenten. Damit das Netzwerk stabil läuft, müssen A und B oder C und D funktionieren. Sei T der Ausfallzeitpunkt des gesamten Systems und T_k der Ausfallzeitpunkt der Komponente k mit $k \in \{A, B, C, D\}$. Wir nehmen an, dass $T_k \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist, für alle $k \in \{A, B, C, D\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(T < t) = \left(1 - e^{-2\lambda t}\right)^2$ gilt.

Es gilt $\mathbb{P}(T < t) = 1 - \mathbb{P}(T \geq t)$. $\mathbb{P}(T \geq t)$ beschreibt den Fall, dass das System bis zum Zeitpunkt t noch nicht ausgefallen ist, also funktioniert. Dazu müssen A und B oder C und D funktionieren. Die Funktionalität von A und B können wir durch $\mathbb{P}(T_{AB} \geq t) = \mathbb{P}(T_A \geq t, T_B \geq t)$ beschreiben, analog auch $\mathbb{P}(T_{CD} \geq t) = \mathbb{P}(T_C \geq t, T_D \geq t)$. Aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Komponenten gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{AB} \geq t) &= \mathbb{P}(T_A \geq t, T_B \geq t) = \mathbb{P}(T_A \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_B \geq t) \\
\mathbb{P}(T_{CD} \geq t) &= \mathbb{P}(T_C \geq t, T_D \geq t) = \mathbb{P}(T_C \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_D \geq t)
\end{aligned}$$

Die (logische) Disjunktion der Funktionalität der Teilsysteme kann als mengentheoretische Vereinigung beschrieben werden. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \geq t) &= \mathbb{P}(\{T_{AB} \geq t\} \cup \{T_{CD} \geq t\}) \\
&= \mathbb{P}(\{T_{AB} \geq t\}) + \mathbb{P}(T_{CD} \geq t) - \mathbb{P}(T_{AB} \geq t, T_{CD} \geq t) \\
&= \mathbb{P}(T_A \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_B \geq t) + \mathbb{P}(T_C \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_D \geq t) \\
&\qquad - \mathbb{P}(T_A \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_B \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_C \geq t) \cdot \mathbb{P}(T_D \geq t)
\end{aligned}$$

Da $t \geq 0$ gilt für alle Komponenten k schon $\mathbb{P}(T_k \geq t) = 1 - \mathbb{P}(T_k < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Damit gilt

$$\mathbb{P}(T \geq t) = (e^{-\lambda t})^2 + (e^{-\lambda t})^2 - (e^{-\lambda t})^4 = 2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}$$

Setzten wir dies nun endlich in den Anfang ein, so ergibt sich

$$\mathbb{P}(T < t) = 1 - \mathbb{P}(T \geq t) = 1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-4\lambda t} = \left(1 - e^{-2\lambda t}\right)^2$$

Hausaufgabe 5.2

Es seien $X, Y \sim \operatorname{Exp}(1)$ unabhängige Zufallsvariablen.

(a) Bestimmen Sie die Dichte von $\frac{X}{X+Y}$.

(b) Sind $X + Y$ und $\frac{X}{X+Y}$ unabhängig?

Hausaufgabe 5.3
Es sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass X genau dann unabhängig von sich selbst ist, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

($\Rightarrow$) Wir betrachten die Verteilungsfunktion F_X von X mit $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. Aufgrund der Unabhängigkeit von X von sich selbst gilt

$$P(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) \cdot \mathbb{P}(X \leq t)$$

und somit ist $F_X(t) \in \{0, 1\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Als Verteilungsfunktion ist F_X monoton wachsend und daher sind nur drei Fälle zu unterscheiden:

- $F_X(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was wegen $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$ nicht möglich ist.
- $F_X(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was wegen $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ nicht möglich ist.
- Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $F_X(t) = 0$ für alle $t \leq c$ und $F_X(t) = 1$ für alle $t > c$.

Da nur der dritte Fall eintreten kann, muss also dieses $c \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\mathbb{P}(X = c) = 1$ gelten muss und X ist fast sicher konstant.

($\Leftarrow$) Sei X fast sicher konstant, d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbb{P}(X = c) = 1$. Wir wollen nun zeigen, dass X von jeder beliebigen Zufallsvariable unabhängig ist. Dazu sei Y eine solche beliebige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $A, B \in \mathcal{F}$ seien messbare Mengen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Ist $c \in A$, dann gilt

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(\Omega \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(\Omega) \cdot \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

- Ist $c \notin A$, so gilt

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(\emptyset \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(\emptyset) \cdot \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

Damit sind X und Y in jedem Fall unabhängig, insbesondere gilt dies natürlich auch für $Y = X$.

Hausaufgabe 5.4
Es seien $X \sim \mathrm{Geom}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Geom}(\mu)$ unabhängige, geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda, \mu \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass $\rho := \lambda + \mu - \lambda\mu \in (0, 1)$ und bestimmen Sie die Verteilung von $Z := \min\{X, Y\}$.

Da $\lambda, \mu \in (0, 1)$ sind, ist auch $(1 - \lambda), (1 - \mu) \in (0, 1)$ und somit $(1 - \lambda) \cdot (1 - \mu) \in (0, 1)$. Insbesondere gilt

$$1 > (1 - \lambda)(1 - \mu) = \lambda\mu - \lambda - \mu + 1 \;\;\Rightarrow\;\; 0 > \lambda\mu - \lambda - \mu \;\;\Rightarrow\;\; 0 < \lambda + \mu - \lambda\mu$$

sowie

$$0 < (1 - \lambda)(1 - \mu) = \lambda\mu - \lambda - \mu + 1 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda + \mu - \lambda\mu < 1$$

Wir definieren die Zufallsvariable $Z := \min\{X, Y\}$ und suchen ihre Verteilung. Die Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Geom}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Geom}(\mu)$ haben die Zähldichten $\rho_X(k) = \lambda(1 - \lambda)^k$ und $\rho_Y(k) = \mu(1 - \mu)^k$. Wir wissen bereits aus vorherigen Aufgaben, dass $\mathbb{P}(X > k) = (1 - \lambda)^{k+1}$ (und analog für Y) gilt. Es gilt

$$\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}(\min\{X, Y\} > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \mathbb{P}(X > k) \cdot \mathbb{P}(Y > k) = (1 - \lambda)^{k+1} \cdot (1 - \mu)^{k+1}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(Z>k-1)-\mathbb{P}(Z>k) &= (1-\lambda)^k\cdot(1-\mu)^k-(1-\lambda)^{k+1}\cdot(1-\mu)^{k+1}\\ &= (1-\lambda)^k\cdot(1-\mu)^k\cdot\big(1-(1-\lambda)(1-\mu)\big)\\ &= (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)^k\cdot(\lambda+\mu-\lambda\mu)\\ &= \big(\lambda+\mu-\lambda\mu\big)\big(1-(\lambda+\mu-\lambda\mu)\big)^k\end{aligned}$$

und somit ist $Z=\min\{X,Y\}\sim\mathrm{Geom}(\lambda+\mu-\lambda\mu)=\mathrm{Geom}(\rho)$.

Hausaufgabe 5.5

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$für die folgenden Zufallsvariablen:

(a) $X\sim\mathrm{U}([a,b])$ mit $a,b\in\mathbb{R}$

(b) $X\sim\mathrm{Gamma}(\lambda,r)$ mit $\lambda,r>0$

(zu a) Die (stetige) Gleichverteilung auf $[a,b]$ hat die Dichtefunktion $\rho(x)=\frac{1}{b-a}$. Dann gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}}x\cdot\rho(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)=\frac{b+a}{2}$$

(zu b) Die Gamma-Verteilung hat die Dichtefunktion $\rho(x)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}$. Somit gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}}x\cdot\rho(x)\ \mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot x^r\cdot e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x$$

Unter Nutzung von MINT 12.5 gilt $\Gamma(r+1)=r\cdot\Gamma(r)$, also auch $\frac{\lambda^{r+1}}{\Gamma(r+1)}=\frac{\lambda}{r}\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}$. Mit r-facher partieller Integration erhält man schließlich $\mathbb{E}[X]={}^r\!/\!_\lambda$.

Hausaufgabe 5.6

Es sei $r\in\mathbb{N}$, $\lambda,t>0$, $(p_n)_{n\geq1}\subseteq(0,1)$ eine Folge mit $n\cdot p_n\to\lambda$ und $(t_n)_{n\geq1}\subseteq\mathbb{N}_0$ eine Folge mit $\frac{t_n}{n}\to t$ für $n\to\infty$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{negBin}(r,p_n)(\{0,\dots,t_n\})=\mathrm{Gamma}(\lambda,r)((0,t])$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathrm{negBin}(r,p)(\{0,\dots,m\})=\mathrm{Bin}(r+m,p)(\{r,r+1,\dots,r+m\})$.

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 6

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: Erwartungswert & Varianz

16/20 BE

Hausaufgabe 6.1
Geben Sie Zufallsvariablen X und Y an, die unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} = \mathrm{U}(\Omega)$. Wir betrachten die Zufallsvariablen $X\colon \Omega \to \{-1,0,1\}$ und $Y\colon \Omega \to \{0,1\}$ mit

$$X(1) := -1 \qquad X(2) := 0 \qquad X(3) := 1 \qquad \text{und} \qquad Y = \mathbb{1}_{\{2\}}$$

Y ist also definiert als $Y(k) := \begin{cases} 0 & k = 1,3 \\ 1 & k = 2 \end{cases}$ und damit gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y = y)}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{3} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$ und $\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot \mathbb{P}(Y = y) = 2$. Für $\mathbb{E}[XY]$ betrachten wir

$$\{X = x\} \cap \{Y = y\} = X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(y) = \begin{cases} \{1\} & x = 1, y = 0 \\ \{2\} & x = 0, y = 1 \\ \{3\} & x = -1, y = 0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y=1}^{3} xy \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1 \cdot 0 \cdot \mathbb{P}(\{1\}) + 0 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(\{2\}) + (-1) \cdot 0 \cdot \mathbb{P}(\{3\}) = 0$$

Schließlich ist $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \;\Leftrightarrow\; 0 = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$ und damit sind X und Y wegen

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}(X,Y) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}} = 0$$

unkorreliert.

Jedoch sind X und Y wegen

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1)$$

nicht unabhängig.

Hausaufgabe 6.2
Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $E[X] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$.

Wir beginnen auf der rechten Seite, denn dort gilt mit ρ als Zähldichte von $\mathbb{P}$.

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=k}^{\infty} \rho(\ell)$$

Nun stellt man fest, dass für jedes $k \geq 1$ der Term $\rho(\ell)$ in genau den ersten ℓ Summanden der mit k indizierten Summe vorkommt. Zur Veranschaulichung schreibt man beispielsweise die ersten Summanden aus, d.h.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty}\rho(\ell) &= (\rho(1)+\rho(2)+\rho(3)+\cdots)+(\rho(2)+\rho(3)+\cdots)+(\rho(3)+\cdots)+\cdots \\ &= 1\cdot\rho(1)+2\cdot\rho(2)+3\cdot\rho(3)+\cdots\end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty}\rho(\ell) = \sum_{k\geq 1} k\cdot\rho(k) = \mathbb{E}[X]$.

Hausaufgabe 6.3

Es seien $X, Y \in L^1$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Falls $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, so gilt $P(X = Y) = 1$.

(b) Falls $\mathbb{E}[|X - Y|] = 0$, so gilt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

(zu a) Die Aussage ist falsch, was wir im folgenden durch ein Gegenbeispiel zeigen werden. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} = \mathrm{U}(\Omega)$. Weiter seien $X = \mathrm{id}_\Omega$ und $Y = \mathbb{1}_{\{2\}}$. Dann ist $X^{-1}(x) = x$, $Y^{-1}(\{2\}) = \Omega$ und $Y^{-1}(\{1,3\}) = \emptyset$. Folglich gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{Z}} x\cdot\rho(x) = \sum_{x=1}^{3} x\cdot\frac{1}{3} = 2 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y] = \sum_{x\in\mathbb{Z}} x\cdot\rho(x) = 2\cdot 1 = 2$$

Also gilt $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. Nun bestimmen wir $\{X = Y\} = \{\omega\in\Omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = \{2\}$ mit $\#\{X = Y\} = 1$ und damit $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{\#\{X=Y\}}{\#\Omega} = \frac{1}{3} \neq 1$.

Das Gegenbeispiel funktioniert nicht, da das Urbild $Y^{-1}(\{2\})$ falsch ist und dann der Erwartungswert $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$.

(zu b) Per Definition gilt

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{E}[X] = \int_\Omega |X(\omega) - Y(\omega)|\,\mathbb{P}(\,\mathrm{d}\omega) &\overset{\text{MINT 10.3}}{\iff} |X(\omega) - Y(\omega)| = 0 \text{ für fast alle } \omega\in\Omega \\ &\iff X = Y \ \mathbb{P}\text{-fast sicher} \\ &\iff \mathbb{P}(X = Y) = 1\end{aligned}$$

Hausaufgabe 6.4

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ und berechnen Sie mit dieser den Erwartungswert und die Varianz von X.

(b) Wir betrachten die Gleichverteilung auf $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$. Zeigen Sie das $\mathrm{U}(\Omega)$ keine "Faltungswurzel" besitzt, d.h. es gibt kein Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit $Q \star Q = \mathrm{U}(\Omega)$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis anschaulich.

(zu a) Sei $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$. Nach Definition 5.14 gilt für eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable

$$\psi_X(s) := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} s^k\,\mathbb{P}(X = k) \qquad \forall s\in[0,1]$$

für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X. Also Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable hat X die Zähldichte $\rho(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit ergibt sich für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$\psi_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{s\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

Nach Satz 5.16 gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \psi_X'(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda$$

Außerdem lässt sich die Varianz schreiben als

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \psi_X''(1) + \psi_X'(1) - (\psi_X'(1))^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda\end{aligned}$$

Hausaufgabe 6.5

Es seien $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(X-Y) = 4\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

(b) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

(c) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert die quadratische Abweichung minimiert, d.h. für $X \in L^2$ gilt $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] \geq \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ für alle $a \in \mathbb{R}$, wobei Gleichheit im Fall $a = \mathbb{E}[X]$ eintritt.

(zu a) Es gilt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X)$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X-Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,-Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(-Y,X)$. Dann folgt durch Subtraktion beider Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(X-Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X) \\ - \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,-Y) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(-Y,X)\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Kovarianz symmetrisch, d.h. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X)$ und es gilt

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,-Y) = \mathbb{E}[X(-Y)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[-Y] = -\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(X-Y) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,-Y) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(-Y,X) \\ &= 4\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)\end{aligned}$$

(zu b) Die Gleichheit folgt aus der Symmetrie der Kovarianz, d.h.

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])(X - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$$

Dann gilt

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$$

(zu c) Es gilt $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[X-a\right]^2}_{\geq 0} + \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X\right) \geq \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X\right)$. Setzen wir $a = \mathbb{E}\left[X\right]$, so wird die Ungleichung zur Defintion der Varianz und damit gilt Gleichheit.

Hausaufgabe 6.6

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{L}^2 := \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die quadratintegrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}\colon \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(X, Y) \mapsto \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X, Y\right)$ eine symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform auf $\mathcal{L}^2$ definiert.

(b) Es sei $\mathcal{N} := \left\{X \in \mathcal{L}^2 : \|X\|_{\mathcal{L}^2} = 0\right\} = \left\{X \in \mathcal{L}^2 : X = 0 \ \ \mathbb{P} - \text{fast überall}\right\}$. Weiterhin definieren wir den Faktorraum $L^2 := \mathcal{L}^2/\mathcal{N}$ als den Raum der Äquivalenzklassen, d.h. $[X], [Y] \in L^2$ sind genau dann gleich, wenn $X - Y \in \mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass $(L^2, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ mit $\langle X\,,\, Y \rangle = \mathbb{E}\left[XY\right]$ ein Hilbertraum ist.

(zu a) **Symmetrie.** Seien $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Dann gilt

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X, Y\right) = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right] = \mathbb{E}\left[YX\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(Y, X\right)$$

Bilinearität. Da wir bereits Symmetrie gezeigt haben, reicht es aus, die Linearität im ersten Argument zu zeigen. Seien also $X_1, X_2, Y \in \mathcal{L}^2$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X_1 + X_2, Y\right) &= \mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)Y\right] - \mathbb{E}\left[X_1 + X_2\right]\mathbb{E}\left[Y\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_1 Y + X_2 Y\right] - \mathbb{E}\left[X_1 + X_2\right]\mathbb{E}\left[Y\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_1 Y\right] + \mathbb{E}\left[X_2 Y\right] - \mathbb{E}\left[X_1\right]\mathbb{E}\left[Y\right] - \mathbb{E}\left[X_2\right]\mathbb{E}\left[Y\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_1 Y\right] - \mathbb{E}\left[X_1\right]\mathbb{E}\left[Y\right] + \mathbb{E}\left[X_2 Y\right] - \mathbb{E}\left[X_2\right]\mathbb{E}\left[Y\right] \\
&= \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X_1, Y\right) + \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X_2, Y\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(aX, Y\right) = \mathbb{E}\left[aXY\right] - \mathbb{E}\left[aX\right]\mathbb{E}\left[Y\right] &= a\mathbb{E}\left[XY\right] - a\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right] \\
&= a(\mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]) \\
&= a \cdot \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X, Y\right)
\end{aligned}$$

Positive Semidefinitheit. Sei $X \in \mathcal{L}^2$. Dann gilt

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X, X\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X\right) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2}_{\geq 0}\Big] \geq 0$$

(zu b) Seien $X, Y \in L^2$ und $\langle X\, ,\, Y \rangle := \mathbb{E}\left[XY\right]$. Wir zeigen zuerst, dass dies ein Skalarprodukt definiert. Die Symmetrie folgt wiederum unmittelbar aus den Eigenschaften des Integrals und wir müssen Linearität nur im ersten Argument zeigen. Dazu seien $X, X_1, X_2, Y \in L^2$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle X_1 + X_2\, ,\, Y \rangle = \mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)Y\right] = \mathbb{E}\left[X_1 Y + X_2 Y\right] = \mathbb{E}\left[X_1 Y\right] + \mathbb{E}\left[X_2 Y\right] = \langle X_1\, ,\, Y \rangle + \langle X_2\, ,\, Y \rangle$$

und

$$\langle aX\, ,\, Y \rangle = \mathbb{E}\left[aXY\right] = a \cdot \mathbb{E}\left[XY\right] = a \cdot \langle X\, ,\, Y \rangle$$

Außerdem gilt für $X \neq 0$

$$\langle X\, ,\, X \rangle = \mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_\Omega \underbrace{X^2}_{>0} \;\mathrm{d}\mathbb{P} \;\; > 0$$

und damit ist $\langle \cdot\, ,\, \cdot \rangle$ positiv definit, schließlich also ein Skalarprodukt.

Außerdem ist bereits bekannt, dass L^2 ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ ist.

Wir müssen nun noch die Vollständigkeit von $(L^2, \langle \cdot\, ,\, \cdot \rangle)$ zeigen. Das Skalarprodukt induziert eine Norm $\|X\|_* := \sqrt{\langle X\, ,\, X \rangle}$ für alle $X \in L^2$. Für diese gilt

$$\|X\|_* = \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]} = \left(\int_\Omega X^2 \;\mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |X|^2 \;\mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nun sehen wir, dass also $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{L^2}$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer ist $L^p(\mathbb{P})$ für alle $p \in [1, \infty]$ vollständig, also insbesondere auch für $p = 2$.

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 7

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: Bedingte Verteilung & bedingte Erwartung

Hausaufgabe 7.1

Es seien $X, Y \in \mathcal{L}^2$ zwei Zufallsvariablen. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Korrelation:

(a) Für alle $a, c > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{C}\mathrm{orr}\,(aX+b, cY+d) = \mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,Y)$.

(b) Es gilt genau dann $\mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,Y) \in \{-1,+1\}$, wenn $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ existieren, sodass $\mathbb{P}(Y = aX+b) = 1$.

(zu a) Für die Kovarianz gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(aX+b, cY+d) &= \mathbb{E}\left[(aX+b)(cY+d)\right] - \mathbb{E}\left[aX+b\right]\mathbb{E}\left[cY+d\right] \\
&= \mathbb{E}\left[acXY + bcY + adX + bd\right] - (a\mathbb{E}\left[X\right] + b)\,(c\mathbb{E}\left[Y\right] + d) \\
&= ac\mathbb{E}\left[XY\right] + bc\mathbb{E}\left[Y\right] + ad\mathbb{E}\left[X\right] - ac\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right] - bc\mathbb{E}\left[Y\right] - ad\mathbb{E}\left[X\right] - bd \\
&= ac\left(\mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]\right) \\
&= ac\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)
\end{aligned}$$

Damit gilt nun für die Korrelation

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{orr}\,(aX+b, cY+d) &= \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(aX+b, cY+d)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(aX+b)\cdot\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(cY+d)}} \\
&= \frac{ac\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)}{\sqrt{a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)\cdot c^2\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}} \\
&= \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)\cdot\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}} = \mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,Y)
\end{aligned}$$

(zu b) **(⇐)** Sei $\mathbb{P}(Y = aX+b) = 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, d.h. $Y = aX+b$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann gilt

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,Y) = \mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X, aX+b) = \mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,X) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,X)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)\cdot\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}} = \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}{\pm\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)} = \pm 1$$

(⇒) Sei $\mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,Y) = \pm 1$. Dann definieren wir

$$a = \pm\frac{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}} > 0 \quad \text{und} \quad b = \mathbb{E}\left[Y\right] - a\mathbb{E}\left[X\right] \in \mathbb{R}$$

Definieren wir uns eine Zufallsvariable $Z := Y - (aX+b)$ und wollen nun zeigen, dass $\mathbb{P}(Z = 0) = 1$ gilt. Es gilt nun

$$Z = Y - \sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}X + \mathbb{E}\left[Y\right] - \sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}\mathbb{E}\left[X\right] = \sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right) + \left(Y - \mathbb{E}\left[Y\right]\right)$$

und dann für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[Z\right] = \sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}\left(\mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\right]\right]\right) + \left(\mathbb{E}\left[Y\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y\right]\right]\right) = 0$$

Somit ist dann unter Ausnutzung von $\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y) = \mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X,Y) \cdot \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(arg) \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)} = \pm\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(arg) \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Z) &= \mathbb{E}\left[Z^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}\left(X - \mathbb{E}\,[X]\right)^2 - 2\sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}\left(X - \mathbb{E}\,[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}\,[Y]\right) - \left(Y - \mathbb{E}\,[Y]\right)^2\right] \\
&= \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X) - 2\sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y) + \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y) \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y) - 2\sqrt{\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X)}}\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(arg)}\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y)} + \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wendet man nun die Chebyshev-Ungleichung für das komplementäre Ereignis an, so ergibt sich für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}\,[Z]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Z)}{\varepsilon^2}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt dann daraus mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$, dass $\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}\,[Z]| = 0) = 1$ ist. Schließlich impliziert dies nun $\mathbb{P}(Z = \mathbb{E}\,[Z]) = 1$, d.h. $1 = \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Y - aX + b = 0) = \mathbb{P}(Y = aX + b)$.

Hausaufgabe 7.2

Es sei $(X,Y)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ein Zufallsvektor mit Dichte $f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_\Delta(x,y)$, wobei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert ist durch

$$\Delta := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - |x|\right\}$$

(a) Bestimmen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

(b) Bestimmen Sie die bedingten Dichten $f_{Y|X=x}$ und $f_{X|Y=y}$.

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz $\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)$.

(d) Sind X und Y unabhängig?

(zu a) Zuerst stellen wir fest, dass $\mathbb{1}_\Delta(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ auch geschrieben werden kann als $\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1-|x|]}(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f_X(x) = \int_\mathbb{R} f_{(X,Y)}(x,y)\ \mathrm{d}y &= \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1-|x|]}(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot \int_0^{1-|x|} \mathrm{d}y \\
&= \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot (1 - |x|)
\end{aligned}$$

Nun stellen wir $\mathbb{1}_\Delta$ erneut anders da, denn

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 1 \text{ und } -1 + y \leq x \leq 1 - y\right\}$$

und somit ist $\mathbb{1}_\Delta(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \cdot \mathbb{1}_{[-1+y,1-y]}(x)$. Damit ist nun

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) \ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta(x,y) \ \mathrm{d}x \quad &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \cdot \mathbb{1}_{[-1+y,1-y]}(x) \ \mathrm{d}x \\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \cdot \int_{-1+y}^{1-y} \mathrm{d}x = (2-2y) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \end{aligned}$$

(zu b) Nach Proposition 6.6 der Vorlesung berechnen sich die bedingten Dichten zu

$$\begin{aligned} \rho_{X|Y=y}(x) &= \frac{\rho_{(X,Y))}(x,y)}{\rho_Y(y)} = \frac{\mathbb{1}_\Delta(x,y)}{(2-2y)\cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(y)} = \frac{\mathbb{1}_{[-1+y,1-y]}(x)}{2-2y} \\ \rho_{Y|X=x}(y) &= \frac{\rho_{(X,Y))}(x,y)}{\rho_X(x)} = \frac{\mathbb{1}_\Delta(x,y)}{(1-|x|)\cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)} = \frac{\mathbb{1}_{[0,1-|x|]}(y)}{1-|x|} \end{aligned}$$

(zu c) Für die Kovarianz berechnen wir zuerst den Erwartungswert von XY:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[XY\right] = \int_\Omega X(\omega)\cdot Y(\omega)\mathbb{P}(\ \mathrm{d}\omega) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x \cdot y \cdot f_{(X,Y)}(x,y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot y \cdot \mathbb{1}_{[0,1-|x|]}(y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 x \int_0^{1-|x|} y \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-|x|} \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x\left(1-|x|\right)^2 \ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x \ \mathrm{d}x - \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x\cdot|x| \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x \ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 x^2 \ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\underbrace{\left[x^2\right]_{-1}^1}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{6}\left[x^3\right]_{-1}^0}_{=\frac{1}{6}} - \underbrace{\frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^1}_{=\frac{1}{6}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem gilt für die Erwartungswerte von X und Y

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\ \mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x) \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^1 = 0$$

sowie

$$\mathbb{E}\left[Y\right] = \int_{\mathbb{R}} y\cdot f_Y(y) \ \mathrm{d}y = \int_0^1 y(2-2y) \ \mathrm{d}y = 2\int_0^1 y-y^2 \ \mathrm{d}y = \left[y^2\right]_0^1 - \frac{2}{3}\left[y^3\right]_0^1 = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Somit ergibt sich die Kovarianz schließlich zu $\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X,Y\right) = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right] = 0$.

(zu d) Angenommen X und Y seien unabhängig. Dann gilt $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Sei $(x,y) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist $(0,0)\in\Delta$, aber

$$f_{(X,Y)}(0,0) = \mathbb{1}_\Delta(0,0) = 1 \neq 2 = (1-|0|)(2-2\cdot 0)\cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(0)\cdot \mathbb{1}_{[0,1-|0|]}(0) = f_X(0)\cdot f_Y(0)$$

im Widerspruch zur Annahme der Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen. Somit sind X und Y abhängig.

Hausaufgabe 7.3

Es seien X und Y reelle Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichte durch

$$f(x,y) = e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y)$$

gegeben ist. Bestimmen die Randverteilung von Y, die bedingte Verteilung von X bedingt auf $Y = y$ und berechnen Sie $\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y)$.

- **Randverteilung von Y.** Nach Proposition 6.6 gilt für Randverteilung f_Y von Y

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ \mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\ \mathrm{d}x \\ &= e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x \\ &= e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \left[-y \cdot e^{-\frac{x}{y}}\right]_0^\infty \\ &= ye^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \end{aligned}$$

- **bedingte Verteilung von X.** Wiederum gilt mit Proposition 6.6 für die Dichte $f_{X|Y=y}$ der bedingten Verteilung von X

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y)}{y \cdot e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

  Damit ergibt sich als Verteilung dann

$$\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y) = \int_A f_{X|Y=y}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{A\cap(0,\infty)} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

- **$\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y)$.** Es gilt

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid Y = y) = \int_1^\infty f_{X|Y=y}(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_1^\infty e^{-\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{y}\left[-ye^{-\frac{x}{y}}\right]_1^\infty = e^{-\frac{1}{y}}$$

Hausaufgabe 7.4

(a) Ist $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, so gilt für alle beschränkten Funktionen $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[Xf(X)\right] = \lambda \cdot \mathbb{E}\left[f(X+1)\right]$$

(b) Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable und $\lambda > 0$. Für alle beschränkten Funktionen $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gelte $\mathbb{E}\left[Xf(X)\right] = \lambda \cdot \mathbb{E}\left[f(X+1)\right]$. Zeigen Sie, dass $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.
Hinweis. Was ergibt sich im Falle $f = \mathbb{1}_{\{k\}}$?

(zu a) Es ist $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, d.h. $\rho(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$. Definieren wir eine Funktion $g \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x \cdot f(x)$ so gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Xf(X)\right] = \mathbb{E}\left[g \circ X\right] &= \sum_{x\in\mathbb{N}_0} g(x)\cdot\rho(x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{N}_0} xf(x)\rho(x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{N}_0} xf(x)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\mathbb{E}\left[f(X+1)\right] = \sum_{x\in\mathbb{N}_0} f(x+1)\cdot\rho(x) = \sum_{x\in\mathbb{N}_0} f(x+1)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

Somit gilt nun

$$\begin{aligned}\lambda\mathbb{E}\left[f(X+1)\right] &= \sum_{x\geq 0} \lambda f(x+1)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{x\geq 0} f(x+1)(x+1)\frac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{x\geq 1} f(x)x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{x\geq 0} f(x)x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad \textit{(für } x=0 \textit{ ist der Summand ohnehin Null)} \\ &= \sum_{x\geq 0} xf(x)\rho(x) \\ &= \mathbb{E}\left[Xf(X)\right]\end{aligned}$$

(zu b) Da X $\mathbb{N}_0$-wertig ist, ist die Gleichung $\mathbb{E}\left[Xf(X)\right] = \lambda\mathbb{E}\left[f(X+1)\right]$ gleichwertig zu $\sum_{x\in\mathbb{N}_0} xf(x)\rho(x) = \sum_{x\geq 0}\lambda f(x+1)\rho(x)$. Wählen wir nun $f = \mathbb{1}_{\{k\}}$ so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dass $k\cdot\rho(k) = \lambda\rho(k-1)$, da in den obigen Summen stets nur das k-te Element nicht Null wird. Damit ergibt sich nun eine Rekursionsvorschrift in Form $\rho(k) = \frac{\lambda}{k}\rho(k-1)$. Führen wir diese Rekursion nun k mal aus, so ergibt sich $\rho(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\rho(0)$. Nun müssen wir noch $\rho(0)$ bestimmen und nutzen dafür die Eigenschaft der Normierung, d.h. $1 \overset{!}{=} \sum_{k\geq 0}\rho(k) = \sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}\rho(0) = e^{\lambda}\rho(0)$. Daraus folgt nun $\rho(0) = e^{-\lambda}$. Schlussendlich ergibt sich damit aus der Rekursionsvorschrift eine explizite Darstellung der Zähldichte als $\rho(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, welche zur Poisson($\lambda$)-Verteilung gehört.

Hausaufgabe 7.5

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $\rho_{X,Y}(x,y)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes, sodass $\mathbb{E}\left[X\right]$ existiert. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y=y\right] = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\frac{\rho_{X,Y}(x,y)}{\rho_Y(y)}\cdot\mathbb{1}_{\rho_Y(y)>0}\ \mathrm{d}x$$

gilt.

$$\mathbb{E}\left[X \mid Y=y\right] = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\mathbb{P}(X=x,Y=y)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\rho_{X|Y=y}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\frac{\rho_{X,Y}(x,y)}{\rho_Y(y)}\cdot\mathbb{1}_{\rho_Y(y)>0}\ \mathrm{d}x$$

Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 8

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

Thema: Bedingte Erwartung

Hausaufgabe 8.1

Es sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ eine reelle Zufallsvariable.

(a) Es seien $X_\mathcal{G}$ und $Y_\mathcal{G}$ Zufallsvariablen mit $\int_G X \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G X_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P}$ bzw. $\int_G X \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Y_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P}$ für alle $G \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass $X_\mathcal{G} = Y_\mathcal{G}$ fast sicher gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ existiert.

(zu a) Seien $X_\mathcal{G}$ und $Y_\mathcal{G}$ Versionen der bedingten Erwartung von X gegeben $\mathcal{G}$. Da $X_\mathcal{G}$ und $Y_\mathcal{G}$ zwei Versionen der bedingten Erwartung sind, gilt $\int_G X_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Y_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P}$ für alle $G \in \mathcal{G}$. Betrachten wir nun die Mengen $G_1 := \{X_\mathcal{G} > Y_\mathcal{G}\}$ und $G_2 := \{X_\mathcal{G} < Y_\mathcal{G}\}$. Dann ist $\mathbb{P}(X_\mathcal{G} \neq Y_\mathcal{G}) = \mathbb{P}(G_1 \cup G_2)$. Bestimmen wir nun $\mathbb{P}(G_1)$. Aus $\int_{G_1} X_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{G_1} Y_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P}$ folgt

$$\int_{G_1} X_\mathcal{G} - Y_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{G_1} X_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{G_1} Y_\mathcal{G} \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{G_1} X \ \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{G_1} X \ \mathrm{d}\mathbb{P} = 0$$

Nun ist aber $(X_\mathcal{G} - Y_\mathcal{G}) \cdot \mathbb{1}_{G_1} \geq 0$ und daher $(X_\mathcal{G} - Y_\mathcal{G}) \cdot \mathbb{1}_{G_1} = 0$, d.h. $\mathbb{P}(X_\mathcal{G} > Y_\mathcal{G}) = \mathbb{P}(G_1) = 0$. Analog erhält man mit vertauschten Rollen von $X_\mathcal{G}$ und $Y_\mathcal{G}$, dass $P(G_2) = 0$ gilt. Damit gilt nun

$$0 \leq \mathbb{P}(X_\mathcal{G} \neq Y_\mathcal{G}) = \mathbb{P}(G_1 \cup G_2) \leq \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 0$$

Somit ist $\mathbb{P}(X_\mathcal{G} \neq Y_\mathcal{G}) = 0$, d.h. $X_\mathcal{G} = Y_\mathcal{G}$ fast sicher.

(zu b) Wir unterscheiden wie üblich zwei Fälle: $X \geq 0$ oder $X \in \mathcal{L}^1$.

(i) Sei $X \geq 0$. Weiter sei μ das Maß mit Dichte X bezüglich $\mathbb{P}$, also $\mu(A) := \int_A X \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{G}$ und $\mathbb{P}_0$ die Restriktion von $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{G}$, also $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}|_\mathcal{G}$. Damit ist jede $\mathbb{P}_0$-Nullmenge auch eine μ-Nullmenge, d.h. $\mu \ll \mathbb{P}$. Der Satz von Radon-Nikodym liefert nun die Existenz einer Dichte g von μ bezüglich $\mathbb{P}_0$. Damit gilt für alle $G \in \mathcal{G}$

$$\int_\Omega g \ \mathbb{1}_G \ \mathrm{d}\mathbb{P}_0 = \int_G g \ \mathrm{d}\mathbb{P}_0 = \mu(G) = \int_G X \ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X \ \mathbb{1}_G \ \mathrm{d}\mathbb{P}$$

(ii) Für $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ existieren $X^+, X^- \geq 0$. Nach Teil (i) existieren dafür jeweils bedingte Erwartungen g^+, g^- von X^+ bzw. X^- gegeben $\mathcal{G}$. Dann ist $g := g^+ - g^-$ eine bedingte Erwartung, da

$$\mathbb{E}[g \ \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}\left[g^+ \ \mathbb{1}_G\right] - \mathbb{E}\left[g^- \ \mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}\left[X^+ \ \mathbb{1}_G\right] - \mathbb{E}\left[X^- \ \mathbb{1}_G\right] = \mathbb{E}[X \ \mathbb{1}_G]$$

für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt.

Hausaufgabe 8.2

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $X, X_1, X_2, \ldots, Y\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Wenn $X_n \geq 0$, $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher}$$

(b) Wenn $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$ und $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega)| \leq Y(\omega)\} = 1$ für ein $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, dann gilt

$$X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher}$$

(zu a) Wir definieren uns Zufallsvariablen $Y_n := \inf_{m\geq n} X_m$. Damit gilt $Y_n \uparrow X := \liminf_{n\to\infty} X_n$. Per Definition der Y_n gilt $Y_n \leq X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Lemma 6.12 auch $\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$ fast sicher. Da $X_n \geq 0$, ist auch $Y_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sind auch alle $Y_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Nun gilt offensichtlich $Y_n \uparrow X := \liminf_{n\to\infty} X_n$. Da $Y_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, ist $\mathbb{E}[Y_n] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[Y_n] < \infty$ zur Folge hat. Damit liefert Beppo-Levi

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$$

(zu b) Definieren wir $Y_n := \sup_{m\geq n} |X_m - X|$. Da $X_n \to X$ folgt $Y_n \downarrow 0$ fast sicher. Weiter gilt offensichtlich $Y_n \geq 0$ und $Y_n = \sup_{m\geq n} |X_m - X| \leq \sup_{m\geq n} |X_m| + |X| \leq 2Y$. Also ist $0 \leq 2Y - Y_n \uparrow 2Y$. Nach Beppo-Levi gilt wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[Y_n] < \infty$ auch $\mathbb{E}[2Y - Y_n \mid \mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[2Y \mid \mathcal{G}]$ und daraus resultierend $\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{G}] \downarrow 0$. Linearität, Monotonie und die Jensen-Ungleichung mit $\varphi = |\cdot|$ liefern schließlich

$$|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]| = |\mathbb{E}[X - X_m \mid \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X - X_n| \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[|Y_n| \mid \mathcal{G}] \downarrow 0$$

Dies entspricht gerade der Konvergenz, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Betrachten wir nun

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]|] = \mathbb{E}[|X - X_n|] = \mathbb{E}[Y_n] \downarrow 0$$

was nun $\mathcal{L}^1$-Konvergenz entspricht und damit $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

Hausaufgabe 8.3

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) **Jensen-Ungleichung.** Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine integrierbare Zufallsvariable, d.h. $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass dann

$$f(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher}$$

(b) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung.** Es seien $X, Y\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ quadratintegrierbare Zufallsvariablen, d.h. $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathcal{G}\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathcal{G}\right] \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher}$$

gilt mit Gleichheit genau dann, wenn $aX + bY = 0$ fast sicher für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$.

(zu a) Nach MINT 14.14 lässt sich f als Supremum affin-linearer Funktionen darstellen, d.h. mit $\mathcal{A} = \{\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathbb{Q}[x] \text{ und } \deg \varphi \leq 1\}$ ist entweder $f(x) = ax + b$ oder $f(x) = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}, \varphi \leq f} \varphi(x)$. Für den ersten Fall ist die Aussage klar aufgrund der Linearität der bedingten Erwartung. Für den zweiten Fall betrachten wir ein $\varphi \in \mathcal{A}$ mit $\varphi \leq f$. Wir können φ schreiben als $\varphi(x) := ax + b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann gilt wegen Linearität und Monotonie

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) = a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b = \mathbb{E}[aX + b \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{G}]$$

$\mathbb{P}$-fast sicher. Damit ist nun

$$f(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}, \varphi \leq f} \varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[f(X) \mid \mathcal{G}] \quad \mathbb{P} - \text{fast sicher}$$

Hausaufgabe 8.4

(a) Wir betrachten einen zweifachen Würfelwurf. Es seien X_1, X_2 die Augenzahl des ersten bzw. zweiten Wurfes und $M := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\mathbb{E}[M \mid X_1]$.

(b) Es seien $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $\mathbb{E}[X \mid X + Y]$.

(zu a) Wir betrachten zuerst $\mathbb{P}(M = k \mid X_1 = j)$. Ist $k < j$, so ist als das Maximum beider Würfe kleiner als der erste Wurf, was per Definition des Maximums nicht möglich ist, d.h. $\mathbb{P}(M = k \mid X_1 = j) = 0$ für alle $k < j$. Ist $k = j$, so darf als die Augenzahl des ersten Wurfes im zweiten Wurf nicht überschritten werden. Dafür gibt es für die Augenzahl j im ersten Wurf immer genau j Möglichkeiten, von denen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von $1/6$ hat, d.h. $\mathbb{P}(M = k \mid X_1 = j) = \frac{1}{6} j$ für alle $j = k$. Für $k > j$ hängt das Maximum schlussendlich nur noch vom zweiten Wurf ab, da dieser den ersten in der Augenzahl übertreffen soll. Somit ist $\mathbb{P}(M = k \mid X_1 = j) = \mathbb{P}(X_2 = k) = 1/6$. Zusammengefasst gilt nun also

$$\mathbb{P}(M = k \mid X_1 = j) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < j \\ 1/6 j & \text{für } k = j \\ 1/6 & \text{für } k > j \end{cases}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M \mid X_1 = j] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \mathbb{P}(M = k \mid X_1 = j) = j \cdot \frac{1}{6} j + \sum_{k=j+1}^{6} \frac{1}{6} k &= \frac{1}{6} \cdot \left(j^2 + 21 - \frac{j(j-1)}{2} \right) \\ &= 3.5 + \frac{j(j-1)}{12} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich $\mathbb{E}[M \mid X_1] = 3.5 + \frac{X_1(X_1-1)}{12}$ und als Verteilung

j	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(M \mid X_1 = j)$	3.5	3.67	4	4.5	5.17	6