



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

**Fakultät Mathematik** Institut für Stochastik, Professur für Angewandte Stochastik

---

# STOCHASTIK

*Hausaufgaben*

**Prof. Dr. Anita Behme**

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze  
E-Mail : [eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de](mailto:eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de)

# Hausaufgaben

Stochastik – Übungsblatt 1

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)

Ü-Gruppe:

Thema: Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen

## Lemma 1

Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum. Dann gilt

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

**Beweis.** Da  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  ist auch  $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ . Dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c$  und somit weil  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{F}$  und nach Definition einer  $\sigma$ -Algebra auch  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ . Insbesondere gilt dies auch falls endliche viele Mengen weggelassen werden, d.h. für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist auch  $\bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{F}$ .  $\square$

## Übung 1.1

(a) Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum. Zeigen Sie, dass für jede Menge  $B \subseteq \Omega$  das Mengensystem  $\overline{\mathcal{F}} := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra über dem Grundraum  $B$  ist.

(b) Es sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum und  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  eine Folge von Ereignissen. Zeigen Sie:

$$\underline{A} := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \quad \overline{A} := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \quad \underline{A} \subseteq \overline{A}$$

(a) Wir zeigen die drei Eigenschaften einer  $\sigma$ -Algebra.

- Da  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist  $\Omega \in \mathcal{F}$ . Wählen wir also  $A = \Omega \in \mathcal{F}$ , so ist  $B = \Omega \cap B$ , da  $B \subseteq \Omega$  und somit  $\Omega \in \overline{\mathcal{F}}$ .
- Sei  $C \in \overline{\mathcal{F}}$ , d.h. es existiert  $A \in \mathcal{F}$  mit  $C = A \cap B$ . Dann ist  $C^c = B \setminus C = B \setminus (A \cap B) = (B \setminus A) \cap B = A^c \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$ .
- Seien  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ , d.h. es existiert  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $C_n = A_n \cap B$ . Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B) = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$$

(b) Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ .

- Lemma 1 sagt uns, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $\bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{F}$  gilt. Mit der Definition von  $\mathcal{F}$  folgt schließlich, dass auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{F}$  ist.
- Analog zum ersten Punkt ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \in \mathcal{F}$ , da sowohl die (abzählbare) Vereinigung als auch der (abzählbare) Schnitt in  $\mathcal{F}$  liegen.
- Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt  $\bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq A_{\max\{n, m\}} \subseteq \bigcup_{k \geq m} A_k$ . Somit ist für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq A_m \subseteq \bigcup_{k \geq m} A_k$  und dann  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} A_k$ , was bereits  $\underline{A} \subseteq \overline{A}$  zeigt.

### Übung 1.2

Es sei  $X$  eine stetige, reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot (4x - 2x^2) & \text{falls } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie  $c$ .
- (b) Berechnen Sie  $\mathbb{P}(X > 1)$  und  $\mathbb{P}(X = 1)$
- (c) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

- (a) Sei  $\mathbb{P}$  das zur Dichte  $f$  gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann gilt nach Satz 1.8

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) \, dx \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Somit muss auch insbesondere die Normierung erfüllt sein, d.h.

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx \stackrel{!}{=} 1$$

Die Additivität bleibt durch die Integraleigenschaften erhalten. Also:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^2 f(x) \, dx + \int_2^{\infty} f(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \, dx + \int_0^2 f(x) \, dx + \int_2^{\infty} 0 \, dx \\ &= \int_0^2 c \cdot (4x - 2x^2) \, dx = 2c \left[ x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 2c \left( 4 - \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3}c \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x) \, dx = \int_1^2 f(x) \, dx + \int_2^{\infty} 0 \, dx \\ &= \int_1^2 \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \, dx = \left[ \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3 \right]_1^2 \\ &= (3 - 2) - \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{12} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X = 1) &= \int_1^1 f(x) \, dx = 0 \end{aligned}$$

- (c) Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable ist definiert als

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(\xi) \, d\xi$$

Ist  $x \leq 0$ , so ist  $F_X(x) = 0$ , da  $f(x) = 0$  für alle  $x \leq 0$  ist und somit  $\int_{-\infty}^x f(\xi) \, d\xi = \int_{-\infty}^x 0 \, d\xi = 0$ .  
Für  $x \in (0, 2)$  ist

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) \, d\xi = \int_0^x f(\xi) \, d\xi = \left[ \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{12}\xi^3 \right]_0^x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3$$

Für  $x \geq 2$  ist stets  $(0, 2) \subset (-\infty, x)$  und daher ist

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(\xi) \, d\xi = \int_{-\infty}^0 f(\xi) \, d\xi + \int_0^2 f(\xi) \, d\xi + \int_2^{\infty} f(\xi) \, d\xi \\ &= \int_0^2 f(\xi) \, d\xi \\ &= \left[ \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{12}\xi^3 \right]_0^2 \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Schlussendlich ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3 & \text{für } x \in (0, 2) \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

die zugehörige Verteilungsfunktion.

### Übung 1.3

Sei  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$  für Parameter  $a, b, t \in \mathbb{R}$  und  $s > 0$ .

- (a) Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass  $F$  eine Verteilungsfunktion ist.
- (b) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

- (a) Nach Satz 1.19 gilt für jede Verteilungsfunktion

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Wenden wir dies auf die obige Funktion  $F$  an unter Berücksichtigung, dass  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) = a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

Unterscheiden wir nun den Grenzprozess in die jeweilige Richtung, so erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a - b \cdot \frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} 0 \\ a + b \cdot \frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = \frac{\pi}{2}b \\ a = 1 - \frac{\pi}{2}b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b = \pi^{-1} \\ a = 0.5 \end{bmatrix}$$

Somit ist also  $F(x) := 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$ .

**Monotonie.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$ . Dann ist auch  $x - t < y - t$  und  $\frac{x-t}{s} < \frac{y-t}{s}$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}, s > 0$ . Da der Arkustangens strikt monoton wachsend ist, ist auch  $\arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) < \arctan\left(\frac{y-t}{s}\right)$  und da sich durch die Parameter  $a$  und  $b$  nichts mehr ändert, gilt

$$0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) < 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y-t}{s}\right) \Rightarrow F(x) < F(y)$$

d.h. die Funktion  $F$  ist (streng) monoton wachsend.

**Rechtsstetigkeit.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  mit  $x_n \searrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt nach den Rechenregeln für Folgen auch  $\frac{x_n - t}{s} \searrow \frac{x - t}{s}$ . Da der Arkustangens stetig auf  $\mathbb{R}$  ist, ist also  $\arctan(y_n) \rightarrow \arctan(y)$  für  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  mit  $y_n \rightarrow y$ , jeweils  $n \rightarrow \infty$ , insbesondere also auch  $y_n \searrow y$ . Also folgt mit den Rechenregeln für Folgen wiederum

$$0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x_n - t}{s}\right) \longrightarrow 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - t}{s}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

was die insbesondere auch die Rechtsstetigkeit von  $F$  zeigt.

Damit definiert  $F$  nach Satz 1.19 eine Verteilungsfunktion.

(b) Für die Verteilungsfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $f(x) = F'(x)$ . Wegen

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

ist

$$\frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{x - t}{s}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x - t}{s}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Also ist schließlich

$$f(x) = F'(x) = \frac{b}{s \left( \left( \frac{x - t}{s} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{b}{\frac{(x - t)^2}{s} + \frac{s^2}{s}} = \frac{sb}{s^2 + (x - t)^2} = \frac{s}{\pi (s^2 + (x - t)^2)}$$

die zugehörige Dichtefunktion.