TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik Institut für Numerik, Professur für Numerik der Optimierung

NUMERIK

Hausaufgaben

Prof. Dr. Andreas Fischer

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze

E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

Hausaufgaben

Numerik – Übungsblatt 2

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Do 2. DS, ungerade Woche

Thema: Iterative Verfahren für Gleichungssysteme

2/2 BE

Bachelor Mathematik, Immatrikulationsjahrgang 2017

Übung 1

Sei $\rho(A) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|$ der Spektralradius von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei $\lambda_i(A)$ die Eigenwerte von A sind. Beweise den folgenden Satz für den Vektorraum der Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$: Für jede durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\rho(A) \leq \|A\|$.

Ohne Beschränung der Allgemeinheit sei $\lambda \in \mathbb{R}$ der betragsmäßig größte Eigenwert mit zugehörigem, normiertem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Av\| = \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| = |\lambda| = \rho(A)$$

Da in der Matrixnorm das Supremum jedoch nur über reellwertige Argumente gebildet wird, gilt die (Un-)Gleichungskette nicht unbedingt für komplexwertige Eigenvektoren und Eigenwerte. Deswegen definieren wir uns eine Fortsetzung der Norm auf den komplexen Zahlen mit

$$\dot{\|} \cdot \dot{\|} : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ x + \mathrm{i}y & \mapsto \quad \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Nun macht man sich schnell klar, dass auch $\dot{\|}\cdot\dot{\|}$ eine Norm darstellt, d.h. Definitheit, Homogenität und Dreiecksungleichung erfüllt. Außerdem ist sie eine Fortsetzung von $\|\cdot\|$, d.h. für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{\|}A\dot{\|} = \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \dot{\|}Az\dot{\|} = \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \dot{\|}Ax + Aiy\dot{\|} &= \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \sqrt{\|Ax\|^2 + \|Ay\|^2} \\ &\leq \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \sqrt{\|A\|^2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} \\ &= \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \|A\| \cdot \dot{\|}z\dot{\|} = \|A\| \cdot \sup_{\dot{\|}z\dot{\|}=1} \dot{\|}z\dot{\|} = \|A\| \end{aligned}$$

sowie $\|A\| \leq \dot{\|}A\dot{\|}$, da $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ und das Supremum in der komplexen Norm also über eine echte Obermenge gebildet wird. Somit ist also $\dot{\|}A\dot{\|} = \|A\|$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Nun löst sich die Aufgabe wie im Fall reeller Eigenwerte und Eigenvektoren - sei also wieder λ der betragsmäßig größte Eigenwert mit zugehörigem, normiertem Eigenvektor v, dann gilt

$$\|A\| = \dot{\|}A\dot{\|} = \sup\left\{\dot{\|}Az\dot{\|} : \dot{\|}z\dot{\|} = 1\right\} \geq \dot{\|}Av\dot{\|} = \dot{\|}\lambda v\dot{\|} = |\lambda| \, \dot{\|}v\dot{\|} = |\lambda| = \rho(A)$$

und damit stets $\rho(A) \leq \|A\|$.

Dies gilt natürlich dann auch für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (auch wenn der Spektralradius nach VL und Aufgabenstellung dafür nicht definiert ist).

Übung 2

Sei $\rho(A) := \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i(A)|$ der Spektralradius von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $\lambda_i(A)$ die Eigenwerte von A sind. Beweise den folgenden Satz:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Matrix A existiert eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $|||\cdot|||$ mit $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Wir verwenden die Schur-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus der Linearen Algebra. Demnach gibt es also eine unitäre Matrix U, sodas

$$B := U^{-1}AU = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

eine rechte obere Dreiecksmatrix ist. Insbesondere sind dann A und B ähnlich und haben somit gleiches charakteristisches Polynom $\det(\lambda\mathbb{1} - A) = \det(\lambda\mathbb{1} - B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda - b_{ii}$. Damit sind also die Diagonalelemente von B gerade die Eigenwerte $\lambda_i = b_{ii}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ von A. Definieren wir nun

$$b := \max_{i,j=1,\ldots,n} |b_{ij}| \quad \text{und} \quad \delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{(n-1)\cdot b}\right\} \in (0,1]$$

sowie

$$D := \operatorname{diag}(1, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad D^{-1} = \operatorname{diag}(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \ldots, \delta^{-n+1})$$

Dann ergibt sich durch Multiplikation der Matrizen

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} b_{11} & \delta\cdot b_{12} & \cdots & \delta^{n-1}\cdot b_{1n} \\ & \delta\cdot b_{22} & \cdots & \delta^{n-1}\cdot b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \delta^{n-1}\cdot b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad C := D^{-1}BD \begin{pmatrix} b_{11} & \delta\cdot b_{12} & \cdots & \delta^{n-1}\cdot b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & \delta^{n-2}\cdot b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Wegen $\delta \leq 1$ gilt

$$\|C\|_\infty \leq \max_{i=1,\ldots,n} |b_{ii}| + (n-1)\delta b \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Nun definieren wir uns mit $V := QD$ eine neue Norm

$$|||\cdot|||: \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\|V^{-1}x\right\|_\infty \end{cases}$$

Wegen $C = D^{-1}BD = D^{-1}Q^{-1}AQD = V^{-1}AV$ gilt auch

$$|||Ax||| = \left\|V^{-1}Ax\right\|_\infty = \left\|CV^{-1}x\right\|_\infty \leq \|C\|_\infty \cdot \left\|V^{-1}x\right\|_\infty = \|C\|_\infty \cdot |||x|||$$

und damit

$$|||A||| \leq \|C\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$$

was der zu zeigenden Behauptung entspricht.

Hausaufgaben

Eric Kunze (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Do 2. DS, ungerade Woche

Numerik – Übungsblatt 4

Thema: CG-Verfahren

Hausaufgabe 5

Das CGNR-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}n \times n$ ist das CG-Verfahren angewendet auf die Gauß'sche Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top b$. Zeige, dass das CGNR-Verfahren angewendet auf das System $\alpha Qx = b$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nach nur einer Iteration die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ findet, wobei der Startwert x^0 beliebig gewählt werden kann.

Wir wenden die Gauß'schen Normalengleichungen an auf das Gleichungssystem $\alpha Qx = b$ und erhalten als mit dem CG-Verfahren zu behandelndes Gleichungssystem

$$\alpha^2 \underbrace{Q^\top Q}_{=\mathbb{1}_n} \cdot x = \alpha \mathbb{1}_n \cdot x = \alpha Q^\top b$$

Die Matrix $\alpha^2 \mathbb{1}_n$ ist offenbar symmetrisch und positiv definit für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. wir dürfen das CG-Verfahren anwenden. Starten wir nun Algorithmus 2.15 mit einem beliebigen $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und setzen zuerst $d^0 := r^0 := \alpha Q^\top b - \alpha^2 \mathbb{1}_n x^0$. Weiter gilt

$$t_0 = \frac{\left\| r^0 \right\|_2^2}{\left(d^0\right)^\top (\alpha^2 \mathbb{1}_n) d^0} = \frac{\langle r^0 \, , \, r^0 \rangle}{\alpha^2 \cdot \langle d^0 \, , \, r^0 \rangle} = \frac{\langle r^0 \, , \, r^0 \rangle}{\alpha^2 \cdot \langle r^0 \, , \, r^0 \rangle} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Betrachten wir nun das Residuum nach einer Iteration

$$r^1 = r^0 - t_0 \cdot \alpha^2 \mathbb{1}_n \cdot d^0 = r^0 - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \alpha^2 \mathbb{1}_n \cdot r^0 = r^0 - r^0 = 0$$

Somit erreicht der Algorithmus also für diesen Fall bereits nach einer Iteration die exakte Lösung und bricht somit ab.