TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik** Institut für Stochastik, Professur für Angewandte Stochastik

# STOCHASTIK

*Hausaufgaben*

**Prof. Dr. Anita Behme**

Sommersemester 2019

Autor : Eric Kunze
E-Mail : eric.kunze@mailbox.tu-dresden.de

# Hausaufgaben

**Stochastik** – Übungsblatt 1

**Eric Kunze** (Matr.-Nr. 4679202)
Ü-Gruppe: Apostolos Sideris

*Thema: Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen*

**Lemma 1**

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Dann gilt

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

**Beweis.** Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ ist auch $\left(A_n^{\mathsf{C}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_k = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}}$ und somit weil $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$ und nach Definition einer $\sigma$-Algebra auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Insbesondere gilt dies auch falls endliche viele Mengen weggelassen werden, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $\bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$. □

**Übung 1.1**

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie, dass für jede Menge $B \subseteq \Omega$ das Mengensystem $\overline{F} := \{A \cap B \colon A \in \mathcal{F}\}$ eine $\sigma$-Algebra über dem Grundraum $B$ ist.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ eine Folge von Ereignissen. Zeigen Sie:

$$\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \qquad \overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \qquad \underline{A} \subseteq \overline{A}$$

(a) Wir zeigen die drei Eigenschaften einer $\sigma$-Algebra.

- Da $\mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra ist, ist $\Omega \in \mathcal{F}$. Wählen wir also $A = \Omega \in \mathcal{F}$, so ist $B = \Omega \cap B$, da $B \subseteq \Omega$ und somit $\Omega \in \overline{\mathcal{F}}$.
- Sei $C \in \overline{\mathcal{F}}$, d.h. es existiert $A \in \mathcal{F}$ mit $C = A \cap B$. Dann ist $C^{\mathsf{C}} = B \setminus C = B \setminus (A \cap B) = (B \setminus A) \cap B = A^{\mathsf{C}} \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$.
- Seien $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, d.h. es existiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $C_n = A_n \cap B$. Dann ist
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) = \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}_{\in\mathcal{F}} \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$$

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$.

- Lemma 1 sagt uns, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$ gilt. Mit der Definition von $\mathcal{F}$ folgt schließlich, dass auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$ ist.
- Analog zum ersten Punkt ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{F}$, da sowohl die (abzählbare) Vereinigung als auch der (abzählbare) Schnitt in $\mathcal{F}$ liegen.
- Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq A_{\max\{n,m\}} \subseteq \bigcup_{k\geq m} A_k$. Somit ist für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq A_k \subseteq \bigcup_{k\geq m} A_k$ und dann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq m} A_k$, was bereits $\underline{A} \subseteq \overline{A}$ zeigt.

**Übung 1.2**

Es sei $X$ eine stetige, reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot (4x - 2x^2) & \text{falls } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $c$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > 1)$ und $\mathbb{P}(X = 1)$

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

(a) Sei $\mathbb{P}$ das zur Dichte $f$ gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann gilt nach Satz 1.8

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Somit muss auch insbesondere die Normierung erfüllt sein, d.h.

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x \overset{!}{=} 1$$

Die Additivität bleibt durch die Integraleigenschaften erhalten. Also:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^{\infty} 0\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 c \cdot (4x - 2x^2)\ \mathrm{d}x \ = \ 2c\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \ = \ 2c\left(4 - \frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}c \ \overset{!}{=} \ 1 \ \Rightarrow \ c = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^{\infty} 0\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3\right]_1^2 \\
&= (3 - 2) - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{12}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(X = 1) &= \int_1^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

(c) Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariableist definiert als

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

Ist $x \leq 0$, so ist $F_X(x) = 0$, da $f(x) = 0$ für alle $x \leq 0$ ist und somit $\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}\xi = 0$. Für $x \in (0, 2)$ ist

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \int_0^x f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \left[\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{12}\xi^3\right]_0^x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3$$

Für $x \geq 2$ ist stets $(0,2) \subset (-\infty, x)$ und daher ist

$$\begin{aligned}
F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi &= \int_{-\infty}^{0} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{2} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{2}^{\infty} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{2} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \left[\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{12}\xi^3\right]_0^2 \\
&= 3 - 2 = 1
\end{aligned}$$

Schlussendlich ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{12}x^3 & \text{für } x \in (0,2) \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

die zugehörige Verteilungsfunktion.

**Übung 1.3**

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$ für Parameter $a, b, t \in \mathbb{R}$ und $s > 0$.

(a) Bestimmen Sie $a$ und $b$ so, dass $F$ eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

(a) Nach Satz 1.19 gilt für jede Verteilungsfunktion

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Wenden wir dies auf die obige Funktion $F$ an unter Berücksichtigung, dass $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) = a + b \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

Unterscheiden wir nun den Grenzprozess in die jeweilige Richtung, so erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a - b \cdot \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 0 \\ a + b \cdot \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a = \frac{\pi}{2} b \\ a = 1 - \frac{\pi}{2} b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} b = \pi^{-1} \\ a = 0.5 \end{bmatrix}$$

Somit ist also $F(x) := 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$.

**Monotonie.** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ist auch $x - t < y - t$ und $\frac{x-t}{s} < \frac{y-t}{s}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}, s > 0$. Da der Arkustangens strikt monoton wachsend ist, ist auch $\arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) < \arctan\left(\frac{y-t}{s}\right)$ und da sich durch die Parameter $a$ und $b$ nichts mehr ändert, gilt

$$0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) < 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y-t}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad F(x) < F(y)$$

d.h. die Funktion $F$ ist (streng) monoton wachsend.

**Rechtsstetigkeit.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \searrow x$ für $n \to \infty$. Dann gilt nach den Rechenregeln für Folgen auch $\frac{x_n-t}{s} \searrow \frac{x-t}{s}$. Da der Arkustangens stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist also $\arctan(y_n) \to \arctan(y)$ für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $y_n \to y$, jeweils $n \to \infty$, insbesondere also auch $y_n \searrow y$. Also folgt mit den Rechenregeln für Folgen wiederum

$$0.5 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_n - t}{s}\right) \longrightarrow 0.5 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) \qquad (n \to \infty)$$

was die insbesondere auch die Rechtsstetigkeit von $F$ zeigt.

Damit definiert $F$ nach Satz 1.19 eine Verteilungsfunktion.

(b) Für die Verteilungsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F'(x)$. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x-t}{s}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{s}$$

Also ist schließlich

$$f(x) = F'(x) = \frac{b}{s\left(\left(\frac{x-t}{s}\right)^2+1\right)} = \frac{b}{\frac{(x-t)^2}{s}+\frac{s^2}{s}} = \frac{sb}{s^2+(x-t)^2} = \frac{s}{\pi\left(s^2+(x-t)^2\right)}$$

die zugehörige Dichtefunktion.

**Übung 1.4**

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 3/4$ und $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Zeigen Sie: $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}(A) = 0.7 & \mathbb{P}(A\cap B) = 0.4 & \\ \mathbb{P}(B) = 0.6 & \mathbb{P}(A\cap C) = 0.3 & \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0.1 \\ \mathbb{P}(C) = 0.5 & \mathbb{P}(B\cap C) = 0.2 & \end{array}$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)$ und $\mathbb{P}(A^\mathsf{C} \cap B^\mathsf{C} \cap C)$.

(a) Für die Abschätzung nach unten betrachten wir $(A\cap B)^\mathsf{C} = A^\mathsf{C} \cup B^\mathsf{C}$. Dafür gilt die $\sigma$-Subadditivität:

$$\mathbb{P}(A^\mathsf{C}\cup B^\mathsf{C}) \leq \mathbb{P}(A^\mathsf{C}) + \mathbb{P}(B^\mathsf{C}) = 1 - \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(B) = 2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$$

Somit ist $\mathbb{P}(A\cap B) = 1 - \mathbb{P}((A\cap B)^\mathsf{C}) \geq \frac{1}{12}$. Für die Abschätzung nach oben verwenden wir die Monotonie des (Wahrscheinlichkeits-)Maßes $\mathbb{P}$. Es ist klar, dass $A\cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$ gilt, d.h. somit ist $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ *und* $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(B)$. Damit folgt nun auch schon $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Somit ist also die Ungleichungskette $1/12 \leq \mathbb{P}(A\cap B) \leq 1/3$ gezeigt.

(b)

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.9 + 0.5 - 0.3 - 0.2 + 0.1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}} \cap C\right) &= \mathbb{P}\left(\left(A \cap B \cap C^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(A \cup B \cup C^{\mathsf{C}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^{\mathsf{C}}) + \mathbb{P}((A \cup B) \cap C^{\mathsf{C}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^{\mathsf{C}}) + \mathbb{P}((A \cap C^{\mathsf{C}}) \cup (B \cap C^{\mathsf{C}})) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^{\mathsf{C}}) + \mathbb{P}(A \cap C^{\mathsf{C}}) + \mathbb{P}(B \cap C^{\mathsf{C}}) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^{\mathsf{C}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(C^{\mathsf{C}}) + \mathbb{P}(A \setminus (A \cap C)) + \mathbb{P}(B \setminus (B \cap C)) \\
&\quad - \mathbb{P}((A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - 1 + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap C)) \\
&\quad + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.9 - 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 \\
&= 0.1
\end{aligned}
$$

**Übung 1.5**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ seien Ereignisse. Zeigen Sie

$$
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^{\mathsf{C}}\right) \\
&\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^{\mathsf{C}}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\
&= 1 - n + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1
\end{aligned}
$$

**Übung 1.6**
Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $|f|$ messbar ist. Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung.

Wir zeigen zuerst die Hinrichtung.

- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Dann ist auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, da aus

$$
\begin{aligned}
x \in \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > a\right\} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon a < f_{n_0}(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > a\}
\end{aligned}
$$

  folgt, dass $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x) < a\} \in \mathcal{F}$. Und schließlich ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ genau dann messbar, wenn $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < a\}$ es für alle $a \in \Omega$ ist. Analog zeigt man dies auch für das Infimum und erhält damit die Messbarkeit von Limes inferior und Limes superior. Existiert schließlich auch der Limes, so ist auch dieser messbar.

- Sei $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Dann existiert nach dem Sombrero-Lemma eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ mit $f_n \longrightarrow f$ für $n \to \infty$. Es ist klar, dass alle einfachen Treppenfunktionen $f_n$ messbar sind. Aufgrund des ersten Punktes ist dann auch der Grenzprozess $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ messbar.

- Damit ist dann auch schon $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := -\min(f, 0)$ messbar, da sich $f$ jeweils durch eine Folge einfacher Funktionen annähern lasst und die Null durch die konstante Nullfolge beschreibbar ist. Insbesondere sind dann auch die jeweiligen Extrema von $f_n$ und 0 wieder einfach und somit messbar. Schließlich ist $f^+$ und $f^-$ messbar.

- Sei $f$ eine messbare Funktion. Dann sind auch $f^+$ und $f^-$ messbar, was bereits die Messbarkeit von $|f|$ impliziert, da $|f| = f^+ + f^-$.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Zur Konstruktion eines Gegenbeispiels bezeichne $V$ die aus der Übung bekannte Vitali-Menge, welche nicht messbar ist. Betrachten wir dazu die Funktion

$$
f(x) := (\mathbb{1}_V - \mathbb{1}_{V^\mathsf{c}})(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in V \\ -1 & \text{falls } x \notin V \end{cases}
$$

Offensichtlich ist $|f| \equiv 1$ und damit messbar. Jedoch ist $f$ nicht messbar, weil beispielsweise $f^{-1}(\{1\}) = V \notin \mathcal{F}$ nicht messbar ist.