Permutation
Berücksichtigung der Reihenfolge $k = n$
ohne Wdh/Zl: $n!$; mit Wdh/Zl: $\frac{n!}{k!}$
Variation
Berücksichtigung der Reihenfolge $k < n$
ohne Wdh/Zl: $\frac{n!}{(n-k)!}$; mit Wdh/Zl: n^k
Kombination
Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $k < n$
ohne Wdh/Zl: $\binom{n}{k}$; mit Wdh/Zl: $\binom{n+k-1}{k}$
Wahrscheinlichkeiten
ZFE: bel. oft, gleiche Bed., Erg. nicht vorhersagbar
Ereignis $A \subseteq \Omega$; Laplace: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A und B unabhängig: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B)$
Satz von Bayes
$P(A_k|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A_k) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A_i)P(B|A_i)}$
Zufallsvariablen
$X : \Omega \to R$; Realisierungen: $\{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$
$P(X = k) = P(X(\omega) = k)$
Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(1) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$; (2) f integrierbar
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
Verteilungsfunktion
$F(t) = P(\omega \in \Omega : X(\omega \leq t)) = P(X \leq t)$
(1) mon. wachsend (2) $lim_{x \searrow x^*} F(x) = F(x^*)$
(3) $lim_{x \searrow x^*} F(x) - lim_{x \nearrow x^*} F(x) = P(X = x^*)$
$P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$
$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$
Quantil
$lim_{x \nearrow Q_p} F(x) \leq p \leq F(Q_p)$
Binomialkoeffizienten
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $0! = 1$
$\binom{n}{k} = 0$ für k>n
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$
Binomialverteilung B(n,p)
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$\mu = np$; $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für $n \geq 50 \wedge p \leq 0,1$; $\lambda = np$
$F(t) \approx \Phi(\frac{t+0,5-\mu}{\sigma})$ bei $\sigma^2 = np(1-p) \geq 9$
Hypergeometrische Verteilung H(n, M, N)
$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
n: Anz. ziehen; M: ges Eig.; N: gesamt
$E(X) = n\frac{M}{N}$; $Var(X) = n\frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$
Apprx durch B bei $n/N < 0,05$
Poisson-Verteilung $P_\lambda(k)$
$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$E(X) = V(X) = \lambda$
Erwartungswert
$E(X) = \sum_{k \in X} x \cdot P(X = k)$
$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$
$E(X + \alpha Y) = E(X) + \alpha E(Y)$
X,Y unabh: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
Varianz σ^2
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
X,Y unabh: $Var(XY) = E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2E(Y)^2$
Tschebyscheff: $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}V(X)$
Kovarianz
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
X,Y unabh: $Cov(X, Y) = 0$
Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$
$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$
Gleichverteilung auf [a,b]
$f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in (a, b)$ sonst 0
$E(X) = \frac{b+a}{2}$; $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ sonst 0
$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ sonst 0
$E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Stichprobengrößen
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
$\bar{s}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
emp. Korrelation: $s_{x,y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Konfidenzintervalle
$\Phi(z_\alpha) = \alpha$; $\chi_n^2(c_{n-1,\alpha}) = \alpha$
$[\bar{X} - \sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X} + \sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]$ (für μ)
$(-\infty, \bar{X} + \sigma z_{1-\alpha}/\sqrt{n}]$ (einseitig für μ)
$[\bar{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\bar{S}/\sqrt{n}, \bar{X} + ...]$ (für μ ohne σ)
$[\frac{(n-1)\bar{S}^2}{c_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)\bar{S}^2}{c_{n-1,\alpha/2}}]$ (für Varianz)
$[\frac{k}{n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{k}{n}(1 - \frac{k}{n})}, \frac{k}{n} + ..]$ (für B mit k,n-k>50)
Hypothesentest Erwartungswert
$H_0 : \mu > \mu_0$; $\bar{H}_0 : \mu \leq \mu_0$
$P(A_0|\bar{H}_0) = P(X \geq k) = 1 - \Phi(\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) \leq \alpha$
Hypothesentest Varianz
$H_0 : \sigma^2 > \sigma_0^2$; $\bar{H}_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$
$P(A_0|\bar{H}_0) = P(X \geq k) = 1 - \chi_{n-1}^2(\frac{k(n-1)}{\sigma_0^2}) \leq \alpha$
Lagrange-Interpolation
$L_i(x) = \prod_{j=0;j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$
$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$
Newton-Interpolation
$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$
$\alpha_{i,0} = y_i$; $\alpha_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j-1} - \alpha_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
Neville-Interpolation
$P_{i,0}(x) = y_i$
$P_{i,j}(x) = \frac{(x-x_{i-j})P_{i,j-1}(x) - (x-x_i)P_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}$
Fehlerabschätzung
$x_i \in [a, b]$ Stützstellen zu Interpolationspoly $p(x)$
$\forall x^* \exists \zeta \in [a, b] : |f(x^*) - p(x^*)| = \frac{f^{(n-1)}(\zeta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x^* - x_i)$
Newton-Cotes-Formel
$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ mit $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + hi$
$\alpha_i = \int_0^n \Pi_{j=0;j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j} dt$
Newton- und Sekantenverfahren
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$
Taylorpolynom
$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$
strikt diagonaldominant
$\forall i = 1, .., n : |a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$
J- und G-S-Verfahren konvergieren hier gegen Lösung
Normen
Zeilensummennorm:

$||A||_\infty = max_{||x||_\infty=1}||Ax||_\infty = max_{i=1..m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
Spaltensummennorm:
$||A||_1 = max_{||x||_1=1}||Ax||_1 = max_{j=1..m}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
Spektralnorm:
$||A||_2 = max_{||x||_2=1}||Ax||_2 = ...$
Submultiplikativität:
$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$
Verträglichkeit mit Vektornorm:
$||Ax||_V \leq ||A|| \cdot ||x||_V$

Jacobiverfahren
$A = L + U + D$ L: Lower, U: Upper, D: Diag.
$x_{k+1} := D^{-1}(b - (L+U)x_k)$

Gauß-Seidel-Verfahren
$x_{k+1} = (D+L)^{-1}(b - Ux_k)$

LU-Faktorisierung
$A = PLU$, L: untere DM mit 1 auf Diag., P: Permut., U: obere DM mit Diagonaleinträgen
$U_0 = A$, $L_0 = E_n$; $P^T = P^{-1}$
Gauß auf U; neg Faktor in Zelle von L
Lösen GS: $y := UX$ wie bei Cholesky

Cholesky-Zerlegung
A muss symmetrisch und positiv definit sein
A str. diag.dom. und pos Diag.einträge => pos def.
in Praxis: symmetrisch und dann probieren, ob Verfahren funktioniert
$A = GG^T$, G - untere Dreiecksmatrix
$g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$
$g_{ij} = \frac{1}{g_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}), i = j+1, .., n$
zeilenweise von links nach rechts
Lösen GS: $GG^Tx = b$, $y := G^Tx$
1) y aus $Gy = b$ 2) x aus $G^Tx = y$

QR-Zerlegung
$A = QR$; $QQ^T = E_n$; R obere DM
$u_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{<u_j, a_i>}{||u_j||^2} u_j$
$q_i = u_i/||u_i||$, $r_{ij} = \frac{<u_i, a_j>}{||u_i||}, 1 \leq i \leq j \leq n$
$\min ||Ax - b|| \to Rx^* = Q^Tb$

Separation der Variablen
Umstellen, dass alle x auf einer Seite und y auf der anderen. Dann integrieren.

Lineare DGL 1. Ordnung
$y'(x) = a_0(x)y(x) \Rightarrow y(x) = ce^{\int a_0 dx}$

Variation der Konstanten
(1) Homogene DGL lösen (2) c -> k(x); y(k(x)) differenzieren (3) y, y' in inhomogene DGL einsetzen -> k(x)

D'Alembert'sches Reduktionsverfahren
y_1 als spezielle Lösung gegeben
(1) $y = y_1 \cdot u(x)$ als Ansatz; (2)$z(x) = u'(x)$
(3) $y_2 = y_1 \cdot u(x)$

Lineare DGL 2. Ordnung mit konst Koeff
zwei NST: $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
eine NST: $y = c_1e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$
pq-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Variation der Konstanten bei 2. Ordnung
NB: $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$
$W_1(x) = \int -\frac{y_2(x)b(x)}{W(x)}dx$
$W_2(x) = \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}dx$
$y_p = W_1(x)y_1(x) + W_2(x)y_2(x)$

Wronski-Determinante
$W(f_1, .., f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & x_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, x \in I$
$\exists x_0 \in I : W(f_1, .., f_n)(x_0) \neq 0 \Rightarrow f_1, .., f_n$ lin. unabh.; umgekehrt nicht

Differenzieren und Integrieren
$\frac{d}{dx}x^n = nx^{(n-1)}$
$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx}b^x = b^x \ln(b)$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$
$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$
$\int \ln(x)dx = xln(x) - x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = ln(\sqrt{a^2+x^2} + x) + c$

Regeln Differenzieren
$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{d}{du}[f(u)]\frac{du}{dx}$

Regeln Integrieren
$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

Euler Formel
$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$; $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

Winkelbeziehungen
$cos(-x) = cos(x)$; $sin(-x) = -sin(x)$
$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2$
$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2$

Potenzgesetze
$x^ax^b = x^{(a+b)}$; $x^ay^a = (xy)^a$; $(x^a)^b = x^{(ab)}$

Logarithmengesetze
$y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$
$\log_b(1) = 0$; $\log_b(b) = 1$
$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
$\log_b(x^n) = n\log_b(x)$
$\log_b(x) = \log_b(c)\log_c(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$

Lineare Unabhängigkeit

Diverse Werte
$e \approx 2,718$

x	sin(x)	cos(x)	tan(x)
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	0	-1	0
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
270°	-1	0	-