

Permutation

Berücksichtigung der Reihenfolge $k = n$
ohne Wdh/Zl: $n!$; mit Wdh/Zl: $\frac{n!}{k!}$

Variation

Berücksichtigung der Reihenfolge $k < n$
ohne Wdh/Zl: $\frac{n!}{(n-k)!}$; mit Wdh/Zl: n^k

Kombination

Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $k < n$
ohne Wdh/Zl: $\binom{n}{k}$; mit Wdh/Zl: $\binom{n+k-1}{k}$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \binom{n}{1} = n$$

Wahrscheinlichkeiten

ZFE: bel. oft, gleiche Bed., Erg. nicht vorhersagbar

Ereignis $A \subseteq \Omega$; Laplace: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A und B unabhängig: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^m P(A_i \cap B)$$

Satz von Bayes

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)}{P(B)} \cdot P(B|A_k) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^m P(A_i)P(B|A_i)}$$

Zufallsvariablen

$X: \Omega \rightarrow R$; Realisierungen: $\{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$

$$P(X = k) = P(X(\omega) = k)$$

Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$; (2) f integrierbar

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Verteilungsfunktion

$$F(t) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t) = P(X \leq t)$$

(1) mon. wachsend (2) $\lim_{x \searrow x^*} F(x) = F(x^*)$

(3) $\lim_{x \searrow x^*} F(x) - \lim_{x \nearrow x^*} F(x) = P(X = x^*)$

$$P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

Quantil

$$\lim_{x \nearrow Q_p} F(x) \leq p \leq F(Q_p)$$

Hypergeometrische Verteilung $H(n, M, N)$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

n: Anz. ziehen; M: ges. Eig.; N: gesamt

$$E(X) = n \frac{M}{N}; Var(X) = n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \frac{N-n}{N-1}$$

Apprx durch B bei $n/N < 0,05$

Binomialverteilung $B(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mu = np; \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ für } n \geq 50 \wedge p \leq 0,1; \lambda = np$$

$$F(t) \approx \Phi\left(\frac{t+0,5-\mu}{\sigma}\right) \text{ bei } \sigma^2 = np(1-p) \geq 9$$

Poisson-Verteilung $P_\lambda(k)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

Gleichverteilung auf $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ für } x \in (a, b) \text{ sonst } 0$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}; V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ für } x \geq 0 \text{ sonst } 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ für } t \geq 0 \text{ sonst } 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}; V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{k \in X} x \cdot P(X = k)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X + \alpha Y) = E(X) + \alpha E(Y)$$

$$X, Y \text{ unabh: } E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Varianz σ^2

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$X, Y \text{ unabh: } Var(XY) = E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2E(Y)^2$$

$$\text{Tschebyscheff: } P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} V(X)$$

Kovarianz

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$X, Y \text{ unabh: } Cov(X, Y) = 0$$

Stichprobengrößen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \bar{s}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{emp. Korrelation: } s_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Konfidenzintervalle

$$\Phi(z_\alpha) = \alpha; \chi_n^2(c_{n-1, \alpha}) = \alpha$$

$$[\bar{X} - \sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X} + \sigma z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}] \text{ (für } \mu)$$

$$(-\infty, \bar{X} + \sigma z_{1-\alpha}/\sqrt{n}] \text{ (einseitig für } \mu)$$

$$[\bar{X} - t_{n-1, 1-\alpha/2} \bar{S}/\sqrt{n}, \bar{X} + \dots] \text{ (für } \mu \text{ ohne } \sigma)$$

$$\left[\frac{(n-1)\bar{S}^2}{c_{n-1, 1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)\bar{S}^2}{c_{n-1, \alpha/2}} \right] \text{ (für Varianz)}$$

$$\left[\frac{k}{n} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}, \frac{k}{n} + \dots \right] \text{ (für B mit } k, n-k > 50)$$

Hypothesentest Erwartungswert

$$H_0 : \mu > \mu_0; \bar{H}_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$P(A_0 | \bar{H}_0) = P(X \geq k) = 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq \alpha$$

Hypothesentest Varianz

$$H_0 : \sigma^2 > \sigma_0^2; \bar{H}_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

$$P(A_0 | \bar{H}_0) = P(X \geq k) = 1 - \chi_{n-1}^2\left(\frac{k(n-1)}{\sigma_0^2}\right) \leq \alpha$$

Lagrange-Interpolation

$$L_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

Newton-Interpolation

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$\alpha_{i,0} = y_i; \alpha_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j-1} - \alpha_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

Neville-Interpolation

$$P_{i,0}(x) = y_i$$

$$P_{i,j}(x) = \frac{(x - x_{i-j})P_{i,j-1}(x) - (x - x_i)P_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}$$

Fehlerabschätzung

$x_i \in [a, b]$ Stützstellen zu Interpolationspoly $p(x)$

$$\forall x^* \exists \zeta \in [a, b] : |f(x^*) - p(x^*)| = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x^* - x_i)$$

Newton-Cotes-Formel

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \text{ mit } h = \frac{b-a}{n}; x_i = a + hi$$

$$\alpha_i = \int_0^n \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{t-j}{i-j} dt$$

Newton- und Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Taylorpolynom

$$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

strikt diagonaldominant

$$\forall i = 1, \dots, n : |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

J- und G-S-Verfahren konvergieren hier gegen Lösung

Normen

Zeilensummennorm:

$$\|A\|_\infty = \max_{||x||_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{i=1..m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Spaltensummennorm:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{j=1..m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Spektralnrm:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \dots$$

Submultiplikativität:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Verträglichkeit mit Vektornorm:

$$\|Ax\|_V \leq \|A\| \cdot \|x\|_V$$

Kondition

$$\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Jacobiverfahren

$A = L + U + D$ L: Lower, U: Upper, D: Diag.

$$x_{k+1} := D^{-1}(b - (L + U)x_k)$$

Gauß-Seidel-Verfahren

$$x_{k+1} = (D + L)^{-1}(b - Ux_k)$$

LU-Faktorisierung

$A = PLU$, L: untere DM mit 1 auf Diag., P: Permut.,

U: obere DM mit Diagonaleinträgen

$$U_0 = A, L_0 = E_n; P^T = P^{-1}$$

Gauß auf U; neg Faktor in Zelle von L

Lösen GS: $y := UX$ wie bei Cholesky

Cholesky-Zerlegung

A muss symmetrisch und positiv definit sein

A str. diag.dom. und pos Diag.einträge => pos def.

in Praxis: symmetrisch und dann probieren, ob

Verfahren funktioniert

$$A = GG^T, G - \text{untere Dreiecksmatrix}$$

$$g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2}$$

$$g_{ij} = \frac{1}{g_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}), i = j+1, \dots, n$$

zeilenweise von links nach rechts

Lösen GS: $GG^T x = b, y := G^T x$

1) y aus $Gy = b$ 2) x aus $G^T x = y$

QR-Zerlegung

$A = QR$; $QQ^T = E_n$; R obere DM

$$u_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_j, a_i \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

$$q_i = u_i / \|u_i\|, r_{ij} = \frac{\langle u_i, a_j \rangle}{\|u_i\|}, 1 \leq i \leq j \leq n$$

$$\min \|Ax - b\| \rightarrow Rx^* = Q^T b$$

Separation der Variablen

Umstellen, dass alle x auf einer Seite und y auf der anderen. Dann integrieren.

Lineare DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = a_0(x)y(x) \Rightarrow y(x) = ce^{\int a_0 dx}$$

Variation der Konstanten

(1) Homogene DGL lösen (2) $c \rightarrow k(x)$; $y(k(x))$

differenzieren (3) y, y' in inhomogene DGL einsetzen

-> k(x)

D'Alembert'sches Reduktionsverfahren

y_1 als spezielle Lösung gegeben

(1) $y = y_1 \cdot u(x)$ als Ansatz; (2) $z(x) = u'(x)$

(3) $y_2 = y_1 \cdot u(x)$

Lineare DGL 2. Ordnung mit konst Koeff

zwei NST: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

eine NST: $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$$\text{pq-Formel: } x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Variation der Konstanten bei 2. Ordnung

NB: $c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0$

$$W_1(x) = \int -\frac{y_2(x)b(x)}{W(x)} dx; W_2(x) = \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)} dx$$

$$y_p = W_1(x)y_1(x) + W_2(x)y_2(x)$$

Wronski-Determinante

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, x \in I$$

$\exists x_0 \in I : W(f_1, \dots, f_n)(x_0) \neq 0 \Rightarrow f_1, \dots, f_n$ lin. unabh.;
umgekehrt nicht

Differenzieren und Integrieren

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{(n-1)}$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln(b)$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} + x) + c$$

Regeln Differenzieren

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} [f(u)] = \frac{d}{du} [f(u)] \frac{du}{dx}$$

Regeln Integrieren

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Euler Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x); e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

Winkelbeziehungen

$$\cos(-x) = \cos(x); \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

Potenzgesetze

$$x^a x^b = x^{(a+b)}; x^a y^a = (xy)^a; (x^a)^b = x^{(ab)}$$

Logarithmengesetze

$$y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$$

$$\log_b(1) = 0; \log_b(b) = 1$$

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$\log_b(x^n) = n \log_b(x)$$

$$\log_b(x) = \log_b(c) \log_c(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

Lineare Unabhängigkeit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Diverse Werte

$$e \approx 2,718$$

x	sin(x)	cos(x)	tan(x)
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	0	-1	0
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
270°	-1	0	-