

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

~~~~~  
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 14

"Cerchio" di (Culmann) - Mohr (circolo o circonferenza es.  $\sigma_{III} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = 0$ ) [1866] [1882] di Mohr)  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \cdot \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

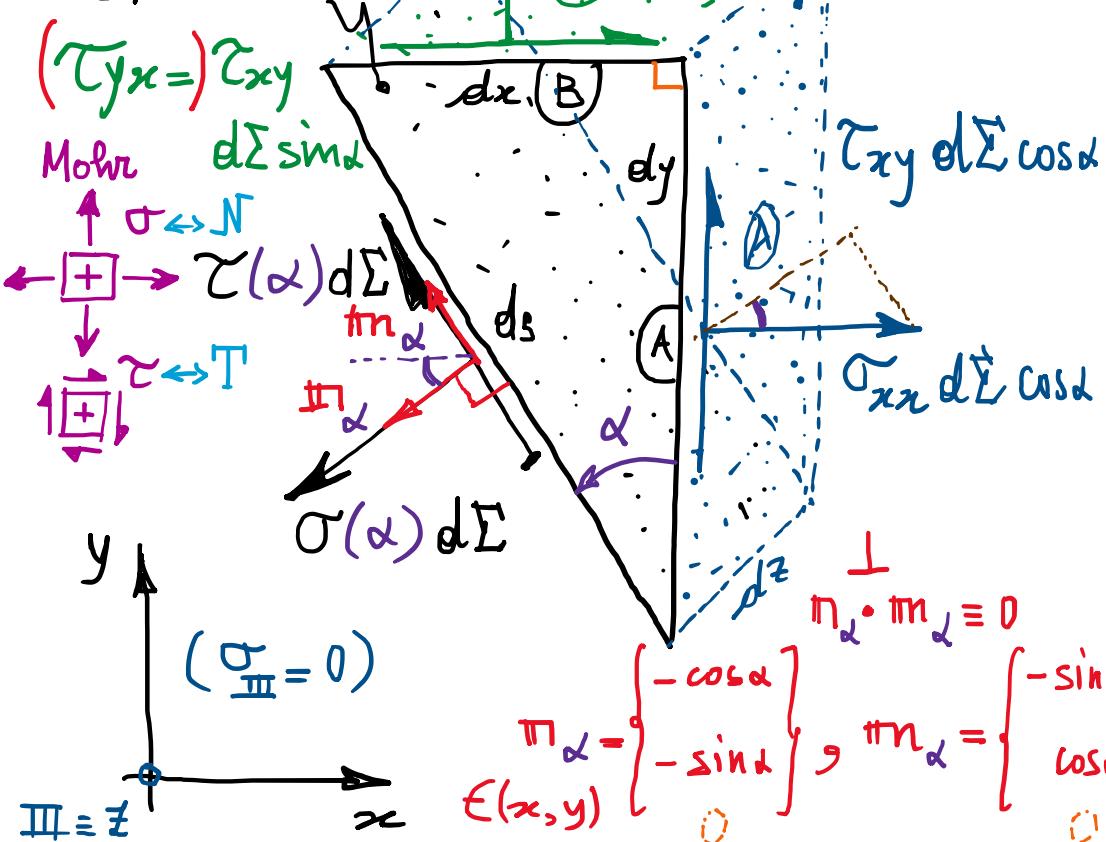
Rappresentazione analitico-grafica delle componenti di sforzo (piano), normale  $\sigma$  e tangenziale  $\tau$ , al variazione delle grecitura nel piano ( $\alpha$ )

[es. stato di sforzo alla DSV nelle travi]

(vedi relazione di Cauchy; caso particolare)

$$d\Sigma_B = dx dz = ds \sin \alpha dz \\ = d\Sigma \sin \alpha \\ d\Sigma = ds dz \\ d\Sigma_A = dy dz = ds \cos \alpha dz = d\Sigma \cos \alpha$$

Equilibrio alle traslazioni:  $(\nabla d\Sigma)$  [tra forze]



$$\begin{aligned} \pi_\alpha: \quad & \sigma d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \cos \alpha + \sigma_{yy} d\Sigma \sin \alpha \\ & + \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin \alpha \cos \alpha \\ m_\alpha: \quad & \tau d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \sin \alpha - \sigma_{yy} d\Sigma \cos \alpha \\ & - \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin \alpha \sin \alpha \\ \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma(2\alpha) = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + \tau_{xy} 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau(2\alpha) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

## Relazioni finali:

Si sono ottenute le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano di Mohr ( $\sigma_3, \tau$ ) di:  
 $(2x)$  L'equazione delle componenti di

↑ piano delle componenti di  
Spazio normale e tangenziale  
su facce di giacitura &

Infatti :

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau^2) = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \cos^2\alpha + \tau_{xy}^2 \sin^2\alpha + 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$+ \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \sin^2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2\alpha - 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$$

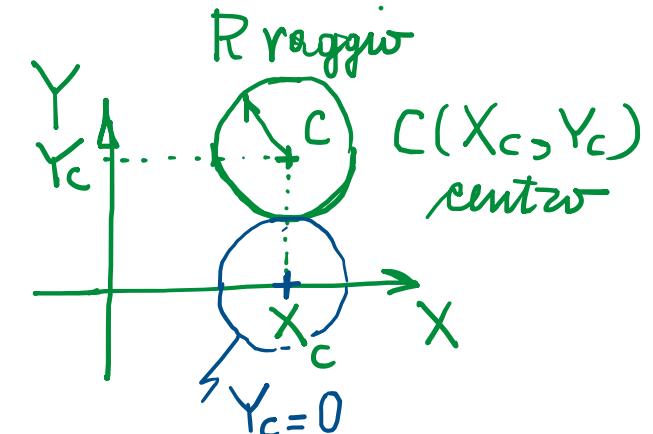
$$= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

Raggio  
Y  
A  
C

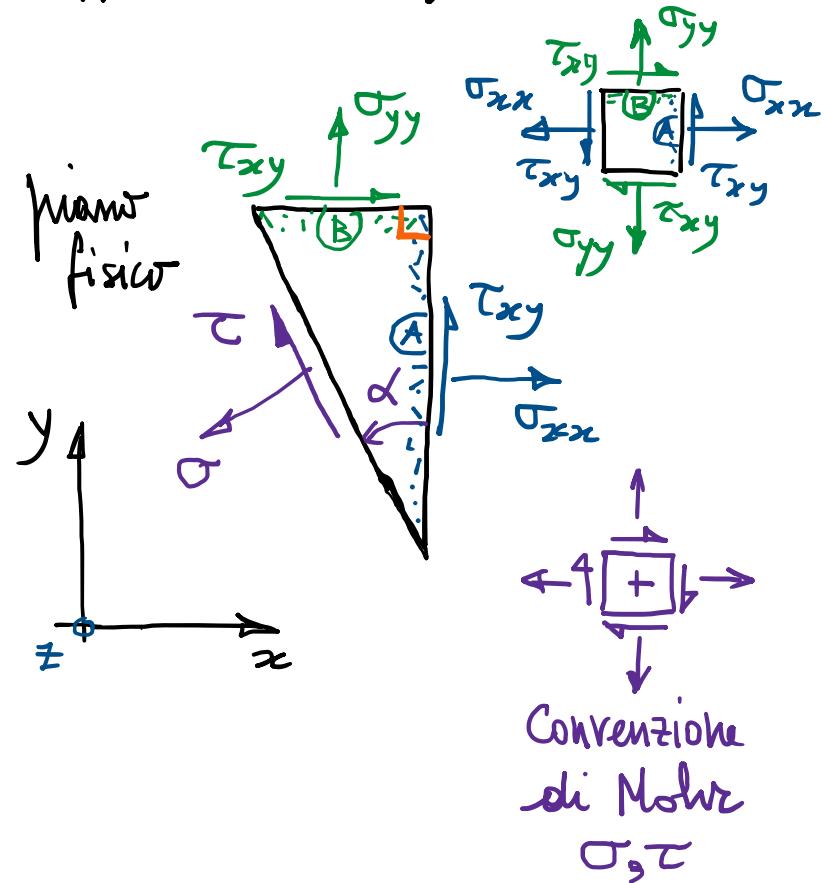
$$(O - O_c)^2 + (T - T_c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2$$

$T_c = 0$

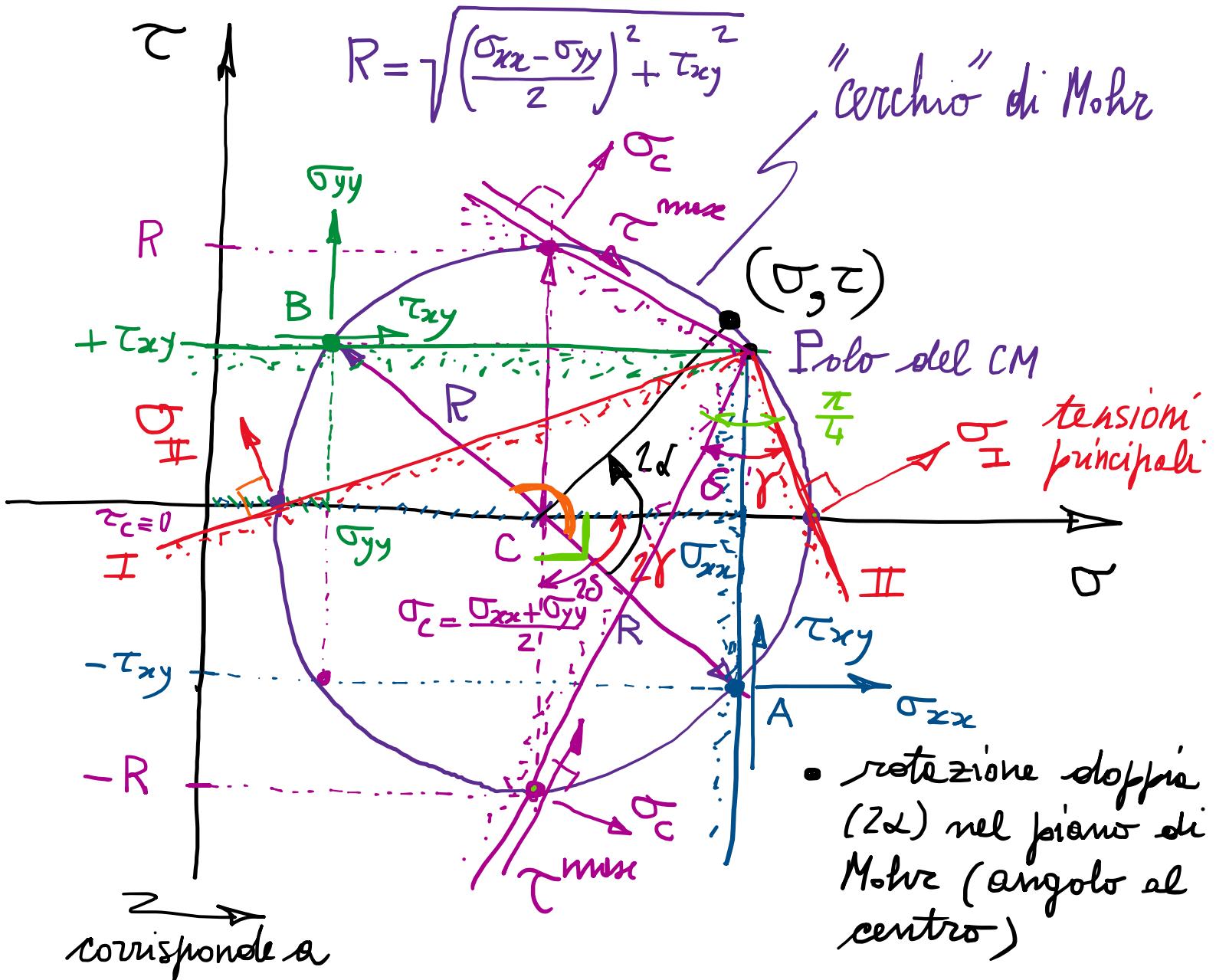
Equazione di circonferenza  
nel piano  $X, Y$



Rappresentazione grafica nel piano di Mohr ( $\sigma, \tau$ ):



- giaciture con rotazione d  
nel piano fisico  
(nel sovrapporre le facce  
verticale e quelle inclinate)



Commenti:

- Rotazioni  $\alpha$  nel piano fisico corrispondono a rotazioni doppie ( $2\alpha$ ) nel piano di Mohr (piano delle componenti  $\sigma, \tau$ ).
- I punti A e B del Cerchio di Mohr (CM) corrispondenti a componenti  $\sigma, \tau$  su facce mutuamente  $\perp$ , risultano diametralmente opposti sul CM ( $2\alpha = \pi$ ).
- Le tensioni principali nel piano  $\sigma_{I,II}$  sono agevolmente individuate dalle intersezioni del CM con l'asse  $\sigma$  ( $\tau=0$ ) e rappresentano i valori max e min dello sforzo normale al variare di tutte le giaciture nel piano:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leftrightarrow \begin{matrix} \text{soluz. eq. ne caratteristiche} \\ \sigma_{II}=0 \Rightarrow I_3=0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{eq. ne di} \\ 2^{\text{o}} \text{ grado} \end{matrix} \end{matrix}$$

- La tensione tangenziale max in valore assoluto è individuata in corrispondenza di  $\sigma_c$  ed è rappresentata dal raggio del CM:

$$\tau^{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

[N.B.:  
 $(\tau^{\max})$   
essa si accompagna  
a  $\sigma = \sigma_c$ ; punti del  
CM ( $\sigma_c, \pm \tau^{\max}$ )]

- Polo del CM, avente le seguenti proprietà: la retta per esso ( $P$ ) e il generico p.t. ( $\sigma, \tau$ ) del CM rappresenta le giaciture delle facce su cui insistono tali componenti  $\sigma, \tau$ .  
[possibilità di rappresentare il piano "fisico" sovrapposto al piano di Mohr]  $\rightarrow$  ruoli caratteristiche di costruzione su CM

- Tramite  $P$  sono pertanto individuabili specifiche direzioni  $\gamma$  del piano, es.:

- direzioni principali  $I, II$ , inclinate di  $\gamma$  tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

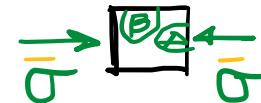
- direzioni secondo cui agisce la  $\tau^{\max}$  (insieme a  $\sigma_c$ ), inclinate di angolo  $\delta$  tale che:

$$2\delta + 2\gamma = \pi/2 \rightarrow \delta + \gamma = \pi/4 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$$

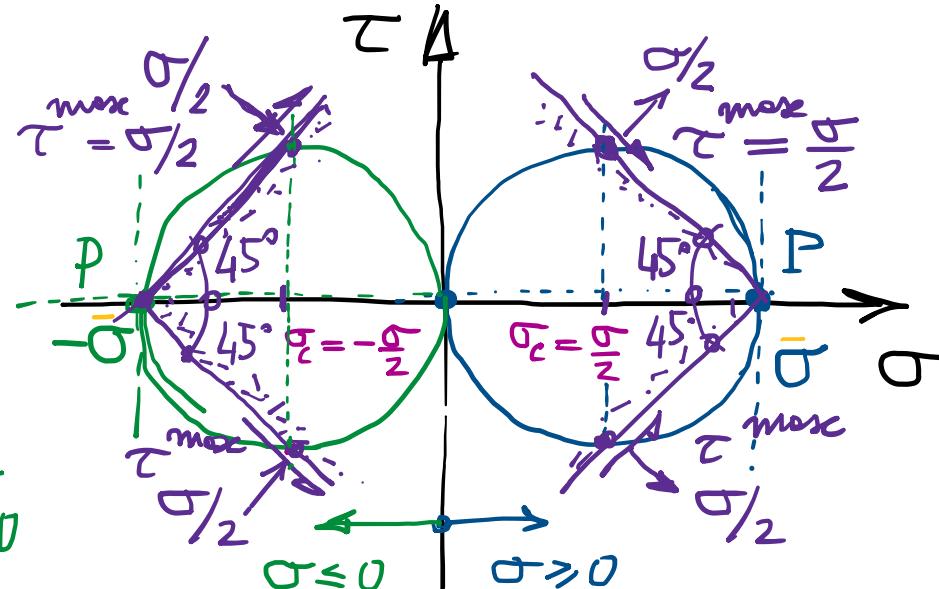
- pertanto, le direzioni secondo cui agisce la  $\tau^{\max}$  risultano  $\checkmark$  inclinate di  $45^\circ$  rispetto alle direzioni principali.

## Esempi tipici:

- Stato di spazio monomassiale di trazione  $\sigma$  e compressione

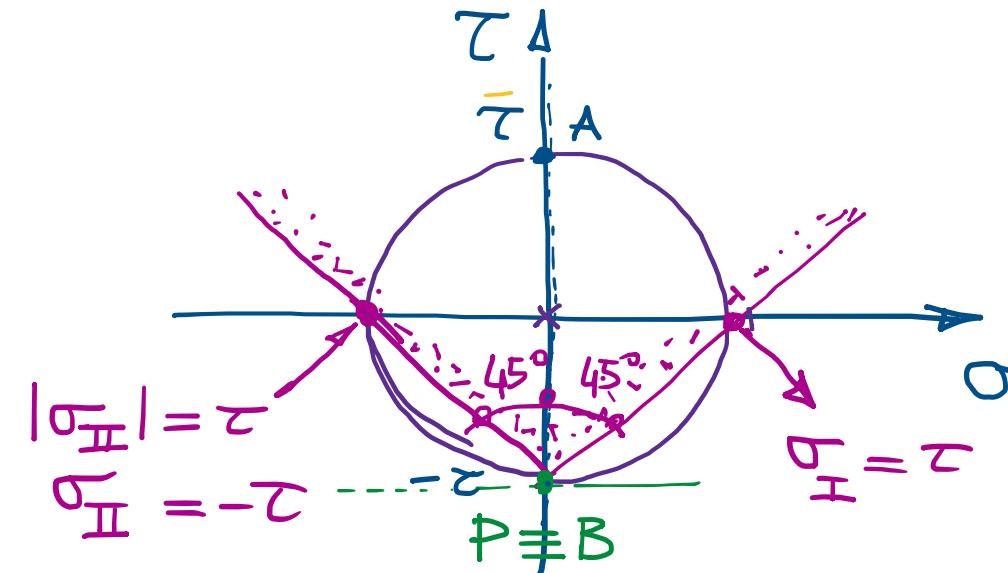
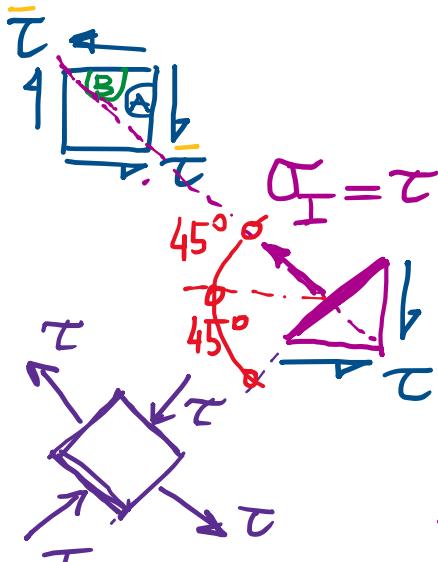


CM tangente all'asse  $\tau$ , tutto nel semipiano  $\sigma \leq 0$



CM tangente all'asse  $\tau$ , tutto nel semipiano  $\sigma \geq 0$  nell'origine

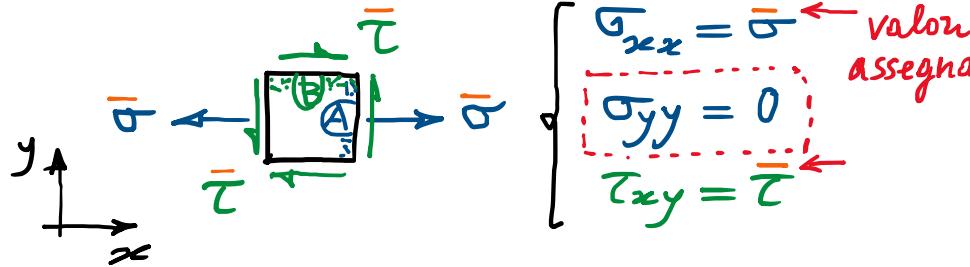
- Stato di spazio di taglio puro



CM centrato sull'origine degli assi del piano di Mohr

tensioni principali uguali e di segno opposto:  
 $\sigma_{II} = -\sigma_I$  ( $\sigma_I = -\sigma_{II}$ )

- CM per stato di sforzo piano alle de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)



particolare stato di sforzo piano con una componente di sforzo normale nulle

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$= \bar{\tau}^{max}$$

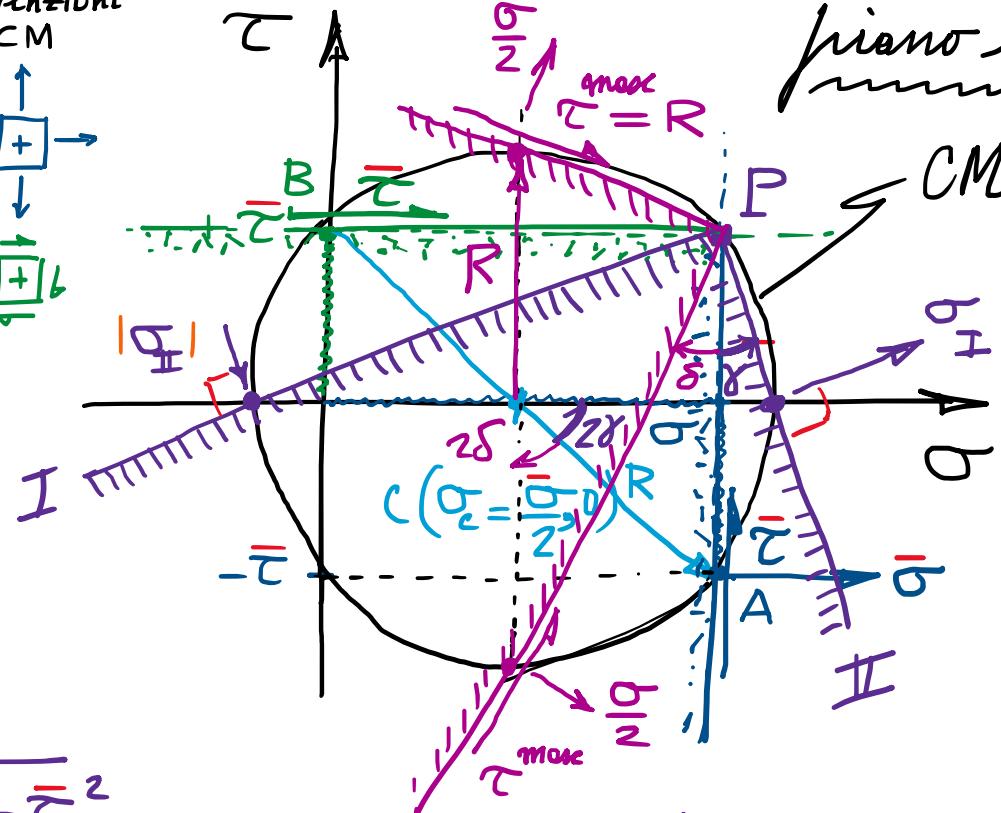
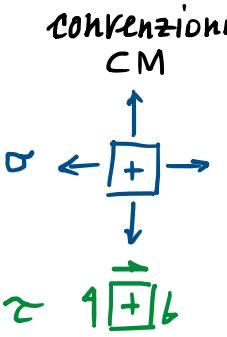
tensioni principali

$$\begin{aligned} \sigma_{H,II} &= \sigma_c + R \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_H \cdot \sigma_{II} &= (\sigma_c + R)(\sigma_c - R) \\ &= \sigma_c^2 - R^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \bar{\tau}^2 \leq 0$$

$\bar{\tau}^{max}$  nel piano  $\Leftrightarrow$  tensioni principali di segno opposto

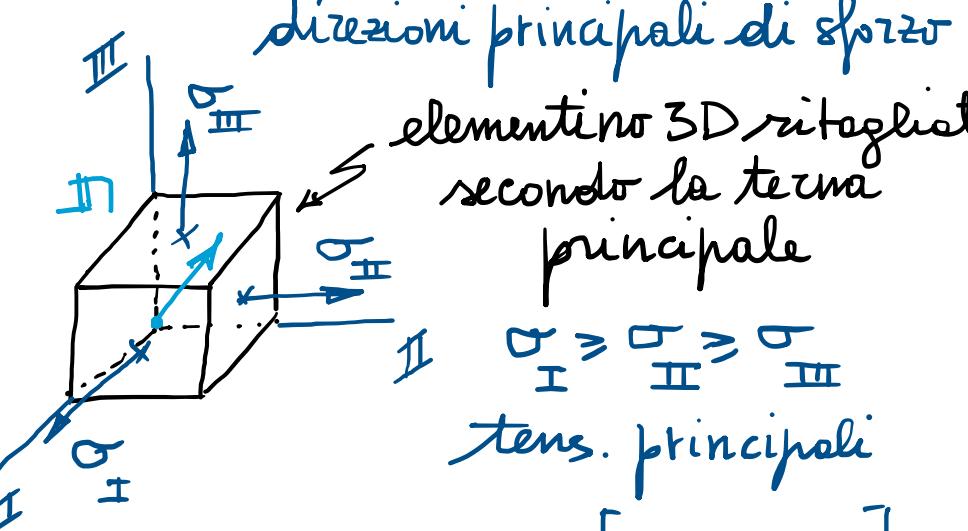


$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}$$

$$\begin{aligned} \text{inclinaz.} \quad \gamma &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} \right) \\ \text{diz. princ.} \quad \delta &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} \right) \end{aligned}$$

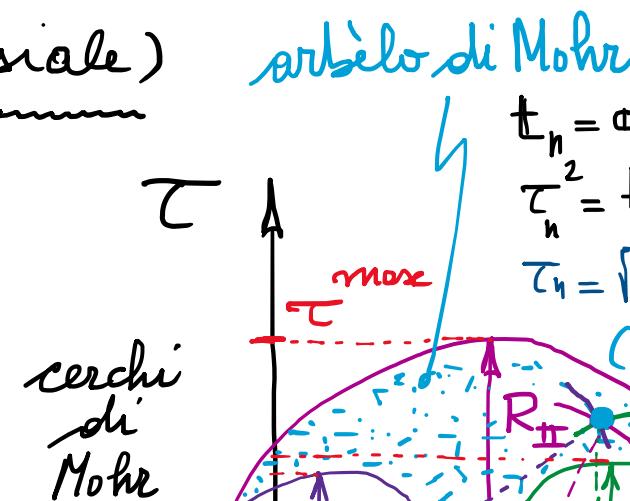
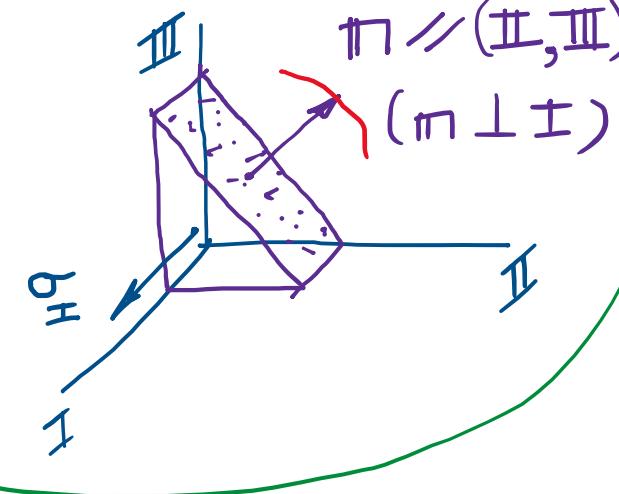
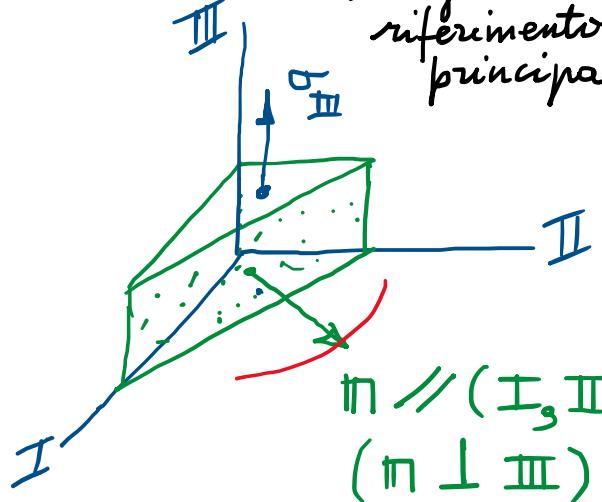
$$\begin{aligned} \text{inclinaz.} \quad \delta &= \frac{\pi}{4} - \gamma \quad (2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2}) \\ \text{diz. secondo} \quad \gamma &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} \right) \\ \text{cm agisce le } \bar{\tau}^{max} \quad \delta + \gamma &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

# Cerchi e Arbèlo di Mohr (sforzo triassiale)



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

matrice sforzo diagonale nel riferimento principale



$$\begin{aligned} t_n &= \sigma_n + \tau_n \\ \tau_n^2 &= t_n^2 - \sigma_n^2 \\ \tau_n &= \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} \end{aligned}$$

N.B. τ definite in modulo in 3D

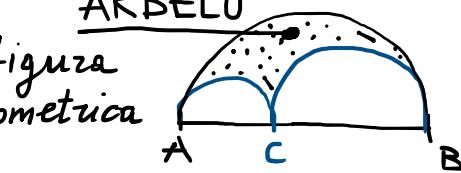
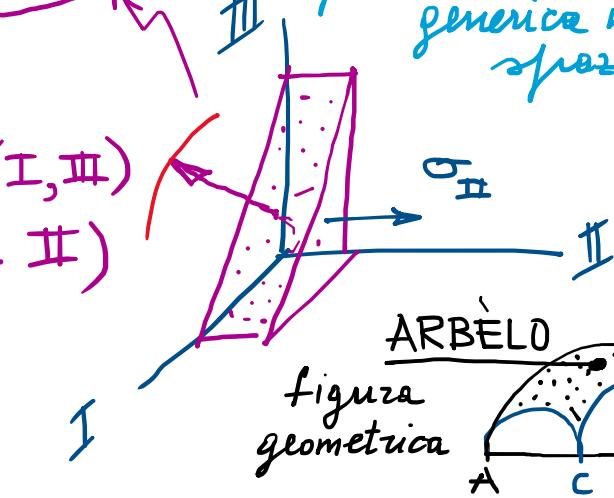
piano di Mohr

$$R_i = \frac{|\sigma_j - \sigma_k|}{2} = \tau_{jk}^{\text{max}}$$

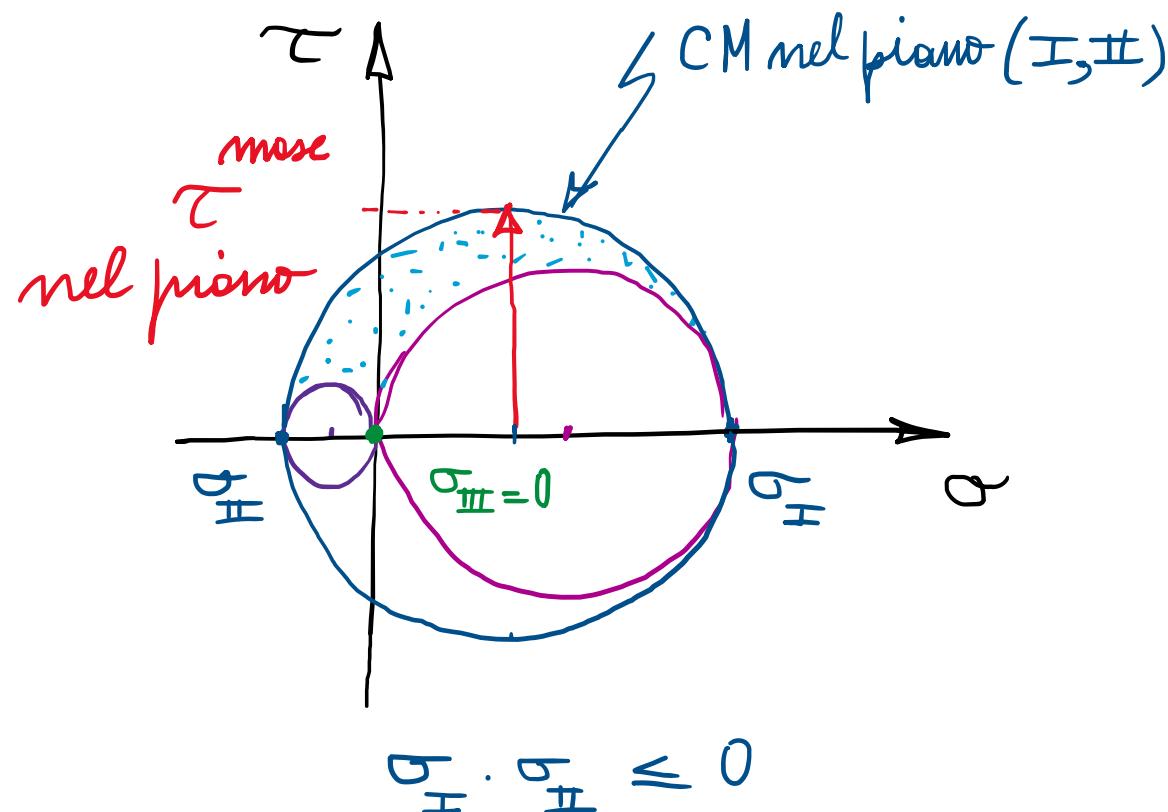
$t_n > 0$

vedi es. Malvern, 1969  
(costruzione)

punto  $(\sigma, \tau) \in$  arbèlo di Mohr  
per normale generica nello spazio

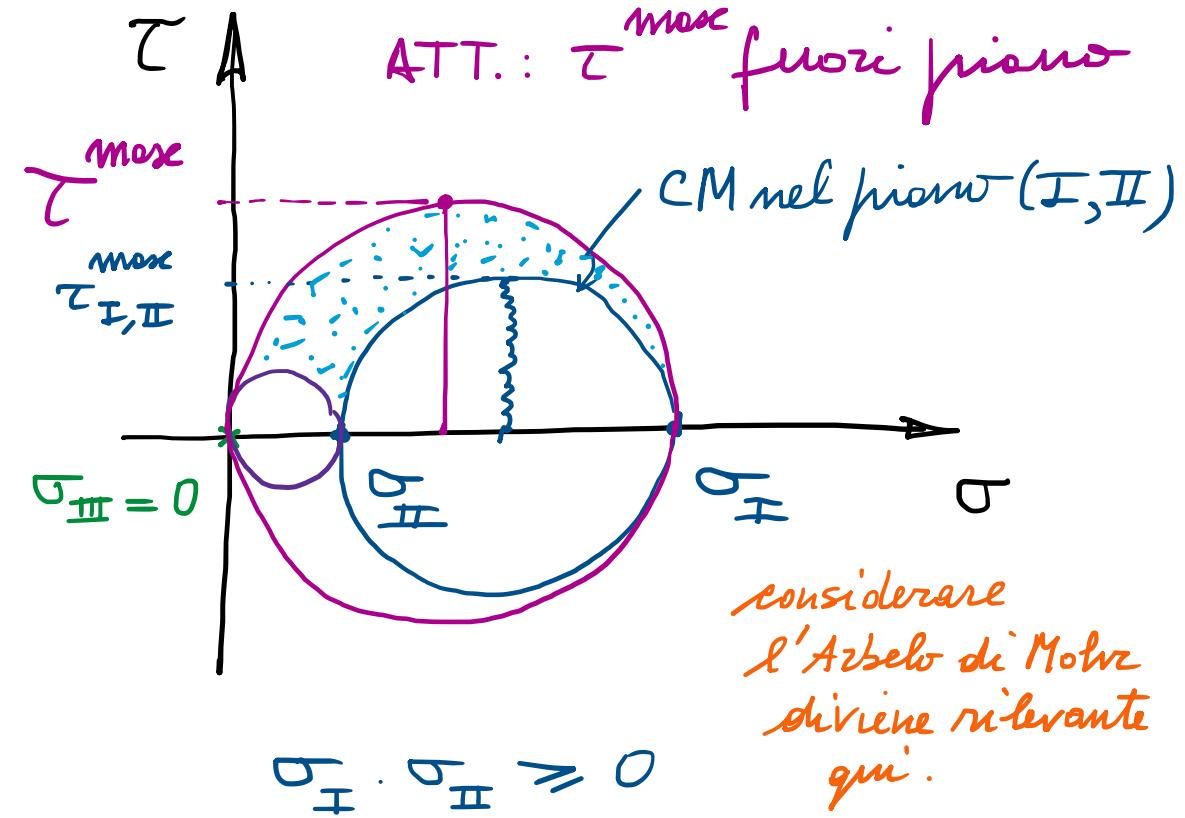


- Rilevanza dell'Arbolo di Mohr per stato di sforzo piano ( $\sigma_{III} = 0$ ) [ai fini della verifica di resistenza]



tensioni principali  
di segno opposto

il CM nel piano è il CM più "grande" ( $R^{max}$ )  
 $\Rightarrow \tau^{max}$  colte nel piano



tensioni principali  
di segno uguale

il CM nel piano non è il più "grande"  
 $\Rightarrow \tau^{max}$  avviene fuori piano

considerare  
l'Arbolo di Mohr  
diviene rilevante  
qui.