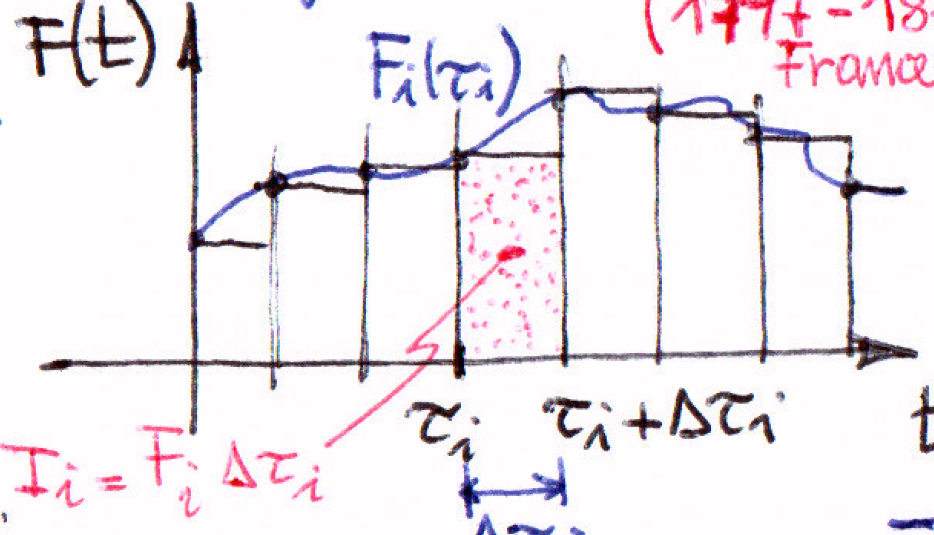
9a Lez. FDIS – Integrale di Duhamel (1797–1872) Francia

- Forzante generica per sequenza di impulsi (I_i finiti generano approx.)



I_i ; δ di DIRAC (impulso unitario)

$F(t) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i} \delta(t,\tau_i)$ (approx.)

Passaggio al limite per $\Delta\tau_i \to 0$:

$= \int_0^t F(\tau)\,\delta(t,\tau)\,d\tau$ (esatta) (v. proprietà delle distr. δ) $\delta(t-\tau)$

Risposta $\xrightarrow{\text{tramite PSE}}$

risposta per c.i. nulle; I_i; funz. risposta ad impulso unitario $h(t)=\frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$, $\omega_d=\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

$u_0(t) \simeq \sum_i F_i(\tau_i)\Delta\tau_i\, h(t,\tau_i)$ (approx)

lim per $\Delta\tau_i \to 0$

$= \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ (esatta)

Integrale di convoluzione o integrale di DUHAMEL

variabile τ d'integrazione ("convoglia" in t gli effetti di impulso $dI = F(\tau)\,d\tau$ agente in τ)

- Si ottiene quindi:

$$\boxed{u_0(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau}$$ int. di DUHAMEL

– risposta analitica in linea di principio (rappresent. analitica formale)

– solitamente integrazione numerica (alternativa all'integrazione diretta dell'eq.ne del moto)

– integrale analitico non possibile

– $F_i(t_i)$ nota per punti, con intervallo di campionamento, non analitica.

- Integrale generale:

$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t) + u_0(t)$ con $\begin{cases} u_0(0)=0 \\ \dot u_0(0)=0 \end{cases}$ è un integr. part.

$\begin{cases} \boxed{u_0 = B} \\ \dot u_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}}$ come determinato in precedenza

- Scritture alternative dell'integrale di D.

– $F(t) = F f(t) \Rightarrow u_0(t) = \frac{1}{m\omega_d} K \frac{F}{K} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau = N(t)\, u_{st}$ con $N(t) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t f(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$ fattore di amplificazione dinamica (dipendente dal tempo) [nonché da ω_1 e ζ]

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$; $\frac{\omega_1^2}{m\omega_d}$; u_{st}

– spesso, per $\zeta \ll 1$ ($\omega_d \simeq \omega_1$), per semplicità di scrittura: $u_0(t) \overset{\zeta\ll 1}{\simeq} \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_1(t-\tau)\,d\tau$ e $N(t) \overset{\zeta\ll 1}{\simeq} \omega_1 \int_0^t f(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_1(t-\tau)\,d\tau$

– $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1}\cdot\underbrace{\frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau}_{V(t):\ \text{pseudo-velocità}} = \frac{V(t)}{\omega_1}$ (come se si trattasse di risposta armonica con $V(t) = \omega_1 u_0(t)$) (vedi anche pseudo-spettri di risposta, come spiegato più avanti)

– da formule di sottrazione per $\sin\omega_d(t-\tau) = \sin\omega_d t\cos\omega_d\tau - \cos\omega_d t\sin\omega_d\tau \Rightarrow u_0(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}(\sin\omega_d t\cos\omega_d\tau - \cos\omega_d t\sin\omega_d\tau)\,d\tau$

$= A(t)\sin\omega_d t - B(t)\cos\omega_d t$ (come sovrapposizione di risposte armoniche con ampiezze variabili)

con $A(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\frac{e^{\zeta\omega_1\tau}}{e^{\zeta\omega_1 t}}\cos\omega_d\tau\,d\tau$ e $B(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\frac{e^{\zeta\omega_1\tau}}{e^{\zeta\omega_1 t}}\sin\omega_d\tau\,d\tau$

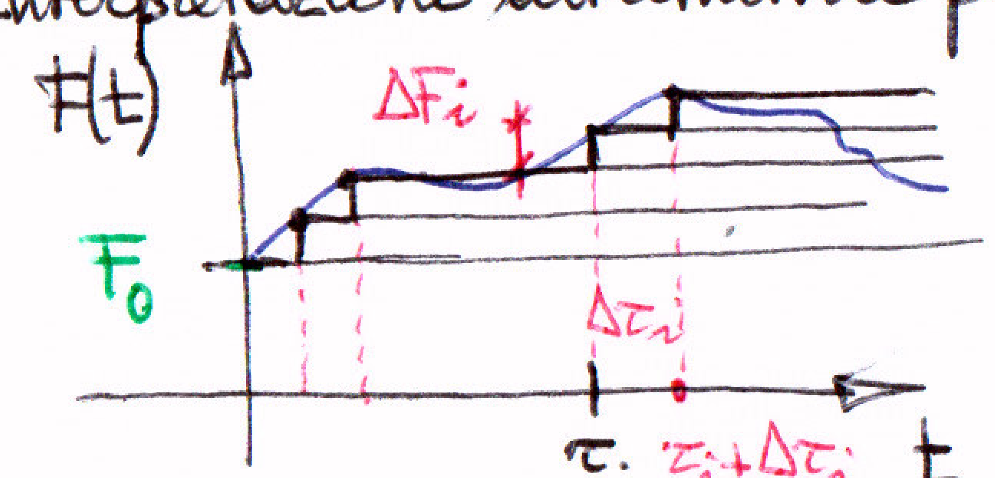
$= \frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{e^{\zeta\omega_1 t}}\int_0^t \underbrace{F(\tau)\, e^{\zeta\omega_1\tau}\cos\omega_d\tau}_{y(\tau)}\,d\tau$; $= \frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{e^{\zeta\omega_1 t}}\int_0^t \underbrace{F(\tau)\, e^{\zeta\omega_1\tau}\sin\omega_d\tau}_{z(\tau)}\,d\tau$

$= \frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{e^{\zeta\omega_1 t}}\int_0^t y(\tau)\,d\tau$; $= \frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{e^{\zeta\omega_1 t}}\int_0^t z(\tau)\,d\tau$

In pratica, si tratta di determinare, in genere numericamente gli integrali $\int_0^t y(\tau)\,d\tau$ e $\int_0^t z(\tau)\,d\tau$.

erizzi@unibg.it

- Interpretazione alternativa per sequenza di gradini:



risposta $u_0(t) \simeq F_0 A(t) + \sum_i \frac{\Delta F_i}{\Delta\tau_i} A(t-\tau_i)\,\Delta\tau_i$ (approx)

lim $\Delta\tau_i \to 0$

$= F_0 A(t) + \int_0^t \dot F(\tau) A(t-\tau)\,d\tau \overset{\text{p.p.}}{=} F_0 A(t) + F(\tau)A(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t F(\tau)\,\dot A(t-\tau)\,d\tau =$ (esatta)

$dA = -\dot A\, d\tau$; $h(t-\tau)$

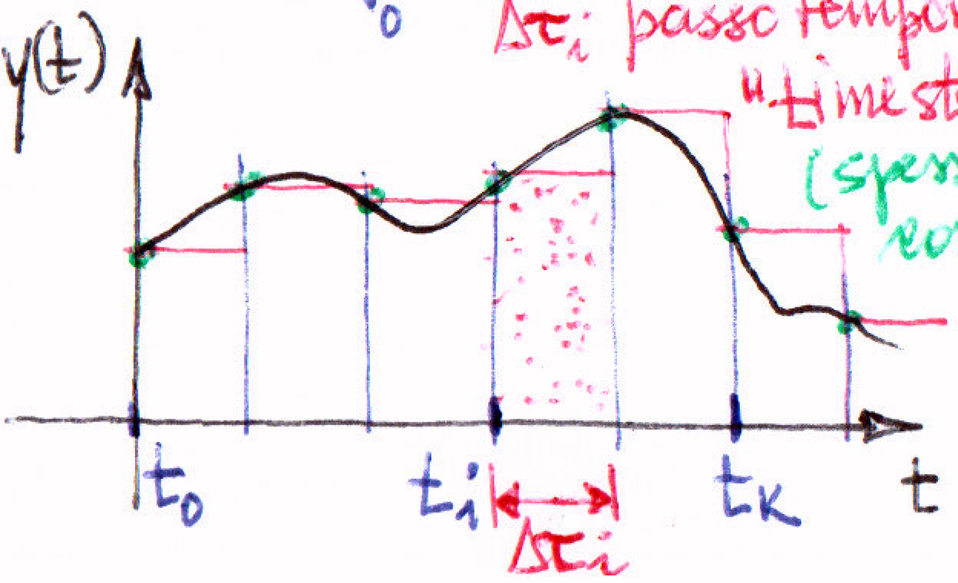
con $A(t) = \frac{1}{K}\left(1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\zeta\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right)$ e $A(0)=0$

$= \cancel{F_0 A(t)} + F(t)\cancel{A(0)} - \cancel{F(0)A(t)} + \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$ c.v.d.

- Valutazione numerica dell'integrale di Duhamel: ⇒ discretizzazione dell'asse dei tempi (n° finito di istanti discreti di tempo) ⇒ valutaz. approssimata

es. $I(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau \simeq \tilde I(t_K)$

$\Delta\tau_i$ passo temporale "time step" (spesso cost.) $\Rightarrow \Delta\tau_i = \Delta\tau = \frac{t_K - t_0}{K-1\ n} =$ cost



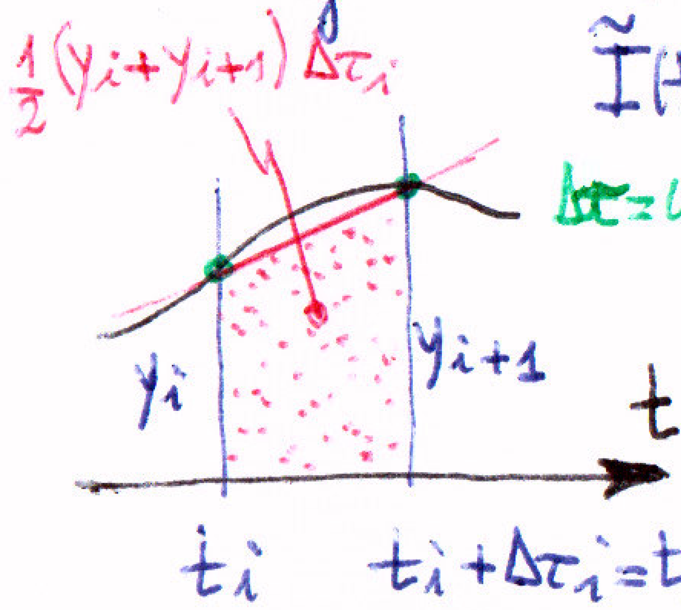
– Regola dei rettangoli

$\tilde I(t_K) = \sum_{i=0}^{K-1} y_i(t_i)\,\Delta\tau_i$ n: n° di passi

$\overset{\Delta\tau = \text{cost}}{=} \Delta\tau\sum_{i=0}^{K-1} y_i(t_i)$

$= \Delta\tau(y_0 + y_1 + \ldots + y_{K-1})$

– Regola dei trapezi



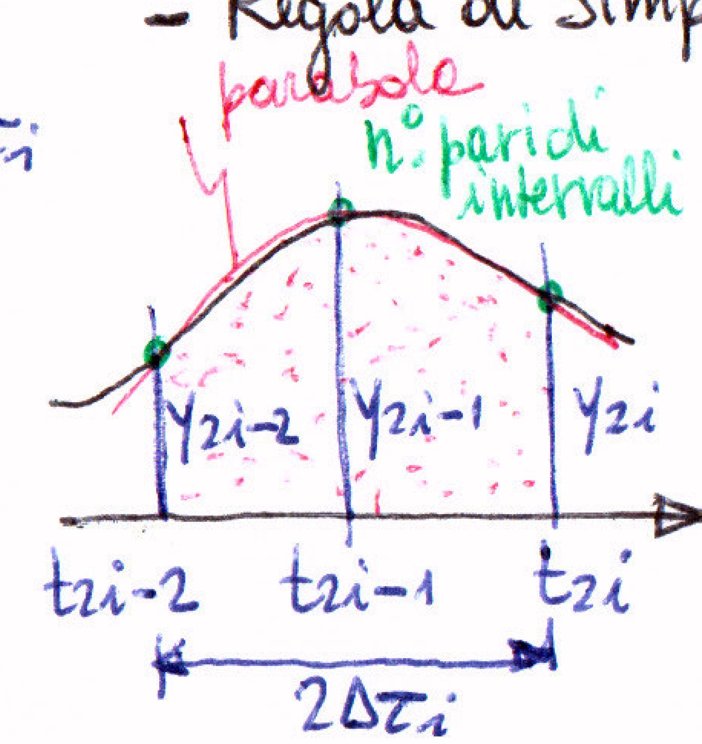
$\tilde I(t_K) = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{1}{2}\left(y_i(t_i) + y_{i+1}(t_{i+1})\right)\Delta\tau_i$

$\overset{\Delta\tau = \text{cost}}{=} \frac{\Delta\tau}{2}\sum_{i=0}^{K-1} y_i + y_{i+1}$

$= \frac{\Delta\tau}{2}(y_0 + y_1 + y_1 + \ldots + y_K)$

$= \frac{\Delta\tau}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{K-1} + y_K)$

– Regola di Simpson (parabola per tre punti)



$\tilde I_{2i} - \tilde I_{2i-2} = (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})\frac{2\Delta\tau_i}{6}$ Formula di SIMPSON

$\tilde I(t_{2K}) = \sum_{i=1}^{K}\frac{\Delta\tau_i}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$

$\overset{\Delta\tau = \text{cost}}{=} \frac{\Delta\tau}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{2K-2} + 4y_{2K-1} + y_{2K})$

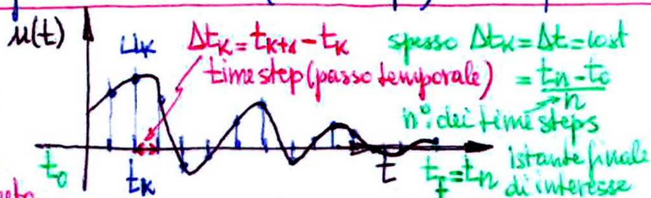
10a Lez. FDIS – Integrazione diretta (nel tempo) dell'eq.ne del moto (integrazione passo-passo; step-by-step integration)

- u spostamento
- $\dot u$ velocità
- $\ddot u$ accelerazione

• Discretizzazione dell'asse del tempo e della risposta:

$t, u(t) \Rightarrow t_k, u_k(t_k)$

n° ∞ di valori di t e u — n° finito, discreto, di valori t e u



$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ time step (passo temporale); spesso $\Delta t_k = \Delta t = \text{cost} = \frac{t_n - t_0}{n}$ n° dei time steps; $t_f = t_n$ istante finale di interesse

• Eq.ne differenziale del moto in forma incrementale (variabili in t_{k+1} – variabili in t_k)

$$m\,\Delta\ddot u + c\,\Delta\dot u + K\,\Delta u = \Delta F$$

Δ: variazione delle grandezze nel passo, es. $\Delta u = u_{k+1} - u_k$

• Si vuole determ. una soluzione numerica approx. nello spirito del metodo delle differenze finite ⇒ approx di derivate tramite rapporti incrementali.

• Nota la soluzione al tempo t_k si vuole fare avanzare la soluzione nel passo Δt_k, sino a t_{k+1}, dato ΔF_k:

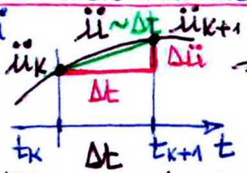
N.B. La stessa $F(t)$ è spesso nota solo per punti $F_k(t_k)$, cioè in forma discreta.

aggiornamento delle variabili al termine del passo Δt_k: $u_{k+1} = u_k + \Delta u$; $\dot u_{k+1} = \dot u_k + \Delta\dot u$; $\ddot u_{k+1} = \ddot u_k + \Delta\ddot u$ ⟵ $\Delta u, \Delta\dot u, \Delta\ddot u$ ⟵ ΔF assegnato

• Concetto fondamentale: sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di x: $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x)\Delta x^3 + \dots$ (*) termini di ordine superiore

• Metodo dell'accelerazione lineare:

si suppone $\ddot u$ lineare nel passo ($\dddot u = \text{cost}$)



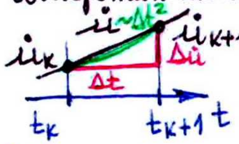
$\Rightarrow \boxed{\dddot u = \frac{\Delta\ddot u}{\Delta t} = \text{cost}}$

$\Delta\ddot u = \dddot u\,\Delta t$ lineare in Δt

Infatti, dalle (*) con $f(x) \Leftrightarrow \ddot u(t)$: $\Delta\ddot u = \dddot u\,\Delta t + \dots$

erizzi@unibg.it

Corrispondentemente:

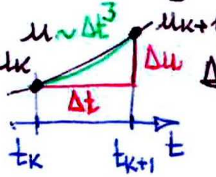


$\dot u$ parabolica nel passo

$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\dddot u\,\Delta t^2 + \dots$ quadr. in Δt

$= \ddot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\ddot u\,\Delta t$

$\boxed{\Delta\dot u = \Delta t\left(\ddot u + \frac{1}{2}\Delta\ddot u\right)}$



u cubico nel passo

$\Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot u\,\Delta t^3 + \dots$

$= \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \frac{1}{6}\Delta\ddot u\,\Delta t^2$

$= \Delta t\left(\dot u + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t + \frac{1}{6}\Delta\ddot u\,\Delta t\right)$

$\boxed{\Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\ddot u + \frac{1}{3}\Delta\ddot u\right)}$

• Metodo di NEWMARK (~1959) ⇒ Generalizzazione con costanti β, γ

$$\begin{cases} \Delta u = \dot u_k\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\ddot u_k + 2\beta\,\Delta\ddot u\right) & (1) \\ \Delta\dot u = \Delta t\left(\ddot u_k + \gamma\,\Delta\ddot u\right) & (2) \end{cases}$$

(1) — $(1-2\beta)\ddot u_k + 2\beta\,\ddot u_{k+1}$ → medie pesate, tramite β e γ, di $\ddot u_k$ e $\ddot u_{k+1}$

(2) — $(1-\gamma)\ddot u_k + \gamma\,\ddot u_{k+1}$

stime di $\ddot u$ nel passo

– media aritmetica se $2\beta = \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\ddot u_k + \ddot u_{k+1}}{2} = \bar{\ddot u}$ accelerazione media $(2\beta - \gamma = 0)$ ⇒ metodo dell'accelerazione media

– Evidentemente per il metodo dell'accelerazione lineare: $2\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \frac{1}{6}$; $\gamma = \frac{1}{2}$ $\left(2\beta - \gamma = -\frac{1}{6}\right)$

$\dddot u = 0$, $\ddot u = \frac{\ddot u_k + \ddot u_{k+1}}{2} = \ddot u_k + \frac{\Delta\ddot u}{2}$

$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \dots = \Delta t\left(\ddot u_k + \frac{1}{2}\Delta\ddot u\right) \Rightarrow \gamma = 1/2$

$\Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \dots$

$= \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\ddot u_k + \frac{1}{2}\Delta\ddot u\right) \Rightarrow 2\beta = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}$

Risolvendo la (1) rispetto a $\Delta\ddot u$:

$$\Delta\ddot u = \frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u\,\Delta t}{\beta\,\Delta t^2} - \frac{1}{2}\frac{\ddot u\,\Delta t^2}{\beta\,\Delta t^2} = \boxed{\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u}{\beta\Delta t} - \frac{\ddot u}{2\beta} = \Delta\ddot u} \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (2):

$$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \frac{\gamma\,\Delta t\,\Delta u}{\beta\,\Delta t^2} - \frac{\gamma\,\Delta t\,\dot u}{\beta\,\Delta t} - \frac{\gamma\,\Delta t\,\ddot u}{2\beta}$$

$$= \boxed{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot u + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta}\ddot u\,\Delta t = \Delta\dot u} \quad (4)$$

$1 - \frac{\gamma}{2\beta} = \frac{2\beta - \gamma}{2\beta}$

Le (3)-(4) esprimono $\Delta\dot u, \Delta\ddot u$ in f.ne di Δu e di variab. note all'inizio del passo

Sostituendo le (3), (4) nell'eq.ne del moto in forma incrementale:

$$m\left(\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u}{\beta\Delta t} - \frac{\ddot u}{2\beta}\right) + c\left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot u + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta}\ddot u\,\Delta t\right) + K\,\Delta u = \Delta F$$

nella sola incognita Δu

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\beta}\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{\gamma}{\beta}\frac{c}{\Delta t} + K\right)}_{\tilde K \text{ rigidezza efficace}} \Delta u = \underbrace{\Delta F + \frac{1}{\beta} m\left(\frac{\dot u}{\Delta t} + \frac{1}{2}\ddot u\right) + \frac{1}{\beta} c\left(\gamma\dot u - \frac{2\beta - \gamma}{2}\ddot u\,\Delta t\right)}_{\Delta\tilde F \text{ forza efficace incrementale}}$$

dip.: m, c, K; $\Delta t, \beta, \gamma$ — ΔF; m, c, K; $\Delta t, \beta, \gamma$; $\dot u, \ddot u$ ⟵ note all'inizio del passo

$\boxed{\tilde K \cdot \Delta u = \Delta\tilde F} \Rightarrow \boxed{\Delta u = \tilde K^{-1} \cdot \Delta\tilde F}$ scritture simili a quelle che si avrebbero in un pb. statico

Determinato Δu, questo può essere sostituito nelle (4), (3) per det. $\Delta\dot u$ e $\Delta\ddot u$

• Accelerazione lineare ($\beta = 1/6$, $\gamma = 1/2$): $\gamma/\beta = 3$, $2\beta - \gamma = -1/6$

$$\tilde K = 6\frac{m}{\Delta t^2} + 3\frac{c}{\Delta t} + K; \quad \Delta\tilde F = \Delta F + 6m\left(\frac{\dot u}{\Delta t} + \frac{1}{2}\ddot u\right) + 6c\left(\frac{1}{2}\dot u + \frac{1}{12}\ddot u\,\Delta t\right)$$

$$= \Delta F + m\left(6\frac{\dot u}{\Delta t} + 3\ddot u\right) + c\left(3\dot u + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t\right)$$

• Accelerazione media ($\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$): $\gamma/\beta = 2$, $2\beta - \gamma = 0$

$$\tilde K = 4\frac{m}{\Delta t^2} + 2\frac{c}{\Delta t} + K; \quad \Delta\tilde F = \Delta F + m\left(4\frac{\dot u}{\Delta t} + 2\ddot u\right) + 2c\,\dot u$$

• Algoritmo di integrazione (partendo da c.i. $u_0, \dot u_0$)

ciclo (loop) su tutti i time steps:

- t_k: $u_k, \dot u_k, \ddot u_k$ (dall'eq.ne del moto); ΔF_k
- calcolo di $\tilde K, \Delta\tilde F_k$ ($\tilde K$ una volta per tutte)
- soluzione per $\Delta u_k = \tilde K^{-1}\Delta\tilde F_k$
- dalle (4), (3) determ. di $\Delta\dot u, \Delta\ddot u$
- aggiornamento delle variabili $u_{k+1}, \dot u_{k+1}, \ddot u_{k+1}$

cf. per stima della bontà della soluzione

Metodo	β	γ	tipo	Δt_{cr}
acc. media	1/4	1/2	implic.	incond. stabile
acc. lineare	1/6	1/2	implic.	$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot T_1$
differenze centrali	0	1/2	esplic.	$\frac{1}{\pi} \cdot T_1$

stima tipica per Δt_{cr}

$\Delta t \simeq \frac{1}{10} T_1$ stima tipica per accuratezza

• Caratteristiche del metodo di N.

– implicito/esplicito ⟵ solo sse $\beta = 0$

– accuratezza (bontà del metodo): del 2° ordine sse $\gamma = 1/2$

– stabilità (risposta limitata in t, indipendentemente dal Δt scelto);

• incondizionatamente stabile ($\forall \Delta t$) per $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$ (Δt piccolo comunque richiesto per accuratezza della soluz. numerica)

• condizionatamente stabile per $2\beta < \gamma$, $\gamma \geq 1/2$

con $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_1} = \frac{\Omega_{cr}}{2\pi} T_1$

$$\Omega_{cr} = \frac{\zeta\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \zeta^2\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}$$

Stima conservativa per $\zeta = 0 \Rightarrow \Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}}$ o per $\gamma = \frac{1}{2}$ (indip. da ζ)

$$\Delta t_{cr} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\gamma/2 - \beta}} T_1 = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} T_1$$

• Per $\beta = 0$: $\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \gamma\frac{c}{\Delta t} + \cancel{\beta K}\right)\Delta u = \cancel{\beta\Delta F} + m\left(\frac{\dot u}{\Delta t} + \frac{1}{2}\ddot u\right) + c\left(\gamma\dot u + \frac{\gamma}{2}\ddot u\,\Delta t\right)$

metodo esplicito (in avanti, forward)

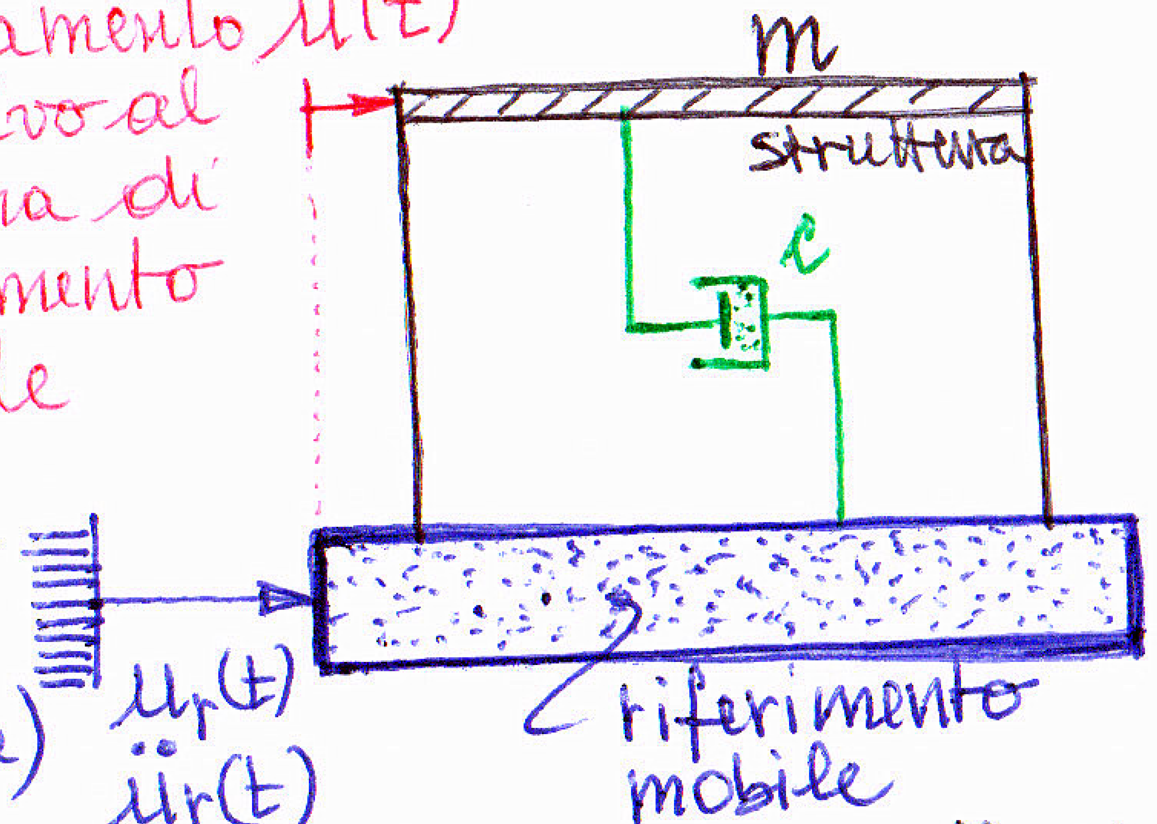
$$\cancel{\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \gamma\frac{c}{\Delta t}\right)}\Delta u = \cancel{\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \gamma\frac{c}{\Delta t}\right)}\left(\dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2\right)$$

⟸ coerentem. con (1) $\Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2$ stima esplicita di Δu per $\beta = 0$

11a Lez. FDIS – Risposta al moto del riferimento

erizzi@UniBG.it

spostamento $u(t)$ relativo al sistema di riferimento mobile



Spostamento totale di m:

$u_t(t) = u_r(t) + u(t)$

- macchine e organi di macchine
- dispositivi meccanici
- vibrazioni di sottostrutture
- azione sismica: $u_r(t) = u_g(t)$ (moto del terreno = ground)

– Da Principio di d'Alembert

"equilibrio dinamico"

$F_i = -m\ddot{u}_t = -m\ddot{u}_r - m\ddot{u}$ (accelerazione totale; forza d'inerzia)

Ku, $c\dot{u}$ ← effetto delle colonne (molle elastiche) rel. al riferimento mobile

equil. dinam. $c\dot{u} + Ku = -m\ddot{u}_r - m\ddot{u}$

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = -m\ddot{u}_r(t)}$$

← $F(t) = -m\ddot{u}_r(t)$. $\ddot{u}_r(t)$ si traduce in una forzante, per effetto d'inerzia.

il segno – è peraltro ininfluente ai fini delle vibrazioni indotte

$/m \Rightarrow$ $\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = -\ddot{u}_r(t)$

Risposta calcolabile coi metodi classici, una volta nota $\ddot{u}_r(t)$ (Duhamel, analitico o, più spesso, numerico; integrazione diretta)

Risposta ad azione sismica $\ddot{u}_r(t) = \ddot{u}_g(t)$, $u(t)$ gdl relativo al terreno

– Un caso assai rilevante di moto del riferimento nell'ambito delle strutture civili è quello dell'azione sismica, indotta dall'accelerazione del terreno che si produce in seguito ad un evento sismico (terremoto – earthquake): $m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = (-)\, m\ddot{u}_g(t)$. Si ipotizza:

- struttura di estensione limitata rispetto allo sviluppo della zona interessata dall'evento sismico (lunghezza d'onda delle onde sismiche >> dimensione caratteristica dell'estensione della struttura $\Rightarrow$ $\ddot{u}_g(t)$ uguale per tutta la struttura (ipotesi in genere ok per edifici; diverso il caso di ponti, viadotti, cinte murarie, ecc., vale a dire strutture con sviluppo longitudinale rilevante).
- struttura di mole limitata, cioè non tale da influenzare localmente l'input sismico (interazione sisma-struttura).

– Risposta simbolica da Integrale di Duhamel: $u_0(t) = \frac{1}{\cancel{m}\omega_d} \int_0^t (-)\cancel{m}\ddot{u}_g(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega_1}\underbrace{\left((-)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)\, d\tau\right)}_{\text{pseudo-velocità } V(t)} = \frac{1}{\omega_1} V(t)$

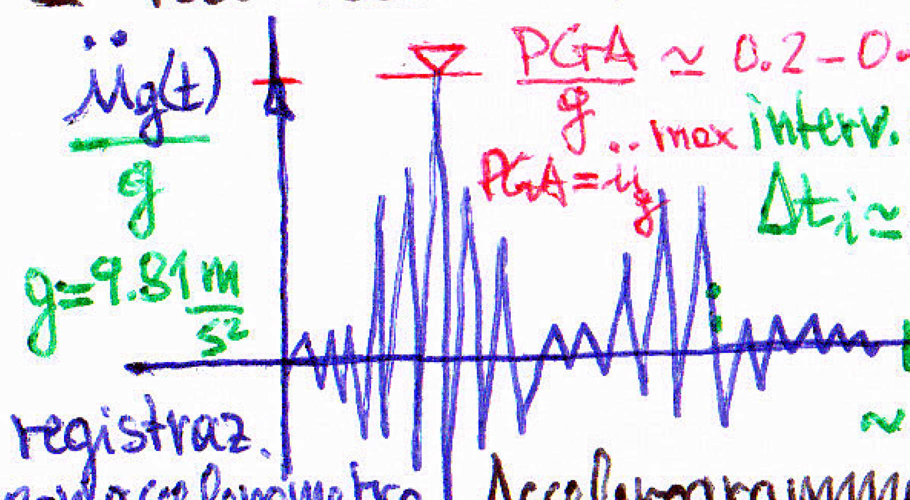
($\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$)

(solitam. struttura iniz. in quiete, quindi $u_0(t) = u(t)$)

Spesso, per strutture civili con $\zeta \ll 1$: $u_0(t) \simeq \frac{1}{\omega_1}\left((-)\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_1(t-\tau)\, d\tau\right) = \frac{1}{\omega_1} V_\zeta(t)$ (ζ piccolo)

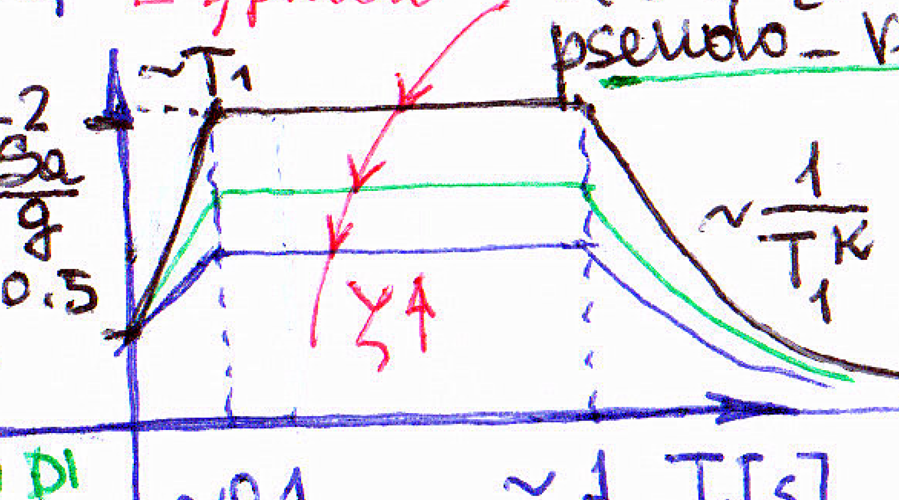
$V(t)$ e $V_\zeta(t) \simeq V(t)$ conducono al concetto di pseudo-velocità spettrale (valore max di V)

– Valutazione dei valori max di $u, \dot{u}, \ddot{u}$ $\Rightarrow$ SPETTRI DI RISPOSTA (BIOT, 1932) (concetto di spettro di risp.)



$\Rightarrow$ risposta della struttura (per integraz.) dati T_1, ζ della str.

$\Rightarrow$ codificaz.



- $S_d(T_1, \zeta) = \max_t \{|u(t, T_1, \zeta)|\}$ displacement
- $S_v(T_1, \zeta) = \max_t \{|\dot{u}(t, T_1, \zeta)|\}$ velocity
- $S_a(T_1, \zeta) = \max_t \{|\ddot{u}_t(t, T_1, \zeta)|\}$ acceleration

Spettri di risposta a data $\ddot{u}_g(t)$ o famiglia di $\ddot{u}_g(t)$

– Pseudo-spettri (per convenienza):

$S_d \to PS_v = \omega_1 S_d \simeq S_v$; $PS_a = \omega_1 PS_v = \omega_1^2 S_d \simeq S_a$ (in genere buona stima, da osservazione delle risposte per vari accelerogr. sismici)

o $S_d = \frac{1}{\omega_1} PS_v = \frac{1}{\omega_1^2} PS_a$. In genere si assume $PS_a \simeq S_a$ e da S_a si ottengono $PS_v = \frac{PS_a}{\omega_1}$ e $S_d = \frac{PS_a}{\omega_1^2}$ (come se si trattasse di risposta armonica)

(ciò consente di lavorare con un unico spettro, in genere quello dell'accelerazione)

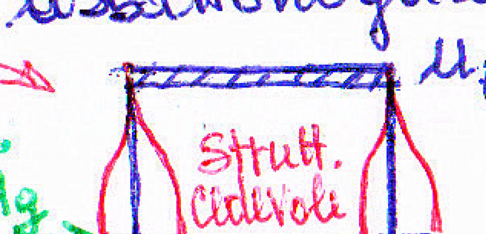
Motivazioni:

- da $u_0 = \frac{1}{\omega_1} V(t) \simeq \frac{1}{\omega_1} V_\zeta(t) \to S_d = \frac{1}{\omega_1} PS_v$, cioè $PSV = V_{\max_t}^{max}$
- da $c\dot{u} + Ku = -m\ddot{u}_t(t) \Rightarrow 2\cancel{\zeta}\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = -\ddot{u}_t(t) \to u(t) \simeq \frac{1}{\omega_1^2}(-\ddot{u}_t)$ ($\zeta \sim 0$) $\to S_d \simeq \frac{1}{\omega_1^2} S_a$ $\Rightarrow PS_a = \omega_1^2 S_d \simeq S_a$
- utilizzo di unico spettro di risposta, tipicamente quello di accelerazione (S_d e S_v correlati a S_a)
- stima del taglio max alla base: $T^{max} = K S_d = K \frac{PS_a}{\omega_1^2} = m PS_a = F_i^{max}$ relaz. tipo $F = ma$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T_1}$ (pulsaz. naturale; K rigidezza, m massa)

– Osservazioni dagli spettri rilevati:

– Periodi propri grandi abbattono gli effetti sism.



colonne molto flessibili $\Rightarrow$ concetto di isolamento sismico delle costruzioni

Es. Golden Gate Bridge $T_1 = 18.2$s, $T_1 = 10.9$s [Chopra] valori elevati

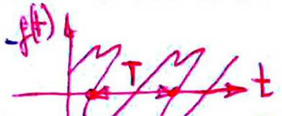
– Periodi propri piccoli pure non amplificano (PGA di poco amplif.)

colonne molto rigide $\Rightarrow$ la struttura subisce minimo PGA o poco più (comunque sollecitata)

erizzi@unibg.it

Risposta nel dominio delle frequenze

Analogamente a quanto visto per forzanti periodiche, si interpreta la forzante generica (aperiodica) tramite ∞ componenti armoniche di pulsazione variabile con continuità su tutto l'asse reale $\Rightarrow$ Trasformata di FOURIER — Si valuta quindi la risposta per sovrapposizione degli effetti, operando nel dominio trasformato delle frequenze.



$\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsaz. fondam.
$\omega_n = n\omega = n\Delta\omega$; $\omega_1 = \omega$, ω_2, ..., $\omega_n = n\omega$

- **Concetto di Trasf. di Fourier** (come limite di serie di Fourier per $T \to \infty$)

Indicando con $g(t)$ la forzante (periodica, di periodo T): $g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$, $g(t) \in P_T$ (funz. generalmente continue di periodo T)

In forma esponenziale: $\boxed{g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, C_n e^{i\omega_n t}}$, $C_n = \frac{1}{2\pi} G_n \Delta\omega$

valor medio $A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt$; coeff. $A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cos\omega_n t\,dt = A_{-n}$, $B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\sin\omega_n t\,dt = -B_{-n}$ $(B_0 = 0)$

Infatti $\begin{cases} e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \\ e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$; $\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$

Sost.: $g(t) = A_0 + \sum_n A_n \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + B_n \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i} = A_0 + \sum_1^{\infty}{}_n \underbrace{\frac{1}{2}\left(A_n + \frac{B_n}{i}\right)}_{C_n} e^{i\omega_n t} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A_n - \frac{B_n}{i}\right)}_{C_{-n}} e^{-i\omega_n t}$

- $A_n + \frac{B_n}{i}\frac{i}{i} = \frac{A_n i + B_n}{i}\frac{i}{i} = -(-A_n + iB_n) = A_n - iB_n = 2C_n$
- $A_n - \frac{B_n}{i}\frac{i}{i} = A_n + iB_n = 2C_{-n} = A_{-n} - iB_{-n} = A_n + iB_n$

$= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, C_n e^{i\omega_n t}$ con $C_n(\omega_n) = \frac{1}{2}(A_n - iB_n) = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t)}_{e^{-i\omega_n t}} g(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,e^{-i\omega_n t}\,dt = C_n(\omega_n) = \frac{1}{2\pi}G_n(\omega_n)\Delta\omega}$

$C_n = \frac{1}{2\pi}G_n\Delta\omega$

Sostituendo $C_n(\omega_n)$ nella serie esponenziale di Fourier:

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$; $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n e^{i\omega_n t}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right)e^{i\omega_n t}\Delta\omega$

con $T \to \infty$ rappresentazione di forzante generica aperiodica

$T \to \infty$: $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(G) = g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\,e^{+i\omega t}\,d\omega}$ segno $\oplus$ in $d\omega$ $\Leftarrow$ Se $\exists$ $\boxed{\mathcal{F}(g) = G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-i\omega t}\,dt}$ segno $\ominus$ in dt — trasformata di Fourier di $g(t)$

Antitrasformata di Fourier o trasf. inversa di F. di $G(\omega)$

(CS: $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt < +\infty \Rightarrow g(t) \in P_\infty$) condizione di Dirichlet

asse reale di pulsaz. ω; $d\omega$; $\omega_n = n\omega = n\Delta\omega \xrightarrow{T\to\infty} \omega$

Significato fisico: $g(t)$ aperiodica $\uparrow$ La forzante viene interpretata come sovrapposizione di ∞ componenti armoniche con pulsazioni ω variabili con continuità, di ampiezza $\frac{1}{2\pi}G(\omega)\,d\omega$ [Trasf. di F.]

— mentre $g(t)$ periodica di periodo T è rappresentata da ∞ armoniche con pulsaz. discrete $\omega_n = n\omega$ [Serie di F.]

v. es Chopra, p. 791

Esempio notevole: $G(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$; δ: Distr. delta di Dirac (valore ∞ in $\omega = \omega_0$, 0 altrove) (proporzionale alla)

$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega t}\,d\omega = e^{i\omega_0 t}$ $\leftarrow$ forzante armonica di pulsazione ω_0 (e ampiezza 1) — propr. δ di Dirac

Quindi la trasf. di Fourier di una funz. armonica è la delta di Dirac: $G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \omega = \omega_0 \\ 0 & \text{se } \omega \neq \omega_0 \end{cases}$ $\left(\int_{-T/2}^{T/2}\cos\bar\omega t\,dt = \int_{-T/2}^{T/2}\sin\bar\omega t\,dt = 0\right) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ proporz. a δ

- **Da integrale di convoluzione (Duhamel)**: (forzante come sovrapposizione di ∞ impulsi $g(\tau)\,d\tau$ in τ)

$u(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,\underbrace{h(t - \tau)}_{\text{funz. risposta ad impulso unitario}}\,d\tau$

- $\int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{\infty}$ perché $h(t - \tau) = 0$ per $t < \tau$ (effetto in t non ancora percepibile per sorgente in $\tau > t$)
- $\int_{t_0}^{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty}$ — se $g(t) = 0$ per $t < t_0$; se interessa risposta lontano da t_0 (e.i.), cioè per $t_0 \to -\infty$

$\downarrow$

$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,h(t - \tau)\,d\tau$

$H(\omega)$: cedevolezza dinamica o ricettanza

Risposta in termini di trasformata di $u(t)$: $\boxed{U(\omega) = H(\omega)\,G(\omega)}$ da integrale di convoluzione in t a prodotto algebrico nel dominio delle frequenze!

Se $\exists$ $G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt$ Trasf. di $g(t)$ $\Rightarrow g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$

$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\underbrace{t - \tau}_{v})\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega\right)d\tau = \left[v = t - \tau;\ \tau = t - v;\ dv = -d\tau\right] = \int_{+\infty}^{-\infty} h(v)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{i\omega t}e^{-i\omega v}\,d\omega\,(-dv) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(v)e^{-i\omega v}\,dv}^{H(\omega)\text{ trasf. di Fourier di } h(t)}\,G(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(\omega)G(\omega)}_{U(\omega)\text{ trasf. di F. di } u(t)} e^{i\omega t}\,d\omega}^{u(t)}$

- Trasformata di Fourier di $h(t)$, f.ne risposta ad un impulso unitario: (N.B. $h(t)=0$ per $t<0$)

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{+\infty} h(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t\ ;\quad \omega_d=\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}\ -\ \omega_d^2=\omega_1^2-\zeta^2\omega_1^2\Rightarrow\omega_d^2+\zeta^2\omega_1^2=\omega_1^2\ (*)$$

ζ fattore di smorzamento; ω_d pulsaz. naturale del sistema smorzato

$\omega_1=\sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsazione naturale del sistema non smorzato $\left(\omega_1^2=\frac{K}{m}\right)$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t\,e^{-i\omega t}\,dt=\left[\sin\omega_d t=\frac{e^{+i\omega_d t}-e^{-i\omega_d t}}{2i}\right]=$$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\Big(\underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}e^{i\omega_d t}e^{-i\omega t}}_{e^{(-\zeta\omega_1+i(\omega_d-\omega))t}}-\underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}e^{-i\omega_d t}e^{-i\omega t}}_{e^{(-\zeta\omega_1-i(\omega_d+\omega))t}}\Big)dt=\left[\int e^{\alpha x}dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(-\zeta\omega_1+i(\omega_d-\omega))t}}{-\zeta\omega_1+i(\omega_d-\omega)}-\frac{e^{(-\zeta\omega_1-i(\omega_d+\omega))t}}{-\zeta\omega_1-i(\omega_d+\omega)}\right]_0^{\infty}=\left[\begin{array}{l}\bullet\ \lim_{x\to\infty}e^{-\alpha x}=0\\ \bullet\ \lim_{x\to 0}e^{\alpha x}=1\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{2i}\left[0-\frac{1}{-\zeta\omega_1+i(\omega_d-\omega)}-0+\frac{1}{-\zeta\omega_1-i(\omega_d+\omega)}\right]=\frac{1}{m\omega_d}\frac{1}{2i}\,\frac{\cancel{\zeta\omega_1}+i(\omega_d+\cancel{\omega})-\cancel{\zeta\omega_1}+i(\omega_d-\cancel{\omega})}{\zeta^2\omega_1^2+i\zeta\omega_1(\cancel{\omega_d}+\omega)-i\zeta\omega_1(\cancel{\omega_d}-\omega)+\underbrace{\omega_d^2}_{(*)}-\omega^2}$$

$$=\frac{1}{m\cancel{\omega_d}}\frac{1}{\cancel{2i}}\,\frac{\cancel{2i}\,\cancel{\omega_d}}{\omega_1^2-\omega^2+i\,2\zeta\omega\omega_1}=\frac{1}{m\omega_1^2}\,\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}+i\,2\zeta\frac{\omega}{\omega_1}}\iff$$

$$\boxed{H(\omega)=\frac{1}{K}\,\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}+i\,2\zeta\frac{\omega}{\omega_1}}=H(\omega;\underbrace{K,\omega_1,\zeta}_{\text{param. del sistema}})}$$

spostam. / forzante: $\frac{u(t)}{g(t)}=H(\omega_0)$ funzione risposta in frequenza — f.r.f.: frequency response function

Proprietà trasf. di Fourier:
$$F\left(\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right)=(i\omega)^n F(g(t))$$
da: $\frac{d^n e^{i\omega t}}{dt^n}=(i\omega)^n e^{i\omega t}$ dato che $g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

In particolare:
$$F(\dot u(t))=i\omega F(u(t))=i\omega U(\omega)$$
$$F(\ddot u(t))=(i\omega)^2F(u(t))=-\omega^2U(\omega)$$

Trasformando l'eq.ne del moto:
$$F(m\ddot u(t)+c\dot u(t)+Ku=g(t))\rightarrow(-m\omega^2+ic\omega+K)\,U(\omega)=G(\omega)$$
Da cui: $U(\omega)=\underbrace{\boxed{\frac{1}{K-m\omega^2+ic\omega}}}_{\text{FRF}}G(\omega)=H(\omega)\cdot G(\omega)$ come in precedenza

- Infatti, per forzante armonica di ampiezza unitaria:

$$g(t)=1\cdot e^{i\omega_0 t}\xrightarrow[\text{vista}]{\text{risposta}}u(t)\underset{\text{(int. part.)}}{=}\boxed{\frac{1}{K}\,\frac{1}{1-\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}+i\,2\zeta\frac{\omega_0}{\omega_1}}}\,e^{i\omega_0 t}=\underbrace{H(\omega_0)}_{\text{ampiezza dello spostamento}}e^{i\omega_0 t}$$

Poichè $G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{-i\omega t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ delta di Dirac

$$\underset{\text{antitrasf.}}{u(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\underbrace{H(\omega)\,G(\omega)}_{U(\omega)}e^{i\omega t}d\omega\overset{\text{propr. }\delta\text{ di Dirac}}{=}H(\omega_0)\,e^{i\omega_0 t}$$

($G(\omega)=\cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)$) come sopra determinato

Quindi $H(\omega)=F(h(t))$, con $H(\omega)$ trasformata di Fourier della funzione risposta ad impulso unitario $h(t)$, assume il significato fisico di funzione risposta in frequenza, in quanto definisce l'ampiezza della risposta a forzante armonica di ampiezza unitaria, in funzione della pulsazione della forzante stessa (e dei parametri del sistema K,ω_1,ζ)

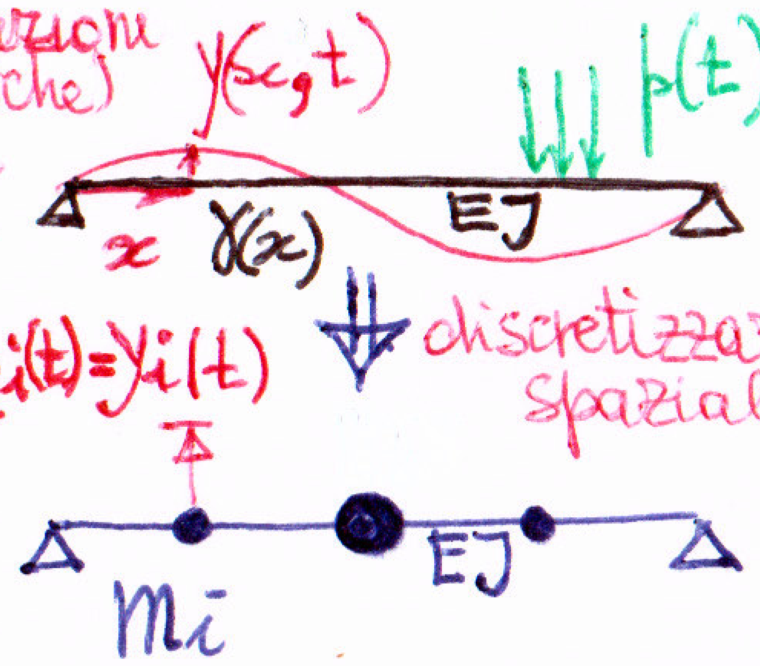
	INPUT (forzante) $g(t)$	Duhamel → SISTEMA STRUTTURALE	OUTPUT (risposta) $u(t)$
DOMINIO DEL TEMPO	$g(t)=\delta(t)$ impulso unitario		$u(t)=h(t)$
	$g(t)=e^{i\omega_0 t}$ armonica		$u(t)=H(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$
	generica: $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ per impulsi $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ per armoniche		$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)h(t-\tau)d\tau$
	trasf. di F: F		F^{-1} antitrasf. di Fourier
DOMINIO DELLE FREQUENZE	$G(\omega)=1$		$U(\omega)=H(\omega)$
	$G(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$		$U(\omega)=H(\omega)2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
	$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\bar\omega)\delta(\omega-\bar\omega)d\bar\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt$		$U(\omega)=H(\omega)G(\omega)$

$U(\omega)=H(\omega)G(\omega)$

 – Sistemi dinamici ad n gdl

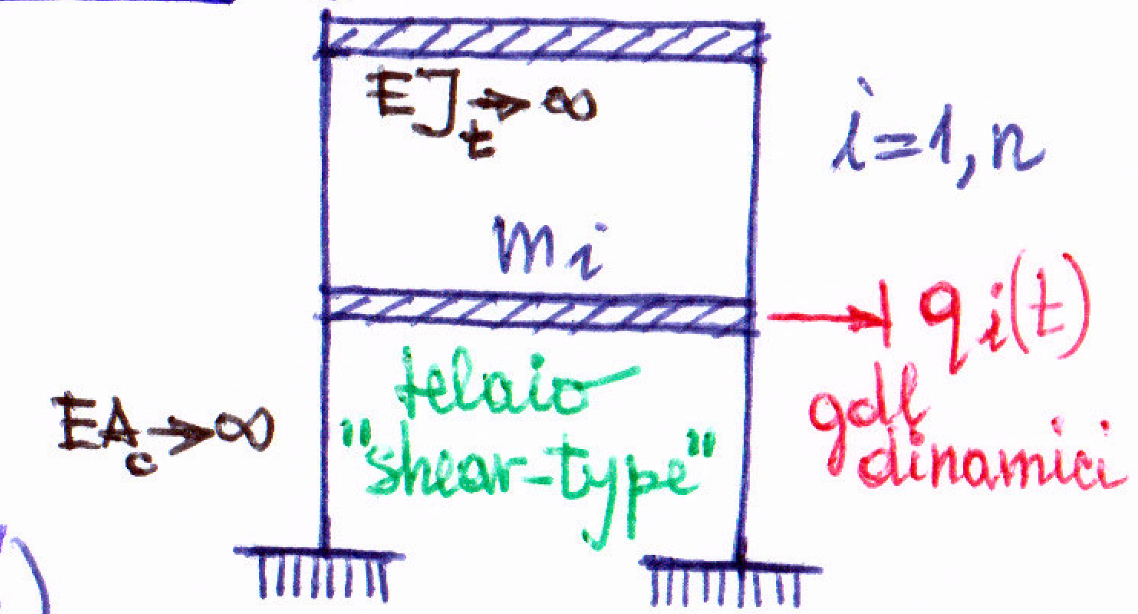
egidio.rizzi@unibg.it

- Generalizzazione dei sistemi ad 1 gdl
- Descrizione di sistemi reali con n° finito di gdl dinamici
- Discretizzazione di sistemi continui (passaggio da n° infinito di gdl a n° finito di gdl, con relativa approssimazione della soluzione).



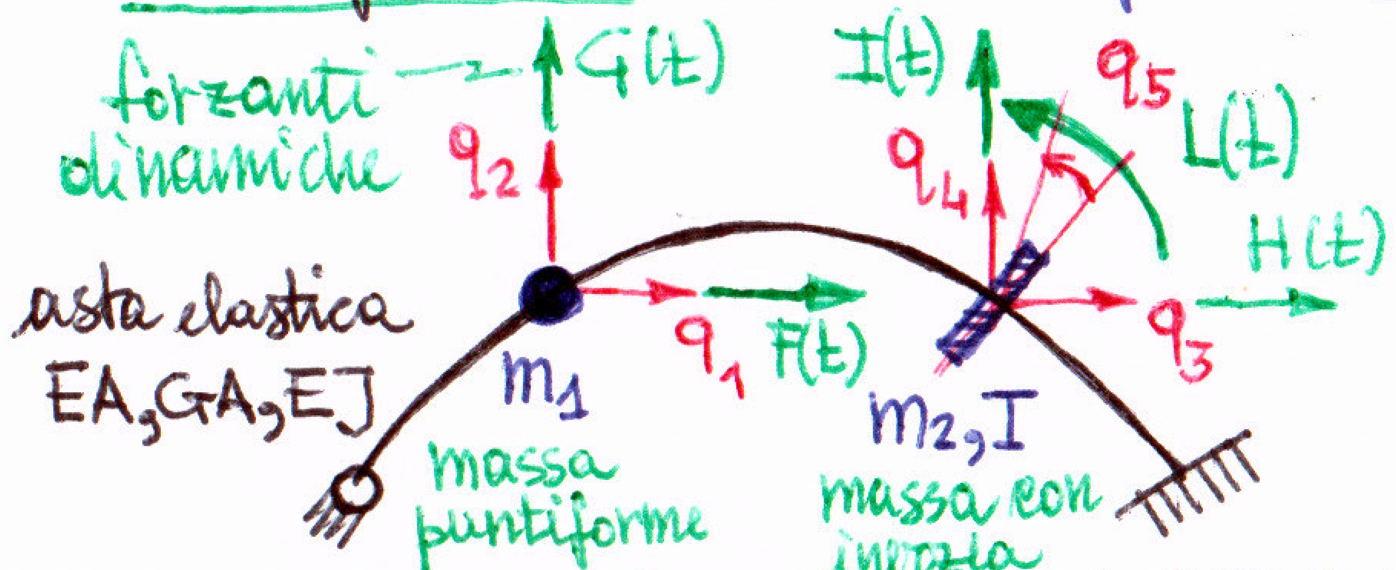
struttura continua e con massa distribuita

struttura discreta con masse concentrate ("lumped mass structure")

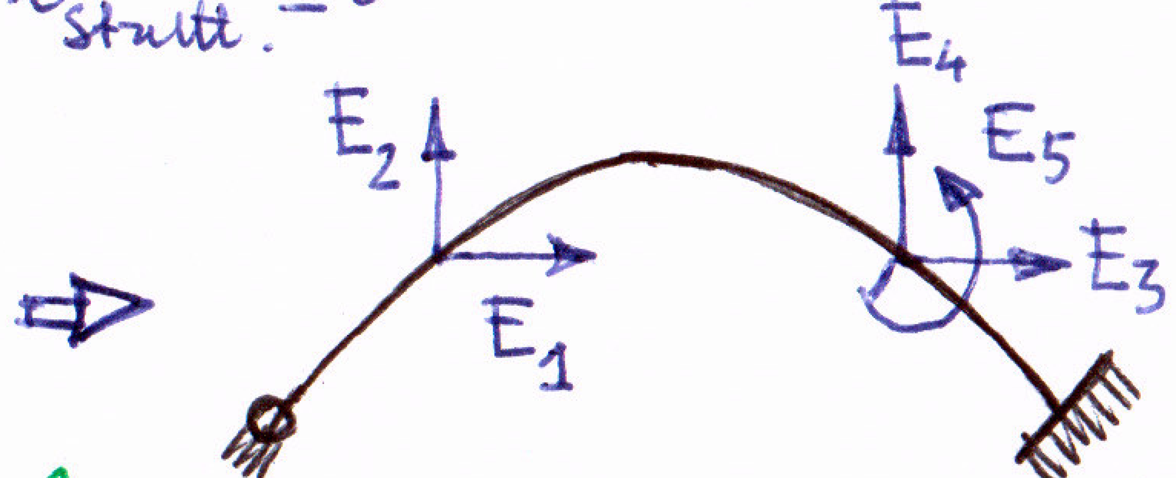


$i=1,n$

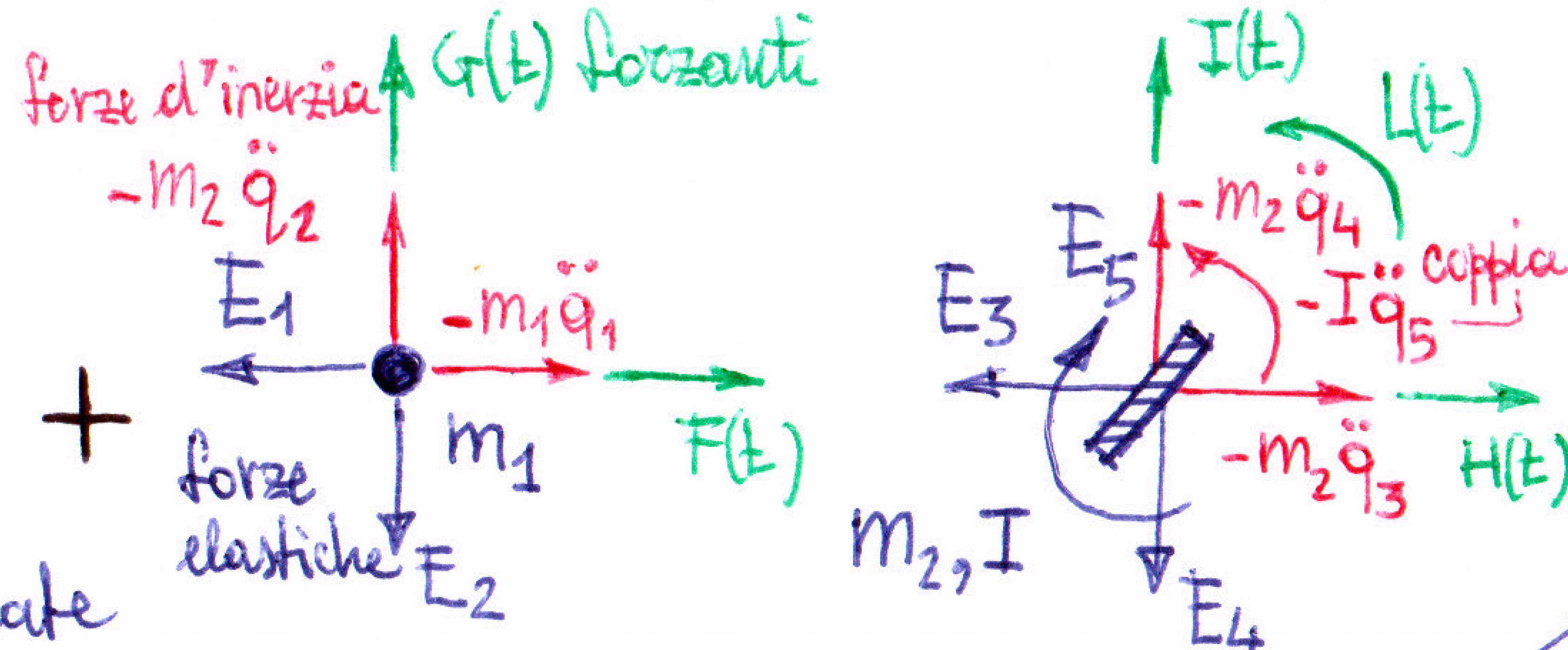
● Caso generale (si consideri per ora smorzamento nullo) $c_{strutt.}=0$



$q_i(t)$ gdl dinamici (coordinate lagrangiane) $[m_i]=[M]$ $[I]=[M][L]^2$



E_i: forze elastiche che, applicate staticamente alla struttura, producono gli spostamenti q_i (v. metodo degli spostamenti)



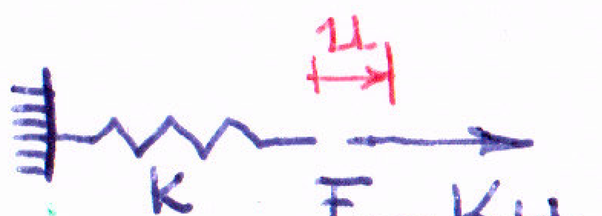
occorre esprimere le $E_i=E_i(q_j)$

Equazioni di equilibrio dinamico (n=5)

$$
\left\{
\begin{aligned}
m_1\ddot{q}_1+E_1&=F(t)\\
m_1\ddot{q}_2+E_2&=G(t)\\
m_2\ddot{q}_3+E_3&=H(t)\\
m_2\ddot{q}_4+E_4&=I(t)\\
I\ddot{q}_5+E_5&=L(t)
\end{aligned}
\right. \quad (*)
$$

(equazioni del moto)

● Forze elastiche e matrice di rigidezza



qui n=1, $u=q_1$ (1 gdl)

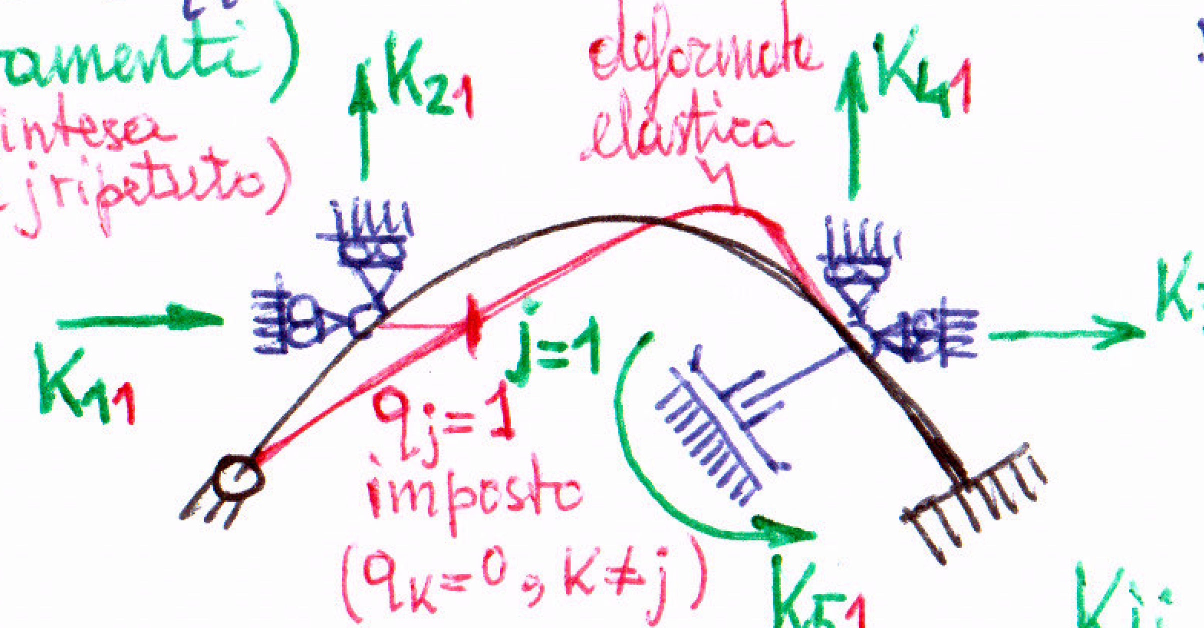
Legge di Hooke (elastica lineare) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}=\mathbb{K}\,\mathbf{q}$, $E_i=\left(\sum_{j=1}^{n}\right)K_{ij}\,q_j$

sommatoria sottointesa (indice j ripetuto)

vettore delle forze elastiche $n\times1$ $\{E_i\}$

matrice di rigidezza elastica $[K_{ij}]$ $n\times n$

vettore dei gdl dinamici $\{q_j\}$ $n\times1$



K_{ij} coefficienti di rigidezza (in genere tabellati sui manuali) $\Rightarrow$ Forze in i per effetto di $q_j=1$

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ n\times1
\end{array}
\left\{\begin{array}{c} E_1\\ \vdots\\ E_i\\ \vdots\\ E_n\end{array}\right\}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} q_1 & q_j & q_n \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc}
K_{11} & K_{1j} & K_{1n}\\
K_{i1} & K_{ij} & K_{in}\\
K_{n1} & K_{nj} & K_{nn}
\end{array}\right]\\
n\times n
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\left\{\begin{array}{c} q_1\\ \vdots\\ q_j\\ \vdots\\ q_n\end{array}\right\}\\
n\times1
\end{array}
$$

matrice di rigidezza compilata per colonne

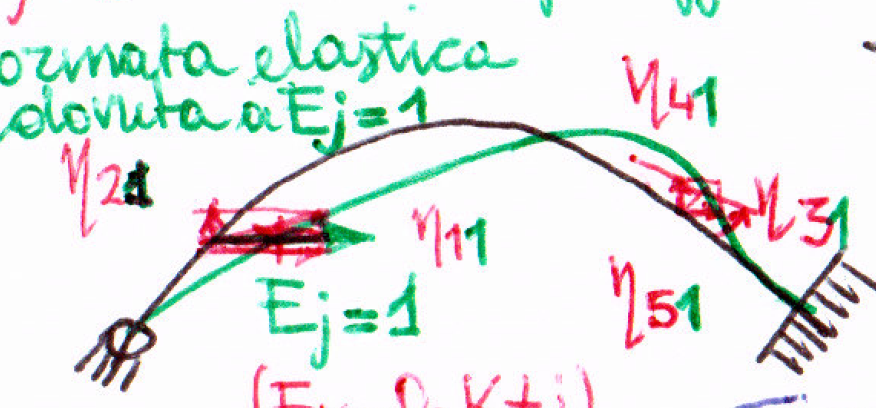
● Relazione inversa (matrice di cedevolezza)

$$\mathbf{q}=\mathbb{K}^{-1}\mathbb{E}=\eta\,\mathbb{E},\quad q_i=\eta_{ij}E_j$$

$\eta=\mathbb{K}^{-1}$; $\mathbb{K}=\eta^{-1}$ $\llcorner$ matrice di cedevolezza

PSE di effetti in i dovuti ad az. in j

$\llcorner$ coefficienti di influenza: spost. in i per $E_j=1$



$\mathbb{K}$ determinabile direttam. (K_{ij}) o per inversione di η (noti η_{ij}).

Th. di Maxwell (reciprocità): $\eta_{ji}=\eta_{ij} \Leftrightarrow \eta^T=\eta$ e $\mathbb{K}^T=\mathbb{K}$

per supposta Ʉnza di energia elastica

matrici Energia elastica: simmetriche e definite positive

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\mathbb{E}^T\mathbf{q}=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbb{E}=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbb{K}\mathbf{q}=\frac{1}{2}\mathbb{E}^T\eta\,\mathbb{E}>0 \quad \forall\,\mathbb{E}\neq0,\mathbf{q}\neq0$$

forma quadratica definita positiva associata alle matrici $\mathbb{K}$ ed η.

● Forze d'inerzia e matrice di massa (o delle masse)

$$-\mathbb{F}_I=\mathbb{M}\,\ddot{\mathbf{q}},\quad -F_{Ii}=M_{ij}\ddot{q}_j \Rightarrow$$

$n\times n$ matrice delle masse; vettore delle accelerazioni

forza d'inerzia in i per effetto di accelerazione unitaria in j

- in generale non diagonale
- $\mathbb{M}^T=\mathbb{M}$ $\Leftrightarrow$ Ʉnza en. cinetica
- definita positiva

forma quad. definita positiva (associabile a matrice simmetrica) $T(\dot{\mathbf{q}})=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbb{M}\dot{\mathbf{q}}>0\ \forall\,\dot{\mathbf{q}}\neq0$ e

potenza $P=\dot{\mathbf{q}}^T(-\mathbb{F}_I)=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbb{M}\dot{\mathbf{q}}\right)=\frac{dT(\dot{\mathbf{q}})}{dt}$

$=(-\mathbb{F}_I)^T\dot{\mathbf{q}}$; $\mathbb{M}=\text{cost}$

● Scrittura compatta delle (*)

$-\mathbb{F}_I+\mathbb{E}(\mathbf{q})=\mathbb{Q}(t)$ forze generalizz.

$$\boxed{\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbb{K}\mathbf{q}=\mathbb{Q}}$$

eq.ni del moto in forma matriciale.

● Infatti, da eq.ni di Lagrange: $\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=T-V=T-\mathcal{E}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbb{M}\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbb{K}\mathbf{q}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}}=\mathbb{Q}=\frac{\delta L(\mathbf{q}^*)}{\delta\mathbf{q}^*}\Rightarrow\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbb{K}\mathbf{q}=\mathbb{Q}$$