

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

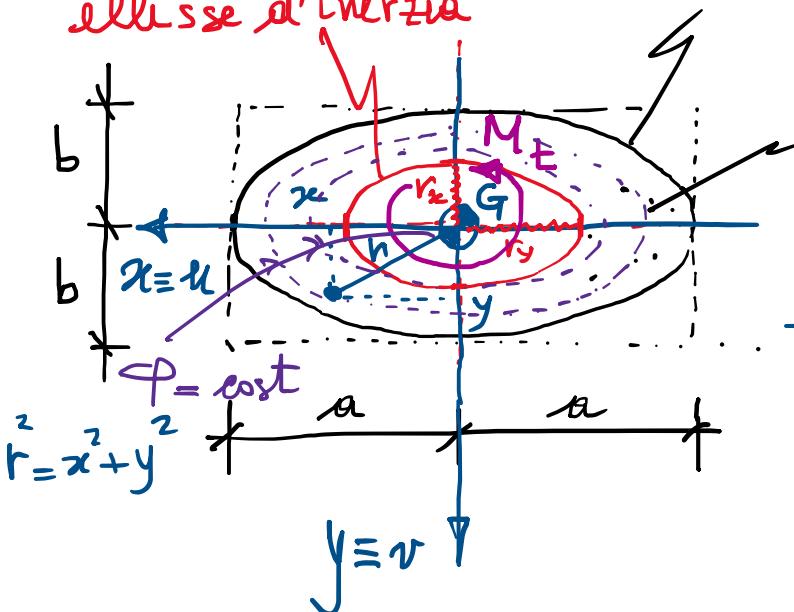
Soluzioni analitiche del pb. della torsione

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\nabla \Phi_1 = 0; \eta = 1, J = J_G$$

Sezione ellittica

ellisse d'inerzia



$$\Gamma: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$A = \int_A dA = \pi ab$$

$$J_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi}{4} a b^3 = \pi a b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = A r_x^2 \Rightarrow r_x = \frac{b}{2}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{4} a^3 b = \pi a b \left(\frac{a}{2}\right)^2 = A r_y^2 \Rightarrow r_y = \frac{a}{2}$$

$$A = \pi R^2$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$J_G = 2J_x = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$r_x = r_y = \frac{R}{2}; r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$J_G = \int_A r^2 dA = J_x + J_y = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) = A r_G^2 \Rightarrow r_G = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Funzione potenziale di sforzo di Airy: $(\beta = \frac{M_t}{GJ} \Rightarrow c = 2G\beta = 2 \frac{M_t}{J})$

$$\Phi = \Phi(x, y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow \nabla \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = K \left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) = -2K \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -c$$

eq. di Poisson con termine noto cost.

- $\Phi = 0$ su Γ c.c. ✓ (Dirichlet)

- $\Phi = \text{cost} \Rightarrow$ traiettorie ellittiche

- $\Phi \sim x^2, y^2 \Rightarrow$ derivate seconde costanti

$$K = \frac{c}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$G\beta = \frac{M_t}{J}$$

• Equivalenza statica:

$$M_E = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_A K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dA = 2K \left(A - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x\right) = 2KA \left(1 - \frac{J_y^2}{a^2} - \frac{J_x^2}{b^2}\right)$$

$$= 2KA \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \cancel{2KA} \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_E}{A} = \frac{M_E}{\pi ab} = \frac{M_E}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow J = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

• Momento d'inerzia torsionale (DSV):

$$J = \frac{\pi}{4} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{\pi a b}{\frac{\pi^3 a b}{4}} = \frac{A^4}{4\pi^2 J_G} = J \quad J_G = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2); A = \pi a b$$

$$a=b=R, J = \pi \frac{R^6}{2R^2} = \frac{\pi R^4}{2} \\ \Downarrow J_G (\gamma=1)$$

$$J = J_G$$

$$\frac{\pi^2}{4\pi^2} \approx 10$$

$$J \approx \frac{A^4}{40 J_G}$$

formule utili a stimare il momento d'inerzia di sezioni complete quali sez. ellittiche equivalenti di fuori A e J_G.

• Fattore di torsione

$$\gamma = \frac{J_G}{J} = \frac{a^2 + b^2}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab + 2ab)^2}{4a^2 b^2} \quad \gamma = \frac{J_G}{J} \approx \frac{J_G}{\frac{A^4}{40 J_G}} = 40 \frac{J_G^2}{A^4} = 40 \left(\frac{J_G}{A^2}\right)^2$$

$$= \frac{[2ab + (a-b)^2]^2}{(2ab)^2} = \left[1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}\right]^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \text{sez. circ. : } \gamma = 1 \quad (J = J_G)$$

$$a=b=R$$

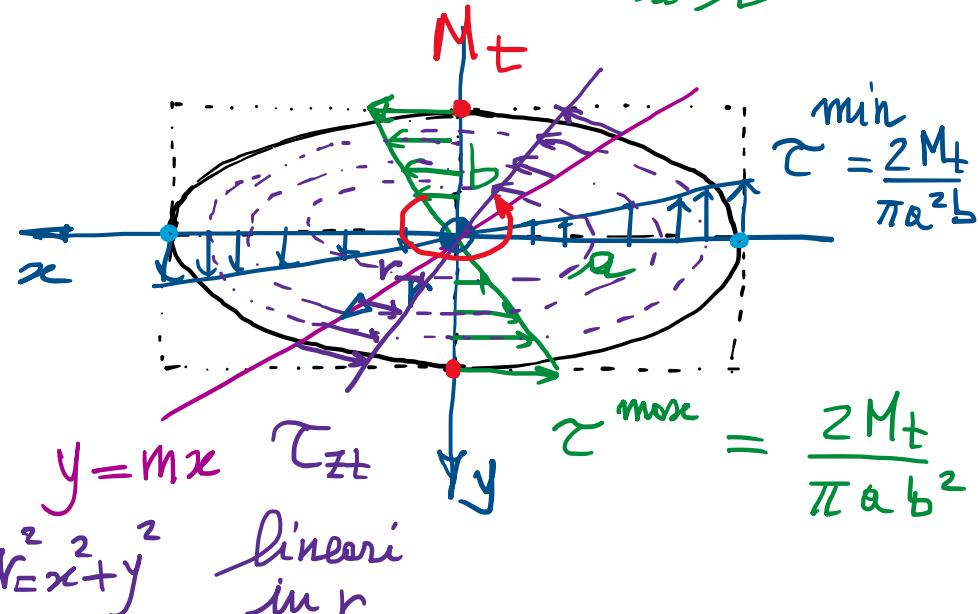
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$$

• Campo delle tensioni tangenziali:

$$\tau = \frac{M_t}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

f.n. di AIRY

$$a \geq b$$



Tangenti alle traiettorie ellittiche e parallele
di distanze radiali r
(con modulo crescente linearmente con r)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = \varphi_3 y = -\frac{2M_t}{\pi ab^3} y = -\frac{2M_t}{\pi ab} \frac{y}{b^2} \\ \tau_{zy} = -\varphi_3 x = \frac{2M_t}{\pi a^3 b} x = \frac{2M_t}{\pi ab} \frac{x}{a^2} \end{array} \right.$$

lineari in x, y

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} &= -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \\ &= -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{m} = \text{const} \quad \text{lungo diametro } y = mx \end{aligned}$$

$$\tau_z = \|\tau_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2M_t}{\pi ab} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

$$\text{su } y = mx = \frac{2M_t}{\pi ab} x \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1+m^2)x^2$$

$$r = \sqrt{1+m^2} x$$

$$\text{lineare in } x \quad \text{in } y$$

Sez. circolare $a=b=R$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{2M_t}{\pi R^4} r, \quad \tau_{zx}^{\max} = \frac{2M_t}{\pi R^3} \\ &= \frac{M_t}{J_g} r \end{aligned}$$

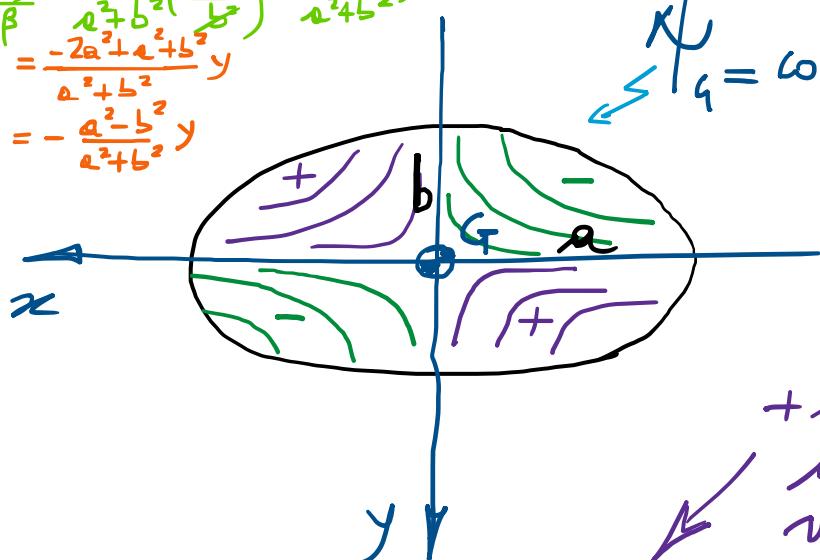
- Funzione di ingobbiamento (Ψ_G):

$$\begin{cases} \Psi_{G,x} = \frac{1}{4\beta} \varphi_{s,y} + y = -\frac{a-b}{a^2+b^2} y \\ \Psi_{G,y} = -\frac{1}{4\beta} \varphi_{s,x} - x = -\frac{a-b}{a^2+b^2} x \end{cases}$$

$$\frac{\varphi}{4\beta} = \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$\text{es. } \frac{\varphi_{s,y}}{4\beta} = \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \left(-\frac{2y}{b^2} \right) = -\frac{2a^2}{a^2+b^2} y$$

$$+ y = \frac{-2a^2 + a^2 + b^2}{a^2+b^2} y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2+b^2} y$$



$\Psi_G = \text{cost}$ paraboloidale iperbolico

+ stime approssimate
di J per sezioni compotte
via sez. ellittica equiv.

Quindi: sez. ellittica costituisce caso rilevante con
soluzione analitica in forma chiusa esatta
(contenente il caso delle sez. circolare come particolare).

differenziale della f. ne $\Psi_G(x, y)$

$$\begin{aligned} d\Psi_G &= \Psi_{G,x} dx + \Psi_{G,y} dy \\ &= -\frac{a-b}{a^2+b^2} (y dx + x dy) \end{aligned}$$

integrandi:

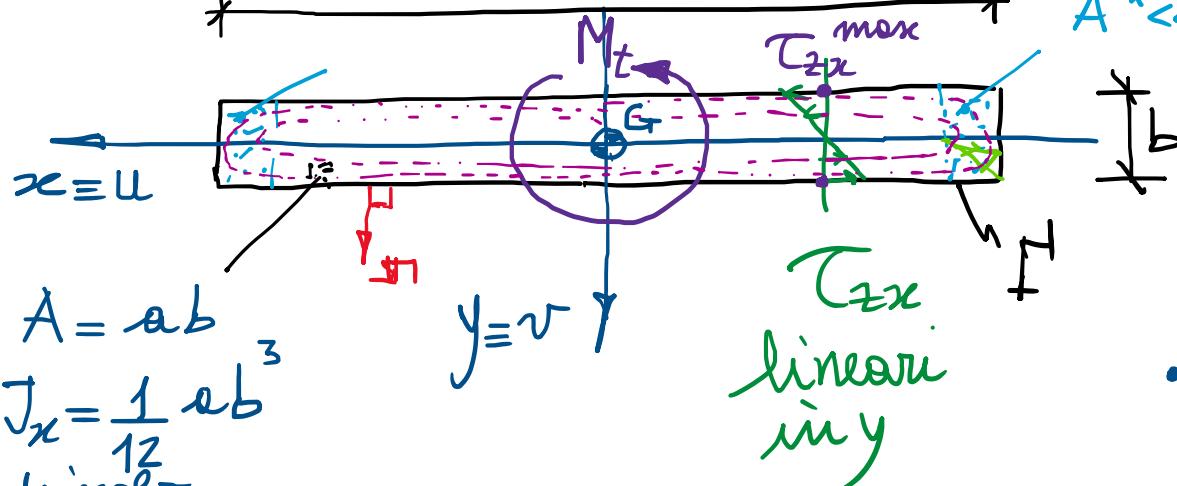
$$\begin{aligned} \Psi_G(x, y) &= -\frac{a-b}{a^2+b^2} xy + \text{cost} \\ &= 0 \quad \boxed{\Psi_G = 0} \end{aligned}$$

N.B. sez. circolare ($a=b=R$)

$\Psi_G = 0$ non c'è ingobbiamento

$$\eta = 1, J = J_G = \frac{\pi R^4}{2}$$

- Profilo rettangolare sottile (^{analitica} soluzione approssimata) $a \gg b > 10b$



Eq. governanti (torsione):

equil. $\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$ in A ✓

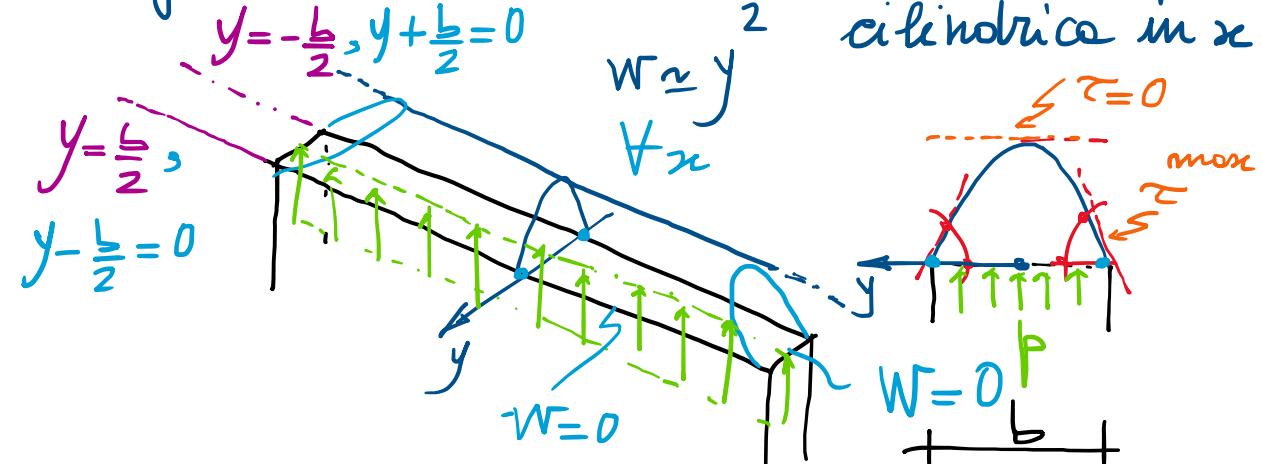
congrz. $\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c$ in A ✓

c.e. $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} h_y = 0$ su M ✓

- Campo delle tensioni tangenziali rilevante in quasi tutto il profilo rettangolare sottile, salvo nelle zone in corrispondenza delle estremità, di piccola estensione A^* (con τ_z stessa dello stesso ordine di grandezza) \Rightarrow soluzione appross.

- Analogie idrodinamiche: $(\frac{b}{a} \rightarrow 0; \frac{a}{b} \rightarrow \infty)$
- $\tau_{zx} = -cy$; $\tau_{zy} = 0$ in $A - A^*$
lineari sullo spessore

- Analogie della Membrana: sostanzialmente cilindrica in x



$w_{xy} \sim y$
lineare in y

- Funzione di sforzo: *eq. m. rette lati lunghi*

$$\text{di AIRY} \quad \varphi = \varphi(y) = K \left(\frac{b}{2} + y \right) \left(\frac{b}{2} - y \right) = K \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ su } \Gamma - \Gamma^*$$

$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{yy} = -2K = -c \Rightarrow K = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J} \Rightarrow J = \frac{M_t}{K}; M_t = KJ$$

$$M_t = 2 \int_A c \varphi dA = 2K \int_A \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) dA = 2K \left(\frac{b^2}{4} A - J_x \right) = 2K \left(\frac{3}{4} ab^3 - \frac{ab^3}{12} \right) = \cancel{2K \frac{ab^3}{6/3}}$$

$$= K \frac{1}{3} ab^3 = KJ$$

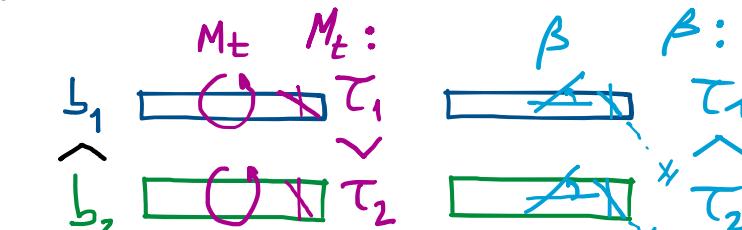
$$J = \frac{1}{3} ab^3 = 4J_x \sim b^3 \text{ piccolo}$$

cf. a parità
di

momento d'inerzia torsionale
di sezione rettangolare sottili

- Campo delle τ_{zx} :

$$\varphi = \frac{3M_t}{ab^3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{yy} = -\frac{6M_t}{ab^3} y = -2M_t \frac{y}{J} \\ \tau_{zy} = -\varphi_{xx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \tau_{zx} &= \left| -\frac{6M_t}{ab^3} \left(\pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{3M_t}{ab^2} \\ &= \frac{M_t}{J} b = G\beta b \end{aligned}$$



- Equivalenze statiche delle τ_{zx} :

$$\int_A -\tau_{zx} y \, dA = \int_A \frac{2 M_t}{J} y^2 \, dA = \frac{2 M_t}{J} \underbrace{\overline{y^2}}_{4 J_x} = \frac{M_t}{2}$$



Derivazione "diretta" di τ^{max}
(sappiamo l'equiv. di τ_{zx} a $M_t/2$)

$$T = \frac{1}{2} \frac{b}{2} \tau^{\text{max}} a = \frac{ab}{4} \tau^{\text{max}}$$

$$\frac{M_t}{2} = T \cdot \frac{2}{3} b = \frac{ab}{4} \tau^{\text{max}} \frac{2}{3} b$$

- Funzione di rigobamento:

$$\begin{cases} M_{G_3x} = \frac{1}{4\beta} \Psi_y + y = \frac{1}{4\beta} (-2\beta y) + y = -y \\ M_{G_3y} = -\frac{1}{4\beta} \Psi_x - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\Psi = -y \, dx - x \, dy = -d(xy)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= -xy + \text{const} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \Psi_{\text{ell}} \quad \Psi = 0 \end{aligned}$$

Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti alle metà del momento torcente. L'altra metà di M_t sarà legata alle τ^* nelle zone A^* (stesso ordine di grandezza ma brevi, più leve in direz. x lunghi, dell'ordine di 'a').

$$\tau^{\text{max}} = \frac{3 M_t}{a b^2}$$

(esse x)
 $y=0 \rightarrow \Psi_g = 0$
no singolar. lungo l'asse x
etrasferibile sulla spessore ($y^{\text{max}} = \frac{b}{2}$)