

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 20

Esempio 3DOF - Deformate critiche

Eq. ni di equil. (de stat. stell'EPT $\nabla_2(\vartheta)$) $|W_i| \ll 1 \sim v_i$

$$(1) \begin{cases} (3-p)v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + (2-p)v_2 - v_3 = 0 \\ -v_2 + (1-\frac{p}{2})v_3 = 0 \end{cases}$$

lineariz.
 v_i^*

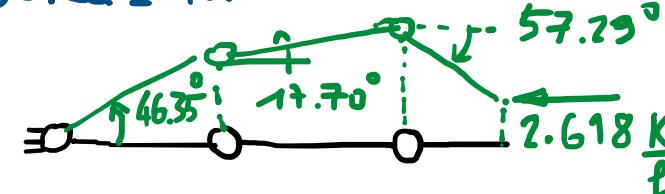
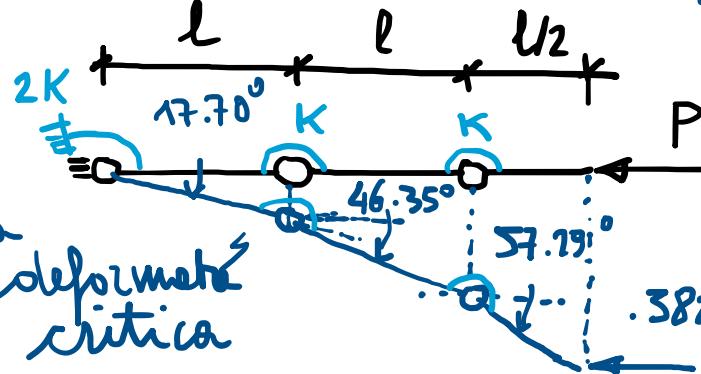
carichi critici: $\det(K) = 0 \Rightarrow p_i^*$

Deformate critiche associate ai p_i^* $\Rightarrow \delta q_i^* = q_i^* - q_0^*$

$$\text{Dalla (1)} \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{3-p} = \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} v_3$$

$$\text{Dalla (3)} \Rightarrow v_2 = (1-\frac{p}{2})v_3 \approx \frac{2-p}{2} v_3$$

1° carico critico ($p_1^* = .3810$): $v_1 = .3090 \text{ rad} = 17.70^\circ$



2° soluz. critica

$$q_i = \vartheta_i \quad P = p \frac{K}{l}$$

$$K_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Alternativamente: $K \delta q_L = 0$

$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*$$

pb. agli autovetori generalizzati

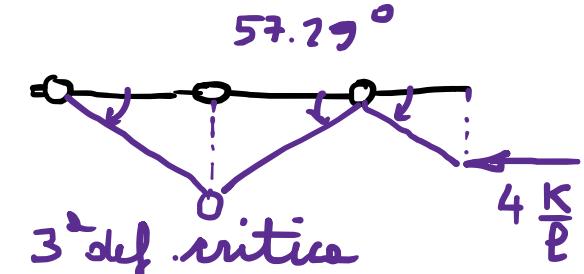
$\Rightarrow p_i^*$ autovetori

δq_i^* autovettori

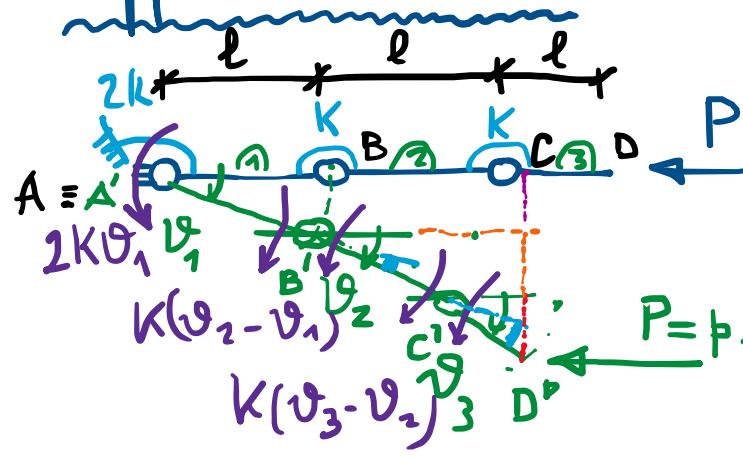
Note a mani di cost. arbitraria

$$\hookrightarrow v_3 = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ$$

Analogam. per $p_2^* = p_3^*$:



Approccio statico : scritture dirette delle eq.m di equilibrio variego (nelle conf. h def.)



conf. iniz.
rif. (equil.)
conf. w
variate
(deform.)

$P = p \frac{K}{l}$

$$\Delta p = \frac{Pl}{K}$$

app. ener.

$\leftrightarrow 3$ eq.

$$\sum M_{C'}^3 = 0 \Rightarrow K(\vartheta_3 - \vartheta_2) - P \frac{l}{2} \sin \vartheta_3 = 0$$

$$\sum M_{B'}^{3+2} = 0 \Rightarrow K(\vartheta_2 - \vartheta_1) - P \left(\frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 \right) = 0 \leftrightarrow 2+3 \text{ eq.}$$

$$\sum M_A^{3+2+1} = 0 \Rightarrow 2K\dot{\vartheta}_1 - p \left(\frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 + l \sin \vartheta_1 \right) = 0 \leftrightarrow 1+2+3 \text{ eq.}$$

eq.m di equil. non-lineari (non-lin. geometrica)

Spost. "geometricamente piccoli" $|\vartheta_i| \ll 1 \Rightarrow \sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$: eq.m linearizzate

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 - \vartheta_2 + (1-p) \vartheta_3 = 0 \\ -\dot{\vartheta}_1 + (1-p) \vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \\ (1-p)\dot{\vartheta}_1 - p \vartheta_2 - \dot{\vartheta}_2 = 0 \end{cases}$$

conf. iniz. rif. equil.

$$\tilde{K} \delta q = 0 \Rightarrow \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

non simm.

Criteri critici :

$$-\det(\tilde{K}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

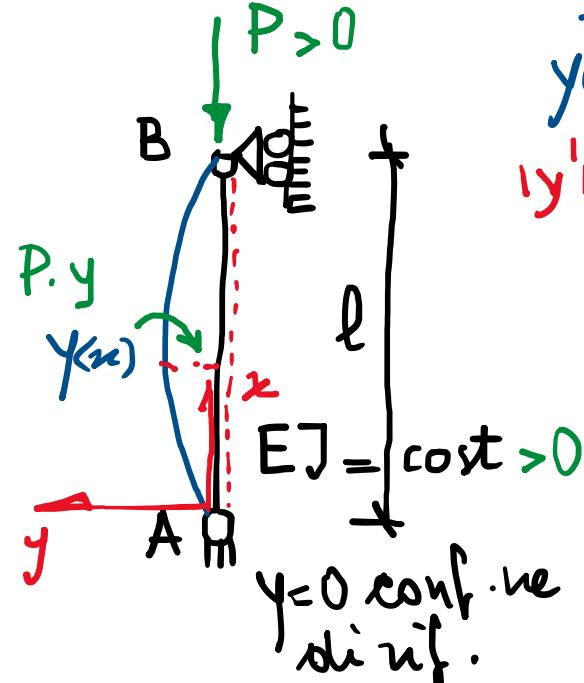
$$-\tilde{K}_E \delta q_i^* = p_i^* \tilde{K}_G \delta q_i^* \Rightarrow \text{autovel. con identici risultati}$$

N.B. \tilde{K} de approccio statico può differire da K de approccio energetico (sim.) ma con le stesse proprietà algebriche sottostanti

Sistemi continui (aste semplicemente compresse deformabili elasticamente flessionali.)

Aste di Euler (n 1750) - Approssimazione statica

nelle conf. ne def.



$$y''(x) \approx \chi(x) = \frac{M(x)}{EJ} \Rightarrow EJ y''(x) = M(x) = -Py(x)$$

$|y'| \ll 1$ Legge di Bernoulli-Euler-Navier
Momento interno elastico
Momento esterno legato a P

metodo delle linee elastiche

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}; \quad P = \alpha^2 l^2 \frac{EJ}{l^2} = n^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\text{Sistema delle r.e.: } P_{C2} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

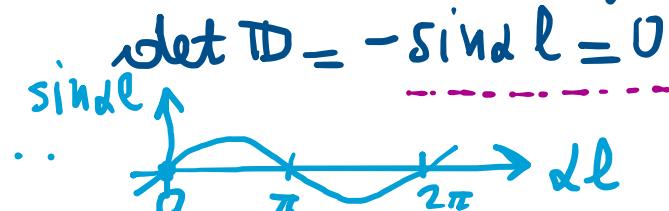
r.e. (scrittura e impostazione)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases} \quad \boxed{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A} = 0$$

$$\sin \alpha l \neq 0 \rightarrow A = 0 \quad (y \equiv 0)$$

$$\sin \alpha l = 0 \rightarrow A \text{ arb.} \quad \alpha l = n\pi; n=1,2,3\dots$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$



Ammette soluz. non banali

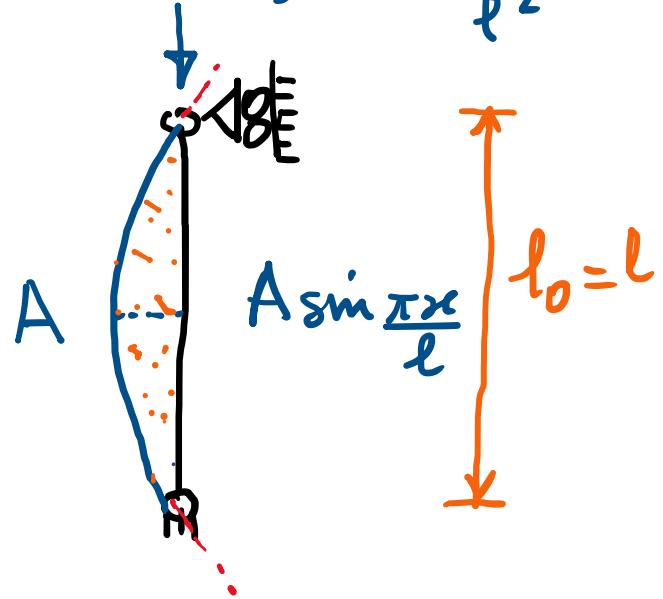
$$\alpha \neq 0$$

sse D sing.

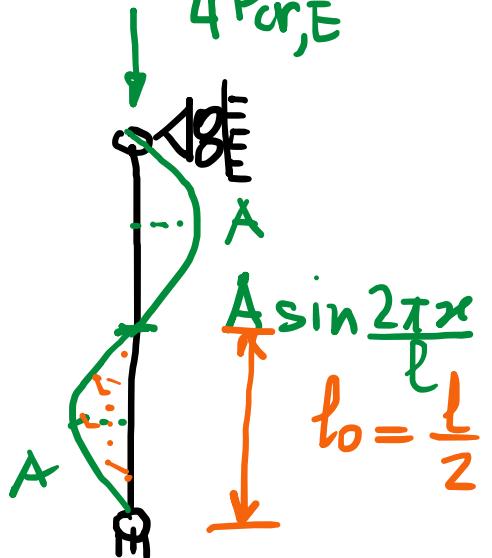
$$\det D = -\sin \alpha l = 0$$

$$P_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 E J}{l^2} = \pi^2 \frac{E J}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} = \pi^2 \frac{E J}{l_{0,n}^2}$$

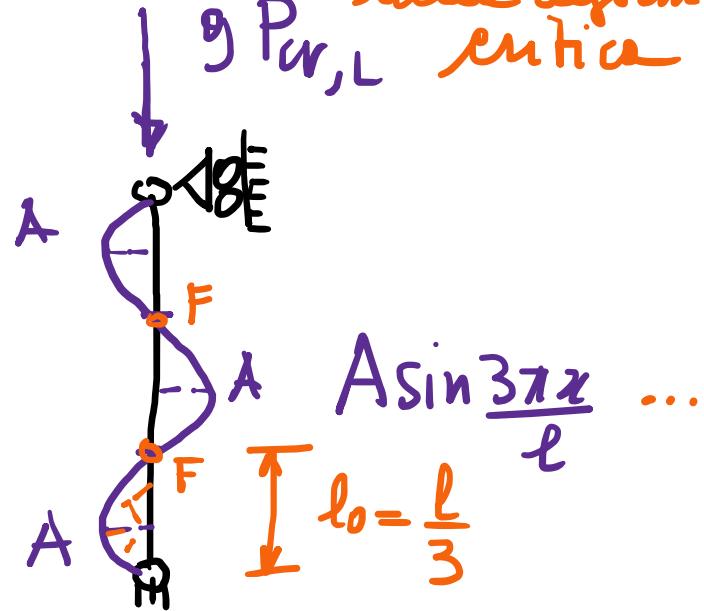
~ 10



$n=1$



$n=2$



$n=3$

...

- Successive generalizzazioni per altre condizioni di vincolo (el. contorno)

$$l_{0,n} = \frac{l}{n}$$

lunghezza di libera riflessione

$$y_{cr,n}(x) = A \sin \frac{n \pi x}{l}$$

distanze fra due punti
di flesso consecutivi
delle deform.

$P_{cr,L}$ critica

SOMMARIO (Lec. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approssimazione statico: scrittura dirette delle eq. n. di equilibrio nella configurazione deformata.
 - non-lineari per spost. finiti.
 - lineari per spost. geometricamente piccoli ($\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$).
 - Eq. n. risultano comb. lineare di quelle de stat. di EPT₂ con matrice di rigidezze \mathbf{K} con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Aste di Euler (con approssimazione statico) [eq. ne LE nelle conf. ne deform.].
- Corichi critici, deformate critiche, lunghezza di libera riflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, eemo ai telai, formule di Newmark, verifica di stabilità.