

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

Risposta a forzante armonica  $F_e^{i\omega t}$  (trattazione in variabili complesse) ( $u_{st} = \frac{F}{K}$ )

$$\ddot{\nu} + 2\zeta\omega_1 \dot{\nu} + \omega_1^2 \nu(t) = \omega_1^2 u_{st} \cos \omega t \leftarrow F(t) = F \cos \omega t ; \nu(t) \text{ risposta a } F \cos \omega t$$

$$i(\ddot{u} + 2\zeta\omega_1 \dot{u} + \omega_1^2 u(t)) = \omega_1^2 u_{st} \sin \omega t \leftarrow F(t) = F \sin \omega t ; u(t) \text{ " " } F \sin \omega t$$

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_1 \dot{z} + \omega_1^2 z(t) = \omega_1^2 u_{st} e^{i\omega t} \leftarrow F(t) = \underbrace{F e^{i\omega t}}_{\substack{\text{fase} \\ \text{cos}\omega t + i\sin\omega t}} ; z(t) = \underbrace{\nu(t)}_{\text{Re}\{z(t)\}} + i \underbrace{u(t)}_{\text{Im}\{z(t)\}}$$

Integrale particolare:  $\int u_{st}$

$$\begin{cases} z_p(t) = Z e^{i\omega t} = Z^* e^{i(\omega t - \xi)} & (\text{ritardo della risposta } z_p(t) \text{ rispetto alle fozz. } F e^{i\omega t}) \\ \downarrow \dot{z}_p(t) = i\omega Z e^{i\omega t} \stackrel{i=\frac{\pi}{2}}{=} \omega Z e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} & \xrightarrow{\text{ampliezza } \omega Z} \text{velocità in quadratura in anticipo} \\ \downarrow \ddot{z}_p(t) = -\omega^2 Z e^{i\omega t} & \xrightarrow{\text{ampliezza } \omega^2 Z} \text{accelerazione in opposizione di fase} \end{cases}$$

rispetto alle  
risposta  $z_p(t)$

$Z$  variabile complessa;  $Z^*$  variabile reale ( $Z^* = \sum u_{st}$ ) fatto di amplificazione dinamica

$$Z = Z^* e^{-i\xi} = Z^* (\cos \xi - i \sin \xi) = \underbrace{Z^* \cos \xi}_{Z_1} - i \underbrace{Z^* \sin \xi}_{Z_2} = Z_1 - i Z_2 \quad \begin{cases} \text{Re}\{Z\} = Z_1 = Z^* \cos \xi \\ \text{Im}\{Z\} = -Z_2 = -Z^* \sin \xi \end{cases}$$

$$\left( \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 2\zeta \frac{\omega_1}{\omega} \omega i \right) Z e^{i\omega t} = \frac{\omega_1^2}{\omega^2} M_{st} e^{i\omega t}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{f}{f_1}$  rapporto di frequenze ("frequency ratio")

$$(1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta) Z = M_{st} \Rightarrow Z = \frac{1}{1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta} M_{st} \cdot \frac{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta}{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta} \quad i^2 = -1$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Quindi:  $\cos \xi = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{D}}$ ;  $\sin \xi = \frac{2\zeta \beta}{\sqrt{D}}$

$$\tan \xi = \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = \frac{2\zeta \beta}{1 - \beta^2}$$

$$\frac{Z}{M_{st}} = \frac{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2} = \frac{1 - \beta^2}{D} - i \frac{2\zeta \beta}{D} = \frac{Z_1}{M_{st}} - i \frac{Z_2}{M_{st}} \quad (*)$$

$$\frac{Z_1}{M_{st}} = \underbrace{\frac{Z^* \cos \xi}{M_{st}}}_{N} \quad \frac{Z_2}{M_{st}} = \underbrace{\frac{Z^* \sin \xi}{M_{st}}}_{N}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{D}} \quad N = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

(\*) Inoltre:

$$|Z| = Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2}{D}}$$

$$M_{st} = \frac{\sqrt{D}}{D} M_{st} = \frac{1}{\sqrt{D}} M_{st} = N M_{st} \Rightarrow$$

Relazioni come precedentemente determinato per solo  $F \sin \omega t$

$$N = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2}}$$

- Pertanto, si ottiene:  $\text{N}_2\text{H}_4$

$$\begin{aligned}
 Z_p(t) &= Z e^{i\omega t} = Z^* e^{i(\omega t - \xi)} \quad \xrightarrow{\text{---}} \\
 &= (Z_1 - iZ_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\
 &= \underbrace{Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t}_{\text{---}} + i \underbrace{(Z_1 \sin \omega t - Z_2 \cos \omega t)}_{\text{---}}
 \end{aligned}$$

$$z_p(t) = (Z_1 - iZ_2)e^{i\omega t} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$       in fase con la forzante      in quadratura in ritardo rispetto alla forzante

## Rappresentazioni nel piano di Argand (vettori rotanti)

# Forze:

Forze:  $\text{ust} \quad \text{zisp. u Floswt}$

$$Fe = KN \overset{\sim}{\cancel{E}} K$$

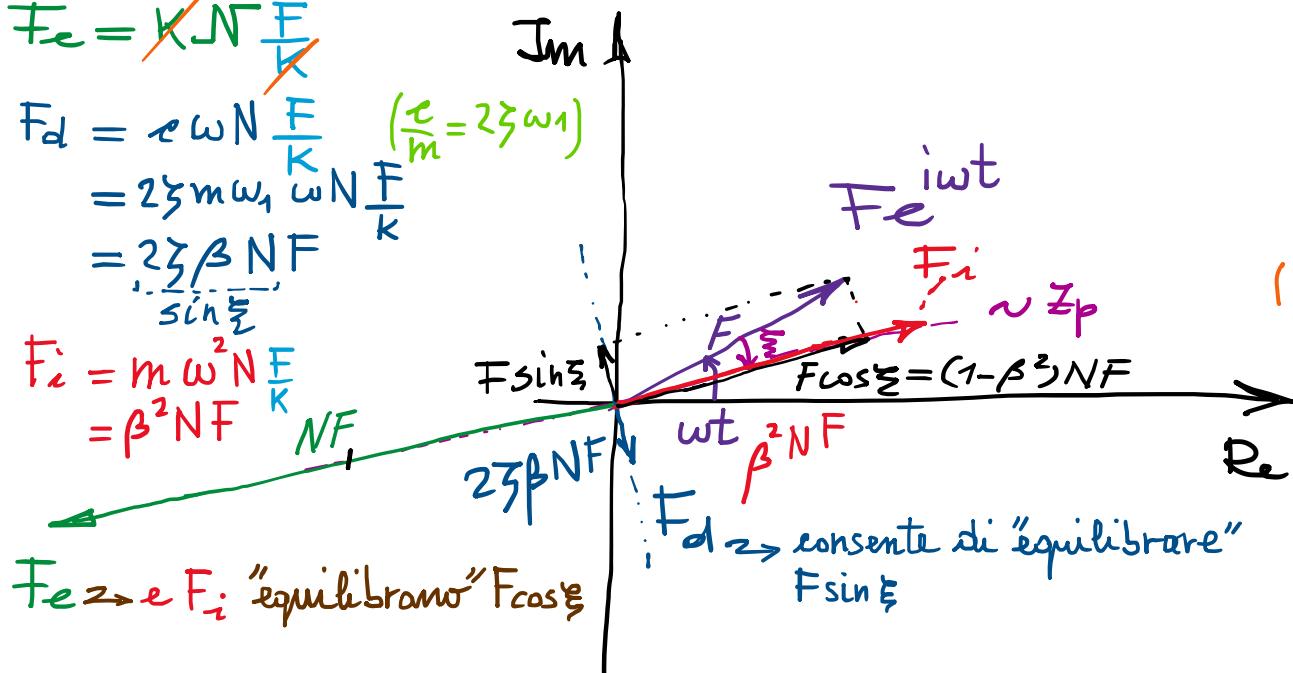
$$F_d = \epsilon \omega N \frac{F}{K} \quad (\frac{\epsilon}{m} = 2\zeta \omega_1)$$

$$= 2\zeta m \omega_1 \omega N \frac{F}{K}$$

$$= \frac{2\beta N F}{\sin \frac{\pi}{L}}$$

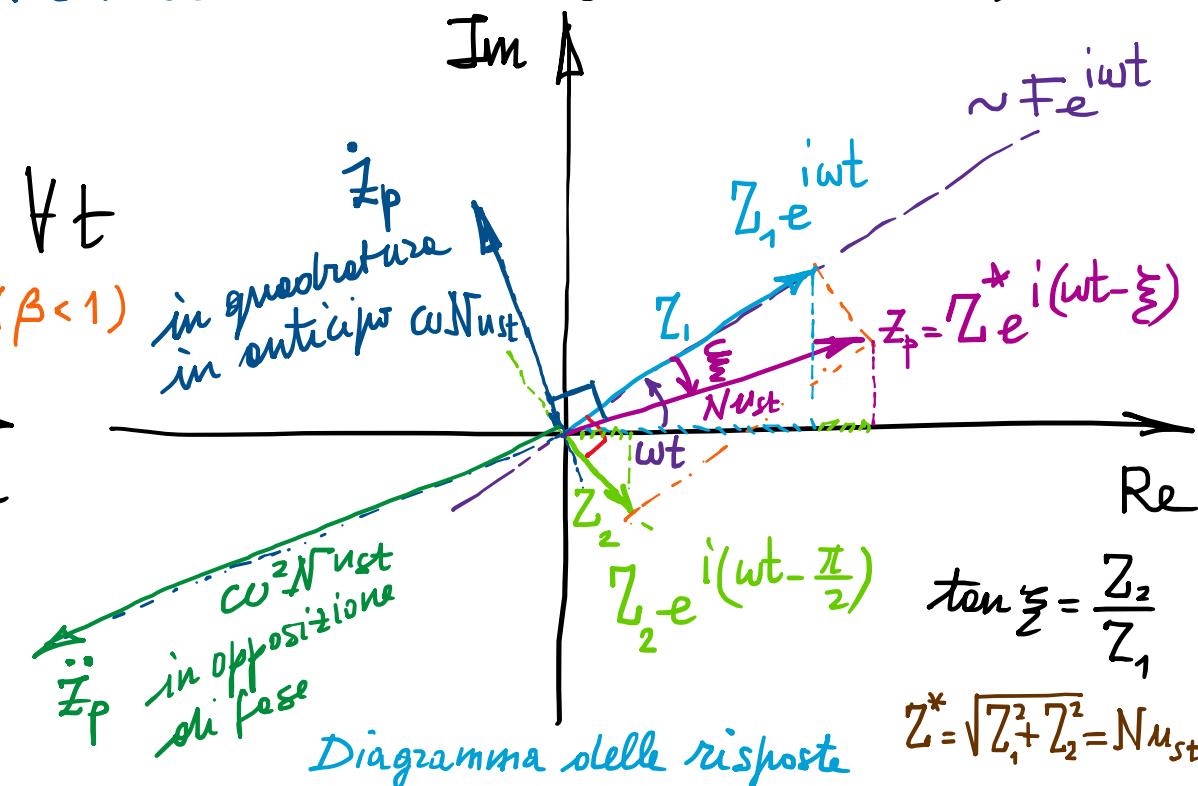
$$F_i = m \omega^2 N_F$$

$$= \beta^2 N_F$$



## Diagrammi delle forze ("equilibrio dinamico")

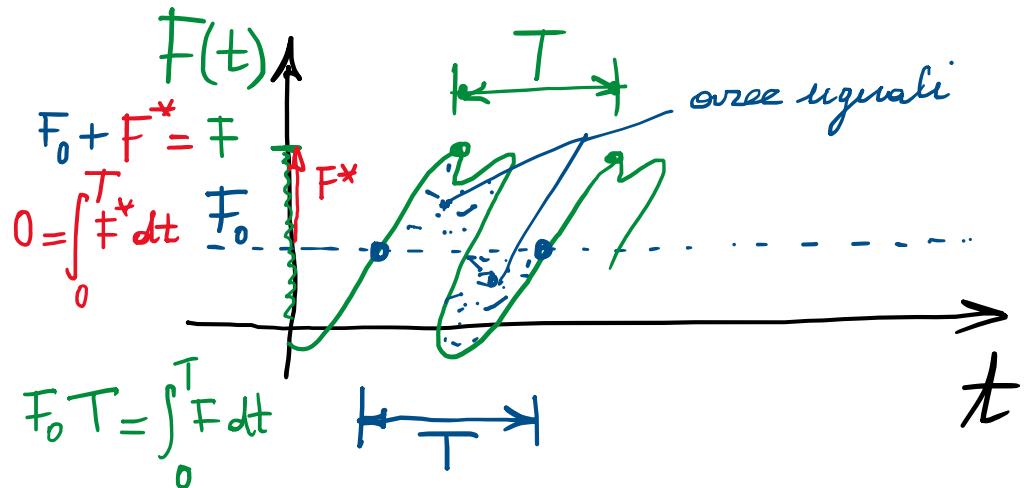
$Z_p$   
 $Z_t$   
 $(\beta < 1)$   
 in quadratura  
 in anticipo con N  
 in opposizione  
 chi fa  
 Diagramma



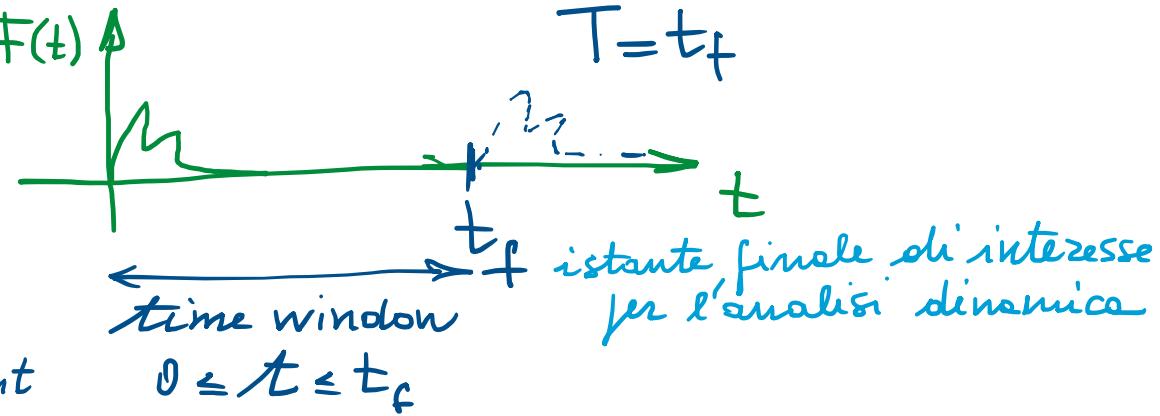
$$\tan \xi = \frac{z_2}{z_1}$$

$$Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = N_{\mu_{st}}$$

Risposta a forzante periodica:  $F(t+T) = F(t)$   $T$ : periodo della forzante



- così pratici con forzanti periodiche
- forzanti "rese periodiche" ai fini dell'analisi



Sviluppo in serie di Fourier:

$$F(t) \underset{\text{appross.}}{\sim} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t =$$

truncam. ( $\bar{n}$ )

$\frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}$

$\frac{e^{-i\omega_n t} - e^{i\omega_n t}}{2i}$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \text{ valor medio}$$

$$\text{coeff. serie di } F: A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega_n t dt$$

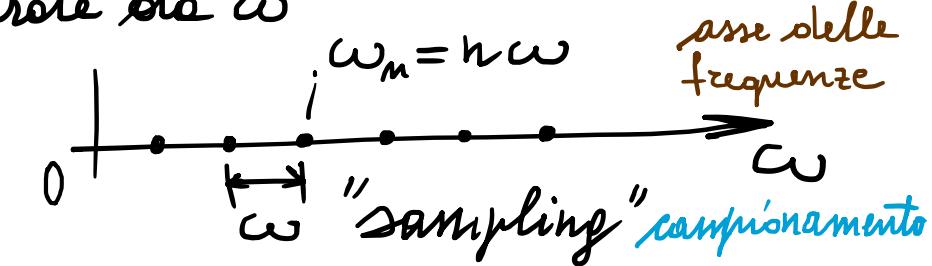
$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega_n t dt$$

f.m. generalmente continua

$$C_n = \frac{A_n - i B_n}{2}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

con  $\omega_n = n\omega$ ;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  pulsazione fondamentale  
"treno" di infinite componenti armatiche di pulsazioni  $\omega_n$  discrete separate da  $\omega$



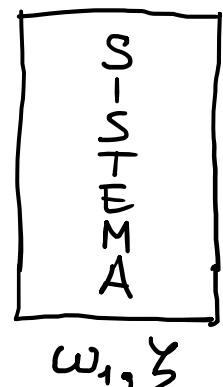
Risposte: (di periodo  $T$ )  $\mu_{st} = \frac{F}{K} \Rightarrow F = K\mu_{st}$

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega_1} = n \frac{\omega}{\omega_1} = n\beta$$

$$\begin{aligned}\mu_p(t) &= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \frac{Z_{1n}}{F} \cos \omega_n t + \frac{Z_{2n}}{F} \sin \omega_n t \right) + B_n \left( \frac{Z_{1n}}{F} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{F} \cos \omega_n t \right) \\ (\text{per sovrapposizione} \\ \text{degli effetti} \\ \text{di ogni} \\ \text{componente} \\ \text{armonica}) \\ &= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{K} \left( \frac{Z_{1n}}{\mu_{st}} \cos \omega_n t + \frac{Z_{2n}}{\mu_{st}} \sin \omega_n t \right) + \frac{B_n}{K} \left( \frac{Z_{1n}}{\mu_{st}} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{\mu_{st}} \cos \omega_n t \right) \\ &= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{K} \cos \omega_n t + \frac{B'_n}{K} \sin \omega_n t \\ A'_n &= A_n \frac{Z_{1n}}{\mu_{st}} - B_n \frac{Z_{2n}}{\mu_{st}} \quad B'_n = A_n \frac{Z_{2n}}{\mu_{st}} + B_n \frac{Z_{1n}}{\mu_{st}}\end{aligned}$$

INPUT

$f(t)$  →  
forzante



OUTPUT

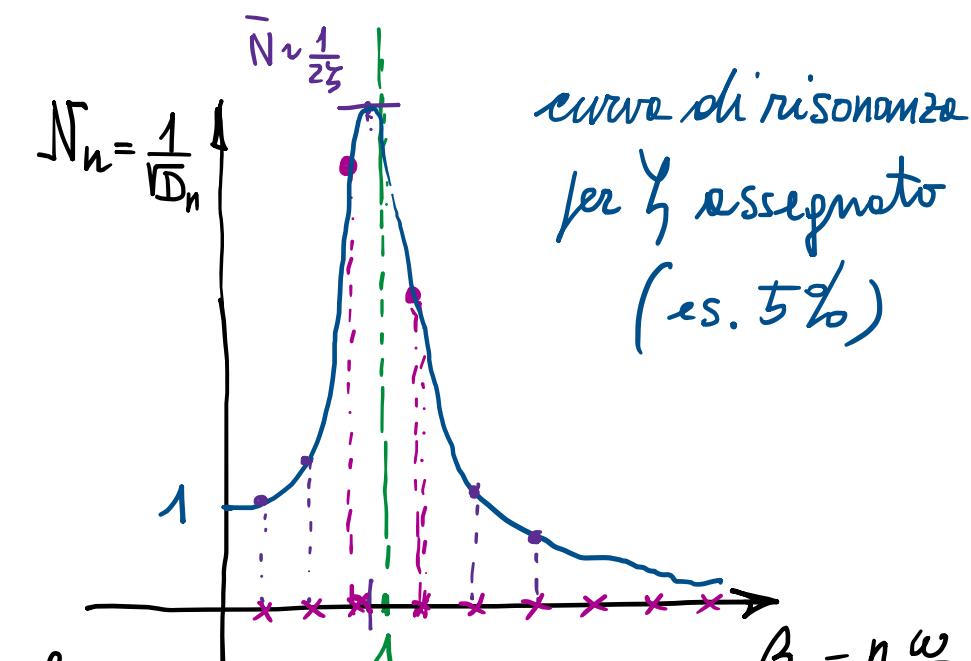
$\mu_p(t)$   
risposta  
(spostamento)

contenuto  
infrequenza  
della forzante

Funge da "filtro" selezionando, esaltando, le componenti armiche con pulsazione più vicina a quelle naturali del sistema.  $\Rightarrow$  visione nel dominio delle frequenze

$$\beta_n = n \frac{\omega}{\omega_1}$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - 2\beta^2} \approx 1$$



## Concetti fondamentali :

- Forzante armonica in variabili complesse:  $F_e^{i\omega t} = F \cos \omega t + i F \sin \omega t$   
 (trattazione unificata)

ampiezza  
pulsazione

- Risposta del sistema:  $\overset{m, \gamma, K}{z_p(t)} = \frac{\sum e^{i\omega t}}{Z_1 - iZ_2} = \frac{\sum^* e^{i(\omega t - \xi)}}{N u_{st}} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$   
 (integrale particolare)

$$= \underbrace{Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t}_{u_p(t)} + i \underbrace{(Z_1 \sin \omega t - Z_2 \cos \omega t)}_{\dot{u}_p(t)}$$

$$u_{st} = \frac{F}{K} ; \quad N(\beta; \gamma) = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}}, \quad \xi = \operatorname{atan} \frac{2\gamma\beta}{1-\beta^2} \quad (\beta = \frac{\omega}{\omega_1} \frac{\text{rapporto di frequenze}}{\sqrt{K_m}})$$

spost. statico  
(risposta statica)

fattore di amplificazione dinamica  
(rispetto a risposta statica)

fase  
(sfasamento tra forzante e risposta)

$\Rightarrow$  rappresentazione nel piano di Argand, delle risposte e delle forze.

$z_p, \dot{z}_p, \ddot{z}_p$

$F; F_e, F_d, F_i$

- Generalizzazione  $\Rightarrow$  forzante periodica (da singola componente armonica a sovrapposizione di periodo  $T$   
di infinite componenti armoniche  $\Rightarrow$  Fourier)  
 $F(t+T) = F(t)$

Forzante (input)

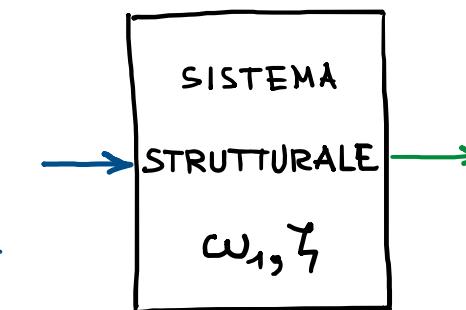
$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

$\Rightarrow$   
per Sovrapposiz.  
degli Effetti

$$\omega_n = n\omega \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$



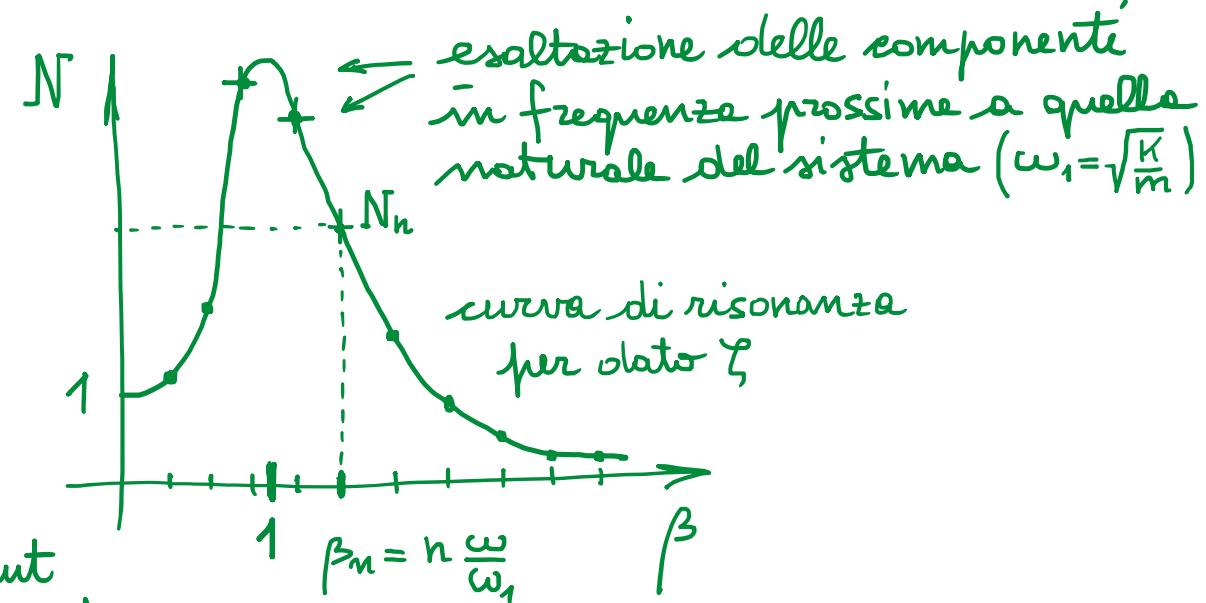
infinite componenti armoniche,  
con frequenze a passo  $\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}$   
(discretizzazione dell'esse  
delle frequenze)  
e ampiezze ad esse associate



input esogeno DNA del sistema output di risposta

Risposta (output)

$$z_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{K} e^{i\omega_n t}$$



"filtrà" l'input esogeno (contenuto in frequenza)  $\Rightarrow$   
in base a caratteristiche endogene

vedi analisi nel dominio delle frequenze

## SOMMARIO (Lec. 06)

- Trattazione in variabili complesse  $\Rightarrow F_e^{int} = F \cos \omega t + i F \sin \omega t$ .
- Derivazione delle relazioni caratteristiche per determinate.
- Risposta simultanea alle comp. armoniche  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ .
- Rappresentazione nel piano di Argand
  - diagramma delle risposte.
  - diagramma delle forze.
- Generalizzazione: forzante periodica (trasl. di infinite armoniche).
- Effetto "filtro" del sistema vs. le comp. armoniche della forzante vicine a quelle corrispondenti alla pulsazione naturale del sistema.
- Next step: risposta a forzante generica (a partire da forzante impulsiva)

