Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 12

Modi principali di vibrare e oscillazioni libere (di sistemi dinamici MDOF)

- Eq.ni del moto ("eq. dinamico" o eq.ni di Lagrange): [n eq.ni accoppiate] n: n° dei gdl

es. $\mathbb{K}$ non diagonale

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\,\ddot{q}+\underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underset{n\times 1}{q(t)}=\underset{n\times 1}{Q}=0 \qquad \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} \text{ c.i.}$$

$q(t)$: coordinate lagrangiane (gdl "fisici" del sistema dinamico)

- Soluzioni in termini di moto armonico;

$$q=\phi_i \sin(\omega_i t+\varphi_i) = \phi_i \cos(\omega_i t-\varphi_i)=\phi_i (A_i \sin\omega_i t+B_i\cos\omega_i t)$$

modi principali di vibrazione

ω_i: pulsazione modale

ϕ_i: vettore di ampiezze — forma modale

$$\dot{q}=\omega\,\phi\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\ddot{q}=-\omega^2\underbrace{\phi\sin(\omega t+\varphi)}_{q(t)}=-\omega^2 q(t)$$

$\mathbb{A}x=\lambda\mathbb{B}x$ < λ autovalore, x autovettore

Problema agli autovalori (generalizzato)

- Sostituendo nelle eq.ni del moto:

$$(\mathbb{K}-\omega^2\mathbb{M})\,\phi\,\cancel{\sin(\omega t+\varphi)}\overset{\forall t}{=}0 \Rightarrow (\mathbb{K}-\omega^2\mathbb{M})\,\phi=0\,; \qquad \boxed{\mathbb{K}\phi_i=\omega_i^2\mathbb{M}\phi_i}$$

ω_i^2 autovalore

ϕ_i autovettore

- soluzioni non banali sse: $\phi\neq 0$

$$0=\det(\mathbb{K}-\omega^2\mathbb{M})=\underbrace{a_n(\omega^2)^n+a_{n-1}(\omega^2)^{n-1}+\dots+a_2\omega^2+a_1}=0$$

polinomio caratteristico associato a $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ grado n

eq.ne caratteristica

- n soluz. ω_i^2: $\omega_1^2\le\omega_2^2\le\dots\le\omega_i^2\le\dots\le\omega_n^2$

1° modo; n° modo (ultimo modo); $\omega\uparrow$

ω_i pulsazione propria o naturale del sistema; periodo proprio $T_i=\dfrac{2\pi}{\omega_i}=\dfrac{1}{f_i}$

$T_1\ge T_2\ge\dots\ge T_i\ge\dots\ge T_n$; $T\downarrow$

Proprietà delle autosoluzioni:

- ω_i^2 reali e positivi $\Rightarrow$ $\omega_i = \sqrt{\omega_i^2} > 0$ reali (in genere distinti per sistemi strutturali reali)

  $\mathbb{K}, \mathbb{M}$ (reali) e definite positive simmetriche

- a due autovalori distinti corrisp. due autovettori mutuamente perpendicolari rispetto alle matrici $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$:

$$\sum_i \phi_{r_i} \cdot \phi_{s_i} = \phi_r^T \overset{\text{matrice identità } n\times n}{\mathbb{I}} \phi_s = 0$$

hp. $\omega_r \neq \omega_s$

$$\begin{aligned}
\omega_r &: \phi_s^T(\mathbb{K}\phi_r = \omega_r^2 \mathbb{M}\phi_r) \\
\omega_s &: \phi_r^T(\mathbb{K}\phi_s = \omega_s^2 \mathbb{M}\phi_s) \quad -
\end{aligned}$$

(proprietà chiave è la simmetria delle matrici strutturali $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$)

$$\phi_s^T \mathbb{K}\phi_r - \phi_r^T \mathbb{K}\phi_s = \omega_r^2 \phi_s^T \mathbb{M}\phi_r - \omega_s^2 \phi_r^T \mathbb{M}\phi_s$$

$$0 = \phi_r^T \mathbb{K}^{(T)} \phi_s - \text{''} = \omega_r^2 \phi_r^T \mathbb{M}^{(T)} \phi_s - \text{''} = \underbrace{(\omega_r^2 - \omega_s^2)}_{\neq 0 \text{ per hp.}} \boxed{\phi_r^T \mathbb{M}\phi_s = 0}$$

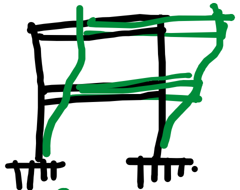
$$\boxed{\phi_r^T \mathbb{K}\phi_s = 0}$$

- quindi, presi due autovettori ϕ_r, ϕ_s:

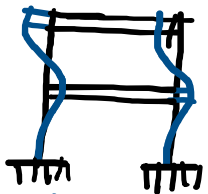
$$\phi_r^T \mathbb{M}\phi_s = \underset{\text{delta di Kronecker}}{\delta_{rs}} M_r \begin{cases} r = s \ (\delta_{rs}=1) & M_r = \phi_r^T \mathbb{M}\phi_r > 0 \ \text{(massa modale)} \\ r \neq s \ (\delta_{rs}=0) & 0 \end{cases}$$

$$\phi_r^T \mathbb{K}\phi_s = \delta_{rs} K_r \begin{cases} r = s & K_r = \phi_r^T \mathbb{K}\phi_r > 0 \ \text{(rigidezza modale)} \\ r \neq s & 0 \end{cases}$$

- Pertanto: ϕ_i autovettori $\Rightarrow$ forme modali



1° modo ω_1



2° modo ω_2

$$\phi_i^T\left(\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\phi_i\right) \Rightarrow \underbrace{\phi_i^T\mathbb{K}\phi_i}_{K_i} = \omega_i^2\,\underbrace{\phi_i^T\mathbb{M}\phi_i}_{M_i}$$

MDOF

SDOF

$$\tilde{\omega}_i^2 = \frac{\frac{1}{2}\,\tilde{\phi}_i^T\mathbb{K}\tilde{\phi}_i}{\frac{1}{2}\,\tilde{\phi}_i^T\mathbb{M}\tilde{\phi}_i} = \frac{\mathcal{E}_i^*}{T_i^*} = \frac{K_i}{M_i} \Rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \longleftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Rapporto di Rayleigh (in dinamica)

En. elastica / En. cinetica modo i

stime degli autovettori $\tilde{\phi}_i$ (buona stima della pulsazione propria)

- Autovettori: $(\mathbb{K} - \omega_i^2\mathbb{M})\phi_i = \mathbb{0} \Rightarrow \phi_i$, noti gli ω_i^2

- Forme standard: $(\mathbb{A}x = \lambda\mathbb{I}x)$

forme generalizzate

$\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2\mathbb{M}\phi_i$

- $\underbrace{\mathbb{K}^{-1}\mathbb{M}}_{\mathbb{G}}\phi_i = \dfrac{1}{\omega_i^2}\phi_i$

- $\underbrace{\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}}_{\mathbb{H}}\phi_i = \omega_i^2\phi_i$

$\mathbb{G} = \mathbb{H}^{-1}$; $\mathbb{H} = \mathbb{G}^{-1}$ (def. pos. ma non simm.)

(comunque autovalori reali, poiché matrici sorgenti simmetriche)

– Normalizzazione degli autovettori $\phi_i \Rightarrow \alpha\,\phi_i$ è autovet. (definito a meno di costante arbitraria)

- $1 = \|\phi_i\| = \sqrt{\phi_i^T \mathbb{I}\, \phi_i} = \sqrt{\sum_k \phi_{ik}^2} = 1$, $\phi_i \Rightarrow \dfrac{\phi_i}{\|\phi_i\|}$ versore $\qquad \dfrac{\cancel{\alpha}\,\phi_{iz}}{\cancel{\alpha}\,\phi_{is}}$ invariante
- $1 = M_i = \phi_i^T \mathbb{M}\, \phi_i$ massa modale unitaria
- $1 = K_i = \phi_i^T \mathbb{K}\, \phi_i$ rigidezza " "
- sistemi dinamici tipici $\phi_{ik} = 1$ < es. k ultimo piano $k=n$ / primo " $k=1$ (telai shear-type)

– Notazione matriciale

$$\underset{n\times n}{\Phi} = [\,\underset{n\times 1}{\phi_1} \,\vdots\, \phi_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_i \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_n\,]$$ matrice degli autovettori (per colonne)

$\Phi_{ki} = \phi_{ik}$ comp. k di autovet. ϕ_i

$$\underset{n\times n}{\Omega^2} = \mathrm{diag}[\omega_i^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$ matrice degli autovalori (è matrice diagonale)

- $\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i = \mathbb{M}\phi_i\omega_i^2$ $\Rightarrow$ $\Phi^T\left(\boxed{\mathbb{K}\Phi = \mathbb{M}\Phi\Omega^2}\right)$

n modi unitamente rappresentati (tramite Φ e Ω^2)

riscrittura del pb. agli autovalori generalizzato originario, per tutti i modi $i=1,n$, tramite matrici degli autovettori Φ e degli autovalori Ω^2

$i = 1, 2, \dots, n$ numero del modo

$$\underbrace{\Phi^T \mathbb{K} \Phi}_{} = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{} \Omega^2$$

matrici modali $\mathcal{K} = \mathrm{diag}[K_i]$ di rigidezza, $\mathcal{M} = \mathrm{diag}[M_i]$ di massa

$$\Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} = \mathrm{diag}\left[\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}\right]$$

trasformazione di coordinate

- Coordinate principali (significato matematico)

$$\mathbf{q} = \sum_i \phi_i p_i = \Phi \mathbf{p} \qquad (\mathbf{p} = \Phi^{-1}\mathbf{q})$$

comb. lineare

(comp. di q nella base degli autovett.)

Anche $\mathbf{p} = (\underbrace{\Phi^T\mathbb{M}\Phi}_{\mathcal{M}})^{-1}\Phi^T\mathbb{M}\mathbf{q} \rightarrow p_i = \dfrac{\phi_i^T \mathbb{M}\mathbf{q}}{\underbrace{\phi_i^T \mathbb{M}\phi_i}_{M_i}}$

Φ invertibile se autovalori distinti (autovettori lin. indip.)

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \Rightarrow \Phi^T(\mathbb{M}\Phi\ddot{\mathbf{p}} + \mathbb{K}\Phi\mathbf{p} = \mathbf{Q})$$

n eq.ni disaccopp.

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathrm{diag}[M_i]}\ddot{\mathbf{p}} + \underbrace{\mathcal{K}}_{\mathrm{diag}[K_i]}\mathbf{p} = \Phi^T\mathbf{Q} = \mathbb{P} \longleftrightarrow M_i\ddot{p}_i + K_i p_i(t) = \phi_i^T\mathbf{Q} = P_i(t)$$

$\forall$ modo i

• Oscillazioni libere: $\overset{\text{condizioni iniziali}}{q_0, \dot{q}_0}$ (composizione di n moti armonici)

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q = 0 \Rightarrow q(t) = \sum_i \phi_i (A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t)$$

$$q(0) = \sum_i \phi_i B_i = \Phi \underbrace{\mathbb{B}}_{\{B_i\}} \Rightarrow \mathbb{B} = \Phi^{-1} q_0$$

Le $\omega_i A_i$ sono le p_i di $\dot{q}_0$

$$\Phi^T \mathbb{M} q_0 = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{\mathfrak{M}} \mathbb{B} \rightarrow \boxed{\mathbb{B} = \mathfrak{M}^{-1} \Phi^T \mathbb{M} q_0}$$

Le B_i sono le p_i di q_0

$$B_i = \frac{\phi_i^T \mathbb{M} q_0}{\underbrace{\phi_i^T \mathbb{M} \phi_i}_{M_i}}$$

Analogamente:

$$\dot{q}_0 = \sum_i \phi_i \omega_i A_i = \Phi \Omega \underbrace{\mathbb{A}}_{\{A_i\}}$$

$$\mathbb{A} = (\Phi \Omega)^{-1} \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \Phi^{-1} \dot{q}_0$$

$$\Phi^T \mathbb{M} \dot{q}_0 = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{\mathfrak{M}} \Omega \mathbb{A}$$

$$\boxed{\mathbb{A} = (\mathfrak{M}\Omega)^{-1} \Phi^T \mathbb{M} \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \underbrace{\mathfrak{M}^{-1} \Phi^T}_{\Phi^{-1}} \mathbb{M} \dot{q}_0}$$

N.B.: $q_0 = \phi_j <$ $B_j = 1 \quad i = j$, $B_i = 0 \quad i \neq j$

Il sistema, rilasciato ($\dot{q}_0 = 0$) dal modo j, vibra solo secondo tale modo (selezione del generico modo di vibrare).

Concetti fondamentali:

- Caratteristiche intrinseche vibrazionali di sistema dinamico ad n gdl $\Rightarrow$ oscillazioni libere (no damping, $\mathbb{C} = \mathbb{0}$)
(modi principali di vibrare o di vibrazione):

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\ \underset{n\times 1}{\ddot{\underline{q}}} + \underset{n\times n}{\mathbb{K}}\ \underset{n\times 1}{\underline{q}(t)} = \underset{n\times 1}{\underline{0}}$$

n eq.ni del moto scalari, per sistema MDOF con n gdl $q_i(t)$ (coordinate lagrangiane)

- Soluzione nella forma:

$$\underline{q}(t) = \underline{\phi}_i \sin(\omega_i t + \psi_i) = \underline{\phi}_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = \ldots$$

fasi: ψ_i, φ_i

ω_i: pulsazione (i-esimo $\forall$ modo)

$\underline{\phi}_i$: vettore di ampiezze, definito a meno di una cost.

ϕ_{i2} — gdl

ϕ_{is}

$$\ddot{\underline{q}}(t) = -\omega_i^2 \underbrace{\underline{\phi}_i \sin(\ldots\ldots)}_{\underline{q}(t)} = -\omega_i^2\, \underline{q}(t)$$

n autoval. ω_i^2
autovet. $\propto \underline{\phi}_i$
$\Leftarrow$ problema agli autovalori generalizzato, associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$

$$A\underline{x} = \lambda B\underline{x} \quad \text{(II)}$$

$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ standard

- Sostituendo:

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M}) \propto \underline{\phi}_i \cancel{\sin(\ldots\ldots)} = \underline{0} \quad \forall t \Rightarrow (\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\,\underline{\phi}_i = \underline{0};$$

$$\boxed{\underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underline{\phi}_i = \omega_i^2\, \mathbb{M}\,\underline{\phi}_i}$$

SOMMARIO (Lez. 12)

- Modi principali di vibrare < pulsazioni naturali^2 ↔ autovalori.
  forme modali ↔ autovettori.
- Ortogonalità e normalizzazione degli autovettori.
- Autovalori da rapporto di Rayleigh (in dinamica) ⇒ generaliz. SDOF.
- Scrittura compatta del pb. agli autovalori tramite matrici degli autovettori e degli autovalori.
- Trasformazione in coordinate principali ⇒ disaccoppiamento delle eq.ni del moto (analisi dinamica modale).
- Oscillazioni libere (sovrapposizione di n moti armonici).

Next step: esempio 2DOF; smorzamento; Azioni Interne.