Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

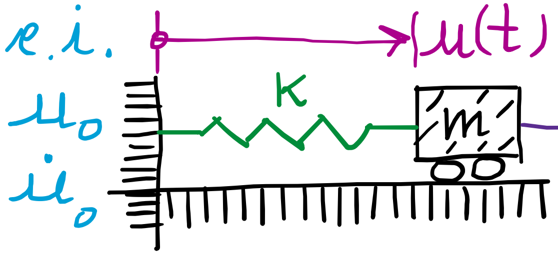
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 04

Risposta a forzante armonica

$F(t) = \begin{cases} F\sin\omega t \\ F\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow F e^{i\omega t}$ $\quad e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ (non smorzato; $c=0$)



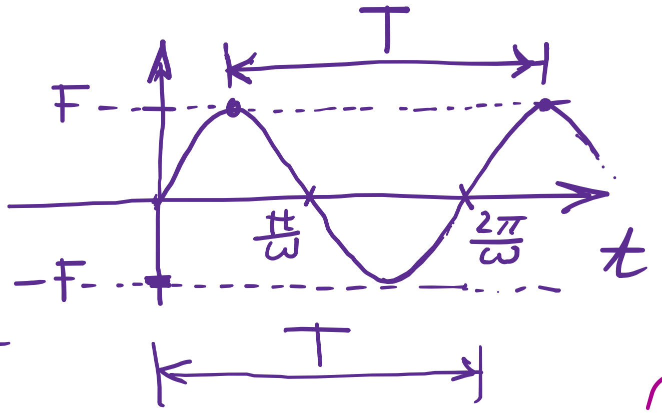
$F(t) = F\,\underbrace{\sin\omega t}_{f(t)}$

F intensità o ampiezza

ω pulsazione della forzante

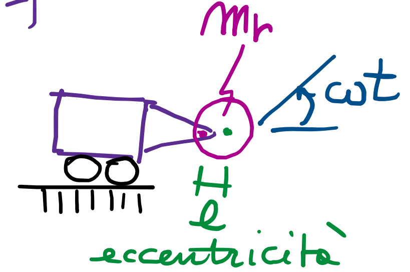
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

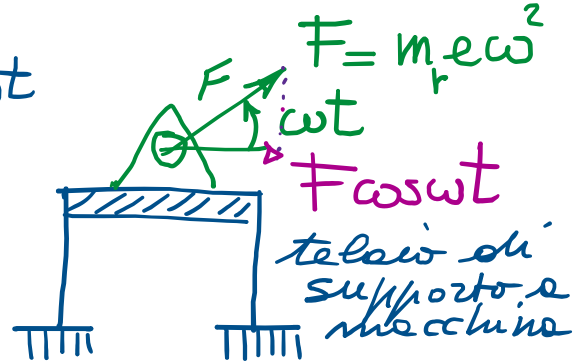
pulsazione naturale del sistema non smorzato



f.ne periodica, di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \qquad \omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

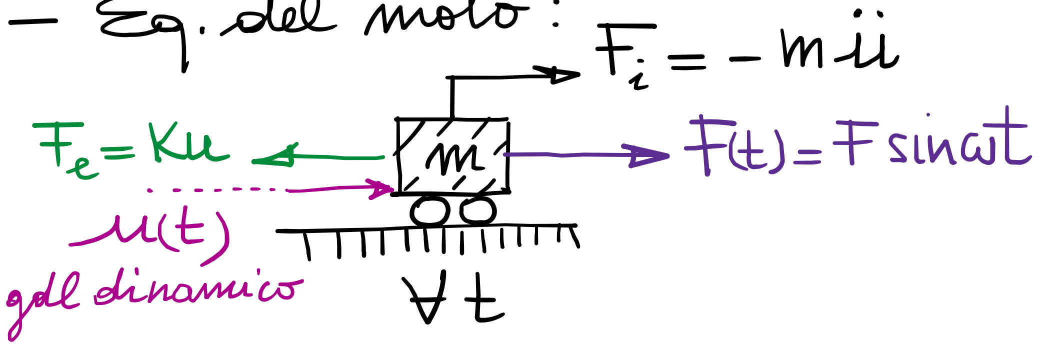




Interesse:

- casi pratici, ad es. in presenza di masse rotanti eccentriche
- "madre" di tutte le forzanti periodiche $\Rightarrow$ sviluppo in serie di Fourier
- primo passo fondamentale di forzante dinamica $F(t) = F\,f(t)$ — $[N]$; $f(t)$ f.ne adimensionale
- consente di introdurre concetti fondamentali sulla risposta dinamica dei sistemi forzati (amplificazione e sfasamento della risposta)
- passibile di trattazione analitica

– Eq. del moto:



$$\cancel{m}\ddot{u} + Ku = \overbrace{\frac{K}{K}}\frac{F}{m}\sin\omega t \qquad \frac{K}{m} \rightarrow \omega_1^2, \quad \frac{K}{m} \rightarrow \omega_1^2, \quad \frac{F}{K} \rightarrow u_{st}$$

$$u_{st} = \frac{F}{K}$$ spostamento "statico"

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_1^2 u(t) = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t}$$

$\omega_1;\ \omega,\ u_{st}$ ⇝ dirett. propor.

– Integrale "particolare"

(risposta del sistema a termine noto non nullo):

$u_p(t) = U\sin\omega t$ moto armonico di pulsazione ω (della forzante) di ampiezza U da determinare

$\dot{u}_p(t) = \omega U\cos\omega t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 \underbrace{U\sin\omega t}_{u_p} = -\omega^2 u_p$

rapporto di frequenze

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1} = \dfrac{f}{f_1}$ "frequency ratio"

$\beta \neq 1$

$$U = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2}u_{st} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}u_{st} = \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}$$

– Sostituendo nell'eq.ne del moto:

$$-\omega^2 U\cancel{\sin\omega t} + \omega_1^2 U\cancel{\sin\omega t} \overset{\forall t}{=} \omega_1^2 u_{st}\cancel{\sin\omega t} \Rightarrow (\cancel{\omega_1^2} - \underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}_{\beta^2})U = \cancel{\omega_1^2}u_{st}$$

$u_p(t) = U \sin\omega t$

$= \pm N u_{st} \sin\omega t$ ($+$: $\beta<1$; $-$: $\beta>1$)

$\dfrac{|U|}{u_{st}} = \dfrac{1}{|1-\beta^2|}$

f.ne pari $=$ in $\pm\beta$

$\to 0$ per $\beta \to \infty$

$\to \pm\infty$ " $\beta \to 1$

$\beta \neq 1$

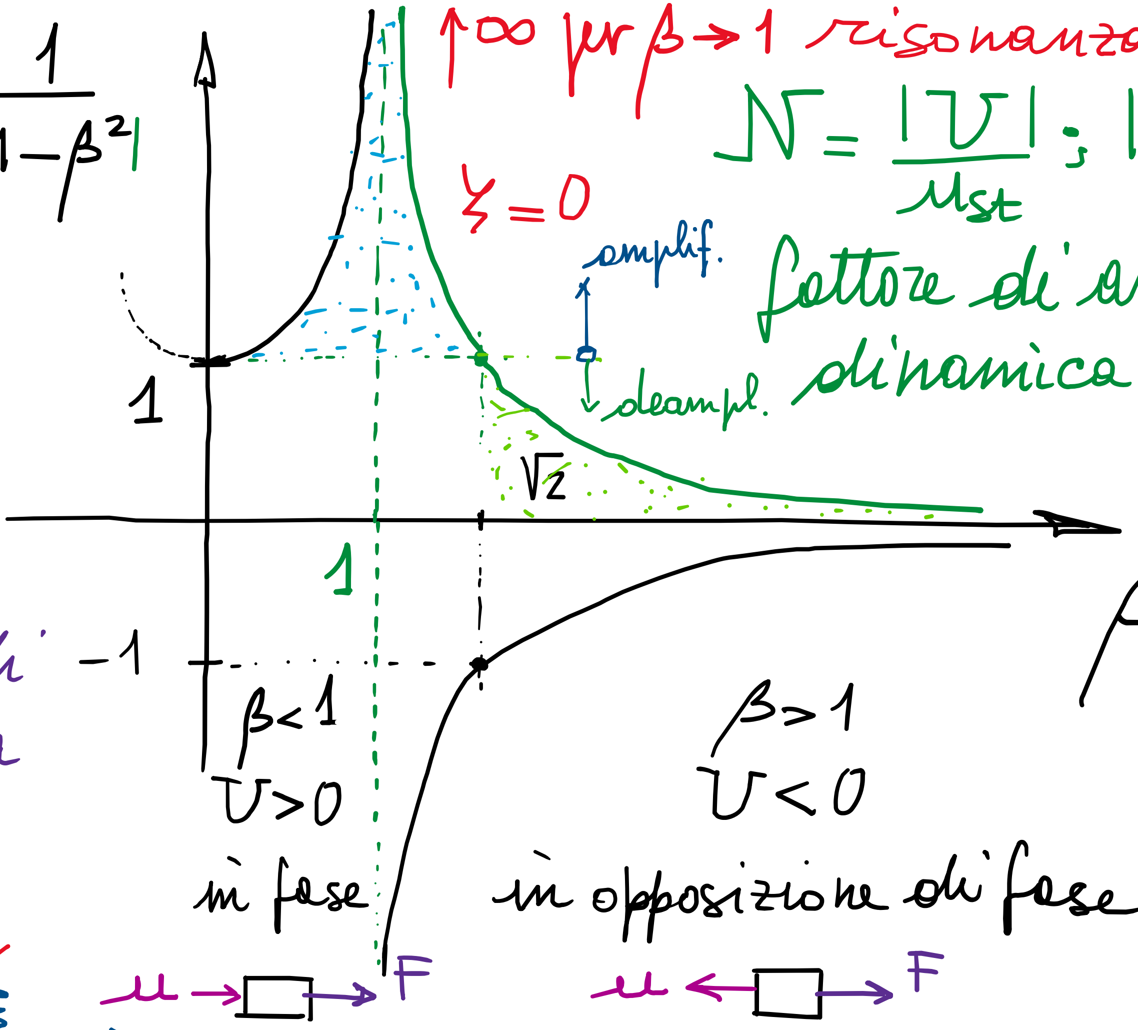
curva di risonanza

$\uparrow \infty$ per $\beta \to 1$ risonanza (ampiezza illimitata per $\omega \to \omega_1$)

$N = \dfrac{|U|}{u_{st}}$; $|U| = N u_{st}$

fattore di amplificazione dinamica

$N = \dfrac{1}{|1-\beta^2|} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$



$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1}$

$N \geq 1$, $0 \leq \beta \leq \sqrt{2}$

$N \leq 1$, $\beta \geq \sqrt{2}$

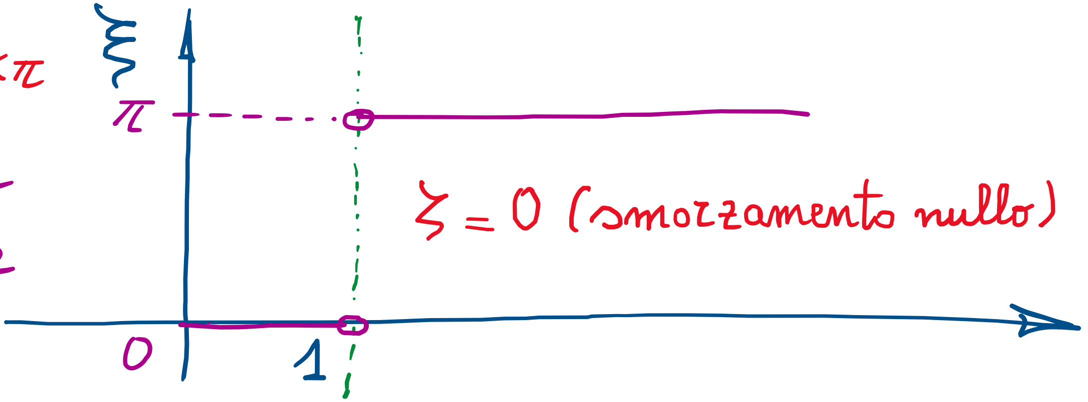
$u_p(t) = N u_{st} \underbrace{\sin(\omega t - \xi)}_{\boxed{\sin\omega t} \cos\xi \,-\, \cos\omega t \cancel{\sin\xi}}$

$\cos\xi$: $1 \Rightarrow \xi = 0$; $-1 \Rightarrow \xi = \pi$

$\xi = 0 + K\pi$

ξ angolo di fase o fase

curva di fase



$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1}$

– Risposta complessiva del sistema: $\left.\begin{array}{l} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{array}\right\}$ c.i.

$$u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$$

integrale generale

$F=0$ int. gen. omogen. ass. — $F \neq 0$ int. part.

$$= A \sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

$$\dot{u}(t) = \omega_1 A \cos\omega_1 t + - \omega_1 B \sin\omega_1 t + + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\,\omega\cos\omega t$$

N.B.: composizione di due moti armonici di pulsazioni differenti (ω_1 e ω) $\Rightarrow$ non un moto armonico

– Imponendo le c.i.:

$$\begin{cases} u(0) = \boxed{B = u_0} \\ \dot{u}(0) = \omega_1 A + \dfrac{\omega}{1-\beta^2} u_{st} = \dot{u}_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2} u_{st}}$$

– Integrale generale finale:

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}\right)\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

comp. di moto armonico di puls. ω_1 (risposta "transiente", per $\xi \neq 0$)

comp. di moto armonico di puls. ω (risposta a "regime", "steady-state") ← per $\xi \neq 0$

$$= \frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\left(\sin\omega t - \beta\sin\omega_1 t\right)$$

termine spesso mancante ⟵ risposta armonica alle sole c.i. e $F=0$

risposta a F armonica per c.i. omogenee ($u_0=0$; $\dot{u}_0=0$)

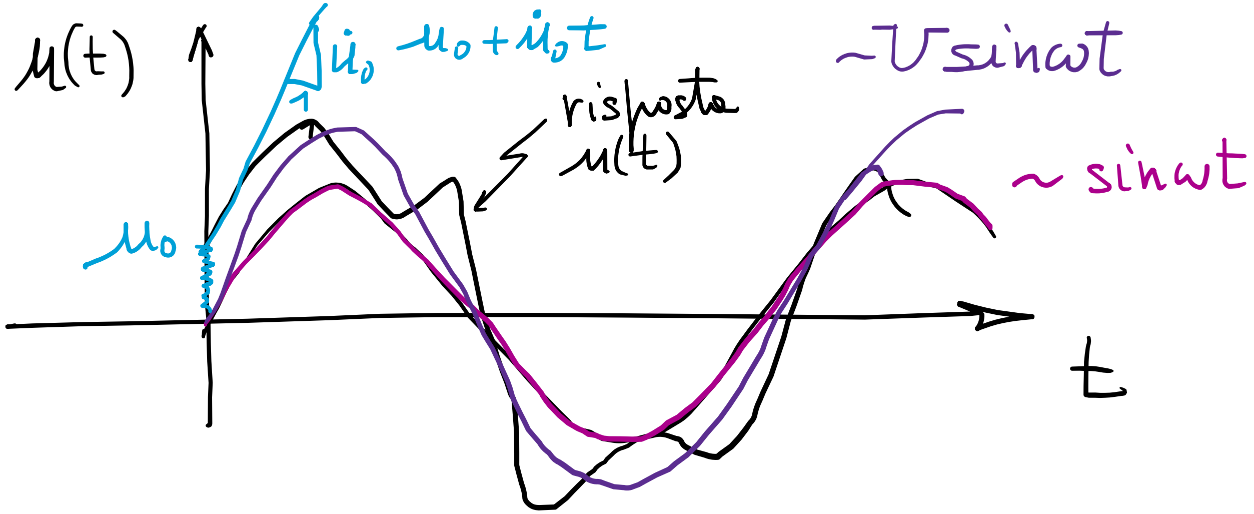
– Risposta dinamica

$\beta < 1$

$(\omega < \omega_1)$

forz.

sist.



– Attenzione ai "battimenti" $\Rightarrow$ preludio alle risonanze

per $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} \simeq 1 \; (\omega \simeq \omega_1)$

$(\sin \omega t - \beta \sin \omega_1 t)$

$\simeq \sin \omega t - \sin \omega_1 t$

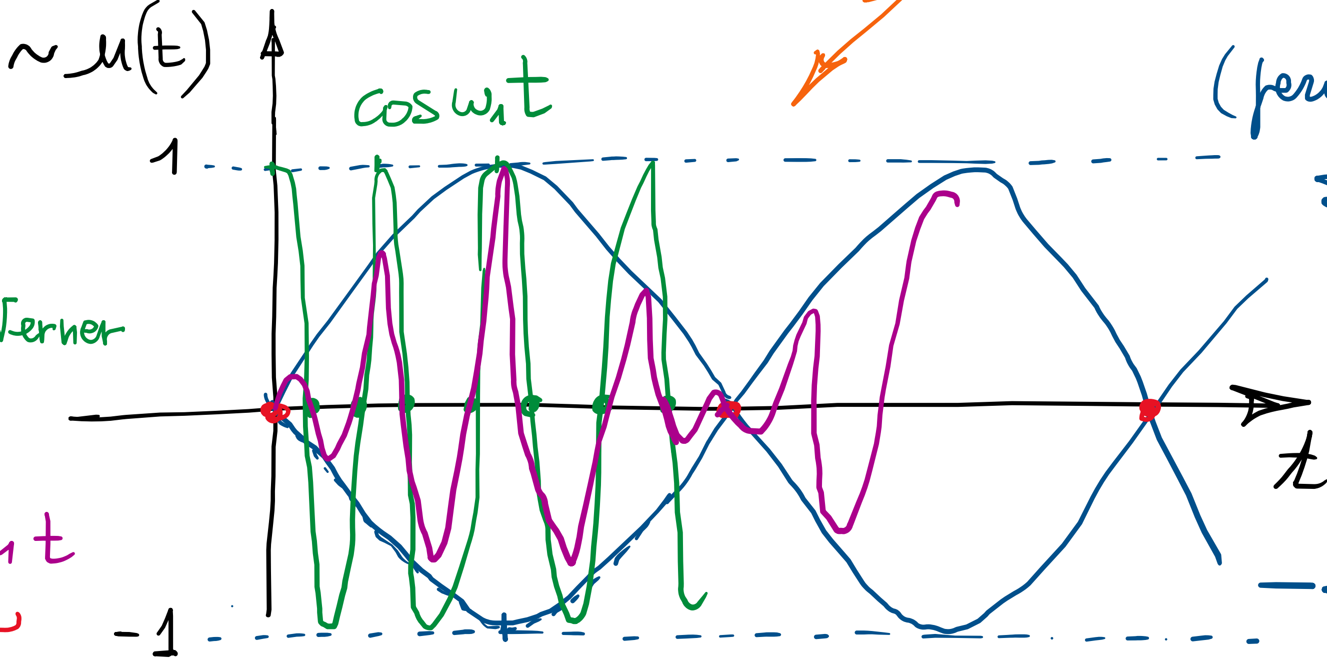
formule di prostaferesi o di Werner

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\simeq 2 \sin \underbrace{\frac{\omega - \omega_1}{2}}_{\sim\, \omega_\varepsilon} t \cdot \cos \underbrace{\frac{\omega + \omega_1}{2}}_{\sim\, \omega_1} t$

piccola $\sim \omega_\varepsilon$

effetto di composizione di moti armonici di pulsazioni simili



(periodo grande)

$\sin \omega_\varepsilon t$

$-\sin \omega_\varepsilon t$

"nodi" con $u = 0$

– Condizioni di risonanza ($\beta=1$) $\Rightarrow$ $\omega=\omega_1$. Nuovo integrale particolare:

$$u_p(t) = U\, t \cos\omega_1 t \quad \dashrightarrow \quad u_p(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}\, t \cos\omega_1 t$$

$$\dot{u}_p(t) = U \cos\omega_1 t + U t\, \omega_1 (-\sin\omega_1 t)$$

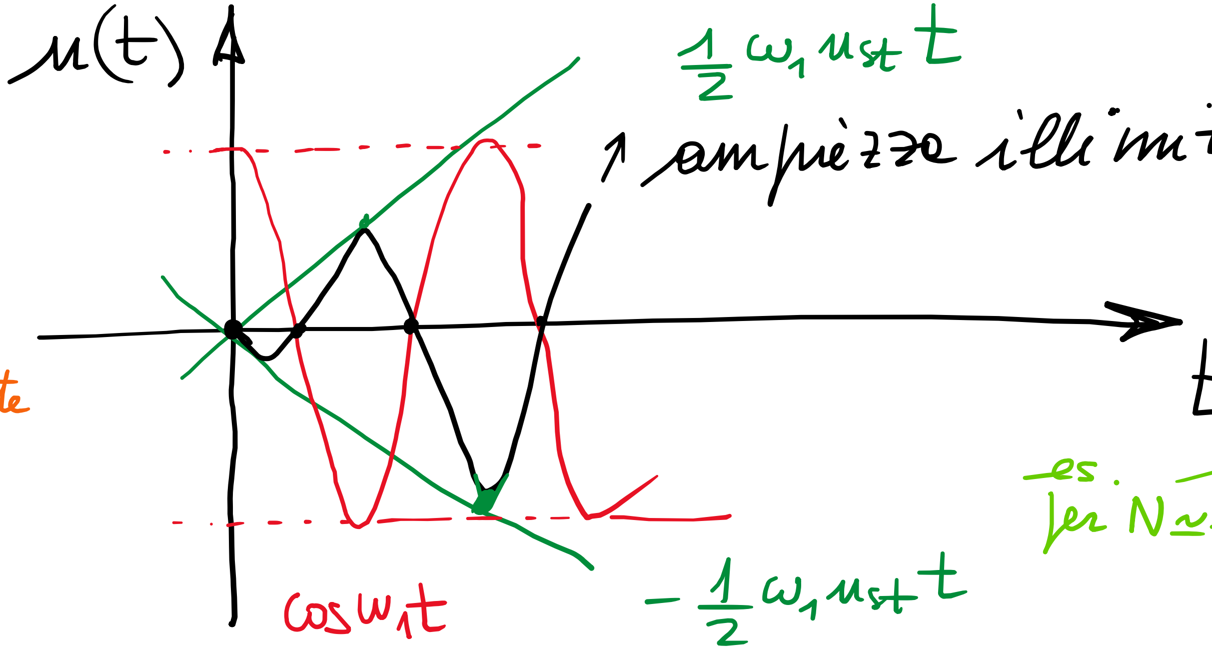
$$\ddot{u}_p(t) = \underline{-\omega_1 U \sin\omega_1 t - U\omega_1 \sin\omega_1 t} - U t\, \omega_1^2 \cos\omega_1 t$$

ampiezza lineare (divergente) in t

$\Rightarrow$ eq. del moto

$$-2\omega_1 U \sin\omega_1 t - \cancel{U t\, \omega_1^2 \cos\omega_1 t} + \cancel{\omega_1^2 U t \cos\omega_1 t} = \omega_1^2 u_{st} \sin\omega_1 t$$

$$-2\cancel{\omega_1} U = \omega_1^{\cancel{2}} u_{st} \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}$$



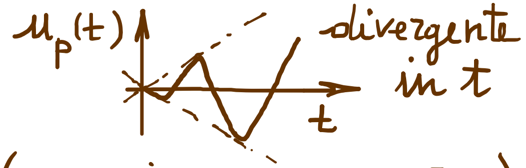
come se fosse moto armonico di pulsaz. $\omega=\omega_1$ ma con ampiezza linearmente divergente in t

↑ ampiezza illimitata per $t\to\infty$

(può portare alla uscita dal campo elastico, e al collasso)

es. per $N\simeq 10$

Concetti fondamentali :

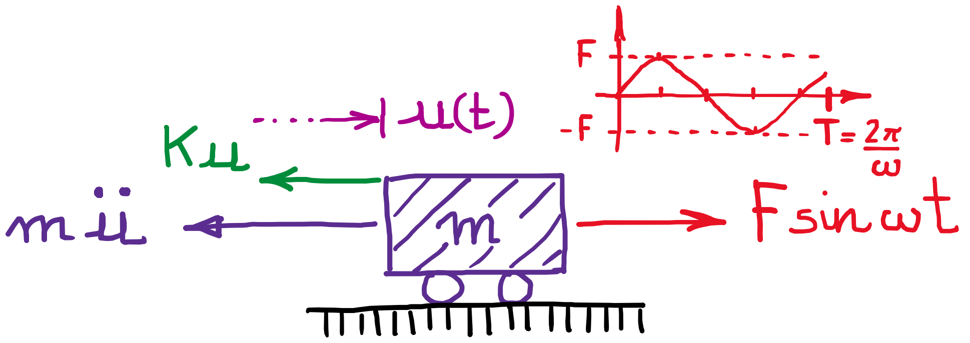


In risonanza [$\beta = 1$]:
$$u_p(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}\, t\cos\omega t$$

- Risposta non smorzata a forzante armonica ($F(t) = F\sin\omega t$)
  ($c = 0$, $\zeta = 0$)

m, K = cost
sistema tempo-invariante

con c.i. $\begin{cases} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{cases}$ @ $t = t_0$



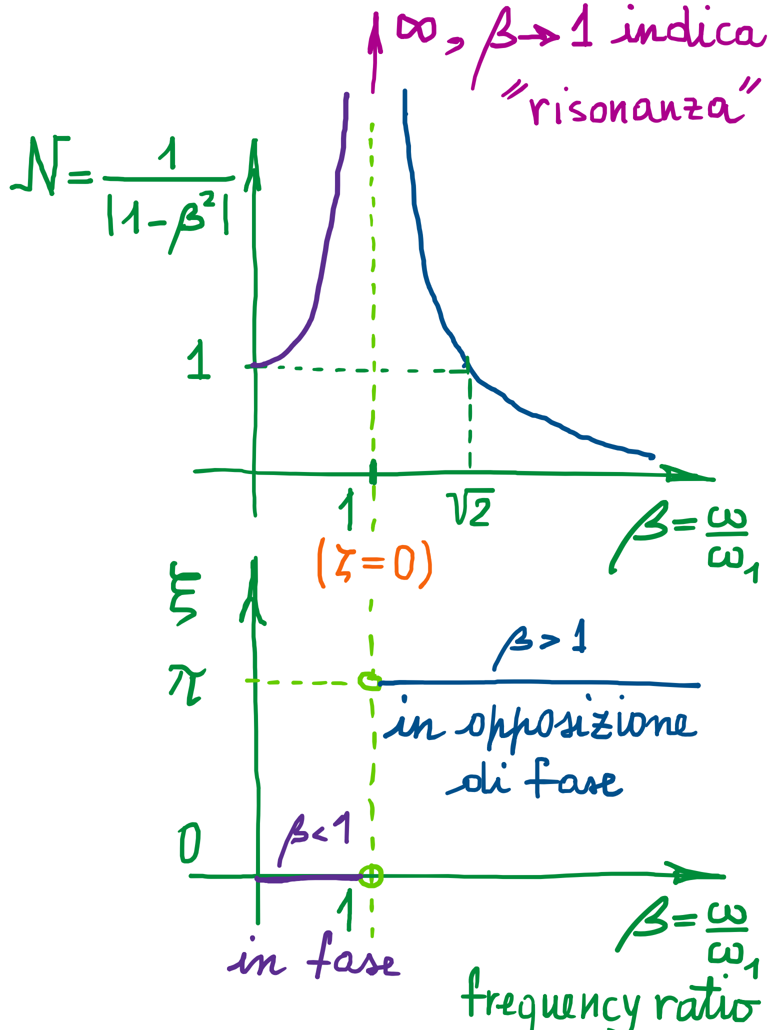
$$m\ddot{u}(t) + Ku(t) = F\sin\omega t$$
$$\Downarrow$$
$$\ddot{u}(t) + \underbrace{\omega_1^2}_{\frac{K}{m}} u(t) = \omega_1^2 \underbrace{u_{st}}_{\frac{F}{K}} \sin\omega t \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Integrale particolare ($\beta \neq 1$):

$$u_p(t) = N u_{st} \sin(\omega t - \xi)$$

ξ: fase (sfasamento in ritardo tra risposta e forzante)

N: fattore di amplificazione dinamica (rispetto a $u_{st} = F/K$)



SOMMARIO (Lez. 04)

- Risposta forzata (forzante armonica $F(t) = F \sin \omega t$).
- Amplificazione dinamica $N(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$ ($U \simeq N u_{st}$). pulsaz. forzante
- Sfasamento della risposta — in fase ($\xi = 0$), $\beta < 1$; — in opposiz. di fase ($\xi = \pi$), $\beta > 1$. $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$ frequency ratio; pulsazione sistema
- Integrale generale: $u(t) = u_{g0}(t) + u_p(t)$.
- Risonanza ($\beta = 1$; $\omega = \omega_1$): risposta divergente in t (ampiezza illimitata). $u \to \infty$
- Next step: caso smorzato (risposta "steady-state"), con picco di risonanza di entità limitata, $\Leftarrow$ pur elevata, per ζ piccoli ($\zeta \ll 1$) dipendente dal fattore di smorzamento ζ.