

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

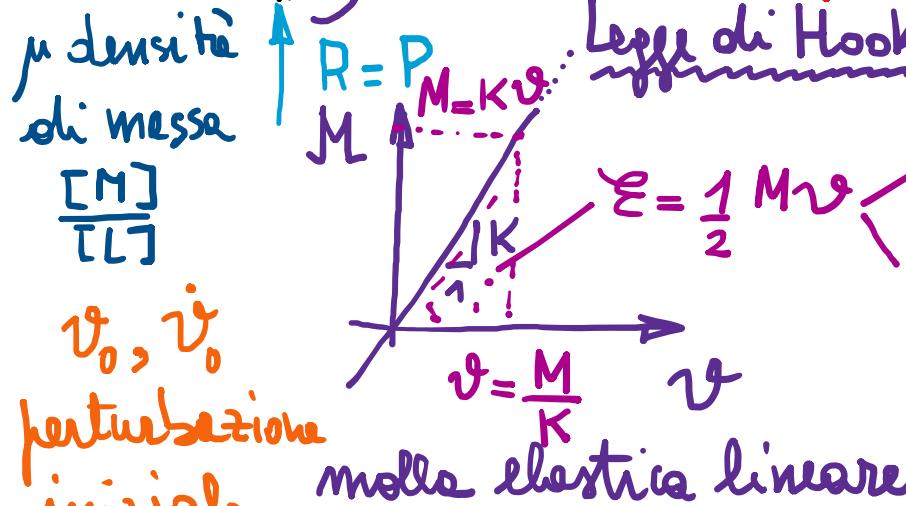
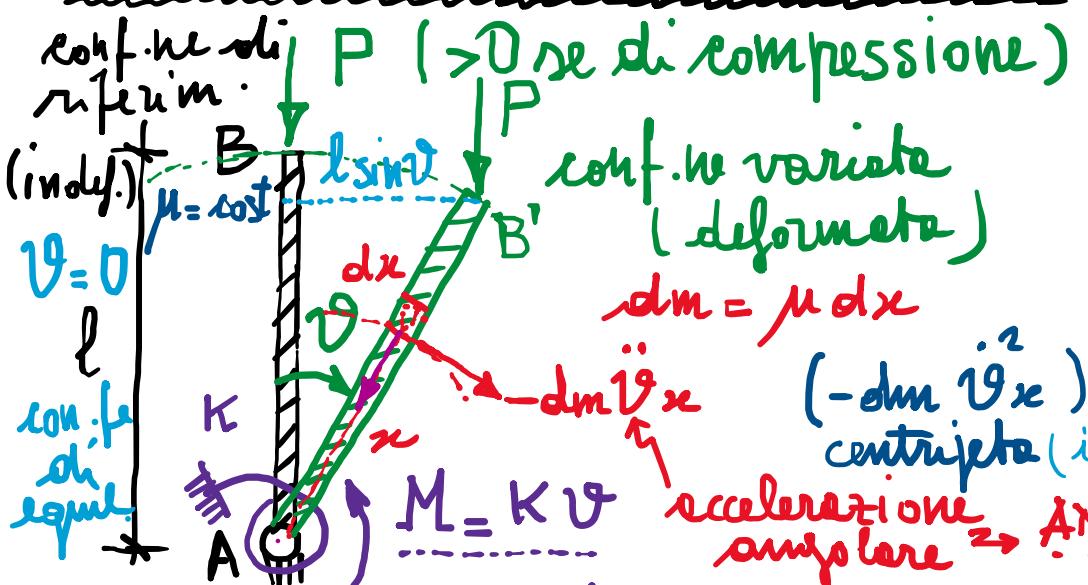
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 16

II - Instabilità delle Strutture



$$\text{eq. ne del moto: } P l \sin \vartheta = K\vartheta + \mu \int_0^l x^2 dx \ddot{\vartheta}$$

$$I = \frac{1}{3} \mu l^3 \text{ momento d'inerzia} > 0$$

(Introduzione ai sistemi discreti - SDOF)

- Sistemi a deformabilità elastica concentrata
- Forze conservative (campo gravitazionale):
 - Per direz. verticale costante (no forze "follower")
 - di intensità costante (o variabile in maniera "quasi-statica") $\Rightarrow P = \mu P_0 > 0$
 - L'incarico base
 - L'incremento del carico

Eq. ne di "equilibrio dinamico" (alla

$$\Rightarrow P l \sin \vartheta = K\vartheta - \int_0^l (-dm \ddot{\vartheta}_x) x \text{ rispetto alle rotazioni} \quad (\text{momento ribatt. mom. elastico legato all'inerzia non-lineare})$$

effetto destabilizzante

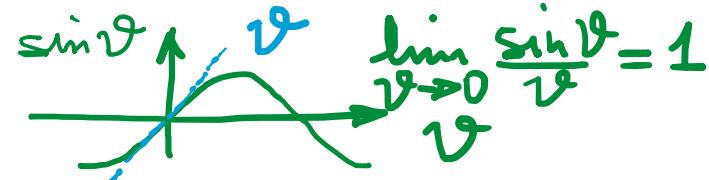
$$\text{momento d'inerzia}$$

Eq. del moto:

$$P_l \sin \vartheta = I \ddot{\vartheta} + K \vartheta \quad \text{eq. del moto non-lin.}$$

lin. non-lin.

$$(I \ddot{\vartheta} + K \vartheta - P_l \sin \vartheta = 0)$$



Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" ($|\vartheta| \ll 1$) $\Rightarrow \sin \vartheta \approx \vartheta$

eq. ne lineare

$$I \ddot{\vartheta} + (K - P_l) \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \frac{K - P_l}{I} \vartheta(t) = 0$$

linearizzazione
(dell'eq. ne del moto)

mom.

d'inerzia

$$I > 0$$

rigidezze

totale

: $K_{\text{elast}} - K_g$ rigidezze "geometriche" (sottrae rigidezze del sistema, al crescere del carico P)

$$1) K - P_l > 0 ; \quad P < \frac{K}{l} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta(t) = 0 \quad \omega_1^2 = \frac{K - P_l}{I} \quad (\text{dip. del valore di } P)$$

(caso sub-critico)

eq. ne dei moti armonici

Sistema stabile (secondo criterio di stabilità

dinamico di LIAPUNOV): i.e.

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_0 = A \\ \ddot{\vartheta}_0 = \omega_1 B \end{cases}$$

il sistema non tende ad abbondare le conf. ne di rif. (di equil.), oscillando di poco intorno ad esse

(+ smorz.)

$$\vartheta(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t = \dot{\vartheta}_0 \cos \omega_1 t + \frac{\ddot{\vartheta}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

moto armonico

- di pulsaz. $\omega_1(P)$

- di ampiezza $\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{\ddot{\vartheta}_0^2}{\omega_1^2}}$ (piccole)

attorno alle conf. ne di riferimento che attira progressivamente l'oscillazione

$$2) K - Pl = 0; \quad P = \frac{K}{\ell} \Rightarrow I \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta(t) = A + Bt$$

Perdita di stabilità delle conf. ne di equil. $\dot{\vartheta} = 0$: sistema tende a divergere, cioè ad abbandonarla

Condizione di transizione $P_{cr} = \frac{K}{\ell}$
carico critico

$$3) K - Pl < 0; \quad P > \frac{K}{\ell} \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \alpha^2 \vartheta = 0$$

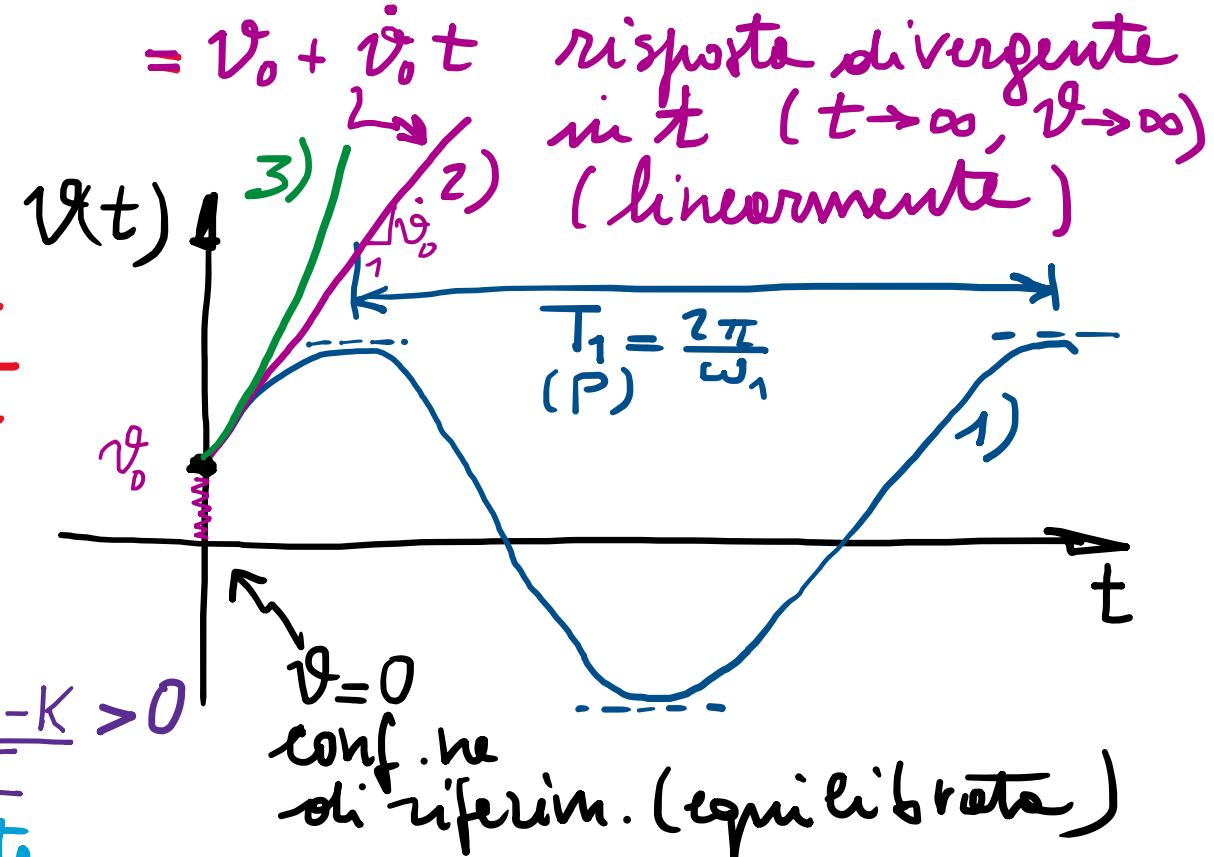
eq. ne corrett. ($e^{\pm \alpha t}$)

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha$$

$$\vartheta(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\vartheta_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \left(\vartheta_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}$$

caso supercritico



$$P = p P_{cr} = p \frac{K}{\ell} \quad (\text{per } p < 1 \text{ carico critico})$$

In sintesi:

- Stabile $P < P_{cr} = \frac{K}{\ell}$ ($p < 1$)

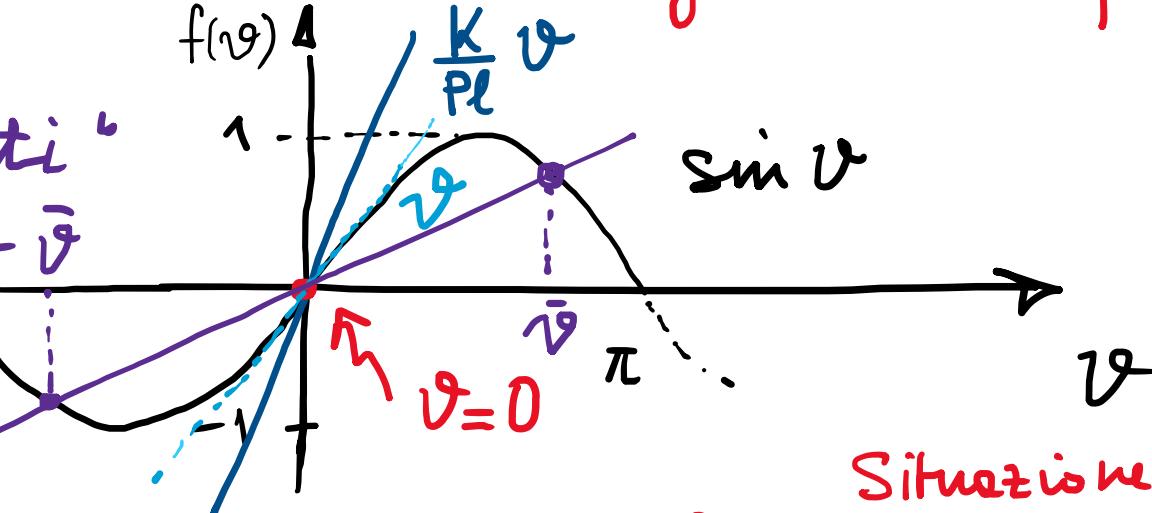
- Instabile $P \geq P_{cr} = \frac{K}{\ell}$ ($p \geq 1$)

Approssimazione statico
 eq. di equil. $\{ P \sin \vartheta = K \vartheta \} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{K}{P \ell} \vartheta$ ($\vartheta=0$ è una conf. ne di equil.)

nelle conf. ne deformate (gli spostamenti sono tali da influenzare l'eq. ne di equilibrio) :

- analisi in "grandi spostamenti"
- non-linearietà geometrica - $\bar{\vartheta}$

$$1) \frac{K}{P \ell} > 1; \quad P < \frac{K}{\ell} \quad \vartheta = 0 \text{ unica solut.}$$



$$2) \frac{K}{P \ell} = 1; \quad P = \frac{K}{\ell} = P_{cr} \quad \text{infinte soluzioni nell'intorno di } \vartheta = 0 \text{ transizione critica}$$

$$3) \frac{K}{P \ell} < 1; \quad P > \frac{K}{\ell} \quad \text{più soluz. equil. } \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = 0 \\ \vartheta = \pm \bar{\vartheta} \end{array} \right.$$

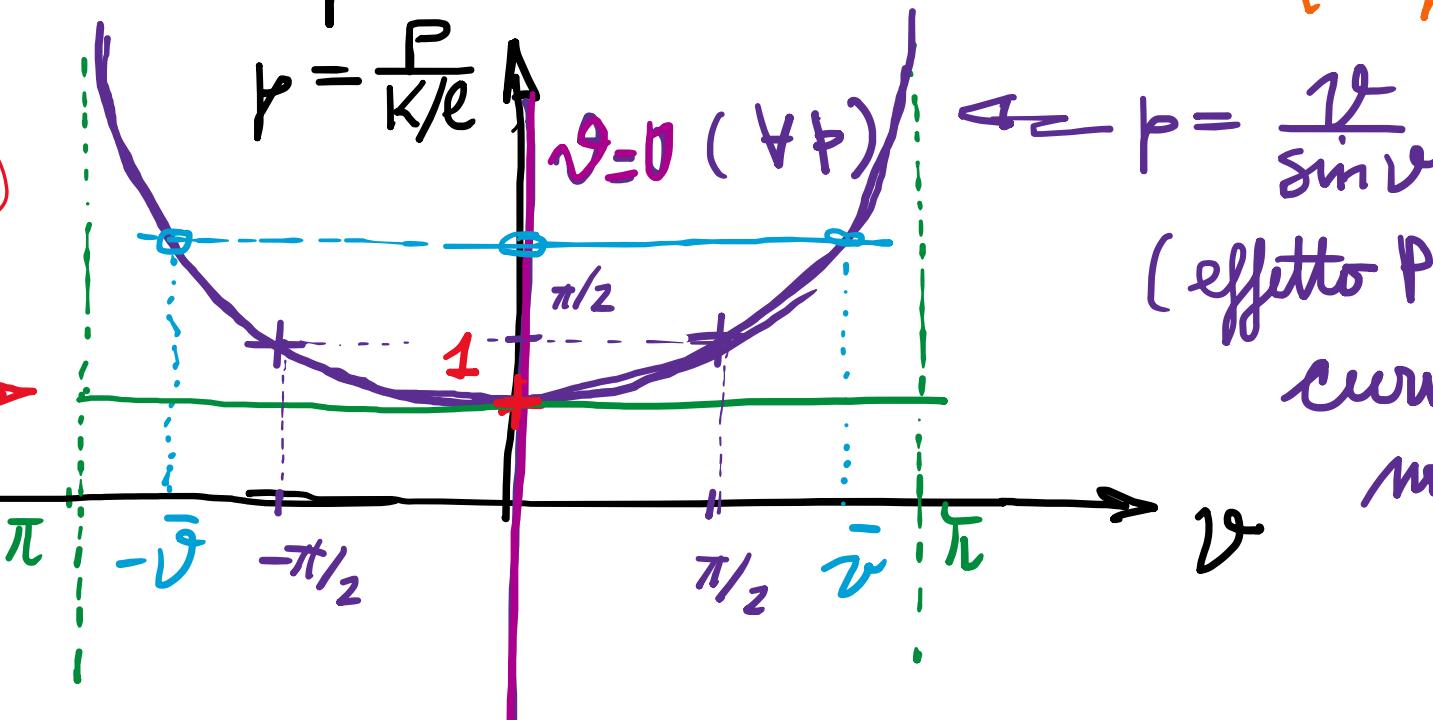
Situazione di transizione critica : si produce per lo stesso valore $P_{cr} = \frac{K}{\ell}$ preced. det. con LIAPUNOV

$$p = \frac{P \ell}{K}; \quad p = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} \quad P = P_{cr} = \frac{K}{\ell} \quad \text{perdita di stabilità.} \quad (P = p \frac{K}{\ell} = p P_{cr}; \quad P_{cr} = 1)$$

- Mappa dei percorsi di equilibrio: (f.n. "pari" $p(\vartheta) = p(-\vartheta)$)

$$P = P_{cr} = \frac{K}{l} \quad (p=1)$$

p.t. di biforcazione dei percorsi di equilibrio



$$p = \frac{P}{\sin \vartheta}$$

(effetto $P-\Delta$)

curva forza-spost.
non lineare

- Il carico critico viene deolto in base alla presenza di un p.t. di biforcazione dei percorsi di equilibrio (perdita di unicità della solut.)

- Idem per analisi in spostamenti "geometricamente fricoli": (resto utile a determinare P_{cr})
- $|v| \ll 1 \Rightarrow \sin \vartheta \approx v \Rightarrow (K - Pl)v = 0$
- $K - Pl \neq 0 \Rightarrow v = 0$
- $K - Pl = 0 \Rightarrow v = v_{cr}$
- p.t. di biforcaz. per $P = \frac{K}{l} = P_{cr}$

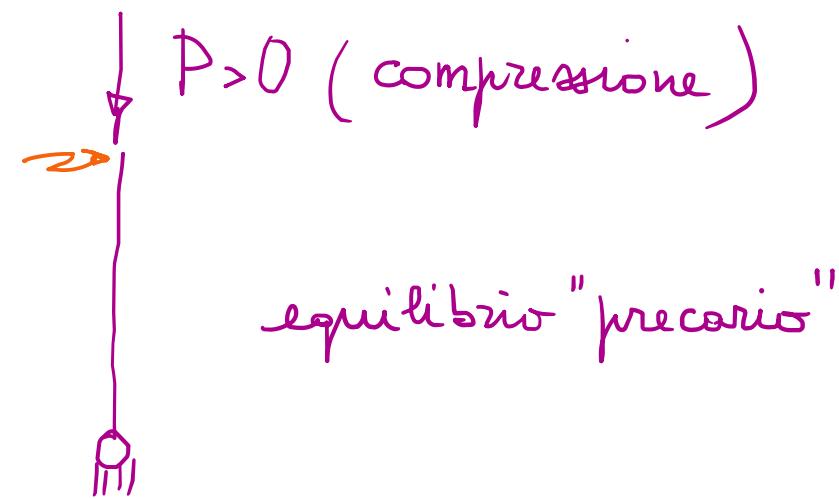
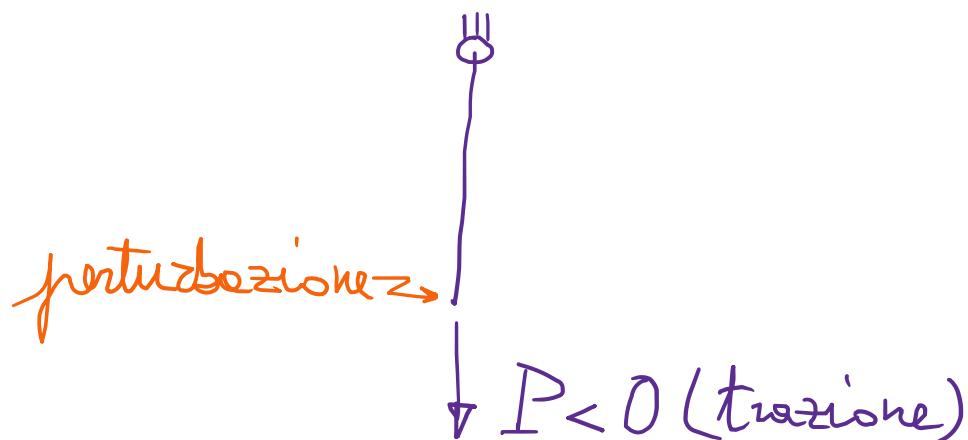
Concetti fondamentali:

- Dalle Dinamica alle Instabilità delle Strutture:

Tornando ad un ambito "statico" (carichi lentamente variabili nel tempo), si mira ad indagare se la configurazione di equilibrio risulti stabile oppure no.

Per stabile, con criterio di stabilità "dinamico" (alla Liapunov), si intende la possibilità che piccole perturbazioni della configurazione non vengano ad alterarla, nel senso di far tendere il sistema ad abbandonarla.

- Due esempi intuitivi:

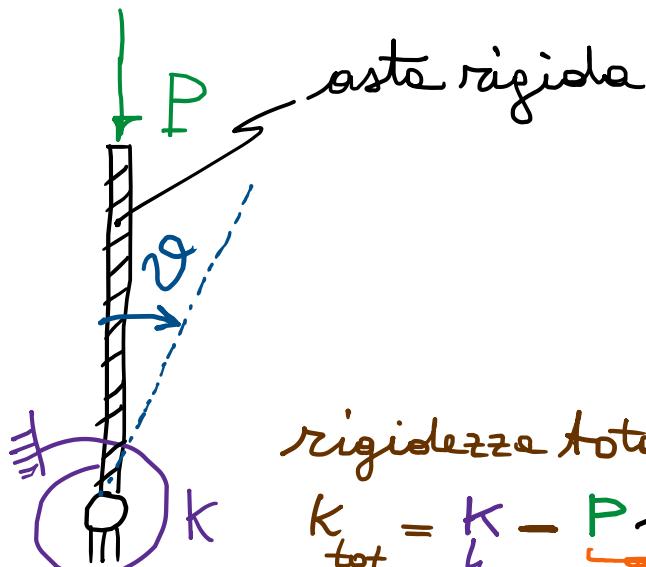


- L'analisi potrà richiedere di abbandonare l'ambito lineare, indagando effetti di non-linearietà (geometrica) nella relazione tra carichi e spostamenti, ritenendo cioè gli spostamenti "grandi", vale a dire tale da influenzare le condizioni di equilibrio.

- Carico critico: condizione "spontanea" stabilità/instabilità.

esempio
discreto
SDOF

sistema a deformabilità
elastica concentrata
→ molla
(elastica lineare)



rigidezza totale

$$K_{tot} = \frac{K}{l} - \frac{P l}{\theta}$$

elastica

geometrica

(sottrae rigidità)

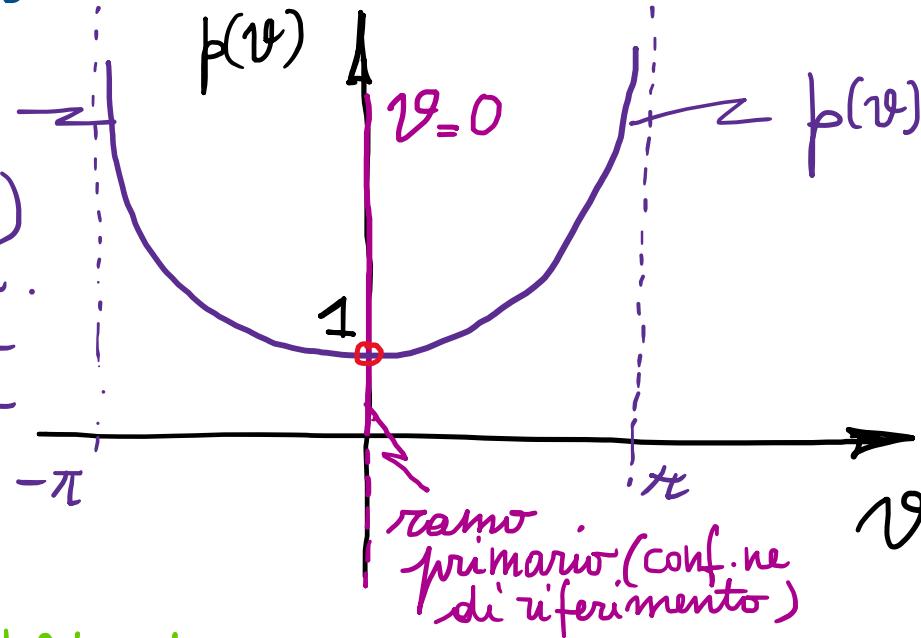
$$P_{cr} = \frac{K}{l}$$

parametro di
rigidezza
(elastico lineare)

parametro
geometrico del
sistema

- Approssimazione statico: carico critico sollecitato come punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio.

ramo biforcato \rightarrow
 (bifurcated branch)
 configurazioni di equil.
 deformate, discoste da
 quello di riferimento



$$p(v) = \frac{P(v)}{K/l} = \frac{v}{\sin \vartheta}$$

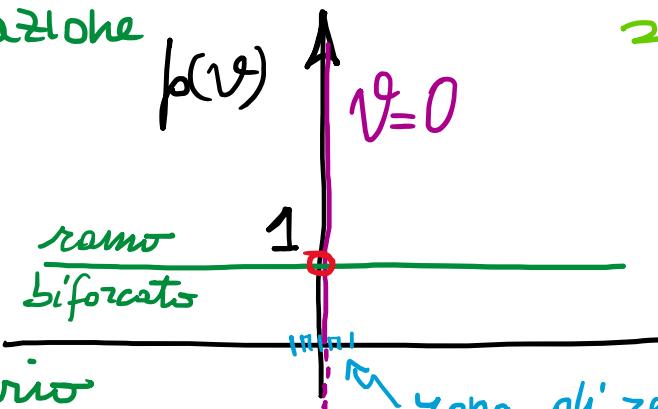
$\underbrace{\hspace{1cm}}_{P_{cr}}$

curva di risposta
 "carico - spostamento"
 non-lineare
 ("effetto $P-\Delta$ ")

- Per spostamenti "geometricamente piccoli": linearizzazione dell'eq. di equilibrio e medesimo p.t. di biforcazione per $p=1$:

$$(K - P l) v = 0$$

$\begin{cases} p \neq 1, v = 0 \\ p = 1, v \text{ arbitrario} \end{cases}$



\Rightarrow analisi comunque utile
 ad individuare (più
 semplicemente) il carico
 critico $P_{cr} = \frac{K}{l}$

zona di reale validità per v piccoli, $|v| < 1$

SOMMARIO (Lec. 16)

- Dalle Dinamica all'Instabilità delle strutture \Rightarrow criterio dinamico di stabilità secondo LIAPUNOV.
- Carico critico: valore caratteristico che segnala le perdite di stabilità del sistema (piccole perturbazioni non restano più confinate a risposta limitata).
- Transizione dinamica (verso il collasso).

Instabilità delle Strutture

- Approssimazione statica: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate (perdita di unicità della soluzione).
- Non-linearità geometrica carico/spostamento.
- Carico critico: p.t.o. di biforcazione nelle mappe dei percorsi di equilibrio.
- Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" (con stesso $P(r)$).

Next step: Approssimazione energetica per indagare la natura (stabile/instabile) delle configurazioni di equilibrio.