Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

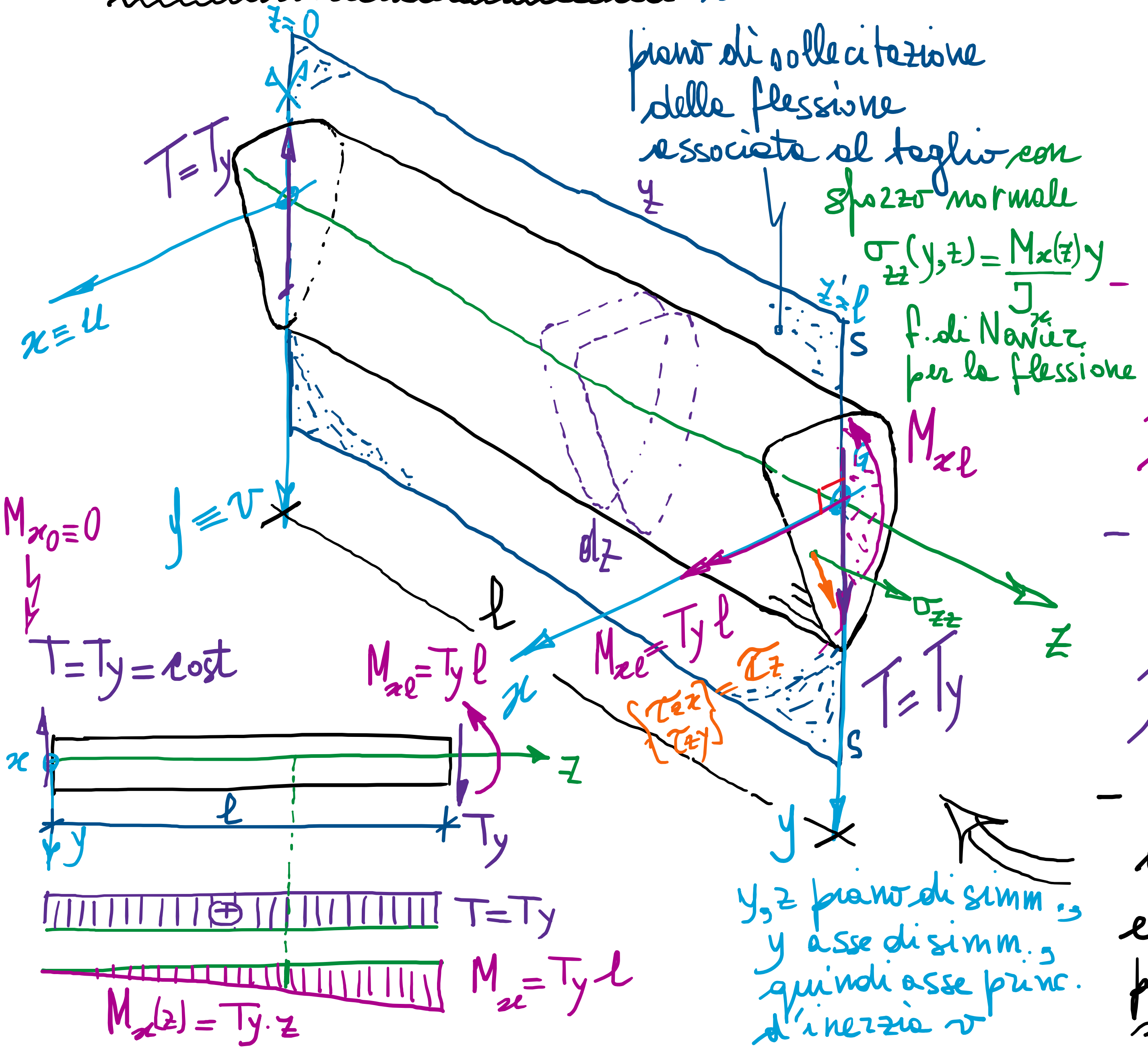
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 22

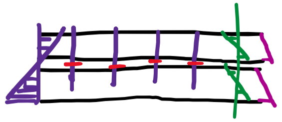
3) Azione tagliante o taglio (flessione composta)



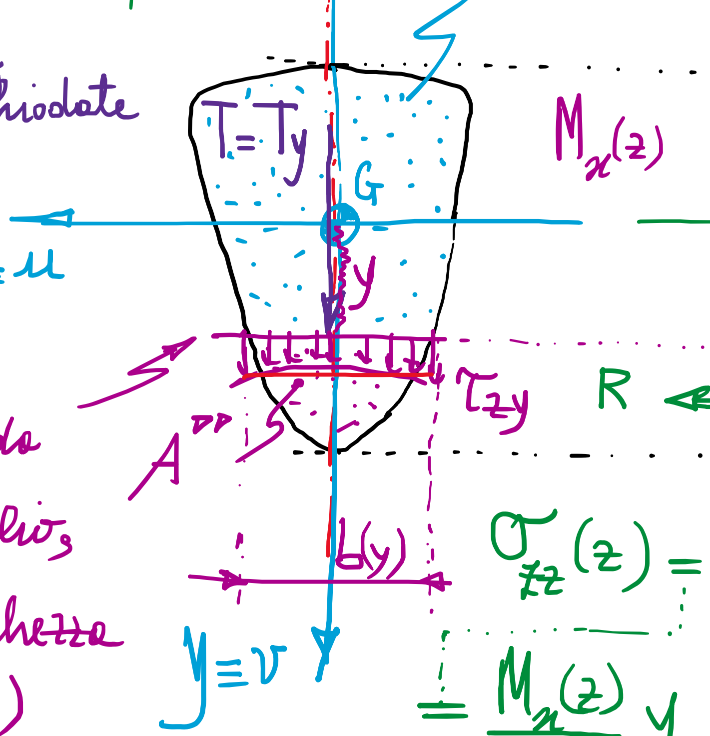
- Risultano presenti delle azioni taglianti (uguali e contrarie) sulle basi e un momento flettente, in modo da avere un sistema di forze autoequilibrato, anche alla rotazione ⇒ sollecitazione composta.
- In generale, la trattazione del caso di DSV del taglio non si presenta agevole: soluz. analitica possibile per casi particolari, anche mediante sviluppi in serie.
- Soluzioni approssimate risultano possibili e utili a determinare il campo delle tensioni tangenziali a fini ingegneristici, in particolare per casi specifici.
- Ad esempio, nel caso di prisma a sezione compatta avente un asse di simmetria retta e caricata lungo l'asse di simmetria, che pertanto è asse princ. d'inerzia (⇒ flessione retta), si ottiene stima efficace delle tau da taglio.

- **Trattazione approssimata del taglio secondo D. I. Jourawsky (~1856)**

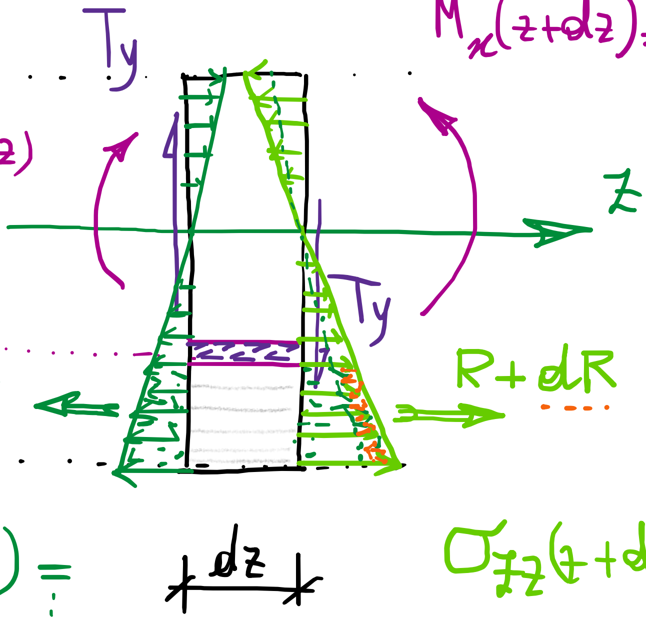
Utile a fini ingegneristici e fondata sul ragionamento di equilibrio (alla traslaz.) seguente.



assi inchiodate



corda di taglio, di larghezza b(y)



$$\sigma_{zz}(z) = \frac{M_x(z)}{J_x}\, y$$

formula di Navier per la flessione (indip. da x)

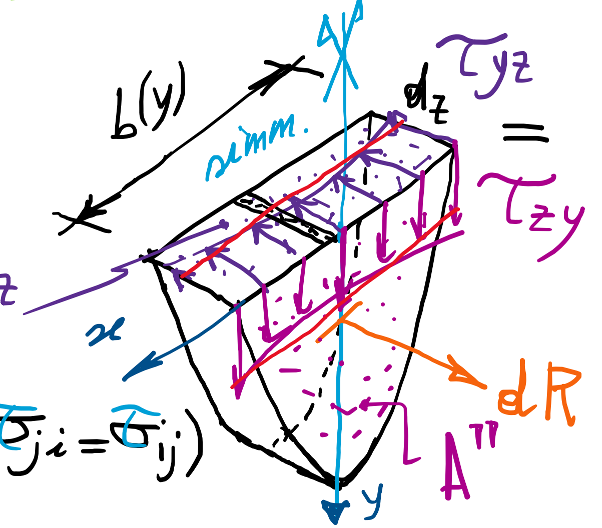
$$M_x(z+dz) = M_x(z) + \underbrace{dM_x}_{T_y\,dz}$$

$$M_x(z) = T_y\, z \qquad \frac{dM_x}{dz} = M_x'(z) = T_y$$

$$d\sigma_{zz} = \frac{\overbrace{T_y\,dz}^{dM_x}}{J_x}\, y \leftrightarrow dR$$

$$\sigma_{zz}(z+dz) = \sigma_{zz}(z) + d\sigma_{zz}$$

$\tau_{zy}(x; \text{in } y)$ attese simmetriche rispetto a y (ad es. maggiori verso l'esterno, bordo non protetto)



$\tilde{A} = b(y)\,dz$

$(\sigma^T = \sigma;\ \sigma_{ji} = \sigma_{ij})$

Equil. alla traslaz. nella direzione z:

Risultante delle τ_{yz} su $\tilde{A}$

=

Risultante dR su A'' dovuta a $d\sigma_{zz}$

Equilibrio alla traslazione (in direzione z):

$$\int_{\tilde{A}} \tau_{yz}(x;y)\, dx\,\cancel{dz} = \int_{A''} \frac{d\sigma_{zz}}{dz}\, dA'' = \int_{A''} \frac{T_y\,\cancel{dz}}{J_x}\, y\, dA'' = \frac{T_y\,\cancel{dz}}{J_x} \underbrace{\int_{A''} y\, dA''}_{S_x''(y)}$$

momento statico di A'' rispetto a x

$$\bar{\tau}_{yz}(y)\; b(y) = \frac{T_y}{J_x}\, S_x''(y)$$

valor medio delle $\tau_{yz}(x;y)$ alla quota y lungo la corda

definiz. di valor medio su di un intervallo

$$\bar{\tau}_{yz}(y) = \frac{1}{b(y)} \int_{-\frac{b}{2}(y)}^{+\frac{b}{2}(y)} \tau_{yz}(x;y)\, dx$$

Formula di Jourawsky sul valor medio delle τ_{zy} lungo la corda:

$$\tau_{zy} \equiv \bar{\tau}_{zy}(y) = \frac{T_y\, S_x''(y)}{J_x\, b(y)} = -\frac{T_y\, S_x'(y)}{J_x\, b(y)}$$

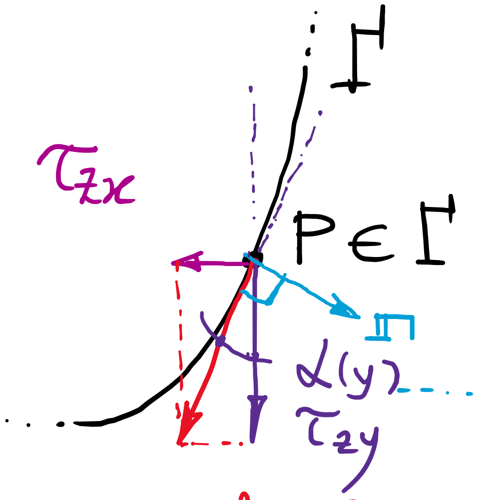
- dirett. prop. al taglio applicato T_y
- dirett. prop. al momento statico della porzione A'' rispetto all'asse x (asse neutro n-n della flessione retta associata al taglio)
- invers. prop. al momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse x
- invers. prop. alla larghezza della corda alla quota y

Si ipotizza che le $\tau_{zy}(x;y)$ risultino pari al loro valor medio lungo la corda, quindi costanti lungo di essa.

hp. ⇒ approssimaz. della soluzione

[asse x baricentrico, $G \in x$: $S_x = S_x' + S_x'' = 0 \Rightarrow S_x'' = -S_x'$]

- Inoltre, se il contorno della sezione risulta inclinato rispetto all'asse di simmetria (asse y), devono risultare presenti anche delle τ_{zx}, in modo tale che sui punti del contorno il vettore τ_z risulti tangente al contorno (in quanto la superficie laterale del prisma di DSV è scarica, per ipotesi):



angolo di inclinazione locale del contorno

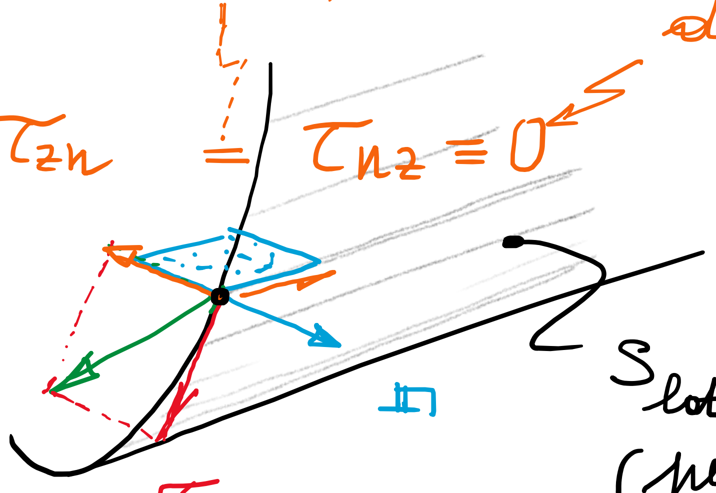
tangente al contorno ($\perp$ a π)

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$

$(\sigma^T = \sigma)$

deve essere nulla per ipotesi

componente τ_{zn} di τ_z normale al contorno



S_{lat} scarica (per ipotesi)

τ_{zt}

componente di τ_z tangente al contorno

In $P \in \Gamma$: $\tau_{zx}(y) = \tau_{zy}(y) \tan \alpha(y)$

$x = \pm \dfrac{b(y)}{2}$

$\Rightarrow$ τ_z deve risultare tangente al contorno, cioè $\perp$ a π (sola componente τ_{zt})

$\tau_z = \|\tau_z\| = \tau_{zt}$

- Ancora, l'andamento delle τ_{zx} lungo la corda, alla quota y, è atteso simmetrico rispetto all'asse y. (per la simmetria della sezione).
- In più, coerentemente con l'ipotesi $\tau_{zy}(y)=\text{cost}=\bar{\tau}_{zy}$, secondo Jourawsky, dalla terza eq.ne indefinita di equilibrio, si ottengono τ_{zx} lineari in x:

$$\mathrm{div}\,\sigma + \cancel{\underline{F}} = \underline{0} \quad \text{in } V \iff \sigma_{ij,i} + \cancel{F_j} = 0_j \qquad j = 1,2,3 \;\; (x,y,z)$$

$\underline{0}$ forze di volume nulle per ip.

$$j=3\ (z) \qquad \left(\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0\right)\frac{\partial}{\partial x} = {}_{,x}$$

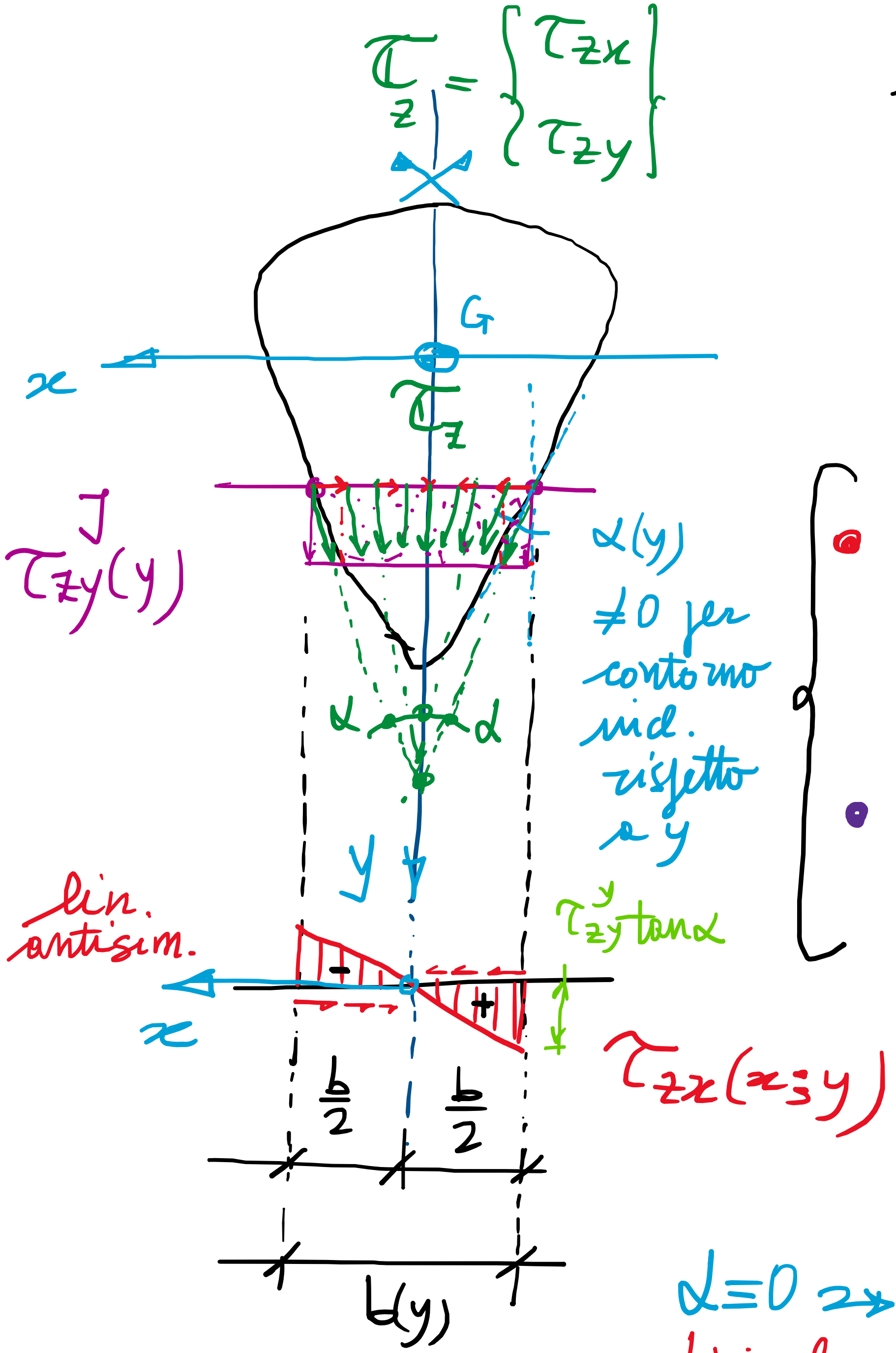
$$\tau_{zx,xx} + \tau_{zy,yx} + \sigma_{zz,zx} = 0$$

$$\boxed{0 = \tau_{zx,xx}} + \overset{J}{\tau_{zy}}{}_{,\cancel{x}y}^{\;0} + \sigma_{zz,\cancel{x}z}^{\;0} = 0$$

τ_{zx} lineari (e antisimmetriche) in x

Jourawsky $\tau_{zy}=\text{cost}=\bar{\tau}_{zy}$

Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni



Campo delle tensioni tangenziali (in sez. simmetrica):

$$\tau_{zx}(x;y) = -\frac{\tau_{zy}^J(y)\,\tan\alpha(y)}{b(y)/2}\cdot x$$

- $$\tau_{zx}(x;y) = -\frac{2\tan\alpha(y)}{b(y)}\,\tau_{zy}^J(y)\cdot x$$

- $$\tau_{zy}^J(y) = \frac{T_y\,S_x^{**}(y)}{J_x\,b(y)} = \text{cost in } x$$

N.B.: τ_{zy}^{max} ove $\frac{S_x^{**}(y)}{b}$ è max

$$\tau_z(x;y) = \|\tau_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^{J\,2}}$$

$$= \tau_{zy}^J\sqrt{1 + \frac{4\tan^2\alpha(y)}{b^2(y)}\,x^2}$$

$\alpha = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = 0$

α piccolo, τ_{zx} piccolo, $\tau_z \simeq \tau_{zy}^J$