

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

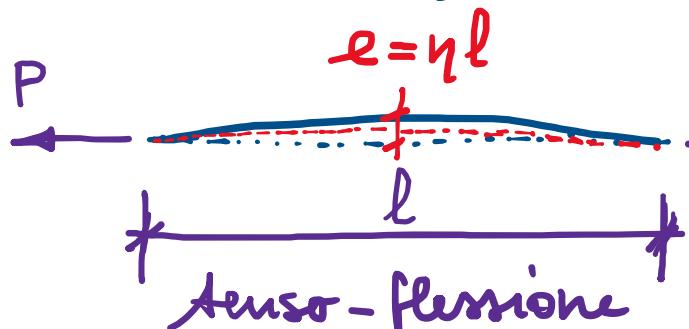
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

Instabilità di sistemi reali (effetto delle imperfezioni)

- Sistemi reali possono generalmente manifestare imperfezioni: astre non perfettamente rettilinee, sezione trasversale non omogenee, materiale con difetti e disomogeneità, carico non perfett. centrato, vincoli cedevoli, ecc.



tensio-flessione



(tende a rittificare)

.... non sensibile

$$\gamma = \frac{e}{l} \ll 1$$

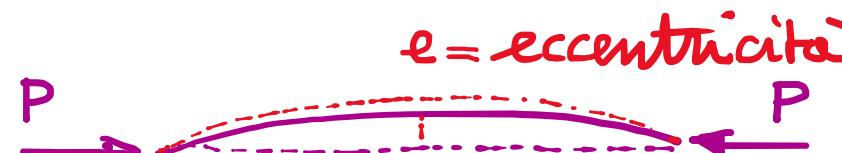
$\sim 1\%, 5\%$

(es. curvatura)

parametro di imperf.
geometrica

Sistema reale
con

condizione di
carico



presso-flessione



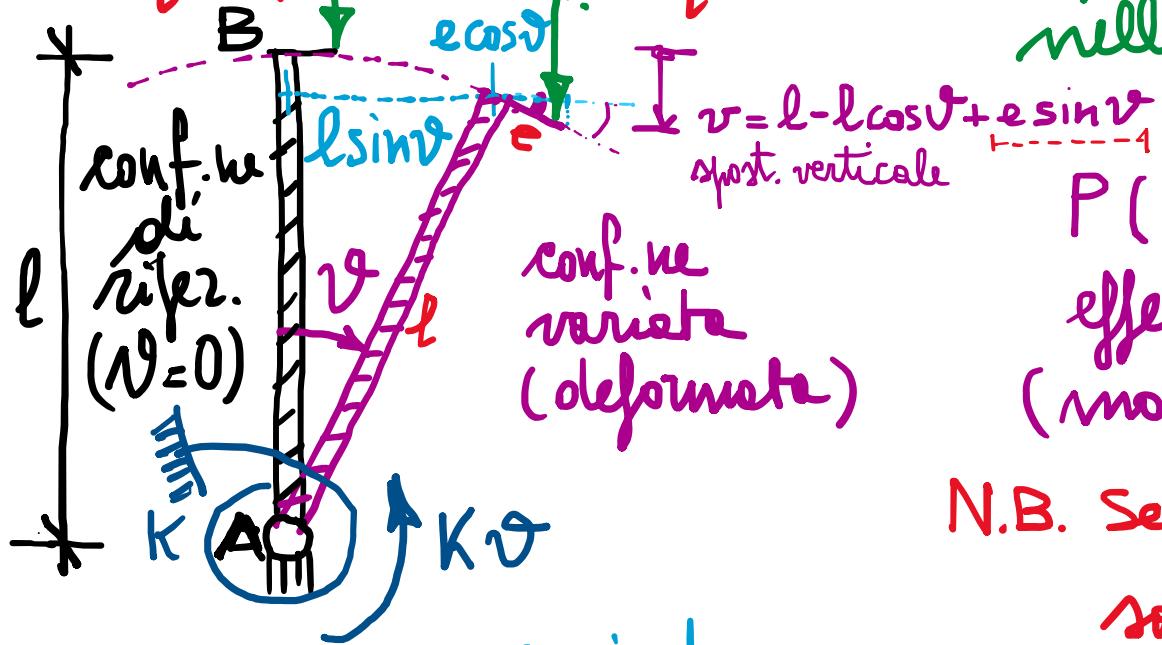
$$M = Pe$$

(tende ad esaltare l'imp.)

..... che può risultare sensibile
alla presenza di imperfezioni
e condizionare la stabilità

Esempio SDOF con imperfezione (eccentricità del carico di compressione).

$$e = \eta l + P > 0$$



$$P = p \frac{K}{e} l$$

carico base
 $P_0 = P_{cr}$

\downarrow
moltiplicatore
del carico

(caso partic.)

$$\eta = 0 \rightarrow \text{sist. ideale}$$

$$p(v) = \frac{v}{\sin v}$$

Approssimazione statica: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate.

$e=0$ sist. ideale

$$P(l \sin \varphi + e \cos \varphi) = K v$$

effetto oleostabilizz. effetto stabilizz.
(momento ribaltante) (momento elastico)

N.B. Se $e \neq 0$ ($\eta \neq 0$), $\varphi = 0$ è conf. ne di equil.
solo per $P=0$ ($P_e=0$).

$$\frac{Pl}{K} (\sin \varphi + \eta \cos \varphi) = \varphi$$

\downarrow
 p

equazione di equilibrio
non-lineare, in φ

$$p(v) = \frac{\varphi}{\sin \varphi + \eta \cos \varphi}$$

risposta $P-\Delta$ non-lineare
(non-linearità geometrica)

• Mappa dei percorsi di equilibrio:

ramo
secondario
sist. reale

Analisi per ipot.
"geom. piccoli" $|\vartheta| < 1$
 $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1$

$$p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta + \eta}$$

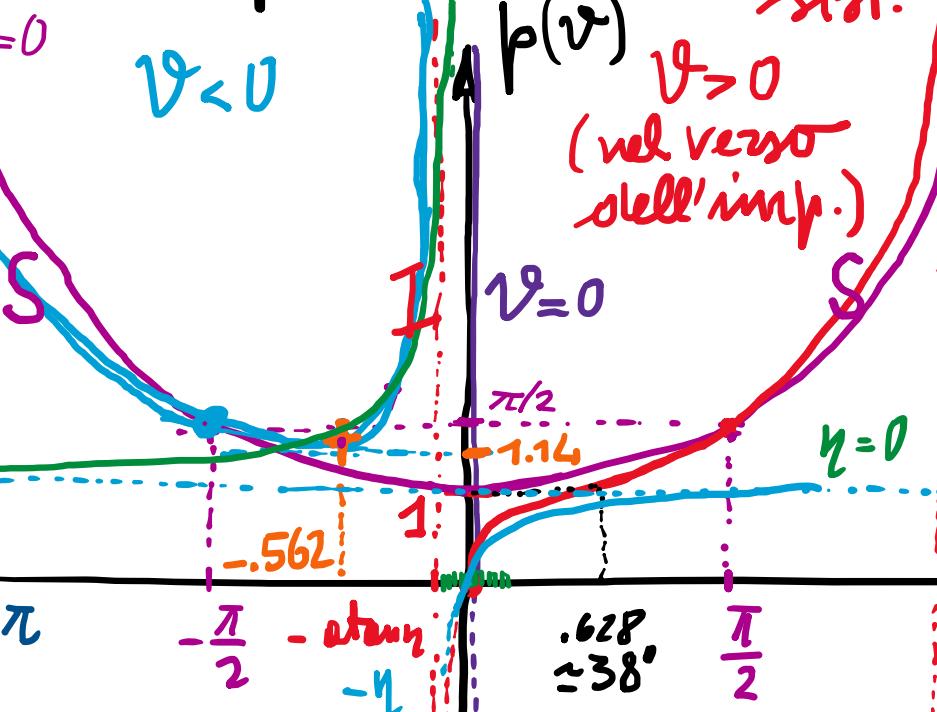
$$\vartheta \rightarrow \pm \infty \quad p \rightarrow 1$$

Cerco critico sist. ideale è fracciato
da analisi in piccoli ipot. di
sist. con imperfezioni.

p.t. di stazionarietà ($p(\vartheta) = 0$)

$$p = \frac{1 \cdot (\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) - \vartheta (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)}{(\sin \vartheta)^2} = 0$$

$$\vartheta < 0$$



ramo primario
sist. reale

$$\eta = 0 \quad p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

$\vartheta > 0$
(nel verso
dell'imp.)

$$\vartheta = 0$$

$$\pi/2$$

$$-1.14$$

$$.628$$

$$\approx 38^\circ$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\pi$$

$$\pi - \arctan \eta$$

$$-\pi$$

$$-.562$$

$$-\eta$$

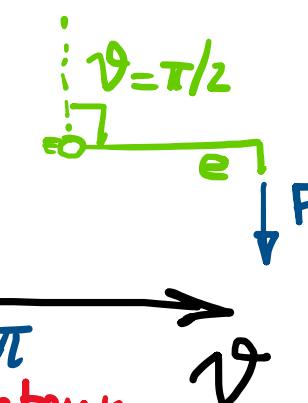
- P_{c2} id.
P_{c2}, diviso per
opport. fattore
di sicurezza f (~2-5)
resta utile a definire
ove possiamo spingerci con p(±θ).

$$\eta \neq 0 \quad p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

(η = 5%)

$$= 0, \tan \vartheta = -\eta$$

$$\vartheta = -\arctan \eta \quad (\pm \pi)$$



N.B. Il sist. reale
deve sin da
subito delle conseq.
di rif. θ = 0, non appena
p > 0, restando iniz. vicino,

per poi approssimare il ramo
biforcato del sistema ideale
(no p.t. di biforcazione)

$$\begin{aligned} \tan \vartheta + \eta &= \vartheta (1 - \eta \tan \vartheta) \\ (1 + \eta \vartheta) \tan \vartheta &= \vartheta - \eta \end{aligned} \Rightarrow \frac{\eta = 5\%}{\bar{\vartheta} = -.562} \Rightarrow \frac{\eta = 5\%}{\bar{\vartheta} = 1.14}$$

Approccio energetico

EPT $V(\vartheta) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - P(l - l \cos \vartheta + e \sin \vartheta)$ $\xrightarrow{\text{spost. verticale } z, e = \eta l} V(\vartheta) = K\left(\frac{1}{2} \vartheta^2 - \frac{Pl}{K}(1 - \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta)\right)$

Energia $\tilde{V} = \frac{K}{2} > 0$

Potenziale
Totale

$$\frac{d}{d\vartheta}$$

$$V(\vartheta) =$$

spost. verticale z , $e = \eta l$

$$V_e = \epsilon$$

$$V_f = -L_e$$

elastica forze esterne conservative condiz. staz. (CN di equil.)

$$V(\vartheta) = K\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - p(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta)\right) = 0$$

eq. non-lineare
in ϑ (lin. in p)

$$p(\bar{\vartheta}) = \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \bar{\vartheta} + \eta \cos \bar{\vartheta}}$$

conf. in equilibrio

$$\frac{d}{d\vartheta}$$

$$V(\vartheta) = K(1 - P(\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta))$$

nelle conf. in equil. $\underline{=}$ $K\left(1 - \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta} (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)\right)$

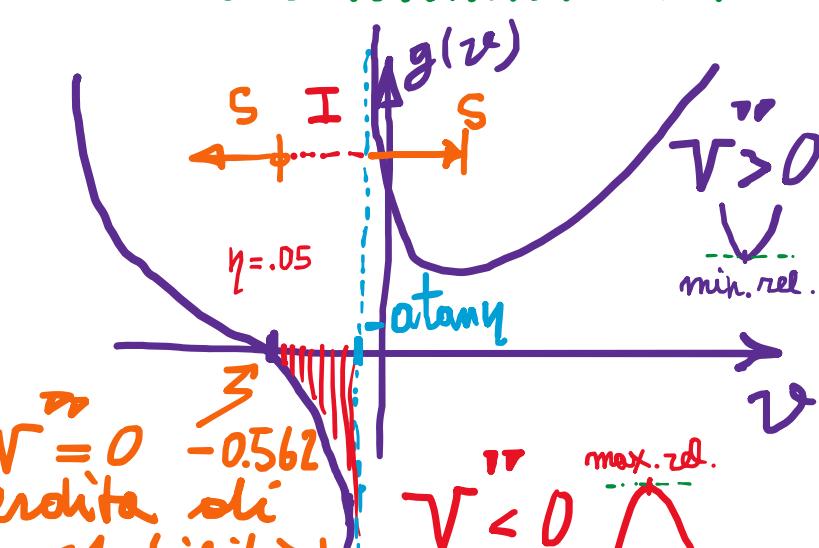
$$p = \bar{p}$$

$$= K\left(1 - \vartheta \frac{1 - \eta \tan \vartheta}{\tan \vartheta + \eta}\right)$$

$$g(\vartheta)$$

$$V = 0 \Rightarrow g(\vartheta) = 0 \Rightarrow \tan \vartheta + \eta = \vartheta(1 - \eta \tan \vartheta)$$

$$(1 + \eta \vartheta) \tan \vartheta = \vartheta - \eta$$



Studio del segno di V'' (Th. di Dirichlet, CS di stabilità)

- Anelini in spostamenti "geometricamente piccoli":

$$V \approx V_2(v) = \frac{1}{2} K v^2 - P \left(l - l \left(\underbrace{1 - \frac{v^2}{2} + \dots}_{\text{cos } v} \right) + e(v + \dots) \right) \xrightarrow{\text{di } V} \text{"quadraticizzazione"}$$

oppox.

$$\text{al 2° ord.} = \frac{1}{2} K v^2 - Pl \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) = K \left(\frac{1}{2} v^2 - p \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) \right)$$

$$V_2(v) = K \left(v - p(v + \gamma) \right) = 0 \xrightarrow{\text{lin. in } v} p(v) = \frac{v}{v + \gamma} \xrightarrow{\text{non-lineare}} \text{"linearizzazione"}$$

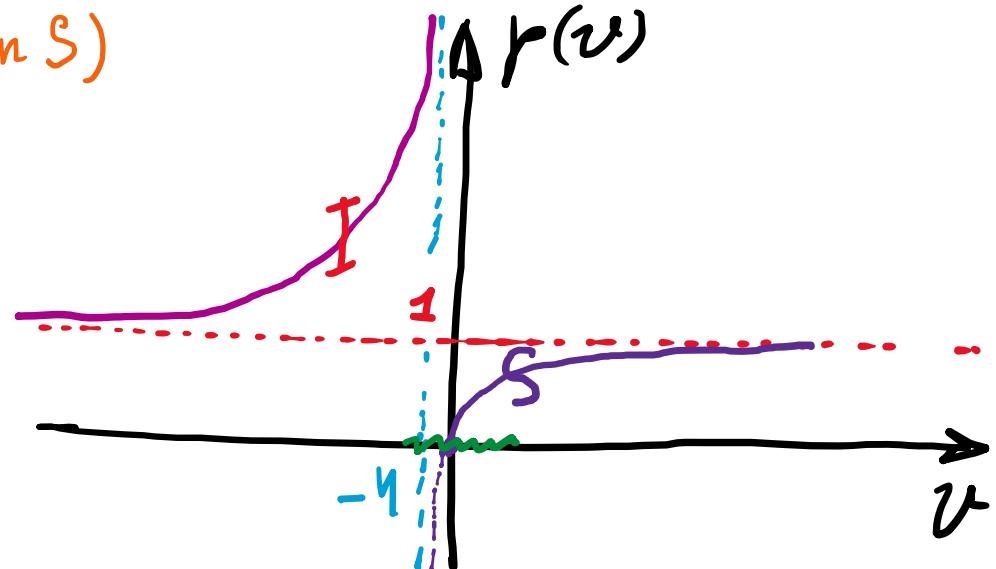
delle eq. di equilibrio

$$V_2''(v) = K \left(1 - p \right)$$

cost. in v $> 0 \quad p < 1 \quad S$
 lin. in p $= 0 \quad p = 1 \quad \text{condiz. critica di perdita di stabilità}$
 $< 0 \quad p > 1 \quad I \quad (\text{non } S)$

Come per anelini di rist.
ideale privo di imperfazioni

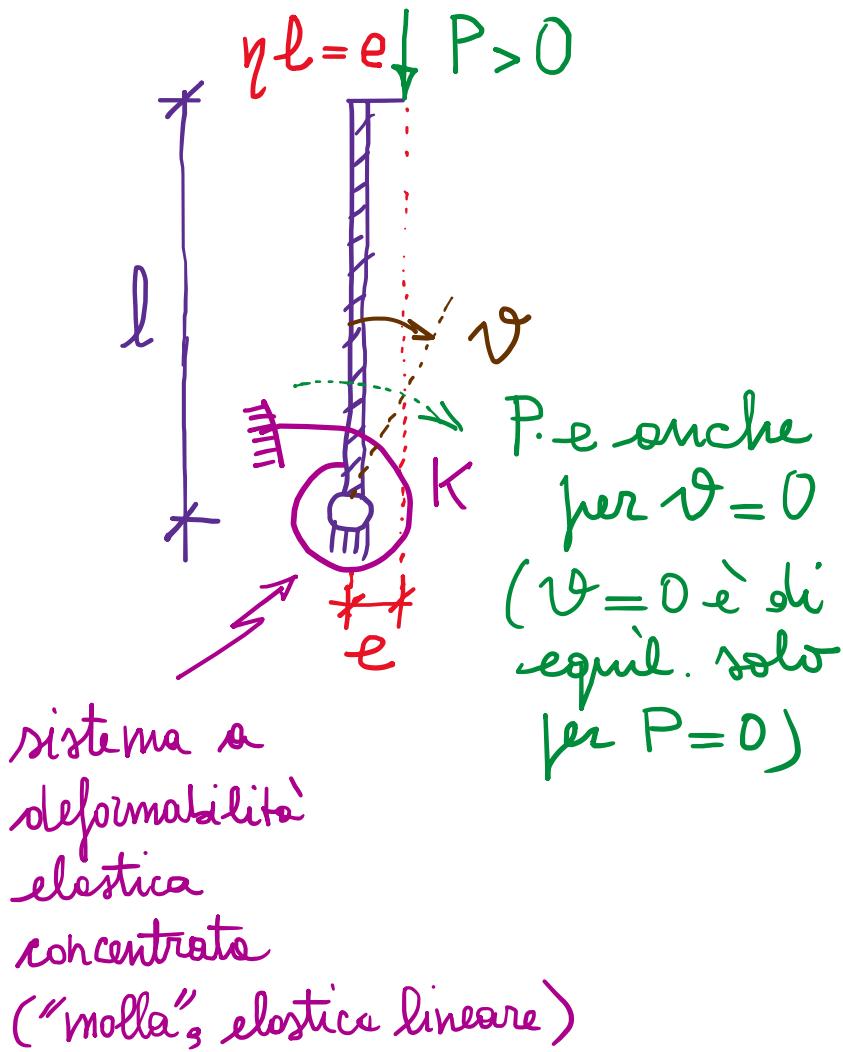
(derivate seconde di V_2 costante,
e stesso valore del carico P)



Concetti fondamentali :

- Sistemi ideali: improvvisa perdita di stabilità (della configurazione di equilibrio) per $P = P_{cr}$ (sistema stabile per $P < P_{cr}$) \Rightarrow p.to di "biforcazione" dei percorsi di equilibrio, alias transizione discontinua stabile/instabile (al crescere del carico P).
- Sistemi reali: dotati di imperfezioni \Rightarrow ottese una transizione continua del sistema al crescere del carico, con deformazione "pendente" della perte dell'imperfezione presente, non appena $P \neq 0$ ($P > 0$), e di entità crescente, al crescere del carico P stesso \Rightarrow assenza di un punto di biforcazione.

- Analisi per esempio SDOF:



- approccio statico: equazione di equilibrio nella configurazione deformata
- approccio energetico: scrivere dell'EPT V e applicazione delle CS di stabilità (th. di Dirichlet)

[per spostamenti "geometricamente" "grandi" e "piccoli"]

→ eq.m. di equilibrio linearizzate + EPT "quadraticizzato", $V \approx V_2$

SOMMARIO (Lec. 18)

- Instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) [vs. sistemi ideali: privi di imp.]
 - transitione continua vs. ramo bifurcati
 - bifurcazione per $P = P_{cr}$ del sistema ideale.
- Approccio statico per spost. "grandi" e mappe dei percorsi di equilibrio.
 - validità delle stime di P_{cr} .
- " " " " " piccoli" \Rightarrow tendenza asintotica per P_{cr} .
 - P_{cr} trovato solo trend asintotico di sist. reale resto di signif. ingegnerist.
- Approccio energetico, per spost. di entità come sopra (grandi/piccoli).
 - Individua, oltre alle stesse confini di equilibrio, le nature stabile o non stabile di esse (stabile per il ramo primario-deviato della perte dell'imperfezione).

Next step: pb. euleriani di stabilità - Quadro generale ed esempi discreti MDOF.