

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

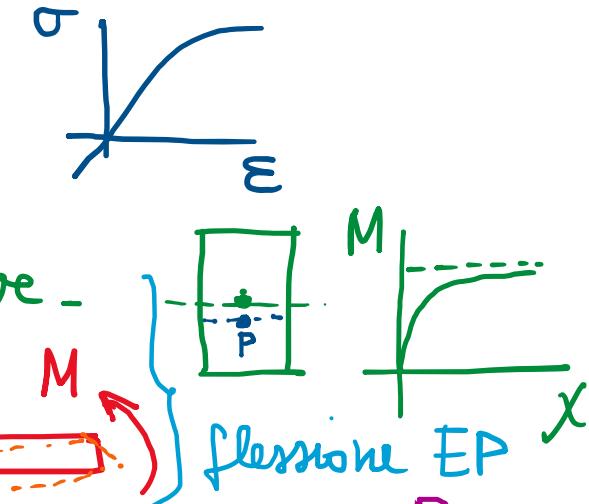
[egidio.rizzi@uni.bg.it](mailto:egidio.rizzi@uni.bg.it)

LEZIONE 22

### III - Anelasticità delle Strutture ( Plasticità ) $\rightarrow$ Non-linearietà di materiale ("material non-linearity")

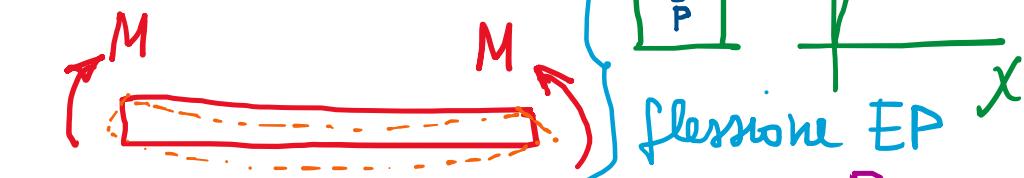
Scopi:

- Introduzione al comportamento non-lineare del materiale (punto materiale) [campo elasto-plastico].

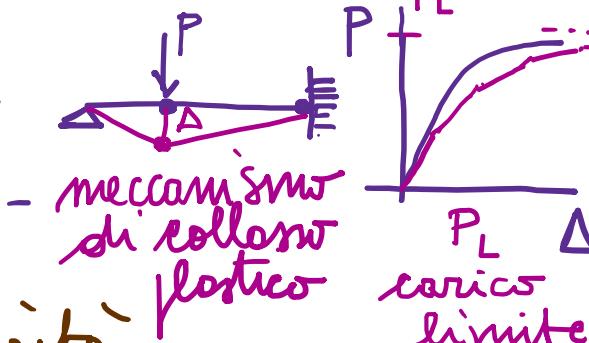


- Comportamento non-lin. delle sez. trasversale delle trave.

- Comportamento globale elasto-plastico delle trave

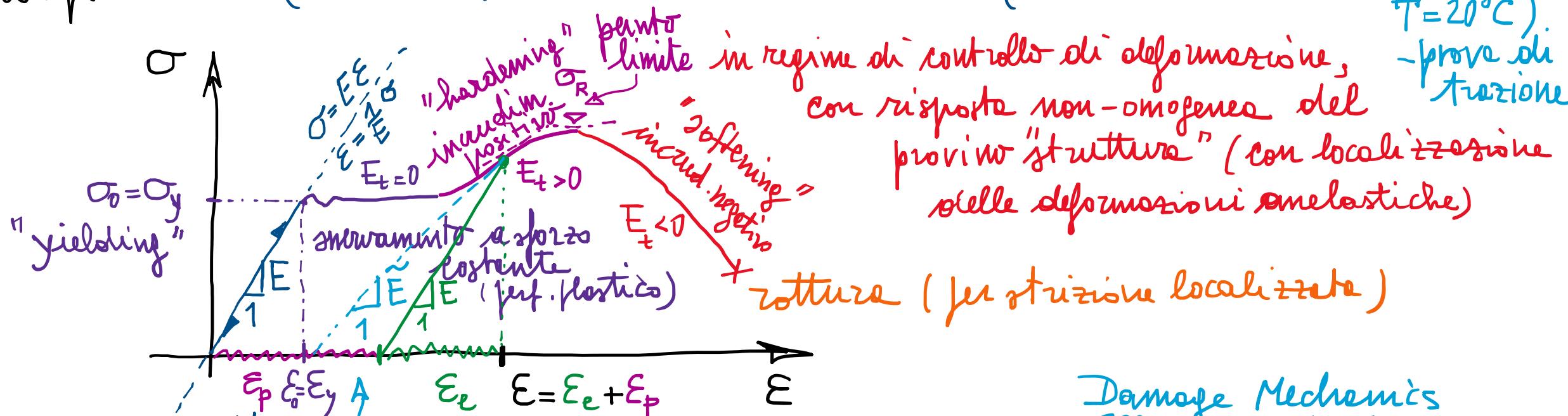


- Ipotesi di cerniera plastica (localizzazione delle deform. plastiche) e "calcolo a rottura" dei telai (Analisi Limite).



- Qui, non-linearietà di materiale scisse da non-linearietà geometrica (vedi Instabilità), per cinematiche lineari (regime di "piccoli spostamenti").

- Comportamento (classico) meccanico del materiale (non-lineare) - (Es. acciaio,  $T=20^\circ\text{C}$ ).



limite in regime di controllo di deformazione,  
con risposte non-omogenee del  
provvino "struttura" (con localizzazione  
di tutte le deformazioni omelastiche)

rottura (frattura localizzata)

legge intera elasto-plastica [holonomo]  $\rightarrow$   $E < E$  (degradazione di rigidità)  $\rightarrow$

- Sforzamenti conusivi del campo elastico.

- Campo plastico: deformazioni irreversibili allo scarico  
(leggono ad un riacquisto della struttura interna del materiale,  $\dot{\Gamma}$ , con dissipazione  
di energie in calore).

- Comportamento anholonomico  $\rightarrow$  legame incrementale  
distinz. carico vs. scarico:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad \dot{\epsilon} \leq 0 \quad d\epsilon \leq 0$$

$0 < \color{red}\dot{\sigma}$  carico plastico

$\dot{\sigma} > 0$  modulo tangente  
elastoplastico

$E_t \geq 0$

(re-hardening) ratei di sf. e olef.

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_t \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \geq 0$$

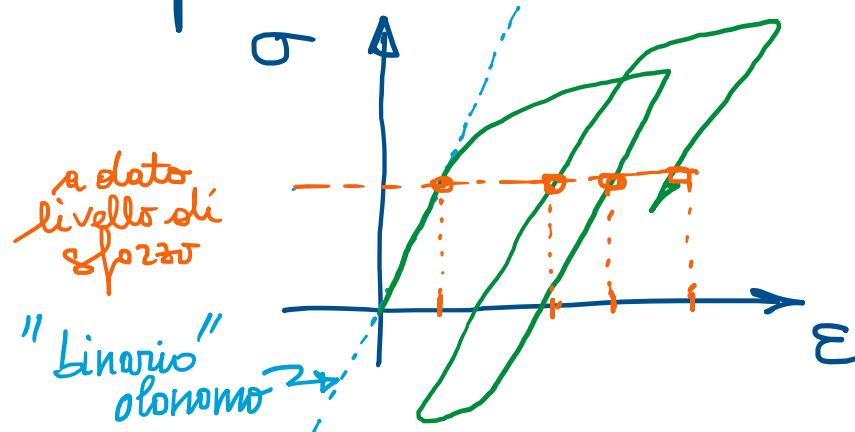
Damage Mechanics

Mecanica del Danneggiamento  
es. materiali quasi-fragiili  
(lepidoti, colcestri, compositi)

movimento di dislocazioni

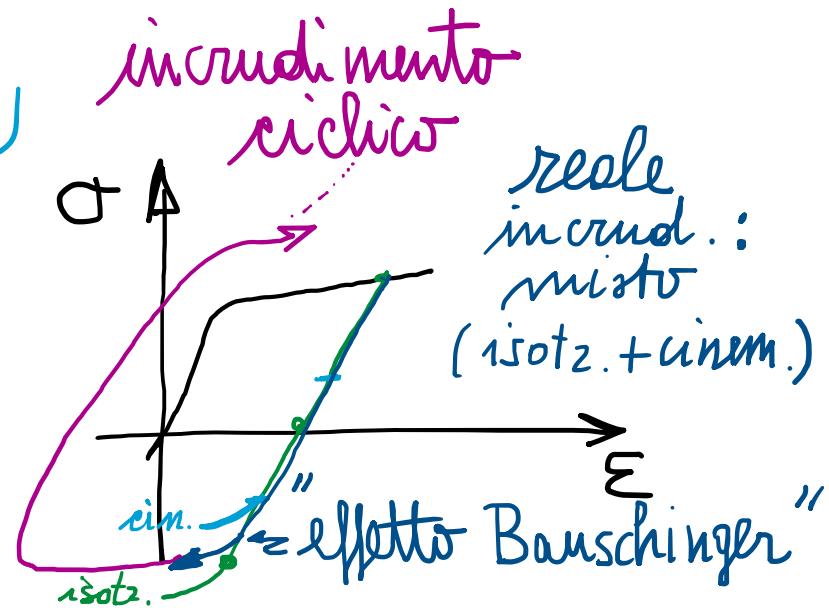
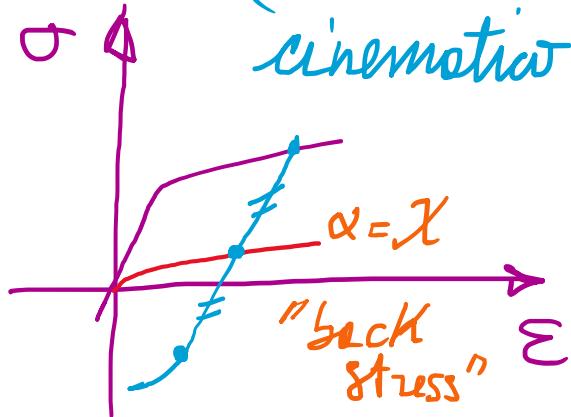
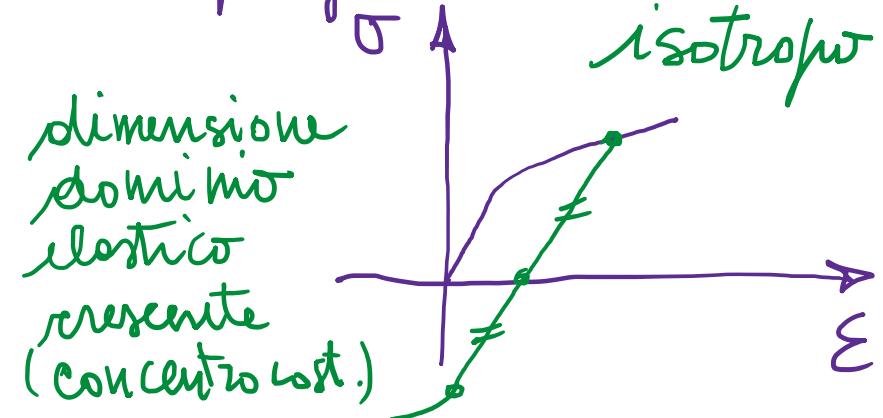
- Legge costitutiva in forma incrementale :
  - legge diretta  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\varepsilon})$  controllo in deformazione (consente descrizione del softening)
  - " inverso"  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$  " in sforzo

- Dipendenze dalle storie di carico (comportamento "path-dependent", descritto mediante opportune "variabili interne", utili a registrare la storia)



(in genere non-lineare)  
(variaz. del centro)

- Tipologie di incrudimento :



legame  
diretto  
 $\dot{\sigma}(\dot{\varepsilon})$

incremento positivo  
(hardening)  $E_t > 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \geq 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

incremento nullo  
(perfett. plastico)  $E_t = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

incremento negativo  
(softening)  $E_t < 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \leq 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

soft. "critico"  $E_t \rightarrow -\infty (\dot{\varepsilon} = 0)$   
perdita controllo in defor.

legame  
inverso  
 $\dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$

$$\dot{\sigma} \geq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} \geq 0$$

$$\dot{\sigma} \leq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \leq 0$$

unicità

$\dot{\sigma} > 0$  non possibile

$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}$  indeter.

non unicità

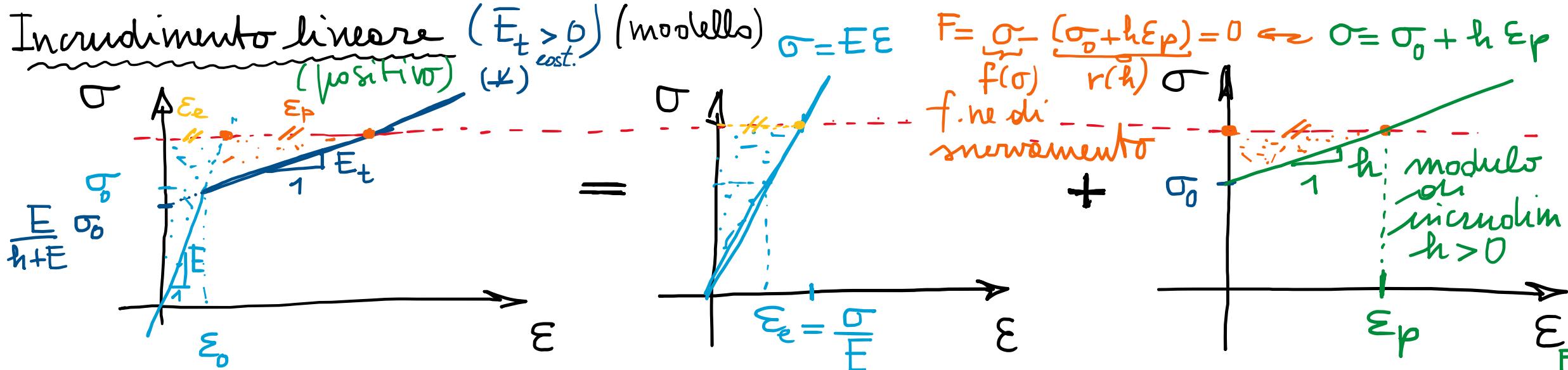
perdita di controllo  
risparmio

$$\begin{array}{l}\dot{\varepsilon} \geq 0 \\ \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} \geq 0 \\ \text{--} \end{array}$$

non unicità

$$-\infty < E_t < E$$





decomposizione somme  
di deformazioni assime:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{(simili in ratei)} \\ \text{per det. } E_t \end{matrix}$$

$$= \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{h} - \frac{\sigma_0}{h} \Rightarrow \sigma + \frac{\sigma_0}{h} = \frac{h+E}{hE} \sigma$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\sigma - \sigma_0}{h}$$

$$\sigma \text{ modulo} \rightarrow h = \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}_p}$$

$$\sigma = \underbrace{\frac{hE}{h+E} \varepsilon}_{E_t} + \cancel{\frac{hE}{h+E} \frac{\sigma_0}{h}} =$$

$$= \frac{E}{h+E} \sigma_0 + E_t \varepsilon (*)$$

- Generalizzazione al 3D (teoria delle plasticità)

$$\text{Condiz. di shew. } F(\sigma, \lambda) = f(\sigma) - r(h, \lambda) = 0$$

$$\text{Legge di flusso plast. } \dot{\varepsilon}_p = \lambda \quad \text{es. } f(\sigma) = \sigma_{eq}^{\nu M} = \sqrt{3} J_2$$

$$\text{Operatore tangente } \dot{\sigma} = E_t : \dot{\varepsilon} \quad \begin{matrix} \text{moltiplicatore} \\ \text{plastico} \end{matrix} \quad \text{sizez. di flusso plast.}$$

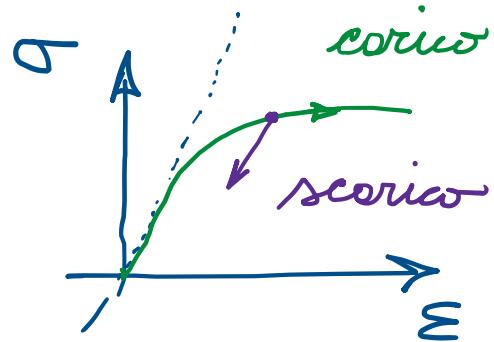
$$E_t = \frac{hE}{h+E} \quad \begin{bmatrix} h = \frac{EE_t}{E-E_t} \\ = \frac{E_t}{1-E_t/E} \end{bmatrix}$$

modulo tangente

## Concetti fondamentali :

- Anelasticità (in particolare Plasticità) delle Strutture :
  - comportamento dissipativo anelastico delle strutture, a partire da quello del materiale  $\Rightarrow$  non-linearietà di materiale -
  - manifestabile per carichi e spostamenti crescenti, tali da indurre un'uscita dal campo elastico (quale regime tipico di funzionamento ordinario, quotidiano delle strutture, in condizioni di esercizio), per condurre anche a situazioni "Limite", con possibile collasso (plastico) delle strutture, nelle sue totalità (meccanismo completo) o di una sua parte (meccanismo parziale)  $\Rightarrow$  Analisi Limite (AL) o "Calcolo e rottura" (dei telai).

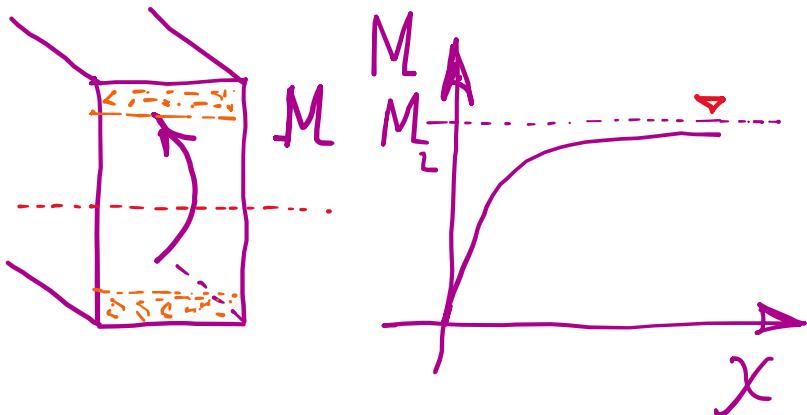
- Le diverse scale strutturali (flessione elasto-plastica delle travi) :



punto materiale

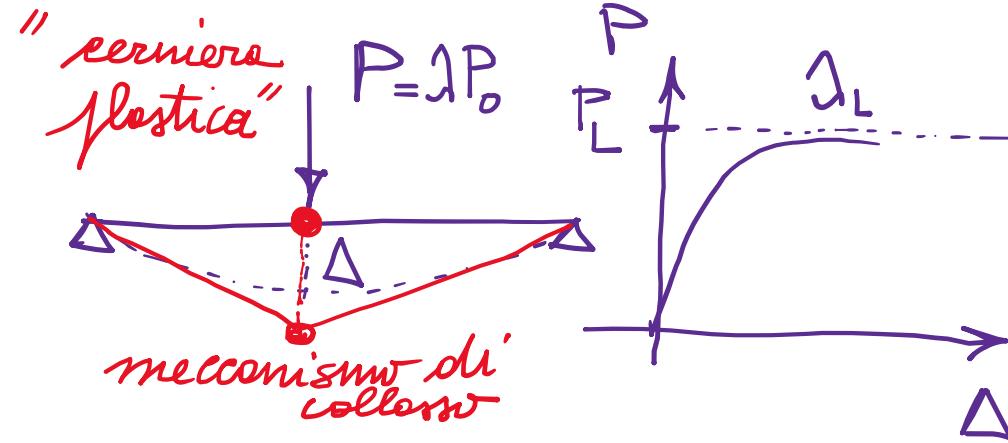
(Teoria delle  
Plessibilità)

Mecanica dei  
Continui in  
campo  
elasto-plastico.



sezione trasversale

"Legge costitutiva"  
delle trave per  
flessione elasto-plastica  
(in particolare per  
comportamento "perfettam.  
elasto-plastico").



struttura nel suo complesso

Risposte non-lineare  
globale, forze-spostamento,  
delle strutture (trave o  
sistemi di travi-zateli),  
sino e collasso  
(plastico, duttile), descriv.  
anche per "localizzazione" delle defor.

## SOMMARIO (Lec. 22)

### III - Anelasticità delle strutture (Plasticità) -

- Introduzione al comportamento non-lineare (elastoplastico) del materiale.
- Regimi tipici: elastico, perfettamente plastic, inclin. positivo/<sup>"hardening"</sup> "softening" negativo.
- Comportamento anolonomo: legame incrementale (carico pl. vs. scarico el.).
- Dipendenze delle storie di carico (integraz. del legame incrementale).
- Tipologie di incrudimento e loro modellazione.
- Unicità del legame diretto/inverso.
- Incrudimento lineare e modulo tangente.
- Generalizzazione 3D: teoria della plasticità -

Next step: Flessione elastoplastica - Comportamento delle sezioni trasversale dell'attrezzo  
(verso una teoria strutturale in ambito di non-lin. di materiale).