

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

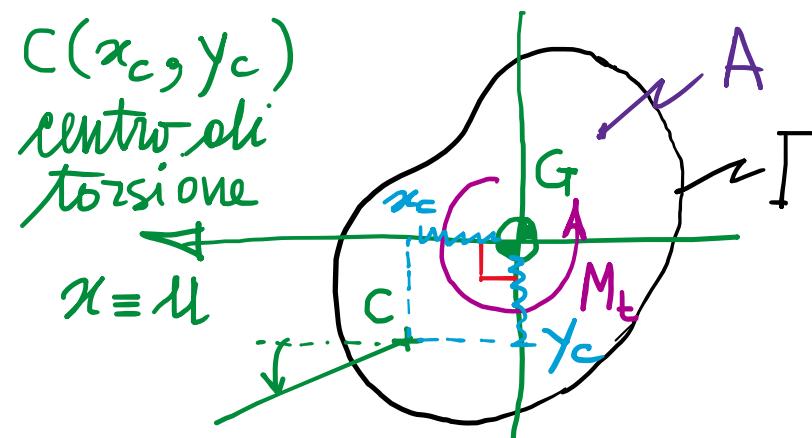
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Centro di torsione

Nell'approccio agli spostamenti si presume un campo di spostamenti ricomprensente:

- una rotazione rigida nel piano della sezione (rispetto a punto C, detto centro di torsione, in generale discosto dal barycentro G);
- un ingombramento fuori piano della sezione, riferibile a tale punto:



$$C(x_c, y_c)$$

centro di
torsione

$$x=11$$

$$\vartheta(z) = \beta z$$

$$y = \nu$$

"torsione"
(angolo unitario
di torsione)

$$\beta = \frac{d\theta}{dz} = \text{cost}$$

Campo di spostamenti ($x_c \neq 0, y_c \neq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_x = -\beta z(y - y_c) \\ \delta_y = \beta z(x - x_c) \end{array} \right\} \text{rotazione rigida rispetto a } C$$

$$\delta_z = \beta \Psi_c(x, y) \text{ funzione di ingombramento}$$

riferito a C definite a
muro di compon.

rototraslazione
fuori piano

Campo delle tens. tangenziali:

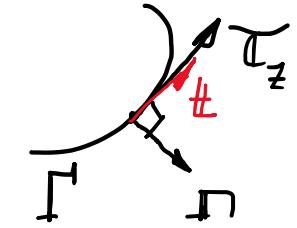
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = G\beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{array} \right. - \text{eq. di congr.} \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = G\beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{array} \right. - \text{eq. di equil.} \Rightarrow \nabla^2 \Psi_c = 0 \text{ in A} \\ \text{eq. di Laplace}$$

Condizione al contorno:

$$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$= G\beta [(\psi_{c,z} - y + y_c) n_x + (\psi_{c,y} + x - x_c) n_y] = 0$$



$$\underbrace{\psi_{c,x} n_x + \psi_{c,y} n_y}_{\text{derivate direzionale}} + y_c \underbrace{n_x}_{\frac{dx}{dn}} - x_c \underbrace{n_y}_{\frac{dy}{dn}} = n_x y - n_y x = * \cdot t$$

stessa direzione $\psi_{c,n}$ $\frac{dx}{dn}$ $\frac{dy}{dn}$ stesso termine noto visto per ψ_G
nelle direz. n

$$(\psi_c + y_c x - x_c y) \Big|_n = n_x y - n_y x \quad \text{c.c. di Neumann-Dini}$$

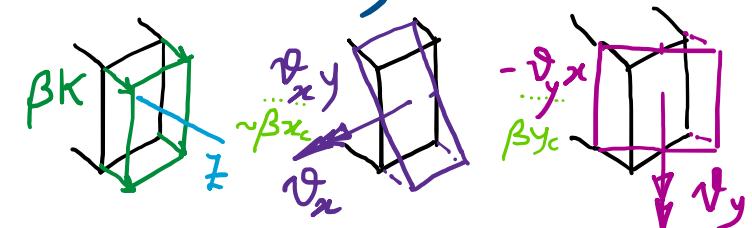
ψ^* differisce da ψ_c per $\nabla^2 \psi^* = 0$ in A ($\propto \nabla^2 \psi_c = 0$)
un campo lineare in x e y

ψ^* e ψ_G devono risolvere lo stesso pb. di N-D per l'equazione di Laplace:

$$\Rightarrow \psi^* = \psi_G + K \quad (\text{differiscono al più per una costante})$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \psi_c(x, y) &= \psi_G(x, y) + K - y_c x + x_c y \\ \text{valori} \quad \psi_c &= \psi_G + K \rightarrow 0 \end{aligned}$$



compte di moto rigido fuori piano della sezione

- Si definisce centro di torsione il punto C rispetto al quale avviene la rotazione rigida nel piano delle sezione e risultano nulle le seguenti rotazioni medie fuori piano delle sezione rispetto agli assi x e y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\sigma_z}{y} y^2 dA = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\sigma_z}{y} dJ_x = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c y dA = 0 \\ \bar{\nu}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\sigma_z}{x} x^2 dA = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\sigma_z}{x} dJ_y = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c x dA = 0 \end{array} \right.$$

PLV: flessione torsione

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{M_x} \bar{\nu}_x = \int_A \frac{\sigma_{zz}}{J_x} y dA \quad \sigma_z \\ \cancel{M_y} \bar{\nu}_y = \int_A -\frac{\sigma_z}{J_x} x dA \quad \sigma_z \end{array} \right.$$

ingobbamento
medio nullo
fuori piano

Quindi

coordinate del centro di torsione

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_c(x,y) y dA; \quad y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_c(x,y) x dA$$

N.B. Se Esse olisimm. rette, $C \in$ a tale asse

$$\int_A \psi_c y dA = 0$$

$$\int_A \psi_c x dA = 0$$

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0$$

$$\bar{\psi}_G = \frac{1}{A} \int_A \psi_G dA = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \psi_G y dA + \int_A K y dA - \int_A y_c x y dA + \int_A x_c y^2 dA = 0 \\ \int_A \psi_G x dA + \int_A K x dA - \int_A y_c x^2 dA + \int_A x_c y x dA = 0 \end{array} \right.$$

- Torsione: Approssimazione agli sforzi (faghiamo a priori l'equilibrio, imponiamo la congruenza)

H_p: \exists f.n. $\Phi = \Phi(x, y)$ funzione potenziale di sforzo o di Airy (definita a meno di cost.)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \varphi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

[soluz. della necessaria "regolarità"
↳ Enza delle soluzioni]

- Eq. di equilibrio:

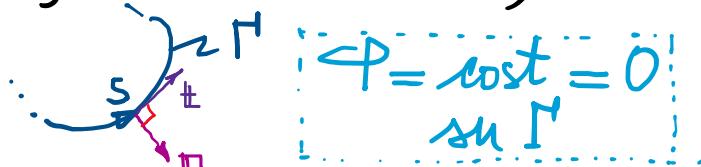
$$\tau_{zx,xx} + \tau_{zy,y} = 0 \quad \text{in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,x} + (-\varphi_{,x})_{,y} = \varphi_{,yyx} - \varphi_{,xyx} = 0 \quad \text{Th. di Schwarz}$$

- Eq. di congruenze:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \quad \text{in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,y} - (-\varphi_{,x})_{,x} = \underbrace{\nabla^2 \Phi(x, y)}_{\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}} = -c$$

- Condizione al contorno (equil.):

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \Rightarrow \varphi_{,y} \overset{n_x}{\underset{t_y}{\sim}} - \varphi_{,x} \overset{-n_y}{\underset{t_x}{\sim}} = \varphi_{,x} t_x + \varphi_{,y} t_y$$



c.e. di Dirichlet

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(x, y) = -c \quad \text{in } A}$$

Eq. di Poisson con termine noto costante

$$c \leftrightarrow M_t$$

- Si ottiene pertanto un pb. di Dirichlet per l'eq. di Poisson (con termine noto costante).

- Equivalenze statice (tra il campo delle tensioni tangenziali e il momento torcente che le ha generate):

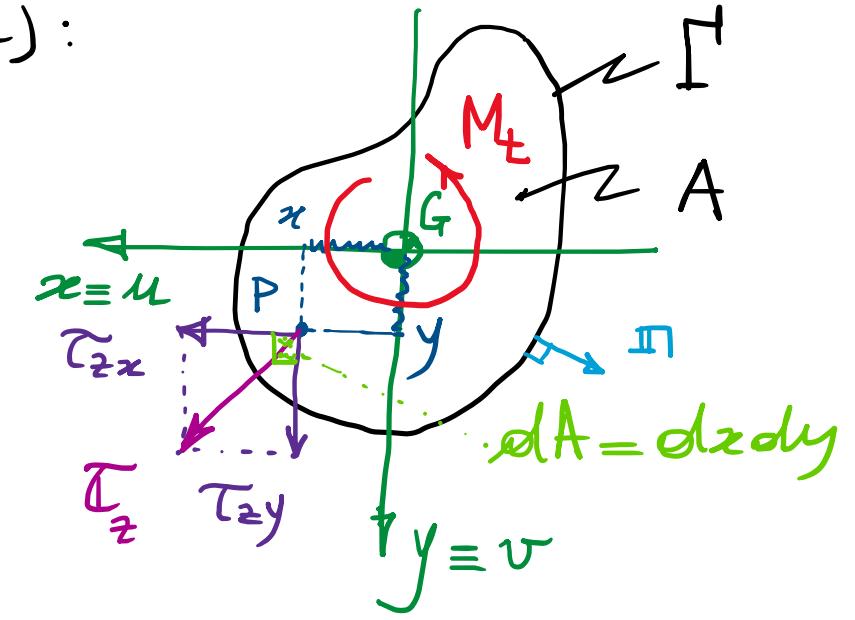
$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A (-\varphi_s x x - \varphi_s y y) dA$$

$$\begin{aligned} &= - \int_A [(\varphi_s x)_x + (\varphi_s y)_y] dA + 2 \int_A \varphi_s dA \\ \text{Th. Div.} \quad &\int_A dA \rightarrow \int_\Gamma d\Gamma \quad \text{O su } \Gamma \\ &\equiv - \int_\Gamma \varphi_s (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \varphi_s dA \end{aligned}$$

Quindi:

$$M_t = 2 \int_A \varphi_s(x, y) dA \quad M_t \leftrightarrow c$$



$$\begin{aligned} (\varphi_s x)_x &= \varphi_s x + \varphi_s \frac{x}{x} \\ (\varphi_s y)_y &= \varphi_s y + \varphi_s \frac{y}{y} \end{aligned}$$

$$-\varphi_s x x = -(\varphi_s x)_x + \varphi$$

$$-\varphi_s y y = -(\varphi_s y)_y + \varphi$$

Quadro sinottico (Torsione)

Approccio agli spostamenti

$\Psi_G(x, y)$; β
f. ne di ingombramento "torsione", cost

PL. di Neumann-Dini $\nabla^2 \Psi_G = 0$ in A

per l'eq. ne di Laplace $\Psi_{G,n} = \underbrace{n_x y - n_y x}_{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}$ su Γ

$$\beta = \frac{M_t}{G J}; \quad J(\Psi_G) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n$$

$$T_{zx} = G \beta (4 \psi_{G,x} - y) = \Phi_{,y}$$

$$T_{zy} = G \beta (\psi_{G,y} + x) = -\Phi_{,x}$$

$\Psi_G \rightarrow \Phi$

campo delle tensioni tangenziali

Approccio agli sforzi

$\sigma(x, y); c$
f. ne soli Airy costante d'integrazione

incognite

equazioni

PL. di Dirichlet
per l'eq. ne di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -c \text{ in } A \\ \Phi = 0 \text{ su } \Gamma$$

relazioni

$$M_t = 2 \int_A \Phi \, dA$$

corrispondenze
 $2G\beta = c$

Infatti: $\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = -c$
 $G\beta(-4\psi_{,xy}x - 1 + 4\psi_{,xy}y - 1) = -c$

Th. Schwarz

$$-2G\beta = -c$$

$$\psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta} \Phi_{,y} + y$$

$$\psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \Phi_{,x} - x$$

$\Phi \rightarrow \Psi_G$

Metodi di soluzione:

- Analitici: (problem differenziali)

- Esatte (possibile solo in casi particolari, in forme chiuse o mediante sviluppi in serie).

- Approssimate (comunque valide ai fini ingegneristici, in forme chiuse o per sviluppi in serie troncati).

- Numerici: (problemi algebrici \Rightarrow per discretizzazione)

- Metodo delle Differenze Finite (FDM). \Rightarrow Calcolo Numerico

- Metodo degli Elementi Finiti (FEM). \Rightarrow Computational Mechanics of Solids and Structures

es. caso delle sezione ellittica

es. profili sottili

(aperti o chiusi)

passaggio da numero ∞ di gall a numero finito, cioè discreto, di gall