Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

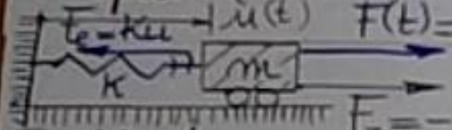
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

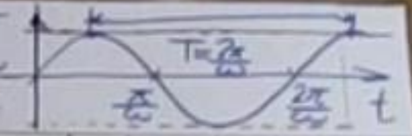
LEZIONE 04

• Risposta (non smorzata) a forzante armonica



$F(t) = F\sin\omega t$

$F_I = -m\ddot u(t)$



- casi reali (macchine con masse rotanti eccentriche)
- forzanti periodiche (sviluppo in serie di F)
- soluzione analitica possibile
- concetti fondamentali risp. dinam.

Eq. del moto:

$$m\ddot u + ku(t) = k\frac{F}{k}\sin\omega t \qquad u_{st} = \frac{F}{k}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot u + \omega_1^2 u(t) = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t \xrightarrow{\text{sost}} (\omega_1^2-\omega^2)U\sin\omega t = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t \quad \forall t$$

• Integrale particolare: $\omega \neq \omega_1$

$$u_p(t) = U\sin\omega t = N u_{st}\sin(\omega t - \xi)$$

$$\dot u_p(t) = \omega U\cos\omega t$$

$$\ddot u_p(t) = -\omega^2 U\sin\omega t = -\omega^2 u(t)$$

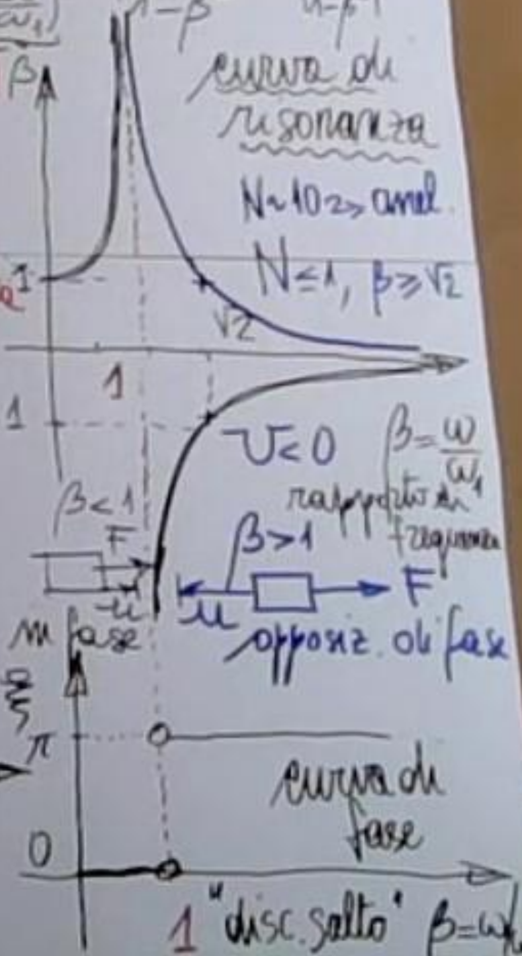
$$\sin\xi = 0 \;\to\; 0,\ \pi$$

$$\sin(\omega t-\xi) = \sin\omega t\underbrace{\cos\xi}_{\pm 1} - \cos\omega t\sin\xi = \pm\sin\omega t$$

$$\frac{U}{u_{st}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{\pm 1}{|1-\beta^2|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} = \frac{1}{|1-\beta^2|} = N(\beta)$$

coeff. di amplific. dinamica



• Integrale generale: $u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$

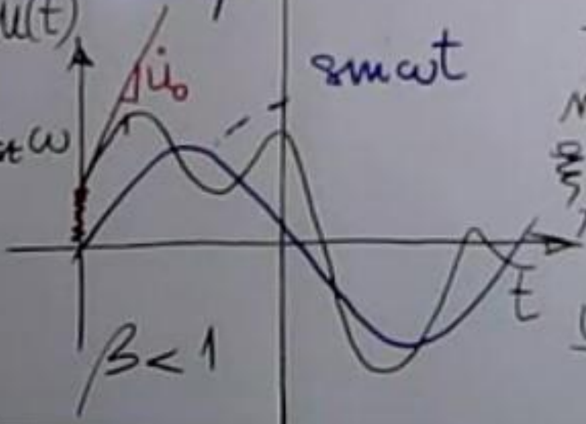
$$u(t) = \underbrace{A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t}_{u_{go}(t)} + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\sin\omega t$$

c.i.

$$u(0) = \boxed{u_0 = B}$$

$$\dot u(0) = \dot u_0 = \omega_1 A + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\omega$$

$$\boxed{A = \frac{\dot u_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}}$$



Integrale finale (c.i. non omogenee, $F \sin \omega t$) ($\beta = \omega/\omega_1 \neq 1$)

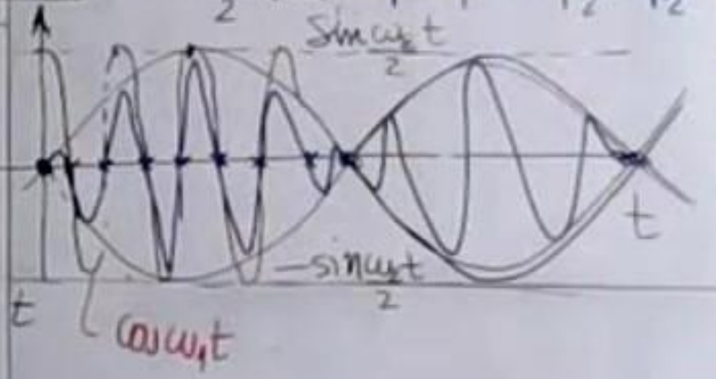
$$u(t) = \underbrace{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2} u_{st}\right) \sin \omega_1 t + u_0 \cos \omega_1 t}_{\text{risposta "transiente" } (\zeta \neq 0)} + \underbrace{\frac{1}{1-\beta^2} u_{st} \sin \omega t}_{\text{risposta "a regime"}}$$

$$= \underbrace{\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + u_0 \cos \omega_1 t}_{\text{risposta alle sole c.i.}} + \underbrace{\frac{1}{1-\beta^2} u_{st} \left(\sin \omega t - \beta \sin \omega_1 t\right)}_{u_F(t) \text{ risposta a } F(t) \text{ per c.i. omogenee (nulle)}}$$

Verso la risonanza ($\beta \simeq 1$): $\sin \omega t - \sin \omega_1 t = 2 \sin \frac{\omega_2}{2} t \cos \ldots$; $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

Fenomeno dei "battimenti":

ampiezza della risposta che si alterna tra valori nulli e valori di elevata entità



Condizione di risonanza ($\beta = \omega/\omega_1 = 1$)

$$u_p(t) = U t \cos \omega_1 t = -\frac{1}{2} \omega_1 u_{st} \, t \cos \omega_1 t$$

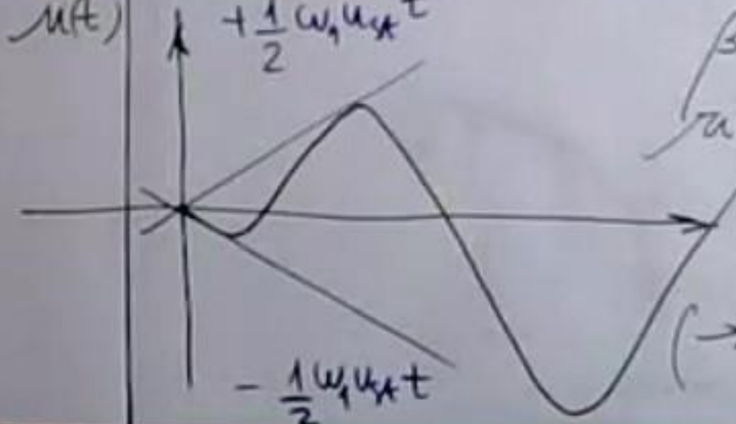
$$\dot{u}_p(t) = U \cos \omega_1 t - U t \omega_1 \sin \omega_1 t$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\omega_1 U \sin \omega_1 t - U \omega_1 \sin \omega_1 t \cancel{- U t \omega_1^2 \cos \omega_1 t} \cancel{+ \omega_1^2 U t \cos \omega_1 t} = \omega_1^2 u_{st} \sin \omega_1 t$$

! eq.ne del moto

$$-2 \cancel{\omega_1} U = \omega_1^{\cancel{2}} u_{st}$$

$$U = -\frac{1}{2} \omega_1 \frac{F}{K} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{m}} \frac{F}{K} = -\frac{1}{2} \frac{F}{\sqrt{Km}} = -\frac{F}{c_{cr}}$$



$\beta = 1$

risposta divergente

t

($\to \infty$, $t \to \infty$)

SOMMARIO (Lez. 04)

- Risposta forzata (forzante armonica $F(t) = F\sin\omega t$)
- Amplificazione dinamica $N(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$ $(U = N u_{st})$
- Sfasamento della risposta $<$ fase $\beta<1$, $\xi = 0$; oppos. $\beta>1$, $\xi = \pi$
- Integrale generale: $u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$
- Risonanza ($\beta = 1$; $\omega = \omega_1$): risposta divergente in t
- Next step: caso smorzato (risposta "steady state") con picco di risonanza di entità limitata, dip.te dal fattore di smorzamento