

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

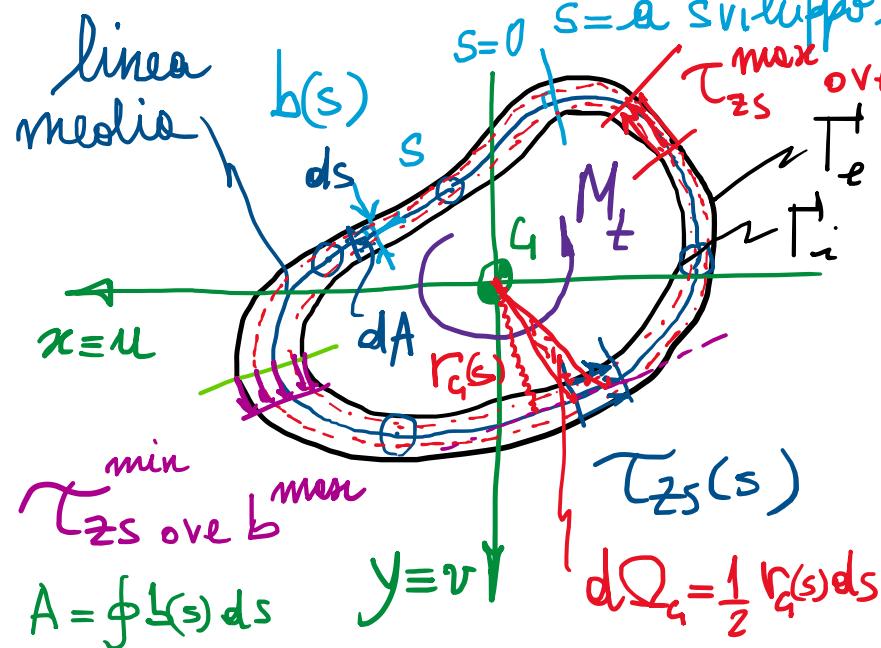
LEZIONE 23

Torsione nei profili sottili chiusi (monocellulari)



biconcavi

(2 tagli per separare) con continuità



$s=0$ $s=a$ sviluppo linea media

τ_{zs}^{\max} over b^{\min}

$a=f ds$

- Spessore $b(s)$ in generale varia lungo lo sviluppo del profilo, rimanendo "piccolo":

$$b(s) \ll a \quad [|b'(s)| \ll 1] \quad (a > 10 b)$$

- Analogie idrodinamiche:

- traiettorie che abbracciano l'intero profilo $\sim \parallel$ alle linee media.

- velocità \rightarrow tens. tangenziali $\sim \parallel$ alle l.m. $\rightarrow T_{zs}$

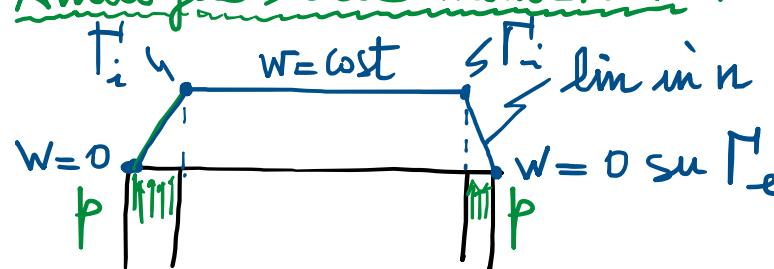
- distribuz. di velocità (T_{zs}) cost. sullo spessore

- "flusso delle tensioni tangenziali": portata costante

$$q(s) = T_{zs}(s) \quad b(s) = q = \text{cost} \Leftrightarrow Q = V A = \text{cost}$$

velocità

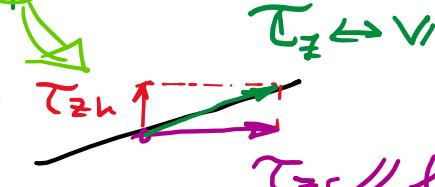
- Analogie delle membrane:



velocità

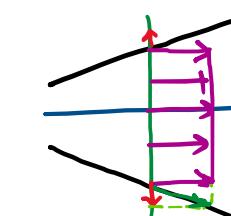
$$\left\{ \begin{array}{l} T_{zs} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{cost} \quad \text{tendenze cost sullo spessore} \\ T_{zh} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \approx 0 \quad \text{tendenze nulla in s} \end{array} \right.$$

antisimm.
sullo
spessore



$T_{zh} = 0 \Rightarrow$ T_{zh} convergenti verso la linea media

T_{zh} divergenti dalle linee media



$\rightarrow b \uparrow (b' > 0)$

T_{zh} divergenti dalle linee media

$T_{zh} \ll T_{zs} \Rightarrow 0$

- Formula di Rudolf BREDT (≈ 1896): [ragionamento "isostatico"] \rightarrow soluzione approssimata
- Equivalenza statica tra M_t e le $T_{zs}(s)$ come sopra discusso:

$$M_t = \oint \underbrace{T_{zs}(s) b(s)}_{\text{hyp: } q(s)=q=\text{cost}} ds \cdot r_g(s)$$

$$= 2q \oint \underbrace{\frac{1}{2} r_g(s) ds}_{d\Omega_g} ds$$

$d\Omega_g$ ($\Omega_g(s)$: area settoriale riferita a G)

$$\boxed{M_t = 2q \Sigma}$$

$$\Rightarrow q = T_{zs}(s) b(s) = \frac{M_t}{2\Sigma}$$

Riguardo l'entità delle T_{zs} , a parità di spessore, il param. geometrico cruciale è Σ

$$\frac{D=2R}{\Sigma}$$

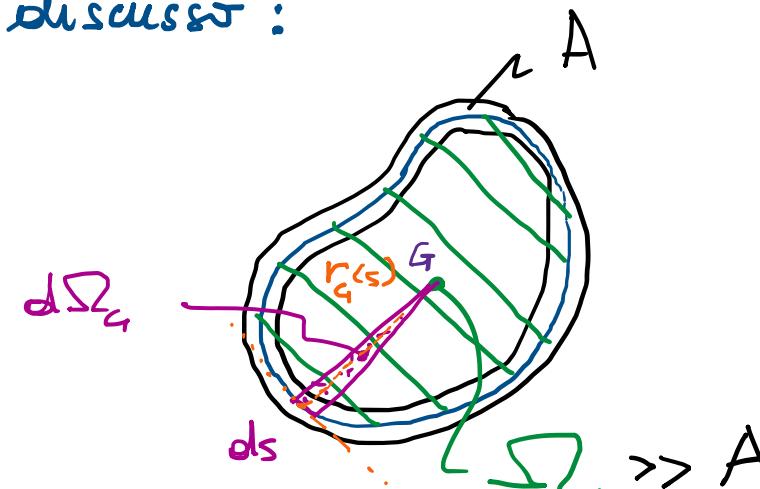
$$\Sigma = \pi R^2 \quad \Sigma_{\max} \text{ e pari a } 2\pi R$$

$$\Sigma \downarrow \rightarrow \Sigma \downarrow$$

$$\Sigma \rightarrow 0 \quad T_{zs} \rightarrow \infty$$

(idem per J)

$$T_{zs} \sim \Sigma^{-1}$$



$$d\Omega_g$$

$$ds$$

$$\Sigma \gg A$$

area racchiusa
all'interno delle
linee medie

$$\boxed{T_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\Sigma b(s)}}$$

Le $T_{zs}(s)$ risultano:

- dirett. prop. a M_t
- invers. prop. a Σ
- invers. prop. a $b(s)$

$$T_{zs}^{\max} \text{ ove } b^{\min}; T_{zs}^{\min} \text{ ove } b^{\max}$$

- Momento d'inerzia torsionale: valutabile, a volte del calcolo delle tau, via PLV

$$\frac{dL_e}{dz} = M_t \beta = \oint T_{zs} \frac{\cancel{T_{zs}}}{G} \overbrace{b(s) ds}^{\frac{dA}{dz}} = \frac{dL_i}{dz}$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad J = \frac{M_t}{G\beta}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

~~$$\frac{M_t}{GJ} = \oint \frac{T_{zs}(s)}{G} b(s) ds$$~~

$$\frac{1}{J} = \oint \frac{M_t}{(2\Omega b)^2} b(s) ds$$

$$= \frac{1}{4\Omega^2} \oint \frac{ds}{b(s)}$$

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}} = \frac{4\Omega^2 b}{a}$$

$$a = \oint ds$$

$$\frac{b}{a} \sim \frac{1}{10}$$

- Ingobbamento (riferito alla linea media)

→ Centro
di
torsione

$$d\Psi_g = \frac{T_{zs}(s)}{G\beta} ds - 2d\Omega_g$$

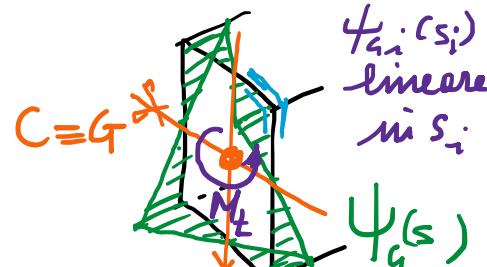
$$= \frac{J}{M_t} \frac{M_t}{2\Omega b(s)} ds - 2d\Omega_g$$

$$= \frac{2\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \frac{1}{2\Omega} \frac{ds}{b(s)} - 2d\Omega_g$$

$$d\Psi_g = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \frac{ds}{b(s)} - 2d\Omega_g$$

ingobb. medio
nullo

$$\bar{\Psi}_g = 0$$



trotti
rettilinei
con $b_i = cst$

$$= \frac{4\Omega^2}{\sum_i \frac{s_i}{b_i}}$$

$$a = \sum_i s_i$$

Profili scatolari:

$$\begin{cases} x_c = -\frac{1}{J_x} \oint \Psi_g(s) y(s) b(s) ds \\ y_c = \frac{1}{J_y} \oint \Psi_g(s) x(s) b(s) ds \end{cases}$$

coordinate del C. di To.
(se Esse disim, C è tale esse)

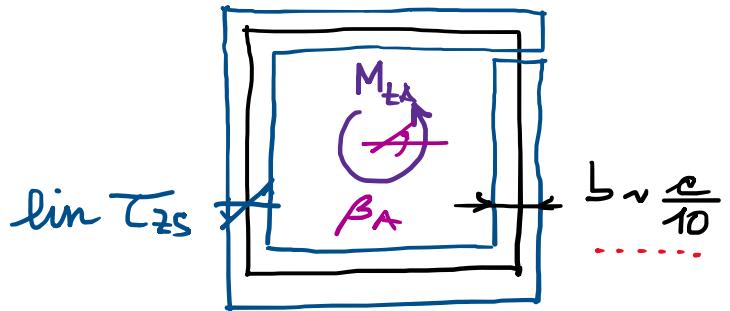
$$\Psi_g(s) = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{ds}{b(s)} - 2\Omega_g(s) + \Psi_g^0$$

cost

Confronto a torsione tra profilo sottile aperto e profilo sottile chiuso

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}$$

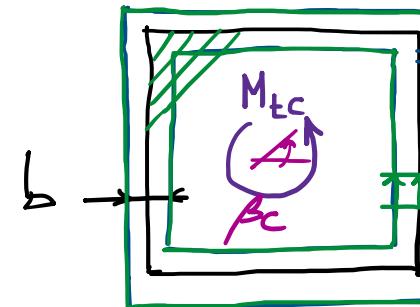
APERTO



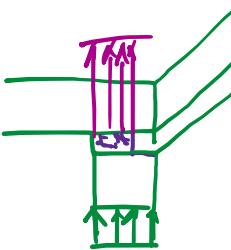
dim τ_{2s}

The winner is...
profilo chiuso!

CHIUSO



soluzioni difettose:
minesco di
fratture



$T \cdot b = \text{cost}$

$$J_A = \sum_i \frac{1}{3} \alpha_i b_i^3 = \frac{4}{3} cb^3$$

$$\tau_A = \frac{M_{tA}}{J_A} b = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{cb^2}$$

$$\beta_A = \frac{M_{tA}}{G J_A} = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{G cb^3}$$

Ese:

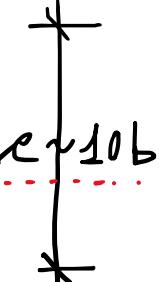
- a parità di M_t : $M_{tA} = M_{tc}$

$$- \frac{\tau_A}{\tau_c} = \frac{3}{2} \frac{c}{b} \sim 15 \cdot 10$$

$$- \frac{\beta_A}{\beta_c} = \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \sim 0.75 \cdot 100$$

- a parità di β : $\beta_A = \beta_c$

$$- \frac{M_{tc}}{M_{tA}} = \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \sim 0.75 \cdot 100$$



$$\frac{r}{b} \sim 10$$

$$b > 1$$

$$c \sim 10b$$

$$J_c = \frac{4 \Omega^2 b}{\sum_i \alpha_i} = \frac{4 (c^2) b}{4 c} = c^3 b$$

$$\tau_c = \frac{M_{tc}}{2 \Omega b} = \frac{M_{tc}}{2 c^2 b}$$

$$\beta_c = \frac{M_{tc}}{G J_c} = \frac{M_{tc}}{G c^3 b}$$

Rapporti:

$$\frac{J_c}{J_A} = \frac{c^3 b}{4/3 c b^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \ggg 1 \sim 0.75 \cdot 100 = 75$$

$$\frac{\tau_A}{\tau_c} = \frac{3}{2} \frac{M_{tA}}{M_{tc}} \frac{2 c^2 b}{M_{tc}} = \frac{M_{tA}}{M_{tc}} \frac{3}{2} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \sim 1.5 \cdot 10 = 15$$

$$\frac{\beta_A}{\beta_c} = \frac{M_{tA}}{M_{tc}} \frac{J_c}{J_A} = \frac{M_{tA}}{M_{tc}} \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b} \right)^2$$

due ordini di
grandezza

$$\sim \left(\frac{c}{b} \right)^2$$

$$\sim \left(\frac{c}{b} \right)$$

un ordine
di grandezza