Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

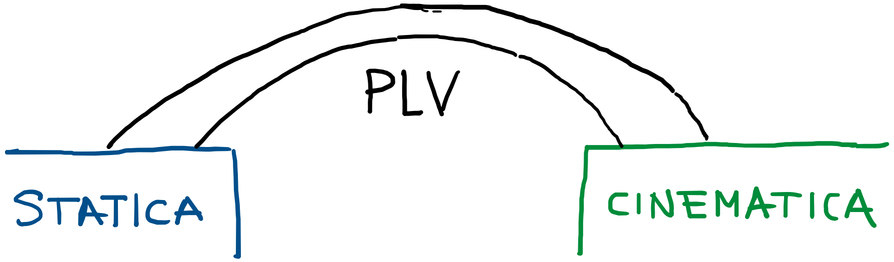
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) → Meccanica dei continui (dei Solidi)

"Ponte" tra statica e cinematica



Sistema A staticamente ammissibile: Famiglia di quantità statiche equilibrate

$F^A, f^A ; \sigma^A$

$\mathrm{div}\,\sigma^A + F^A = 0$ in V

$t_n^A = n \cdot \sigma^A = f^A$ su S_f

"virtuali"

no causa-effetto $\not\Leftrightarrow$

Sistema B cinematicamente ammissibile: Famiglia di quantità cinematiche congruenti

$s^B, \bar{s}^B ; \varepsilon^B$

$\varepsilon^B = \frac{1}{2}\left(\nabla s^B + \nabla s^{BT}\right)$ in V

$s^B = \bar{s}^B$ su S_s

Enunciato del PLV

(CN di equilibrio e di congruenza):

$$\forall \left.\begin{matrix}\text{Sistema A}\\ \text{Sistema B}\end{matrix}\right]: \; L_e^{AB} = \int_V \underbrace{F^A \cdot s^B}_{F_i^A s_i^B} dV + \int_{S_f} \underbrace{f^A \cdot s^B}_{f_i^A s_i^B} dS + \int_{S_s} \underbrace{n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B}_{n_i \sigma_{ij}^A \bar{s}_j^B} dS = \int_V \underbrace{\sigma^A : \varepsilon^B}_{\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B} dV = L_i^{AB}$$

(valido indipendentemente dal comportamento del materiale)

Manifestazioni del PLV (CS): strumenti applicativi, operativi ("metodi")

- PSV (CS di equilibrio)

$$\left.\begin{matrix}\text{Sistema B cinem. amm.}\\ L_e^{AB} = L_i^{AB}\end{matrix}\right\} : \text{Sistema A static. amm.}$$

(v. "metodo degli spostamenti")

- PFV (CS di congruenza)

$$\left.\begin{matrix}\text{Sistema A static. amm.}\\ L_e^{AB} = L_i^{AB}\end{matrix}\right\} : \text{Sistema B cinem. amm.}$$

(v. "metodo delle forze")

Dim. del PLV (CN di equil. e congruenza) $\Rightarrow$ Teorema dei Lavori Virtuali

$\begin{cases} \text{Hp.: } A, B \text{ ammiss.} \\ \text{Tesi: } \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \end{cases}$

[Th. della divergenza:

$$\int_V \underset{g_{i,i}}{\mathrm{div}\, g}\, dV = \int_S \underset{n_i g_i}{n \cdot g}\, dS, \quad g: \text{campo tensoriale} \quad \left[\mathrm{div}(\ ) = \nabla \cdot (\ ) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\ )\right]$$

es. vettore g_i]

Sia $g = \sigma \cdot s \Leftrightarrow g_i = \sigma_{ij} s_j \Rightarrow \mathrm{div}\, g = ?$

vettore — tensore doppio — vettore

regola del prodotto

$$\text{scalare} = g_{i,i} = (\sigma_{ij} s_j)_{,i} = \underbrace{\sigma_{ij,i}}_{(\mathrm{div}\,\sigma)_j} s_j + \underbrace{\sigma_{ij}}_{=\sigma_{ji}} \underbrace{s_{j,i}}_{\psi_{ji}}$$

$= \sigma_{ji}$ $(\sigma^T = \sigma)$ simm.

$$\Leftarrow \mathrm{div}(\sigma \cdot s) = (\mathrm{div}\,\sigma) \cdot s + \sigma : \underbrace{\nabla s^T}_{(\varepsilon^{(T)} + \vartheta^T)}$$

$\nabla s = \psi = \varepsilon + \vartheta$

simm. $\varepsilon^T = \varepsilon$, $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$

emis. $\vartheta^T = -\vartheta$, $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$

$\sigma_{ij}\vartheta_{ji} = \sigma_{11}\cancel{\vartheta_{11}} + \sigma_{12}\cancel{\vartheta_{21}} + \dots + \sigma_{21}\cancel{\vartheta_{12}} + \dots \equiv 0$

$(\sigma : \vartheta^T = \sigma : \vartheta \equiv 0)$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \sigma^A : \varepsilon^B\, dV = \int_V \left[\mathrm{div}(\sigma^A \cdot s^B) - (\mathrm{div}\,\sigma^A) \cdot s^B\right] dV$$

Th. Div.

$$= \int_S n \cdot \sigma^A \cdot s^B\, dS - \int_V (\mathrm{div}\,\sigma^A) \cdot s^B\, dV$$

A static amm.

B cinemat. amm.

$$= \int_{S_s} n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B\, dS + \int_{S_f} f^A \cdot s^B\, dS + \int_V F^A \cdot s^B\, dV = \mathcal{L}_e^{AB} \quad \text{c.v.d.}$$

(idem per CS di equilibrio o di congruenza)

Proprietà del "problema elastico lineare"

- Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE) [Valido per la linearità di tutte le equaz. governanti ⇒ operatori lineari]

α (Sistema ①: $\mathbb{F}^1, f^1, \bar{s}^1 \Rightarrow \sigma^1, \varepsilon^1, s^1$)

β (Sistema ②: $\mathbb{F}^2, f^2, \bar{s}^2 \Rightarrow \sigma^2, \varepsilon^2, s^2$)

es. $\mathrm{div}(\alpha\sigma^1 + \beta\sigma^2) = \alpha\,\mathrm{div}\,\sigma^1 + \beta\,\mathrm{div}\,\sigma^2$

algebrica e differenziali

$$\underbrace{\alpha\mathbb{F}_1 + \beta\mathbb{F}_2,\ \alpha f_1 + \beta f_2,\ \alpha\bar{s}^1 + \beta\bar{s}^2}_{\text{combinazione lineare dei dati}} \Rightarrow \underbrace{\alpha\sigma^1 + \beta\sigma^2,\ \alpha\varepsilon^1 + \beta\varepsilon^2,\ \alpha s^1 + \beta s^2}_{\text{combinazione lineare delle soluzioni}}$$

- Buona posizione del problema ($\exists$ un numero finito di soluzioni con dipendenza continua dai dati)
  - $\exists$nza della soluzione (Teoria dell'Elasticità ⇒ Sokolnikoff, 1956)
  - Unicità della soluzione ($\exists!$: esiste un'unica soluzione) ⇒ Th. di Kirchhoff ~ 1859

Dim.: Da PSE con $\alpha = -\beta = 1$, con $\mathbb{F} = \mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^2$, $f = f^1 = f^2$, $s = \bar{s}^1 = \bar{s}^2$

$$\left.\Delta\mathbb{F} \equiv 0,\quad \Delta f \equiv 0,\quad \Delta\bar{s} \equiv 0\right\}$$ (stessi dati)

Hp. (ragionamento per assurdo): $\Delta\sigma = \sigma^1 - \sigma^2 \neq 0$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon^1 - \varepsilon^2 \neq 0$, $\Delta s = s^1 - s^2 \neq 0$ (diverse soluzioni)

$\Delta\sigma = \mathbb{E} : \Delta\varepsilon$

Da PLV (A, B sist. reale)

$$\mathcal{L}_e \equiv 0 = 2\int_V \frac{1}{2}\Delta\sigma : \Delta\varepsilon \, dV = 2\int_V \omega(\Delta\varepsilon)\, dV = \mathcal{L}_i \overset{\text{assurdo}}{\Rightarrow} \Delta\varepsilon = 0,\ \Delta\sigma = 0;\ \Delta s \neq 0$$

ipotesi smentite

in generale (es. moti rigidi arbitrari)

$\omega(\Delta\varepsilon) > 0 \quad \forall \Delta\varepsilon \neq 0$ def. pos.

(linearità + elasticità)

unicità su sforzo e deformazione

- Approcci risolutivi
  - analitico (soluzioni esatte o approssimate)
  - numerico (soluzioni approssimate) → Calcolo Numerico

processo di discretizzazione (∞ gdl → n. finito di gdl)

v. CMSS

Metodo degli Elementi Finiti (FEM)
" " " di contorno (BEM)
Metodo degli Elementi Discreti (DEM) → (es. murature)
Metodo delle Differenze Finite (FD)

- Metodologie di analisi (metodi)
  - Diretto : Dati → Soluzione (soluzione esatta, in forma chiusa, solo per casi particolari)
  - Semi-inverso : Dati ⇄ Soluzione parzialmente nota (a meno di un certo n. di parametri)
  - Inverso : Dati ← Soluzione (es. Structural Health Monitoring (SHM), Identificazione parametrica mediante analisi inversa, Model updating)

es. nota sperimentalmente

Input ⇄ Output