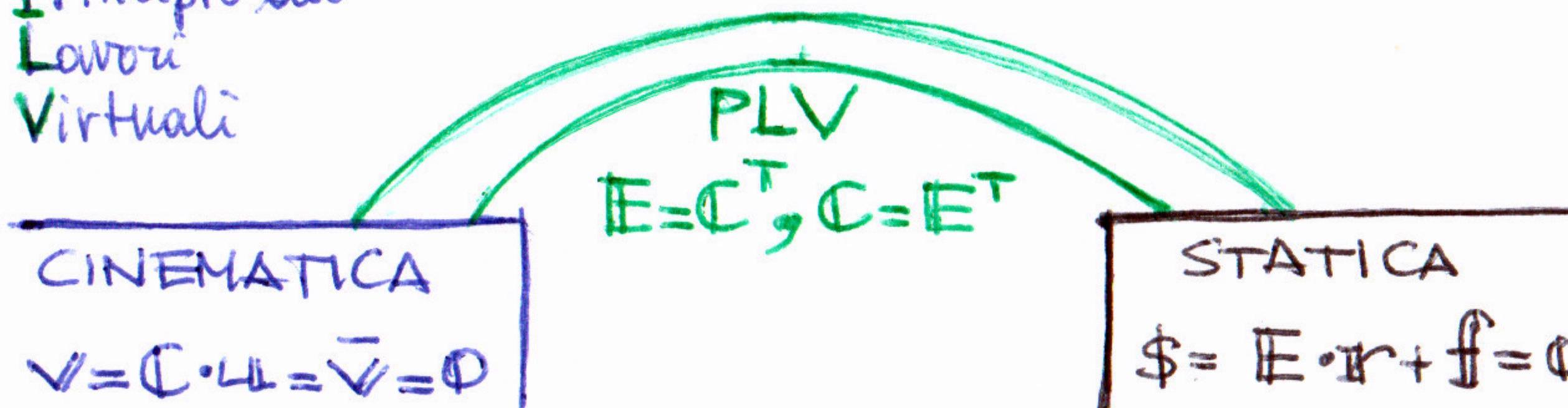


Fa Lez. CdSpdC - PLV: ponte tra cinematica e statica

Principio dei Lavori Virtuali



Note: - non aggiunge nuove equazioni ma esprime collegamento tra le due sponde delle cinematica e della statica

- è dimostrabile (principio \Rightarrow teorema). Vedi meccanica dei continui

- A e B non necessariamente reali, bensì anche virtuali (non legati da rapporto di causa/effetto): PLV valido indipendentemente dal comportamento del materiale.

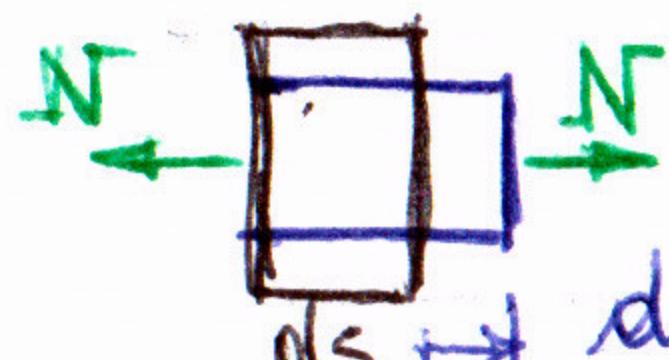
- per corpi indeformabili: $\Delta_i = 0 \Rightarrow \Delta_e = 0$

- Deformazioni elementari: in generale somma di un contributo elastico (reversibile) e di un contributo anelastico (irreversibile), ad es. per cazioni termiche impresse alla struttura (elongazioni/contrazioni).

$$dn = dn_e + dn_t, dt = dt_e + dt_t, d\varphi = d\varphi_e + d\varphi_t \quad e: \text{elastiche}, t: \text{termiche}$$

Deformazioni elastiche del concio di trave:
dotate alle Azioni Interne N, T, M

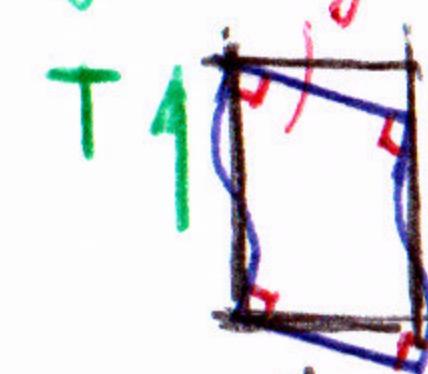
Azioni assiale



$$ds \rightarrow dn_e = N ds$$

Rigidità assiale FA
E: modulo di elasticità long.
o modulo di Young
A: area delle sez. transv.

Taglio \bar{y}



Momento flettente
I altezza fattore di taglio β
I altezza $\mu T ds$
rigidità tagliente $G A$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ elasticità tangenz.
Poisson's ratio

$$d\varphi_e$$

$$d\varphi_e = \frac{M ds}{E J}$$

J: momento d'inerzia delle sezioni trasv. rispetto all'asse neutro

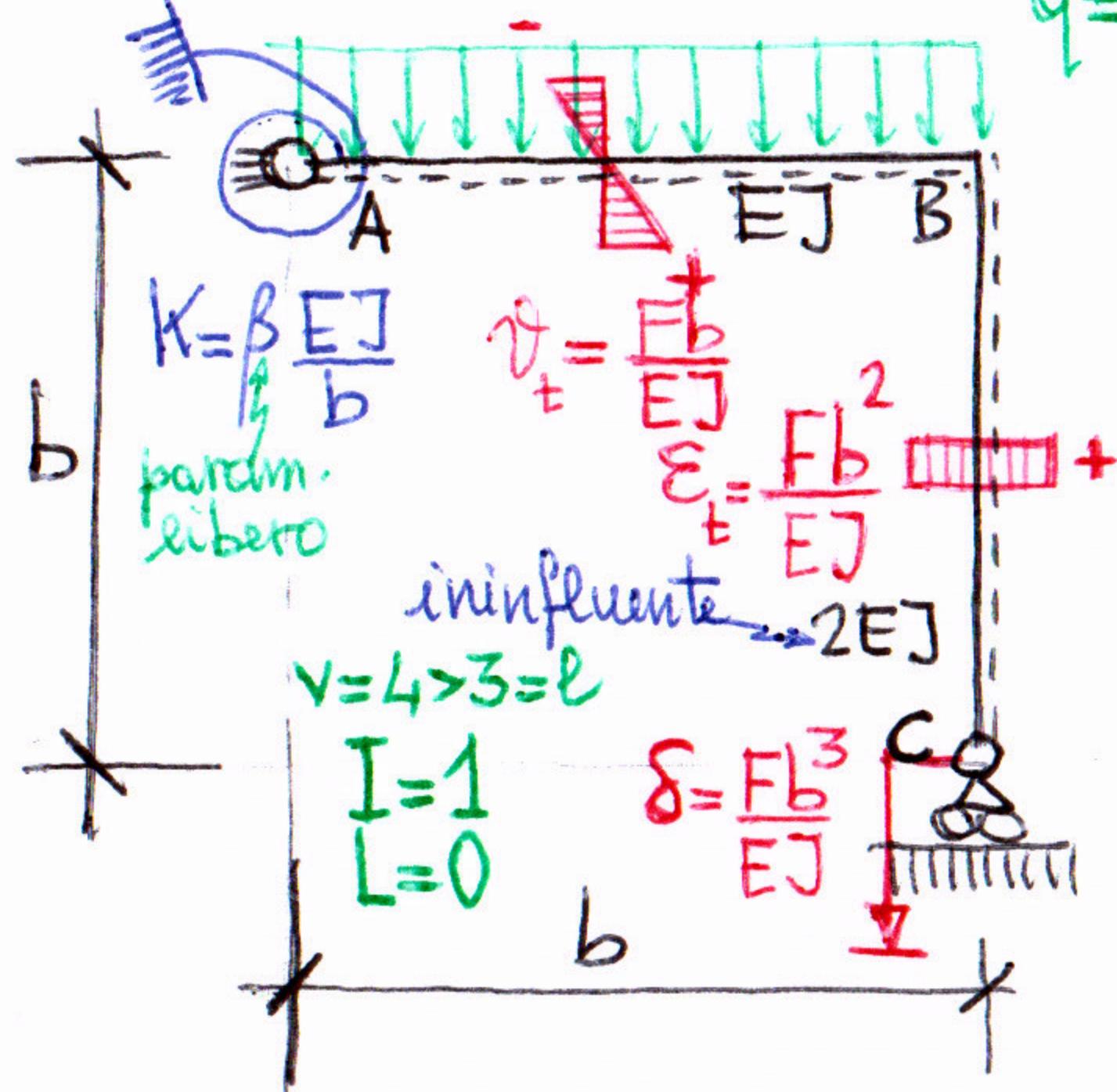
α : coeff. di dilatazione termica lineare

$$[\alpha] = \frac{1}{[T]}$$

$$\alpha \sim 10^{-5} - 10^{-6} \text{ g}^{-1}$$

$$ds$$

$$d\varphi_e = \frac{M ds}{E J}$$



Dati:

- $q = F/b$, carico uniformemente distribuito su AB

- molla elastica rotazionale lineare in A, di costante di rigidezza K

la molla fornisce 1 gdw

vincolo (con gdw associato alle rotazioni) eodale elasticamente

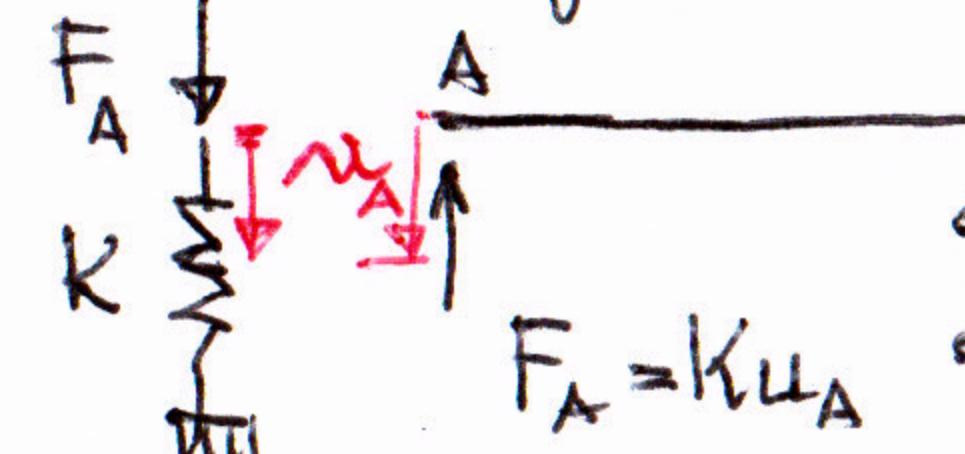
F_A nel verso di M_A sulla molla

M_A M_A

$M_A = K\alpha_A$

α_A opposta a M_A sull'asta

idem per molla elongazionale, se presente



F_A sull'asta opposta ad α_A

F_A sulle molle nello stesso verso di α_A

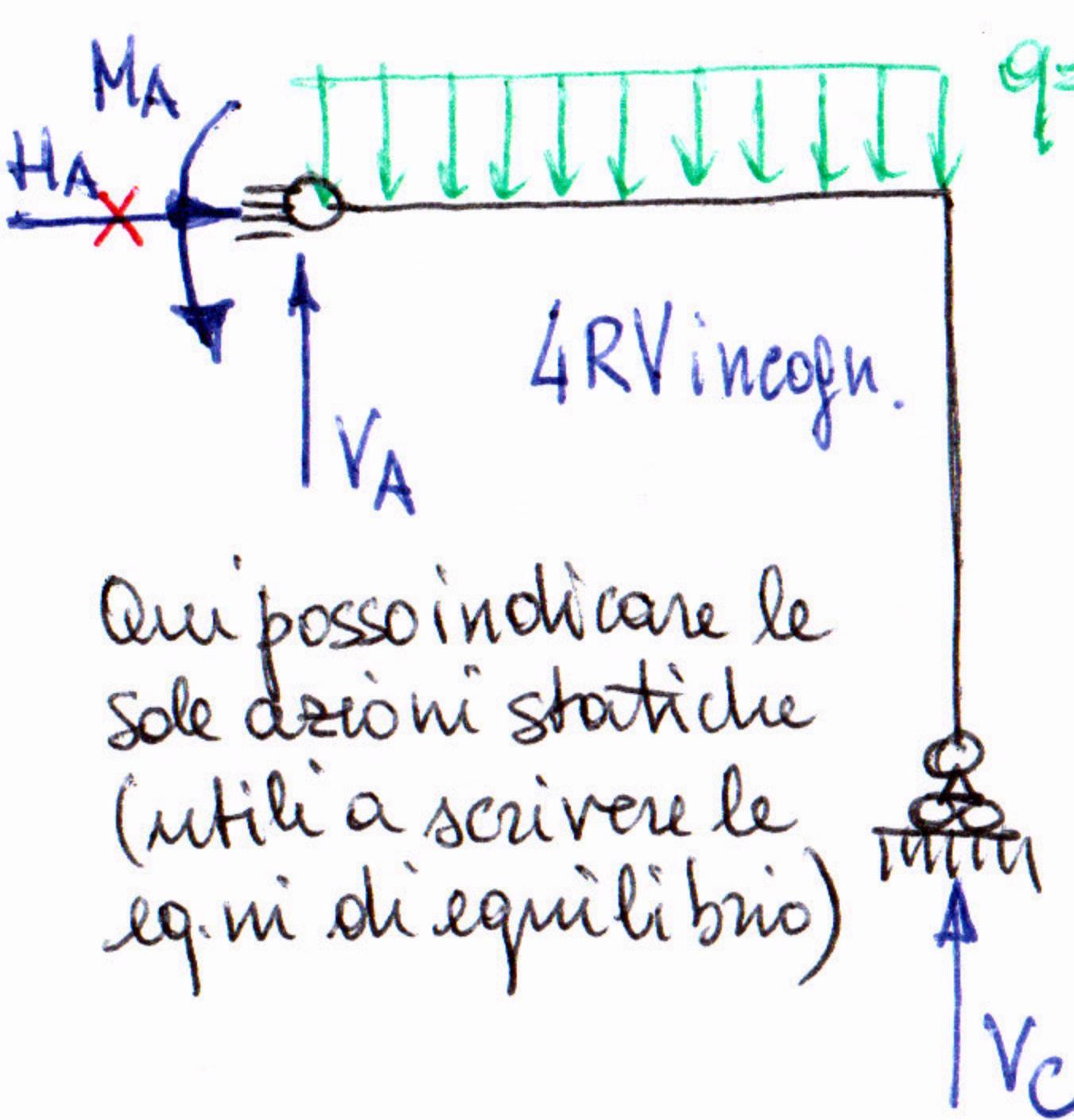
- cedimento vincolare permanente (anelastico) in C: $\alpha_C = \bar{\alpha}_C = -\delta = -\frac{Fb^3}{EJ}$ \rightarrow gruppo dimens. per la misura di spostamenti strutturali $[\delta] = [L]$ (cedimento vs. il basso).

- deformazione termica longitudinale costante su tutta l'asta Be, corrispondente a ΔT uniforme sulle set. trass. $\epsilon_t = \frac{Fb^2}{EJ} \rightarrow$ gruppo dimens. $\frac{Fb^2}{EJ} = \frac{Fb^3}{EJ \cdot b}$, $[\epsilon_t] = [1]$

- curvatura termica (a farfalla $+\Delta T$ / $-\Delta T$) su tutta l'asta AB :

$$\nu_t = \frac{Fb}{EJ} \rightarrow \text{gruppo dimens. } \frac{Fb}{EJ} = \frac{Fb^2}{EJ \cdot b}, [\nu_t] = [1] \text{ (curvatura)}$$

Calcolo delle Reazioni Vincolari (scelta dell'incognita iperstatica)



Qui posso indicare le sole azioni statiche (utilia scrivere le eq.m di equilibrio)

Eq.m di equilibrio (3):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \text{ staticam. determin.}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_c b + M_A = \frac{Fb}{2}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -V_A b + M_A = -\frac{Fb}{2}$$

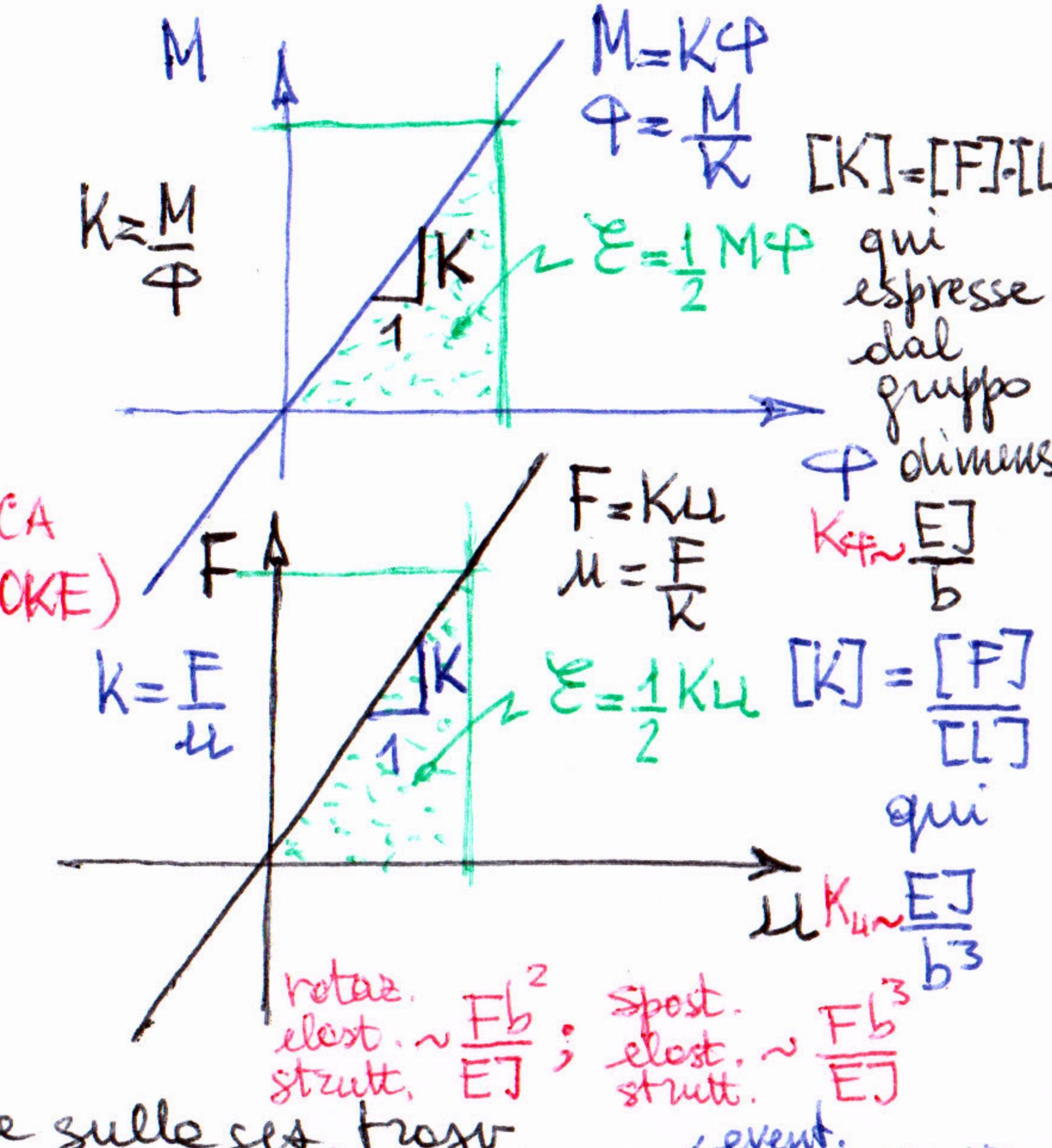
Check

$$(V_c + V_A)b = 2 \cdot \frac{Fb}{2}$$

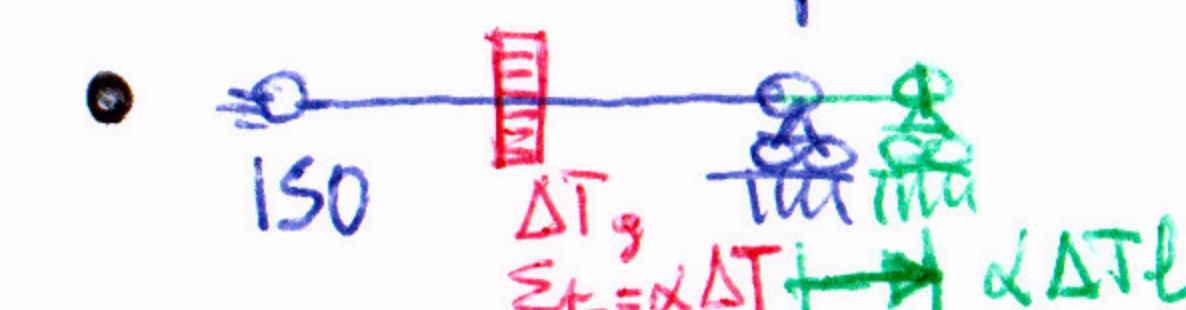
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_c = F$$

Evidentemente l'equilibrio non basta per det.

V_A, V_C, M_A sono indetermin. statiche tra queste 3 RV.



Rilevanza pratica:



- def. può avvenire (sfogo della dilat. termica, veoli giunti di dilat.)

- sfotto nullo

IDEEM

ISO

ΔT

$\epsilon_t = \alpha \Delta T + \Delta \epsilon_{TE}$

$\epsilon_t = X_t = X$

IPER

ΔT

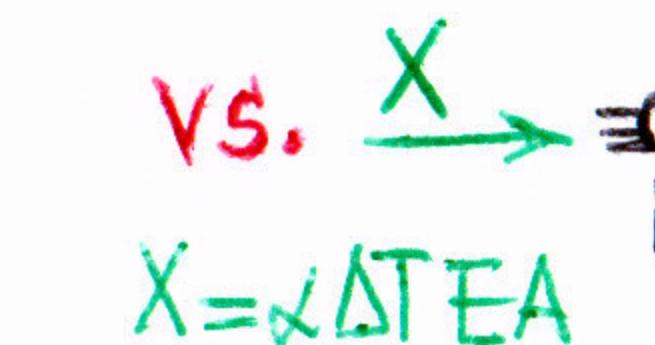
$\epsilon_t = \frac{\Delta T}{X_t}$

$X = EJ \nu_t$

- deformaz. SI

- deformaz. NO

- sfotto SI



$X = \alpha \Delta T E_A$

- def. bloccata

- sfotto non nullo (e X, di compressione per $\epsilon_t > 0$,

può portare ad instabilità)

$X = EJ \nu_t$

$\nu_t = \frac{X}{EJ}$

Scelta dell'incognita iperstatica X (metodo delle forze)

(ad es., ma non esclusivamente, tra le RV V_A, V_C, M_A).

$X = M_A$ - Possono quindi essere espresse le rimanenti $RV = RV(X)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A = \frac{F}{2} + \frac{X}{b} \\ V_C = \frac{F}{2} - \frac{X}{b} \end{array} \right.$$

cioè traduce l'ipotesi statica del problema

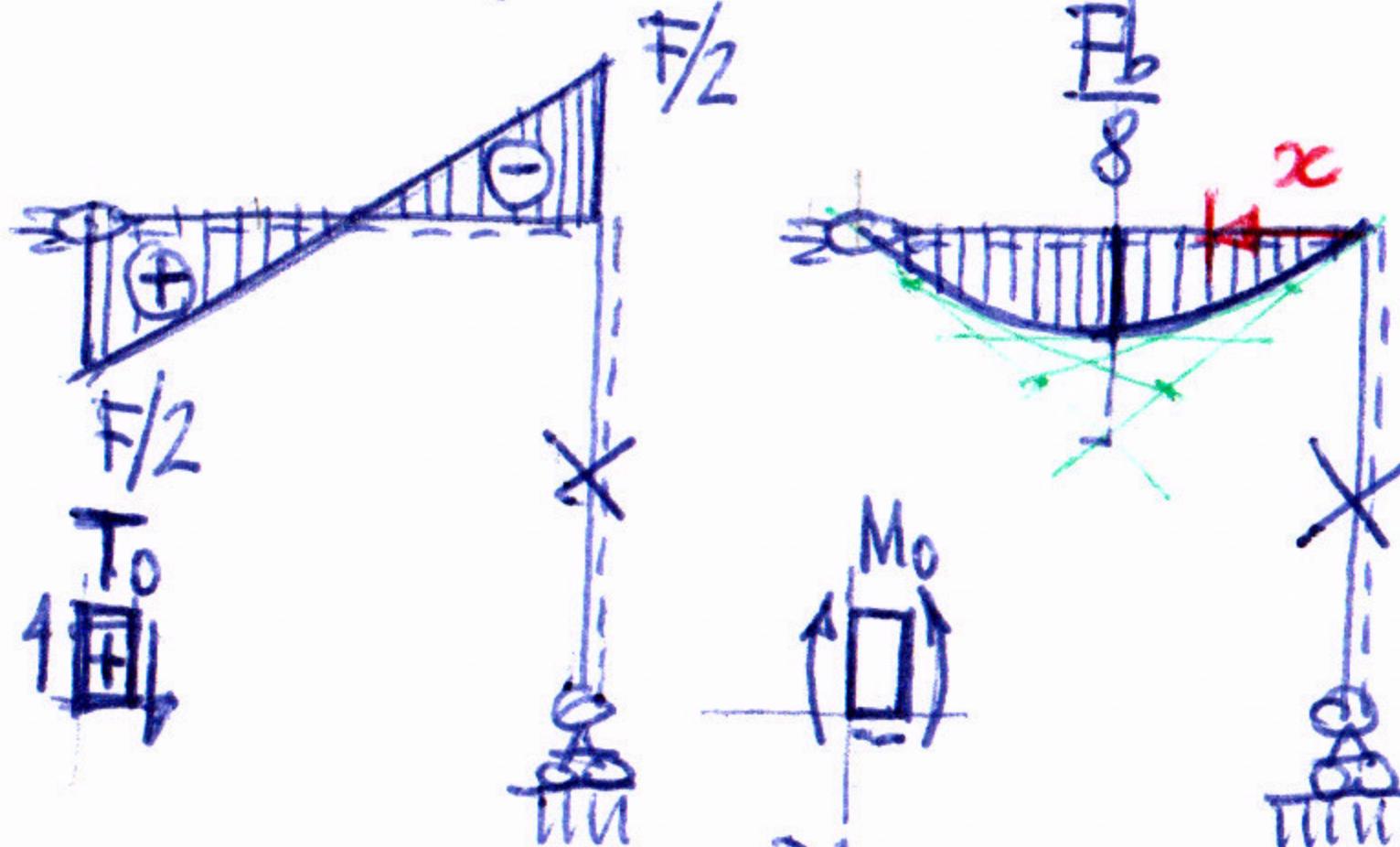
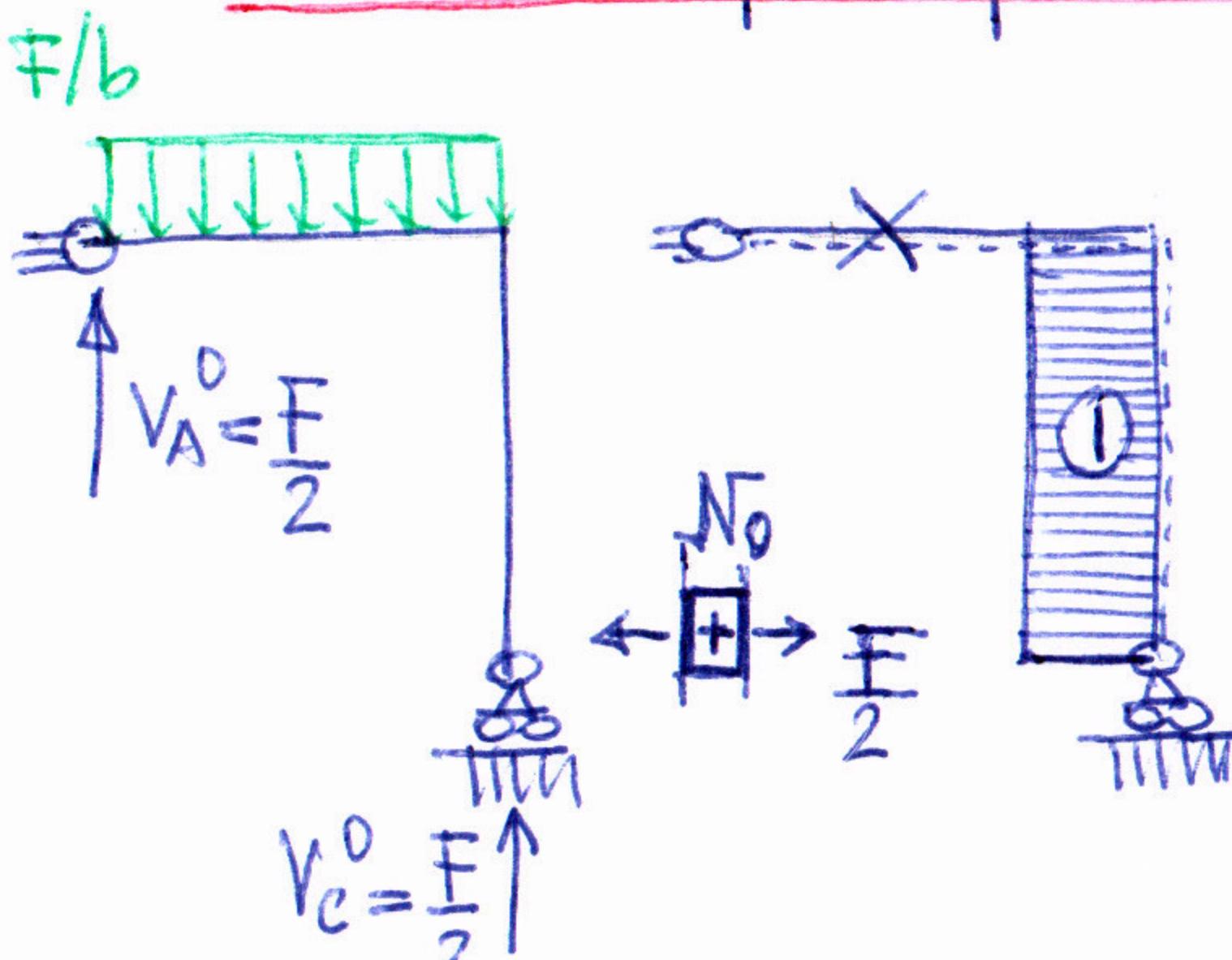
(\forall valore di X, le $RV(X)$ sono sempre in grado di impostare l'equil. Non è però determinabile

Occorrerà la congruenza $\alpha_A = \frac{M_A}{R}$ per risolvere X

il valore di X tramite il solo equil.

Soluzione mediante il PLV (PFV)

Struttura principale isostatica (consolle az. statiche e $X=0$)



Scrittura del PLV (PFV), con Sistema (B) = strutt. reale

(A) Str. fittizia

$$\left. \begin{array}{l} L_B = L_i \\ \frac{F_B}{E} = \frac{F_A}{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(B) Str. reale congruente}$$

Il PFV consente indirettamente di scrivere l'equazione di congruenza $F_A = M_A/K$

$$-\frac{1}{b} \delta - \frac{X}{K} = \int_{\text{str}} M^P \frac{M_0 + X M^D}{EJ} ds + \int_{BC} N^P \varepsilon_t ds + \int_{AB} M^P v_t ds \quad (\text{trascurando effetti elasticamente assidi e taglienti})$$

$$X \left(\frac{1}{K} + \int_{\text{str}} \frac{M^P}{EJ} ds \right) = \frac{\delta}{b} - \int_{\text{str}} \frac{M^P M_0}{EJ} ds - \int_{BC} N^P \varepsilon_t ds - \int_{AB} M^P v_t ds \Rightarrow X = \frac{- \int_{\text{str}} \frac{M^P M_0}{EJ} ds + \frac{\delta}{b} - \int_{BC} N^P \varepsilon_t ds - \int_{AB} M^P v_t ds}{\frac{1}{K} + \int_{\text{str}} \frac{M^P}{EJ} ds}$$

Calcolo degli integrali:

$$\int_{\text{str}} \frac{M^P M_0}{EJ} ds = \int_0^b \left(-\frac{x}{b} \right) \frac{F}{2} x \left(1 - \frac{x}{b} \right) \frac{dx}{EJ} = -\frac{F}{2bEJ} \int_0^b \left(x^2 - \frac{x^3}{b} \right) dx = -\frac{F}{2bEJ} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4b} \right) = -\frac{b-3}{12} \frac{1}{2} \frac{Fb^2}{EJ} = -\frac{1}{24} \frac{Fb^2}{EJ} \quad \begin{matrix} \text{è dimensionale, una rotazione} \\ \text{Idem per i termini sotto:} \end{matrix}$$

$$\int_{\text{str}} \frac{M^P}{EJ} ds = \int_0^b \frac{x^2}{b^2} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{b}{EJ} \quad \text{omogeneo con } 1/K = \frac{1}{3} \frac{b}{EJ}, \quad \int_{BC} N^P \varepsilon_t ds = \frac{1}{b} \varepsilon_t b = \frac{Fb^2}{EJ}, \quad \int_{AB} M^P v_t ds = v_t \int_0^b -\frac{x}{b} dx = -\frac{b}{2} v_t = -\frac{1}{2} \frac{Fb^2}{EJ}, \quad \frac{\delta}{b} = \frac{Fb^2}{EJ}$$

Si ottiene:

$$X = Fb \quad \frac{\frac{1}{24} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \beta} = Fb \frac{13}{24} \frac{3\beta}{3+\beta} = \boxed{\frac{13}{8} \frac{\beta}{3+\beta} Fb = X}$$

- Sostituendo in $RV(X)$: $V_A = \frac{1}{8} \frac{12+17\beta}{3+\beta} F$, $V_C = \frac{3}{8} \frac{4-3\beta}{3+\beta} F$ ($V_A + V_C = F$)
e ora possibile tracciare N , T , M finali.

nuova applicazione del PLV

• Calcolo di spostamenti (es. φ_B) valore determinato

coppia unitaria in corrispondenza a φ_B da calcolare (PFV)

PLV: $1 \cdot F_B + \frac{1}{8} = \int M^P \frac{M_0 + X M^D}{EJ} ds + \int N^P \varepsilon_t ds$

Sistema A

Sistema B

• $M^D(\tilde{x}) = \frac{1}{b} \tilde{x}$

+ $\int_0^b M^P v_t ds$

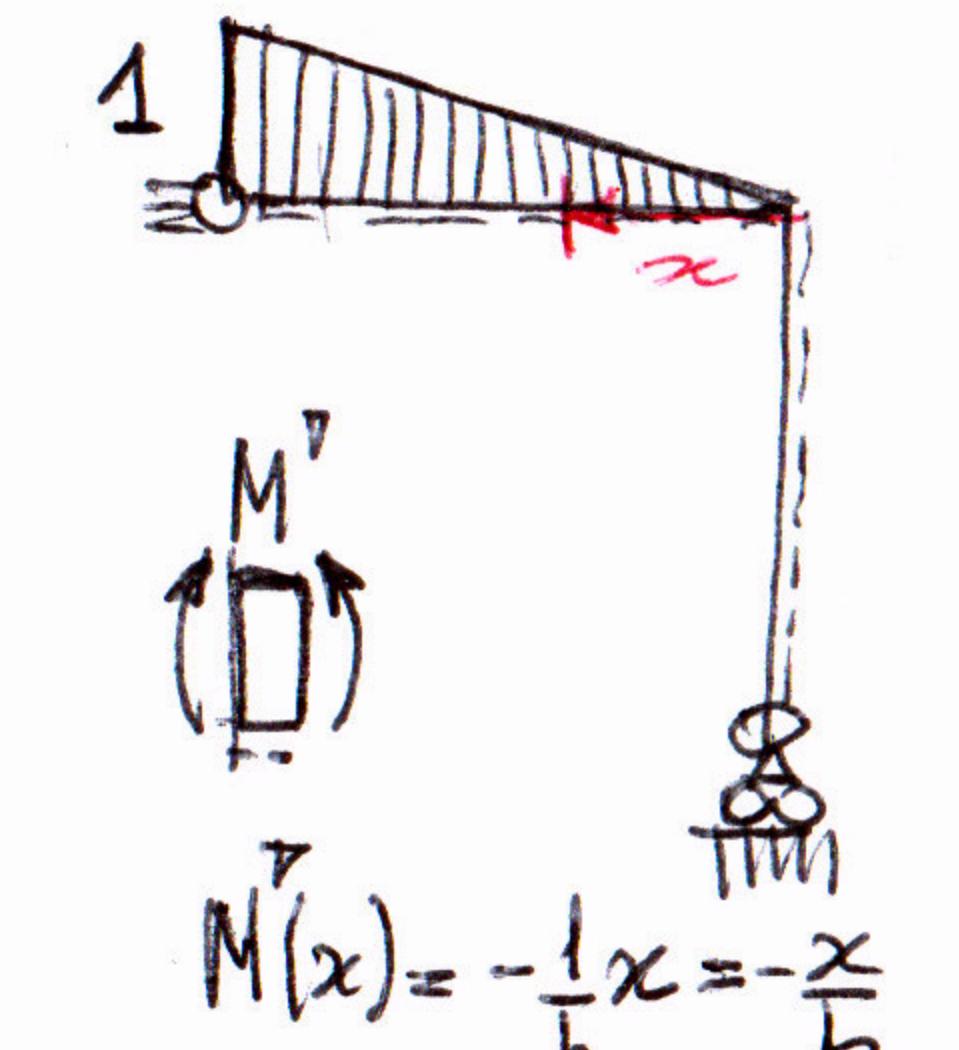
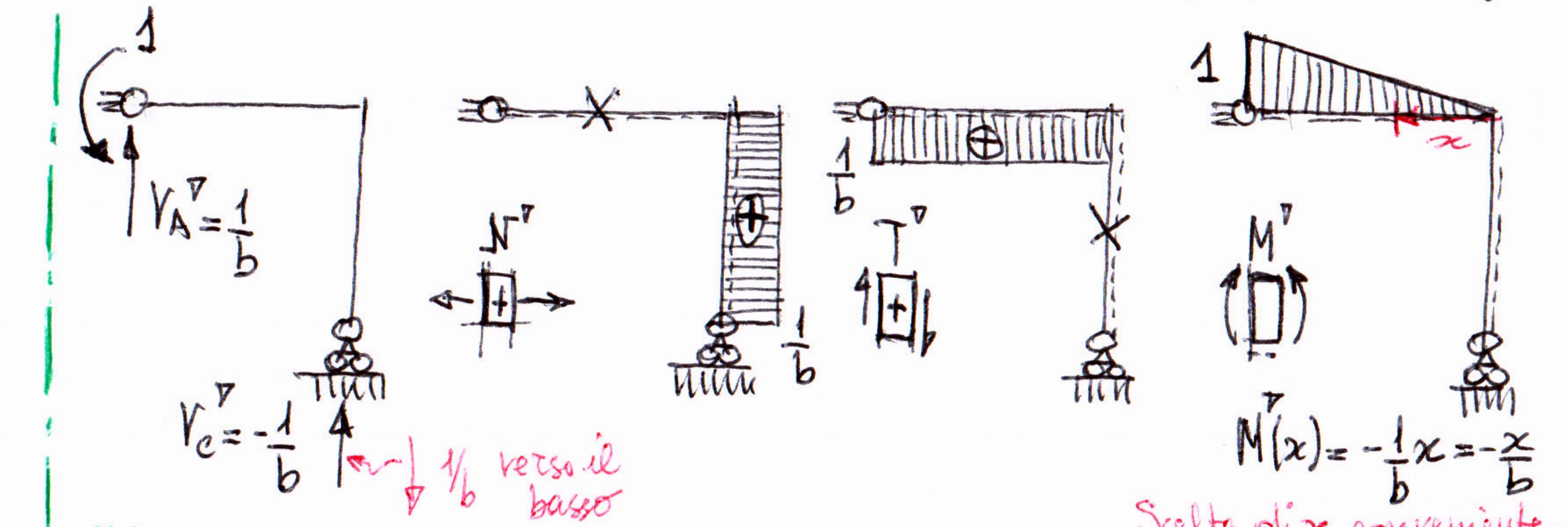
• $M(\tilde{x}) = V_A \tilde{x} - X - \frac{q \tilde{x}^2}{2}$

Risulta $F_B = \frac{13}{48} \frac{6+\beta}{3+\beta} \frac{Fb^2}{EJ}$

- Quindi, per motori rigidi (Δt_{st}): $u_c = \varphi_B \cdot b$, $v_c = -\frac{5}{8a} \frac{2}{2}$

SISTEMA (A) (equilibrato) $X=1$

Struttura fittizia o ausiliarie (solo X posta = ad 1)



Scelta di x congruente per M^P e M_0

erizzi@unibg.it

Perifercente (molla più rigida)

M_A risulta crescente. Ciò alleggerisce l'appoggio C (sino a portare trazione su CB, $V_C < 0$).

V_C cambia di segno ($V_C = 0$ per $\beta = 4/3$)

β	0	1	5	∞
X/Fb	0	$13/32$	$65/64$	$13/8$
V_A/F	$1/2$	$29/32$	$97/64$	$17/8$
V_C/F	$1/2$	$3/32$	$-33/64$	$-9/8$