

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 19

Problemi euleriani di stabilità (Teorie del 2°ordine - Sistemi discreti MDOF)

n gal

- Hip. • Esistono conf. di equilibrio dipendenti linearmente dai carichi:

$$\bar{P} = p \bar{P}_0 \quad \text{vettore dei carichi base}$$

... moltiplicatore dei carichi (adiimensionale, ≥ 0)

- Linearità pre-critica:

$\dot{q}_L = P \dot{q}_L^0$ conf. ne equilibrio corrispondente ai carichi base (q : coordinate lagrangiane)

- Si assume una forma lineare in p per le variazioni 2^a dell'EPT:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \delta q_L^T K \delta q = \underbrace{\omega(\delta q)}_{\text{energia potenz.}} - p \underbrace{w(\delta q)}_{\text{lavoro del 2° ordine}}$$

$\omega = \frac{1}{2} \delta q_L^T K_E \delta q_L$ \leftrightarrow energia potenz. elastica > 0

$w = \frac{1}{2} \delta q_L^T K_G \delta q_L$ \leftrightarrow lavoro del 2° ordine geometrica dei carichi esterni conservativi $> 0 \nabla \delta q \neq 0$

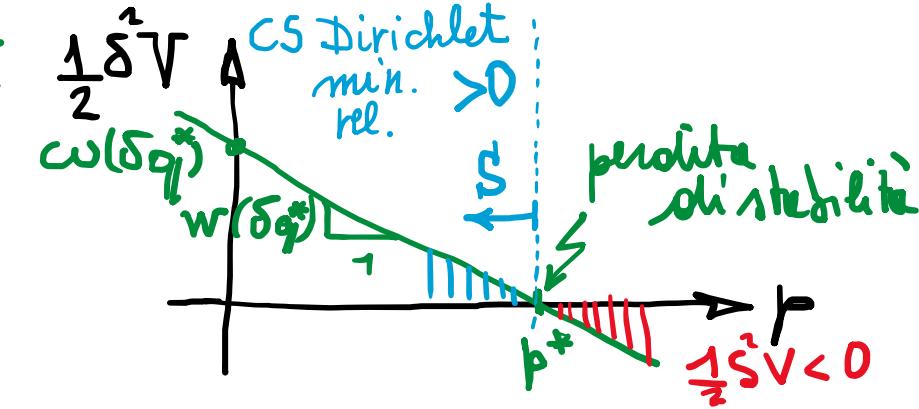
Matrice di rigidezza

rigidità elastica

$\left\{ \begin{array}{l} p_i^*: \text{moltiplicatori critici} \\ \delta q_i^*: \text{defomate critiche} \end{array} \right.$

$$n \times n K = K_E - p K_G \quad (\text{cost. in } q_L, \text{lin. in } p)$$

coerentemente figlie di due contributi, con p che, per livelli crescenti, porta a "negativizzare" K



- Condizione di perdita di stabilità \Rightarrow valori critici:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \omega(\delta q_L^+) - p^* w(\delta q_l^+) = 0 \Rightarrow p_i^*(\delta q_l^+) = \frac{\omega(\delta q_l^+)}{w(\delta q_l^+)} = \frac{\frac{1}{2} \delta q_l^{+T} K_E \delta q_l^+}{\frac{1}{2} \delta q_l^{+T} K_G \delta q_l^+} = R(\delta q_l^+)$$

- Il minimo valore dei moltiplicatori critici si dice moltip. critico eulero:

$$p_{cr}^E = \min \{ p_i^* \} \Rightarrow P_{cr}^E = p_{cr}^E P_0$$

(prime condiz. di perdita di stabilità al crescere di p).

- Per $p = p_{cr}^E$, K diviene semidef. pos. (perde per le prime volte le sue def. pos.)

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \omega(\delta q_l) - p_{cr}^E w(\delta q_l) = \frac{1}{2} \delta q_l^T (K_E - p_{cr}^E K_G) \delta q_l \geq 0 \quad \# \delta q_l \neq 0$$

- Det. dei mott. critici (p_i^+):

- Studio prgr. algebriche di $K = K_E - p K_G$

+ min. princ.

+ singolarità, det $K = 0 \Rightarrow p_i^*$

- Studio pb. agli autov. associati a K_E, K_G

$$K \delta q = (K_E - p K_G) \delta q = 0 \Rightarrow [K_E \delta q = p K_G \delta q] \Rightarrow \begin{cases} p_i^* \text{ autov. e minimo per } p_{cr}^E \\ \delta q_i^* \text{ autovettori (deform. critiche)} \end{cases}$$

$$p_{cr}^E \leq \frac{\omega(\delta q_l^+)}{w(\delta q_l^+)} = R(\delta q_l^+)$$

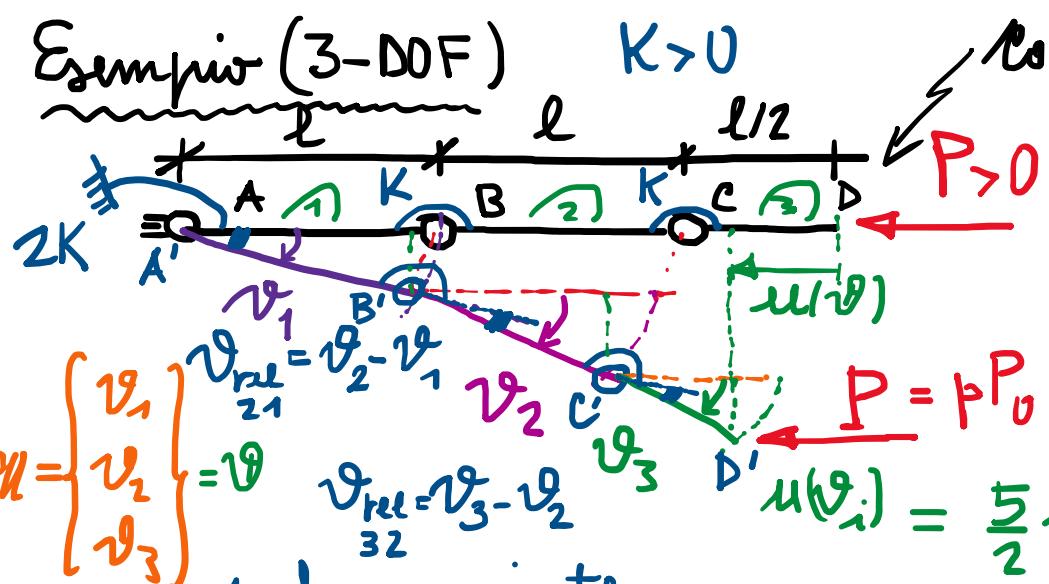
\uparrow vedi analogia con Dinamica

- Rapporto di Rayleigh fornisce stime per eccesso del moltip. cr.

- R è stazionario nelle conf. in equilibrio

e minimo per p_{cr}^E (lim.)

Esempio (3-DOF) $K > 0$ Conf. ne di riferimento $\vartheta_i = 0$ ($\bar{\vartheta}_0 = 0$ s. i. equil.)



$$q_1 = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \vec{\vartheta}$$

Conf. ne variate
(discosta dalle conf. ne di rif.)

Approssim. energetico $\Delta \delta q = q - \bar{q}_0 = \vec{q}$

$$\text{EPT: } \tilde{V}(q_1) = \frac{1}{2} K \left[2 \dot{\vartheta}_1^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1)^2 + (\dot{\vartheta}_3 - \dot{\vartheta}_2)^2 \right] - P \mu$$

energie potenziale elastica

$\sqrt{f} \in P$
cerchi.
esterni
conservat.
- Lef

$$U(\vartheta_i) = \frac{5}{2}l - l \cos \vartheta_1 - l \omega s \vartheta_2 - \frac{l}{2} \cos \vartheta_3$$

$$\mu = \frac{P l}{K} = \frac{P}{K/l} \rightarrow P = \mu \frac{K}{l} = \mu P_0$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}(q_1) = K \left[\frac{1}{2} (3\dot{\vartheta}_1^2 + 2\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\vartheta}_3^2 - 2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - 2\dot{\vartheta}_2\dot{\vartheta}_3) - P \left(\frac{5}{2} - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 - \frac{1}{2} \cos \vartheta_3 \right) \right]$$

- equat. di equil. (de stat.) $\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} = \ddot{\vartheta}_i$ deriv. parziale

$$\tilde{V}_{,\vartheta_1} = 3\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 \quad -P \sin \vartheta_1 = 0$$

$$\tilde{V}_{,\vartheta_2} = -\dot{\vartheta}_1 + 2\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3 \quad -P \sin \vartheta_2 = 0$$

$$\tilde{V}_{,\vartheta_3} = -\dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_3 - \frac{P}{2} \sin \vartheta_3 = 0$$

$$\cos \vartheta_i = \left(1 - \frac{\dot{\vartheta}_i^2}{2}\right) \rightarrow \tilde{V}_2(q)$$

$$\tilde{V}_2(q) = \frac{\omega}{K} - \mu \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{\vartheta}_3^2)$$

$$\tilde{V}_{2,\vartheta_i}$$

$$\begin{cases} (3-\mu)\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 = 0 \\ -\dot{\vartheta}_1 + (2-\mu)\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3 = 0 \\ \vdots - \dot{\vartheta}_2 + (1-\frac{\mu}{2})\dot{\vartheta}_3 = 0 \end{cases}$$

$$K = K_E - \mu K_G$$

già si delineano
 $K_E \leftarrow K_G$

Derivate prime \rightarrow vett. gradiente. eq. di equil. non lineari $\sin \vartheta_i \approx \dot{\vartheta}_i$. eq. di equil. linearizz., de stat. di \tilde{V}_2

- Derivate seconde (matrice hessiana):

$$[\tilde{V}_{v_i v_j}] = \begin{bmatrix} 3 - p \cos \theta_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - p \cos \theta_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - p \cos \theta_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{p \ll 1} \begin{bmatrix} 3 - p & -1 & 0 \\ -1 & 2 - p & -1 \\ 0 & -1 & 1 - p \end{bmatrix} = \tilde{K}$$

$$\tilde{K}_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{K}_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{K} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

matrice di rigidezza elast. matrice di rigid. geom.

- Carichi critici (de singolarità di K):

$$\det(\tilde{K}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$p^3 - 7p^2 + 13p - 4 = 0 \Rightarrow (p-4)(p^2 - 3p + 1) = 0$$

eq. le caratteristiche
(3° grado \rightarrow 3 radici)

$$p=4 \text{ è soluz.}$$

$$16 \cdot 1/4 - 28 \cdot 1/4 + 13 \cdot 1/4 - 1 \cdot 1/4 = 0$$

$\tilde{V}_{2, v_i v_j}$

$$\begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-p \end{bmatrix} = \tilde{K}$$

$$3 \times 3$$

matrice di rigidezza di V_2
(cost. in v_i , lineare in p)

radici:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1,2}^* = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ p_3^* = 4 \end{array} \right. . \frac{3820}{2.618} = \frac{P_{cr}^E}{K}$$

moltiplicatori critici

$$P_{cr}^E = \frac{3820}{2.618} \frac{K}{l}$$

Concetti fondamentali :

- Problemi euleriani di stabilità per sistemi a più gradi (MDOF):
 - Analisi al 2° ordine \Rightarrow EPT $V(q) \approx V_2(q)$ (quadratica)
Utile ad indagare il segno della variazione seconda $\frac{1}{2} \delta^2 V$:
(ove $\frac{1}{2} \delta^2 V > 0$, conf. equil. con $\delta V = 0$ è min. rel. \Rightarrow stabile)
 - (ove $\frac{1}{2} \delta^2 V = 0$, " no min. rel. \Rightarrow cessa di essere stabile)
2 condizioni "critiche"
(no CS Dirichlet)
- Carichi variabili proporzionalmente tramite comune moltiplicatore dei carichi p , ad amplificare i carichi base.
- Si considera una dipendenza lineare della variazione seconda $\frac{1}{2} \delta^2 V$ col moltiplicatore dei carichi p : la condizione di annullamento di $\frac{1}{2} \delta^2 V$ conduce ad un'equazione lineare in $p \Rightarrow$ carichi critici -

- "Modi di instabilità": p_i^* carichi critici \Rightarrow di cui il min. è p_{cr}^E
 δq_i^* deformate critiche

configurazioni critiche in corrispondenza delle quali il sistema cessa di essere stabile (e le prime che si incontrano, al crescere di p , è quello corrispondente al carico critico euleriano del sistema).

- Perdita di stabilità $\frac{1}{2} \delta^2 V = 0 \Rightarrow K \delta q_i = 0$

condiz. di singolarità

matrice di rigidezza
 $K = K_E - p L K_G$

L geometrica
 elastica

DINAMICA

$$IK \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i$$

\longleftrightarrow
analogia

modi principali
di vibrare

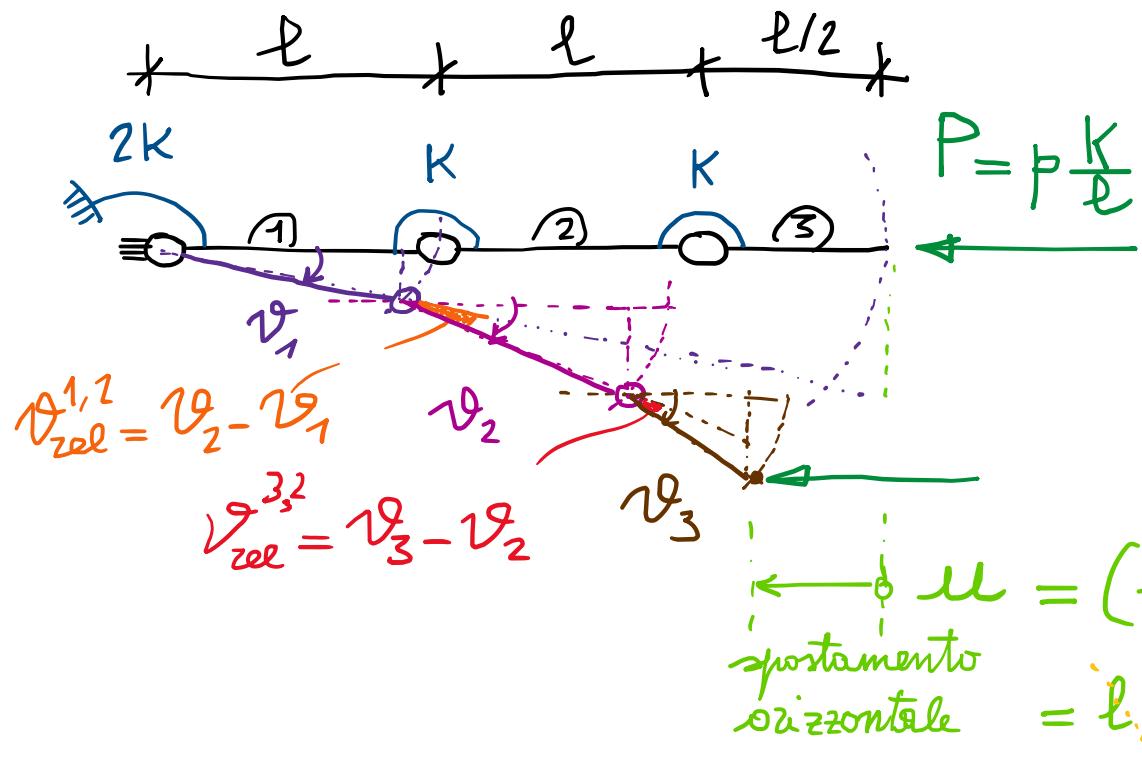
$$IK_E \delta q_i^* = \lambda_i^* K_G \delta q_i^*$$

problema agli autovoltori
generalizzato associato alle
matrici IK_E e K_G

λ_i^* autovoltori

δq_i^* autovettori

• Esempio MDOF (3-DOF):



coordinate lagrangiane
— rotazioni risolte

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix}; \bar{\dot{\boldsymbol{q}}}_0 = 0$$

E.P.T.: $\tilde{T} = \frac{\nabla(\vartheta)}{K} = \frac{1}{2} K \left(2 \dot{\vartheta}_1^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1)^2 + (\dot{\vartheta}_3 - \dot{\vartheta}_2)^2 \right) - \underbrace{P \omega}_{\text{—}} - \underbrace{L_{ef}}_{\text{—}}$

SOMMARIO (Lec. 19)

- pb. euleriani di stabilità secondo teoria del 2° ordine, sistemi discreti MDOF.
- Condizione di perdita di stabilità ($\frac{1}{2}\delta^2\bar{\Gamma} = 0$) \Rightarrow carichi critici.
- Matrice di rigidezza elastica e geometrica: $K = K_E - \rho K_G$ (lin. in ρ , cost. ing).
- Rapporto di Rayleigh e pb. agli autovectori generalizzati \Leftrightarrow analogie con Dinamica.
- Esempio 3-DOF:
 - Scrittura dell'EPT (per spost. "geometricamente grandi").
 - Volutazione derivate prime e seconde.
 - Scrittura dell'EPT al 1° ord. ("piccoli") $\sim q_i^2$.
 - Conseguenti volutat. derivate prime ($\sim q_i^1$ lin.) e seconde ($\sim q_i^0 = 1$ cost.).
 - Calcolo dei carichi critici che condit. di singolarità di K ($\det K = 0$).

Next step: Deformate critiche; approccio statico (equil. nelle conf. ne deformata).
Sistemi continui (resta di Euler).