

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

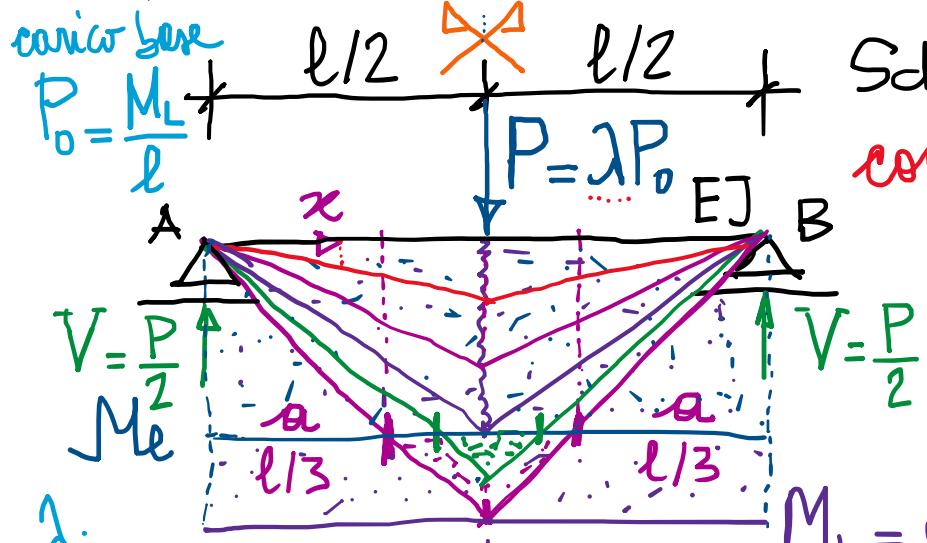
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

# Risposta elastoplastica delle trave sino a collasso plastico



$$M_{max} = \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

$$= \frac{1}{4} M_L$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_L}{M_e} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x_e}{x} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_e}{x} \right)^2$$

Scheme isostatico (staticamente determinato), con distribuzione di  $M$  governata dal solo equilibrio.

$$M(x) = \frac{P}{2} x = \frac{\lambda}{2} M_L \frac{x}{l}$$



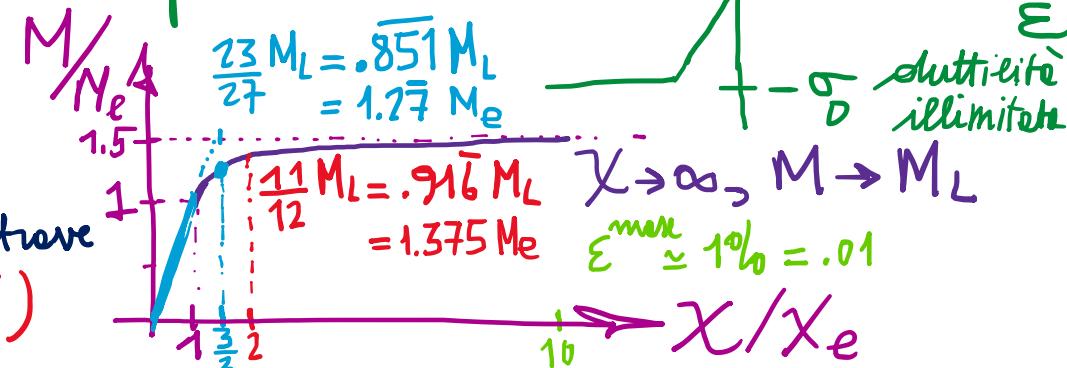
$$\lambda = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\frac{bh^3}{4}}{\frac{bh^3}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

fattore di forma della sezione trasvers.



- Comportamento del materiale perfettamente elastoplastico

- Comportamento delle sezioni trasversali delle trave (con incrudimento!)



- Regime elastico:  $M(x) \leq M^{\max} \leq M_e = \frac{2}{3} M_L$   
 $\frac{1}{4} M_L \leq \frac{2}{3} M_L \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq \lambda_e = \frac{8}{3}$  limite elastico
- Regime elasto-plastico:  
 limitato da condizione  
 di collasso plastico  $\lambda = \lambda_L = 4$ ,  
 oltre la quale non è più possibile  
 far crescere il carico esterno (e quindi  $M^{\max}$  oltre  $M_L$ ). (plastico)  
 moltiplicatore limite  
 di collasso
- Estensione zone plasticizzate:

$$\frac{P}{2}a = M_e \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \frac{M_L}{l} a = \frac{2}{3} \frac{M_L}{l} \Rightarrow a = \frac{4}{3\lambda} l \quad l = \frac{l}{3}$$

(in realtà  $r \rightarrow 0$   
 solo per sezioni  
 molto vicine alle sezioni di mezzeria,  
 ove si localizzano i fenomeni plastici principali)

r: semialtezza  
 del "core" elastico

$h$

$r=0$        $r=l/2$

$l$

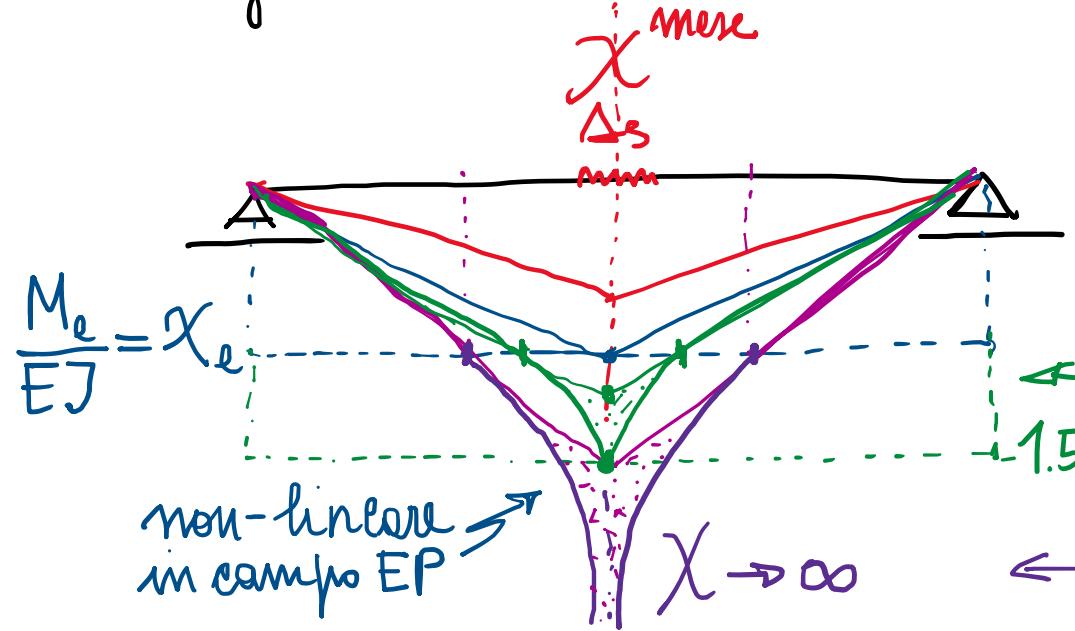
elast.

elast.

Zone plasticica con deformazioni plastiche, estesa ad un terzo dello spessore

- Diagramme di curvatura  $\chi(x)$ : A limite elastico

$$\begin{aligned} M_{\text{max}}^{\text{max}} &= M_e \Rightarrow \lambda = \lambda_e = \frac{\delta}{3} \\ \chi^{\text{max}} &= \chi_e = \frac{M_e}{EJ} \end{aligned}$$



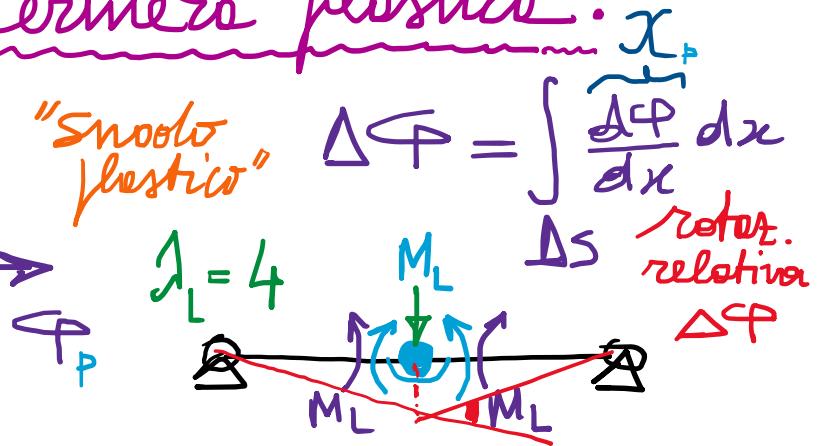
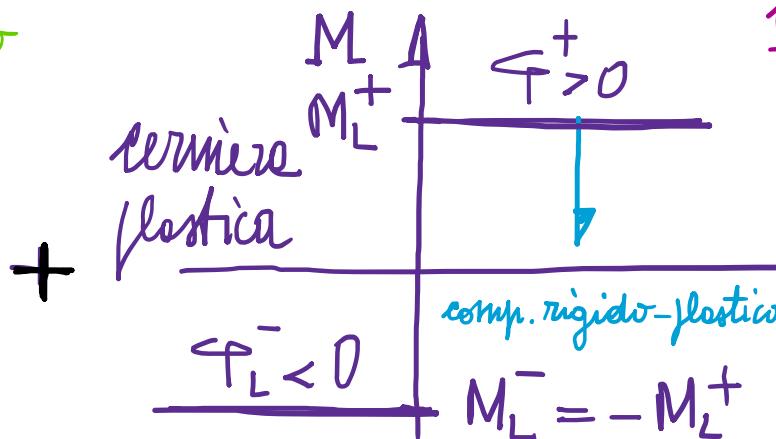
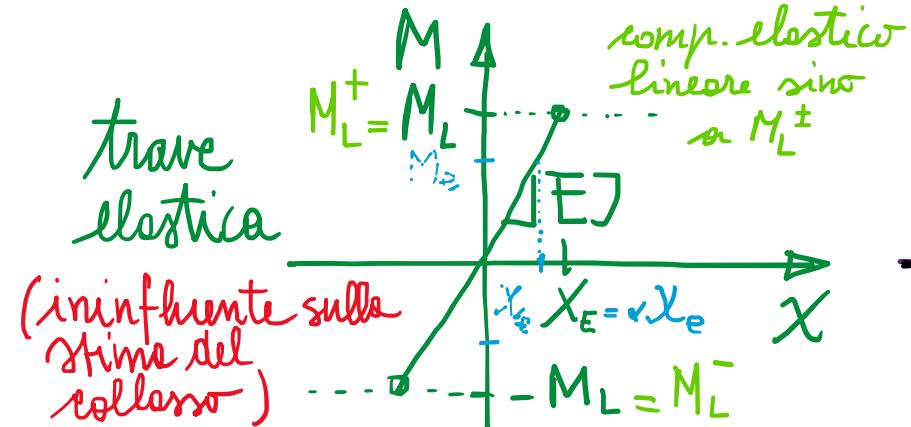
- $\chi$  lineare in campo elastico  $\lambda \leq \frac{8}{3}$

$$M^{\text{max}} = \frac{23}{27} M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} = \frac{3}{2}$$

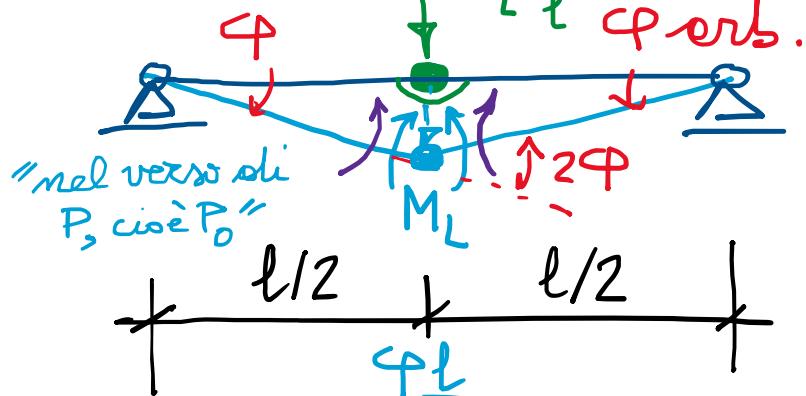
$$M^{\text{max}} = M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} \rightarrow \infty$$

Ai fini di cogliere la situazione a collasso ( $\lambda_L$ )

N.B. Le sezioni che producono elevate curvature (plastiche) risultano concentrate in prossimità delle mezzerie delle trave  $\Rightarrow$  Ipotesi semplificativa di "cermiera plastica":



Mecanismo di collasso (plastico): situazione di collasso incipiente  
 "di trave"  $\sum L \frac{M_L}{l} = P$   
 $\Delta$   $\varphi$   $\text{cp. orb.}$



(sulla  
 tre  
 cerchi  
 ellineste)

$$I_L = \frac{D}{l^2} = 4$$

S PLV:  $\Delta_e = I_L \frac{M_L}{l} - \cancel{\frac{P \frac{l}{2}}{Z}} - M_L 2\varphi = 0$

bilancio  
 energetico

$$\Delta_e = P \cancel{\frac{l}{2}} = \Delta_{ip} = D = M_L 2\varphi > 0$$

$I_L = 4$

come preced.  
 determinato

$$(L_{e0} = P_0 \cancel{\frac{l}{2}} > 0)$$

lavoro esterno del serico base

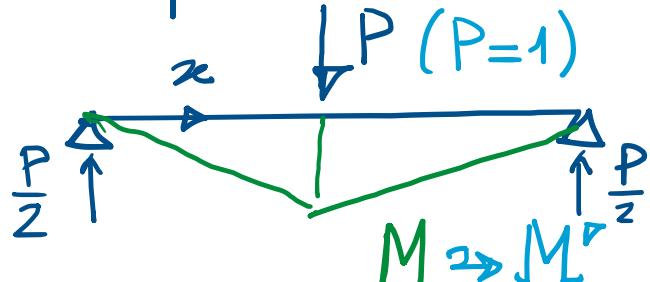
lavoro  
 plastico interno  
 alla cerchiella plastica

L dissipazione  
 plastica

NB: Nell'ip. di cerchiella plastica, il moltiplicatore di collasso risulta facilmente individuabile tramite PLV, coerentemente col meccanismo di collasso plastico che si viene a manifestare -

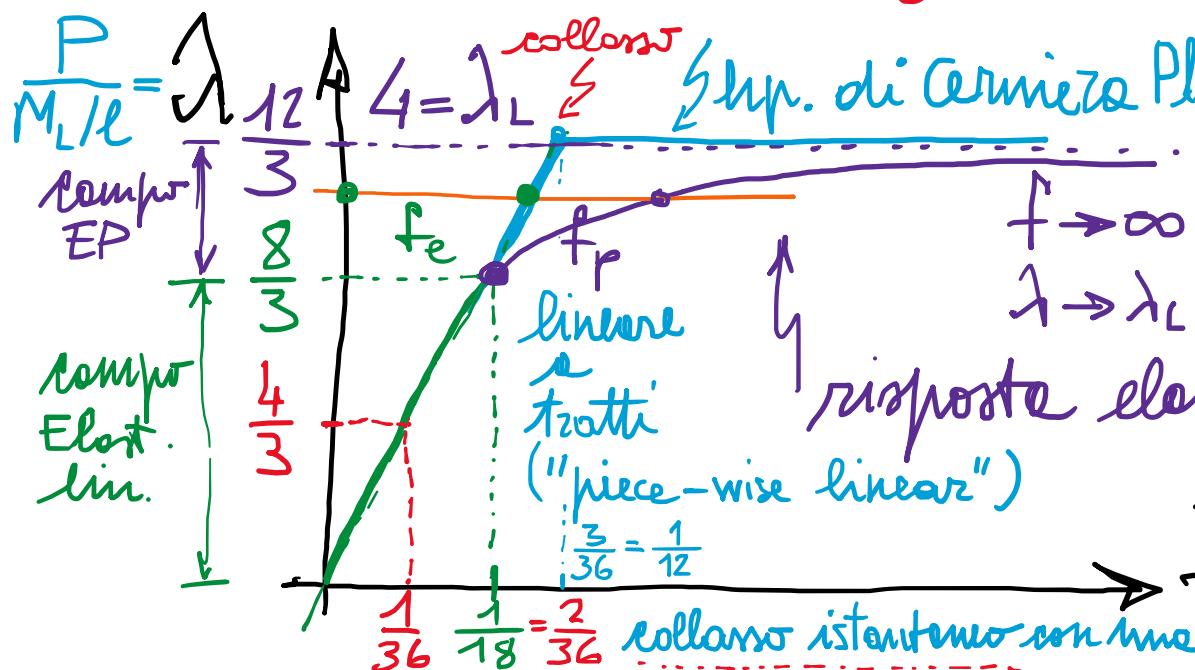
# Risposte elastoplastiche effettive delle trave (non-lin.):

- Campo elastico :



$$f_e^{\text{max}} = f_e / \frac{M_L l^2}{EJ} = \frac{8}{3} \frac{1}{48} = \frac{1}{18}$$

frecce normalizzate



$f_e$  freccia elastica (spost. in mezzerie)

$$\text{PLV: } 1 f_e = \int_{\text{stz}} M \frac{M}{EJ} dx$$

campo elastico  
 $\lambda \leq \frac{8}{3}$

$$= \frac{P}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx$$

$$= \frac{P}{EJ} \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{l}{2}}$$

spost. max E]

$$f_e = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$= \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{48} \left( \frac{M_L l^2}{EJ} \right)$$

Diagramma forze/spostamento sullo  
trave ( $P-\Delta$ ) [moltiplicatore/frecce]

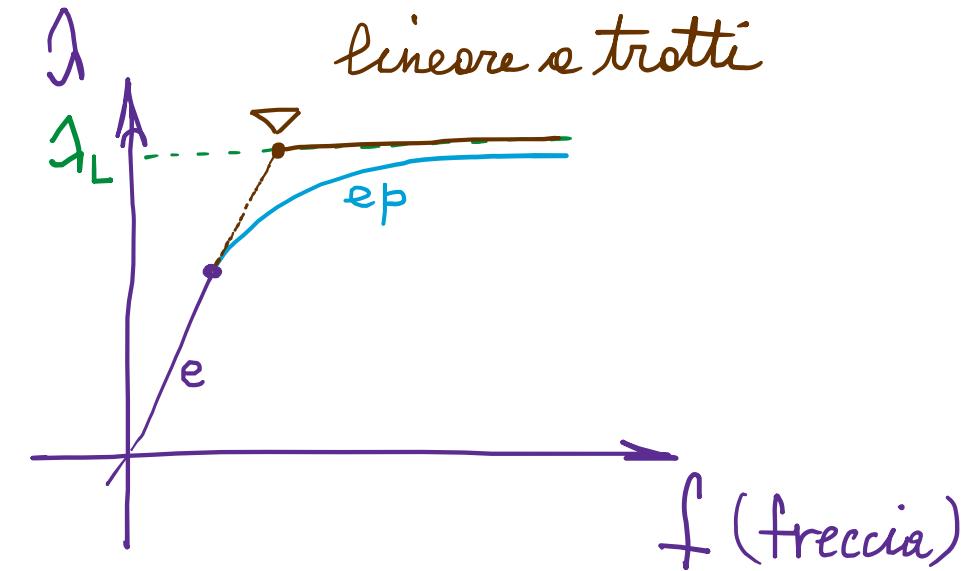
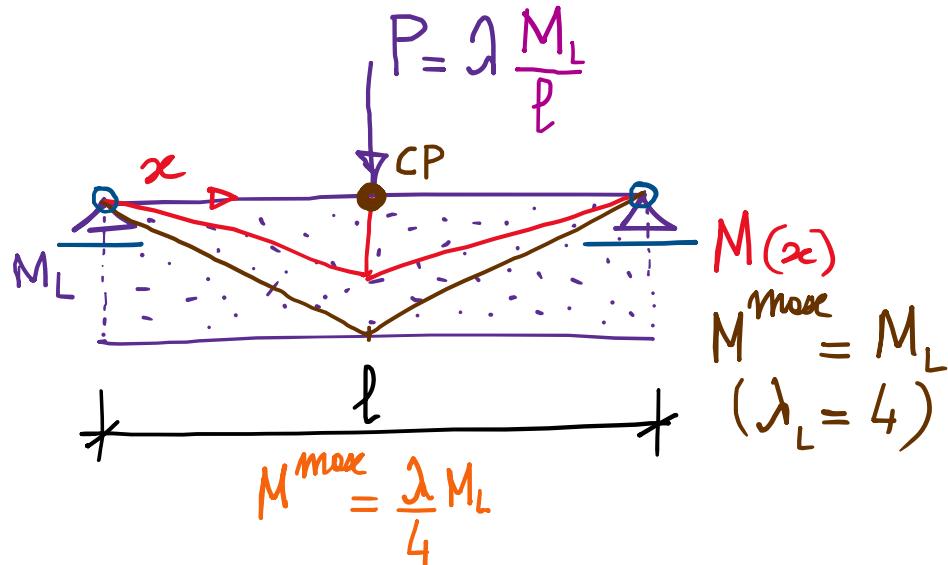
risposta elastoplastica non-lineare

$$\bar{f} = f / \left( \frac{M_L l^2}{EJ} \right)$$

NB: Con cerniere plastiche,  
sottostime delle deformaz.  
globali ma valutaz. corrette  
di  $\lambda_L$ .

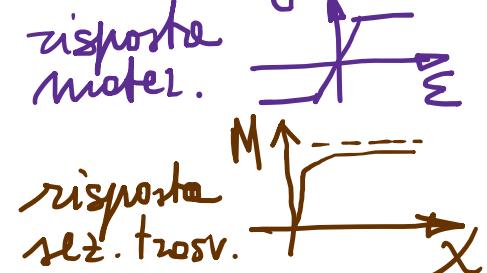
## Concetti fondamentali :

- Passaggio alle scese strutturale dell'intera trave  $\Rightarrow$  curva forza/spostamento, in campo elastoplastico delle strutture -
- Riferimento a caso semplice, di trave isostatica appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria :



- Ipotesi di formazione di "cerniere plastica" in determinate sezione ove si registra una "localizzazione delle deformazioni plastiche".

# SOMMARIO (Lec. 24)

- Risposte elasto-plastiche delle trave (fino al collasso plastico). Dopo: 
- Analisi di sistemi isostatici (trave appoggio-appoggio con carico concentr. in metteria).
- Momento nato per puro equilibrio  $\Rightarrow$  curvatura da legge costitutiva.
- Concentrazione curvatura (plastiche) in mezzerie  $\Rightarrow$  ipotesi di cerniere plastiche e schematizzazione semplificata per stime del collasso.
- Mecanismo di collasso plastico e stime del moltiplicatore di collasso  $\lambda_L$  da bilancio energetico (PLV).
- Curva P-Δ<sub>s</sub> forza/spostamento (moltiplicatore/frecce) non-lineare da reale risposta elasto-plastica, con approssimazione lineare a tratti (piece-wise linear) nell'ip. di cerniere plastiche (utile alle stime di  $\lambda_L$ ).

Next step: Schema iperstatico (trave incostretta)  $\Rightarrow$  ulteriori risorse elasto-plastiche da richiusturazione di spazio, con sviluppo di deformazioni plastiche. Risposta evolutiva (lineare a tratti) con sequenze di attivazione delle cern. plast.

