Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

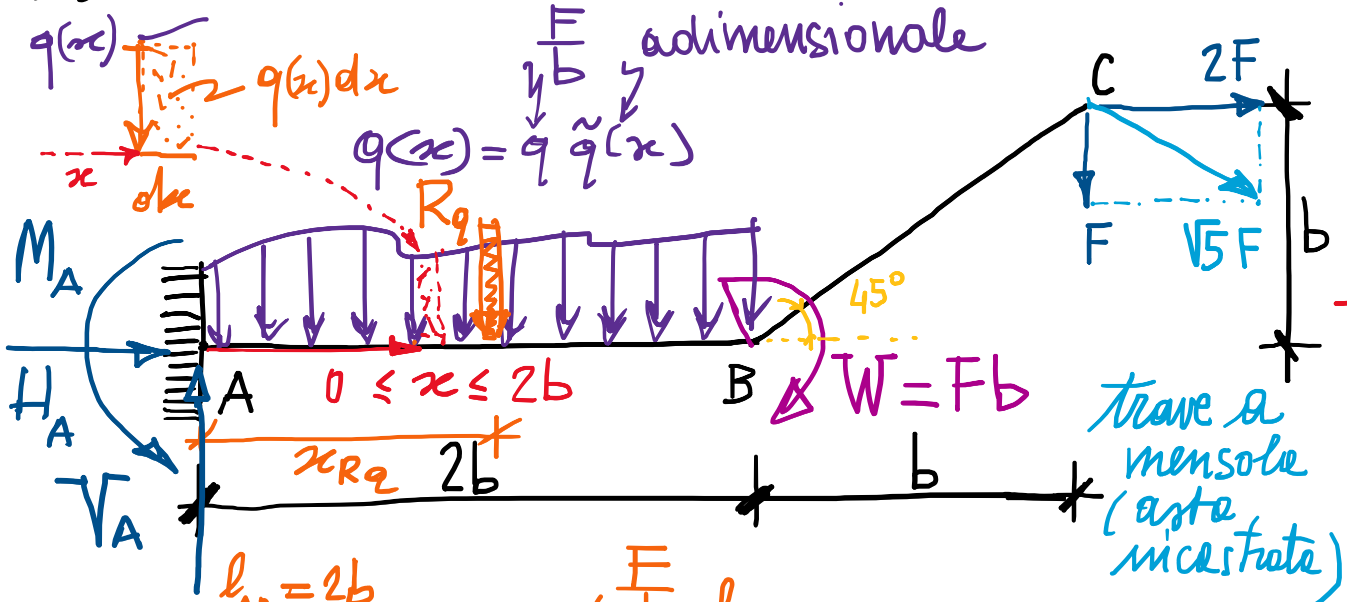
(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 04

Analisi Statica (AS): Calcolo delle Reazioni Vincolari (RV)



trave a mensola (asta incastrata)

$$q(x) = \underset{\frac{F}{b}}{q}\ \underset{\text{adimensionale}}{\tilde{q}(x)}$$

m $[b] = [L]$ lunghezza ("scala delle lungh.") ↳ dimensione caratteristica ↳ maglia strutt.

N $[F] = [F]$ forza (concentrata) ("scala delle forze")

Nm $[W] = [F\,b]$ momento o coppia $= [F][L]$ (concentrata)

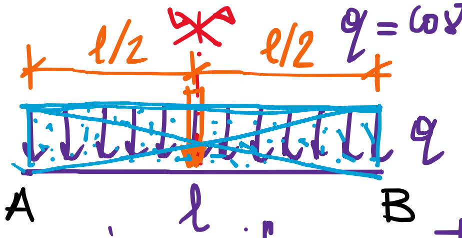
$\frac{N}{m}$ $[q] = \left[\frac{F}{b}\right] = \frac{[F]}{[L]}$ carico distribuito o ripartito (per unità di lunghezza)

$$R_q = \int_0^{l_{AB}=2b} q(x)\,dx = \underset{\frac{F}{b}}{q} \int_0^{l} \tilde{q}(x)\,dx \qquad [R_q] = [F]$$

$$x_{R_q} = \frac{M_A^q}{R_q} = \frac{\int_0^l [q(x)dx]\,x}{\int_0^l q(x)\,dx} = \frac{\cancel{q}\int_0^l \tilde{q}(x)\,x\,dx}{\cancel{q}\int_0^l \tilde{q}(x)\,dx}$$

(Th. di Varignon: $M_A^q = R_q\, x_{R_q}$)

Esempi

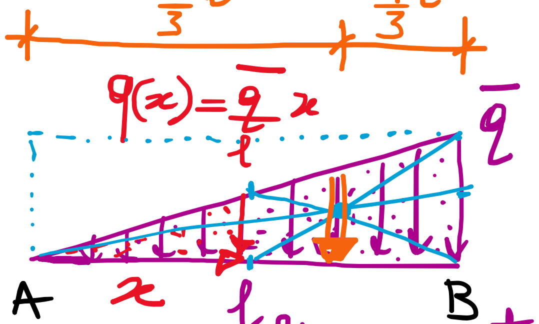


$q = \text{cost} = q = \frac{F}{b}$

$$R_q = q\,l$$

$$x_{R_q} = \frac{q\frac{l^2}{2}}{q\,l} = \frac{l}{2}$$

carico uniformemente ripartito



$$q(x) = \frac{\bar{q}}{l}\,x$$

$$R_q = \frac{\bar{q}\,l}{2}$$

$$x_{R_q} = \frac{2}{3}\,l$$

carico linearmente ripartito ($q = 0$, in A)

$q = \text{lin}$

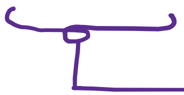
caso generale (per sovrappos.)

Reazioni vincolari: postuliamo l'∃nza di azioni statiche, prodotte dai vincoli, in corrispondenza dei poli forniti, cioè dell'eq.ne di vincolo cinematico corrispondente, di entità arbitraria (e tali da poter imporre l'equilibrio, in modo che il vincolo possa svolgere la sua funzione di "blocco" di spostamento/rotazione).

Calcolo delle RV: equazioni cardinali della statica dei corpi rigidi

2D	3D		
2 eq.ni	3 eq.ni	$\mathbb{R} = 0$	risultante nullo
1 eq.ne	3 eq.ni	$\mathbb{M}_O = 0$	momento rispetto a polo O nullo

(sistema di forze attive e reattive)



$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_{O_i} = 0 \end{cases}$$

$\sum_i F_{x_i} = 0$, $\sum_i F_{y_i} = 0$: equil. alla traslazione orizzontale / verticale

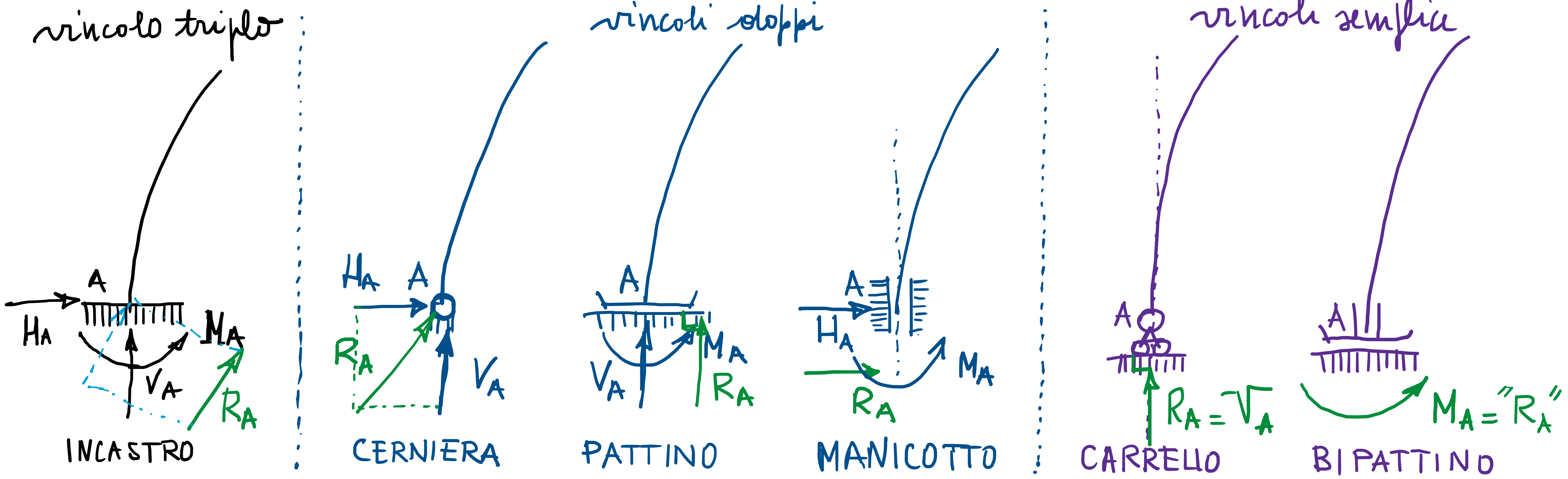
$\sum_i M_{O_i} = 0$: equil. alla rotazione rispetto ad O

Alternativam.: tre equilibri alla rotazione rispetto a tre punti non allineati (per eq.ni linearmente indipendenti)

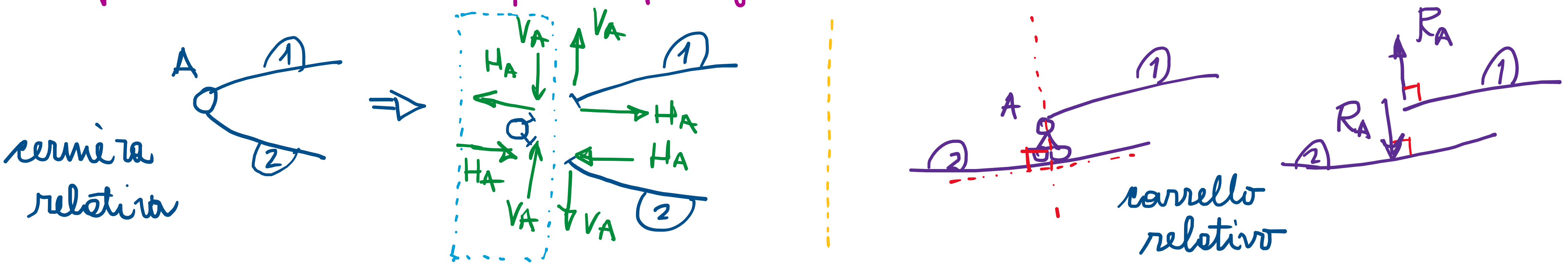
Esempio:

$$\begin{cases} \rightarrow \quad H_A + 2F = 0 \Rightarrow H_A = -2F \\ \uparrow \quad V_A - F - R_q = 0 \Rightarrow V_A = F + R_q \\ \circlearrowleft + \quad M_A - F3b - F \cdot 2b - Fb - M_A^q = 0 \Rightarrow M_A = 6Fb + \overbrace{M_A^q}^{R_q x_{R_q}} \end{cases}$$

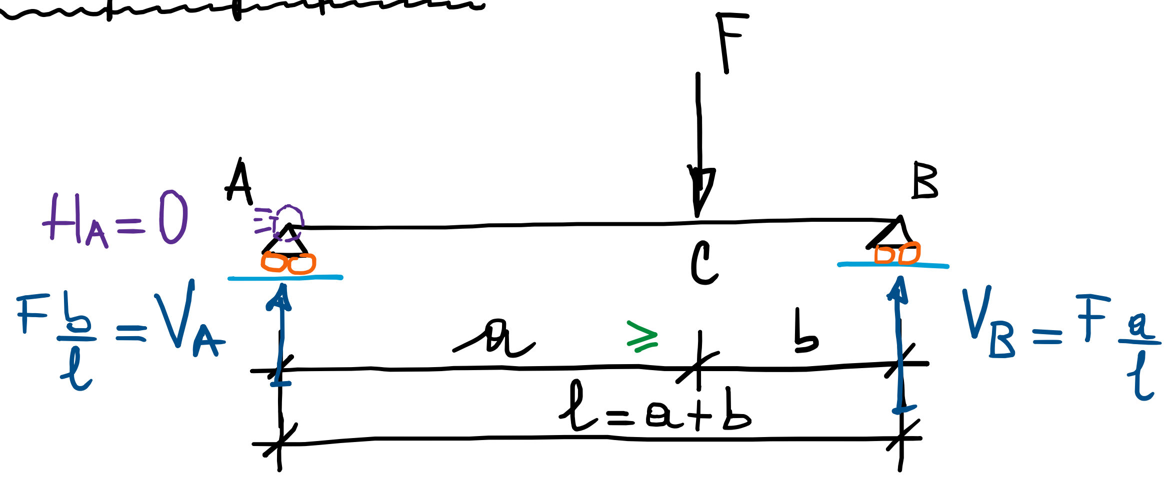
RV dei vincoli introdotti (vincoli assoluti)

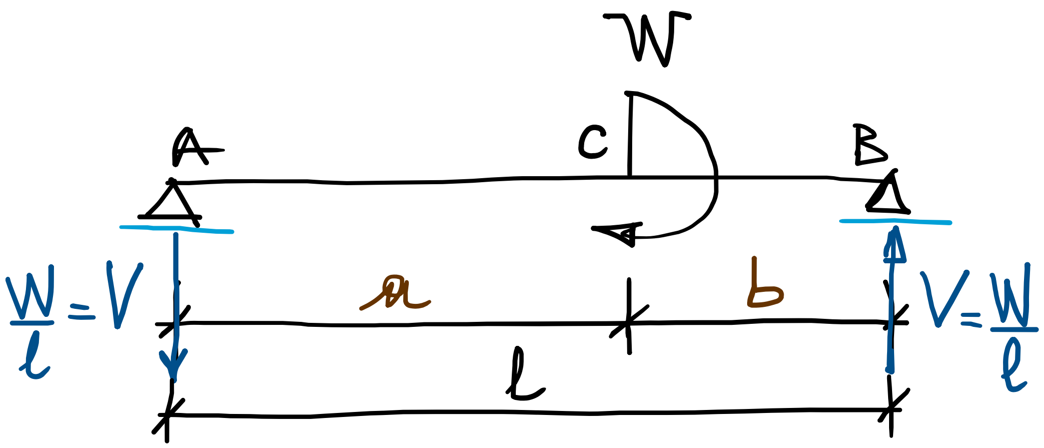


IDEM per vincoli relativi tra più corpi rigidi:



Esempi significativi:





trave semplicemente appoggiata (appoggio–appoggio)

$$\sum_i M_{Bi} = 0 \Longrightarrow -V_A l + Fb = 0 \Rightarrow V_A = F\frac{b}{l}$$

$$\sum_i M_{Ai} = 0 \Longrightarrow V_B l - Fa = 0 \Rightarrow V_B = F\frac{a}{l}$$

$$\left(\sum_i F_{yi} = 0 \Longrightarrow V_A + V_B - F = 0 \Rightarrow \overline{V_A + V_B = F}\right) \checkmark$$

verifica

$$F\cancel{\frac{a+b}{l}} = F\frac{b}{l} + F\frac{a}{l} \overset{\checkmark}{=} F$$

NB: se $a = b = \frac{l}{2} \Rightarrow V_A = V_B = V = \frac{F}{2}$

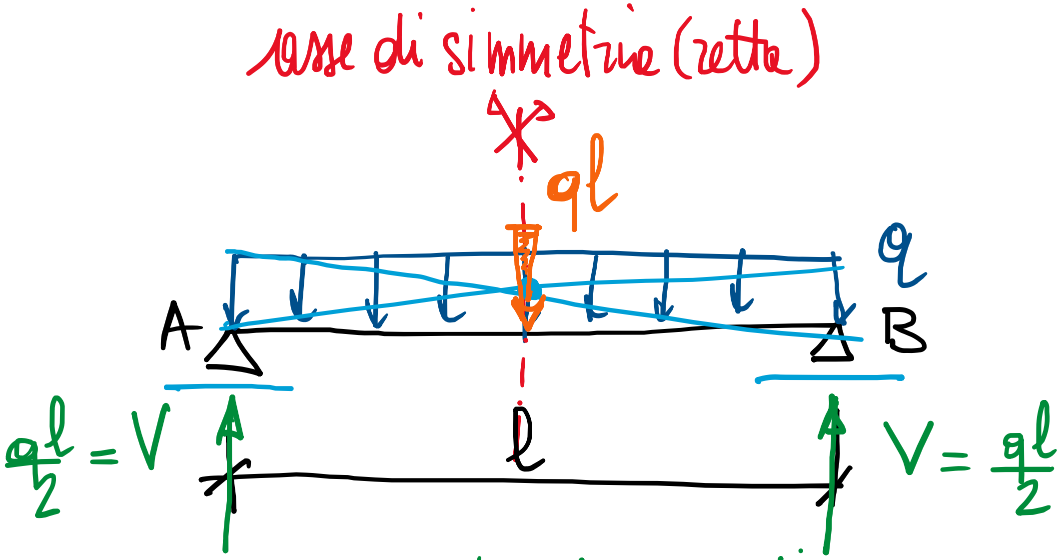
equilibrio alla rotazione

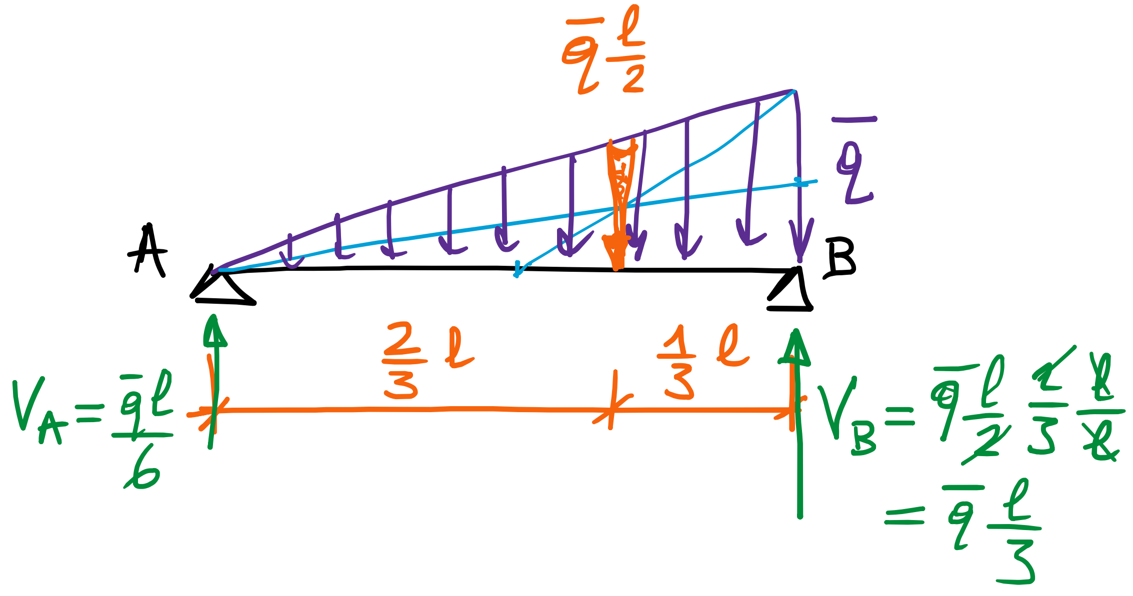
$$V l = W$$

$$\Downarrow$$

$$V = \frac{W}{l}$$

(indipendentemente dal p.to di applicazione C sul corpo rigido AB)

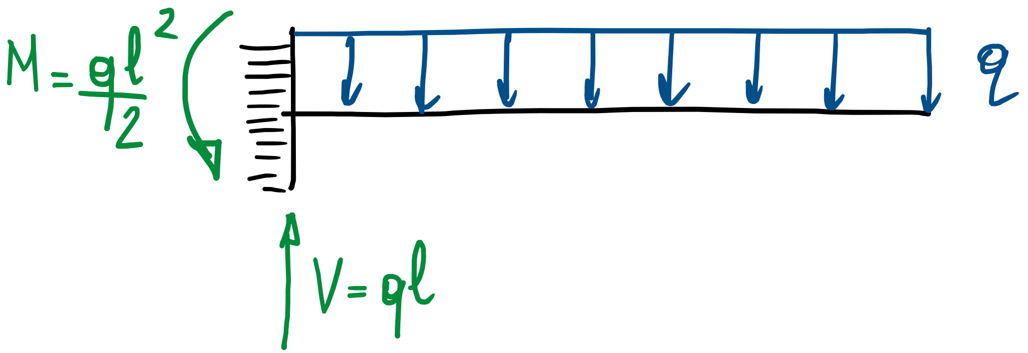


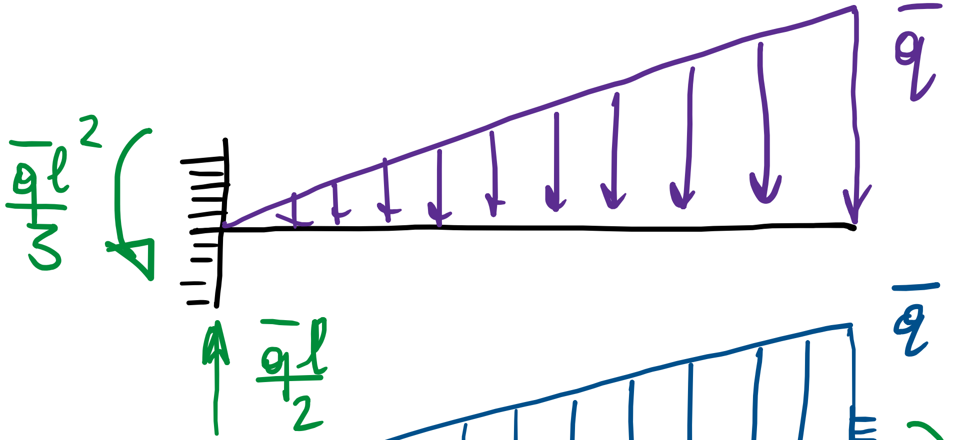


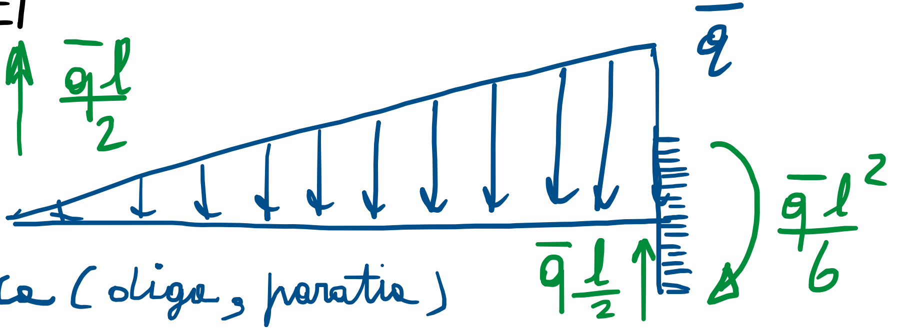
equil. alla traslaz. verticale

$$2V = ql$$

(o rotazione rispetto ad A o B)







es.
pressione
idrostatica (diga, paratia)

Esempio di asta tre-carrelli => dispense