Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

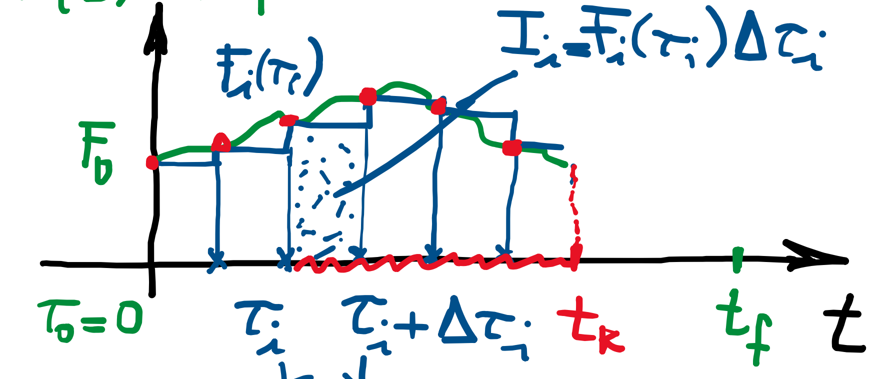
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 08

Risposta a forzante generica → Integrale di Duhamel

$F(t) = F\,f(t)$



$\Delta\tau_i$ (time step)

"discretizzazione" dell'asse dei t

$$F(t_k) \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\; \overbrace{\delta(t_k,\tau_i)}^{\text{f.ne delta di Dirac}}$$

(impulso unitario in τ_i)

Sovrapposizione di un numero finito (discreto) di impulsi I_i ricevuti dal sistema negli istanti τ_i

$\lim_{\Delta\tau_i \to 0}$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\overbrace{\delta(t,\tau)}^{\delta(t-\tau)}\,d\tau$$

(proprietà tipica della δ)

INPUT $\delta(t,\tau)$

$\boxed{\text{SISTEMA}}$

OUTPUT $h(t,\tau)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t$$

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \simeq \omega_1,\ |\zeta| \ll 1$

f.ne risposta ad impulso unitario

$$u_0(t_k) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\, h(t_k,\tau_i)$$

$\lim_{\Delta\tau_i \to 0}$

$$= \int_0^t F(\tau)\,\overbrace{h(t,\tau)}^{h(t-\tau)}\,d\tau$$

("convoglia" in t gli effetti dinamici di impulsi ricevuti in τ)

Integrale di "convoluzione"

Integrale di Duhamel:

$$u_0(t)=\int_0^t F(\tau)\underbrace{\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\,d\tau$$

τ variabile di integraz.

t istante di lettura della risposta

$\omega_d=\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$

- Fornisce una rappresentazione formale analitica esatta della risposta.
- Raramente determinabile analiticamente:
  - in genere $F(t)$ non è nota in forma analitica, bensì "campionata" ad istanti di tempo discreti;
  - qualora lo fosse, per espressioni generiche della forzante, non soluz. analitica in forma chiusa possibile.
- In genere valutabile mediante integrazione numerica in forma approssimata.

$$F(t)=\int_0^t F(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\delta(t)} \boxed{\text{SISTEMA}} \xrightarrow{h(t)} u_0(t)=\int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Scritture alternative

$$\frac{k}{m} = \omega_1^2, \quad \omega_d = \omega_1\sqrt{1-\xi^2}$$

- $F(t) = \underbrace{F}_{\substack{\text{ampiezza} \\ [F]}} \underbrace{f(t)}_{\substack{\text{adimens.} \\ [1]}}$: $\quad u_0(t) = \frac{\overbrace{F}^{u_{st}}}{m\omega_d}\frac{k}{k}\int_0^t f(\tau)\, e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$

$$= N(t)\, u_{st}\,; \quad N(t) = \frac{\omega_1}{\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}}\int_0^t f(\tau)\frac{e^{\xi\omega_1\tau}}{e^{\xi\omega_1 t}}\sin\underset{1}{\omega_d}(t-\tau)\, d\tau$$

per smorz. piccolo $\xi \ll 1$ (ε)

fattore di amplificazione dinamica dipendente dal tempo.

- $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1}\underbrace{\frac{1}{m\sqrt{1-\xi^2}}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau}_{V(t)\ \text{"pseudo-velocità"}} = \frac{V(t)}{\omega_1}$ (come per risposta armonica)

$\Rightarrow$ vedi, poi, "pseudo-spettri"

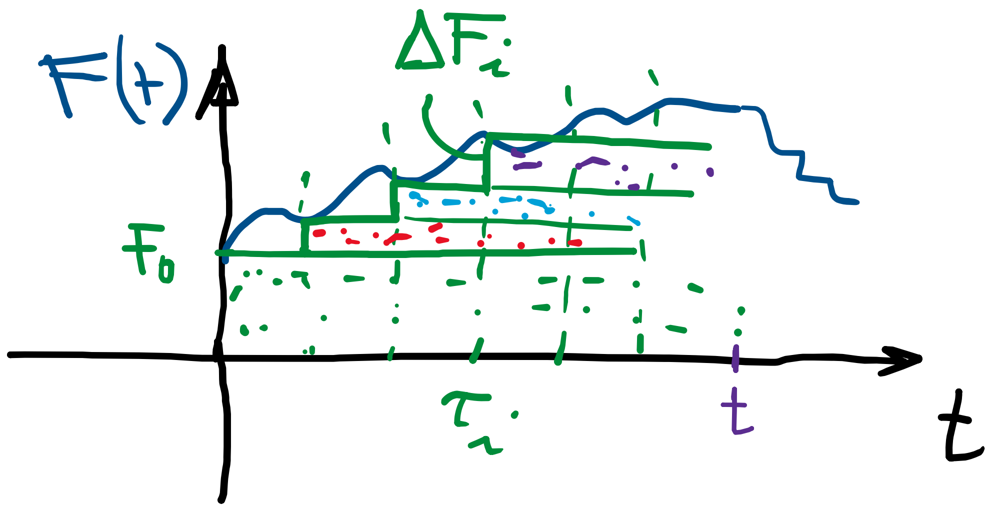
- $\sin\omega_d(t-\tau) = \sin\omega_d t\cos\omega_d\tau - \cos\omega_d t\sin\omega_d\tau \Rightarrow$

$$u_0(t) = \underbrace{A(t)}\sin\omega_d t - \underbrace{B(t)}\cos\omega_d t$$

Ampiezze dip.ti dal tempo

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t \underbrace{F(\tau)\frac{e^{\xi\omega_1\tau}}{e^{\xi\omega_1 t}}\cos\omega_d\tau}_{y(\tau)}\, d\tau \\ B(t) = \text{"} \quad \underbrace{\cdots\cdots\sin\omega_d\tau\cdots}_{z(\tau)} \end{cases}$$

Visione alternativa:



$F(t) = F_0 + \sum_i \Delta F_i$

Sequenze di forzanti a gradino:

rapporto incrementale

$$u_0(t) = F_0\, A(t) + \sum_i \frac{\Delta F_i(\tau_i)}{\Delta\tau_i}\, A(t-\tau_i)\, \Delta\tau_i$$

→ f.ne risposta a gradino unitario

$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$

$$= F_0\, A(t) + \int_0^t \dot F(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau$$

$$dA = -\dot A\, d\tau$$

Integrando per parti:

$$u_0(t) = \cancel{F_0 A(t)} + \underbrace{F(\tau) A(t-\tau)\Big|_0^t}_{F(t)\underbrace{A(t-t)}_{A_0=0} - \cancel{F_0 A(t)}} + \int_0^t F(\tau)\, \underbrace{\dot A(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$\tau = t$ $\qquad$ $\tau = 0$

cvd...

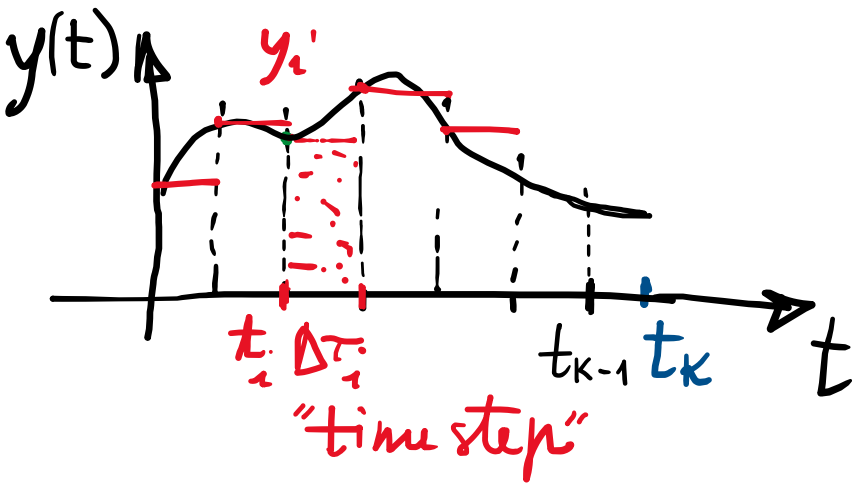
$$\dot{(FA)} = \dot F A + F \dot A$$ regola di derivazione del prodotto

$$\Rightarrow \dot F A = \dot{(FA)} - F\dot A$$

Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel ⇒ $\int_0^t y(\tau)\,d\tau$

⇒ vedi calcolo numerico.

- Regola dei rettangoli:



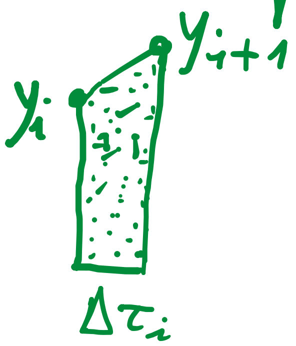
$$I_{int} \cong \sum_{i=0}^{K-1} y_i\,\Delta\tau_i$$

(f.ne costante nel passo temporale)

$\Delta\tau_i = \Delta\tau$ passo costante

$$= \Delta\tau\,(y_0 + y_1 + \dots + y_{K-1})$$

- Regola dei trapezi:



(f.ne lineare nel passo)

$$I \simeq \sum_{i=0}^{K-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\,\Delta\tau_i$$

$$= \frac{\Delta\tau}{2}\,(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{K-1} + y_K)$$

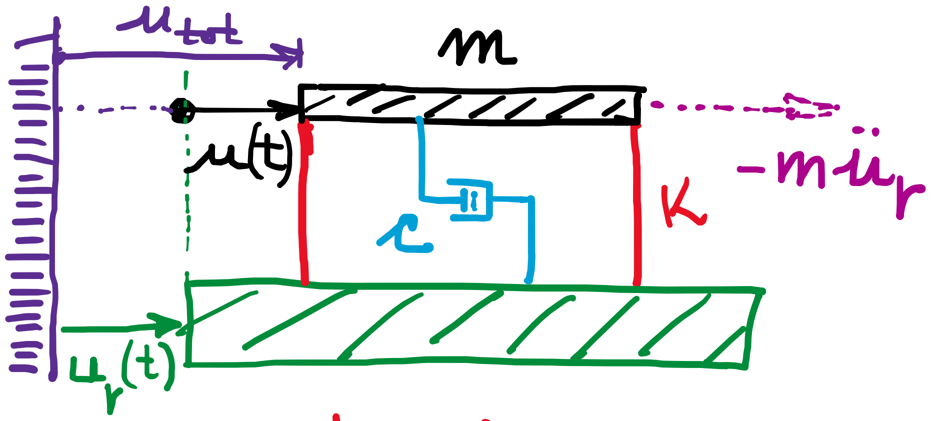
$$= \Delta\tau\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{K-1} + \frac{y_K}{2}\right)$$

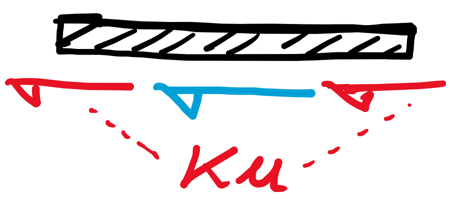
$\frac{y_0 + y_K}{2}$

- Regola di Simpson, etc.

(f.ne parabolica nel passo)

Risposta al moto del riferimento (vedi azione sismica) $u_{tot} = u_r + u$

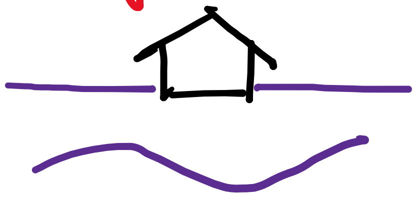




$\longrightarrow F_I = -m\ddot u_{tot} = -m(\ddot u_r + \ddot u)$

$$m\ddot u + c\dot u + Ku = -m\ddot u_r(t)$$ ⟵ Forzante indotta per inerzia quale effetto di trascinamento

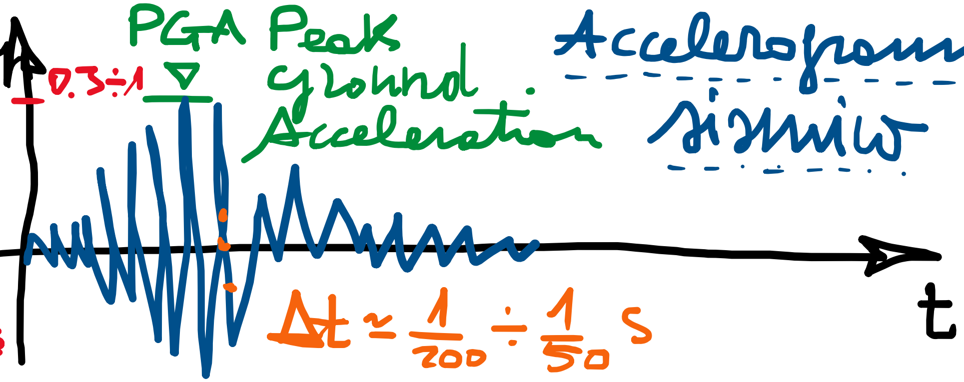
es. moto del terreno per effetto del terremoto $\ddot u_g(t)$
└ ground



estensione limitata della strutt. di massa contenuta, in modo da non (sisma) creare interazioni suolo-struttura

$\dfrac{\ddot u_g(t)}{g}$

$9.81 \frac{m}{s^2}$



Accelerogramma sismico

$\Rightarrow$ $\dfrac{S_a}{g}$

Spettro di risposta

$S_a = \max_t \{\ddot u_t\}$ $\longrightarrow$ Spettro di progetto

Risposta sismica: $\ddot{u} + 2\xi\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = (-)\ddot{u}_g(t) \Rightarrow u(t)$ per $\int$ di Duhamel

Spettri di risposta (BIOT, 1932):

displacement $S_d =$

velocity $S_v = \max_t \begin{cases} u(t; T_1, \xi) \\ \dot{u}(t; T_1, \xi) \\ \ddot{u}_t(t; T_1, \xi) \end{cases}$

acceleration $S_a =$

totale

$\Rightarrow$ semplificaz. (singolo spettro)

Pseudo-spettri:

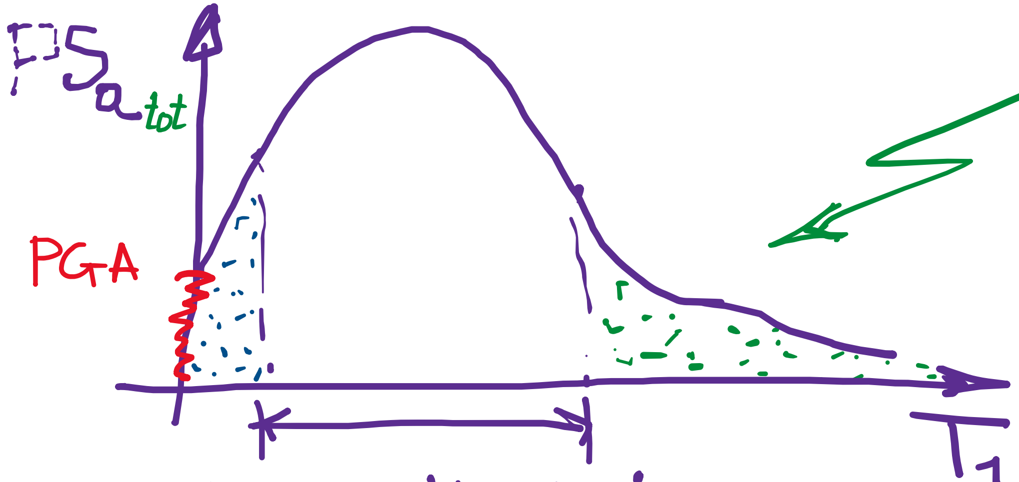
$S_d \Rightarrow PS_v = \omega_1 S_d \simeq S_v$

$PS_a = \omega_1 PS_v = \omega_1^2 S_d \simeq S_a$

è V_{max}

(come per risposta armonica)

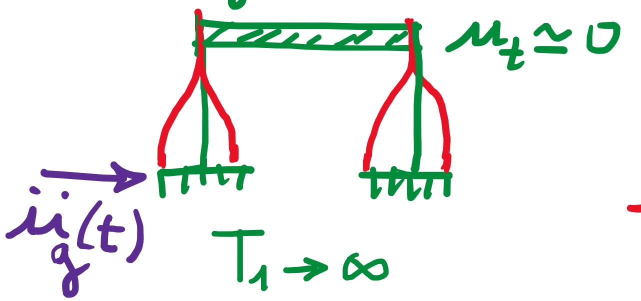
$S_d = \frac{1}{\omega_1} PS_v$: vedi scrittura Duhamel $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1} V(t)$ pseudo-velocità



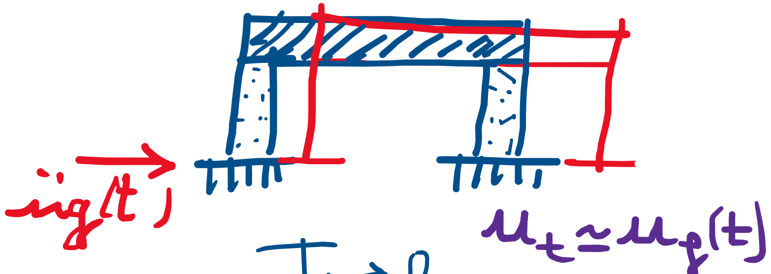
periodi propri con amplif. dell'az. sismica

Isolamento sismico (strutt. flessibile) vs. Struttura rigida

T_1 grandi



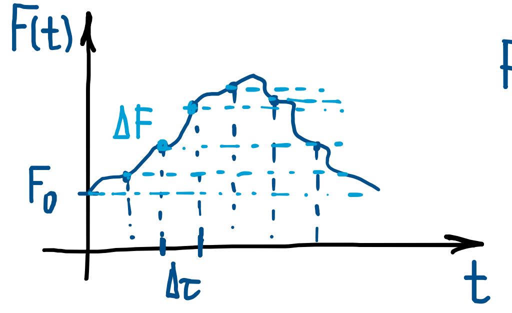
$T_1 \to \infty$ ($\omega_1 \to 0$)



$T_1 \to 0$ ($\omega_1 \to \infty$) ($u \simeq 0$)

Concetti fondamentali :

- **Risposta dinamica del sistema a forzante generica**



$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \quad \text{per impulsi}$$

$$= F_0 + \int_0^t \dot F(\tau)\,d\tau \quad \text{per gradini}$$

$$\longrightarrow \boxed{\text{SIST.}} \longrightarrow$$

"integrale di convoluzione o di Duhamel"

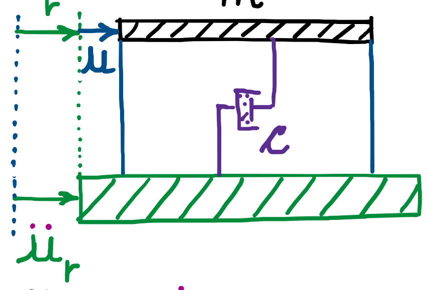
$$u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= F_0\,A(t) + \int_0^t \dot F(\tau)\,A(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \dot A(t) = \frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

- **Risposta al moto del riferimento (del supporto)**

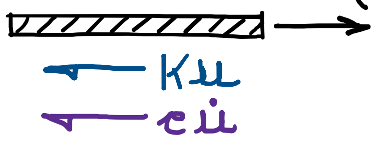
$u_{tot} = u_r + u$



es. $\ddot u_g$ (azione sismica)

└ "ground" (terreno)

$-m(\ddot u + \ddot u_r)$



"effetto di trascinamento"

$$\cancel{m}\,\ddot u + \underset{/m}{c\,\dot u} + \underset{/m}{K\,u} = -\cancel{m}\,\ddot u_r(t)$$

$$\ddot u + 2\zeta\omega_1\dot u + \omega_1^2 u = -\ddot u_r(t)$$

$$u_0(t) = \frac{1}{\omega_1}\underbrace{\left[(-)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t \ddot u_g(\tau)\,e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\,d\tau\right]}$$

$$= \frac{1}{\omega_1}V(t)$$

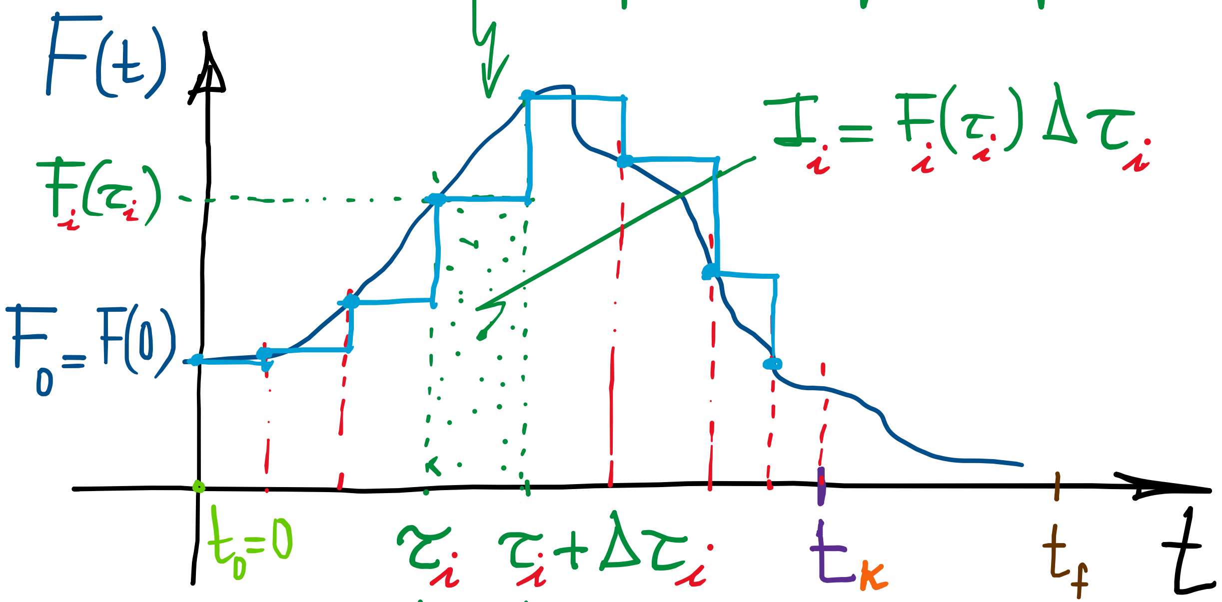
"pseudo-velocità" $V^{max} = PS_v \simeq S_v$ "spettro"

• Risposta dinamica del sistema a forzante generica

$\delta(t,\tau) \rightarrow \boxed{\text{SIST.}} \rightarrow h(t,\tau)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1 t} \sin \omega_d t$$

$\Delta\tau_i$: passo temporale finito



"discretizzazione" dell'asse dei tempi

$t \rightarrow t_i$

τ_i

"campionati" ogni $\Delta\tau_i$

$\Delta\tau_i$

istante di manifestazione dell'impulso $I_i = F(\tau_i)\,\Delta\tau_i$

istante di lettura del valore della forzante

"Concept": Sovrapposizione di impulsi in τ_i ricevuti sino al tempo t_k

$$F(t_k) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\ \underbrace{\delta(t_k,\tau_i)}_{\text{Delta di Dirac}}$$

impulso unitario

$\lim \Delta\tau_i \rightarrow 0$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t,\tau)\,d\tau$$

τ variabile di integrazione

---

f. ne risposta a impulso unitario

$$u_0(t_k) \simeq \sum_i F_i(\tau_i)\Delta\tau_i\ h(t_k,\tau_i)$$

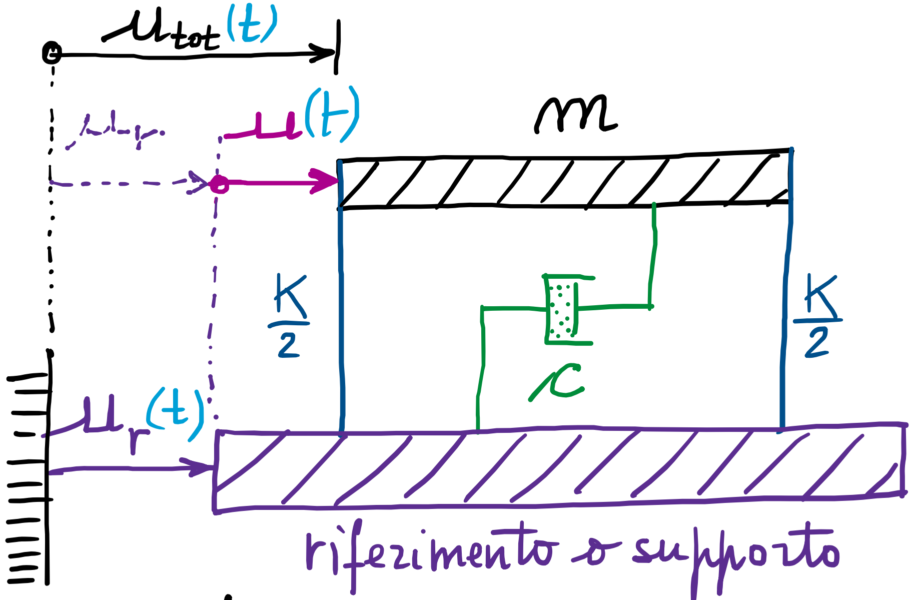
$\lim \Delta\tau_i \rightarrow 0$

"convoluzione" $$u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau$$

Integrale di Duhamel

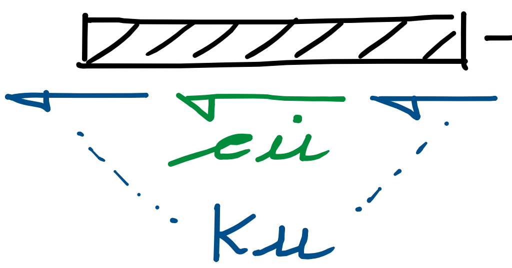
• Risposta al moto del riferimento (del supporto) ⇒ spostamento totale
velocità
accelerazione

$$\ddot{u}_{tot}(t) = \ddot{u}_r(t) + \ddot{u}(t)$$



riferimento fisso

"Concept": Effetto di "trascinamento"



$$F_{i_{tot}} = -m\ddot{u}_{tot} = -m\ddot{u}_r + -m\ddot{u}$$

$$\cancel{m}\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{K}{m}u(t) = \underbrace{(-)\cancel{m}\ddot{u}_r(t)}_{F_{ir}(t)}$$

c: coefficiente di smorzamento

$F_{ir}(t)$ forza d'inerzia legata al moto del supporto

esempio tipico in ing. civile:
eccitazione o azione sismica

$$\ddot{u}_r(t) = \ddot{u}_g(t)$$ accelerazione sismica

L "ground" (terreno)

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u(t) = (-)\ddot{u}_r(t)}$$

ζ: fattore di smorz. ~1%, es. 5%

SOMMARIO (Lez. 08)

- Risposta a forzante generica ⇒ sequenza di impulsi ⇒ Integrale di Duhamel. (di convoluzione)
- Scritture interpretative alternative (come per risposta armonica).
- Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel ⇒ calcolo numerico.

— o —

- Risposta al moto del riferimento (es. earthquake). azione sismica
- Forzante apparente indotta per effetto d'inerzia (trascinamento).
- Risposta simbolica via Duhamel (valutabile numericamente).
- Spettri e pseudo-spettri di risposta (ev. di progetto ⇒ codificati). v. normative
- Concetto di isolamento sismico delle vibrazioni.

Next step: Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (Metodo di Newmark) - Risposta nel dominio delle frequenze.