
Cinematica dei continui (deformazione)
conf ne di riferimento o indeformata
conf ne deformata
1° ord
s(x+dx)
Q(x+dx)
Q'
dx
ds
P(x)
s(x)
P'
x3
x2
x1
x
deformazione (deformation)
s(x) vettore spostamento
s(x+dx) = s(x) + ds
ds = s(x+dx) - s(x)
= ∂s(x)/∂x · dx
= Ψ · dx
- In ambito 3D, siamo alla ricerca della definizione di misure opportune dello stato di deformazione (in regime di piccole deformazioni).
ove Ψ = ∂s/∂x = ∇s ↔ Ψij = ∂si/∂xj = si,j (piccoli gradienti di spostamento)
|Ψij| = |si,j| << 1
tensore gradiente di spostamento (tensore del 2° ord.)
∇( ) = grad( ) = ∂( )/∂x
Decomposizione additiva:
Ψ = ε + ϑ ove
ε = sim(Ψ) ≜ 1/2 (Ψ + Ψ^T) ⇒ ε^T = ε tensore di deformazione (piccola) infinitesima
parte simmetrica
ϑ = emis(Ψ) ≜ 1/2 (Ψ - Ψ^T) ⇒ ϑ^T = -ϑ tensore di rotazione
parte emisimmetrica
εij = 1/2 (si,j + sj,i) = εji
ϑij = 1/2 (si,j - sj,i) = -ϑji
ε + ϑ = Ψ ✓
• Evidentemente il tensore Ψ deve contenere informazioni sulla deformazione pura (strain)
• Significato fisico di ε
ds = Ψ · dx = ε · dx
P
Q1
Q2
x1
x2
x3

Cinematica dei continui (deformazione
conf.ne deformata
1° ord.
s(x+dx) = s(x) + ds
ds = s(x+dx) - s(x)
= ∂s(x)/∂x · dx
= Ψ · dx
deformazione (deformation)
s(x) vettore spostamento
In ambito 3D, siamo alla ricerca della definizione di misura opportuna dello stato di deformazione
ove Ψ = ∂s/∂x = ∇s ↔ Ψ_ij = ∂s_i/∂x_j = s_i,j (piccoli gradienti di spostamento)
tensore gradiente di spostamento (tensore del 2° ord.)
∇( ) = grad( ) = ∂( )/∂x
|Ψ_ij| = |s_i,j| << 1
Decomposizione additiva:
ε_ij = 1/2 (s_i,j + s_j,i) = ε_ji
Ψ = ε + ϑ ove
ε = sim(Ψ) ≜ 1/2 (Ψ + Ψ^T) ⇒ ε^T = ε tensore di deformazione (piccola infinitesima)
parte simmetrica
ϑ = emi(Ψ) ≜ 1/2 (Ψ - Ψ^T) ⇒ ϑ^T = -ϑ tensore di rotazione
parte emisimmetrica
ϑ_ij = 1/2 (s_i,j - s_j,i) = -ϑ_ji
ε + ϑ = Ψ ✓
Evidentemente il tensore Ψ deve contenere informazioni sulla deformazione pura (strain)
Significato fisico di ε (deformazione o strain) pura
Q2 Q2* Q1 Q1* P
ε12 dx2
ε21 dx1
β12
α1 ≃ ε21
dx2 = {0, dx2, 0}
dx1 = {dx1, 0, 0}
x1 x2 x3
ds = Ψ · dx = ε · dx
{ds1, ds2, ds3} = [ε11 ε12 0; ε21 ε22 0; 0 0 0] {dx1, dx2, dx3} = {ε11 dx1 + ε12 dx2, ε21 dx1 + ε22 dx2, 0}
Componenti ad indici diversi
scorrimento angolare γ12 = π/2 - β12 = α1 + α2

Deformazione additiva

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) = \varepsilon_{ji}$

$\Psi = \varepsilon + \vartheta$ ove

$\varepsilon = \mathrm{sim}(\Psi) \triangleq \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T) \Rightarrow \varepsilon^T = \varepsilon$ tensore di deformazione (piccola) infinitesima

parte simmetrica

$\vartheta = \mathrm{emi}(\Psi) \triangleq \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T) \Rightarrow \vartheta^T = -\vartheta$ tensore di rotazione

parte emisimmetrica

$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i}) = -\vartheta_{ji}$

$\varepsilon + \vartheta = \Psi$ ✓

• Evidentemente il tensore Ψ deve contenere informazioni sulla deformazione pura (strain)

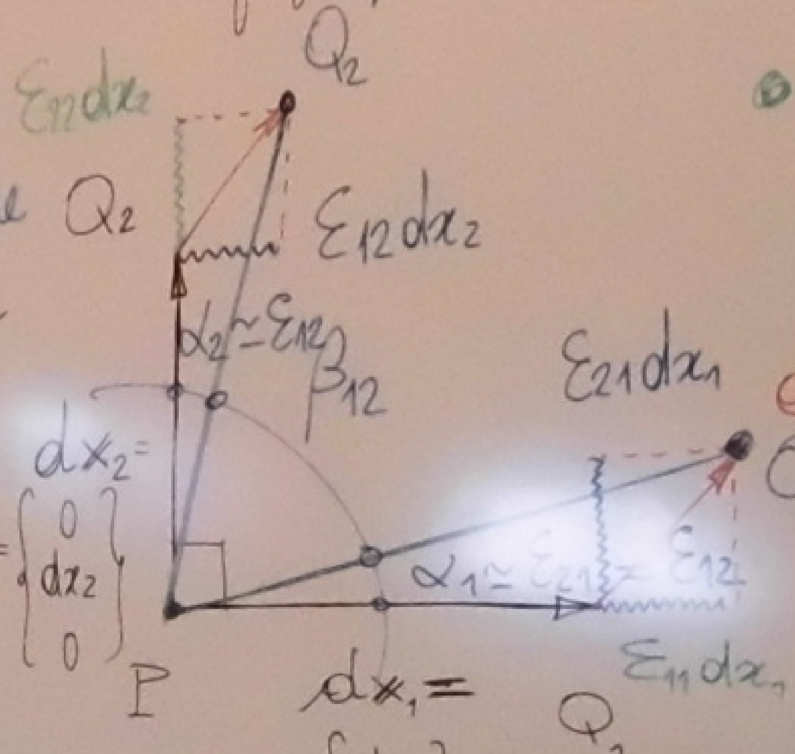
$\Psi = \frac{\partial s}{\partial x} = \nabla s \leftrightarrow \Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j}$ (piccoli gradienti di spostamento)

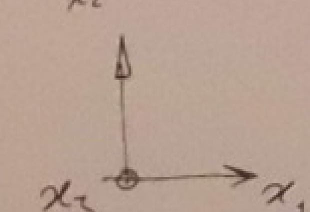
$|\Psi_{ij}| = |s_{i,j}| \ll 1$

$ds = s(x+dx) - s(x) = \frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot dx = \Psi \cdot dx$

• Significato fisico di ε (deformazione pura o strain) $\Rightarrow$ caso piano di deform. con $\Psi = \varepsilon$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





• Componenti ad indici uguali

$\varepsilon_{(i,i)} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i}$:

$\frac{\Delta l_1}{l_{10}} = \frac{(\cancel{dx_1} + \varepsilon_{11} dx_1) - \cancel{dx_1}}{dx_1} = \varepsilon_{11}$ (v. prova di trazione) $|\varepsilon_{11}| \ll 1$

allungamento specifico di fibre parallele all'asse x_1

• Componenti ad indici diversi $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ $i \neq j$:

scorrimento angolare $\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \beta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$ (v. prova di torsione)

ove $\alpha_1 \simeq \tan\alpha_1 = \frac{\varepsilon_{21} \cancel{dx_1}}{(1+\varepsilon_{11}) \cancel{dx_1}} \simeq \varepsilon_{21}$

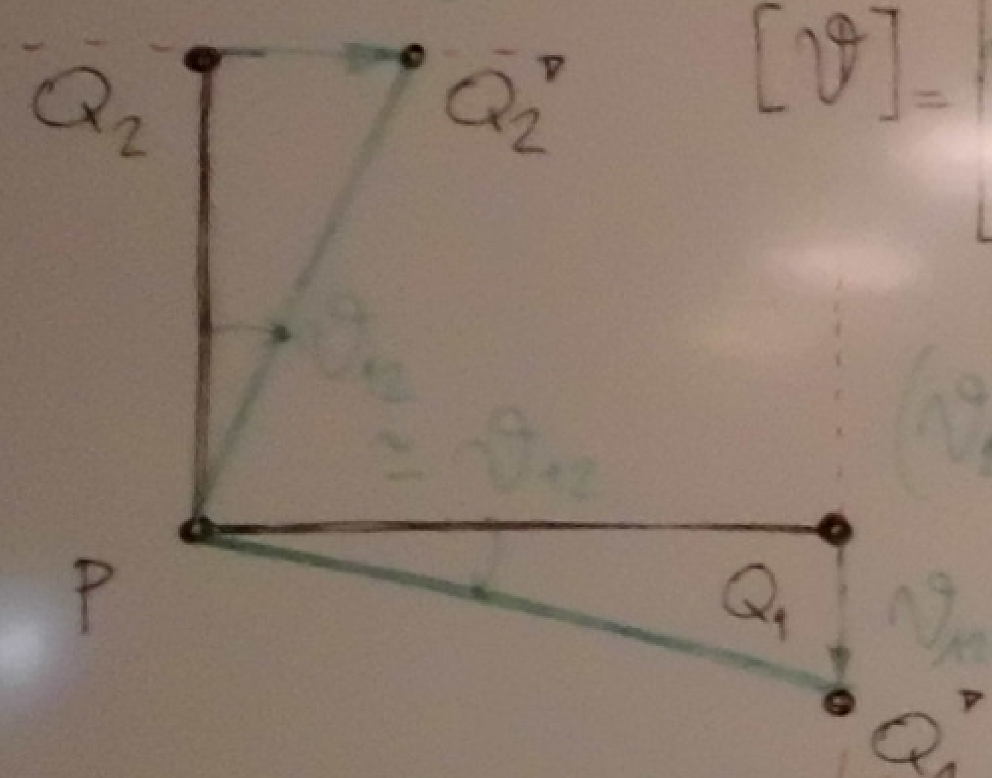
$\gamma_{12} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} = 2\,\varepsilon_{12}$ o $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12}$

metà degli scorrimenti angolari γ_{ij} subiti da fibre // agli assi i, j

$ds_i = \Psi \cdot dx_i = \varepsilon \cdot dx_i \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} dx_1 + \varepsilon_{12} dx_2 \\ \varepsilon_{21} dx_1 + \varepsilon_{22} dx_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- **Significato fisico di ϑ** (rotazione rigida infinitesima)



$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & 0 \\ \vartheta_{21} = -\vartheta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Psi = \vartheta = -\vartheta^T$

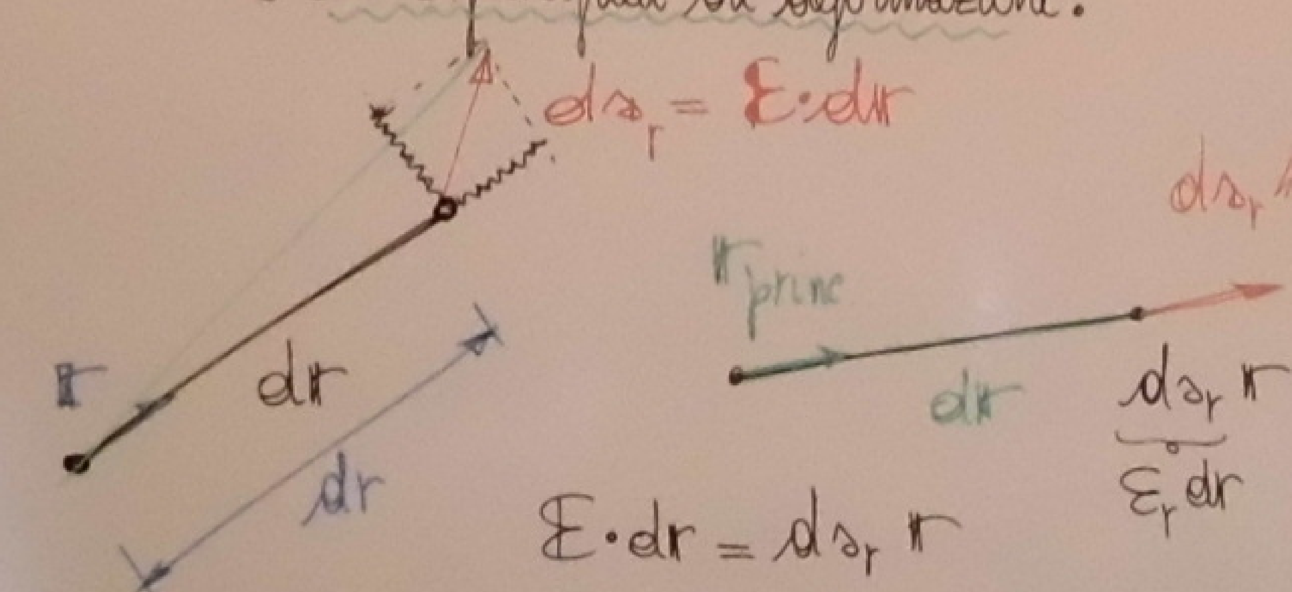
$(\vartheta_{21} = -\vartheta_{12})$

rotazione rigida infinitesima (v. cinematica di atto di moto) rispetto ad x_3 di entità ϑ_{12}

- Concludendo, pur contenendo $s(x)$ l'informazione completa sulla deformazione (incluso per traslaz. rigide), la parte simmetrica $\mathcal{E}$ del suo gradiente $\Psi = \nabla s$ rappr. la deformaz. pura (strain), mentre la parte emisimmetrica ϑ rappresenta una rotaz. rigida infinitesima.

- Analisi del tensore di deformazione $\mathcal{E}$ (tensore doppio simm.) può ricalcare l'analisi svolta per il tensore sforzo σ

- Direz. principali di deformazione:



$\mathcal{E} \cdot dr = ds_r\, r$

$\mathcal{E} \cdot \cancel{dr}\, r = \varepsilon_r \cancel{dr}\, r$

$(\mathcal{E} - \varepsilon_r \mathbf{I}) \cdot r = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{E} \cdot r = \varepsilon_r\, r\}$ pb. agli autovalori per $\mathcal{E}$

eq.ne caratteristica $\quad -\det(\mathcal{E} - \varepsilon_r \mathbf{I}) = \varepsilon_r^3 - I_1 \varepsilon_r^2 - I_2 \varepsilon_r - I_3 = 0$

invarianti di deformazione

Invarianti (al variare del sist. di rif.)

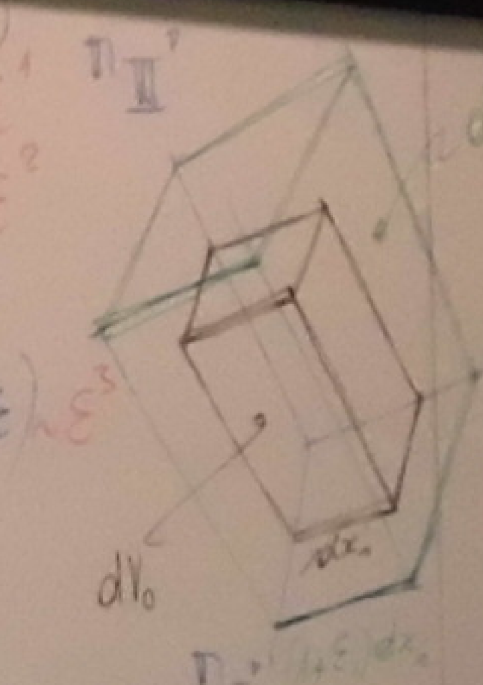
primo $\quad I_1 = \mathrm{tr}\,\mathcal{E} = \varepsilon_{ii} \quad \sim \mathcal{E}^1$

secondo $\quad I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathcal{E}) \quad \sim \mathcal{E}^2$

terzo $\quad I_3 = \det \mathcal{E} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathcal{E}\left(\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\mathcal{E}\right) \sim \mathcal{E}^3$

- $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ deformaz. principali
- n_I, n_{II}, n_{III} direz. princip. di deformazione

$$[\mathcal{E}]_{\text{rif. princ.}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$



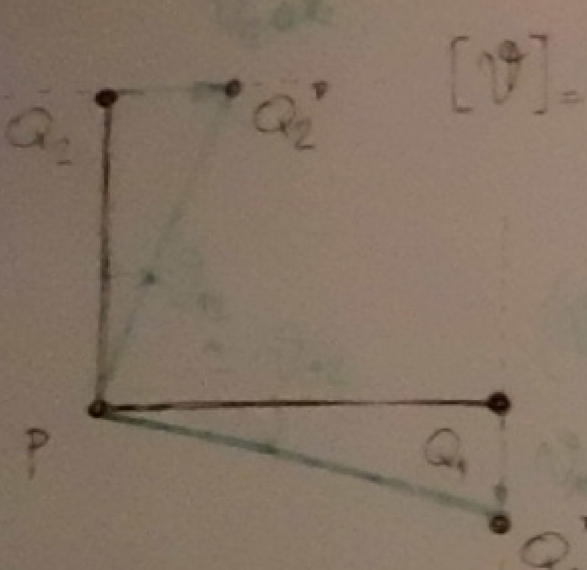
$v = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$

$= 1 + \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} + \ldots - 1$

$= I_1 = \mathrm{tr}\,\mathcal{E}$

Pertanto, l'invariante primo del tensore di deformazione $\mathcal{E}$ rappresenta, in regime di piccole deformazioni, la deformazione volumetrica.

- Significato fisico di ϑ (rotazione rigida infinitesima)



$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

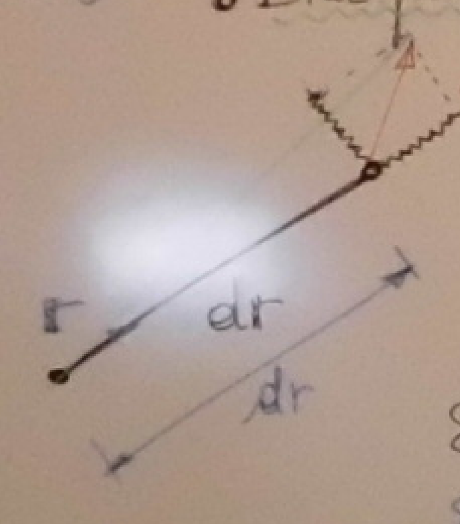
$$\exists\, \Psi = \vartheta_T = -\vartheta^T$$

(l'cinematica di atto di moto)

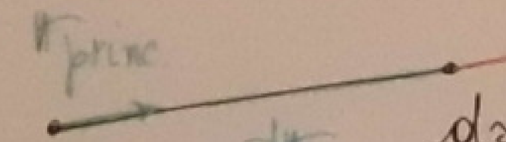
- Concludendo, pur contenendo $s(x)$ l'informazione completa sulla deformazione (inclusi gli traslaz. rigide), la parte simmetrica $\mathcal{E}$ del suo gradiente $\mathbb{F} = \nabla s$ rappr. la deformaz. pura (strain), mentre la parte emisimmetrica rappresenta una rotaz. rigida infinitesima.

- Analisi del tensore di deformazione $\mathcal{E}$ (tensore doppio simm.) può ricalcare l'analisi svolta per il tensore sforzo σ

- Direz. principali di deformazione:



$ds_r \,//\, r$



$$\underbrace{ds_r}_{\varepsilon_r dr} r$$

$$\mathcal{E} \cdot dr = ds_r\, r$$

$$\mathcal{E} \cdot \cancel{dr}\, r = \varepsilon_r \cancel{dr}\, r$$

$$(\mathcal{E} - \varepsilon_r \mathbb{I}) \cdot r = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E} \cdot r = \varepsilon_r\, r \quad \text{pb. agli autovalori per } \mathcal{E}$$

eq.ne caratteristica: $-\det(\mathcal{E} - \varepsilon_r \mathbb{I}) = \varepsilon_r^3 - I_1 \varepsilon_r^2 - I_2 \varepsilon_r - I_3 = 0$

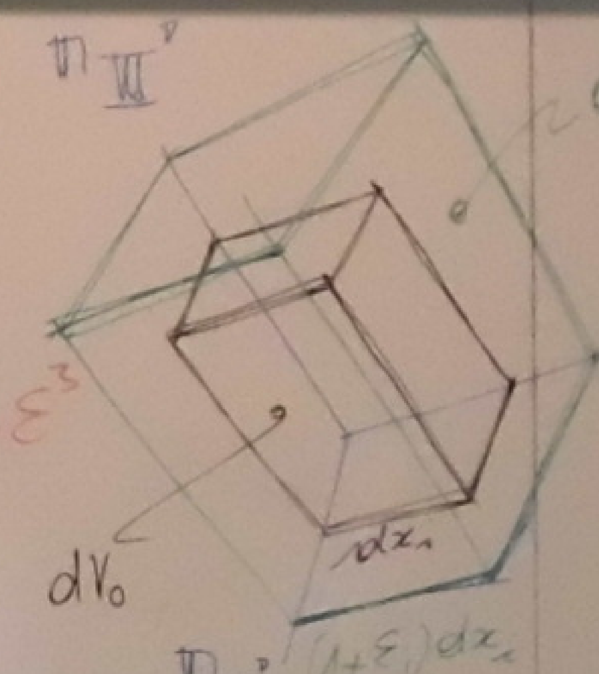
invarianti di deformazione

Invarianti (al variare del sist. di rif.)

- primo $I_1 = \mathrm{tr}\,\mathcal{E} = \varepsilon_{ii} \sim \varepsilon^1$
- secondo $I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathcal{E}) \sim \varepsilon^2$
- terzo $I_3 = \det \mathcal{E} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathcal{E}\left(\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\mathcal{E}\right) \sim \varepsilon^3$

- $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ deformaz. principali
- n_I, n_{II}, n_{III} direz. princip. di deformazione

$$[\mathcal{E}]_{\text{rif. princ.}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$



direz. princ. di def

deformazione senza variazione di forma, con variazioni di volume e deformaz. volumetrica

$$v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \quad \text{(variaz. specifica di volume)}$$

$$= \frac{(1+\varepsilon_I)dx_I\,(1+\varepsilon_{II})dx_{II}\,(1+\varepsilon_{III})dx_{III} - dx_I dx_{II} dx_{III}}{dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}}$$

$$= \cancel{1} + \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} - \cancel{1}$$

$$= I_1 + \cancel{I_2} + \cancel{I_3} \simeq \mathrm{tr}\,\mathcal{E}$$

Pertanto, l'invariante primo del tensore di deformazione ($\mathrm{tr}\,\mathcal{E}$) rappresenta, in regime di piccole deformazioni, la deformazione volumetrica

Dir. principali di deformazione:
$\mathcal{E}\cdot dr = d_\varepsilon r$
$\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ deformaz. principali
n_I, n_{II}, n_{III} direz. princip. di deformazione
$\det(\mathcal{E}-\varepsilon I) = \varepsilon_r^3 - I_1\varepsilon_r^2 - I_2\varepsilon_r - I_3 = 0$
$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$ rif. princ.
Invarianti (al variare del sist. di rif.)
primo $I_1 = \mathrm{tr}\,\mathcal{E} = \varepsilon_{ii} \sim \varepsilon^1$
secondo $I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathcal{E}) \sim \varepsilon^2$
terzo $I_3 = \det \mathcal{E} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathcal{E}(\mathrm{tr}\,\mathcal{E}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\mathcal{E}) \sim \varepsilon^3$
direz. princ. di def.
dV
$(1+\varepsilon_I)dx_I$
deformazione senza variazione di forma, con variazione di volume e deformaz. volumetrica:
$v = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$ (variaz. specifica di volume)
$= \frac{(1+\varepsilon_I)dx_I(1+\varepsilon_{II})dx_{II}(1+\varepsilon_{III})dx_{III} - dx_I dx_{II} dx_{III}}{dx_I dx_{II} dx_{III}}$
$= \cancel{1} + \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} +$
$+ \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} - \cancel{1}$
$= I_1 - \cancel{I_2} + \cancel{I_3} \simeq \mathrm{tr}\,\mathcal{E}$
Pertanto, l'invariante primo del tensore di deformazione ($\mathrm{tr}\,\mathcal{E}$) rappresenta, in regime di piccole deformazioni, la deformazione volumetrica