Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

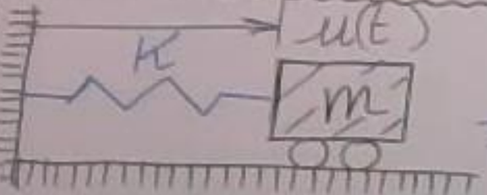
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 02

Oscillazioni libere (non smorzate)



u_0

$\dot u_0$

c.i.

cost. { m massa $[M] = \frac{[F][t]^2}{[L]}$ equil. "dinamico" ⇒ eq. del moto

> 0

in t { K rigidezza $[K] = \frac{[F]}{[L]}$

$m\ddot u + K u(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot u + \omega_1^2 u(t) = 0} \Rightarrow \boxed{u(t) = \underset{\dot u_0/\omega_1}{A} \sin\omega_1 t + \underset{u_0}{B} \cos\omega_1 t}$

sistema tempo-invariante $\omega_n = \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\qquad \frac{K}{m} = \omega_1^2$ eq.ne del moto armonico

pulsazione o frequenza angolare naturale o propria del sistema $[\omega_1] = \frac{1}{[t]}$ $\qquad \omega_1 \uparrow \quad K\uparrow \quad m\downarrow$

Cerchiamo soluzioni nella forma:

$u(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow e^{\pm i\omega_1 t}$

$\dot u(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$\ddot u(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

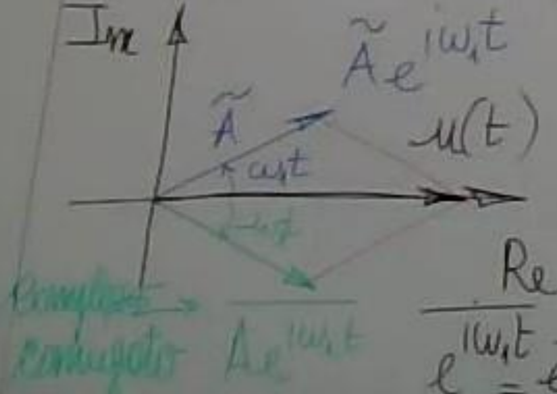
Sostituendo

$(\lambda^2 + \omega_1^2)\cancel{e^{\lambda t}} = 0 \quad \forall t$

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ $\qquad = -\omega_1^2 u(t)$

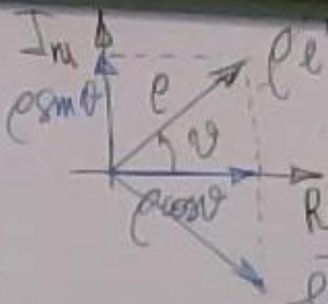
eq.ne caratteristica associata all'eq.ne diff $\boxed{\lambda^2 + \omega_1^2 = 0} \Rightarrow \lambda^2 = -\omega_1^2 = (i\omega_1)^2$

$u(t) = \tilde A e^{i\omega_1 t} + \tilde B e^{-i\omega_1 t}$



$\tilde A$ piano di Argand

$\overline{e^{i\omega_1 t}} = e^{-i\omega_1 t}$



$\rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ formula di Eulero

$\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$

$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$

$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$

Imponendo le c.i.

$u(0) = \boxed{B = u_0}$

$\dot u(0) = A\omega_1 = \dot u_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot u_0}{\omega_1}}$

$\dot u(t) = A\omega_1\cos\omega_1 t - B\omega_1\sin\omega_1 t$

$\ddot u(t) = -A\omega_1^2\sin\omega_1 t - B\omega_1^2\cos\omega_1 t$

- $u(t) = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t = \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t$
- $u(t) = R\cos(\omega_1 t - \varphi) = R(\cos\omega_1 t\cos\varphi + \sin\omega_1 t\sin\varphi)$
- $u(t) = R\sin(\omega_1 t + \psi) = R(\cos\omega_1 t\sin\psi + \sin\omega_1 t\cos\psi)$

$$\begin{cases} A = R\sin\varphi = R\cos\psi \\ B = R\cos\varphi = R\sin\psi \end{cases}$$

R: ampiezza; φ, ψ fasi $\quad f_1$ frequenza ciclica $= \dfrac{\omega_1}{2\pi}$

$[Hz] = [s]^{-1}$

periodo proprio $\quad T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{1}{f_1}$

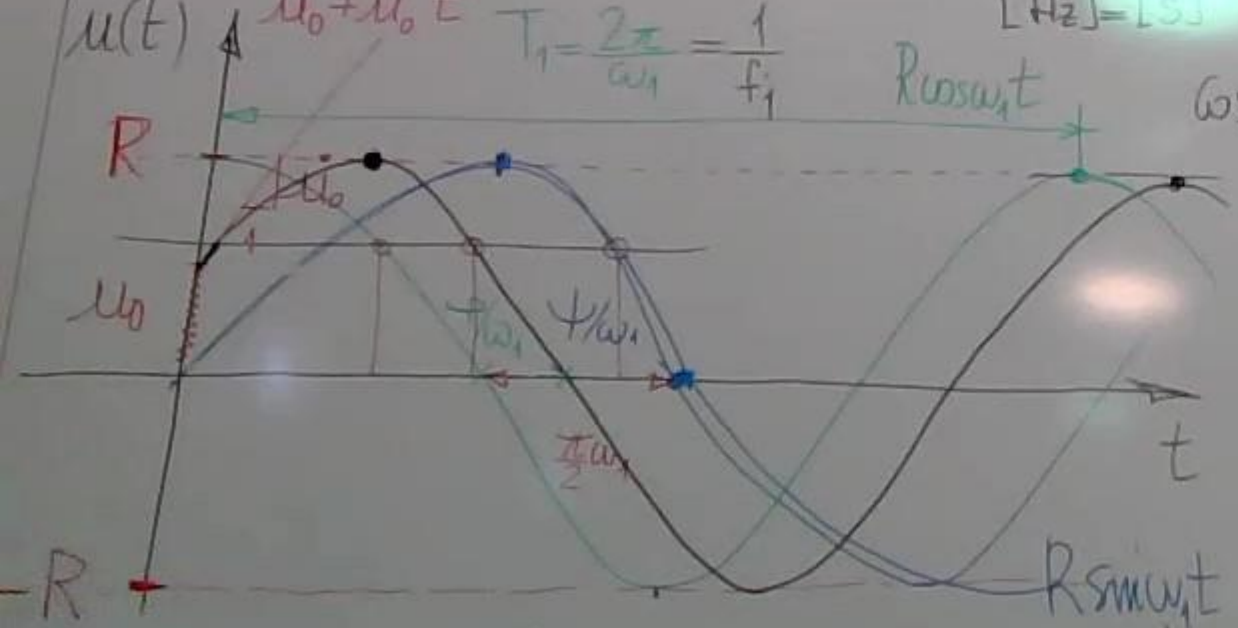
$\cos\omega_1 t = \cos\omega_1(t + T_1)$

$\omega_1 T_1 = 2\pi$

- $R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\dot{u}_0}{\omega_1}\right)^2 + u_0^2}$

$\dfrac{A}{B} = \tan\varphi = \dfrac{1}{\tan\psi} \quad (\varphi + \psi = \pi/2)$

- $\varphi = \operatorname{atan}\dfrac{A}{B}$, $\psi = \operatorname{atan}\dfrac{B}{A} = \operatorname{atan}\left(\dfrac{u_0\omega_1}{\dot{u}_0}\right)$

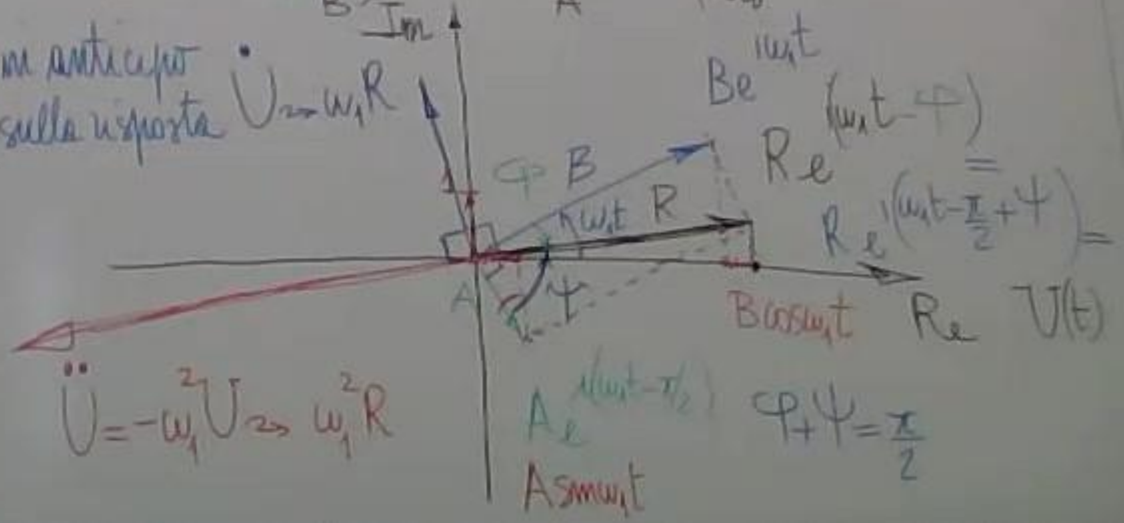


$\varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$ (fasi sono angoli complementari)

$i = e^{+i\pi/2}$

velocità in anticipo di $\pi/2$ sulla risposta $\quad \dot{U} \to \omega_1 R$

$\ddot{U} = -\omega_1^2 U \to \omega_1^2 R$



$\varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$

SOMMARIO (Lez. 02) [ex post]

- Oscillazioni libere non smorzate (in risposta alle sole c.i.).
- Eq.ne dei moti armonici.
- Pulsazione naturale del sistema $\omega_1 = \sqrt{K/m}$.
- Moto armonico di periodo naturale $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (e ampiezza costante).
- Ampiezza e sfasamento, rispetto a puro cos o sin.
- Rappresentazione del moto mediante vettori rotanti nel piano di Argand: U sfasata; $\dot{U} \sim \omega_1 U$ in quadratura in anticipo; $\ddot{U} \sim \omega_1^2 U$ in opposizione di fase.

- Next step: generalizzazione al caso smorzato, con ampiezza decadente nel tempo.