

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

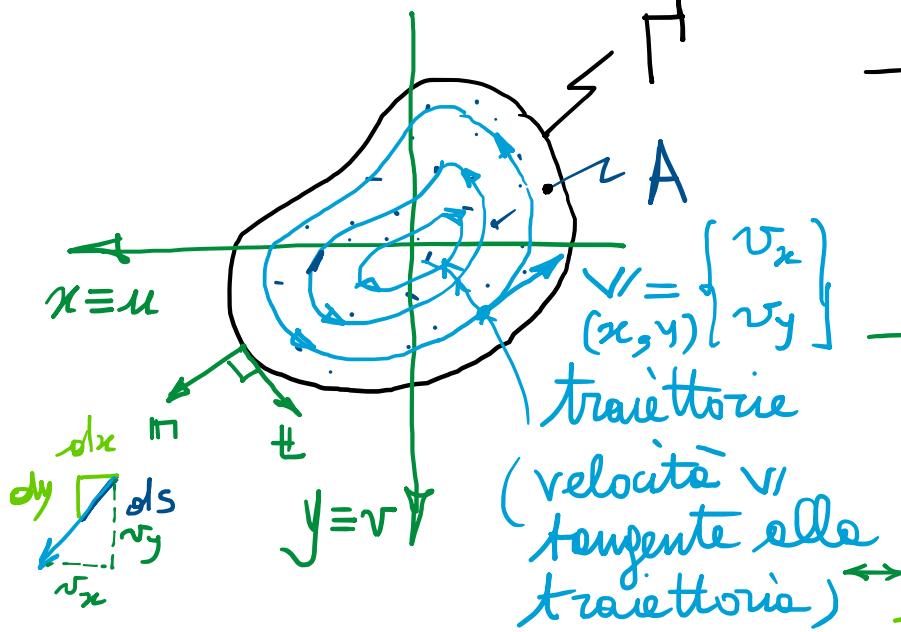
[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 20

Analogie fisiche (del pb. della torsione con altri fenomeni fisici retti da equazioni governanti formalmente simili).

- Esse possono risultare utile a:
  - cercare ed interpretare le soluzioni cercate del pb. in esame;
  - concepire eventuali approcci sperimentali utili ad osservazione qualitativa e/o quantitativa;
  - individuare le caratteristiche salienti del pb. e delle risposte, e fini ingegneristici, in particolare riguardo la definizione delle capacità portante e del comportamento a torsione.
- Si presentano due analogie principali, in ambito "Meccanica":
  - analogia idrodinamica (Lord Kelvin ~ 1869) " dei fluidi
  - analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~ 1903) " delle strutture

## - Analogie idrodinamiche (Lord Kelvin, 1869)



- Si presenta le seguenti analogie formale (stesse eq.m governanti):

$$\boldsymbol{\tau}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \Phi(x, y) \leftrightarrow \Phi = \Phi(x, y)$$

f.n di sfiorzo di Airy f.n di flusso ("stream function")

$$\tau_{zx} = \Phi_y; \tau_{zy} = -\Phi_x \leftrightarrow v_x = \Phi_y; v_y = -\Phi_x$$

- Moto puro di fluido perfetto (non visoso) incompressibile all'interno di un recipiente di contorno  $\Gamma$ , con vorticità (velocità angolare) costante.

Equazioni idrodinamiche governanti:

- eq. di continuità (scalare)

$$\Phi = \text{cost} : \text{linee di flusso}$$

$$d\Phi = \underbrace{\Phi_x}_{v_x} dx + \underbrace{\Phi_y}_{v_y} dy = 0 \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}$$

- vorticità costante (rettoriale)

$$2\omega = \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \text{cost in } A \quad \omega \perp (x, y)$$

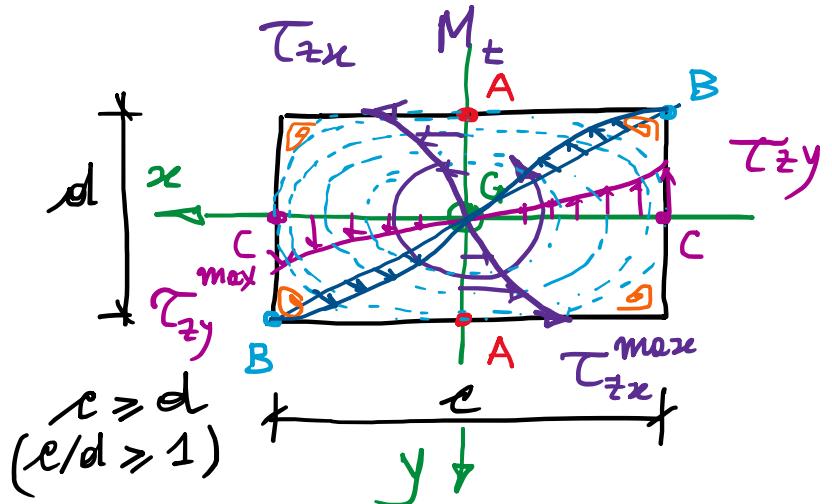
$$= \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = K(v_{y,x} - v_{x,y}) \quad \overbrace{\omega_z}^{\omega_z}$$

relazione scalare

$$-2\omega_z = [v_{x,y} - v_{y,x}] = -\rho L \quad \text{costante}$$

$$-c.c. \dots \nabla \cdot \mathbf{n} = v_x n_x + v_y n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

- L'analogia idrodinamica risulta utile a "visualizzare" il campo delle tens. tangenziali -
- Per es. per sezione rettangolare (soluzione per sviluppi in serie):



eq. ne di continuità: portate  $Q = \nabla A = \text{cost}$

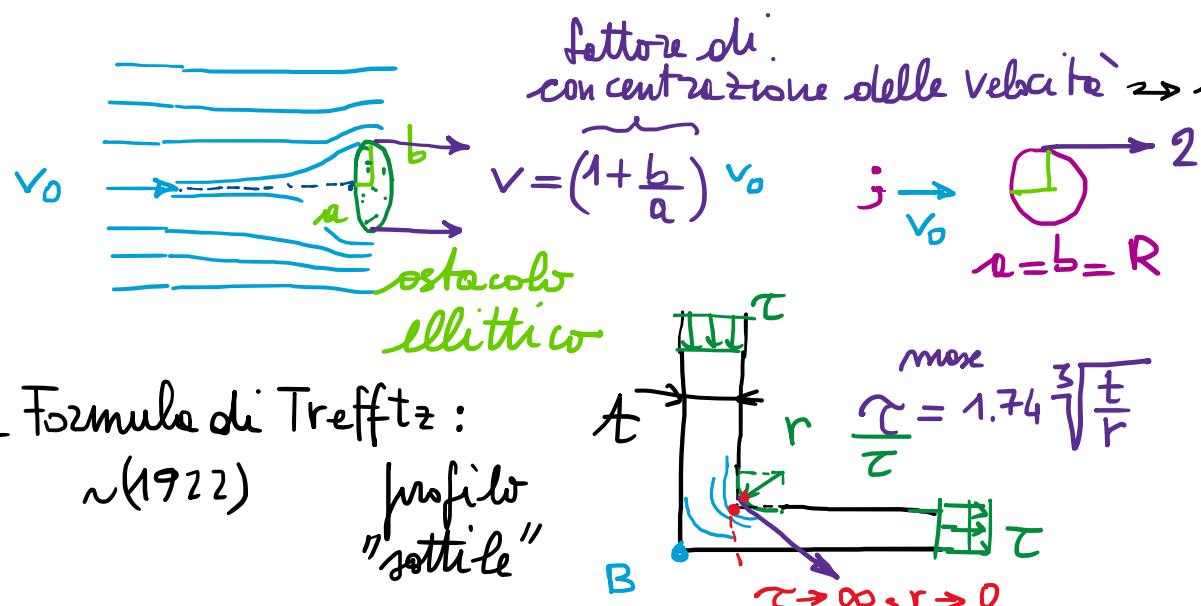
- $\bar{\tau}^A > \bar{\tau}^C$  ( $\bar{\tau}^{\max}$  nei p.ti medi dei lati maggiori)
- $\bar{\tau}^B \approx 0$  (zone di ristagno di fluido) (spigoli sporgenti)

$$\bar{\tau}^{\max} = K \frac{M_t}{cd^2}; J = \alpha c d^3$$

profilo rettangolare  
sottile

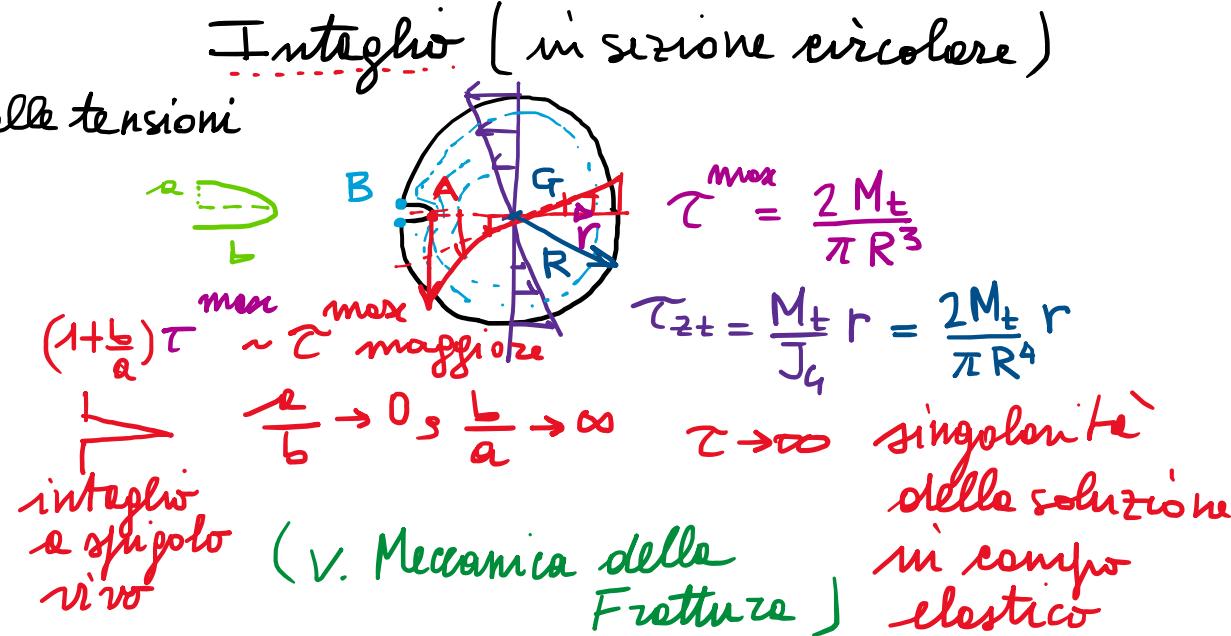
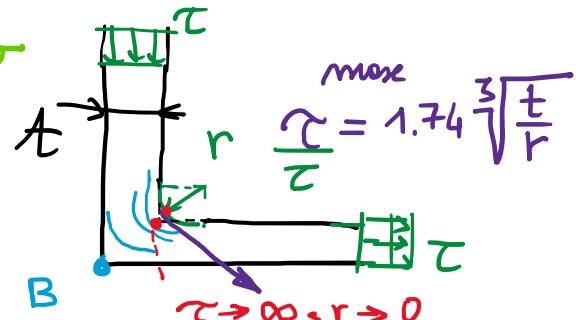
$c/d$	$K$	$\alpha$
1	4.80	0.141
2	~4	~0.23
$\infty$	3	$0.333 = 1/3$

### Concentrazione delle tensioni:

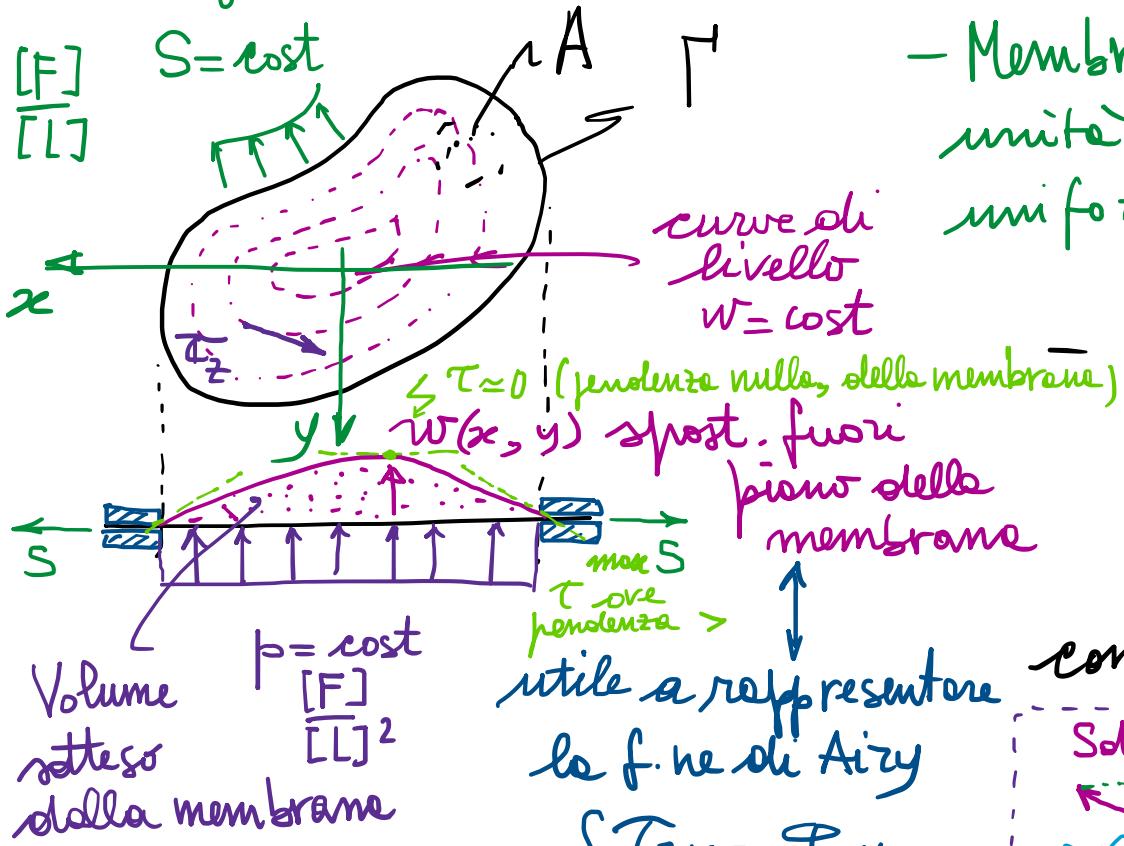


Formule di Trefitz: ~ (1922)

profilo "sottile"



• Analogie delle membrane (Prandtl, 1903) (es. bolle di sapone, tens. superficiale cost.)



- Membrane appoggiate su contorno  $\Gamma$ , con tensione per unità di lunghezza  $S = \text{cost}$ , soggetto a pressione uniforme  $p$

- Equazione di equilibrio della membrana in direz. ortogonale al piano

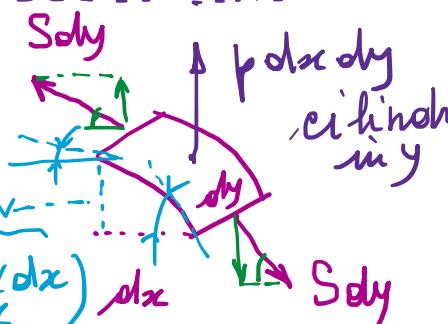
$$\nabla^2 w(x, y) = -\frac{p}{S} \text{ in } A$$

$$\text{con s.c. } w = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = -c \text{ in } A$$

$$\varphi = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$w \frac{S}{p} = \frac{\varphi}{c} \Rightarrow \varphi = \frac{cS}{p} w$$



$$\int_A w(x, y) dA = V \Leftrightarrow M_t = 2 \int_A c \varphi dA$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy - \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{p}{S} = \text{cost}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{S} = \text{cost}$$

$\tau_z$  tangente alle  $\varphi = \text{cost}$  ( $w = \text{cost}$ )

lg. elle trasl. in z: