Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

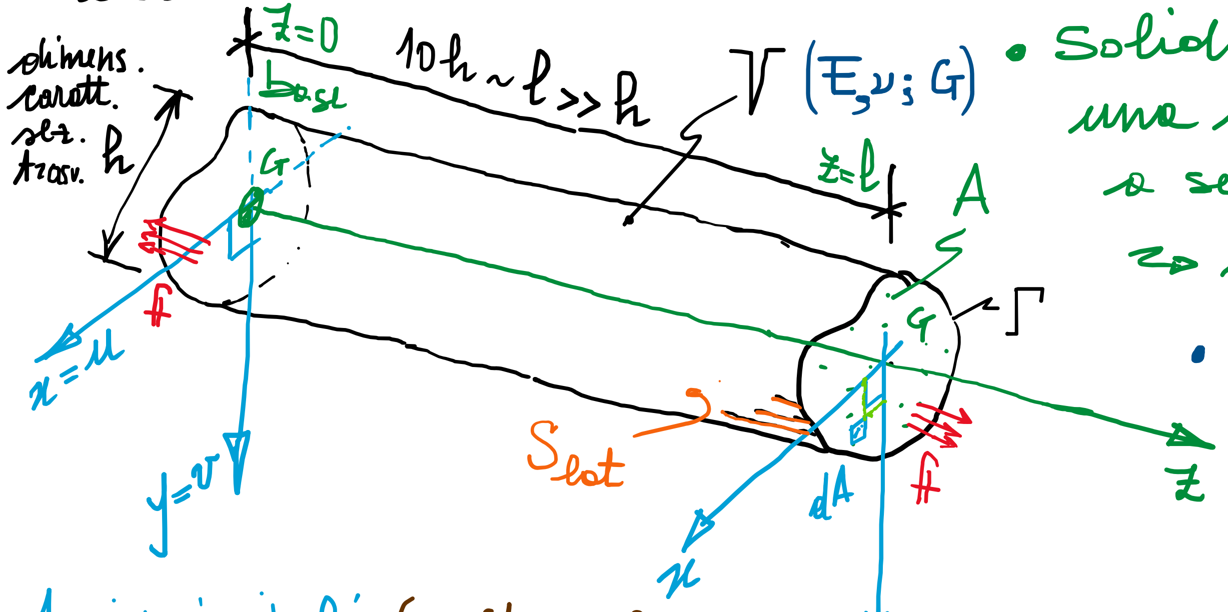
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Problema di de Saint Venant (~1855) – Caso di problema elastico lineare particolare:



- Solido "tipo trave" di forma allungata, cioè con una dimensione prevalente rispetto alle altre due, a sezione costante (di area A) ed asse rettilineo $\Rightarrow$ cilindro o prisma di DSV.
- Composto da materiale elastico, lineare, isotropo, omogeneo $\forall\, x \in V \Rightarrow E, \nu; G$ cost
- Privo di vincoli esterni ($S_1 = \emptyset$) $\Rightarrow$ soluz. in termini di spostamento nota a meno di moti rigidi.
- Privo di forze di volume ($F = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie su S_{lat} ($f = 0$ su S_{lat}).
- Soggetto solamente a forze di superficie sulle basi ($z=0, z=l$), di distribuzione non specificata e note solo in termini di risultanti (tali da formare un sistema di forze autoequilibrato).

Assi principali d'inerzia: (scelta del sistema di rif.)

– baricentrici; $G \in x, y \Rightarrow S_x = \int_A y\, dA = 0$; $S_y = \int_A x\, dA = 0$ (momenti statici nulli)

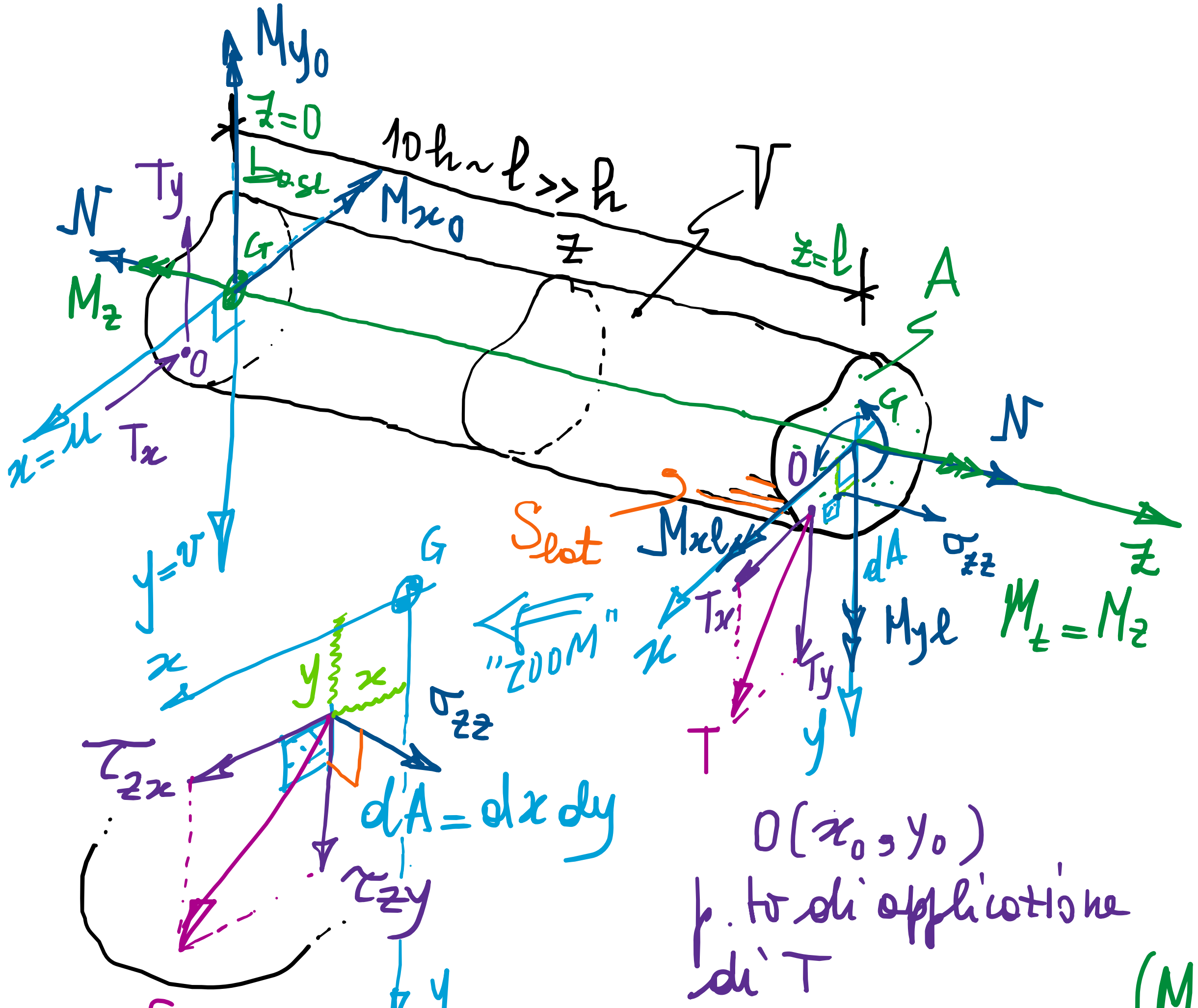
– mutuamente perpendicolari; $x \perp y$

– coniugati $\overset{\text{CNS}}{\Longleftrightarrow}$ $J_{xy} = \int_A xy\, dA = 0$ (momento d'inerzia centrifugo nullo)

(l'uno contiene il "centro" relativo all'altro)

NB: Se $\exists$ asse di simm. retta, tale asse è principale (insieme al $\perp$ per G)

Postulato di DSV: La reale distribuzione di queste forze di superficie, a parità di risultanti, è ininfluente ai fini della soluzione (salvo per possibili "effetti di bordo" localizzati).



$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$, σ_{zz} sforzo normale al piano della sezione

vettore delle tensioni tangenziali nel piano della sezione

Risultanti $\Rightarrow$ casi di DSV: (equivalenza statica)

$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA = \text{cost}$ Azione assiale o normale

$T_x = \int_A \tau_{zx}\, dA = \text{cost}$

$T_y = \int_A \tau_{zy}\, dA = \text{cost}$

Azioni taglianti o tagli (componenti)

$M_x = \int_A \sigma_{zz}\, y\, dA = M_{x_0} + T_y z$ Azioni flettenti

$M_y = -\int_A \sigma_{zz}\, x\, dA = M_{y_0} - T_x z$ (momenti ")

lineari in z

$$(M_t = M_z) + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$ con

M_t azione torcente (momento ") costante

Equivalenza statica tra risultanti e campo di sforzo da esse indotto.

- Soluzione tramite approccio semi-inverso (agli sforzi):

- Hp. fondamentale di DSV: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$; restano σ_{zz} ; $\underbrace{\tau_{zx}, \tau_{zy}}_{\tau_z}$

suffragata dall'osservaz. sperimentale
(e supportata dall'unicità della soluzione)

$(= \tau_{yx})$

componenti di sforzo da determinare, in $(x, y; z)$.

- Equaz. indefinite di equilibrio:

$$\mathrm{div}\, \sigma + \cancel{f} = 0 \text{ in } V \Leftrightarrow \sigma_{ij,i} = 0$$

(campo di sforzo solenoidale ⇒ a divergenza nulla)

$$\begin{cases} \cancel{\sigma_{xx,x}} + \cancel{\tau_{yx,y}} + \tau_{zx,z} = 0 \\ \cancel{\tau_{xy,x}} + \cancel{\sigma_{yy,y}} + \tau_{zy,z} = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases}$$

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}(x,y) \\ \tau_{zy}(x,y) \end{Bmatrix} \text{ indip. da } z$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\boxed{\mathrm{div}\, \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z}}}_{\text{equazione di equilibrio}} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

Th. Schwarz $0 = -\sigma_{zz,zz}$

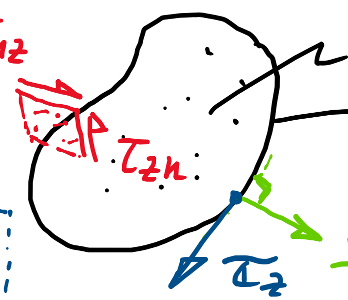
$\Rightarrow \sigma_{zz}$ lineari in z

- Condizioni al contorno:

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{f} = 0 \text{ su } S_{lat} \;(\text{su } \Gamma) \Leftrightarrow n_i \sigma_{ij} = 0$$

$$\begin{cases} n_x \cancel{\sigma_{xx}} + n_y \cancel{\tau_{yx}} + \cancel{n_z} \tau_{zx} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \cancel{\tau_{xy}} + n_y \cancel{\sigma_{yy}} + \cancel{n_z} \tau_{zy} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + \cancel{n_z} \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

sup. laterale scarica $0 = \tau_{nz}$



τ_z, su Γ, tangente al contorno

$(n_z = 0)$

equilibrio al contorno $\boxed{\tau_z \cdot \mathbf{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0, \; \tau_z \perp \mathbf{n}}$

- Legame costitutivo:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\, \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \qquad \text{lineari in } z;$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

deformazioni normali

$$(\gamma_{xy} = 0) \qquad \gamma_z = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{\tau_z}{G}$$

$$\gamma_{ij} = \cancel{2}\varepsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{\cancel{2}(1+\nu)}{E}\tau_{ij} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{ij} \qquad \text{indip. da } z$$

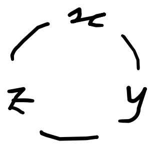
deformazioni taglianti

- Equazioni di congruenza interne:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk} \qquad 81 \to \underline{6} \to 3$$

di DSV

$$\begin{cases} \cancel{\varepsilon_{xx,yy}} + \cancel{\varepsilon_{yy,xx}} = 2\,\cancel{\varepsilon_{xy}}_{,xy} & \checkmark \\ \cancel{\varepsilon_{yy,zz}} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\,\cancel{\varepsilon_{yz,yz}} & \Rightarrow \sigma_{zz} \text{ lin. in } y \\ \varepsilon_{zz,xx} + \cancel{\varepsilon_{xx,zz}} = 2\,\cancel{\varepsilon_{zx,zx}} & \Rightarrow \sigma_{zz} \text{ lin. in } x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \cancel{\varepsilon_{xy}}_{,xz} + \varepsilon_{xz,xy} \\ \varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \cancel{\varepsilon_{yx}}_{,yz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{zx,xy} - \varepsilon_{zy,xx} = \varepsilon_{xx,yz} \\ \varepsilon_{zx,yy} - \varepsilon_{zy,yx} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{zz,xy} + \cancel{\varepsilon_{xy}}_{,zz} = \cancel{\varepsilon_{zx,zy}} + \cancel{\varepsilon_{zy,zx}} \Rightarrow \sigma_{zz} \text{ indip. da } xy$$

Sforzo normale:

costanti a_0, a_1, a_2 ; b_0, b_1, b_2

$$\sigma_{zz}(x,y;z) = a_0 + a_1 x + a_2 y - z(\cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y)$$

$$= (a_0 - \cancel{b_0} z) + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$$

Infatti:

$$\int_A \operatorname{div} \tau_z \, dA \overset{\text{Th.Div.}}{=} \int_\Gamma \cancel{n \cdot \tau_z} \, d\Gamma$$

$$\int_A -\sigma_{zz,z} \, dA = \cancel{b_0} A = 0$$

Per equivalenza statica:

$$N = \int_A \sigma_{zz} \, dA = (a_0 - b_0 z)A + (a_1 - b_1 z)\cancel{S_y} + (a_2 - b_2 z)\cancel{S_x} = cost \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{N}{A} ; \; b_0 = 0}$$

$$\begin{cases} M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA = (a_0 - b_0 z)\cancel{S_x} + (a_1 - b_1 z)\cancel{J_{xy}} + (a_2 - b_2 z)J_x \\ M_y = -\int_A \sigma_{zz} x \, dA = \quad " \quad \cancel{S_x} - (a_1 - b_1 z)J_y \quad " \quad \cancel{J_{xy}} \end{cases}$$

$$J_x = \int_A y^2 \, dA \qquad J_y = \int_A x^2 \, dA$$

momenti di inerzia

$$M_{x_0} + T_y z = M_x = (a_2 - b_2 z)J_x$$

$$M_{y_0} - T_x z = M_y = -(a_1 - b_1 z)J_y \Rightarrow$$

$$a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} ; \quad a_2 = \frac{M_{x_0}}{J_x}, \quad b_2 = -\frac{T_y}{J_x}$$

$$a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y} ; \quad a_1 = -\frac{M_{y_0}}{J_y}, \quad b_1 = -\frac{T_x}{J_y}$$

campo lineare

$$\boxed{\sigma_{zz}(x,y;z) = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x}$$

(vedi tenso-flessione deviata, per PSE, dovuti a N, M_x, M_y)

• Equazione di congruenza (nelle τ_{zx}, τ_{zy}):

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1+\nu}{\cancel{E}} \big(\underbrace{\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}}_{f}\big)_{,x} = -\frac{\nu}{\cancel{E}}\, \sigma_{zz,zy} \\ &\frac{1+\nu}{\cancel{E}} \big(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\big)_{,y} = +\frac{\nu}{\cancel{E}}\, \sigma_{zz,zx} \end{aligned}} \begin{aligned} &= +\nu b_2 \\ &= -\nu b_1 \end{aligned}$$

sia $\bar{\nu} = \dfrac{\nu}{1+\nu}$

Integrando: $\int df = \int f_{,x}\, dx + \int f_{,y}\, dy$

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\,(b_2 x - b_1 y) - c$$

costante di integrazione arbitraria (sarà legata a M_t)

$$= \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{T_x}{J_y} y\right) - c$$

equazione di congruenza

• Problema nelle $\tau_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}\}^T$: (due equazioni governanti) (equazioni differenziali del 1° ordine)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z} = \cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y = -\left(\dfrac{T_x}{J_y} x + \dfrac{T_y}{J_x} y\right) & \text{eq. di equil. in } A \\ -(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\dfrac{T_y}{J_x} x + \dfrac{T_x}{J_y} y\right) - c & \text{eq. di congruenza in } A \end{cases}$$

c.c. $\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ (contorno della sez. trasversale)