

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 26

Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (Calcolo a rotture dei telai)

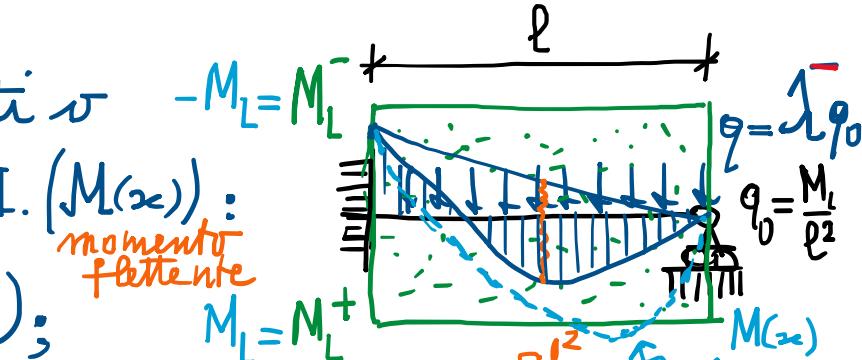
Volti a definire delle strategie di calcolo delle caratteristiche di collasso (metodi "diretti")

DEFINIZIONI:

- Sistema di quantità statiche: carichi esterni, permanenti o accidentali (affetti da moltiplicatore statico λ) e A.I. ($M(x)$):

staticamente • $M(x)$ in equilibrio coi carichi esterni (λ^-);

plasticamente • $M_L^-(x) \leq M(x) \leq M_L^+(x)$ (conformità plastiche). \Rightarrow



Cla^{sse} di quantità statiche all'interno delle quali si ricercano le carett. statiche e collasso:

- Sistema di quantità cinetiche: spostamenti e rotazioni (in particolare plastiche, nelle CP) associabili a moltiplicatore cinematico λ^+ ;

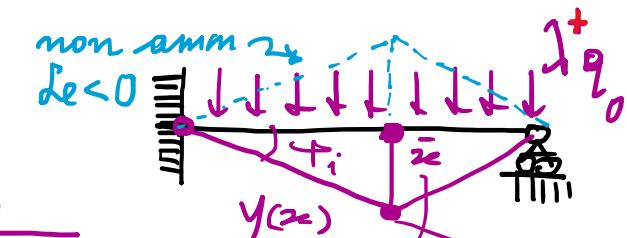
Volli carichi λ^+ , secondo bilancio energetico (de PLV), come se si trattasse delle condizioni di collasso incipiente:

cineticamente • spost. $y(x)$ e rotaz. φ_i : compatibili coi vincoli e tali da produrre lavoro esterno positivo ($\Delta_e > 0$);

Cla^{sse} di quantità cinematiche dove si ricercano quelle e collasso:

plasticamente • rotazioni plastiche $\varphi_i^+ > 0$ ove $M = M_L^+$ e $\varphi_i^- \leq 0$ ove $M_L = M_L^-$

ammisibili (tali che forniscano dissipat. plastic D ≥ 0 nelle C.P.). \Rightarrow



$s = \lambda_L, y_L(x) \in (\lambda^+, y(x), \varphi_i)$

- Moltiplicatore cinemotivo λ^+ associato (al meccanismo ammissibile):

Determinato come se fosse il meccanismo di collasso via PLV:

$$\lambda_L = \underbrace{\sum_i \lambda^+ P_{i0} y_i + \int_i \lambda^+ q_i(x) y_i(x) dx}_{\lambda^+ L_{eo} \text{ carichi accidentali}} + \underbrace{\int_i q_i(x) y_i(x) dx}_{\text{Leg gerarchi (gravit.)}} = \lambda_{ip} = D = \sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^- > 0$$

$\Rightarrow \lambda^+ = \frac{D - \text{Leg}}{L_{eo}} > 0$

$\lambda^+ > 0$ leg gerarchi (gravit.) (non tali da produrre collasso)

$L_{eo} > 0$ lavoro esterno dei carichi base

- Teorema statico ("lower-bound" o "safe" Th.):

All'interno delle classi dei moltiplicatori statici λ^- staticamente ammissibili, il molt. di collasso λ_L è il mose dei λ^- :

$$\lambda_L = \text{mose}\{\lambda^-\}.$$

delimitazione

"forchetta"

bilaterale del moltiplicatore limite

$$\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$$



Teorema misto:
Per coincidenza tra moltiplicatore statico λ^- e moltiplic. cin. λ^+ , allora $\lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$, e λ_L risulta individuato.

- Teorema cinemetico ("upper-bound" Th.):

All'interno delle classi dei moltiplicatori cinem. ammissibili, il molt. di collasso λ_L è il min. dei λ^+ :

$$\lambda_L = \min\{\lambda^+\}.$$

delimitaz. stime per difetto-

sup.
stime per eccesso+

Dimostrazione (Attraverso PLV: $\lambda_L = f_i$)

quantità statiche a collasso

th. statico:

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^-$$

Equazione che consente di calcolare λ_L
nello stesso momento del meccanismo di collasso

"lower bound" -

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_i^+ \varphi_i^+ + M_i^- \varphi_i^-$$

quantità cinematiche a collasso

quantità statiche samm. (λ^-)

$$(\lambda_L - \lambda^-) \sum_i P_{i0} y_i = \sum_i (\underbrace{M_{L_i}^+ - M_i}_{{\lambda_{i0}} > 0}) \varphi_i^+ + (\underbrace{M_{L_i}^- - M_i}_{{\lambda_{i0}} < 0}) \varphi_i^- \geq 0$$

$M_{L_i}^- \leq M_i \leq M_{L_i}^+$
 $\lambda^- \leq \lambda_L$
 $\lambda^- = \max \{\lambda_i^-\}$

th. cinematico:

"upper bound"

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^-$$

quantità statiche rel.
al cinem. samm. (λ^+)

Equazione che consente di calcol. λ^+
dato il meccanismo cinem. ammss.

-

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_i^+ \varphi_i^+ + M_i^- \varphi_i^-$$

quantità statiche a collasso

$$(\lambda^+ - \lambda_L) \sum_i P_{i0} y_i = \sum_i (\underbrace{M_{L_i}^+ - M_i}_{{\lambda_{i0}} > 0}) \varphi_i^+ + (\underbrace{M_{L_i}^- - M_i}_{{\lambda_{i0}} < 0}) \varphi_i^- \geq 0$$

$\lambda_L \leq \lambda^+$

$\lambda^+ \geq \lambda_L = \min \{\lambda^+\}$

Corollari:

- Le caratteristiche di collasso ($\lambda_L, M_{coll}(x); Y_{coll}(x)$) non dipendono delle proprietà elastiche (in quanto esse non intervengono nelle equazioni viste, oltre ad individuare stime delle caratteristiche a collasso stesse).
↳ tip. di comportamento rigido-plastico (non per risposte evolutive).
- le presenze di coazioni, cedimenti vincolari, stati tensio-deformativi (es. spolti residui) ~~provvisti~~ (all'imposizione di carichi occidentali, amplificati da λ) non influenzano la determinazione del moltiplicatore λ_L (in quanto non entrano nelle scritture delle eq.m. viste).

Strumenti operativi (metodi "olietti")

- Metodi di calcolo e collasso "manuali" che consentono la determinazione delle caratteristiche a collasso per esempi specifici (travi, telai).
- Metodi di calcolo "automatico" (implementazione) nell'ambito delle Programmazione Matematica (risoluz. di pb. di max. o di min.). Esempio: metodo del simplex.

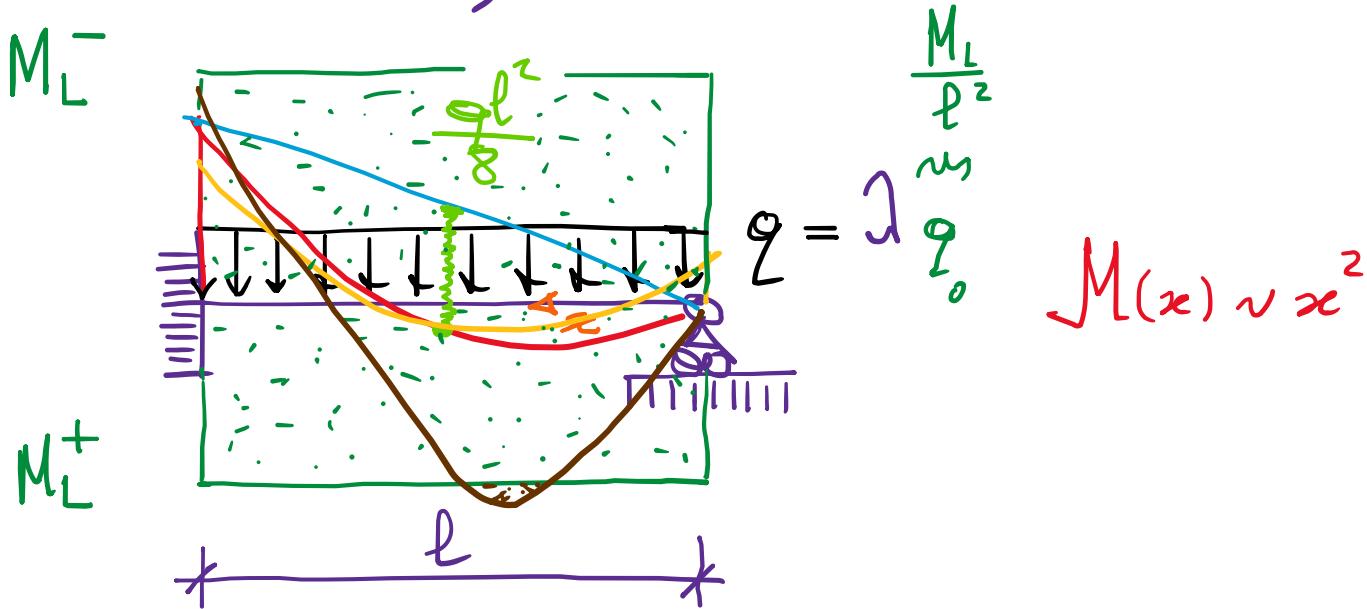
Concetti fondamentali :

- Metodi "diretti" (nell'ambito dell'Analisi Limite, AL, dei sistemi di travi inflessi, alias "Calcolo a Rottura" dei telai) :
volti a determinare in maniera "diretta", cioè senza pretendere necessariamente di voler ricostruire l'intera risposta evolutiva elastoplastica delle strutture ("curva carico/spostamento"), le caratteristiche di collasso plastico, in termini di :

- Q S - Moltiplicatore dei carichi (accidentali) a collasso λ_L ,
U + A con le corrispondenti distribuzioni di Azioni Interne $[M(s)]$.
A + T C - meccanismo di collasso corrispondente, con spostamenti $y(x)$
T + I N e rotazioni (in particolare plastiche, nelle CP, ϕ_i^+ e ϕ_i^-).

- A tale scopo, si mira a predisporre dei metodi di calcolo semplificati, anche "manuali", che con conti abbordabili consentano agevolmente di pervenire alla soluzione delle richieste di cui sopra, perlomeno per tipologie di strutture tipiche e adeguatamente descrivibili col presente approccio (trevi e sistemi di trevi, telai multipiano).
- Secondo tali esigenze, si formulano dei Teoremi (fondamentali dell'Analisi Limite), utili a costituire inquadramento e base metodologica per formulare tali metodi di calcolo.
- In tale richiesta, risulterà fondamentale definire, in primis, le classi, ritenute ammissibili, di quantità statiche e cinematiche all'interno delle quali ricercare le caratteristiche di collasso, tra tutte quelle possibili.

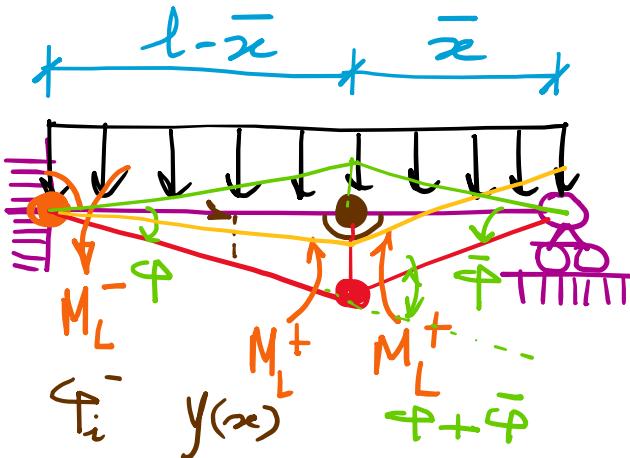
- Esempio (quantità statiche):



$$\frac{M_L}{P^2} \approx \frac{q_0}{8} x^2$$

$$M(x) \approx M_0 x^2$$

- Esempio (quantità cinematiche):



$$\int_{\varphi_0} > 0$$

$$D > 0$$

SOMMARIO (Lec. 26)

- Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite, alla base del Calcolo e Rotta dei telai, volti alla determinazione (diretta) delle caratteristiche di collasso.
- Definizioni: classi staticamente e cinematicamente ammissibili (entro le quali si ricercano le condizioni di collasso).
- Teorema statico: fornisce una delimitazione inferiore del mult. limite: $\lambda^- \leq \lambda_L$.
- Teorema cinematico: " " " superiore " " " : $\lambda_L \leq \lambda^+$.
- Teorema misto: se le delimitazioni bilaterali si stringono a zero, il mult. di collasso risulta individuato $\Rightarrow \lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$.
- Dimostrazione via PLV (indip. da parametri elastici e effetti anelastici progressi).
- Metodi diretti (statico/cinematico/misto): sulla base dei Th. visti, divengono strumenti operativi per il calcolo ("manuale" o "automatico") delle caratteristiche di collasso plastic.

Next step: Esempi (travi e telai), con determinazione o stima delle caratteristiche di collasso ($\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$, momento a collasso, meccanismo plastic).