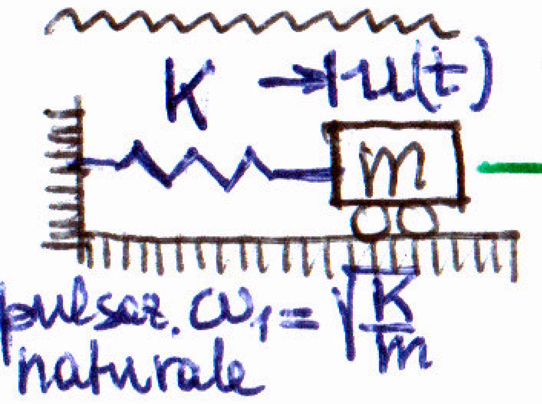
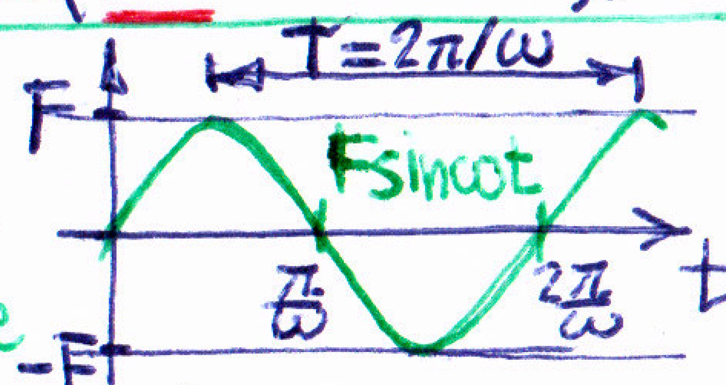
5a Lez. FDIS

Risposta (non smorzata) a forzante armonica $F = F(t) = F f(t)$ con $f(t) = \sin\omega t$ o $f(t) = \cos\omega t$

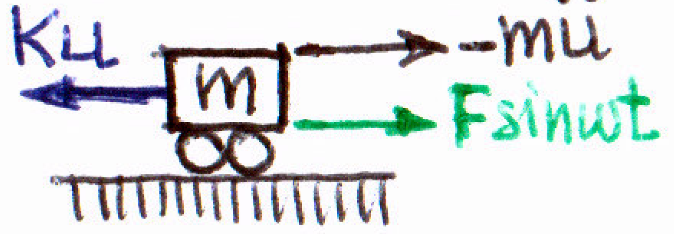


pulsaz. della forzante

pulsaz. naturale $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$



Forzante periodica, di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Eq. del moto:

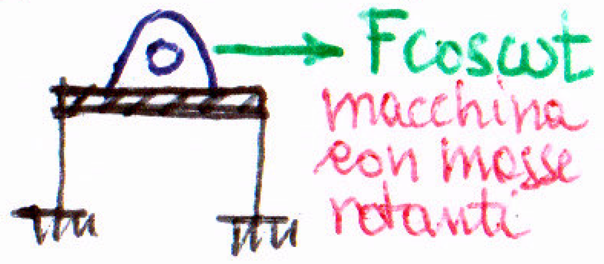
$m\ddot{u} + Ku = F\sin\omega t$

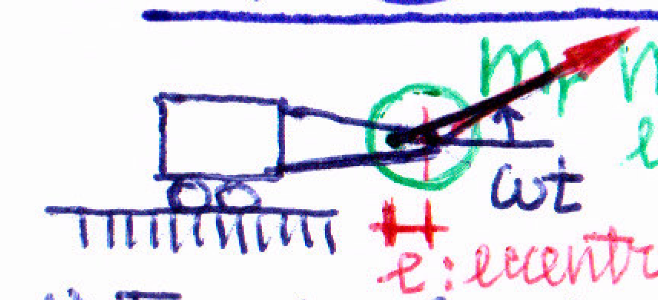
$\ddot{u} + \omega_1^2 u = \frac{F}{K}\frac{K}{m}\sin\omega t = u_{st}\,\omega_1^2 \sin\omega t$

spostamento per F statica $\boxed{u_{st} = \frac{F}{K}}$

Interesse:

- valenza pratica – Es. macchina con masse rotanti $\Leftrightarrow$





$F = m_r e \omega^2$

- forzanti periodiche $\Rightarrow$ sviluppi in serie di Fourier (più componenti armoniche)
- spesso forzanti assai simili
- valenza concettuale $\Rightarrow$ risonanza, fattore di amplificazione dinamica, fase
- soluzione analitica possibile

• Integrale generale: $u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$ $\begin{cases} u_{go}: \text{int. generale dell'omogenea associata } (F=0) \\ u_p: \text{int. particolare dell'eq.ne del moto con } F\neq 0 \end{cases}$

cerco $u_p(t) = U\sin\omega t$

$\dot{u}_p(t) = \omega U\cos\omega t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 U\sin\omega t$

Sostituendo:

$-\omega^2 U\cancel{\sin\omega t} + \omega_1^2 U\cancel{\sin\omega t} = \omega_1^2 u_{st}\cancel{\sin\omega t}\ \forall t$

$(\omega_1^2 - \omega^2)U = \omega_1^2 u_{st} \rightarrow \boxed{U = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega^2}u_{st} = \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}}$ con $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$ (frequency ratio) rapporto di frequenza

• Coefficiente di amplificazione dinamica:

$N = \left|\frac{U}{u_{st}}\right| = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} \rightarrow \begin{cases} U = N u_{st} & \text{per } \beta<1 \\ U = -N u_{st} & \text{per } \beta>1 \end{cases}$

N: amplificazione dinamica degli effetti statici

N.B.: amplificazione illimitata per $\beta \to 1$

$N \to \infty$ (peraltro N mai > 10, altrimenti uscita dal campo elastico)

• Quindi, integrale particolare:

$u_p(t) = U\sin\omega t = \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\sin\omega t = \pm N u_{st}\sin\omega t = N u_{st}\sin(\omega t - \xi)$ $\begin{cases}\xi = 0 \text{ se } \beta<1 \\ \xi = \pi \text{ se } \beta>1\end{cases}$ fase

(+ per $\beta<1$, − per $\beta>1$)

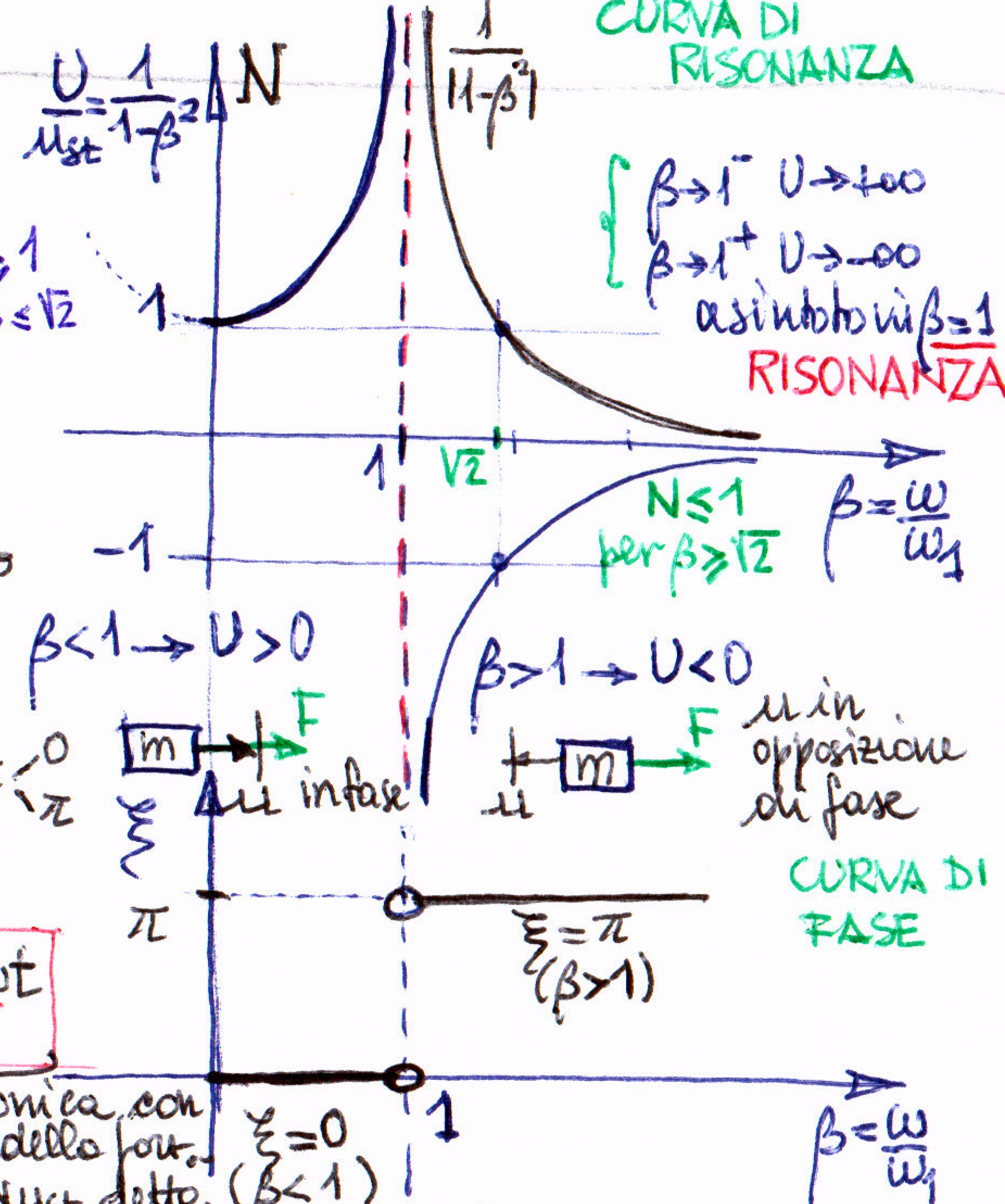
risposta armonica con pulsazione uguale a quella della forzante

Infatti: $\sin(\omega t - \xi) = \sin\omega t\cos\xi - \cos\omega t\sin\xi \rightarrow \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\cancel{\sin\omega t} = N u_{st}(\cos\xi\cancel{\sin\omega t} - \cancel{\sin\xi\cos\omega t})\ \forall t$

$\hookrightarrow N = \pm\frac{1}{1-\beta^2}$

$\sin\xi = 0 \rightarrow \xi = 0 + k\pi$ (0, π)

$\begin{cases}\xi = 0 \rightarrow \cos\xi = 1 \\ \xi = \pi \rightarrow \cos\xi = -1\end{cases}$



• Integrale generale:

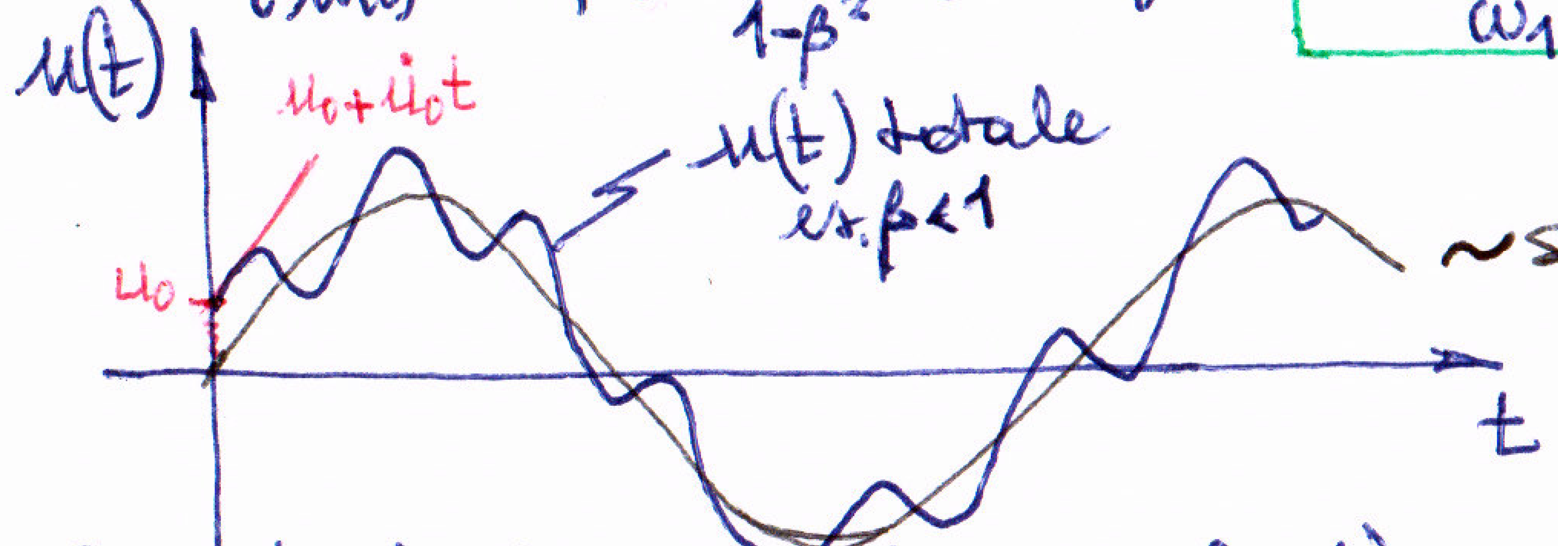
$u(t) = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\sin\omega t$

c.i. $\begin{cases} u(0) = \boxed{B = u_0} \\ \dot{u}(0) = \omega_1 A + \frac{\omega}{1-\beta^2}u_{st} = \dot{u}_0 \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}} \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}\right)\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\sin\omega t}$

comp. di moto armonico con pulsaz. naturale (dipen. da c.i. e F, ω), detta risposta transiente (ove ξ>0)

comp. armonica con pulsazione della forz. e amplif. $N u_{st}$ detta (β<1) risposta a regime (steady state)



Oppure:

$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}(\sin\omega t - \beta\sin\omega_1 t)$

risposta armonica con puls. ω_1 alle sole c.i.

risposta a forz. armonica per c.i. nulle con puls. ω e ω_1 (sovrapp. di 2 moti armonici)

Termine che può creare BATTIMENTI per $\omega \simeq \omega_1$ ($\beta \simeq 1$) da evitare, perché N è elevato.

$\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_1}\sin\omega_1 t \simeq \sin\omega t - \sin\omega_1 t$

$= 2\sin\frac{(\omega-\omega_1)}{2}t\cos\frac{(\omega+\omega_1)}{2}t \simeq$

$\simeq 2\sin\frac{\omega_\xi t}{2}\cos\omega t$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ form. di prostaferesi

$\sin\frac{\omega_\xi t}{2}$ con T_ξ grande (ω_ξ piccola)

• Risposta in risonanza ($\omega = \omega_1$, $\beta = 1$) $\Rightarrow$ $U\sin\omega t$ non più valido, poiché parte di $u_{go}(t)$.

$u_p(t) = Ut\cos\omega_1 t$

$\dot{u}_p(t) = U\cos\omega_1 t - \omega_1 Ut\sin\omega_1 t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega_1 U\sin\omega_1 t - \omega_1 U\sin\omega_1 t - \omega_1^2 Ut\cos\omega_1 t$

Sost.:

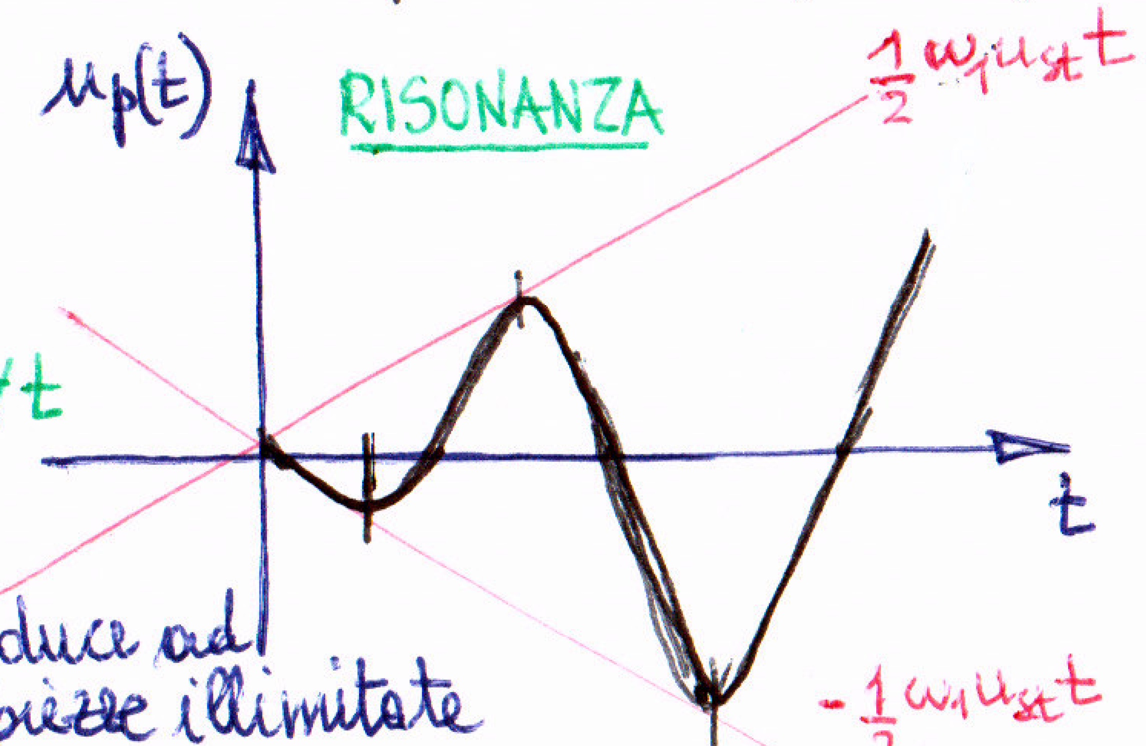
$-2\omega_1\sin\omega_1 t - \cancel{\omega_1^2 t\cos\omega_1 t} + \cancel{\omega_1^2 t\cos\omega_1 t} = \frac{u_{st}}{U}\omega_1^2\sin\omega_1 t\ \forall t$

$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}u_{st}\omega_1$

Quindi $u_p(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}\, t\cos\omega_1 t$

(da sommare a $u_{go}(t)$)

$u_p \to \infty$ per $t \to \infty$ divergente in t

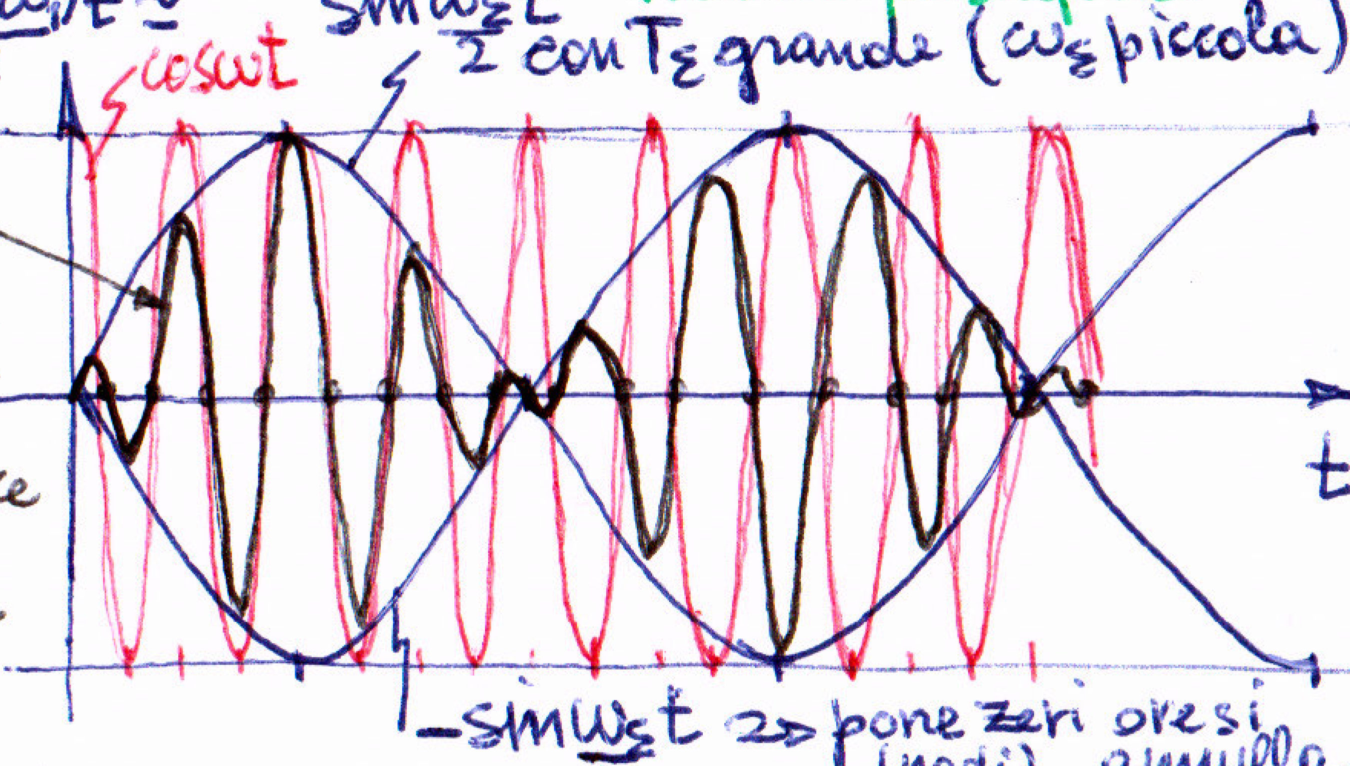


conduce ad ampiezze illimitate

Battimenti:

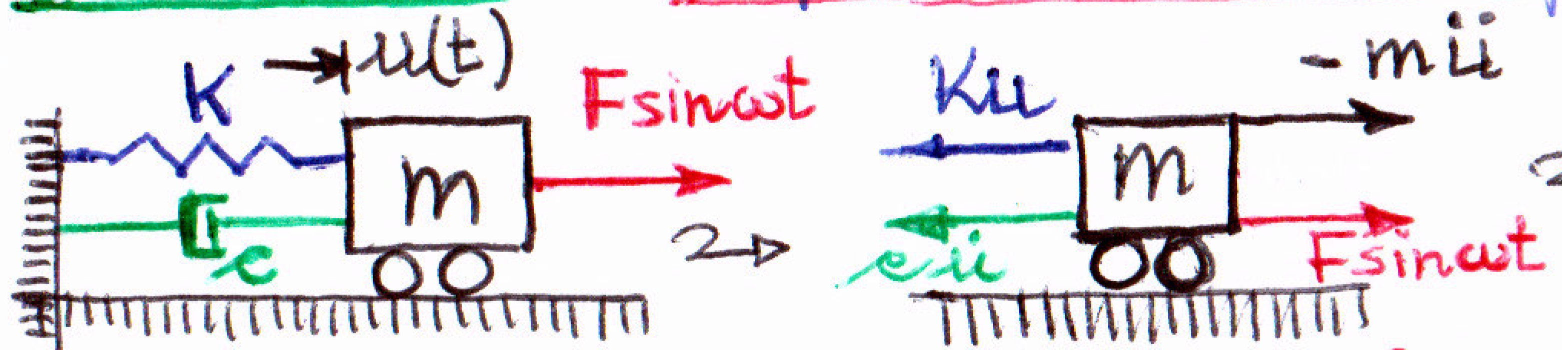
variazioni di ampiezza osservabili in un moto periodico composizione di due moti armonici con pulsazioni poco diverse.

Ad es., nel caso di suoni si percepisce una successione di suoni che si rinforzano e si indeboliscono (da cui il nome battimento).



6a Lez. FDIS – Risposta smorzata a forzante armonica

erizzi@unibg.it



$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = F\sin\omega t$ (pulsazione della forzante armonica) $\Rightarrow_{/m}$ $\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t$ (u_{st} = F/K spost. statico)

Integrale particolare:

- $u_p(t) = N u_{st}\sin(\omega t - \xi)$ (fase; N = fattore di amplificazione dinamica) $\rightarrow \dot{u}_p(t) = \omega N u_{st}\cos(\omega t - \xi)$ $\Rightarrow \ddot{u}_p(t) = -\omega^2 N u_{st}\sin(\omega t - \xi) = -\omega^2 u_p(t)$

Sostituendo $u_p(t)$:

$(1-\beta^2) \Rightarrow \left(\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_1^2}\right) N \cancel{u_{st}} \sin(\omega t - \xi) + 2\zeta\dfrac{\omega_1}{\omega_1}\dfrac{\omega}{\omega_1}\beta N \cancel{u_{st}}\cos(\omega t - \xi) = \dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2}\cancel{u_{st}}\sin\omega t \quad \forall t$ – Sia $\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1} = \dfrac{2\pi f}{2\pi f_1} = \dfrac{f}{f_1}$ frequency ratio

Sviluppando $\sin(\omega t - \xi)$ e $\cos(\omega t - \xi)$:

$(1-\beta^2)(\cos\xi\sin\omega t - \sin\xi\cos\omega t) + 2\zeta\beta(\cos\xi\cos\omega t + \sin\xi\sin\omega t) = \dfrac{1}{N}\sin\omega t \quad \forall t$

$$\begin{cases} (1-\beta^2)\cos\xi + 2\zeta\beta\sin\xi = \dfrac{1}{N} \\ -(1-\beta^2)\sin\xi + 2\zeta\beta\cos\xi = 0 \rightarrow \tan\xi = \dfrac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \rightarrow \boxed{\xi = \operatorname{atan}\dfrac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}} \text{ fase} \end{cases}$$

$\xi = \xi(\zeta, \beta)$

Quindi, dalla prima eq.ne:

$(1-\beta^2)\dfrac{(1-\beta^2)}{\sqrt{D}} + 2\zeta\beta\dfrac{2\zeta\beta}{\sqrt{D}} = \dfrac{1}{N} \rightarrow \dfrac{D}{\sqrt{D}} = \sqrt{D} = \dfrac{1}{N}$

coeff. di amplific. dinamica $\boxed{N = \dfrac{\sqrt{D}}{D} = \dfrac{1}{\sqrt{D}}}$ $N = N(\zeta, \beta)$

N.B. $\beta = 1 \rightarrow D = (2\zeta)^2 \rightarrow N = \dfrac{1}{2\zeta}$ e $N \rightarrow \infty$ solo per $\zeta \rightarrow 0$ (picco limitato per $\zeta > 0$)

Inoltre: $\tan^2\xi = \dfrac{\sin^2\xi}{\cos^2\xi} = \dfrac{1}{\cos^2\xi} - 1$; $\cos^2\xi = \dfrac{1}{1+\tan^2\xi}$

- $\cos\xi = \sqrt{\cos^2\xi} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\xi}} = \dfrac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \boxed{\dfrac{1-\beta^2}{\sqrt{D}} = \cos\xi}$

- $\sin\xi = \tan\xi\cos\xi = \boxed{\dfrac{2\zeta\beta}{\sqrt{D}} = \sin\xi}$

con $\boxed{D = (1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$

- Analisi dei punti di stazionarietà di $N(\beta) \Rightarrow$ picchi di N a ζ fissato:

$N'(\beta) = \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{D}}D'}{D} = -\dfrac{1}{2D\sqrt{D}}\left(-2(1-\beta^2)2\beta + 2(2\zeta\beta)2\zeta\right) = 0 \Rightarrow 2\beta(-1+\beta^2+2\zeta^2) = 0 <$ $\beta = 0$ (indip. da ζ); $\beta^2 = 1-2\zeta^2 \rightarrow \boxed{\beta = \bar{\beta} = \sqrt{1-2\zeta^2}} \simeq 1$ per $\zeta \ll 1$ (poco <1 per $\zeta \ll 1$)

p.to di staz. per $1-2\zeta^2 \geq 0$; $\zeta^2 \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\zeta \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

- Valori di picco: ($1-\bar{\beta}^2 = 2\zeta^2$)

$\bar{N}(\zeta) = N(\zeta, \bar{\beta}) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\zeta^2)^2 + (2\zeta)^2(1-2\zeta^2)}} = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{\zeta^2+1-2\zeta^2}} = \boxed{\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \bar{N}(\zeta)}$

- Per $\zeta \ll 1$, $\bar{N} \sim$ invers. prop. a ζ

$\bar{N}(\zeta) \simeq \dfrac{1}{2\zeta} = \dfrac{1/\zeta}{2} \Rightarrow$

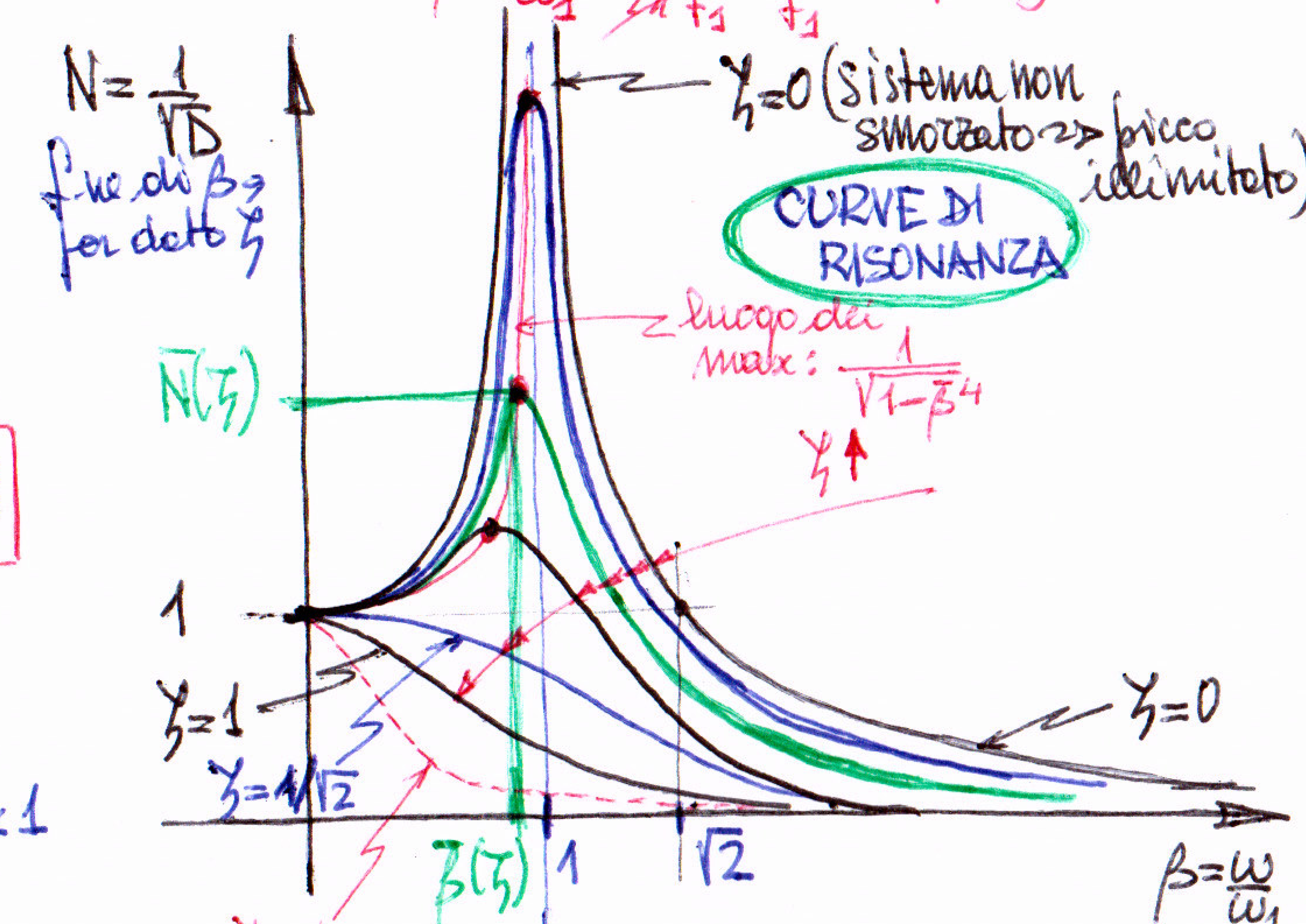
ζ	0	1%	2%	5%
$\bar{N}$	∞	50	25	10

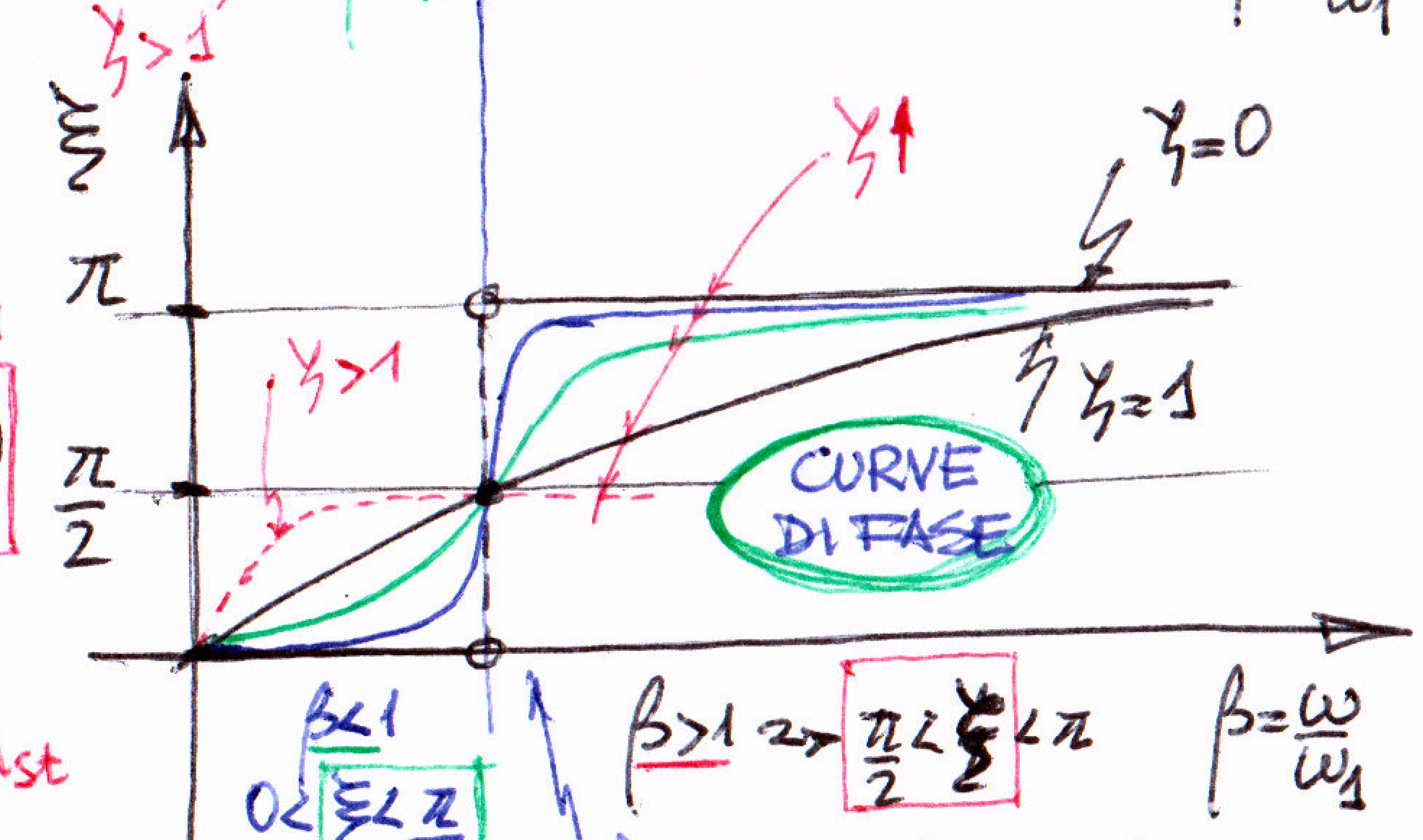
valore tipico del picco di risonanza

Curva interpolante i max:

$\bar{\beta}^2 = 1-2\zeta^2 \Rightarrow 2\zeta^2 = 1-\bar{\beta}^2$; $\zeta = \sqrt{\dfrac{1-\bar{\beta}^2}{2}}$

$\bar{N} = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1-\bar{\beta}^2}{2}}\sqrt{1-\frac{1-\bar{\beta}^2}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+\bar{\beta}^2)(1-\bar{\beta}^2)}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-\bar{\beta}^4}} = \bar{N}(\bar{\beta})}$ luogo dei max





funzione $\xi(\zeta,\beta)$ continua per $\zeta > 0$ (discontinuità salto per $\zeta = 0$)

- Rappresentazione alternativa di $u_p(t)$:

$u_p(t) = N u_{st}\sin(\omega t - \xi) = N u_{st}(\cos\xi\sin\omega t - \sin\xi\cos\omega t)$
$= Z_1\sin\omega t - Z_2\cos\omega t$ ove $\begin{cases} Z_1 = N u_{st}\cos\xi = \dfrac{1}{\sqrt{D}}\dfrac{1-\beta^2}{\sqrt{D}}u_{st} = \boxed{\dfrac{1-\beta^2}{D}u_{st} = Z_1} \\ Z_2 = N u_{st}\sin\xi = \dfrac{1}{\sqrt{D}}\dfrac{2\zeta\beta}{\sqrt{D}}u_{st} = \boxed{\dfrac{2\zeta\beta}{D}u_{st} = Z_2} \end{cases}$ e $\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = N u_{st}$

- **Integrale generale**: $\zeta < 1$ ($\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$ pulsaz. sist. smorz.)

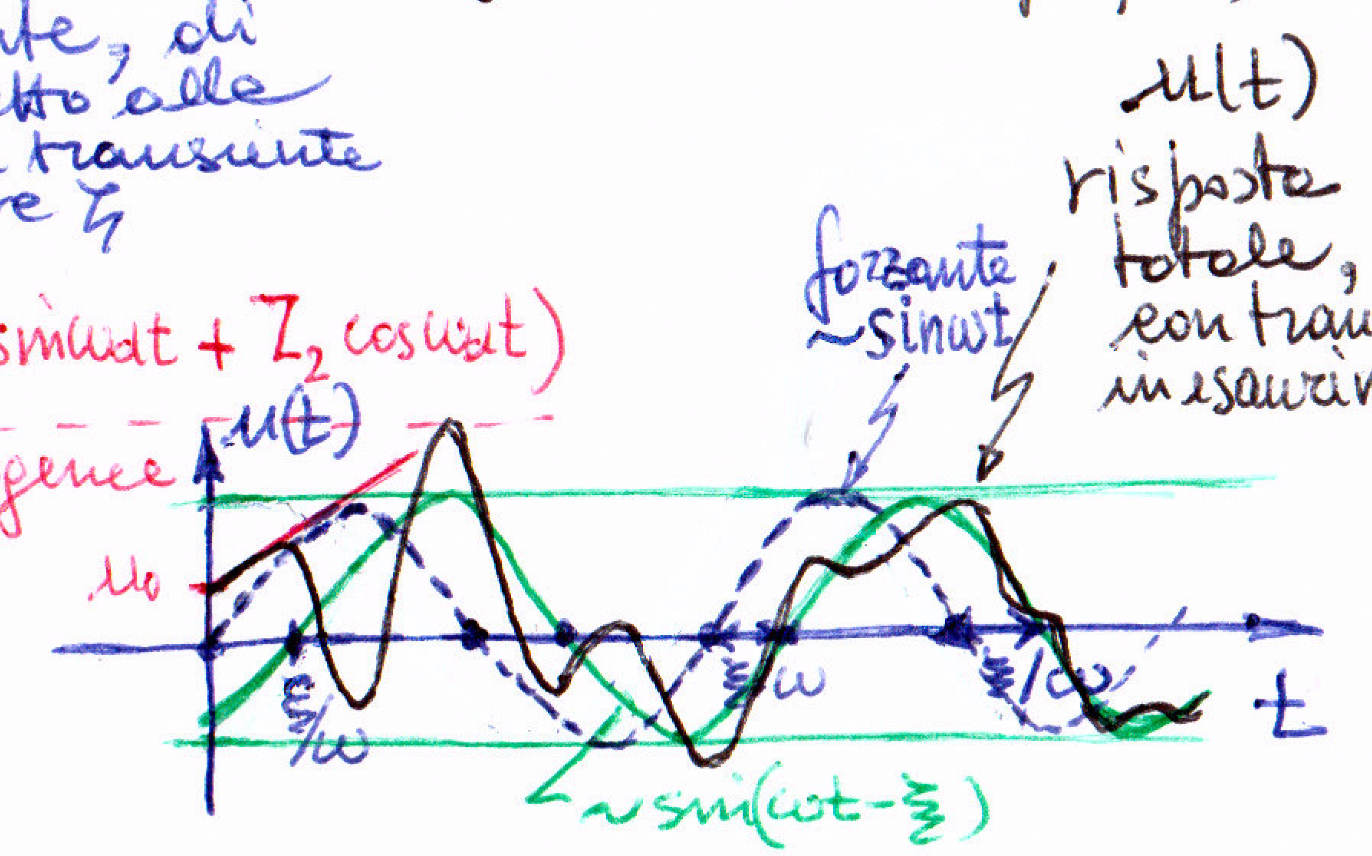
$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)}_{\text{risposta transiente (decade per } \zeta>0)} + \underbrace{Z_1\sin\omega t - Z_2\cos\omega t}_{\text{risposta a regime (steady state)}} = N u_{st}\sin(\omega t - \xi)$ ← oscillazione forzata predominante, di pulsazione ω e sfasamento ξ rispetto alla forzante, una volta esaurito il transiente legato al fattore ζ

$= \underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\dfrac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right)}_{\text{risposta alle sole c.i.}} + \underbrace{Z_1\sin\omega t - Z_2\cos\omega t + e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\dfrac{\zeta Z_2 - \beta Z_1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t + Z_2\cos\omega_d t\right)}_{\text{risposta alla forzante per c.i. omogenee}}$

- Imposizione delle c.i.:

$$\begin{cases} u_0 = B - Z_2 \rightarrow B = u_0 + Z_2 = \boxed{u_0 + \dfrac{2\zeta\beta}{D}u_{st} = B} \\ \dot{u}_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A + \omega Z_1 \Rightarrow A = \dfrac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} + \dfrac{\zeta\omega_1 Z_2 - \omega Z_1}{\omega_d} \end{cases}$$

$= \dfrac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} + \dfrac{\zeta\omega_1 2\zeta\beta - \omega(1-\beta^2)}{\omega_d}\dfrac{u_{st}}{D} = \boxed{\dfrac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} + \dfrac{2\zeta^2 - (1-\beta^2)}{\omega_d}\dfrac{u_{st}\,\omega}{D} = A}$ ($\omega_1\beta = \omega$)



7a Lez. FDIS – Trattazione con variabili complesse (risposta smorzata a $F(t)=Fe^{i\omega t}$)

- Trattazione agevole
- Consente di trattare simult. $F\sin\omega t$ e $F\cos\omega t$
- Utile rappresentazione grafica nel piano di Argand, per mezzo di vettori rotanti

Risp.: $u(t)$, $v(t)$ → $z(t)=\underset{Re[z]}{v(t)}+i\,\underset{Im[z]}{u(t)}$

$$i\cdot\;\ddot u+2\zeta\omega_1\dot u+\omega_1^2u=\omega_1^2u_{st}\sin\omega t$$
$$+\;\ddot v+2\zeta\omega_1\dot v+\omega_1^2v=\omega_1^2u_{st}\cos\omega t$$
$$\rightarrow\ \ddot z+2\zeta\omega_1\dot z+\omega_1^2z=\omega_1^2u_{st}e^{i\omega t}\quad(*)$$
nella variab. complessa $z(t)$

- Integrale particolare:

$$z_p(t)=Ze^{i\omega t}=Z^*e^{i(\omega t-\xi)}\Rightarrow\dot z_p(t)=i\omega Ze^{i\omega t}\overset{i=e^{i\pi/2}}{=}\omega Ze^{i(\omega t+\frac{\pi}{2})}\Rightarrow\ddot z_p(t)=-\omega^2Ze^{i\omega t}=-\omega^2z_p(t)$$

ampiezza compless. (Z); ampiezza reale (Z^*); in quadratura, in anticipo di $\frac{\pi}{2}$; in opposizione di fase

Sostituendo nella (*):
$$(\omega_1^2-\omega^2+i2\zeta\omega_1\omega)Z\cancel{e^{i\omega t}}=\omega_1^2u_{st}\cancel{e^{i\omega t}}\quad\forall t$$
dividendo per ω_1^2 e ponendo $\beta=\frac{\omega}{\omega_1}$:
$$(1-\beta^2+i2\zeta\beta)Z=u_{st}\Rightarrow\boxed{Z=\frac{u_{st}}{1-\beta^2+i2\zeta\beta}}$$

- Si ottiene, per l'ampiezza complessa Z:

$$Z=\frac{1-\beta^2-i2\zeta\beta}{\underbrace{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}_{D}}u_{st}=\underbrace{\frac{1-\beta^2}{D}u_{st}}_{Z_1/u_{st}}-i\underbrace{\frac{2\zeta\beta}{D}u_{st}}_{Z_2/u_{st}}=Z_1-iZ_2$$
con Z_1, Z_2 come det. in precedenza

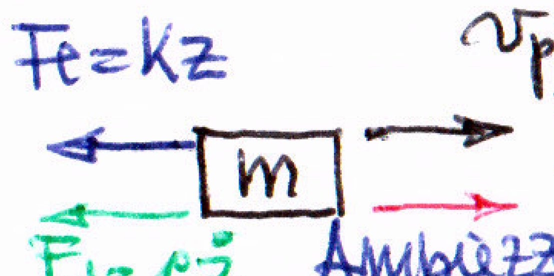
Poichè:
$$Z=Z^*e^{-i\xi}=\underbrace{Z^*\cos\xi}_{Z_1}-i\underbrace{Z^*\sin\xi}_{Z_2}\Rightarrow\begin{cases}Z_1=Z^*\cos\xi\\Z_2=Z^*\sin\xi\end{cases}\Rightarrow\frac{Z_2}{Z_1}=\tan\xi\Rightarrow\xi=\operatorname{atan}\frac{Z_2}{Z_1}=\operatorname{atan}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\ \text{OK}$$
$$Z^*=Ze^{i\xi}\Rightarrow\boxed{Z^*=|Z|=\frac{1}{\sqrt D}u_{st}=Nu_{st}}\Leftarrow Z_1^2+Z_2^2=Z^{*2}=\frac{D}{D^2}u_{st}^2=\frac{u_{st}^2}{D}$$
come atteso dalla trattazione precedente

- Quindi:

$$z_p(t)=Ze^{i\omega t}=(Z_1-iZ_2)e^{i\omega t}=Z_1e^{i\omega t}+Z_2e^{i(\omega t-\frac{\pi}{2})}$$
in fase con $Fe^{i\omega t}$; in quadratura in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ risp. a $Fe^{i\omega t}$

Si sono riottenute in forma compatta tutte le relazioni derivate in precedenza per $F\sin\omega t$ (+ anche la risposta per $F\cos\omega t$)

$$=\underbrace{Z_1\cos\omega t+Z_2\sin\omega t}_{v_p(t)\text{ risp. a }F\cos\omega t}+i\underbrace{(Z_1\sin\omega t-Z_2\cos\omega t)}_{u_p(t)\text{ risp. a }F\sin\omega t}$$



Ampiezza delle forze

$|F_e|=kN\frac{F}{k}=NF$

$|F_d|=c\omega N\frac{F}{k}=\zeta2\sqrt{k\cdot m}\,\omega N\frac{F}{k}=2\zeta\beta NF$

$|F_i|=m\omega^2N\frac{F}{k}=\beta^2NF$

Per $\beta=1$ (potenz. risonanza): $\xi=\frac{\pi}{2}$; $N=\frac{1}{2\zeta}$

$|F_e|=|F_i|=NF=\frac{1}{2\zeta}F$; $|F|=|F_d|=F$

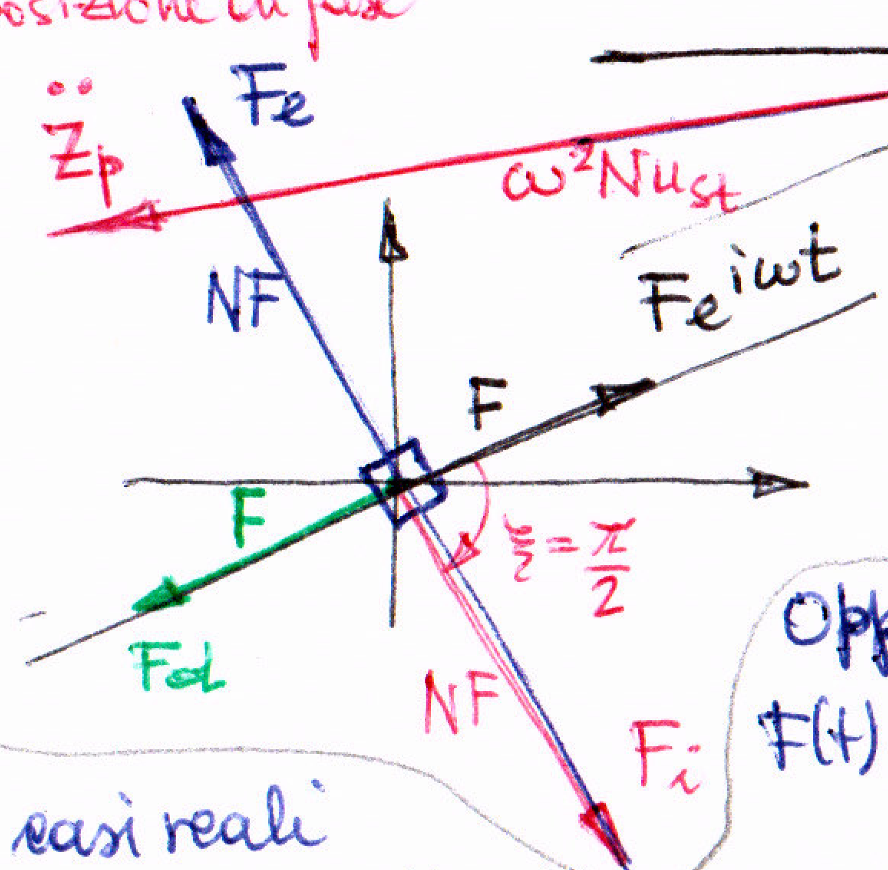
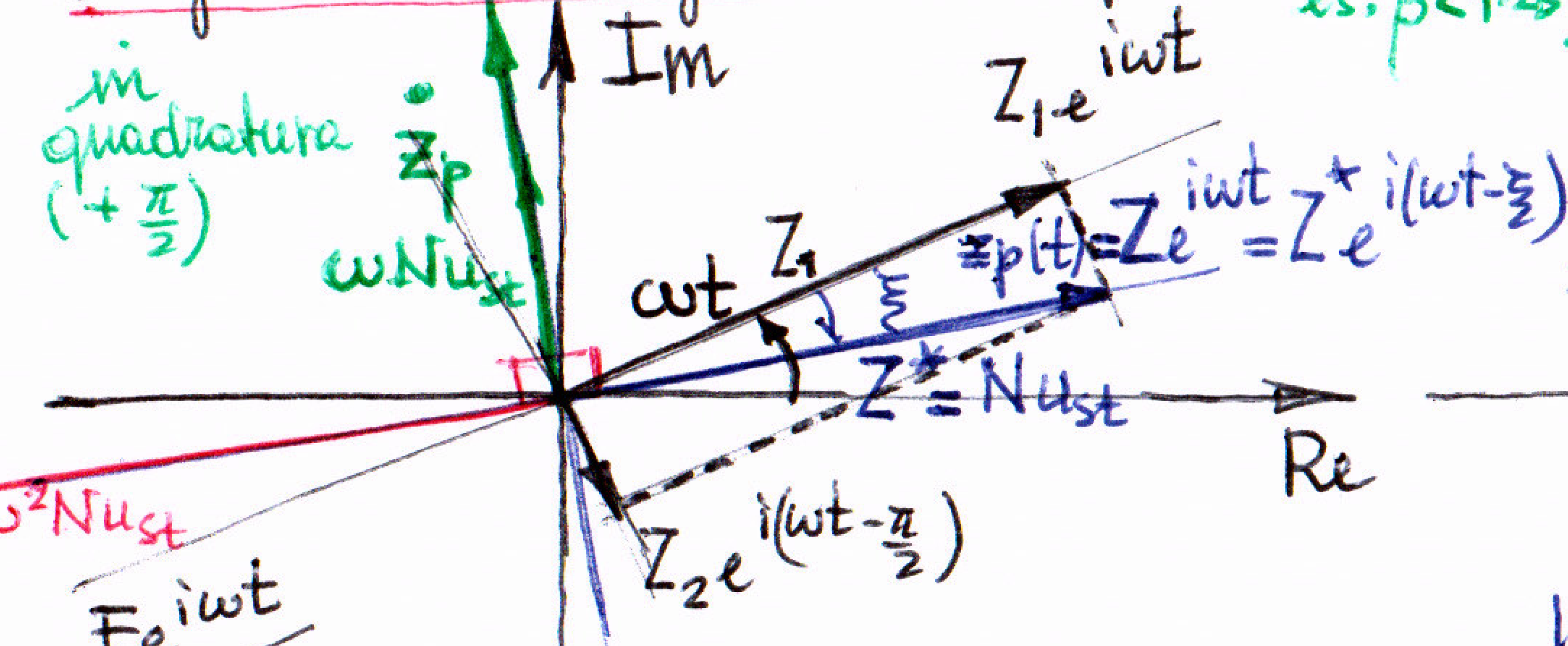
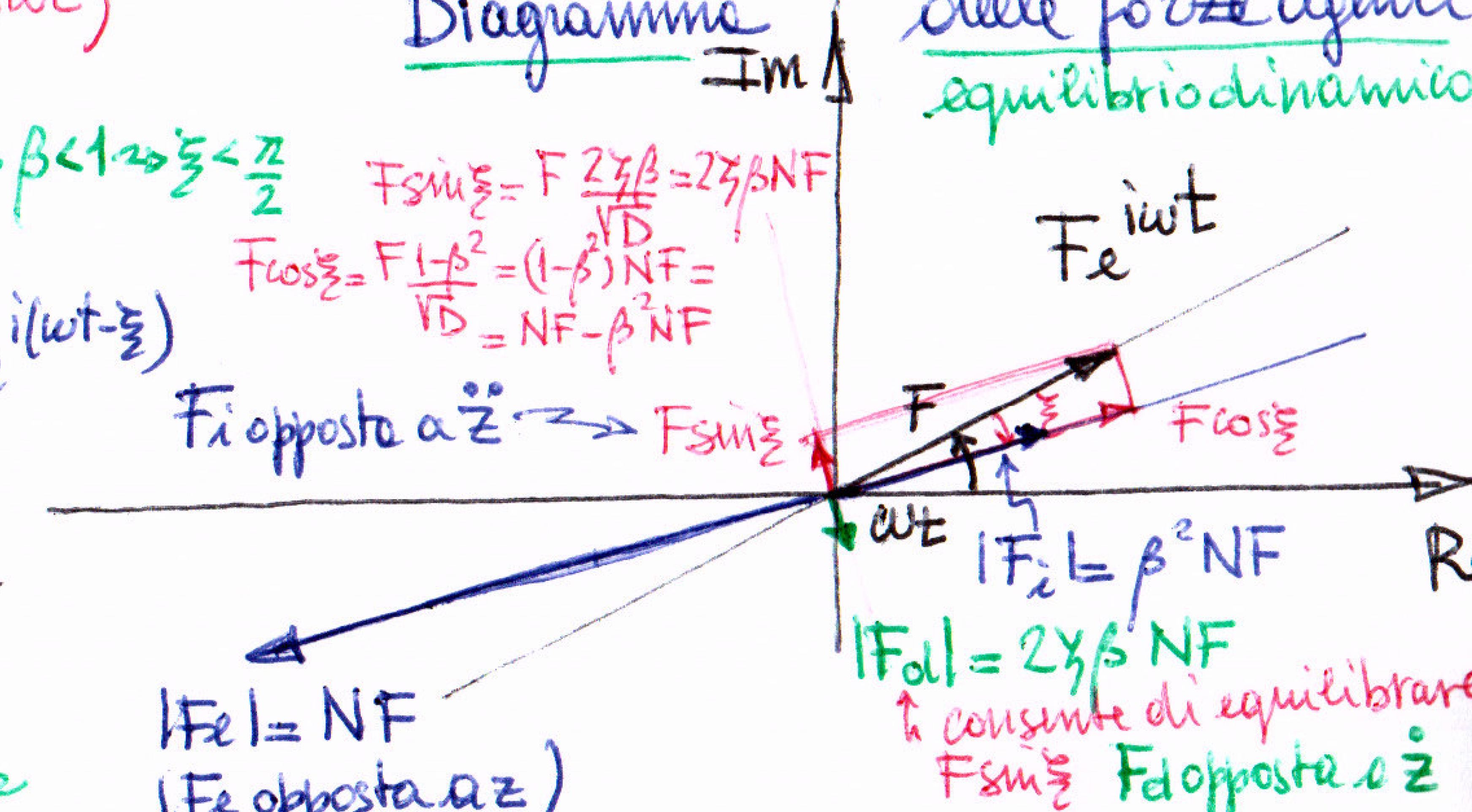


Diagramma di Argand della risposta

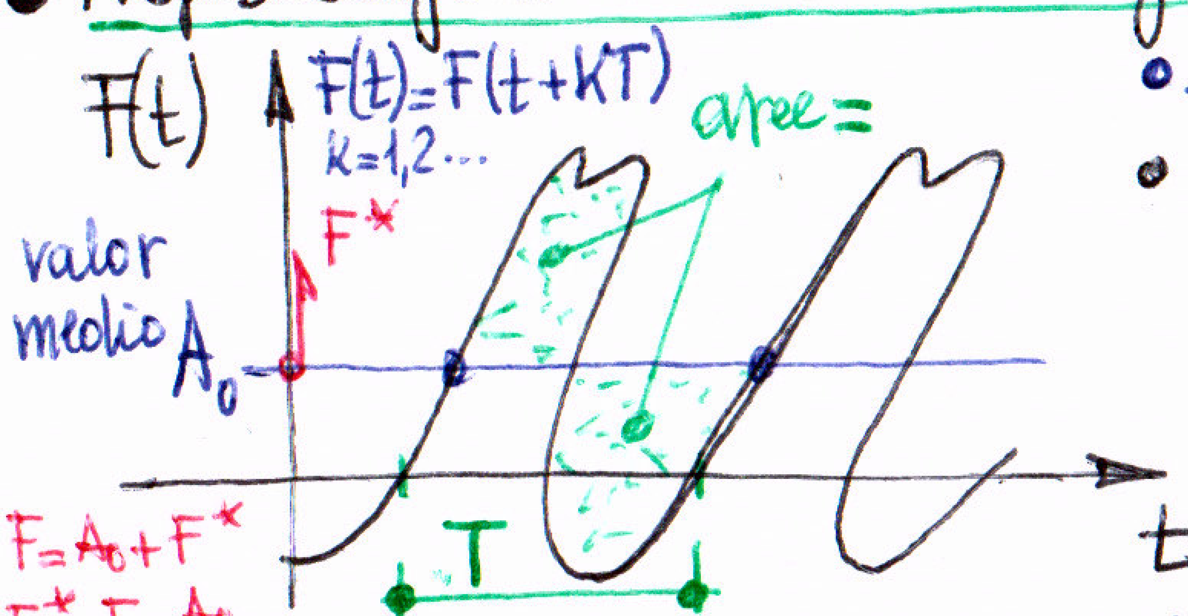


F_d è l'unica in grado di equilibrare $Fe^{i\omega t}$ per $\zeta\neq0$

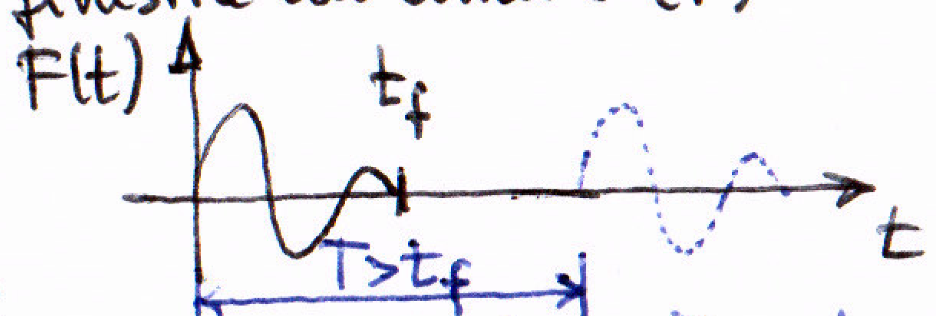
Diagramma delle forze agenti (equilibrio dinamico)



- Risposta a forzante PERIODICA generica



- presente in casi reali
- forzante resa periodica oltre la finestra di analisi (T)



- utile a rappresentare il contenuto in frequenza di F(t)

Sviluppo in serie di FOURIER

$$F(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt\quad\text{con }\omega_n=n\omega,\ \omega=\frac{2\pi}{T}\text{ pulsaz. fondam.}$$

$$\cdot A_0=\frac{1}{T}\int_{\bar t}^{\bar t+T}F(t)dt=\frac{A_0T+0}{T},\qquad \uparrow A_0+F^*$$

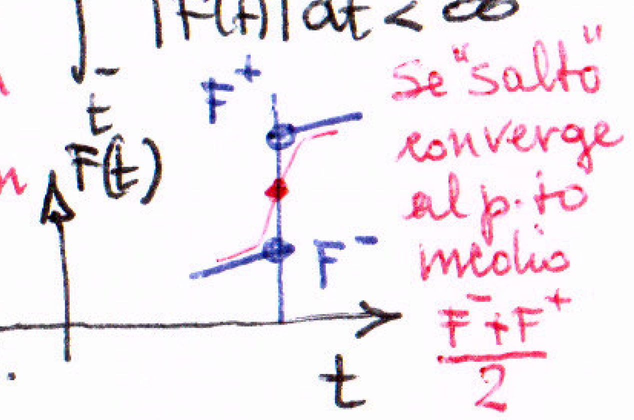
$$\cdot A_n=\frac{2}{T}\int_{\bar t}^{\bar t+T}F(t)\cos\omega_nt\qquad\cdot B_n=\frac{2}{T}\int_{\bar t}^{\bar t+T}F(t)\sin\omega_nt$$

Infatti
$$\int_{\bar t}^{\bar t+T}\sin n\omega t\sin m\omega t\,dt=\int\cos n\omega t\cos m\omega t\,dt=\begin{cases}\frac{T}{2}&n=m\\0&n\neq m\end{cases}$$
$$\int\sin n\omega t\cos m\omega t\,dt=0$$

In genere serie troncata ⇒ ≃ F(t) approx.

Oppure, altra rappresent.:
$$F(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cos(\omega_nt-\varphi_n)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\sin(\omega_nt+\psi_n)$$
con $F_0=A_0$, $F_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n=\frac{1}{\operatorname{tg}\psi_n}=\frac{B_n}{A_n}$

La serie converge a F(t) se F(t) è f.ne generalmente continua (continua salvo in un n° limitato di p.ti in un intervallo finito) e tale che $\int_{\bar t}^{\bar t+T}|F(t)|dt<\infty$

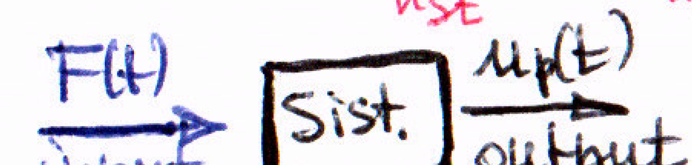


Risposta tramite Principio di Sovrapposizione degli Effetti (valido per la linearità)

$$u_p(t)=\frac{A_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{k}\left(\frac{Z_{1n}}{u_{st}}\cos\omega_nt+\frac{Z_{2n}}{u_{st}}\sin\omega_nt\right)+\frac{B_n}{k}\left(\frac{Z_{1n}}{u_{st}}\sin\omega_nt-\frac{Z_{2n}}{u_{st}}\cos\omega_nt\right)$$
$$=\frac{A_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n'}{k}\cos\omega_nt+\frac{B_n'}{k}\sin\omega_nt\ \Leftarrow\text{sovrapposizione di } \infty \text{ risposte armoniche}$$

$\beta_n=\frac{\omega_n}{\omega_1}=n\frac{\omega}{\omega_1}=n\beta$; $\frac{Z_{1n}}{u_{st}}=\frac{1-\beta_n^2}{D_n}$, $\frac{Z_{2n}}{u_{st}}=\frac{2\zeta\beta_n}{D_n}$; $D_n=(1-\beta_n^2)^2+(2\zeta\beta_n)^2$

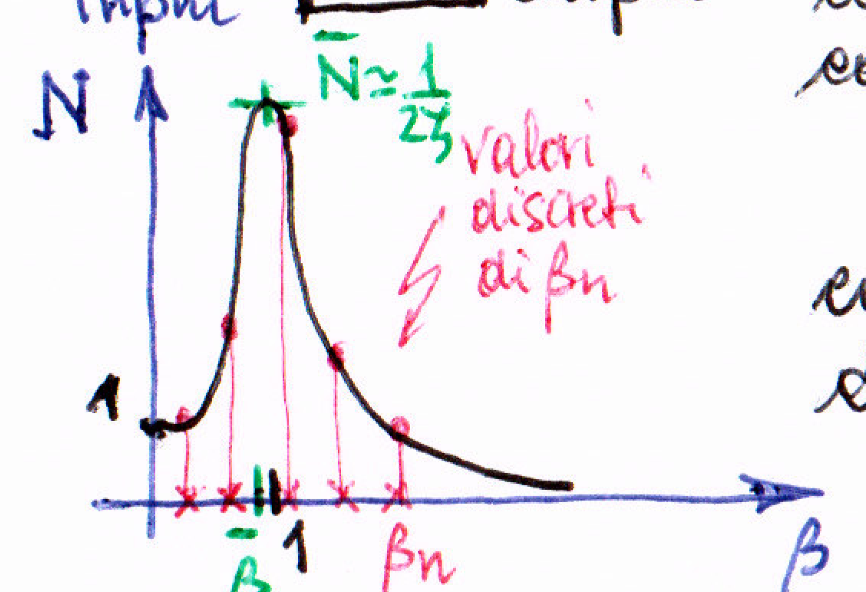
con $A_n'=A_n\frac{Z_{1n}}{u_{st}}-B_n\frac{Z_{2n}}{u_{st}}$; $B_n'=A_n\frac{Z_{2n}}{u_{st}}+B_n\frac{Z_{1n}}{u_{st}}$



Il sistema tende a filtrare le componenti armoniche della forzante coi $\beta_n\simeq\bar\beta=\sqrt{1-2\zeta^2}$

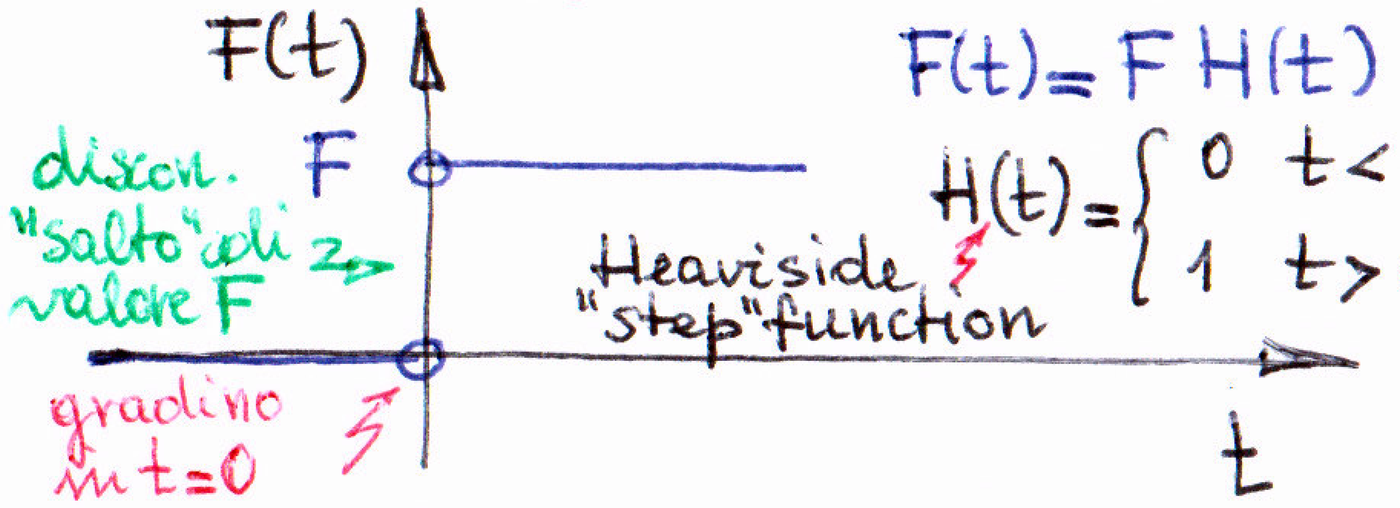
$n\frac{\omega}{\omega_1}\simeq\bar\beta\Rightarrow n\simeq\frac{\omega_1}{\omega}\bar\beta$

cioè quelle che esaltano la condizione di risonanza



erizzi@unibg.it

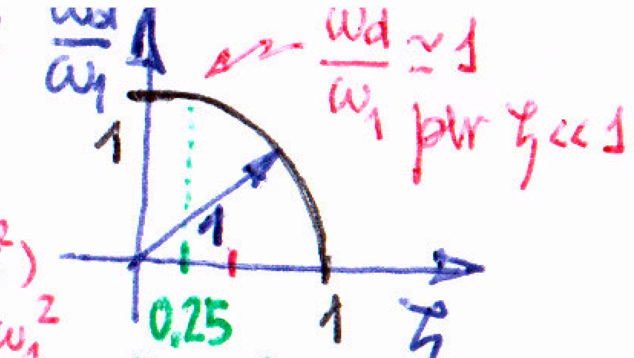
8a Lez. FDIS – Risposta a forzante a gradino e a forzante impulsiva



$F(t) = F\,H(t)$ $\quad H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$

- Risposta (integrale particolare): $u_p(t) = \dfrac{F}{K} = \text{cost.}$ (spostam. che si produce staticam.) $= u_{st}$
- Risposta (integrale generale): $u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}\left(A \sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right)}_{\text{risposta transiente}} + \underbrace{\dfrac{F}{K}}_{\text{risposta a regime (costante)}}$

ω_d pulsazione del sistema smorzato: $\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$ $\Rightarrow \dfrac{\omega_d^2}{\omega_1^2} + \zeta^2 = 1$; $\omega_d^2 = \omega_1^2(1-\zeta^2) = \omega_1^2 - \zeta^2\omega_1^2$ $\Rightarrow \zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2 = \omega_1^2$



- Imposizione delle c.i.:

$$\begin{cases} u_0 = B + \dfrac{F}{K} \Rightarrow \boxed{B = u_0 - \dfrac{F}{K}} \\ \dot u_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \Rightarrow A = \dfrac{\zeta\omega_1 B + \dot u_0}{\omega_d} = \boxed{\dfrac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\dfrac{\omega_1}{\omega_d}\dfrac{F}{K} = A} \end{cases}$$

$\dfrac{\omega_1}{\omega_d} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

erizzi@unibg.it

N.B.: A e B dipendono sia da c.i. non omogenee $u_0, \dot u_0$ sia da F ($u_{st} = \frac{F}{K}$).

- Sostituendo A e B si ottiene:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\left(\frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\frac{F}{K}\right)\sin\omega_d t + \left(u_0 - \frac{F}{K}\right)\cos\omega_d t\right) + \frac{F}{K}$$

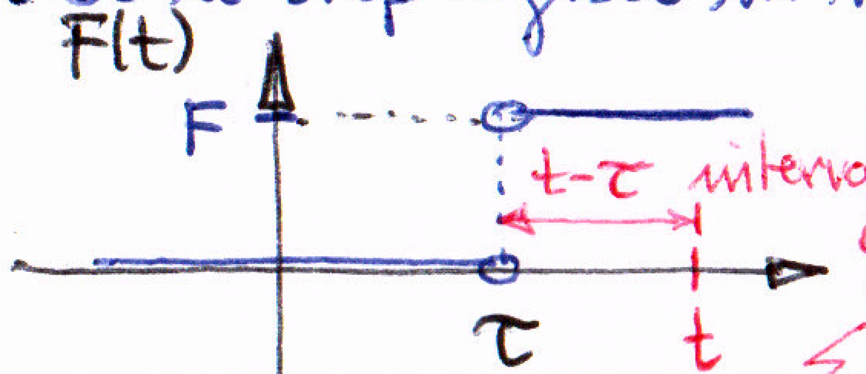
$$= \underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right)}_{(*)\ \text{risposta alle sole c.i. non nulle}} + \underbrace{\frac{F}{K}\left(1 - \left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)e^{-\zeta\omega_1 t}\right)}_{\text{risposta a } F(t) \text{ per c.i. nulle } \begin{cases} u_0 = 0 \\ \dot u_0 = 0\end{cases}}$$

$$u_0(t) = \overbrace{\frac{1}{K}\left(1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right)}^{KA(t)}\cdot F \stackrel{!}{=} A(t)\cdot F$$

valendo: $= KA(t)\cdot u_{st}$

$A(t)$: funzione risposta a gradino unitario (risposta ad $H(t)$)

- Se lo step agisce in istante τ generico (prima $\tau = 0$):

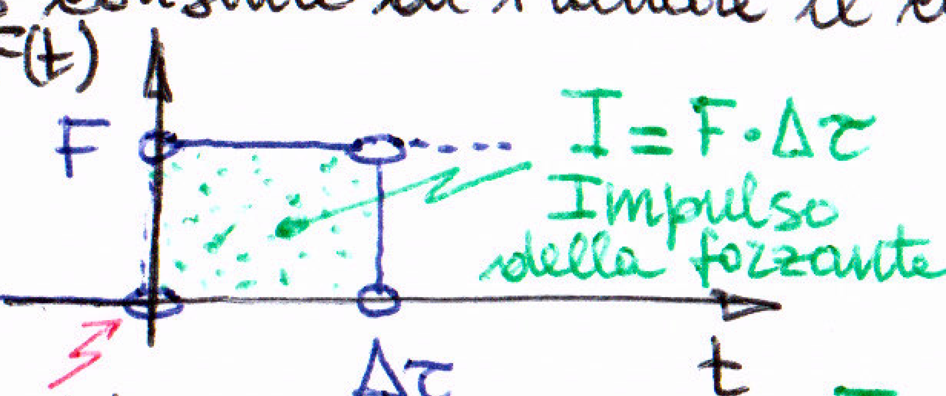


$F(t,\tau) = F\,H(t,\tau) = F\,H(t-\tau)$

$\Rightarrow u_0(t) = A(t-\tau)\,F$

Principio di Sovrapponibilità degli effetti

- Ciò consente di trattare il caso di forzante impulsiva: $F(t) = F$ per $0 < t < \Delta\tau$ (0 altrove)

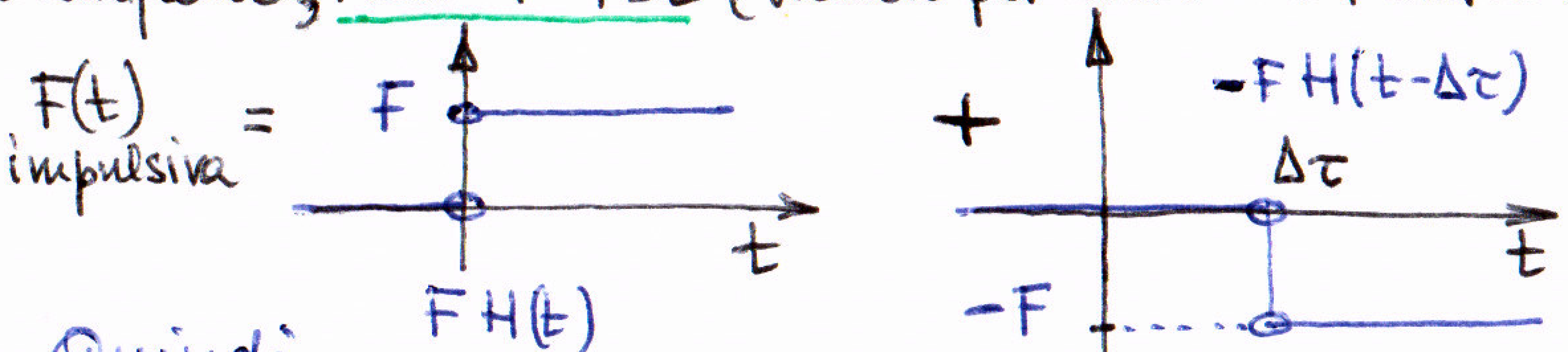


$\Delta\tau$: intervallo finito piccolo

I: impulso finito $[I] = [F]\cdot[t]$

Es. – impatti, colpi, esplosioni
– rappr. di forzante generica per PSE

- Infatti, tramite PSE (valido per linearità + sistemi tempo invarianti):



$$\Rightarrow u_0(t) = F\,A(t) - F\,A(t-\Delta\tau) = \overbrace{F\,\Delta\tau}^{I}\ \underbrace{\frac{A(t) - A(t-\Delta\tau)}{\Delta\tau}}_{\text{rapporto incrementale}} = I\,\frac{\Delta A(t)}{\Delta\tau}$$

Con passaggio al limite, per $\Delta\tau \to 0$ (durata evanescente), conduce al concetto di derivata

Per $\Delta\tau \to 0$: $u_0(t) = \lim\limits_{\Delta\tau\to 0} u_0(t) = I\cdot\dot A(t) = I\cdot h(t)$ con $h(t) = \dot A(t)$ funzione risposta ad impulso unitario (in $\tau = 0$)

- Quindi: $\boxed{u_0(t) = I\,h(t)}$ con

$$h(t) = \dot A(t) = \frac{1}{K}\left(\zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cancel{\cos\omega_d t}\right) - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\omega_1\cancel{\cos\omega_d t} - \omega_d\sin\omega_d t\right)\right) = \frac{1}{K}\frac{m}{m}\left(\frac{\zeta^2\omega_1^2}{\omega_d} + \frac{\omega_d^2}{\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

$\dfrac{\zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2}{\omega_d} = \dfrac{\omega_1^2}{\omega_d}$; $\quad \dfrac{m}{K} = 1/\omega_1^2$

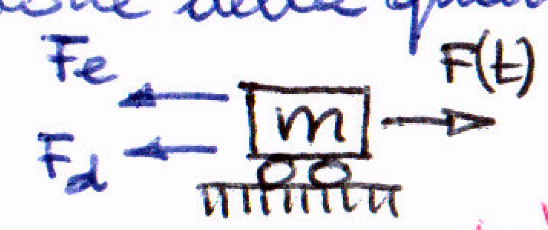
$$= \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\omega_1^2}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t = \boxed{\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t = h(t)}$$

funz.ne risposta ad impulso unitario (automaticamente associata a c.i. omogenee)

- Interpretazione fisica dell'impulso (th. dell'impulso)

$ma = m\dfrac{dv}{dt} = F_{(tot)} \Rightarrow m\,dv = F\,dt \Rightarrow d(mv) = dI \Rightarrow dq = dI$: la variazione della quantità di moto $q = mv$ eguaglia l'impulso $F\,dt$

Integrando su $\Delta\tau$: $\Delta q = \int_0^{\Delta\tau} dq = m\dot u(\Delta\tau) - m\,\cancel{\dot u(0)} = \int_0^{\Delta\tau}\underbrace{(F - F_e - F_d)}_{F_{tot}}\,dt$



Per $\Delta\tau \to 0$ $\quad m\dot u_0^+ = I - \int_0^{\Delta\tau\to 0}\cancel{(F_e + F_d)}\,dt$ integrale su intervallo evanescente di funzione limitata in tale intervallo

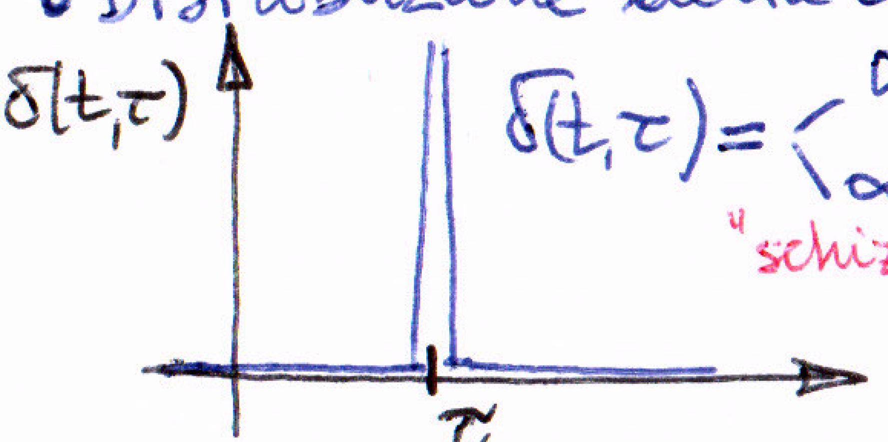
$\Rightarrow m\dot u_0^+ = I$; $\boxed{\dot u_0^+ = \dfrac{I}{m}}$ può essere un modo per misurare I (da $\dot u_0^+$)

è come se il sistema, in quiete, rispondesse a c.i. $\dot u_0^+ = I/m$ in termini di velocità (per effetto di I)

Infatti, dalla (*), per $u_0 = 0$, $\dot u_0 = \dot u_0^+ = I/m$:

$u_0(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\dfrac{I}{m\omega_d}\sin\omega_d t = I\cdot\dfrac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t = I\cdot h(t)$ cvd

- Distribuzione delta di Dirac: utile a rappresentare forzante impulsiva (in τ)

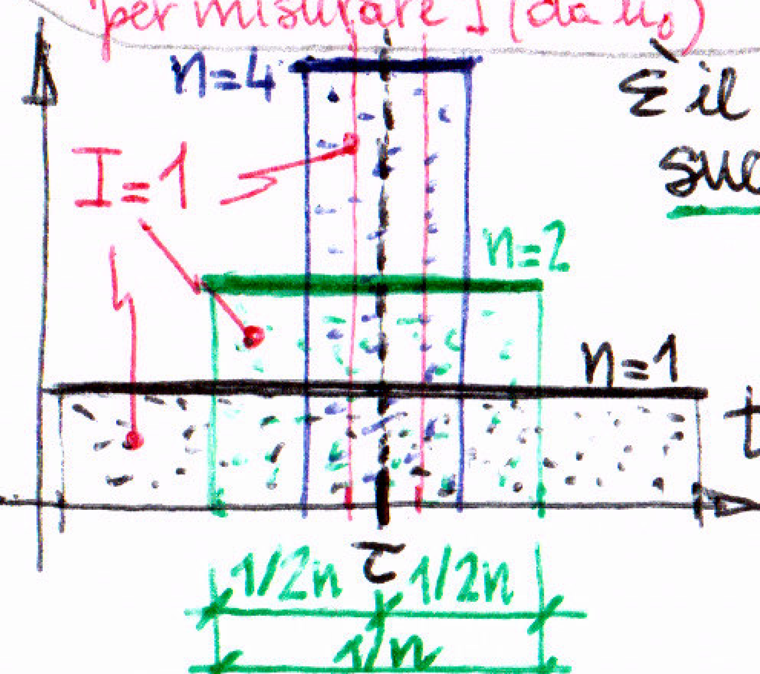


$\delta(t,\tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \infty & t = \tau \end{cases}$ "schizza" all'∞ in τ

Forzante impulsiva: $F(t,\tau) = I\cdot\delta(t,\tau)$ impulso unitario

Risposta (per c.i. nulle): $u_0(t,\tau) = I\cdot h(t,\tau)$

Interpretazione di $h(t)$: risposta a forz. δ di Dirac



$\delta_n(t,\tau)$ è il limite per $n \to \infty$ della successione

$$\delta_n(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t-\tau| > \frac{1}{2n} \\ n & \text{se } |t-\tau| < \frac{1}{2n} \end{cases}$$

Area sottesa costante unitaria: $\frac{1}{n}\cdot n = 1$

Proprietà di $\delta(t,\tau)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t,\tau)\,dt = 1$ area sottesa unitaria
- $\int_{-\infty}^{+\infty}F(\tau)\,\delta(t,\tau)\,d\tau = F(t)$

Una forzante generica può essere vista come sovrapposizione di così impulsi $F(\tau)\,d\tau = dI$ con assoc. $\delta(t,\tau)$

see next