Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Componenti Volumetrica e Deviatorica

$\vartheta = I_1^{\varepsilon}$ deformazione volumetrica — **deviatori**

Deformazione: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_V + \boldsymbol{\varepsilon}_D = \frac{\overbrace{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}}^{\vartheta}}{3}\mathbb{I} + \mathbf{e} = \frac{\vartheta}{3}\mathbb{I} + \mathbf{e} \Rightarrow \boxed{\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{3}\mathbb{I}}$ di deformaz.

Sforzo: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_V + \boldsymbol{\sigma}_D = \underbrace{\frac{\overbrace{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}^{I_1}}{3}}_{p}\mathbb{I} + \mathbf{s} = p\,\mathbb{I} + \mathbf{s} \Rightarrow \boxed{\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3}\mathbb{I}}$ di sforzo

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3} = \frac{\mathbb{I}:\boldsymbol{\sigma}}{3} = \frac{I_1}{3}$$

"traceless tensors"

tensione media

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = I_{ij}\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{ii}$$

$$\underset{3\times 3}{[\mathbb{I}]} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ord. $\left(I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}\right)$

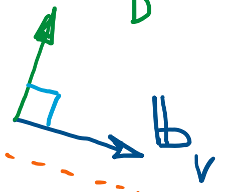
$$\mathrm{tr}\,\mathbb{I} = \mathbb{I}:\mathbb{I} = \delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a} - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{a}}{3}\mathbb{I}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{tr}\,\mathbf{a}_D = \mathrm{tr}\,\mathbf{a} - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{a}}{\cancel{3}}\,\overset{\cancel{3}}{\mathrm{tr}\,\mathbb{I}} = 0$$

N.B.: $\mathbf{a}_V : \mathbf{b}_D = \mathbf{a}_D : \mathbf{b}_V \equiv 0$

$$\frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{a}}{3}\mathbb{I} : \mathbf{b}_D = \mathbf{a}_D : \frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{b}}{3}\mathbb{I} \equiv 0$$

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{b}_D = \mathrm{tr}\,\mathbf{a}_D \equiv 0$$

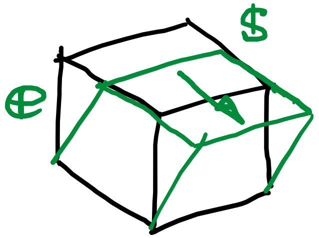


Invarianti del deviatore di deformazione ($\mathbf{e}$) o di sforzo ($\mathbf{s}$):

$$\begin{cases} J_1^{\mathbf{e}} = \mathrm{tr}\,\mathbf{s} = s_{ii} = \mathbb{I}:\mathbf{s} = \cancel{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\cancel{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}}{\cancel{3}}\cancel{\mathrm{tr}\,\mathbb{I}} \equiv 0 \quad \text{per definizione} \\ J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathbf{s}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\delta_{ij}s_{ik}s_{kj} = \frac{1}{2}s_{jk}s_{kj} = \frac{1}{2}s_{jk}s_{jk} = \boxed{\frac{1}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s} = J_2} \\ J_3 = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbf{s}^3 \end{cases}$$

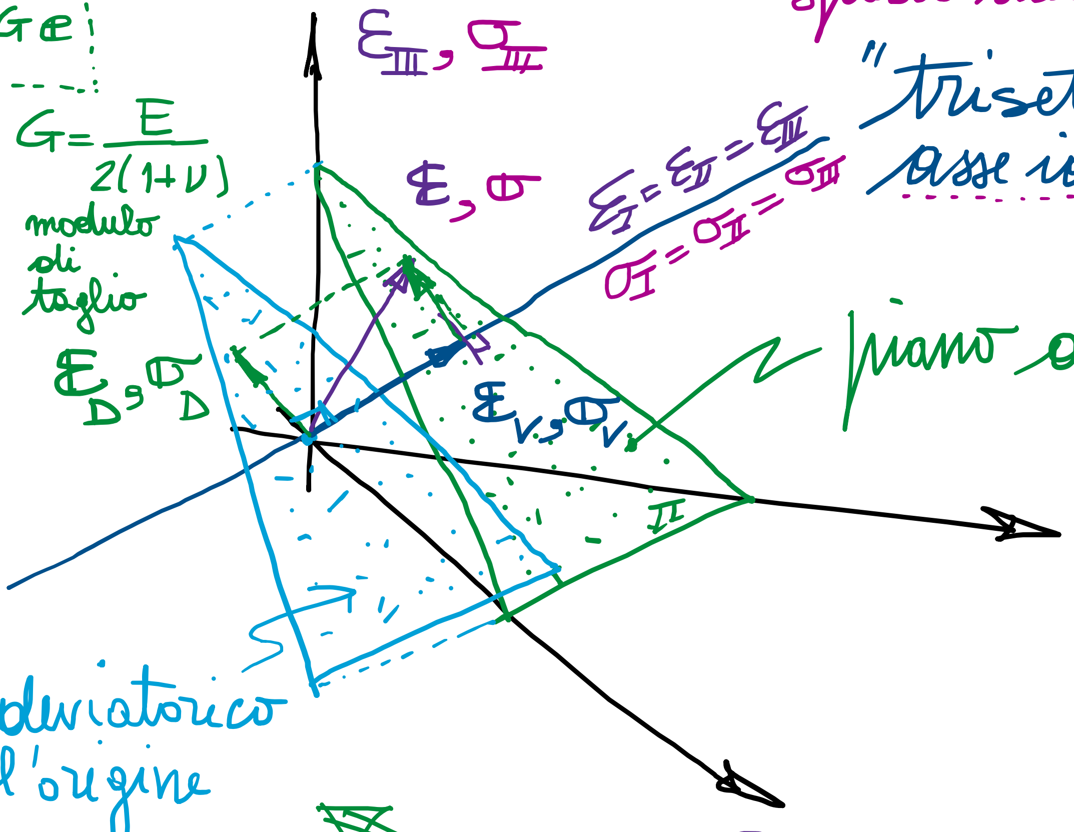
Rappresentazione nello "spazio principale" (spazio delle deformazioni principali)
spazio delle tensioni principali

$$e = \frac{s}{2G} \; ; \; s = 2Ge$$



$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

("deviazione")
variazione di forma a volume costante

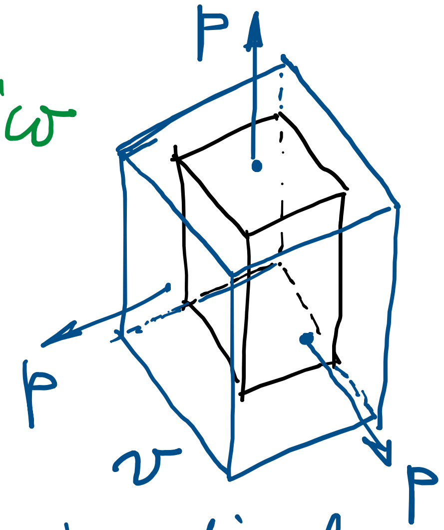


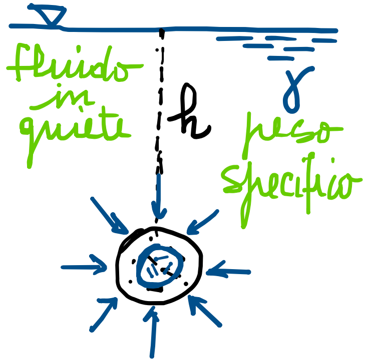
"trisettrice del 1° ottante"
asse idrostatico ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$)

piano deviatorico

piano deviatorico per l'origine

pallina di materiale isotropo





$p = \gamma h$
sforzo idrostatico o sferico o isotropo

variazione di volume a forma costante (omotetica)

$$v = \frac{1}{K} p \; ; \; p = K v$$

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di volume

Disaccoppiamento della risposta volumetrica e deviatorica per materiale isotropo

$\varepsilon_v \leftrightarrow \sigma_v$ $\quad$ $e \leftrightarrow s$

Risposta deviatorica

$\varepsilon(\sigma)$ legge di Hooke generalizzato (materiale elastico, lineare, isotropo)

$$\mathbf{e} = \varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\mathbf{I} = \overbrace{-\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma}^{} - \frac{\overbrace{\mathrm{tr}\,\varepsilon}^{\vartheta}}{3}\mathbf{I}$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\frac{\mathbf{I}}{E}\underbrace{(3\nu + 1 - 2\nu)}_{1+\nu}$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{2E}\underbrace{\left(\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{s}} = \boxed{\frac{1}{2G}\mathbf{s} = \mathbf{e}\ ; \quad \mathbf{s} = 2G\,\mathbf{e}}$$

E, ν $[K, G]$

$$\frac{\vartheta}{3} = \frac{1}{K}\frac{p}{3} = \frac{\cancel{3}(1-2\nu)}{E\,\cancel{3}}\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$2\mathbf{e} = \frac{1}{G}\mathbf{s}\ ; \quad \mathbf{s} = G\,2\mathbf{e}$$

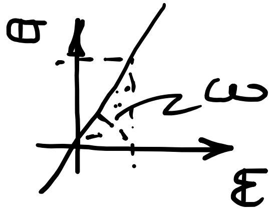
$$G = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \frac{\tau_{ij}}{2\varepsilon_{ij}}$$

$\mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{s}$ disaccoppiata dalla risposta volumetrica

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\ ; \quad G \to \infty,\ \nu \to -1$$

deformazione senza variazione di forma

Energia di deformazione:



$$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_V + \sigma_D) : (\varepsilon_V + \varepsilon_D) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_V : \varepsilon_V}_{\omega_V} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_D : \varepsilon_D}_{\omega_D} \quad \text{ove:}$$

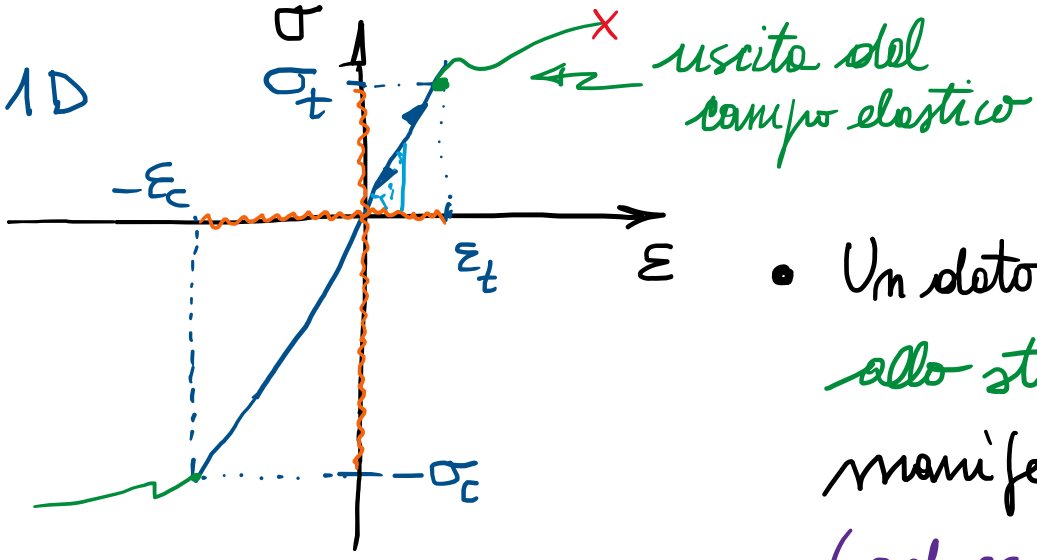
ω_V energia volumetrica, ω_D energia deviatorica

$[\sigma_V : \varepsilon_D = \sigma_D : \varepsilon_V = 0]$

- $$\omega_V = \frac{1}{2}\overbrace{\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}}^{p}\cancel{\mathbf{I}} : \frac{\overbrace{\mathrm{tr}\,\varepsilon}^{\vartheta}}{\cancel{3}}\cancel{\mathbf{I}} = \frac{1}{2}p\,\vartheta = \begin{cases} \frac{1}{2}K\vartheta^2 = \frac{1}{2}K I_1^{\varepsilon\,2} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{K}p^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{9K}I_1^2 \end{cases} > 0$$

- $$\omega_D = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{e} = \begin{cases} \frac{1}{2}2G\,\mathbf{e}:\mathbf{e} = 2G\,J_2^{\varepsilon} \\ \frac{1}{2}\frac{\mathbf{s}:\mathbf{s}}{2G} = \frac{1}{2G}J_2 \end{cases} > 0$$

Verifica di resistenza (elastica)



ev. comportamento asimmetrico trazione/compressione

sforzo di snervamento

$$\sigma_t = \frac{\sigma_y}{f} \Rightarrow \sigma_0$$

fattore di sicurezza $2 \div 5$ (10)

- Un dato materiale, in relazione alla propria natura e allo stato tenso-deformativo cui è sottoposto, può manifestare determinate risorse di "resistenza" (ad es., "elastica", cioè rispetto all'uscita dal campo elastico, per giungere poi a "rottura"), definite tramite opportuni "criteri di resistenza", idonei allo scopo.

- Verifica di resistenza:

$$S = G.I.P.(\sigma, \varepsilon) \leq R$$

Sollecitazione "Grandezza indice del pericolo" Resistenza (elastica)

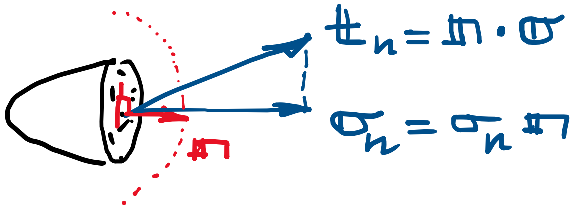
- Nel dominio degli sforzi:

$$\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon) \leq \sigma_0$$

"tensione equivalente" (quantità scalare) tensione ammissibile

1) Criterio di Galileo – Rankine – Navier (vedi "mensole di Galileo")

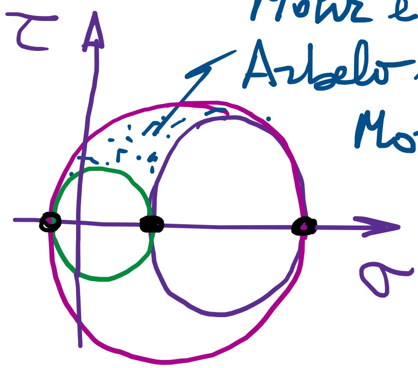
Assume come G.I.P. lo sforzo normale (max, min)



$$-\sigma_c \le \underbrace{\sigma_n^{min} \; ; \; \sigma_n^{max}}_{\sigma_I, \, \sigma_{II}, \, \sigma_{III}} \le \sigma_t$$

tensioni principali

Cerchi di Mohr e Arbelo di Mohr



$\sigma_{III} \le \sigma_{II} \le \sigma_I$

σ_n^{min} σ_n^{max}

6 diseguaglianze

$$-\sigma_c \le \sigma_I \le \sigma_t$$

$I = I, II, III$

$\sigma_{eq} = \sigma_I$ tensioni principali

$$\boxed{\begin{aligned} -\sigma_c \le \sigma_I \le \sigma_t \\ -\sigma_c \le \sigma_{II} \le \sigma_t \end{aligned}}$$

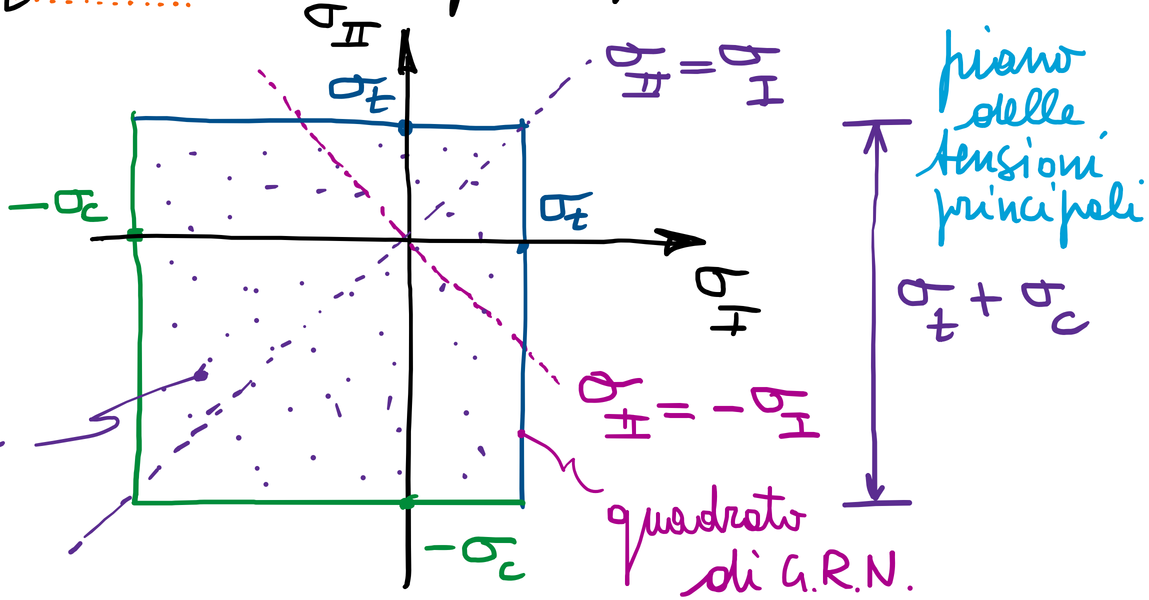
$$-\sigma_c \le \sigma_{III} \le \sigma_t \quad \checkmark$$

4 diseguaglianze per sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$)

?

"cubo" di G.R.N.
(nello spazio delle tensioni principali)

dominio di resistenza di G.R.N.

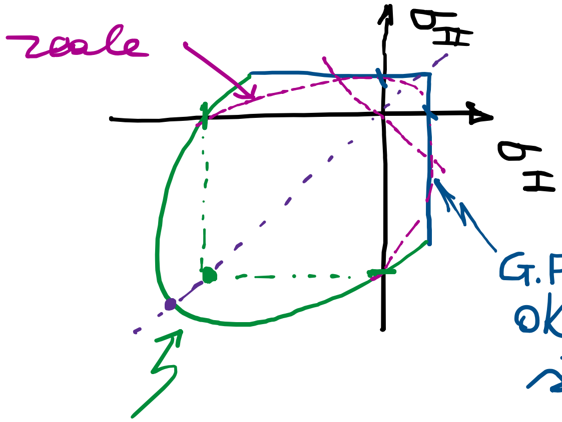


– Idoneo per materiali a comportamento non simmetrico a trazione/compressione

(in particolare per stati di prevalente trazione, in materiali lapidei)

– Per materiali a comportamento simmetrico t/c, non idoneo a distinguere il diverso livello di pericolosità di stati A ($\sigma_{II} = \sigma_I$) e B ($\sigma_{II} = -\sigma_I$)

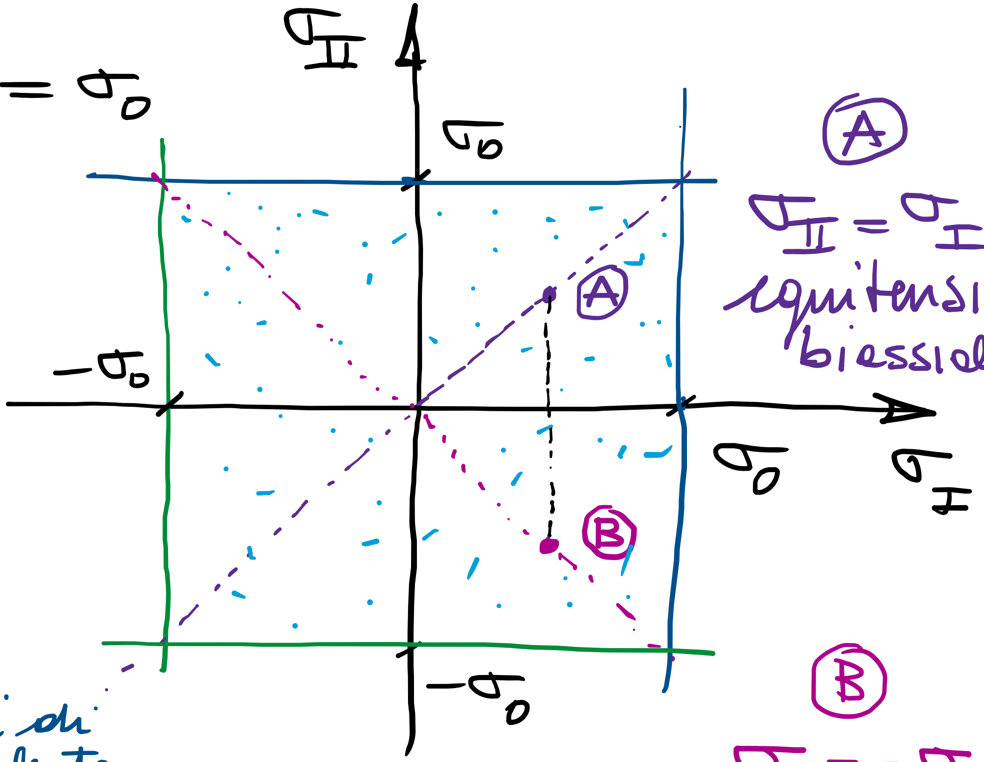
materiale "lapideo"
(come CLS)



G.R.N.
OK per stati di prevalente trazione

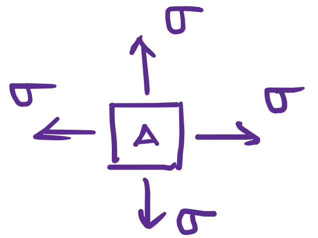
"pera" delle tensioni
(con resistenza maggiore in compressione)

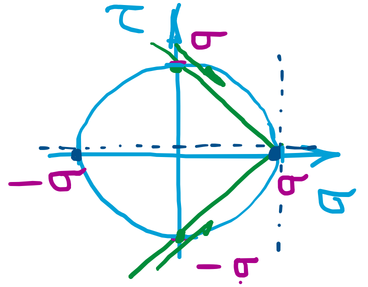
$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_0$$

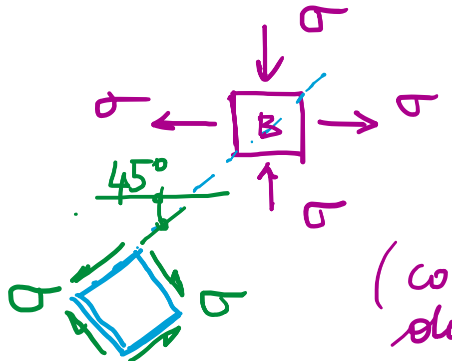


A

$\sigma_{II} = \sigma_I$, equitensione biassiale







B

$\sigma_{II} = -\sigma_I$

taglio puro

maggiore livello di pericolosità
(contrazione dominio lungo $\sigma_{II} = -\sigma_I$)

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.