Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

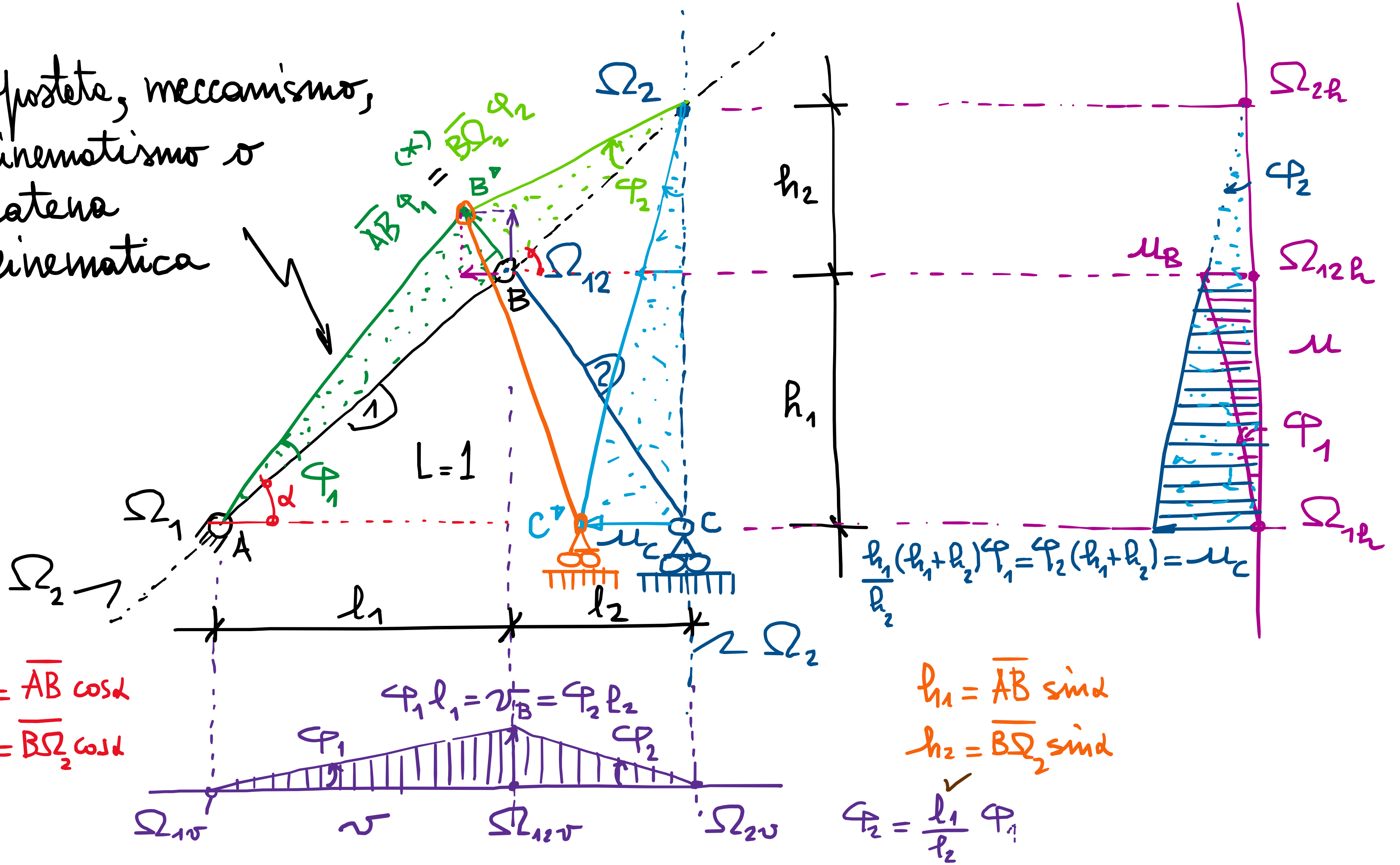
LEZIONE 04

AC geometrica – Esempi di sistemi articolati labili, con spostate e mappe di componenti di spost. (u, v)

1) Sistema biella-manovella (vedi cilindro/pistone/biella di un motore) [due aste]

$n = 2$

spostata, meccanismo, cinematismo o catena cinematica



$l_1 = \overline{AB}\cos\alpha$

$l_2 = \overline{B\Omega_2}\cos\alpha$

$h_1 = \overline{AB}\sin\alpha$

$h_2 = \overline{B\Omega_2}\sin\alpha$

$\varphi_2 = \dfrac{l_1}{l_2}\varphi_1$

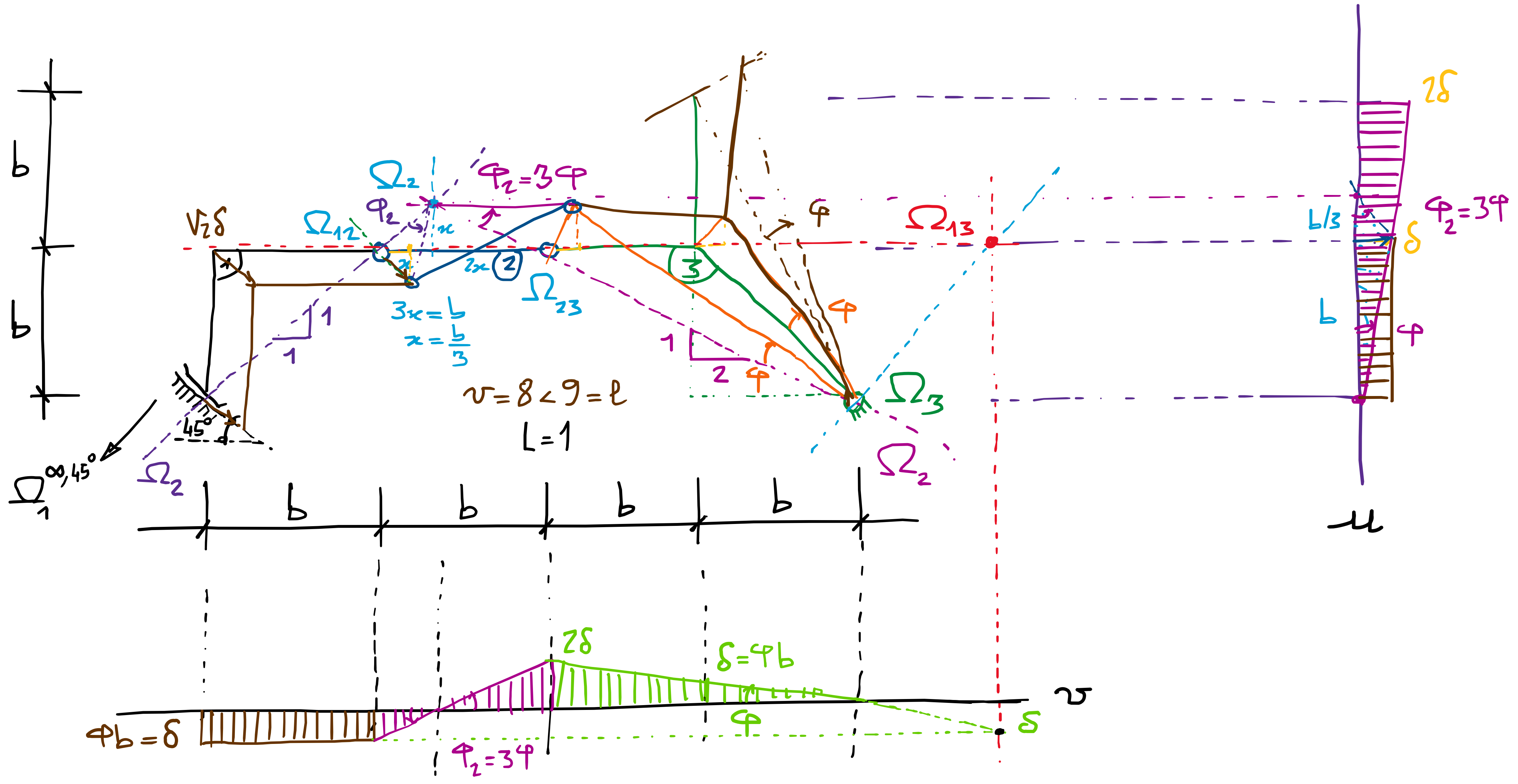
$u_B = \varphi_1 h_1 = \varphi_2 h_2$

$\varphi_2 = \dfrac{h_1}{h_2}\varphi_1$

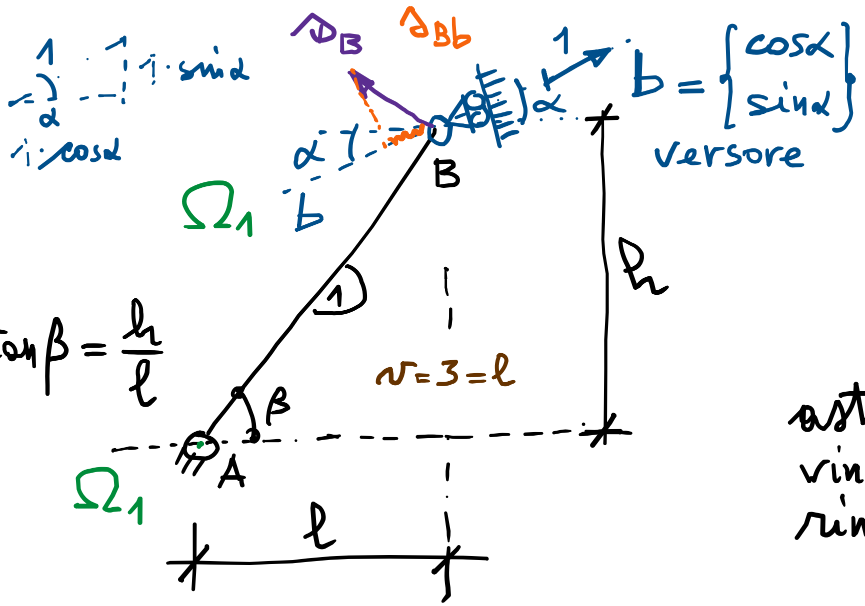
$\dfrac{h_1}{h_2}(h_1+h_2)\varphi_1 = \varphi_2(h_1+h_2) = u_C$

(*) $\varphi_2 = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{B\Omega_2}}\varphi_1$

2) Sistema articolato con tre aste ($n=3$)



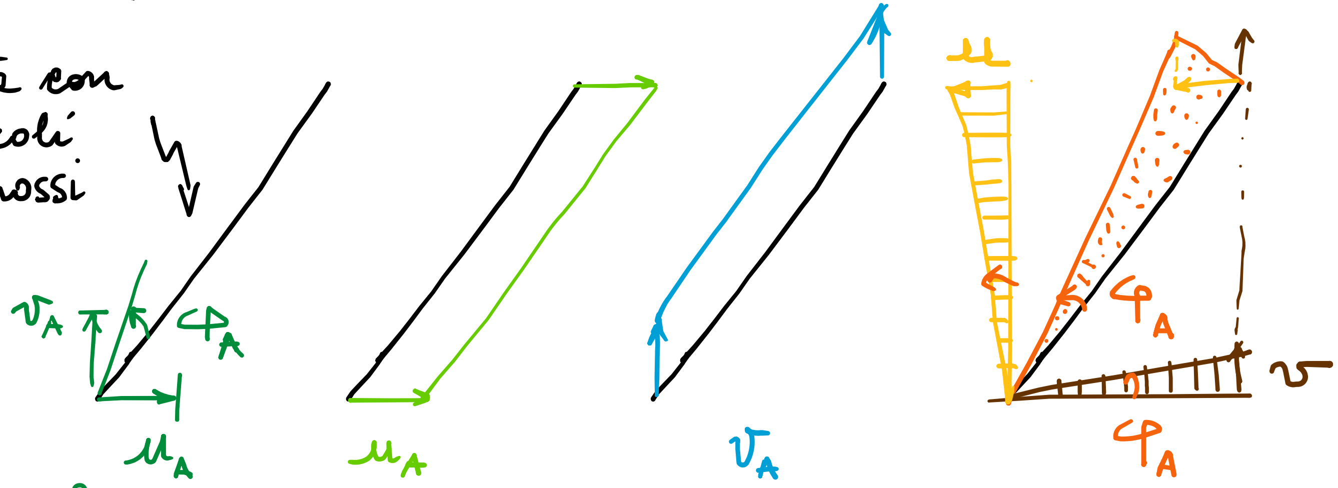
AC analitica $\Rightarrow$ scrittura esplicita delle eq.ni di vincolo (cinematico)



– Da AC geometrica: Se $\alpha \neq \beta$, $\nexists\, \Omega_1 \Rightarrow$ sist. non labile (isodeterminato)

Se $\alpha = \beta$, $\exists\, \Omega_1 \equiv A \Rightarrow$ sist. labile (indeterminato)

– Approccio "completo" $\Rightarrow$ rimozione di tutti i vincoli (gdv)



Spostamenti in corrisp. dei gdv rimossi:

$$\begin{cases} u_A = u_A = 0 \\ v_A = v_A = 0 \\ s_{Bb} = s_B \cdot b = u_B \cos\alpha + v_B \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

sistema di congruenza

$$= (u_A - h\,\varphi_A)\cos\alpha + (v_A + \ell\,\varphi_A)\sin\alpha = 0$$

$$\underset{3n = \ell \times 1}{U} = \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_B = u_A - \varphi_A h \\ v_B = v_A + \varphi_A \ell \end{cases}$$

matrice di congruenza $\mathbb{C}$

$$V = \underset{v \times \ell}{\mathbb{C}} \cdot U$$

$$\underset{v \times 1}{V} = \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ s_{Bb} \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{array}{ccc} u_A & v_A & \varphi_A \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \cos\alpha \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \sin\alpha \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \boxed{\ell\sin\alpha - h\cos\alpha} \end{array}\right] \end{array}}^{\mathbb{C}} \cdot \overbrace{\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{Bmatrix}}^{U} = \bar{V} = 0$$

- Il sistema di congruenze ammette soluz. non banali ($u \neq 0$) sse $\det \mathbb{C} = 0$

$$\det \mathbb{C} = l\sin\alpha - h\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \text{condizione di labilità}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{h}{l} = \tan\beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

- In tal caso, la soluzione (non banale) risulta:

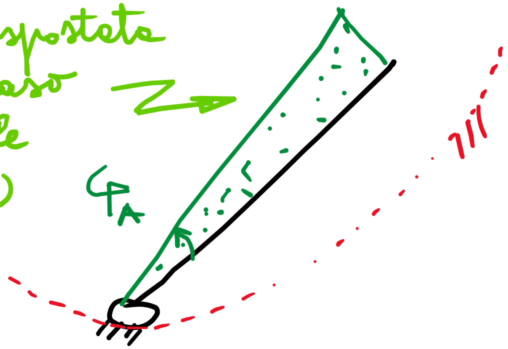
$$\boxed{\begin{aligned} u_A &= 0 \\ v_A &= 0 \end{aligned}}$$

$$\underbrace{(l\sin\alpha - h\cos\alpha)}_{=0}\varphi_A = 0 \rightarrow \varphi_A \text{ arbitrario}$$

(invece se $l\sin\alpha - h\cos\alpha \neq 0$, allora $\varphi_A = 0$) $\Rightarrow$ caso non labile

- Approccio ridotto con schema ad albero (rimozione del solo carrello in B):

è la spostata del caso labile ($\alpha = \beta$)



apertura della maglia chiusa che la struttura forma con la terra

unica eq.ne di vincolo

$$s_{Bb} = u_B\cos\alpha + v_B\sin\alpha$$
$$= -h\varphi_A\cos\alpha + l\varphi_A\sin\alpha$$
$$= \underbrace{(l\sin\alpha - h\cos\alpha)}_{C^{\triangledown}}\varphi_A = 0$$

sistema di congruenze ridotto

$$\underset{1\times1}{v^{\triangledown}} = \underset{1\times1}{C^{\triangledown}} \cdot \underset{1\times1}{u^{\triangledown}} = 0$$

$C^{\triangledown} \neq 0$, $\varphi_A = 0$ $(L = 0)$

$C^{\triangledown} = 0$ $(\alpha = \beta)$, φ_A arb. $(L = 1)$