Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Risposta a forzante impulsiva (da forzante a gradino; verso prospettiva per forzante generica)

$F(t) = F\,H(t) \Rightarrow$ forzante a gradino, ampiezza F

• $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t>0 \end{cases}$ Heaviside function, unit step (gradino unitario)

Integrale generale:

ζ fattore di smorzamento, $\zeta \sim 1\%$

ω_1 pulsaz. naturale sistema non smorz.

ω_d pulsaz. naturale sistema smorz.

$$u(t) = u_{g0}(t) + u_p(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right) + \underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}$$

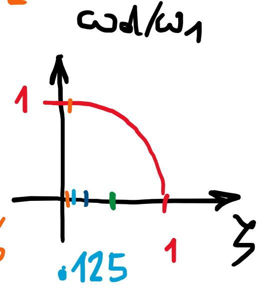
risposta transiente per sistema non smorzato; risposta a regime

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \leq 1 \quad \simeq \omega_1$

$\frac{\omega_d^2}{\omega_1^2} = 1-\zeta^2$

$\frac{\omega_d^2}{\omega_1^2} + \zeta^2 = 1$

$\zeta \sim 5\%$ .05



Imposizione delle c.i. (N.B.: sull'integrale generale, risposta totale):

$$\begin{cases} u_0 = B + \frac{F}{K} \Rightarrow \boxed{B = u_0 - \frac{F}{K}} \\ \dot{u}_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 B}{\omega_d} = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\underbrace{\frac{\omega_1}{\omega_d}}_{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \geq 1,\ \simeq 1}\underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}} \end{cases}$$

N.B.: costanti A, B dipendenti da c.i. u_0, $\dot{u}_0$ e da F.

Pertanto si ottiene:

$F = K u_{st}$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\frac{F}{K}\right)\sin\omega_d t + \left(u_0 - \frac{F}{K}\right)\cos\omega_d t\right) + \frac{F}{K}$$

$u_0(t)$

$u_0 = 0,\ \dot u_0 = 0$

$$= e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right) + \underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]$$

(*) risposta per c.i. nonomogenee, con $F = 0$

risposta per c.i. nulle a $F \neq 0$

⇒ funzione risposta a gradino F

$$\underbrace{F}_{K u_{st}} \cdot \underbrace{\frac{1}{K}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

funzione risposta a gradino unitario ($H(t)$)

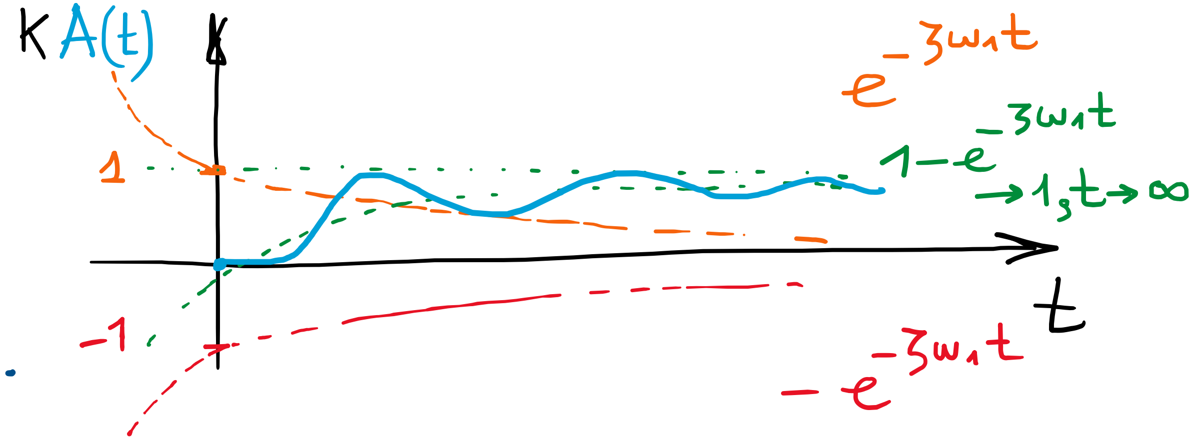
INPUT (Forzante $F(t)$) — OUTPUT (Risposta $u(t)$)

$$H(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA DINAMICO}} \longrightarrow A(t)$$

$$F(t) = F\,H(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA DINAMICO}} \longrightarrow \underbrace{F}_{u_{st}K} A(t)$$

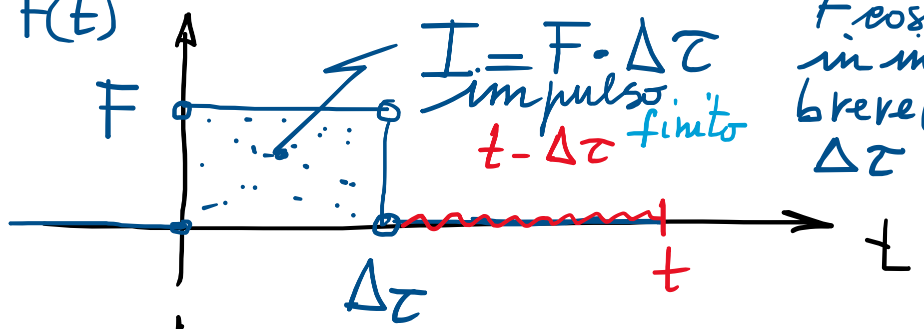
$u_{st}\,K A(t)$

F.ne $A(t)$, risposta a gradino unitario, utile ora a rappresentare la risposta del sistema a forzante impulsiva, tramite Principio di Sovrapponibilità (o Sovrapposizione) degli Effetti (valido per sistema lineare, tempo invariante).



Risposta a forzante impulsiva :

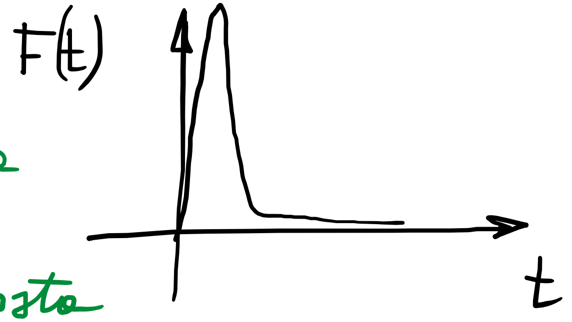
es. urti, impatti, esplosioni

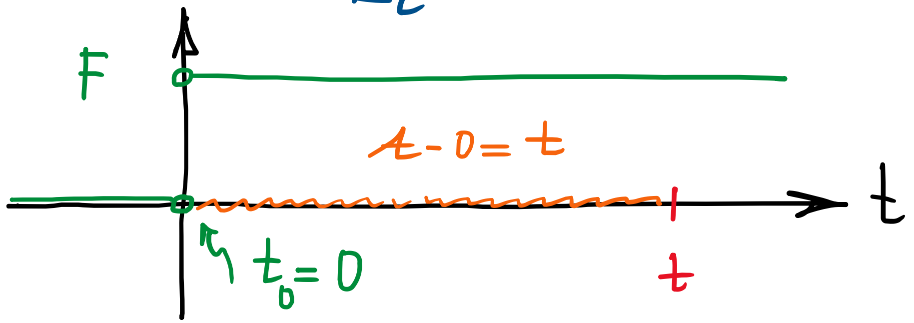


F cost in intervallo breve (finito) Δτ

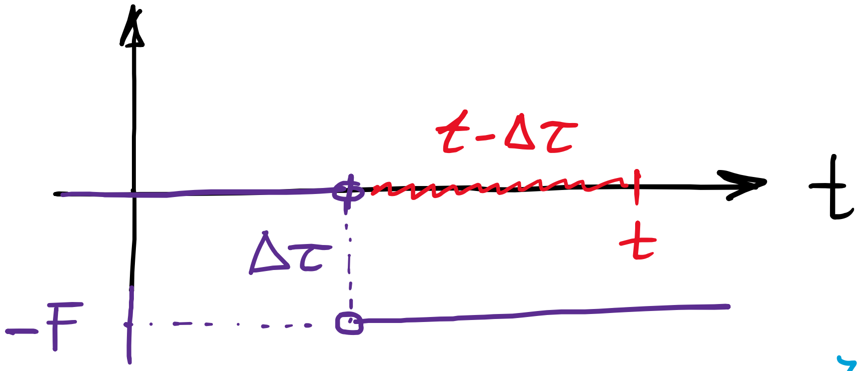
=

(agisce con entità elevata per un tempo breve, inducendo una risposta dinamica del sistema)





+



$$u(t) = F\,A(t-0) \;-\; F\,A(t-\Delta\tau)$$ con $\underbrace{\frac{1}{k}\left[1-e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$

$$= \underbrace{F\Delta\tau}_{I}\;\frac{A(t)-A(t-\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

$$= I\cdot\frac{\Delta A}{\Delta\tau}$$ ← rapporto incrementale $\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)$

$$= \lim_{\Delta\tau\to 0} I\cdot\underbrace{\frac{dA(t)}{dt}}_{\dot{A}(t)=h(t)}$$

funzione risposta ad impulso unitario

$$= I\cdot h(t)$$

processo al limite, per $\Delta\tau\to 0$ (per I finito, $F\to\infty$)
durata infinitesima

- Quindi, si ottiene, per la funzione risposta ad impulso unitario:

$$h(t) = \dot{A}(t) \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\left[0 + \zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cancel{\cos\omega_d t}\right) - e^{-\zeta\omega_1 t}\,\cancel{\omega_d}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\cancel{\omega_d}}\,\cancel{\cos\omega_d t} - \sin\omega_d t\right)\right]$$

$$\underbrace{\frac{1}{K}\left[1-e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

$$= \frac{1}{K}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t\left(\frac{\zeta^2\omega_1^2+\omega_d^2}{\omega_d}\right) \longleftarrow \begin{cases} \omega_d^2 = \omega_1^2(1-\zeta^2) = \omega_1^2 - \zeta^2\omega_1^2 \\ \zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2 = \omega_1^2 = \dfrac{K}{m} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{K}\frac{\omega_1^2}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t \qquad \left(\omega_1^2 = \frac{K}{m}\right)$$

oscillazioni libere smorzate per $F=0$

$\Downarrow$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t}$$

funzione risposta ad impulso unitario

N.B.: coerente con la risposta (*) per $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = \frac{1}{m}$

$F(t)$ impulsiva (I) $\longrightarrow$ SISTEMA $\longrightarrow I\cdot h(t)$

Impulso unitario ($I=1$) $\delta(t) \longrightarrow$ SISTEMA $\longrightarrow h(t)$

└ Delta di Dirac

- Interpretazione fisica tramite Teorema dell'impulso : $\Rightarrow$ la variazione della quantità di moto eguaglia l'impulso

$$F_{tot} = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow dI = F\,dt = m\,dv = d(\underbrace{mv}_{q}) = dq$$

q quantità di moto

Su intervallo $\Delta\tau$: $dq = dI = F\,dt$

$$\underbrace{\Delta q}_{\text{variazione della quantità di moto}} = q(\Delta\tau) - \cancel{q(0)}^{\dot u_0 = 0} = \int_0^{\Delta\tau} \Big(\overset{\text{forzante}}{F} - (\underset{\substack{\text{elastica}\\ Ku}}{F_e} + \underset{\substack{\text{viscosa}\\ c\dot u}}{F_d})\Big)\,dt = \int_0^{\Delta\tau} F\,dt - \int_0^{\Delta\tau \to 0} \underbrace{(F_e + F_d)}_{\text{forze di ampiezza limitata }(Ku,\ c\dot u)}\,dt$$

con processo al limite per $\Delta\tau \to 0$

$$m\,\dot u_0^+ = I - \underset{\substack{\text{integrale su}\\ \text{intervallo infinitesimo}\\ \text{di funzione limitata}}}{0} \Rightarrow \boxed{\dot u_0^+ = \frac{I}{m}}$$

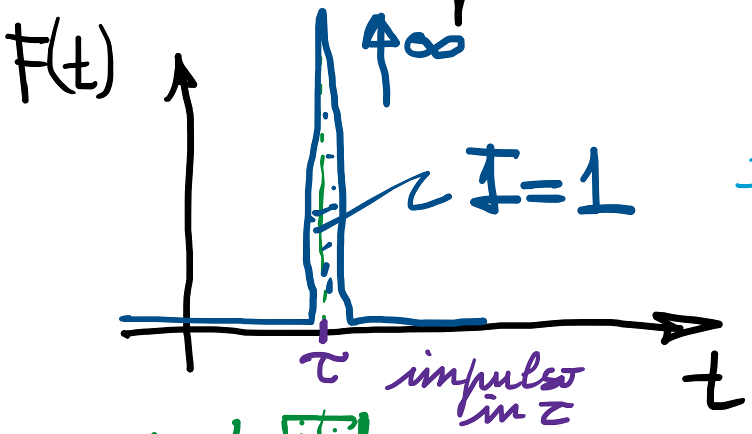
$\Rightarrow$ valutazione sperimentale

stima dell'entità dell'impulso ricevuto $I = m\,\dot u_0^+$ velocità subito dopo la ricezione dell'impulso (misurabile)

- Pertanto, il sistema risponde, a forzante impulsiva, come per delle oscillazioni libere indotte da spostamento iniziale nullo e velocità iniziale pari all'impulso ricevuto diviso la massa.
- Se $I = 1$, $\dot u_0^+ = 1/m \Rightarrow h(t)$.

Codificazione matematica di "funzione" ($\Rightarrow$ è una "distribuzione")

Forzante impulsiva: (tale da produrre impulso unitario)



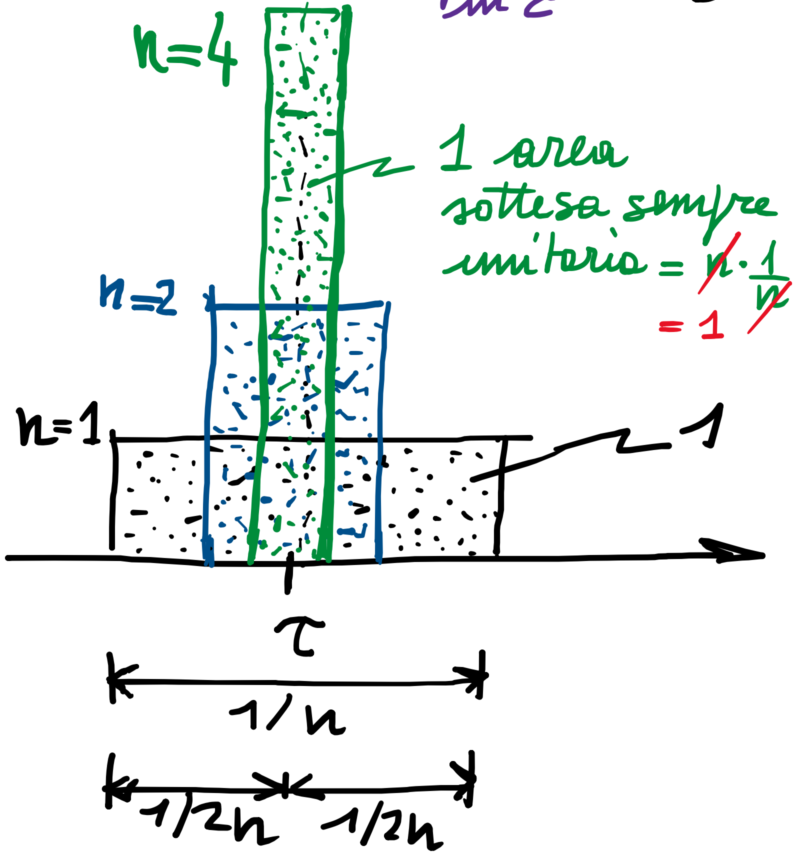
$$F(t) \begin{cases} = 0 & \forall t \neq \tau \\ \to \infty & t = \tau \end{cases} = \delta(t) \quad \text{Delta di Dirac}$$

"distribuzione"

Dinamica: agisce con ampiezza finita, per durate infinitesime (con impulso finito unitario)

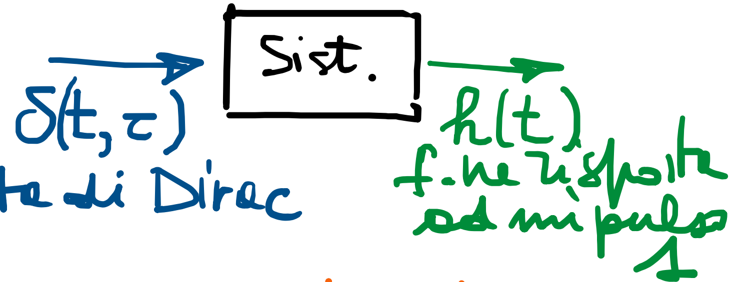
Essa è il limite, per $n \to \infty$, della successione

$$\delta_n(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t-\tau| > \frac{1}{2n} \\ n & \text{se } |t-\tau| < \frac{1}{2n} \end{cases} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \delta(t,\tau)$$

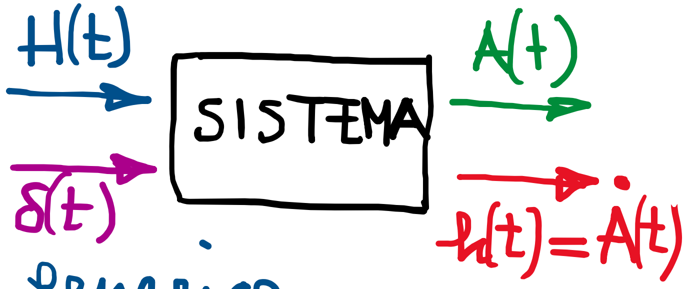


Proprietà: (della Delta di Dirac)

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,\tau)\, d\tau = 1$$ impulso unitario
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\, \delta(t,\tau)\, d\tau = F(t)$$ collocazione in t $\Rightarrow$ Interpretazione della forzante come una sequenza di impulsi $dI = F(\tau)\,d\tau$



SOMMARIO (Lez. 07)



- Verso la determinazione della risposta a forzante generica.
- Funzione risposta a gradino unitario : $A(t)$.
- " " " impulso " : $h(t) = \dot{A}(t)$.
- Da th. dell'impulso, come per oscillazioni libere smorzate da velocità iniziale al tempo 0^+ pari a $\frac{I=1}{m}$.
- Rappresentazione ideale (matematica) di forzante impulsiva unitaria : Delta di Dirac $\delta(t,\tau)$.
- Next step : forzante generica per sovrapposizione di impulsi e conseguente risposta per sovrapposizione di risposte impulsive (integrale di convoluzione o di Duhamel).