

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

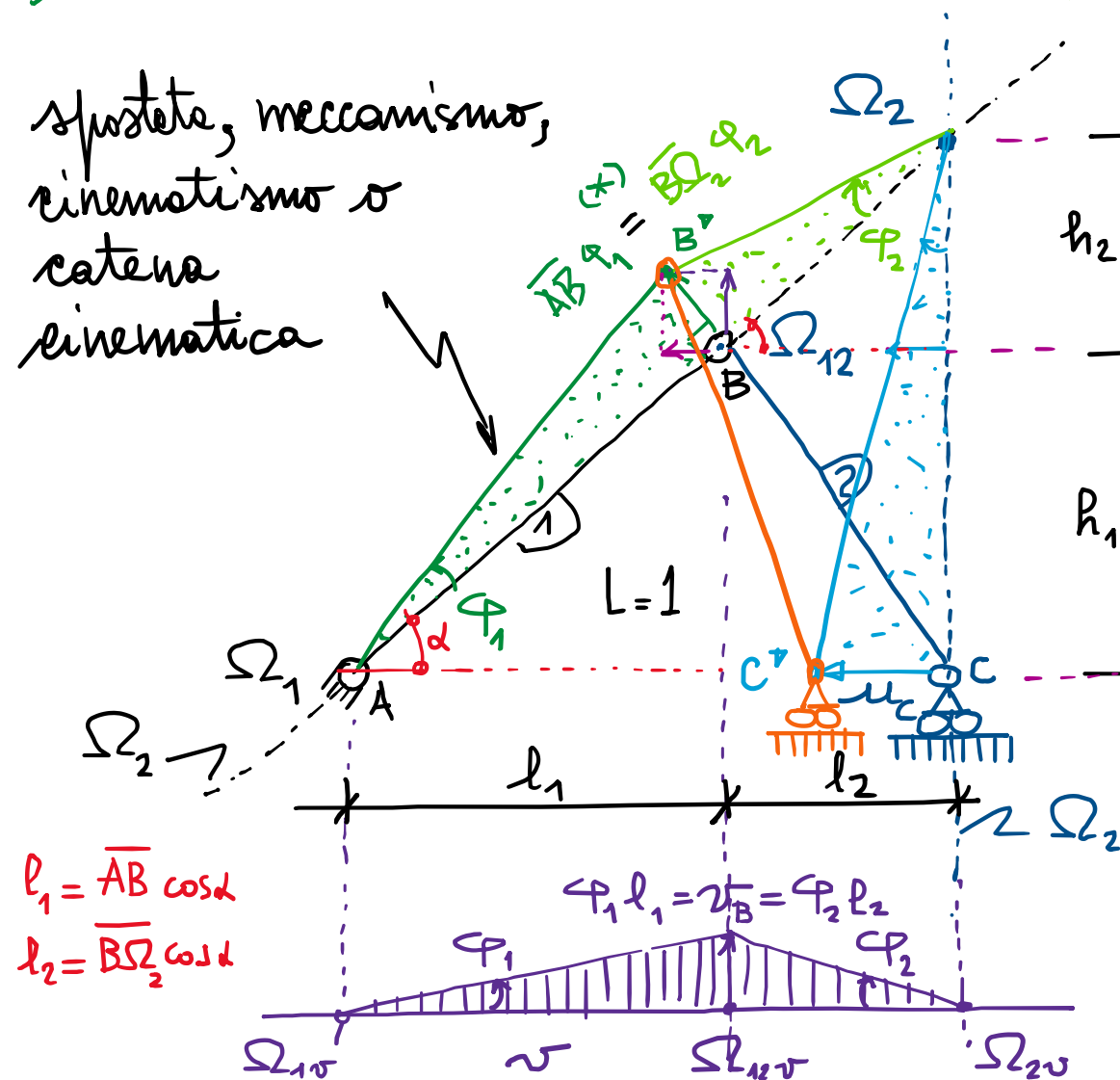
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 04

AC geometrica - Esempi di sistemi articolati labili, con spostate e mappe di componenti di spost. (u, v)

1) Sistema biella-manovella (vedi cilindro/pistone/biella di un motore) [due aste]
 $n=2$

spostate, meccanismo,
 cinemotismo o
 catena
 cinematica



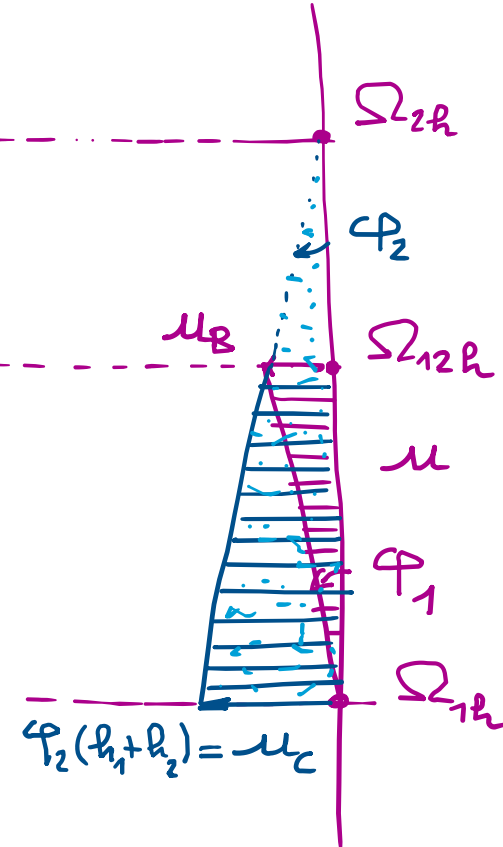
$$l_1 = \overline{AB} \cos \alpha$$

$$l_2 = \overline{BC} \cos \alpha$$

$$h_1 = \overline{AB} \sin \alpha$$

$$h_2 = \overline{BC} \sin \alpha$$

$$\varphi_2 = \frac{l_1}{l_2} \varphi_1$$

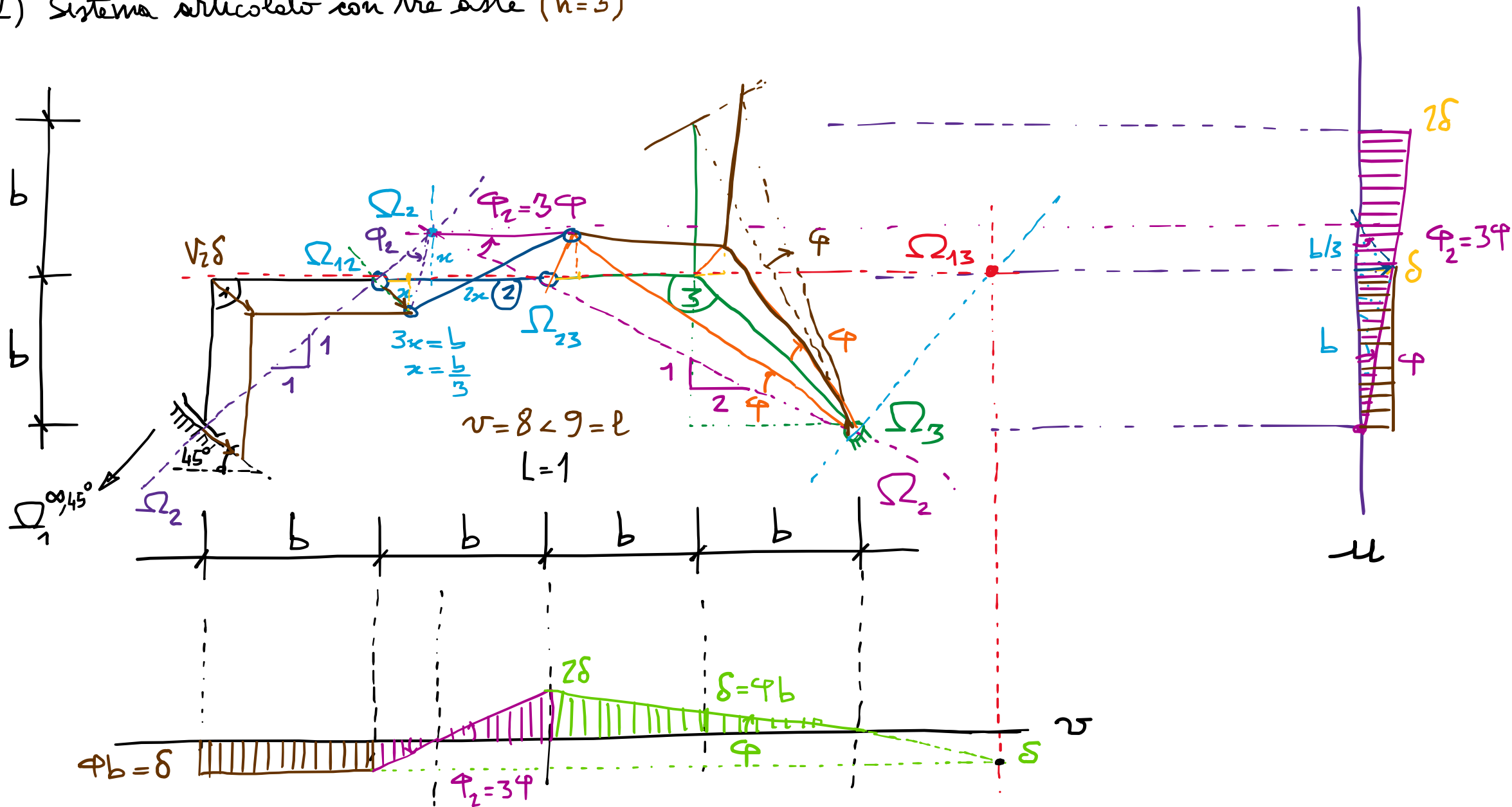


$$u_B = \varphi_1 h_1 = \varphi_2 h_2$$

$$\varphi_2 = \frac{h_1}{h_2} \varphi_1$$

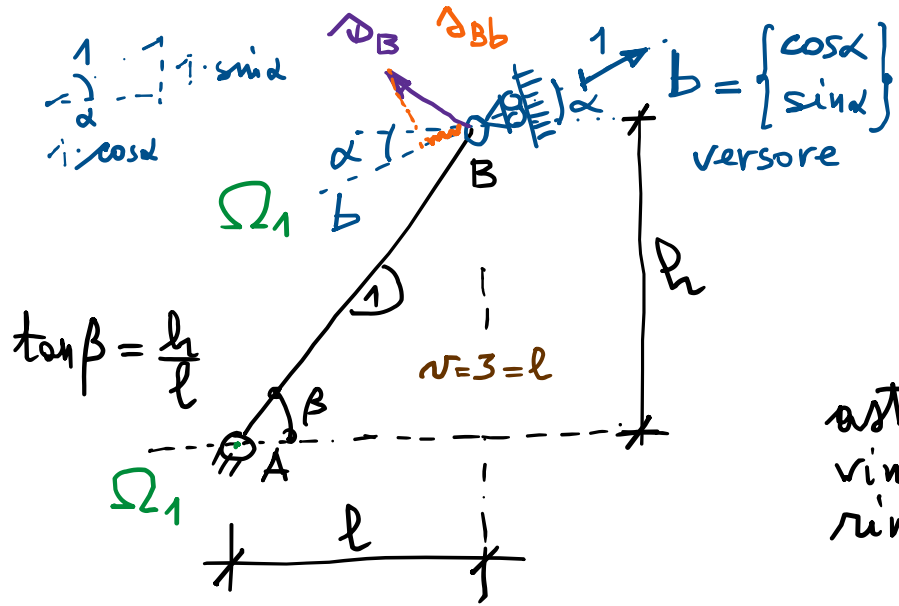
$$(*) \quad \varphi_2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \varphi_1$$

2) Sistema articolato con tre aste ($n=3$)



AC analitica \Rightarrow scrittura esplicita delle eq. di vincolo (cinematico)

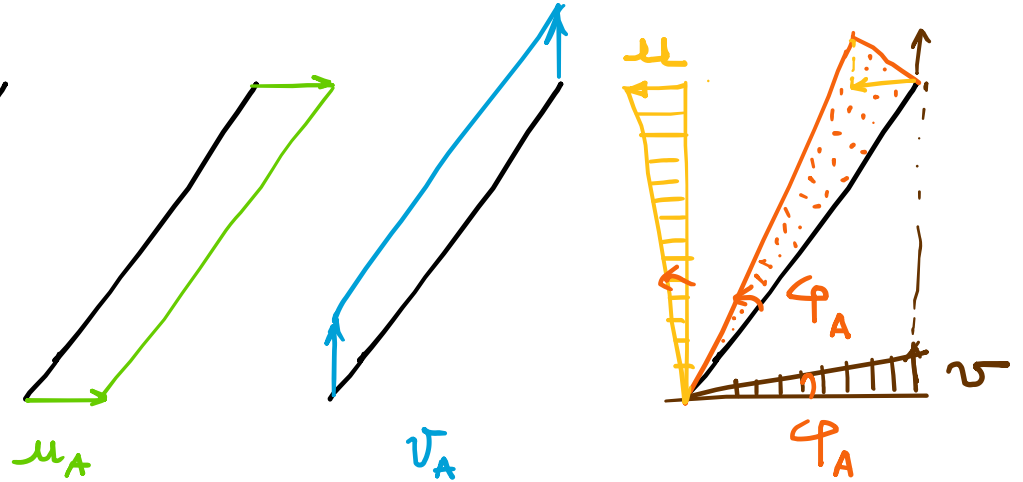
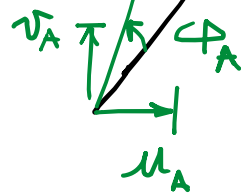
- Da AC geometrica: Se $\alpha \neq \beta, \nexists \Omega_1 \Rightarrow$ sist. non labile (isodeterminato)
 Se $\alpha = \beta, \exists \Omega_1 \equiv A_2$, sist. labile (indeterminato)



- Approccio "completo" \Rightarrow rimozione di tutti i vincoli (gdl)

aste con
vincoli
rimossi

scelta
dei
gdl



Spostamenti in corrisp. dei
gdl rimossi:

$$\begin{cases} u_A = u_A = 0 \\ v_A = v_A = 0 \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_A \end{bmatrix} \quad 3n = l \times 1$$

$$\begin{cases} u_B = u_A - \phi_A h \\ v_B = v_A + \phi_A l \end{cases}$$

matrice di
congruenza
 C

$$V = C \cdot U \quad v \times l$$

$$\Delta_{BB} = \Delta_B \cdot b = u_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha = 0$$

sisteme
di congruenze

$$= (u_A - h \phi_A) \cos \alpha + (v_A + l \phi_A) \sin \alpha = 0$$

$$V = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & l \sin \alpha - h \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_A \end{bmatrix} = \bar{V} = 0$$

- Il sistema di congruenze ammette soluz. non banali ($u \neq 0$) sse $\det C = 0$

$$\det C = l \sin \alpha - h \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \text{condizione di labilit\`a}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{l} = \tan \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

- In tal caso, la soluzione (non banale) risulta:

$$\begin{aligned} u_A &= 0 \\ v_A &= 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{(l \sin \alpha - h \cos \alpha)}_{=0} \varphi_A = 0 \rightarrow \varphi_A \text{ arbitrario (invece se } l \sin \alpha - h \cos \alpha \neq 0, \text{ allora } \varphi_A = 0)$$

\Rightarrow caso non labile

- Approccio ridotto con schema ad albero (rimozione del solo carrello in B):



apertura delle maglie chiuse che la struttura forma con la terra

unica eq.ne di vincolo

$$\begin{aligned} \delta_{Bb} &= u_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha \\ &= -h \varphi_A \cos \alpha + l \varphi_A \sin \alpha \\ &= \underbrace{(l \sin \alpha - h \cos \alpha)}_{\vec{C}} \varphi_A = 0 \end{aligned}$$

sistema di congruenze ridotto

$$\vec{v} = \underset{1 \times 1}{C} \cdot \underset{1 \times 1}{\varphi_A} = 0$$

$$\vec{C} \neq 0, \varphi_A = 0 \quad (L=0)$$

$$\vec{C} = 0, \varphi_A \text{ arb.} \quad (L=1)$$

$(\alpha = \beta)$