Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

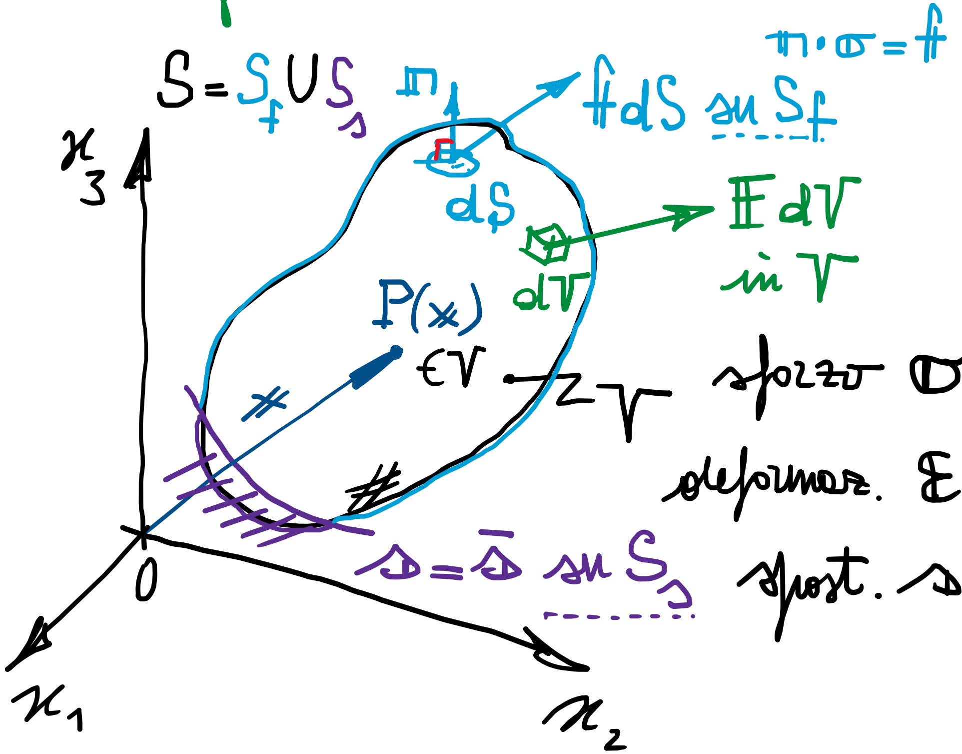
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

Legame costitutivo (legge sforzi-deformazioni) $\Rightarrow$ comportamento meccanico del materiale

- Sinora visti lo sforzo (statica dei continui) e la deformazione (cinematica dei continui), nel rispetto dell'equilibrio e della congruenza, indipendenti l'uno dall'altra $\Rightarrow$ ora saranno da correlare, in ragione del comportamento meccanico del materiale di cui è composto il solido.



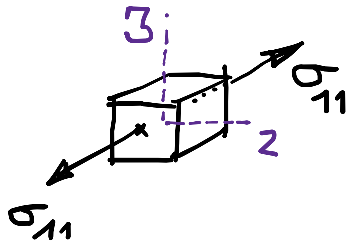
Risposta tenso-deformativa (incognite)		Descrizione del problema fisico (problema elastico lineare) (equazioni governanti)	
sforzo $\underline{\sigma}(\underline{x}) \leftrightarrow \sigma_{ij}(x_k)$	6	equil. $\mathrm{div}\,\underline{\sigma} + \underline{F} = \underline{0} \leftrightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0$ ($\nabla \cdot$)	3
deformaz. $\underline{\varepsilon}(\underline{x}) \leftrightarrow \varepsilon_{ij}(x_k)$	6	congr. $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{s} + \nabla \underline{s}^T) \leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$	6
spost. $\underline{s}(\underline{x}) \leftrightarrow s_i(x_k)$	3	legame costitutivo (elastico lineare) $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon})$, $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{\sigma}) \leftrightarrow \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$, $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$	6
	15		15

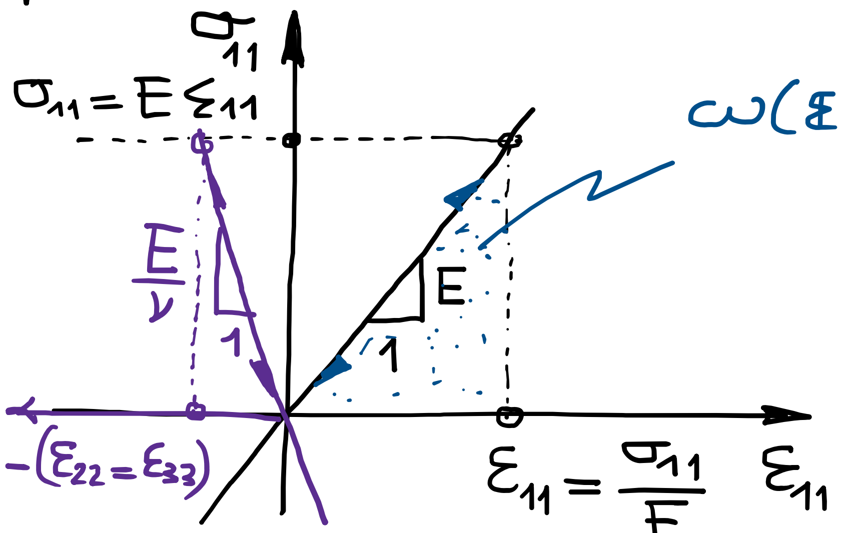
- Le (6) equazioni costitutive $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$, $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ completano il bilancio equazioni/incognite, ponendo in relazione, localmente ($\forall \underline{x}$), lo sforzo e la deformazione.

Materiale elastico lineare (isotropo)

- elastico: comportamento perfettamente reversibile (senza dissipazione di energia $\Rightarrow$ assenza di deformazioni irreversibili [plastiche] allo scarico)
- lineare: relazione lineare di proporzionalità tra sforzi e deformazioni
- isotropo: comportamento (meccanico) indipendente dalla direzione

Introduzione tramite prova monoassiale di trazione





Contrazione trasversale

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{\sigma_{11}}{\frac{E}{\nu}}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}$$

ν: coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson [1]

legge di Hooke del materiale (1D)

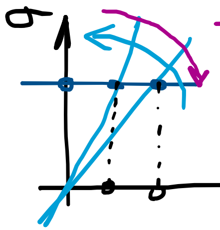
$\omega(\varepsilon)$ energia di deformazione $> 0,\ \forall\, \varepsilon \neq 0$ (definita positiva)

$$= \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} < \begin{array}{l} \frac{1}{2} E\,\varepsilon_{11}^2 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{E}\sigma_{11}^2 \end{array}$$

E: modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \text{cost} > 0$$

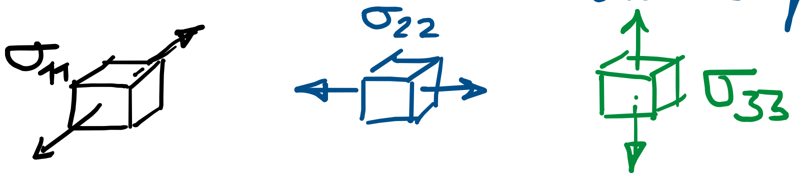
$$[E] = \frac{[F]}{[L]^2}$$



$\frac{1}{E}\uparrow$ cedevolezza

$E\uparrow$ (rigidezza del materiale)

Generalizzazione al triassiale (tramite Principio di Sovrapposizione degli Effetti – PSE)
valido per la linearità assunta



$$\begin{array}{cccc} & \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \end{array}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33} \end{cases}$$

leggi deformazioni/sforzi normali

scorrim. angolari

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G} = \frac{\sigma_{12}}{G} \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G} = \frac{\sigma_{23}}{G} \\ 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G} = \frac{\sigma_{13}}{G} \end{cases} \quad \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$$

G modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio $G = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \text{cost} > 0$

leggi deformazioni/sforzi tangenziali o taglianti

scrittura in notazione matriciale

risposte normali/taglianti disaccoppiate

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & & \\ & 0 & & & \frac{1}{G} & \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix}}_{[C]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}$$

$$\underset{6\times1}{\{\varepsilon\}} = \underset{6\times6}{[C]} \cdot \underset{6\times1}{\{\sigma\}}$$

matrice di cedevolezza del materiale (simmetrica)

Ipotesi di elasticità ($\exists$nza di energia di deformazione, definita positiva) $\Rightarrow$ implica delle delimitazioni sui parametri elastici $[E, \nu; G]$

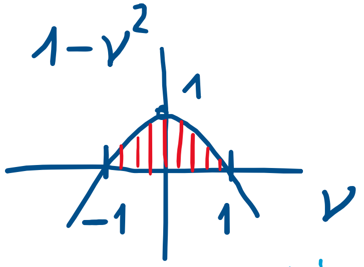
$$\omega = \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot \underbrace{[\mathbb{C}]\cdot\{\sigma\}}_{\{\varepsilon\}} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\cdot\{\varepsilon\} > 0 \quad \forall \begin{cases} \sigma \neq 0 \\ \{\sigma\} \neq 0 \end{cases}$$

forma quadratica associata alla matrice $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ def. pos.

CNS di def. pos. di $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ tutti i minori principali positivi (matrice di cedevolezza)

- 1×1 $\quad \dfrac{1}{E} > 0 \Rightarrow \boxed{E > 0}$

- 2×2 $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{E^2} - \dfrac{\nu^2}{E^2} = \dfrac{1}{E^2}(1-\nu^2) = \dfrac{1}{E}(1+\nu)(1-\nu) > 0 \Rightarrow$



$-1 < \nu < 1$

materiali ingegneristici $0 \leq \nu < 1/2$

$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

- 3×3 $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{E}\dfrac{1}{E^2}\overbrace{(1-\nu^2)}^{(1+\nu)(1-\nu)} + \dfrac{\nu}{E}\dfrac{1}{E^2}\overbrace{(-\nu-\nu^2)}^{-\nu(1+\nu)} - \dfrac{\nu}{E}\dfrac{1}{E^2}\overbrace{(\nu^2+\nu)}^{\nu(1+\nu)}$

$$= \frac{1}{E^3}(1+\nu)\left[1-\nu-2\nu^2\right] = \frac{(1+\nu)}{E}\frac{1}{E^2}\underbrace{(1+\nu)(1-2\nu)}_{1-2\nu+\nu-2\nu^2} = \overbrace{\frac{1}{E}\frac{(1+\nu)^2}{E^2}}^{>0}(1-2\nu) > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

- 4×4 (1×1) $\quad \dfrac{1}{G} > 0 \Rightarrow \boxed{G > 0}$

Richiamiamo ora una scrittura compatta tensoriale per la legge costitutiva $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$.

Riprendendo le leggi viste:

$$(*)\quad\begin{cases}\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11}\\[2mm] \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22}\\[2mm] \varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}\sigma_{33} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33}\end{cases}$$

$$(+)\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \boxed{\frac{\overset{\sigma_{ij}}{\tau_{ij}}}{2G}}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{kk}$$

relazione unificante

$$\varepsilon_{(i)(i)} = \frac{1}{E}\sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{jj}+\sigma_{kk}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{ii} + \frac{\nu}{E}\sigma_{ii} = -\frac{\nu}{E}\overbrace{(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})}^{I_1=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{kk}}\,1 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$$

$i \to j \to k$ (ciclico)

Affinchè sussista coerenza tra le $(*)$ e le $(+)$, espressa da un'unica legge $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$:

Legge di Hooke generalizzata

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\underbrace{\mathbf{I}}_{\text{tensore identità del 2° ordine}} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}}$$

$i=j \quad \varepsilon_{ii} = -\dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\;1 + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$

$i\neq j \quad \varepsilon_{ij} = \quad " \quad 0 + \boxed{\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}}$

materiale indeformabile a taglio

$G\to\infty,\ \nu\to -1$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1\end{bmatrix},\qquad I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$$

$\mathrm{tr}\,\mathbf{I} = 1+1+1 = 3$

coerente se $\dfrac{1+\nu}{E} = \dfrac{1}{2G} \Rightarrow \boxed{G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}}$

oppure:

$E = 2(1+\nu)G\,;\quad \nu = \dfrac{E}{2G} - 1$

due parametri indip.!

Risposta volumetrica:

notazione tensoriale

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\boldsymbol{\sigma}$$ Legge di Hooke generalizzata (materiale elastico, lineare, isotropo)

deformazione volumetrica (variazione specifica di volume)

$$v = \underbrace{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}}_{I_1'} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\underbrace{\mathrm{tr}\,\mathbf{I}}_{3} + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$$

$$= \frac{1}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,(1+\underbrace{\nu-3\nu}_{-2\nu})$$

$$= \underbrace{3\,\frac{1-2\nu}{E}}_{\frac{1}{K}}\,\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3}$$

$$p = \frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$ tensione media

$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} \leftrightarrow \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$ disaccoppiamento

$I_1' \leftrightarrow I_1$ (per materiali isotropi)

$$\boxed{v = \frac{1}{K}\,p\;;\quad p = K\,v}$$

risposta volumetrica (relazioni di proporzionalità tra p e v, diretta e inversa)

ove $$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}} > 0$$ modulo di comprimibilità volumetrica o modulo di volume ("bulk modulus")

$K \to \infty$, $\nu \to \frac{1}{2}$

materiale elasticamente incomprimibile