

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

"Cerchio" di (Culmann) - Mohr (circolo e circonferenza es. $\sigma_{III} = 0 \Rightarrow \sigma_z = 0$)
 [1866] [1882] di Mohr)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \cdot \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Rappresentazione analitico-grafica delle componenti di sforzo (piano), normale σ e tangenziale τ , al variazione delle grecitura nel piano (α)

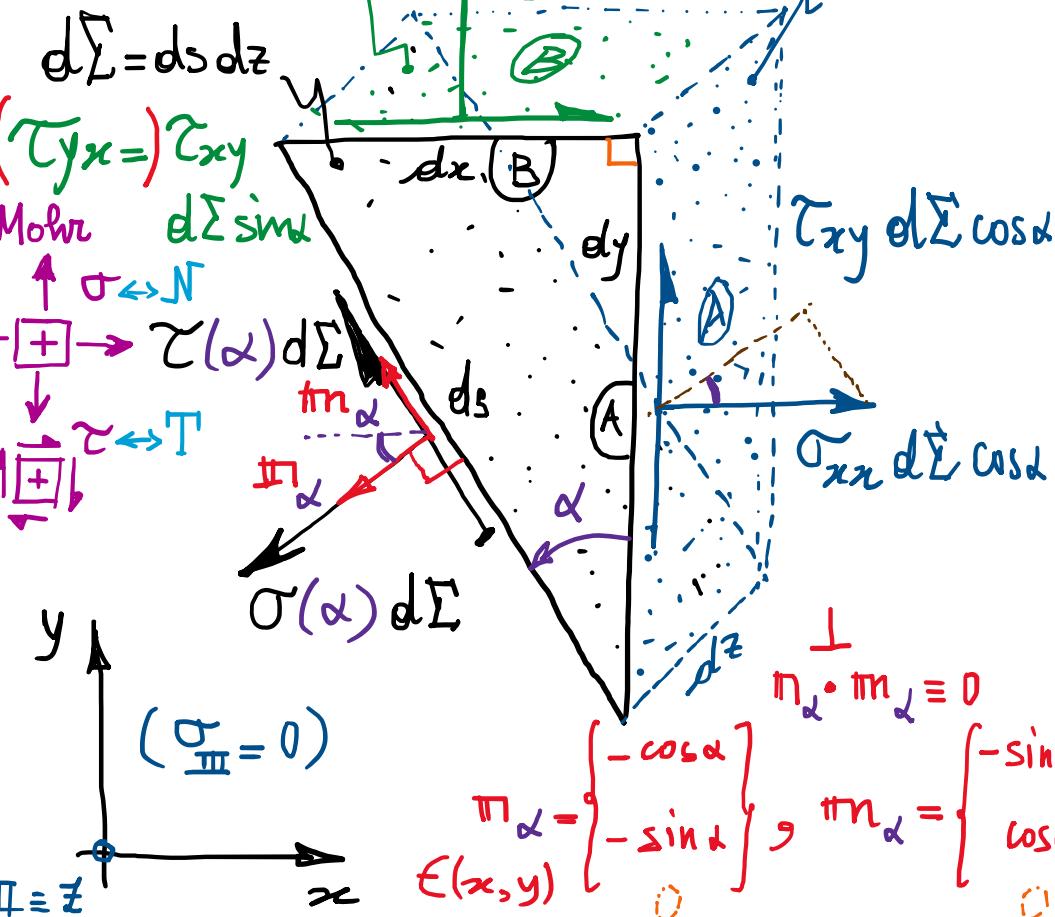
[es. stato di sforzo nelle travi alla DSV]

(vedi relazione di Cauchy; caso particolare)

$$d\Sigma = dx dz = ds \sin \alpha dz$$

$$\frac{B}{\Sigma} = \sin \alpha d\Sigma$$

$$d\Sigma_A = dy dz = ds \cos \alpha dz = \cos \alpha d\Sigma$$



Equilibrio alle traslazioni: ($\nabla d\Sigma$) [tra forze]

$$\nabla_\alpha: \begin{aligned} \sigma d\Sigma &= \sigma_{xx} d\Sigma \cos \alpha + \sigma_{yy} d\Sigma \sin \alpha \\ &+ \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$M_\alpha: \begin{aligned} \tau d\Sigma &= \sigma_{xx} d\Sigma \sin \alpha - \sigma_{yy} d\Sigma \cos \alpha \\ &- \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma(2\alpha) = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + \tau_{xy} 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau(2\alpha) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin^2 \alpha} - \tau_{xy} (\underbrace{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}_{\cos 2\alpha}) \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Relazioni finali:

Si sono ottenute le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano di Mohr ($\sigma_3 \tau$) di:

↑ piano delle componenti di
spazio normale e tangenziale
su facce di giacitura &

Infatti:

$$\left(\sigma - \underbrace{\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}}_{\sigma_c}\right)^2 + (\tau_{xy})^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha + \tau_{xy}^2 \sin^2 \alpha + 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$+ \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

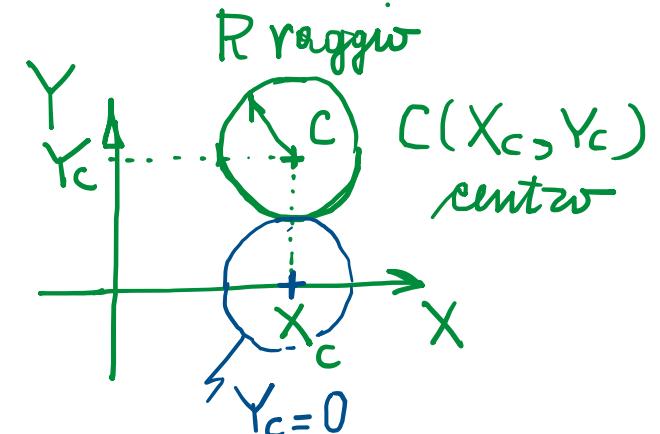
$$= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

Raggio
Y
A
C

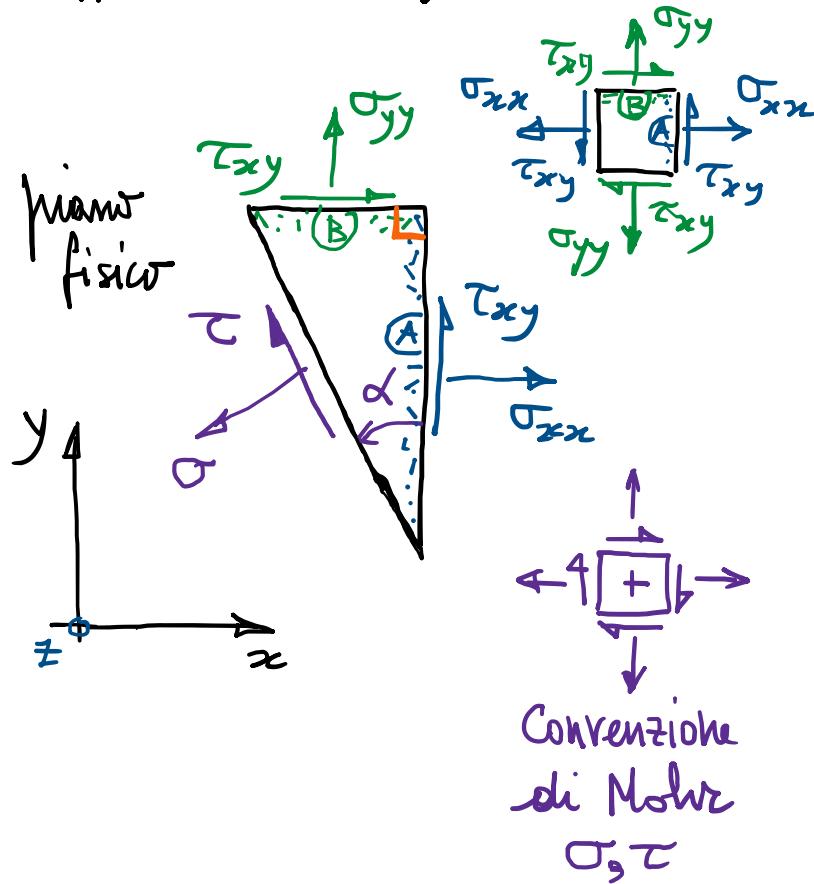
$$(0 - \sigma_c)^2 + (\tau - \tau_c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2$$

$\tau_c = 0$

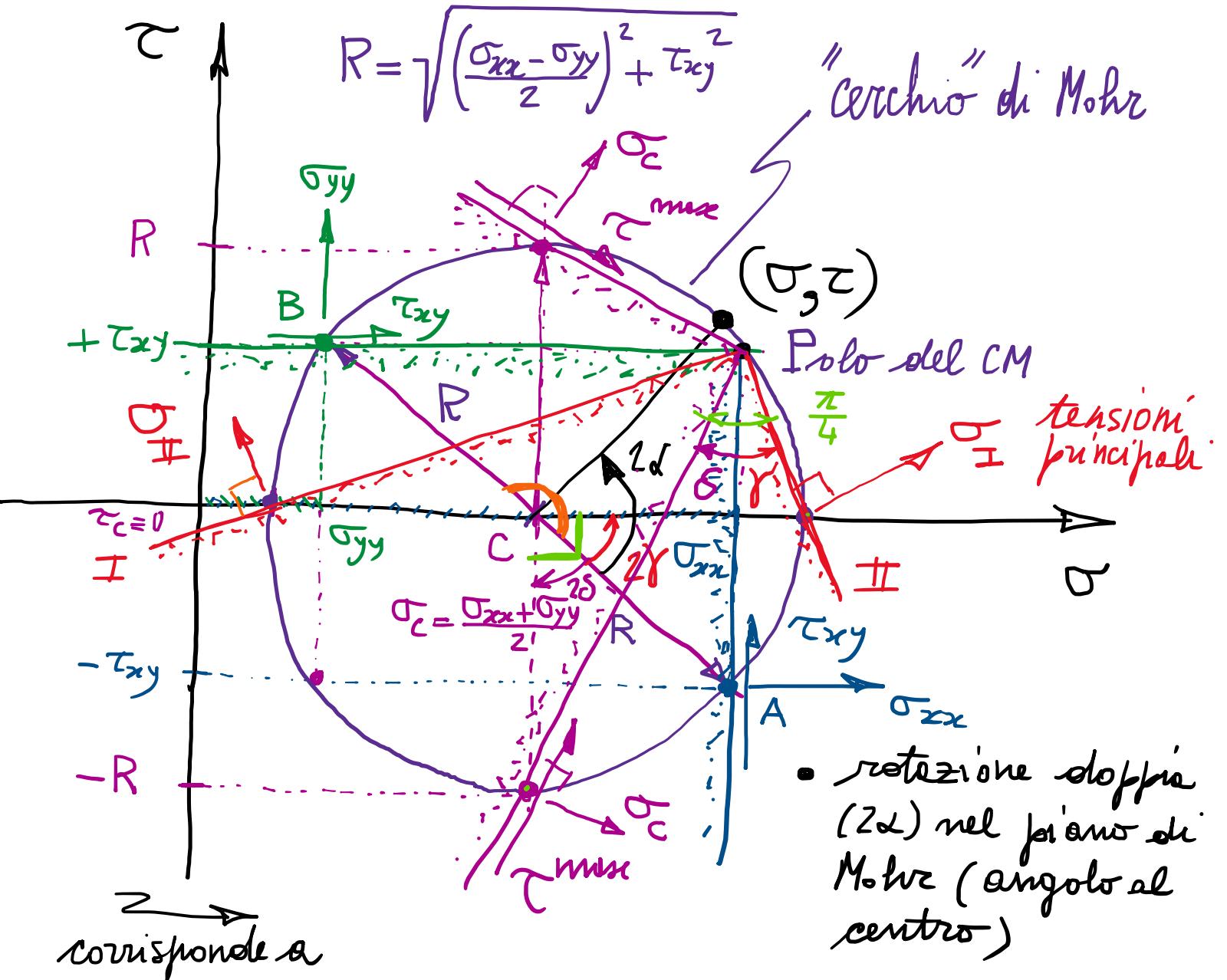
Equazione di circonferenza
nel piano X, Y



Rappresentazione grafica nel piano di Mohr (σ, τ):



- giaciture con rotazione α nel piano fisico
(nel sovrapporre le facce verticali a quelle inclinate)



Commenti:

- Rotazioni α nel piano fisico corrispondono a rotazioni doppie (2α) nel piano di Mohr (piano delle componenti σ, τ).
- I punti A e B del Cerchio di Mohr (CM) corrispondenti a componenti σ, τ su facce mutuamente \perp , risultano diametralmente opposti sul CM ($2\alpha = \pi$).
- Le tensioni principali nel piano $\sigma_{I,II}$ sono agevolmente individuate dalle intersezioni del CM con l'asse σ ($\tau=0$) e rappresentano i valori max e min dello sforzo normale al variare di tutte le sezioni nel piano:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{soluz. eq. ne caratteristiche} \\ \sigma_{III}=0 \Rightarrow I_3=0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{eq. ne di} \\ 2^{\text{o}} \text{ grado} \end{array} \end{array}$$

- La tensione tangenziale max in valore assoluto è individuata in corrispondenza di σ_c ed è rappresentata dal raggio del CM:

$$\tau^{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

[N.B.: (τ^{\max})
essa si accompagna
a $\sigma = \sigma_c$; punti del
CM ($\sigma_c, \pm \tau^{\max}$)]

- Polo del CM, avente le seguenti proprietà: la retta per esso (P) e il generico p.t. σ, τ del CM rappresenta la giacitura delle facce su cui insistono tali componenti σ, τ .
[possibilità di rappresentare il piano "fisico" sovrapposto al piano di Mohr] \rightarrow caratteristiche
su CM

- Tramite P sono ferentate individuabili specifiche direzioni γ del piano, es.:
- direzioni principali I, II , inclinate di γ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

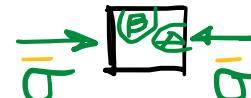
- direzioni secondo cui agisce la τ^{\max} (insieme a σ_c), inclinate di angolo δ tale che:

$$2\delta + 2\gamma = \pi/2 \rightarrow \delta + \gamma = \pi/4 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$$

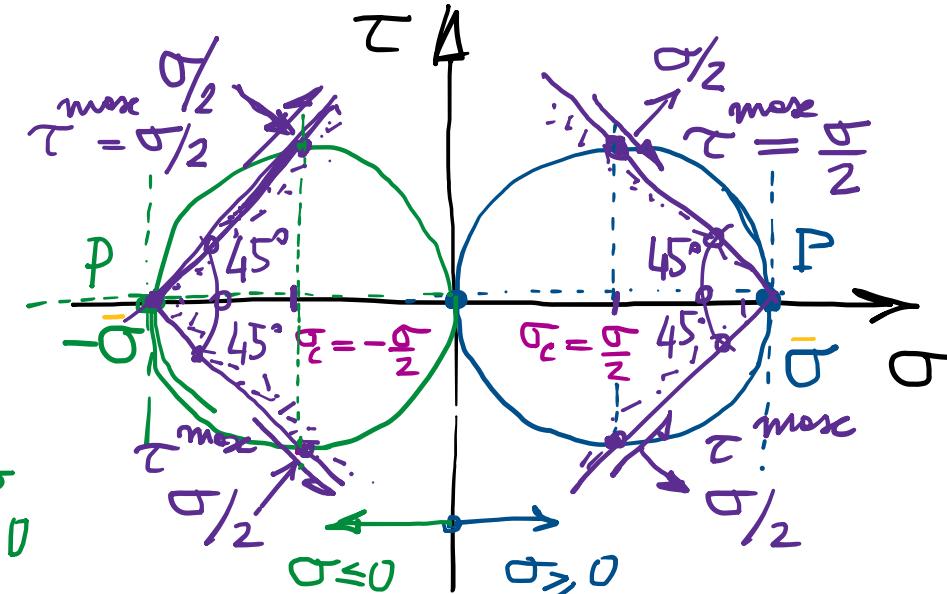
- pertanto, le direzioni secondo cui agisce la τ^{\max} risultano sempre inclinate a 45° rispetto alle direzioni principali.

Esempi tipici:

- Stato di spazio monomassiccio di trazione σ e compressione σ_c

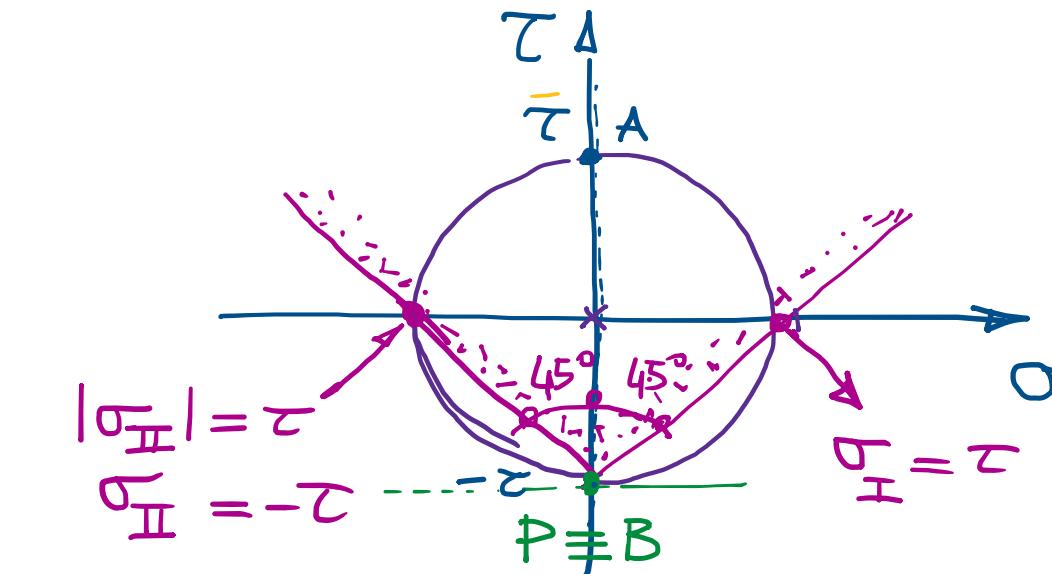
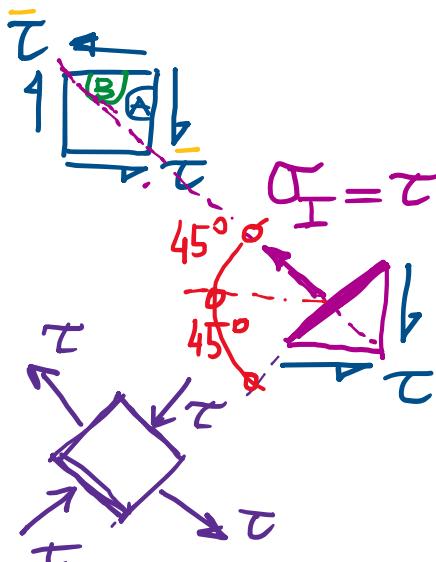


CM tangente all'asse τ , tutto nel semipiano $\sigma \leq 0$



CM tangente all'asse τ , tutto nel semipiano $\sigma \geq 0$ nell'origine

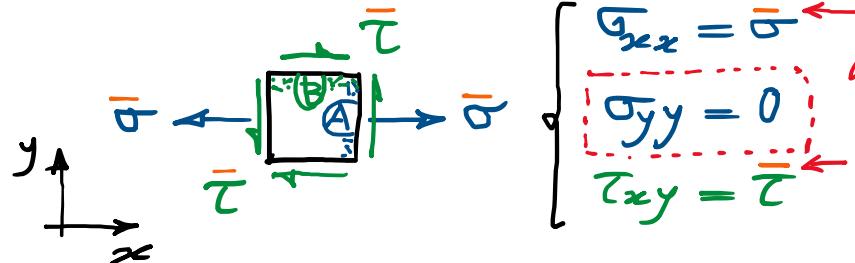
- Stato di spazio di taglio puro



CM centrato sull'origine degli assi del piano di Mohr

tensioni principali uguali e di segno opposto:
 $\sigma_I = -\sigma_{II}$ ($\sigma_I = -\sigma_I$)

- CM per stato di sforzo piano alle de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \bar{\sigma} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = \bar{\tau} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{valori} \\ \text{assegnati} \end{array}$$

convenzioni
CM

particolare stato di sforzo piano con una componente di sforzo normale nulla

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$= \bar{\tau}^{max}$$

tensioni principali

$$\sigma_{H,II} = \sigma_c \pm R$$

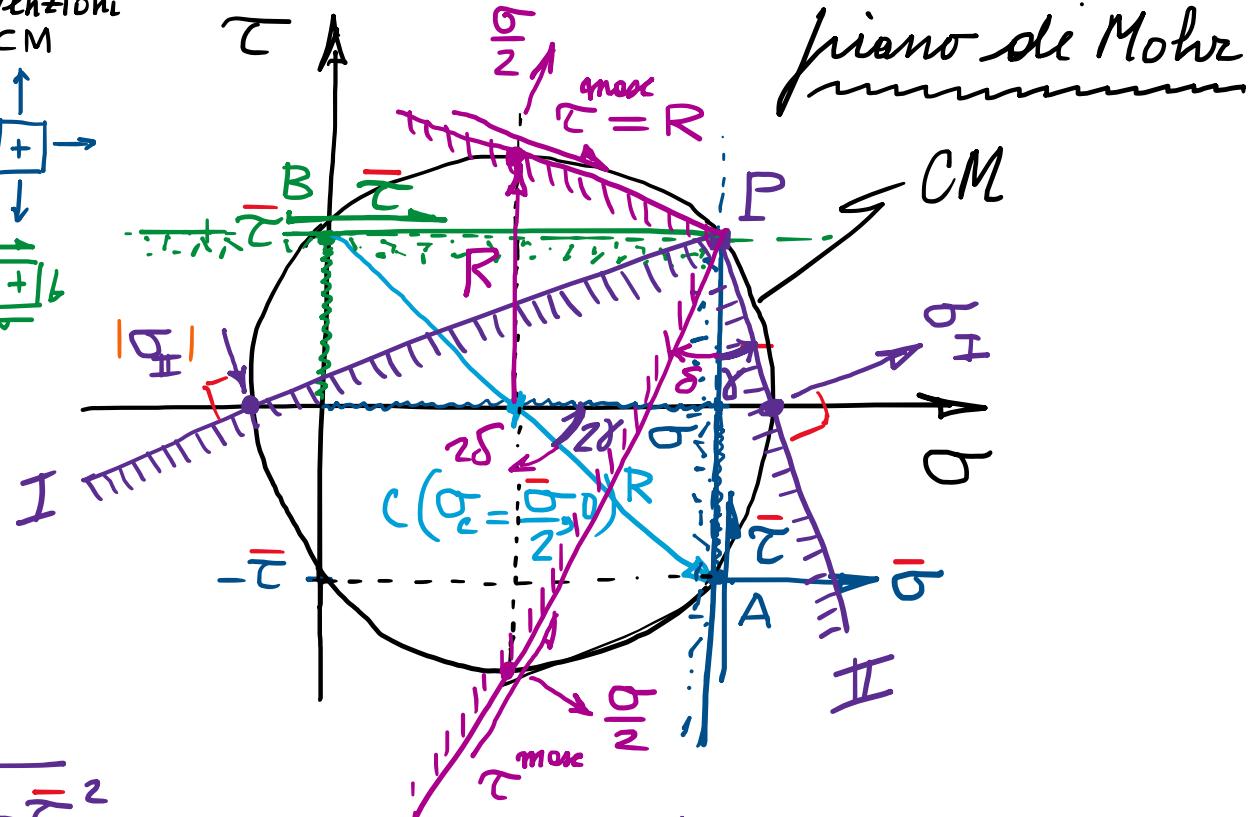
$$= \frac{\bar{\sigma}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$\sigma_H \cdot \sigma_{II} = (\sigma_c + R)(\sigma_c - R)$$

$$= \sigma_c^2 - R^2$$

$$= \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \bar{\tau}^2 \leq 0$$

$\bar{\tau}^{max}$ nel piano \rightarrow tensioni principali di segno opposto



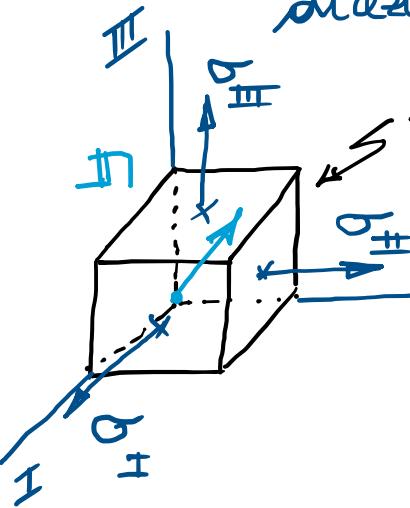
$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar{\tau}}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \text{inclinaz.} \quad & \gamma = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma} \right) \\ \text{dirz. princ.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{inclinaz.} \quad & \delta = \frac{\pi}{4} - \gamma \quad (2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2}) \\ \text{dirz. secondo} \quad & \\ \text{cui agisce le } \bar{\tau}^{max} \quad & \delta + \gamma = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Cerchi e Arbèlo di Mohr (sforzo triassiale)

III. direzioni principali di sforzo



lementino 3D ritagliato
secondo la terza
principale

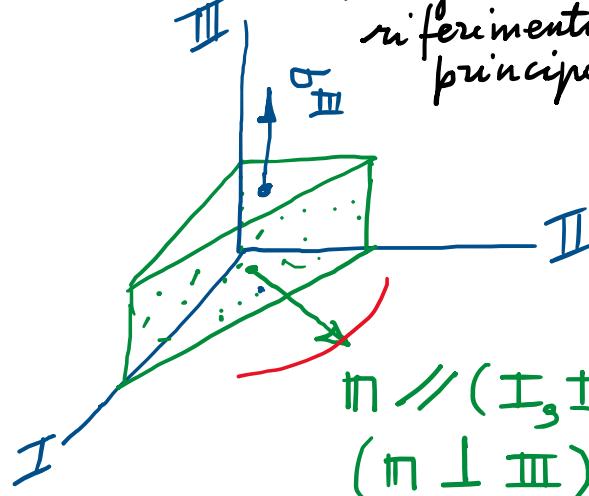
I $\frac{d}{H} \geq \frac{d}{H} \geq \frac{d}{H}$

tens. principali

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_H \\ \sigma_{H\bar{H}} \\ \sigma_{\bar{H}\bar{H}} \end{bmatrix}$$

*ice sf 220
whole nel*

matrice sfizzo
diagonale nel
riferimento
principale



九ノ(ニ, ニ)
(九上三)

arbëro di Mohr

N.B. τ definite in modulus
in 3D

piani di Mohr

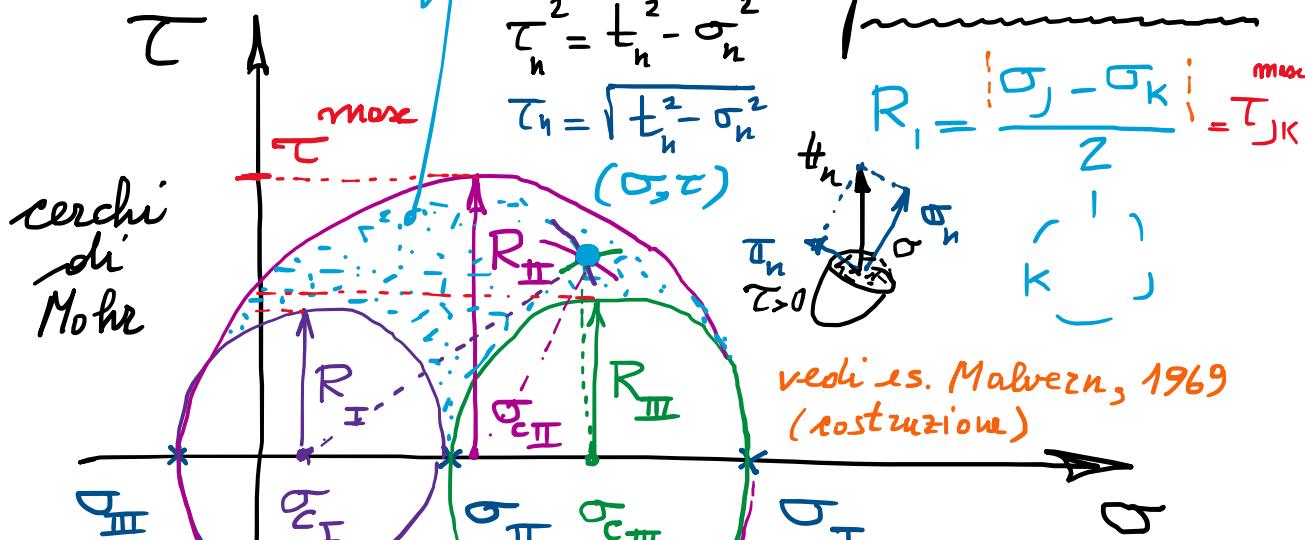
$$\begin{aligned} t_n &= \sigma_n + \tau_n \\ \tau_n^2 &= t_n^2 - \sigma_n^2 \\ \tau_n &= \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} \end{aligned}$$

$$\bar{T} = T - \sigma$$

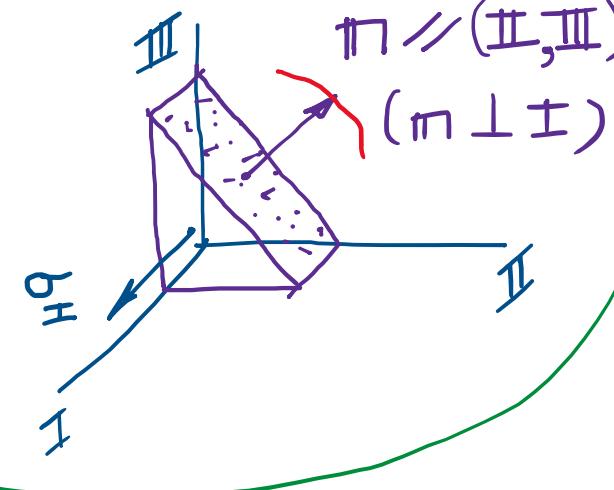
$$C_1 = \sqrt{+^2 - 0^2}$$

The diagram shows a cylindrical fluid element with radius r and height z . A coordinate system is centered at the top of the cylinder. The vertical axis is labeled θ_n , the horizontal axis is labeled π_n , and the depth axis is labeled $\tau_n > 0$. A vector ω representing angular velocity is shown as a blue arrow pointing upwards along the θ_n axis. The angle between the θ_n axis and the ω vector is labeled α_n .

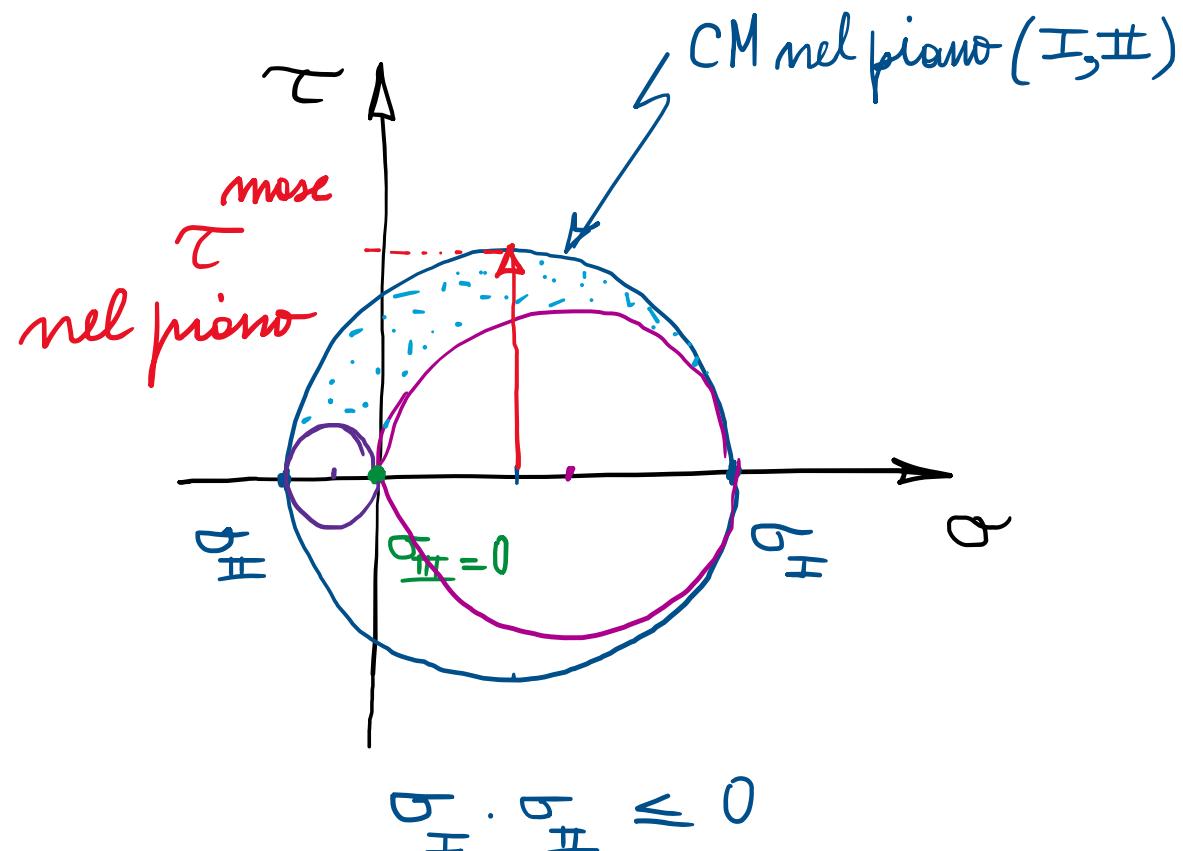
vedi es. Malvezzi, 1969
(costruzione)



punto (σ, τ) è assesto
di Mohr

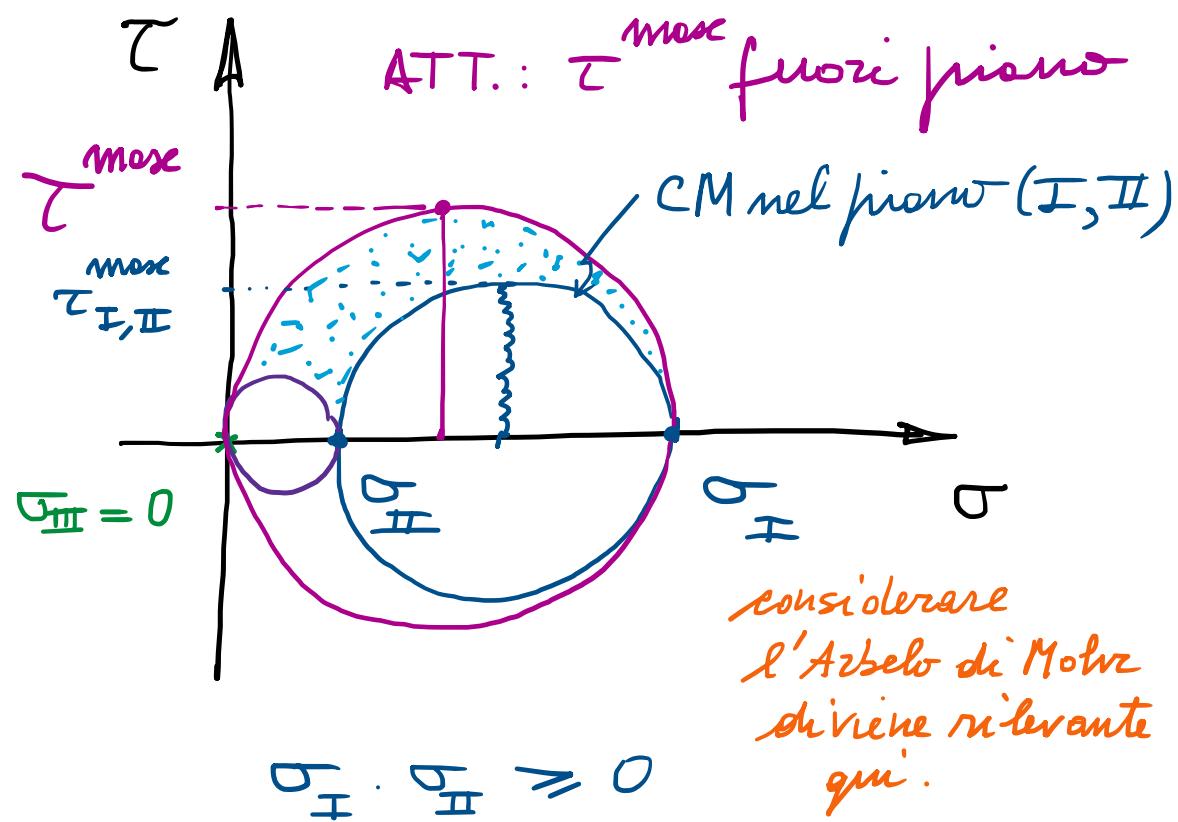


- Rilevanza dell'Arbolo di Mohr per stato di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$) [ai fini della verifica di resistenza]



tensioni principali
di segno opposto

il CM nel piano è il CM più "grande" (R^{max})
 $\Rightarrow \tau^{\text{max}}$ colte nel piano



tensioni principali
di segno uguale

il CM nel piano non è il più "grande"
 $\Rightarrow \tau^{\text{max}}$ avviene fuori piano

considerare
l'Arbolo di Mohr
diviene rilevante
qui.