

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 14

# Cinematica dei continui : (definizione di deformazione; equazioni di congruenza interna)

- Misura (intensiva) delle deformazione

(in regime di piccole deformazioni)  $\rightarrow$  piccoli gradienti di spostamento

$\Delta(\mathbf{x})$  vettore spostamento  
 $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  tensori di deformazione

$$|\gamma_{ij}| \ll 1 \sim 0.001 = 1\%; 0.01 = 1\%$$

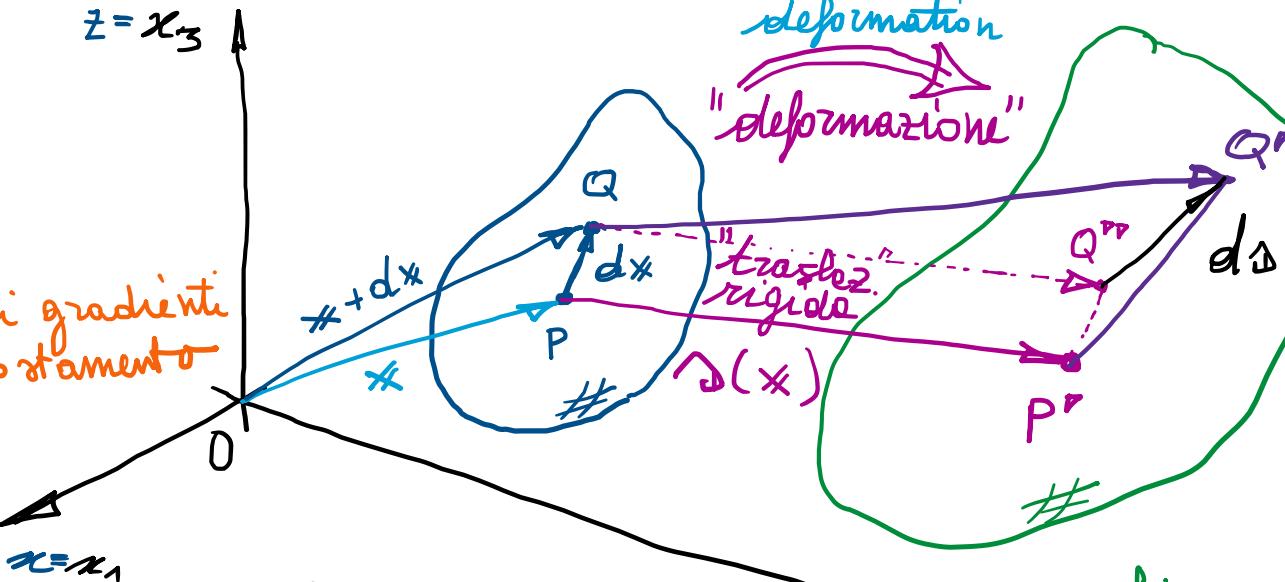
$\Psi(\mathbf{x}) = \nabla \Delta(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Delta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  tensori gradiente di spostamento (dove contenere le deformazioni puro: "strain")

=  $\varepsilon + \vartheta$  decomposizione additiva di  $\Psi$

con :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\Psi + \Psi^T) \text{ parte simmetrica}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} (\Psi - \Psi^T) \text{ parte antisimmetrica}$$



configurazione di riferimento indeformata

configurazione corrente deformata

$$\Delta(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x}) + d\Delta$$

$$\begin{aligned} d\Delta &= \Delta(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \Delta(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\partial \Delta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \dots \\ &= \nabla \Delta(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \underline{\epsilon} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

derivata parziale

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ; \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gradiente =  $\epsilon_i$

( $\gamma_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j}$ , 9 componenti)

"strain"

deformazione

pura

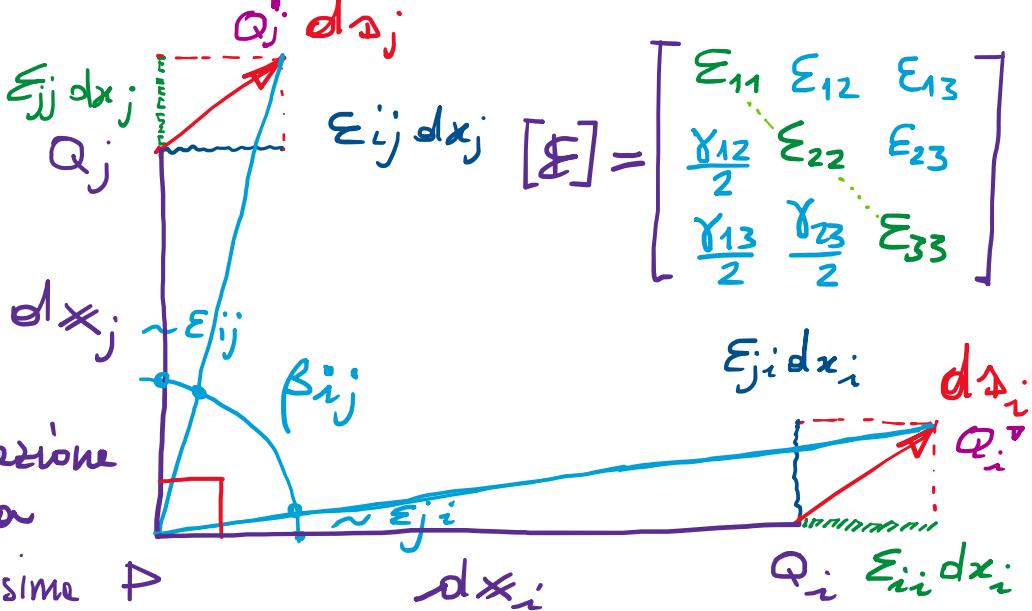
$$[\epsilon^T = \epsilon ; \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{i,j} + \gamma_{j,i})]$$

rotazione

rigide

infinitesime

- Significato fisico di  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (componenti  $\varepsilon_{ij}$ ):  $\Psi = \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow d\mathbf{x} = \Psi \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x} \Leftrightarrow ds_i = \varepsilon_{ij} dx_j$

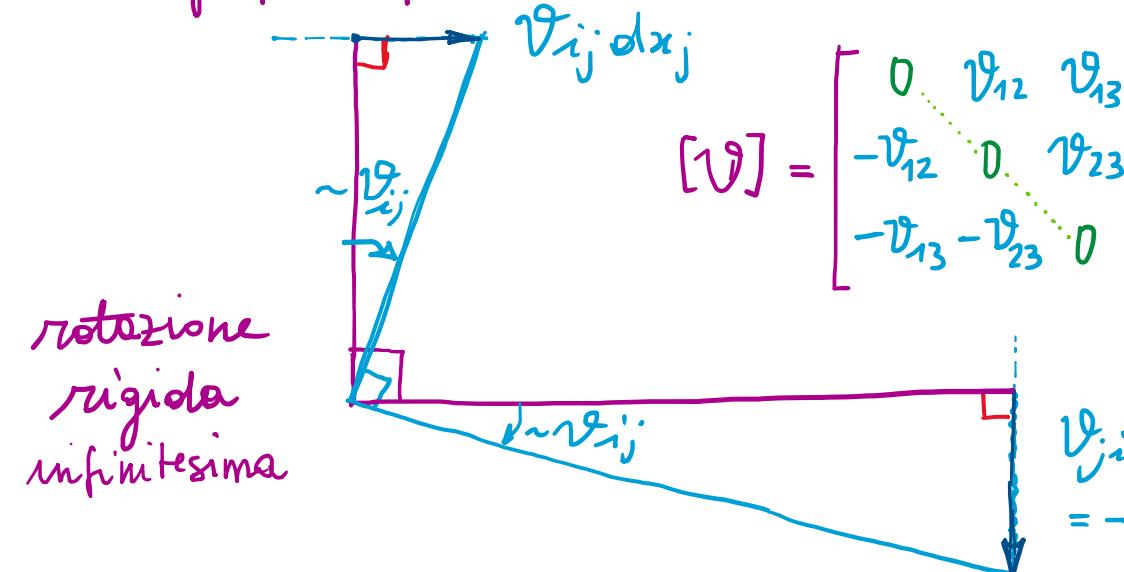


$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$i=j$   $\varepsilon_{ii}$  = allungamento specifico nelle direzioni  $i$  (vedi  $E = \frac{\Delta l}{l_0}$ )

$i \neq j$   $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$   $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij}$   
scorrimento angolare tra fibre  $i$  e  $j$   
... deformazione tagliente

- Significato fisico di  $\boldsymbol{\vartheta}$  (componenti  $\vartheta_{ij}$ ):  $\Psi = \boldsymbol{\vartheta}$  ( $\boldsymbol{\vartheta}^T = -\boldsymbol{\vartheta}$ ;  $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$ ) [ $\vartheta_{ii} = 0$ ]



$$[\boldsymbol{\vartheta}] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$i=j$   $\vartheta_{ii} = 0$   
 $i \neq j$   $\vartheta_{ij}$  rotazione rigida infinitesima delle fibre  $i, j$  (rispetto all'asse K)

$$-2\omega_K = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{\vartheta}_{i,j} - \dot{\vartheta}_{j,i} \quad (2\dot{\omega} = \text{rot } \boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \boldsymbol{\omega})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'angolare velocità è il prodotto vettoriale

## Equazioni di congruenza interne (o di compatibilità)

- CN di congruenza per il campo  $\varepsilon_{ij}(x_k)$ :

Scarto Residuo

$$S_{zz} = R_z = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} = 0 \quad (*)$$

$$S_{xx} = R_x = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0$$

$$S_{yy} = R_y = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0$$

$$S_{yz} = U_x = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} = 0$$

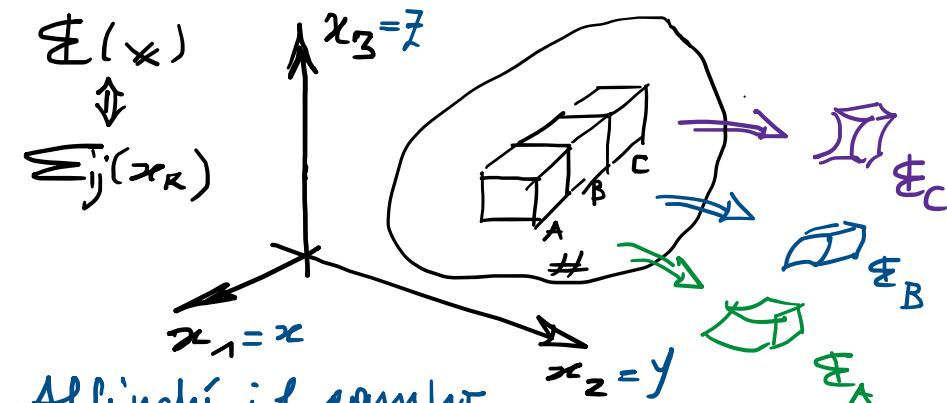
$$S_{zx} = U_y = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \quad (*)$$

$$S_{xy} = U_z = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} = 0$$

- Scritture compatte (de Saint Venant) ~ 1884

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kij} = \sum_{k=1}^4 \varepsilon_{ikj} + \sum_{k=1}^4 \varepsilon_{ije} \quad 3 = 81 \rightarrow 6 \text{ distinte}$$

$$(\text{rot} = \nabla \wedge) \quad \mathbb{S} = \text{rot rot } \mathbb{\varepsilon} = 0 \quad ; \quad \mathbb{R} = \mathbb{U} = \Phi$$



Affinché il campo di deformazione risulti compatibile ("riesembri lo stesso dei solidi deformati") le variazioni spaziali del  $\mathbb{\varepsilon}(x)$  debba soddisfare certe relazioni

$$\text{Se } \mathbb{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \Phi + \nabla \Phi^\top) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij,j} + \alpha_{ji,i}) :$$

$$\cancel{\alpha_{xx,xyy}} + \cancel{\alpha_{yy,yxx}} - \cancel{\frac{1}{2} (\cancel{\alpha_{xy,y}} + \cancel{\alpha_{yx,x}})}_{,xy} = 0$$

per il Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni (se  $\mathbb{\varepsilon}$  è congruente, allora  $\Rightarrow = 0$ )

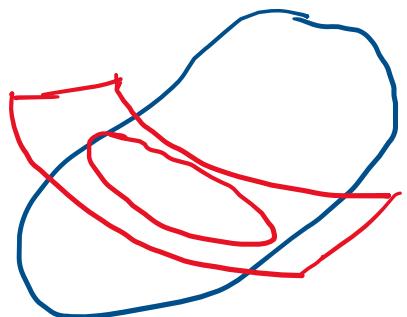
(equivalenti a 3 relazioni indipendenti, in quanto volgono le identità di Bianchi seguenti)

Identità di Bianchi (3 relazioni): [ per Th. di Schwarz ]

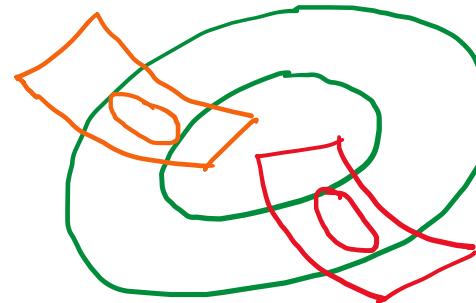
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} \stackrel{\downarrow}{=} 0 \\ U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} = 0 \\ U_{y,z} + U_{x,y} + R_{z,z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{anche per campo } \mathbf{S}(x) \text{ non congruente}$$

Sono CS di congruenza? (integrandi  $\mathbf{S}$  si)

ottiene un  
campo  $\mathbf{S}$   
compatibile?)



Sì, per corpi monocompatti  
(si scindono in sole parti con  
un unico taglio)



No, per corpi pluricompatti  
(es. biconnesso)

?

$\Delta \mathbf{S} \neq 0$   
Occorre in più una  
condizione di  
compatibilità alle  
interfacce che giungono  
ad impostare  $\Delta \mathbf{S} = 0$

(per ogni interfaccia  
aggiuntiva, rispetto a  
corpo monocompatto)