

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

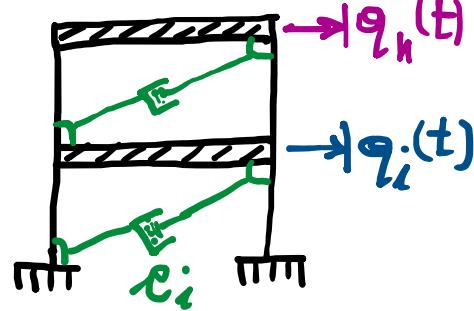
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 14

# Sistemi MDOF smorzati



riscosol. lin.  $\ddot{z}_i(q_k)$   
"dissipatore"  
smorzatore  
 $i$ -esimo  
( $i \in \mathbb{N}$ )  
 $c_i > 0$   
coeff. di  
smorzamento f. ne di dissipazione (Rayleigh)

$$F_{d,i}^z = c_i \dot{z}_i$$

$$D_i = \frac{1}{2} \dot{z}_i F_{d,i}^z = \frac{1}{2} \dot{z}_i c_i \dot{z}_i$$

- Smorzamento intrinseco "spontaneo" all'interno del sistema strutturale (con entità limitata per strutture civili).

$$\rightarrow \vec{F}_d^z = C_z \dot{\vec{z}}; \quad F_d^z = \{F_{d,i}^z\}_{i=1}^{n_d}, \quad C_z = \text{diag}[c_i], \quad \vec{z} = \{\dot{z}_i\}_{i=1}^{n_d}$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{2} \vec{z}^T \vec{F}_d^z = \frac{1}{2} \vec{z}^T C_z \vec{z} = \frac{1}{2} \vec{z}^T \vec{z}$$

forme quadrate.

$$= \frac{1}{2} \vec{q}^T \underbrace{\frac{\partial z}{\partial q}}_{\text{C}} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial q}}^T \vec{q} = \frac{1}{2} \vec{q}^T C \vec{q} \geq 0$$

C: matrice di smorzam.  
 $n \times n$  simm. e semidef. pos.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Leftrightarrow C = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

Relazione tra  $\dot{z}_i$  e  $q_k$ : "chain rule" (derivate di f. ne composta)

$$\dot{z}_i = \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial q} \dot{q}$$

$$C = \sum_i C_i$$

$$C = \sum_i C_i = \sum_i \left[ \frac{\partial z_i}{\partial q} \right] \left[ \frac{\partial z_i}{\partial q} \right]^T$$

$$D = \sum_i D_i = \frac{1}{2} \sum_i \dot{z}_i c_i \dot{z}_i = \sum_{i,j,k} C_{jk} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot c_i \cdot \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \dot{q}_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} c_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

- Eq. m. del moto: sulla struttura sugli smorzatori
- $M\ddot{q}_l + Kq_l = Q(t) + Q_d(t)$  con  $Q_d(t) = -\bar{F}_d(t) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$  =  $-C\dot{q}_l$  (v. eq.m di Lagrange)
- sist. non smorzato

$$M\ddot{q}_l + C\dot{q}_l + Kq_l = Q(t)$$

autorett. ( $M_l, K$ )  $\Rightarrow \Phi = [\phi_i]$

coordinate principali  $q_l = \sum_i p_i \phi_i$   
coordinate legrangiane

$$q_l = \sum_i p_i \phi_i$$

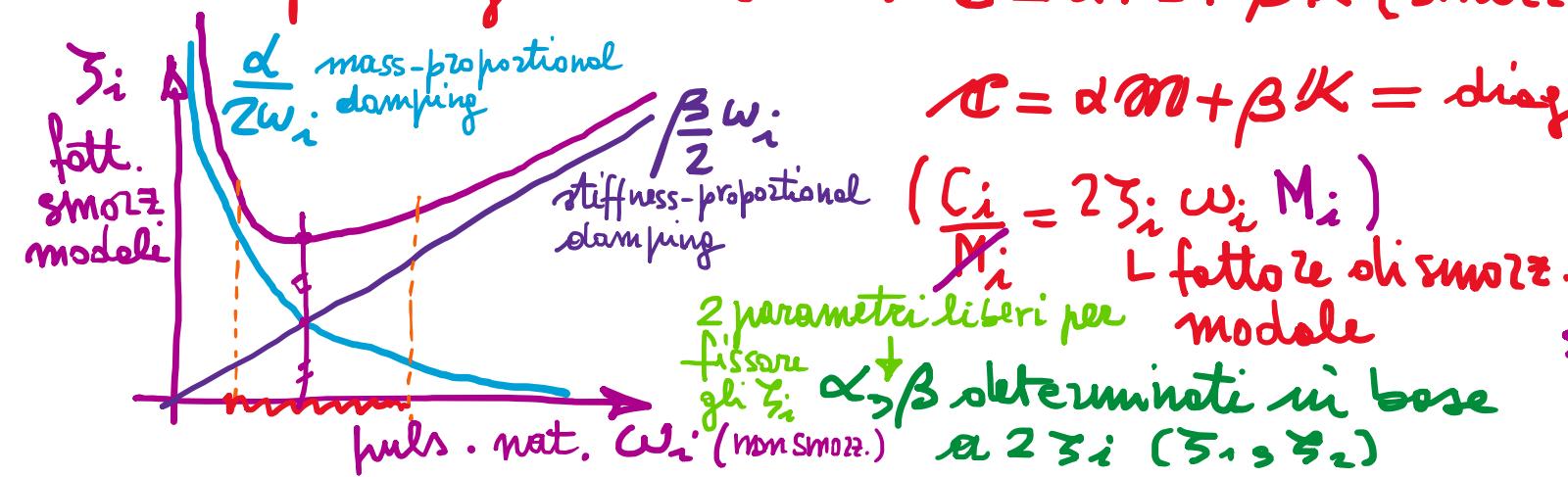
- Traf. in coord. principali:  $q_l = \sum_i \phi_i p_i = \Phi P$

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \ddot{P} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C} \dot{P} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K} P = \Phi^T Q = P(t) \text{ ove } \boxed{C \neq \text{diag}} \quad \boxed{C_i = \Phi_i^T C \Phi_i} \text{ in generale}$$

$$K = \text{diag} [K_i = \Phi_i^T K \Phi_i] \neq$$

- In generale C non diagonale: coeff. delle equaz. lin.

- CS per diagonalizzazione:  $C = \alpha M + \beta K$  (smorzamento "classico" o alla Rayleigh)



$$C = \alpha M + \beta K = \text{diag} [C_i = \alpha M_i + \beta K_i]$$

$$(C_i = 2\zeta_i w_i M_i)$$

$\frac{C_i}{M_i}$  fattore di smozz.

2 parametri liberi per modale  
fissare gli  $\zeta_i$   $\alpha, \beta$  determinati in base a  $2\zeta_i$  ( $\zeta_1, \zeta_2$ )

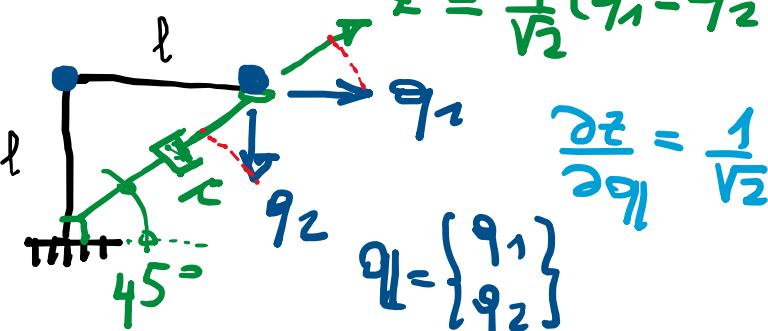
$$2\zeta_i w_i M_i = \alpha M_i + \beta \frac{K_i}{M_i}$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2w_i} + \frac{\beta}{2} w_i$$

descrizione fattori di smorzamento modali

- Assumere  $\mathcal{R} = \text{diag} [C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}] \Rightarrow C = \Phi^{-T} \Psi^{-1}$   $\Leftrightarrow \mathcal{C} = \Phi^T C \Psi$   
 (si ipotizzano gli  $\zeta_i$  uguali o diversi per i vari modi, e si risale alla matrice di smorzamento  $C$  in coord. legrangiane)  $\zeta_i \approx 1\%$ ,  $2-7\%$   
 $5\%$  tipici.
- Valide per smorzamento intrinseco al sistema strutturale.
- Nel caso di dispositivi aggiuntivi  $\mathcal{C}$  non diag. in generale.

### • Esempio:

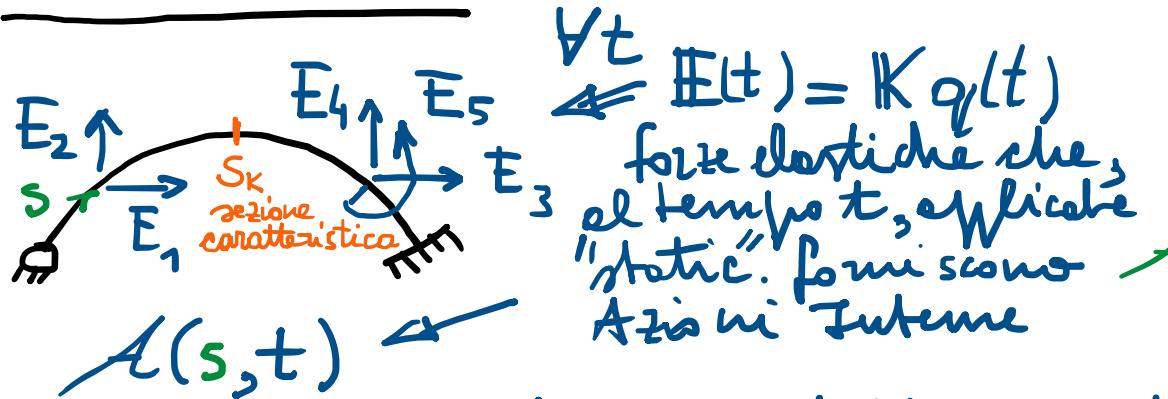


$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2)$ ,  $\dot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$  [N.B.  $\Rightarrow q_1 = q_2 \Rightarrow z = 0$ ]  
 $\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$   
 $q_l = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$

$C = \frac{\partial z}{\partial q_l} C \frac{\partial z^T}{\partial q_l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}$   
 $= \frac{1}{2} C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   $C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial q_i \partial q_j}$   
 $C = \Phi^T C \Psi$  non diag.  
 è singolare ( $\det C = 0$ ) (semidef. pos.)

Idem da scritt. di  $D = \frac{1}{2} c \dot{z}^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2)$

## Azioni interne



- A.I. per  $q_j = 1 \Rightarrow E_j = K_{ij} \Rightarrow A_j(s)$   
( $q_i = 0, i \neq j$ )

indotte da forte modelli forze d'inerzia modale

$\bar{\mathbb{E}}_K = K\Phi_K = \omega_K^2 M \Phi_K = \bar{F}_{IK} \Rightarrow \bar{A}_K(s)$ :  $K$  indice del modo

forze elastiche modali  $\Phi$  agli autovettori

$$A(s, t) = \sum_K \bar{A}_K(s) p_K(t) = \bar{A}(s)^T \bar{p}(t)$$

$$- A(s, t) = \bar{A}(s) \underbrace{\Phi}_{q(t)} \bar{p}(t) = (\Phi^T \bar{A}(s))^T \bar{p}(t) \Rightarrow \left\{ \bar{A}(s) = \Phi^T \bar{A}(s) \right\} (A(s) = \Phi^{-T} \bar{A}(s))$$

- Stima valori  $\max_{i \in I} \bar{A}_i(s)$

$$\text{SRSS} \quad A(s)^{\max} = \sqrt{\sum_K (\bar{A}_K(s) p_K^{\max})^2} = \sqrt{\sum_j (\bar{A}_j(s) q_j^{\max})^2} \quad (\text{Square Root of Sum of Squares})$$

$\mathbb{E}_j = \{E_{i,j}\}$   $j$  indice del goll

$$\bullet \text{A.I. } \mu q_j = 1 \Rightarrow E_j = K_{ij} \Rightarrow A_j(s) \\ (q_i = 0, i \neq j)$$

$$A(s, t) = \sum_j A_j(s) q_j(t) = A(s)^T \bar{q}(t)$$

- A.I. modelli, per  $\mu_K = 1 \Rightarrow q = \Phi_K$  (autovettori)  
( $\mu_i = 0, i \neq K$ )

forze d'inerzia modale

$\bar{A}(s, t) = \sum_K \bar{A}_K(s) p_K(t) = \bar{A}(s)^T \bar{p}(t)$

$$\bar{A}(s) = \Phi^T \bar{A}(s)$$

$$\bar{A}_K(s) = \Phi_{Kj} \bar{A}_j(s)$$

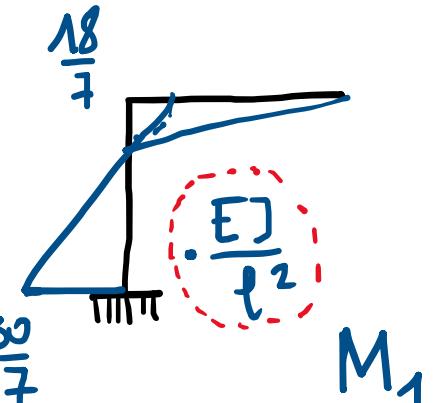
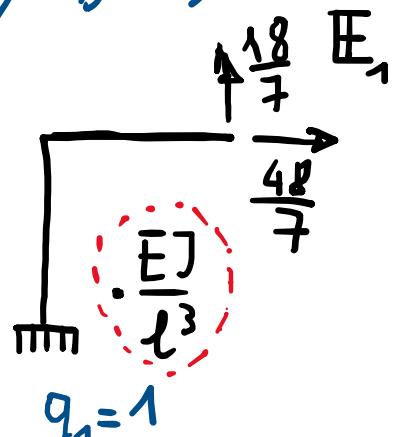
Esempio 2 DOF :

$$q_1 \text{ (rigid body rotation)} \quad q_2 \text{ (horizontal displacement)}$$

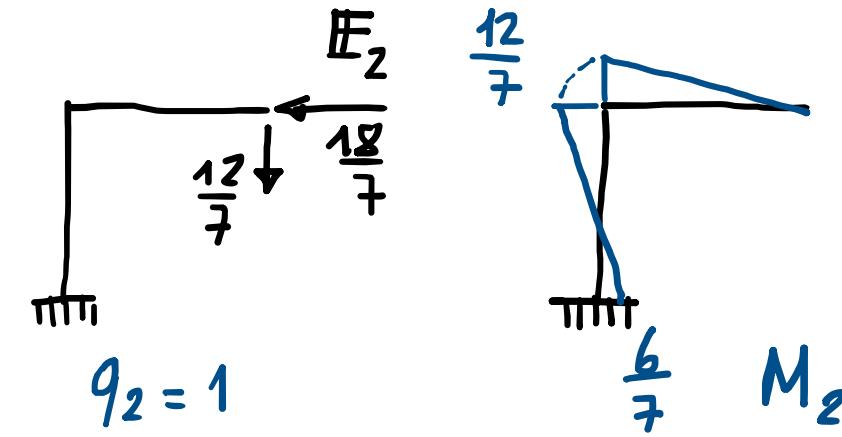
$$K = \frac{6}{7} \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \ddot{E}_i = K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i$$

$$= \frac{EJ}{l^3} \lambda_i \begin{cases} 3\phi_{i1} \\ 2\phi_{i2} \end{cases}$$

$\lambda_i$  ( $q_j = 1$ )



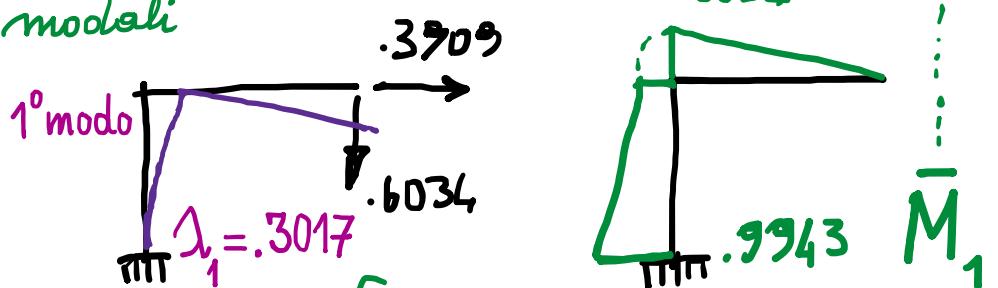
$M_1$



$M_2$

$\bar{A}_K$  ( $\mu = 1$ )  
azioni interne  
modali

$$\bar{E}_1 \rightarrow \bar{M}_1 = M_1 \phi_{11} + M_2 \phi_{12}$$



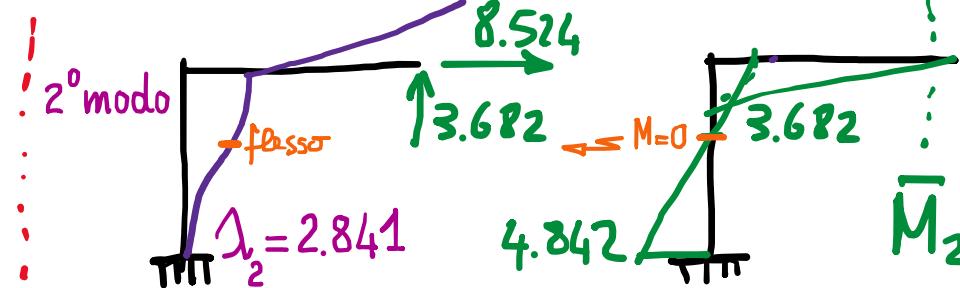
$\bar{M}_1$

$$\Phi_1^T = \begin{bmatrix} .4320 & 1 \end{bmatrix}$$

1° autovettore

$$\begin{cases} .3909 = \frac{48}{7} \cdot .4320 - \frac{18}{7} \cdot 1 = \frac{2.736}{7} \\ .6034 = -\frac{18}{7} \cdot .4320 + \frac{12}{7} \cdot 1 = \frac{4.724}{7} \end{cases}$$

$$\bar{E}_2 \rightarrow \bar{M}_2 = M_1 \phi_{21} + M_2 \phi_{22}$$



$\bar{M}_2$

$$\Phi_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -.6481 \end{bmatrix}$$

2° autovettore

$$\begin{cases} 8.524 = \frac{48}{7} \cdot 1 - \frac{18}{7} \cdot (-.6481) = \frac{59.67}{7} \\ -3.682 = -\frac{18}{7} \cdot 1 + \frac{12}{7} \cdot (-.6481) = -\frac{25.78}{7} \end{cases}$$

## Concetti fondamentali:

- smorzamento strutturale (con riferimento specifico ai sistemi dinamici in ingegneria civile):
  - intrinseco, spalmato all'interno delle strutture; endemico nella presenza di effetti dissipativi in sistemi reali.
  - predisposto, tramite l'inserzione di dispositivi appositi (smorzatori), atti ad incrementare lo smorzamento globale, in particolare in relazione a gli specifici (es. controventi dissipativi).
- generalizzazione da SDOF a MDOF:  $F_d = c \ddot{u} \Leftrightarrow F_d = C \ddot{q}_L$  -  
Viene ad introdurre la matrice di smorzamento  $C$ , in generale del tutto superiore delle matrici  $M$  e  $K$  sulle quali è incentrato il pb. (generalizzato) agli autovalori  $K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i$ , che consente, in dinamica molecola, di disaccoppiare le eq. di moto del moto di sistema non smorzato.

- Si può assumere di preservare le proprietà di diagonalizzazione (disaccoppiamento) del sistema delle eq. m. del moto, supponendo, tipicamente per smorzamento intrinseco strutturale, che la matrice di smorzamento  $C$  possa risultare diagonale in coord. principali ( $C = \text{diag} [C_i = 2\zeta_i \sqrt{k_i M_i}]$ ) - ciò può risultare ragionevole alla luce delle incertezze insite nella definizione dello smorzamento strutturale, e fronte delle complessità del modello strutturale che mira a rappresentarlo.

— o —

- Determinazione delle Azioni Interne  $A(s, t)$
- $(N, T, M)$       Spazio       $\begin{matrix} \nearrow \text{tempo} \\ \searrow \text{mese} \end{matrix}$        $\nearrow \text{nel tempo}$   
 $A(s, t) \Rightarrow A(s_k) \Rightarrow$  stime  
 $\text{L sezioni caratteristiche}$       es. SRSS

- per sovrapposizione di A.I. per goll unitori  $q_j = 1 \Rightarrow A_j(s) \dots \dots$  goll j
- per sovrapposizione di A.I. modelli  $p_k = 1 \Rightarrow \bar{A}_k(s) \dots \dots$  modo k  
(cioè per coord. princ. unitarie)

## SOMMARIO (Lec. 14)

- Smorzamento strutturale di sistemi MDOF
  - intensivo (sistemi reali).
  - aggettivo (dispositivi).
- Funzione di dissipazione e matrice di smorzamento.
- Diagonaizzazione in coordinate principali
  - smorz. alle Rayleigh.
  - " modelli.
- Esempio 2DOF con dissipatore aggiunto.
- o -
- Azioni interne
  - per coord. legrangeiane unitarie.
  - per coord. principali unitarie (AI modelli).
- Stime dei valori max (in t) [SRSS].
- Esempio 2DOF: azioni interne modelli.

Next step: Risposta sismica di sistemi MDOF (teleri shear-type)-END.