

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

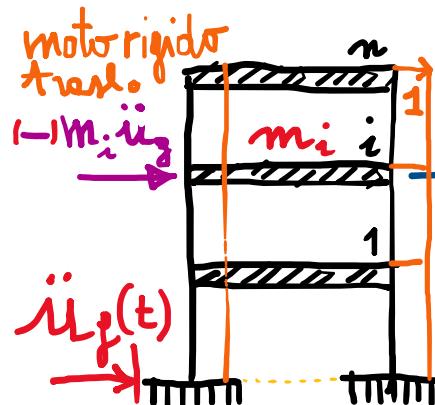
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

# Azione sismica su sistemi MDOF (telsi multipiono "shear-type")

[Generata da  
inertie, in  
seguito al  
motu del terreno]



## Telaio shear-type:

- elementi assialm. rigidi  $\frac{EA}{l} \rightarrow \infty$

- travi infinitamente rigide anche fless.  $\frac{EI}{l} \rightarrow \infty$  e naturalm.  $\ddot{u}_i(t)$

- colonne flessionalmente elastiche,  $\frac{EI_c}{l_c} \text{ finite}$  (spost. totale:  $\ddot{q}_{t,i} = \ddot{u}_y + \ddot{q}_i$ )

- massi concentrate ai piani  $m_i$

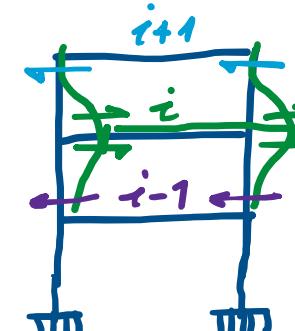
$$Q(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \ddot{u} = \begin{bmatrix} 1 & M^T & \ddot{u}_y(t) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{r}^T = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$$

- gessi dinamici: spost. orizz. dei piani, relativi al terreno

- Matrice di masse:  $M = \text{diag}[m_i]$

- Matrice di rigidezza tridiagonale

$$K = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & K_{i-1,i} & & \\ & & K_{i,i} & \\ & & & K_{i+1,i} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} 12 \frac{EI}{l^3} &= T \\ 6 \frac{EI}{l^2} &= N = \frac{Tl}{2} \end{aligned}$$

- Matrice di smorzamento (diagonalizzabile):

- alle Rayleigh o "classico"  $C = \alpha M + \beta K$  ( $\alpha, \beta$  det. fissando  $\zeta_1, \zeta_2$  primi due modi)

- $C = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}]$ , definendo  $i$  fattori di smoz. modali

- Pb. agli autoveloci:  $K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i \Rightarrow \Phi_i^T K \Phi_i = \omega_i^2 M_i \Phi_i^T M \Phi_i \Leftrightarrow K \Phi_i^T = M_i \Phi_i^T \Omega^2$

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \frac{\omega_i}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\frac{K_i}{M_i}}}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\frac{K_i}{M_i}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{12EI}{l^3}}} = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \cdot \sqrt{\frac{l^3}{12EI}} = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \cdot \frac{l}{\sqrt{12EI}} = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \cdot \frac{l}{\sqrt{12EI}} \cdot \sqrt{5\%} \\ K_i &= \Phi_i^T K \Phi_i, M_i = \Phi_i^T M \Phi_i \end{aligned}$$

• Eq.m del moto:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq^{(t)} = -M\ddot{r} \overset{\text{Analisi dinamica modale}}{\Rightarrow} m\ddot{p} + C\dot{p} + Kp^{(t)} = -\Phi^T M \ddot{r} \ddot{i}_g(t)$$

$$\ddot{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

n. eq.m disacc.  
(per i vari modi)

modo i

$$\cancel{M_i \ddot{p}_i + C_i \dot{p}_i + K_i p_i^{(t)} = -\frac{\lambda_i}{M_i} \ddot{i}_g(t)}$$

$$\ddot{p}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i^{(t)} = -\Gamma_i \ddot{i}_g(t)$$

$$\Gamma = \{\Gamma_i\}$$

vettore dei fattori  
di partecipazione  
modale

$$1_j = \sum_i \Phi_{ij} \Gamma_i$$

N.B.:  $M_i, \lambda_i; \Gamma_i$  assoc. a  $\Phi_i$   
dip. de normal. di  $\Phi_i$

$$\Phi^T M \Phi$$

$$\Lambda = \{\lambda_i\}$$

diag[M\_i] diag[C\_i] diag[K\_i]

$$\Phi^T M \Phi$$

vettore mese  
partecipanti moduli

$$\lambda_i = \Phi_i^T M \Phi_i$$

modo i [M]  
dimensioni di  
una mase

$$\Gamma_i = \frac{\lambda_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T M \Phi_i}{\Phi_i^T M \Phi_i}$$

[1]  
è numero  
puro  
(rapporto di  
masse)

fattore di  
partecipazione  
modale (alla  
zione normale)

es. ultimo  
piano

$$\ddot{r} \Rightarrow \ddot{p} + m^{-1} C \dot{p} + m^{-1} K p^{(t)} = -m^{-1} \Lambda \ddot{i}_g(t)$$

Quindi:

$$\ddot{r} = m^{-1} \Lambda$$

$$= (\Phi^T M \Phi)^{-1} \Phi^T M \ddot{r}$$

$$= \Phi^{-1} M^{-1} \Phi^{-T} \Phi^T M \ddot{r} = \Phi^{-1} \ddot{r}$$

$$\boxed{\ddot{r}}$$

$$\boxed{\ddot{r} = \Phi \Gamma}$$

$$\Rightarrow$$

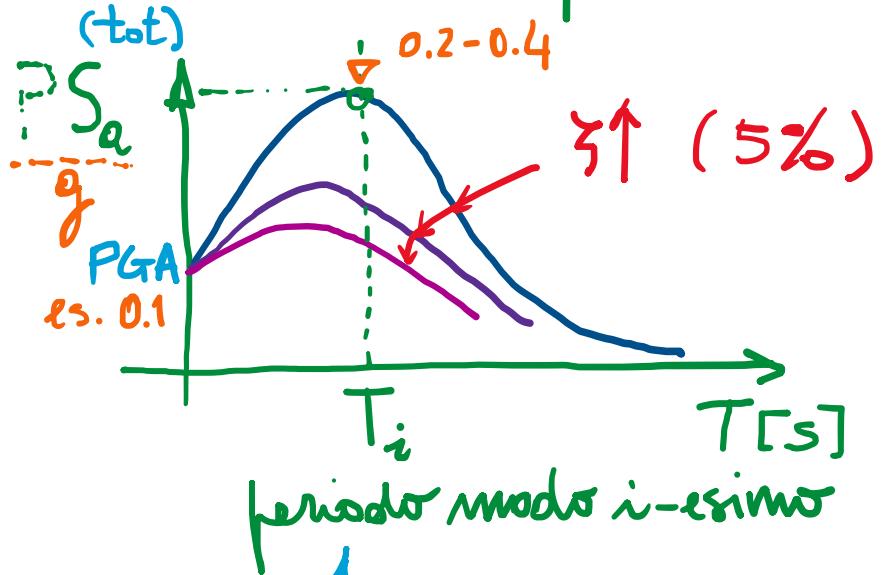
$$1_j = \sum_i \Phi_{ij} \Gamma_i \left( \begin{array}{l} \Phi_{ij}=1 \\ \sum_i \Gamma_i = 1 \end{array} \right)$$

## Risposta all'azione sismica:

- Tramite Int. di Duhamel

Metodo di Newmark

- Tramite Spettro di risposta (ev. di progetto, in base a zonazione sismica)



Si "entra" nello spettro di risposta col periodo proprio del modo  $i$ -esimo

grado di libertà  $j$ -esimo

$$q_j^{\text{max}} = \sum_i |\phi_{ij}| p_i^{\text{max}}$$

in genere  
eccess. conserv.

$$\begin{aligned} &= \sum_i |\phi_{ij}| \Gamma_i | \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} | \\ &\text{or } = \sqrt{\sum_i (\phi_{ij} \Gamma_i \frac{S_{ei}}{\omega_i^2})^2} \end{aligned}$$

Square Root of Sum of Squares

SRSS (efficece ingegner.)

$$i \text{ gdl} \quad i \text{ modo}$$

$$i \ddot{x}_j(t) \rightarrow \dot{p}_i(t) \rightarrow q_i(t) = \sum_j \phi_{ij} \dot{p}_i(t)$$

$$S_{di} = \max_t \{ p_i \} \rightarrow PS_v = \omega_i S_d \rightarrow PS_e = \omega_i^2 S_d$$

L'pseudo-

$$S_{di} = \frac{PS_e}{\omega_i^2}$$

vuole di "amplificazione", del fattore di partecipazione modale  $\Gamma_i$

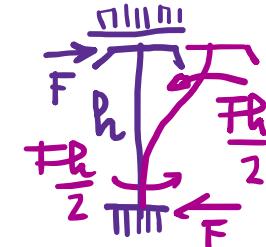
$$p_i^{\text{modo}} = |\Gamma_i| \frac{S_{ei}}{\omega_i^2}$$

(che si registreranno in istanti di tempo diversi)

Stime spostamento complessivo  $q^{\text{max}}$

## Azioni interne (e pertice de quelle modelli $\bar{A}_i(s)$ )

$$A(s_k) = \sqrt{\sum_i \left( \bar{A}_i(s_k) \Gamma_i \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} \right)^2}$$



sez. caratteristiche  
(vedi calcolo dei telei  
col metodo degli sforzi.)  
5 cellule base (N non nota  
nelle travi)

## Toglio modelle alla base

$$\begin{aligned} & \rightarrow \bar{E}_i = K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i = F \Gamma_i \\ & \rightarrow \bar{E}_{ij} \\ & \rightarrow \tau_i = \sum_j \bar{E}_{ij} = \bar{E}_i^T r = \omega_i^2 |\Phi_i^T M^T r| = \Lambda_i \end{aligned}$$

$\tau_i$ : somme di tutte le forze d'inerzia ai piani

$$|\Lambda_i| \omega_i^2 = \tau_i \quad (\omega = \sqrt{\lambda})$$

dip. delle normalizz. di  $\Phi_i$ .

## Toglio modelle max:

$$\tau_i^{\max} = \tau_i | \Phi_i^{\max} | = |\Lambda_i| \omega_i^2 | \Gamma_i | \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} S_{ei} =$$

$$m_{tot} = \sum_i m_i = r^T M r = \Gamma^T \underbrace{M}_{m} \Gamma \underbrace{\Gamma^{-1}}_{m^{-1}} \Gamma$$

$$= \Gamma^T \Gamma = \sum_i \Gamma_i \Lambda_i = \sum_i \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \sum_i M_{eff,i}$$

proprietà "fisica" delle masse modelli efficaci

$$M_{eff,i} S_{ei} = \tau_i^{\max}$$

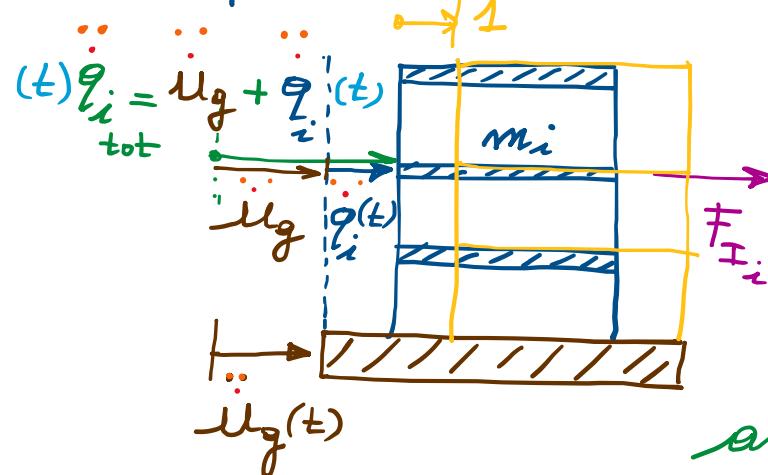
$$M_{eff,i} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T M r)^2}{\Phi_i^T M I \Phi_i} \sim \frac{\phi_i^2}{\phi_i^2}$$

masse modelli efficaci  
(indip. da norm. di  $\Phi_i$ )

[M]  
dim.  
di massa

## Concetti fondamentali:

- Risposte sismica (con specifico rif. ai "teli shear-type"):



Eq. mi del moto:

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_i + C \dot{q}_i + K q_i &= - \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ m_i \\ \vdots \end{array} \right]}_{m_i} \ddot{u}_g(t) \\ &= -m_i(\ddot{u}_g(t) + \ddot{q}_i(t)) \end{aligned}$$

analisi dinamica  
modale

$$\Phi^T (\dots = \dots)$$

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\text{M}} \ddot{\Phi} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C} \dot{\Phi} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K} \Phi = - \underbrace{\Phi^T M I_r}_{\text{I}} \ddot{u}_g(t)$$

$$\text{diag}[M_i] = \Phi_i^T M \Phi_i$$

$$\text{hyp. diag}[C_i = \Phi_i^T C \Phi_i]$$

$$\text{diag}[K_i = \Phi_i^T K \Phi_i]$$

vettore delle  
mosse partecipanti  
modali:

$$J_i = \Phi_i^T M I_r$$

$$M I = \text{diag}[m_i]$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_i & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

$$m_r = \underbrace{\frac{M I}{n}}_{n \times n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = M I r$$

$\Phi$  matrice  
degli autovettori  
( $K \Phi_j = \omega_j^2 M I \Phi_j$ )

$I_r$ : rigid body  
motion vector  
di ampiezza  
unitaria

(spostamento  
traslazionale)

- Premoltiplicando per  $\mathbf{M}^{-1}$ :

$$\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{P} = - \mathbf{M}^{-1} \underbrace{\mathbf{L}}_{\text{II}} \ddot{\mathbf{u}}_g(t)$$

Al modo  $i$ :

$$\ddot{\mathbf{p}}_i(t) + \underbrace{\frac{c_i}{m_i}}_{2\zeta_i \omega_i} \dot{\mathbf{p}}_i(t) + \underbrace{\frac{k_i}{m_i}}_{\omega_i^2} \mathbf{p}_i(t) = - \Gamma_i \ddot{\mathbf{u}}_g(t)$$

"amplifica"  
 $\ddot{\mathbf{u}}_g$  per il modo  
 $i$ -esimo

- Proprietà:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \\ &= (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)^{-1} \underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}_{\text{II}} \mathbf{r} \\ &= \Phi^{-1} \mathbf{M}^{-1} \Phi^{-T} \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{r} = \Phi^{-1} \mathbf{r} \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \Phi \mathbf{r} \\ \mathbf{r} &\uparrow \downarrow \Gamma \\ \mathbf{r} &= \Phi \Gamma \\ (\text{se } j=n, \phi_{in}=1 \text{ ad es. } \sum \Gamma_i = 1) \quad 1 &= r_j = \sum_i \phi_{ij} \Gamma_i \end{aligned}$$

$$= \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{L} &= \text{diag} [m_i] \text{ masse dei piem} \\ \mathbf{M}^{-1} &= \text{diag} [M_i] \text{ masse modelli} \\ M_i &= \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i \dots \end{aligned}$$

$$\Gamma = \left\{ \Gamma_i = \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i \mathbf{r}}{\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i} \right\}$$

fattori di partecipazione modale:

coeff. moltiplicativo di  $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$   
per il generico modo  $i$   $[\Gamma_i] = [1]$

L SDOF  $\frac{m}{m} = 1$

modo  $i$

$\Gamma_i$  sono le componenti  
di  $\mathbf{r}$  nelle base degli  
autovettori  $\mathbf{r} = \sum_i \Phi_i \Gamma_i$

- Masse moduli efficaci:

$$M_{eff,i} = \lambda_i \Gamma_i = \lambda_i \frac{\lambda_i}{M_i} = \frac{\lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T M I \Phi_i)^2}{\Phi_i^T M I \Phi_i} > 0$$

~  $\frac{M^2}{M}$  è una massa [M]  
 ~  $\cancel{\lambda^2 \Phi_i^2}$  indipendente da come è normalizzato  $\Phi_i$

- Esprimono il telaio modale sulle base massimo secondo i vari modi:

$$\tilde{\gamma}_i^{mass} = M_{eff,i} S_{ai} \leftrightarrow \text{relazione tipo } F = m \frac{\ddot{a}}{m}$$

↑ forza  
 ↓ accelerazione  
 ↓ massa

↑ è la massa strutturale coinvolta nel modo  $i$  a dare il telaio sulle base massimo.

- Proprietà "fisica":  $\sum_i M_{eff,i} = m_{tot} = \sum_j m_j$  masse totale del telaio  
 (in genere i primi due/tre modi rubano una larga percentuale (anche ~90%) della massa totale dell'edificio).

## SOMMARIO (Lec. 15)

- Risposte sismiche di strutture MDOF (telsi "shear-type").
- Equazioni del moto con erazione sismica per effetto di trascinamento.
- Analisi dinamica modale con disaccoppiamento in  $n$  eq. di modo i.
- Determinazione delle risposte tramite spettro di risposta.
- Stime (SRSS) degli indici di risposta sismica (spat., AI, taglio alla base).
- Parametri di partecipazione modale (mese, fattori) e mese modelli efficaci (legate alle stime del taglio modale alla base massimo).

Next step : (Dinamica dei sistemi continui).

II: Instabilità delle strutture (dipartendo dall'analisi dinamica).