Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

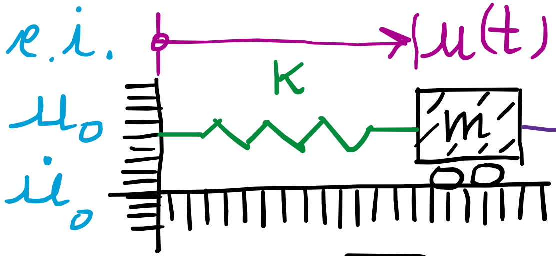
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 04

Risposta a forzante armonica

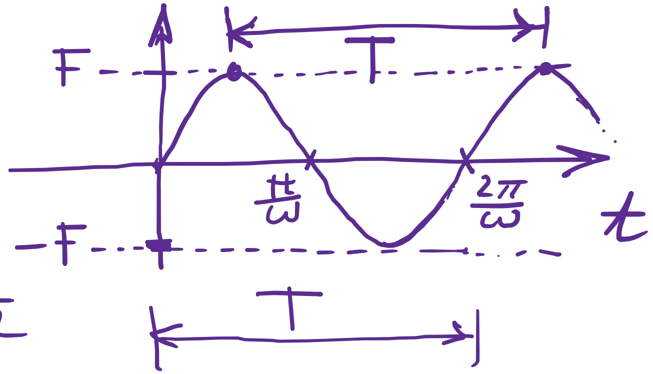
$F(t) = \begin{cases} F\sin\omega t \\ F\cos\omega t \end{cases}$ $\quad F e^{i\omega t} \quad \cos\omega t + i\sin\omega t$ (non smorzato; $c=0$)



$F(t) = F\sin\omega t$

F intensità o ampiezza

ω pulsazione della forzante

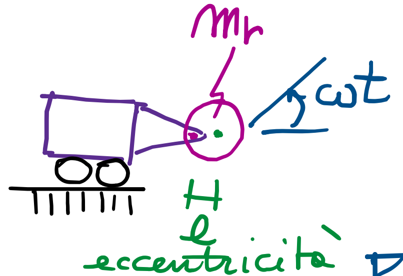


f.ne periodica, di periodo

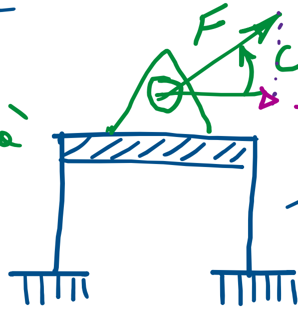
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $\qquad \omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

pulsazione naturale del sistema non smorzato



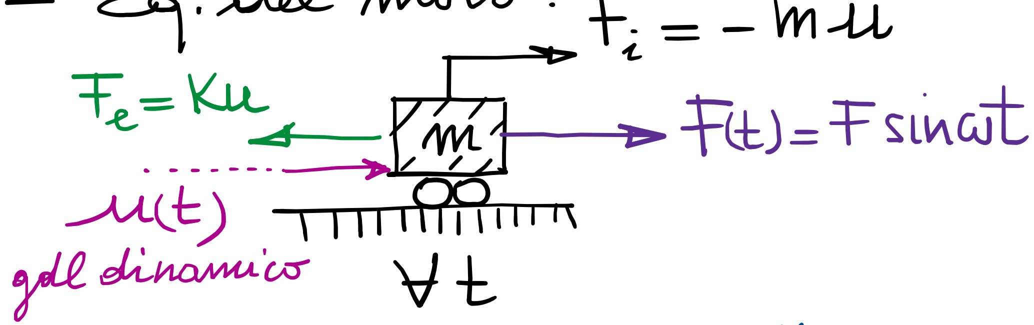
$F = m_r e \omega^2$



Interesse:

- casi pratici, ad es. in presenza di masse rotanti eccentriche
- "madre" di tutte le forzanti periodiche => sviluppo in serie di Fourier
- consente di introdurre concetti fondamentali sulla risposta dinamica dei sistemi forzati (amplificazione e sfasamento della risposta)
- passibile di trattazione analitica
- primo passo fondamentale di forzante dinamica $F(t) = F\,f(t)$ — F: [N]; $f(t)$: f.ne adimensionale

– Eq. del moto:



$\forall t$

$$\cancel{m}\ddot{u} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2}u = \frac{K}{K}\frac{F}{m}\sin\omega t \qquad u_{st} = \frac{F}{K}$$

spostamento "statico"

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_1^2 u(t) = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t}$$

ω_1; ω; u_{st} → dirett. propoz.

– Integrale "particolare"
(risposta del sistema a termine noto non nullo):

$u_p(t) = U\sin\omega t$ moto armonico di pulsazione ω (della forzante) di ampiezza U da determinare

$\dot{u}_p(t) = \omega U\cos\omega t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 \underbrace{U\sin\omega t}_{u_p} = -\omega^2 u_p$

rapporto di frequenze

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1} = \dfrac{f}{f_1}$ "frequency ratio"

$$U = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2}u_{st} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}u_{st} = \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}$$

– Sostituendo nell'eq.ne del moto:

$$-\omega^2 U\cancel{\sin\omega t} + \omega_1^2 U\cancel{\sin\omega t} \overset{\forall t}{=} \omega_1^2 u_{st}\cancel{\sin\omega t} \Rightarrow \cancel{\omega_1^2}\Big(1 - \underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}_{\beta^2}\Big)U = \cancel{\omega_1^2}u_{st}$$

$u_p(t) = U \sin\omega t$

$= \pm N u_{st} \sin\omega t$ ($+$: $\beta<1$; $-$: $\beta>1$)

$\frac{|U|}{u_{st}} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$

f.ne pari
= in $\pm\beta$
$\to 0$ per $\beta\to\infty$
$\to \pm\infty$ " $\beta \to 1$

$\beta \neq 1$

curva di risonanza

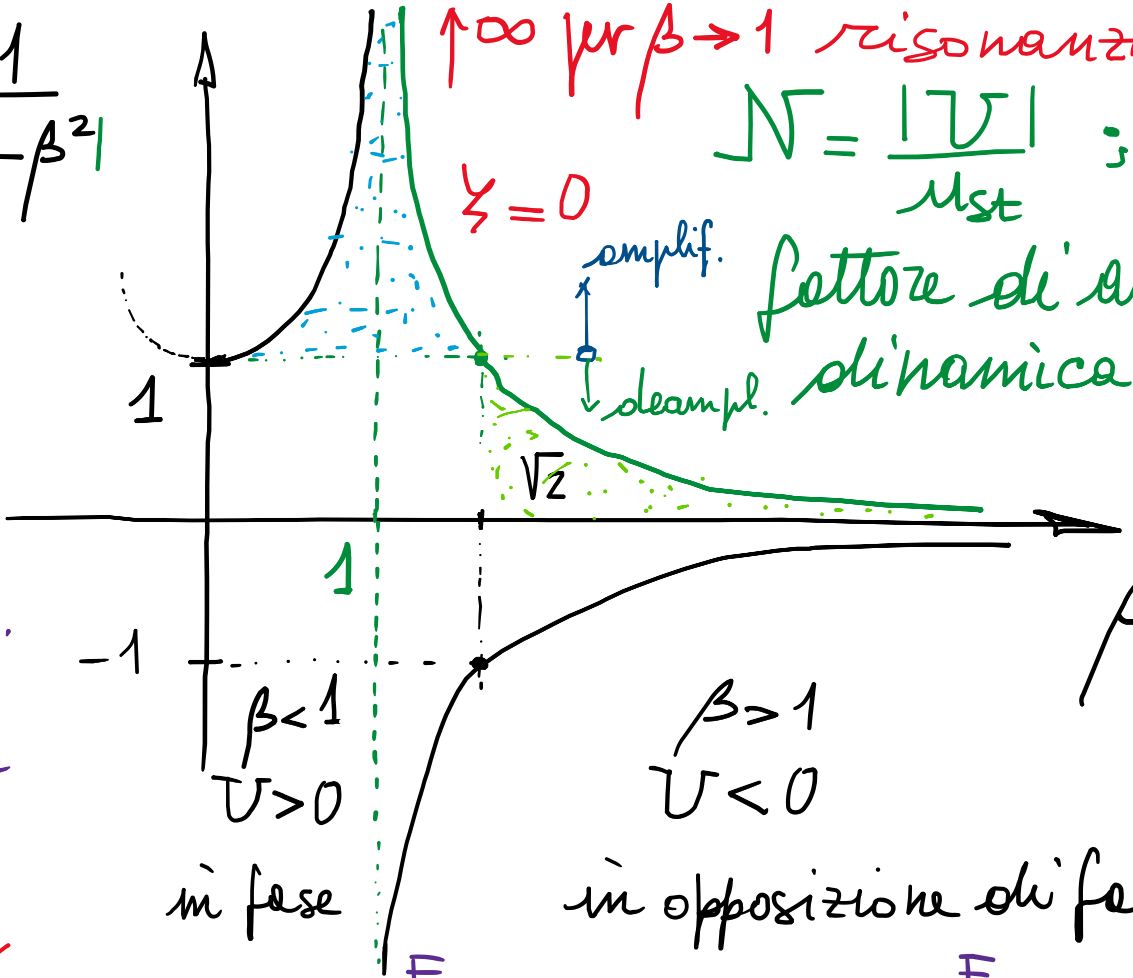
$\uparrow\infty$ per $\beta\to 1$ risonanza (ampiezza illimitata per $\omega\to\omega_1$)

$N = \frac{|U|}{u_{st}}$; $|U| = N u_{st}$

$\zeta = 0$

fattore di amplificazione dinamica

$N = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$



$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

$N \geq 1$, $0 \leq \beta \leq \sqrt{2}$

$N \leq 1$, $\beta \geq \sqrt{2}$

$u_p(t) = N u_{st} \underbrace{\sin(\omega t - \xi)}$

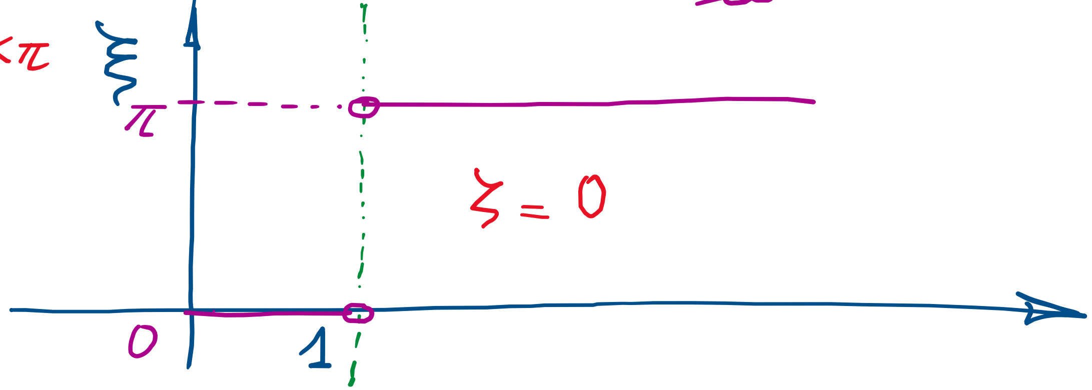
$\boxed{\sin\omega t} \cos\xi - \cos\omega t \cancel{\sin\xi}$

$\cos\xi$: 1 per $\xi = 0$; -1 per $\xi = \pi$

$\xi = 0 + K\pi$

ξ angolo di fase o fase

curva di fase



– Risposta complessiva del sistema: $\left.\begin{matrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{matrix}\right.$ c.i.

$$u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$$

integrale generale

$F=0$ int. gen. omogen. ass.

$F \neq 0$ int. part.

$$= A \sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2} \sin\omega t$$

N.B.: composizione di due moti armonici di pulsazioni differenti (ω_1 e ω) $\Rightarrow$ non un moto armonico

$$\dot{u}(t) = \omega_1 A \cos\omega_1 t + - \omega_1 B \sin\omega_1 t + + \frac{u_{st}}{1-\beta^2} \omega \cos\omega t$$

– Imponendo le c.i.:

$$\begin{cases} u(0) = \boxed{B = u_0} \\ \dot{u}(0) = \omega_1 A + \frac{\omega}{1-\beta^2} u_{st} = \dot{u}_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2} u_{st}}$$

– Integrale generale finale

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2} u_{st}\right)\sin\omega_1 t + u_0 \cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2} \sin\omega t$$

comp. di moto armonico di puls. ω_1 (risposta "transiente", per $\xi \neq 0$)

comp. di moto armonico di puls. ω (risposta a "regime", "steady-state") $\leftarrow$ per $\xi = 0$

$$= \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} \sin\omega_1 t + u_0 \cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2} u_{st} \left(\sin\omega t - \beta \sin\omega_1 t\right)$$

termine spesso mancante $\Leftarrow$ risposta armonica alle sole c.i. e $F=0$

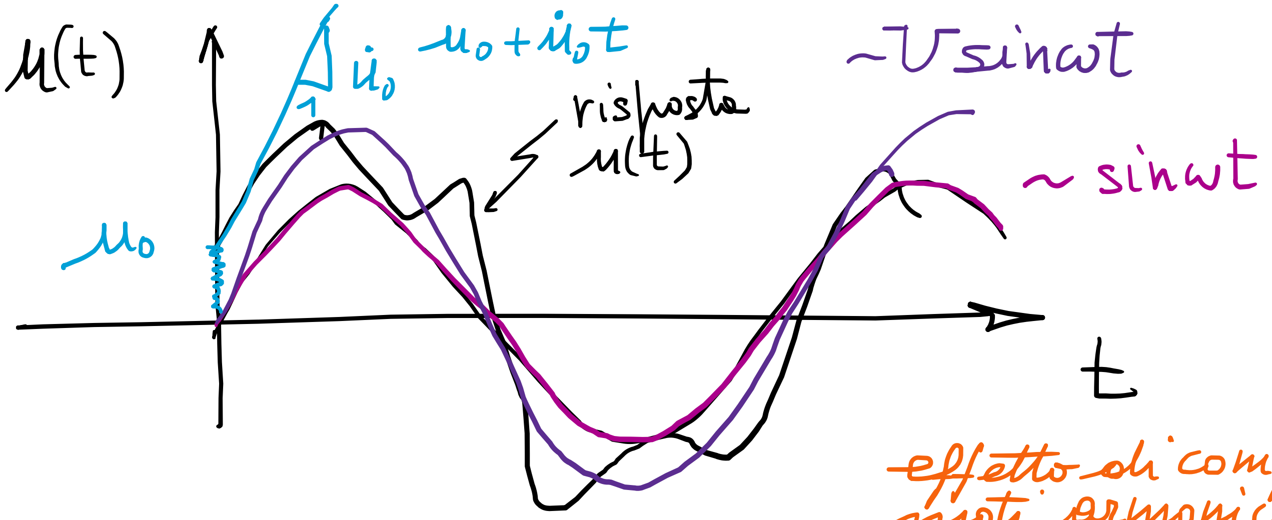
risposta a F armonica per c.i. omogenee ($u_0=0$; $\dot{u}_0=0$)

– Risposta dinamica

$\beta < 1$

$(\omega < \omega_1)$

forz. sist.



– Attenzione ai "battimenti" ⇒ preludio alla risonanza

effetto di composizione di moti armonici di pulsazioni simili

per $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} \simeq 1 \; (\omega \simeq \omega_1)$

$(\sin\omega t - \beta \sin\omega_1 t)$

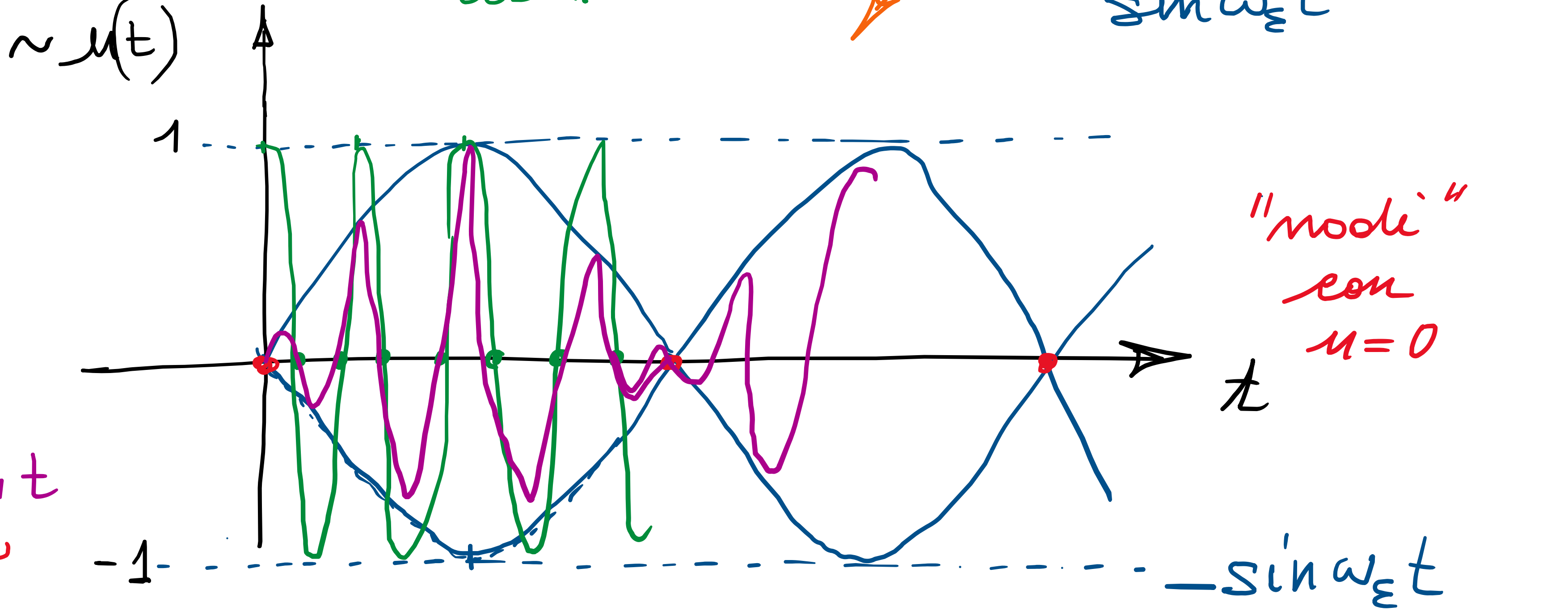
$\simeq \sin\omega t - \sin\omega_1 t$

formule di prostaferesi

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\simeq 2 \sin \underbrace{\frac{\omega - \omega_1}{2}}_{\sim \omega_\varepsilon} t \cdot \cos \underbrace{\frac{\omega + \omega_1}{2}}_{\sim \omega_1} t$

piccola



– Condizioni di risonanza $(\beta = 1) \Rightarrow \omega = \omega_1$. Nuovo integrale particolare:

$$u_p(t) = U\, t \cos\omega_1 t \quad \dashrightarrow \quad u_p(t) = -\frac{1}{2}\,\omega_1 u_{st}\, t \cos\omega_1 t$$

$$\dot{u}_p(t) = U \cos\omega_1 t + U t\, \omega_1 (-\sin\omega_1 t)$$

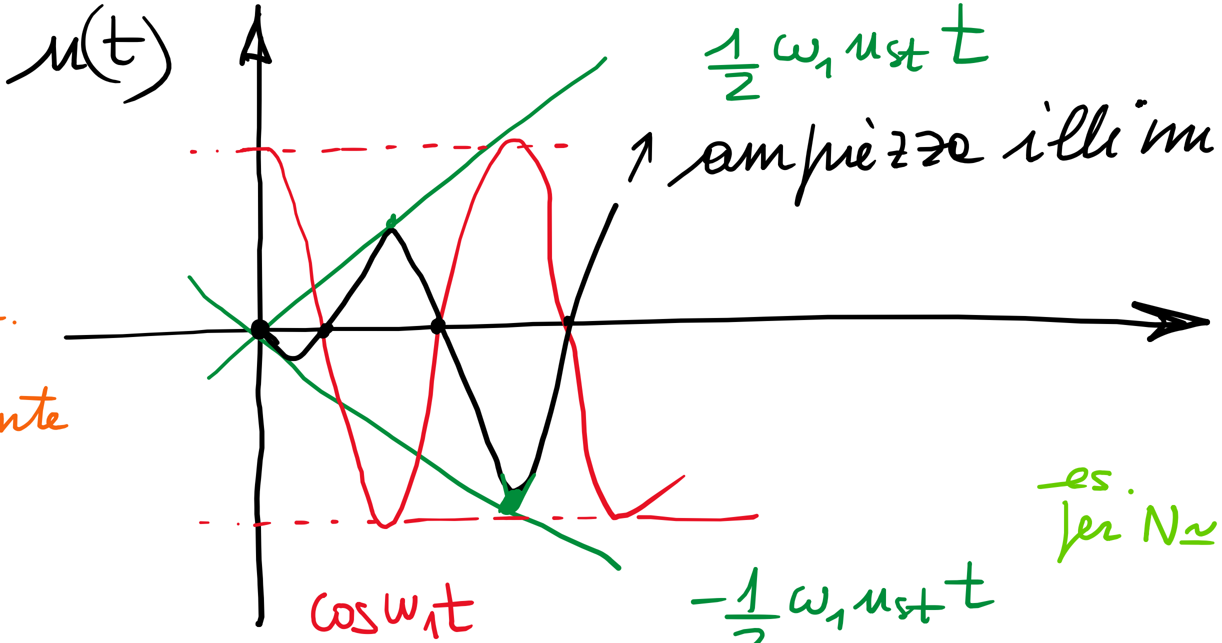
$$\ddot{u}_p(t) = \underbrace{-\omega_1 U \sin\omega_1 t - U \omega_1 \sin\omega_1 t}\, - U t\, \omega_1^2 \cos\omega_1 t$$

ampiezza lineare (divergente) in t

$\Rightarrow$ eq. del moto

$$-2\omega_1 U \sin\omega_1 t - \cancel{U t\, \omega_1^2 \cos\omega_1 t} + \cancel{\omega_1^2 U t \cos\omega_1 t} = \omega_1^2 u_{st} \sin\omega_1 t$$

$$-2\cancel{\omega_1} U = \omega_1^{\cancel{2}} u_{st} \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\,\omega_1 u_{st}$$



ampiezza illimitata per $t \to \infty$

(può portare alla uscita dal campo elastico, e al collasso)

es. per $N \simeq 10$

come se fosse moto armonico di pulsaz. $\omega = \omega_1$ ma con ampiezza linearmente divergente in t

SOMMARIO (Lez. 04)

- Risposta forzata (forzante armonica $F(t) = F \sin \omega t$).
- Amplificazione dinamica $N(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$ ($U \simeq N\, u_{st}$).
- Sfasamento della risposta
  - in fase ($\xi = 0$), $\beta < 1$;
  - in opposiz. di fase ($\xi = \pi$), $\beta > 1$.

  $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$ frequency ratio — pulsaz. forzante (ω); pulsazione sistema (ω_1)
- Integrale generale: $u(t) = u_{g_0}(t) + u_p(t)$.
- Risonanza ($\beta = 1$; $\omega = \omega_1$): risposta divergente in t (ampiezza illimitata). $u \to \infty$
- Next step: caso smorzato (risposta "steady-state"), con picco di risonanza di entità limitata, dipendente dal fattore di smorzamento ζ. ⇐ pur elevata, per ζ piccoli ($\zeta \ll 1$)