

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 22

III - Anelasticità delle Strutture (Plasticità) → Non-linearità di materiale ("material non-linearity")

Scopi:

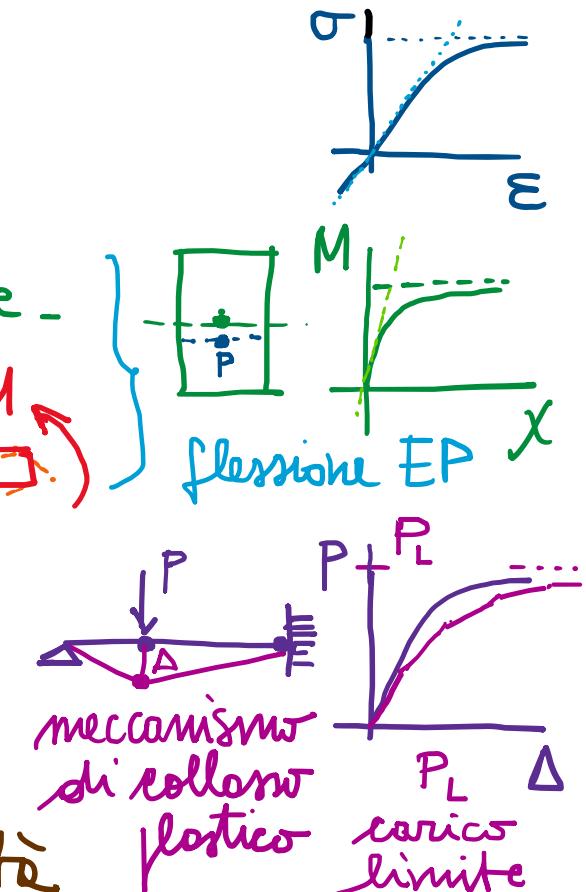
- Introduzione al comportamento non-lineare del materiale (punto materiale) [campo elasto-plastico].

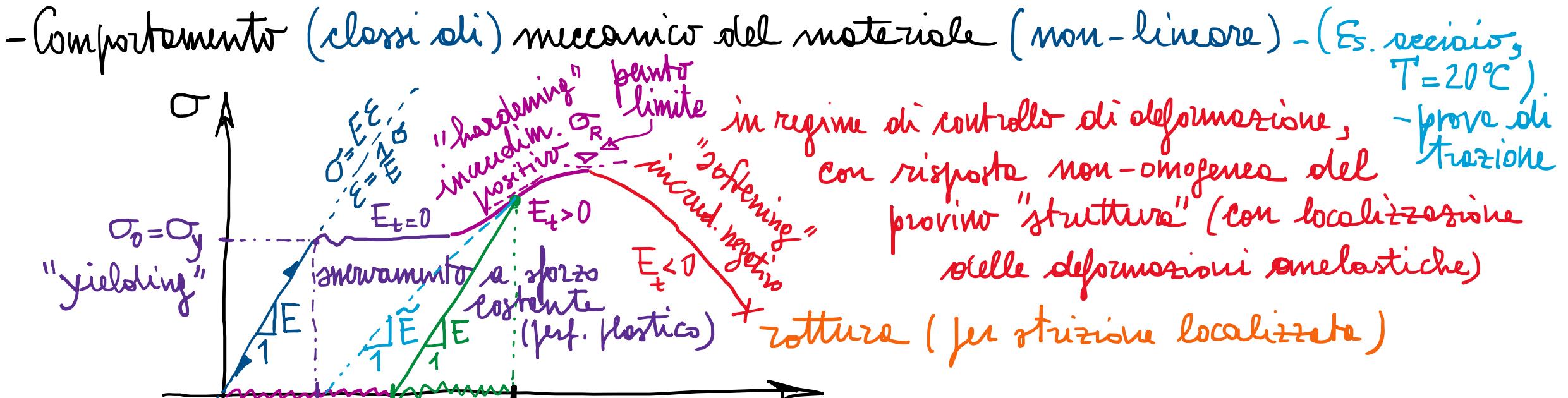
- Comportamento non-lin. delle sez. trasverse delle trave.

- Comportamento globale elasto-plastico delle trave (Diagramma di flessione EP).

- Ipotesi di "cerchia plastica" (localizzazione delle deform. plastiche) e "calcolo a rottura" dei telai (Analisi Limite).

- Qui, non-linearità di materiale scissore alle non-linearità geometriche (reali Instabilità), per cinematiche lineari (regime di "piccoli spostamenti").





legge intera elastico lin. [$\tilde{E} < E$ (degradazione di rigidità) \Rightarrow Mecanica del Danneggiamento] es. materiali quasi-fogili (lepidoti, calcestruzzo, compositi)

- Sfrenamento con uscite del campo elastico.

- Campo plastico: deformazioni irreversibili allo scarico (legate ad un ricarrangimento della struttura interna del materiale, $\vec{\Gamma}$, con dissipazione di energia in calore).

- Comportamento anolonomo \Rightarrow legame incrementale distanz. scarico vs. scarico:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\epsilon}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{scarico} \\ \text{elastico} \end{array}$$

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad \begin{array}{l} \text{scarico} \\ \text{elastico} \end{array}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\epsilon}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{scarico} \\ \text{plastico} \end{array}$$

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \quad \begin{array}{l} \text{scarico} \\ \text{plastico} \end{array}$$

$\frac{d\sigma}{dt} = E_t \frac{d\epsilon}{dt}$

$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \quad (\text{rehardening})$

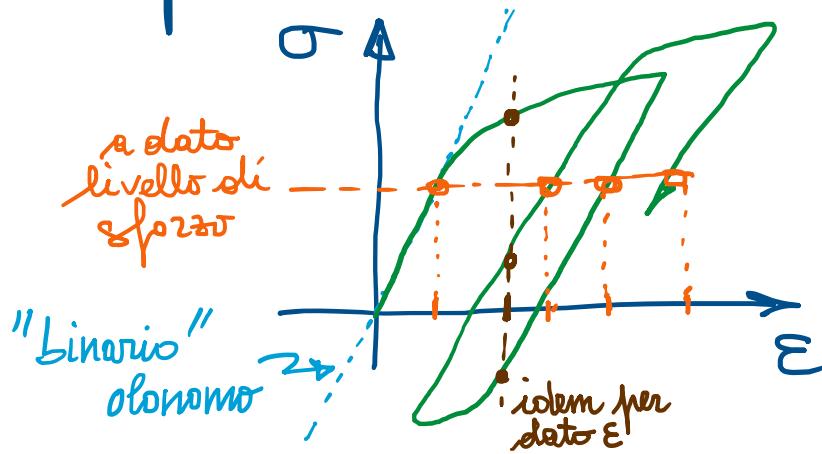
ratei di sp. e def.

Damage Mechanics

movimenti di dislocazioni

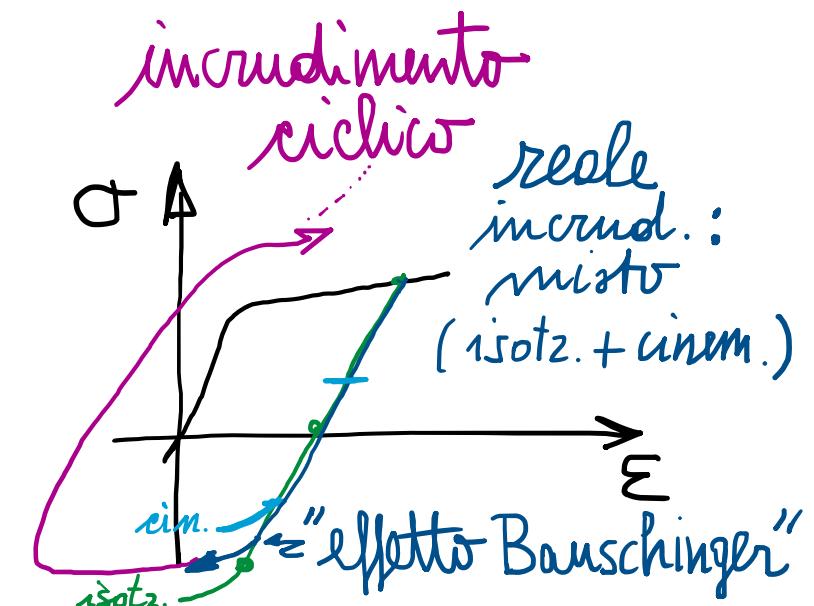
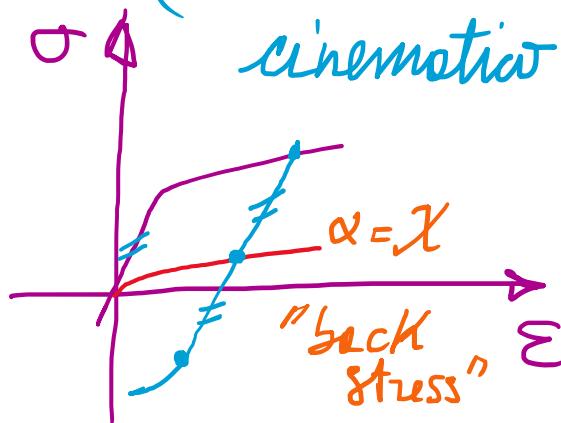
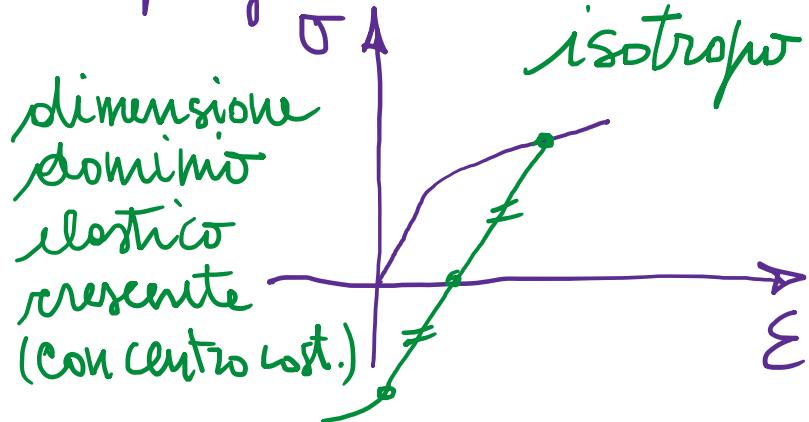
- Legge costitutiva in forma incrementale :
 - legame diretto $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\varepsilon})$ controllo in deformazione (consente descrizione del softening)
 - " inverso" $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$ " in sforzo

- Dipendenze delle storie di carico (comportamento "path-dependent", descritto mediante opportune "variabili interne", utili a registrare la storia)



(in genere non-lineare)
(variaz. del centro)

- Tipologie di incrudimento:



legame
diretto
 $\dot{\sigma}(\dot{\varepsilon})$

incremento positivo
(hardening) $E_t > 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \geq 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

incremento nullo
(perfett. plastico) $E_t = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

incremento negativo
(softening) $E_t < 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \leq 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

soft. "critico" $E_t \rightarrow -\infty$ ($\dot{\varepsilon} = 0$)
perdita controllo in defor.

legame
inverso
 $\dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$

$$\dot{\sigma} \geq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} \geq 0$$

$$\dot{\sigma} \leq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \leq 0$$

unicità

$\dot{\sigma} > 0$ non possibile

$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}$ indeter.

"

non unicità

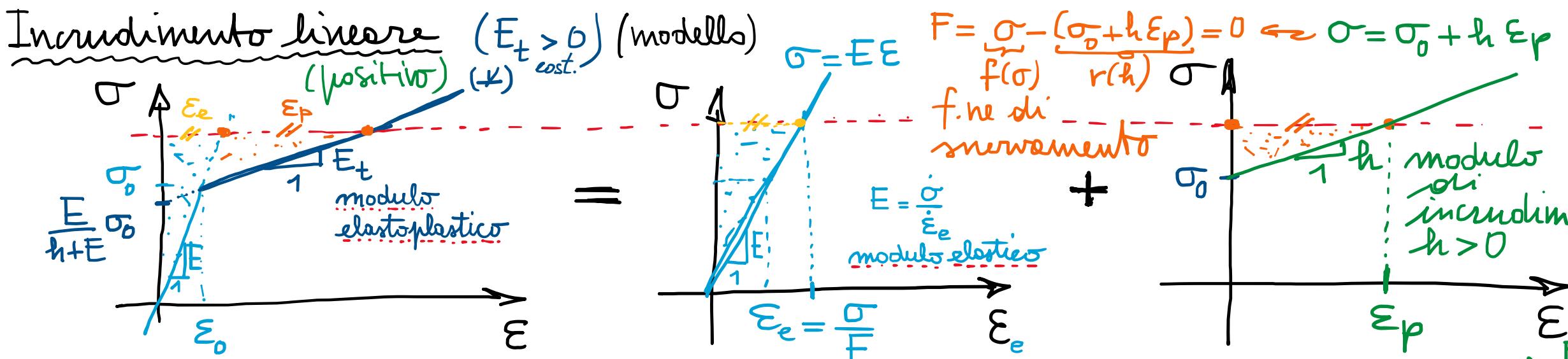
perdita di controllo
in sforz

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} \geq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} \geq 0 \\ \dot{\sigma} \leq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \leq 0\end{aligned}$$

non unicità

$$-\infty < E_t < E$$

$E_t > E$ "locking" 
(es. materiali biolog.)



decomposizione somme di deformazioni assieme : $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p \Leftrightarrow$ (simil. in ratei, in det. E_t)

$$= \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{h} - \frac{\sigma_0}{h} \Leftrightarrow \epsilon + \frac{\sigma_0}{h} = \frac{h+E}{hE} \sigma \Leftrightarrow \epsilon_p = \frac{\sigma - \sigma_0}{h}$$

$$\frac{h+E}{hE} \sigma = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{h} \right) \sigma$$

$$\sigma = \underbrace{\frac{hE}{h+E} \epsilon}_{E_t} + \frac{\sigma_0}{h} =$$

$$= \frac{E}{h+E} \sigma_0 + E_t \epsilon (*)$$

- Generalizzazione al 3D (teoria delle plasticità)

Condiz. di shew. $F(\sigma, \lambda) = f(\sigma) - r(h, \lambda) = 0$

Legge di flusso plast. $\dot{\epsilon}_p = \lambda \dot{m}$ es. $f(\sigma) = \sigma_{eq}^M = \sqrt{3} j_2$

Operatore tangente $\dot{\sigma} = E_t : \dot{\epsilon}$ moltiplicatore vettore sizez. di flusso plast.

$$E_{t,ijk}$$

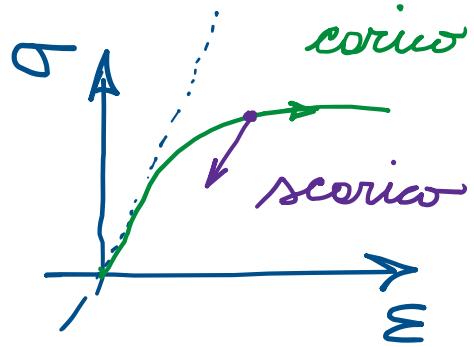
$$E_t = \frac{hE}{h+E} \quad h = \frac{EE_t}{E-E_t} = \frac{E_t}{1-E_t/E}$$

modulo tangente

Concetti fondamentali :

- Anelasticità (in particolare Plasticità) delle strutture :
 - comportamento dissipativo anelastico delle strutture, a partire da quello del materiale \Rightarrow non-linearietà del materiale.
 - manifestabile per carichi e spostamenti crescenti, tali da indurre un'uscita dal campo elastico (quale regime tipico di funzionamento ordinario, quotidiano delle strutture, in condizioni di esercizio), per condurre anche a situazioni "Limite", con possibile collasso (plastico) delle strutture, nelle sue totalità (meccanismo completo) o di una sua parte (meccanismo parziale) \Rightarrow Analisi Limite (AL) o "Calcolo a rottura" (dei telai).

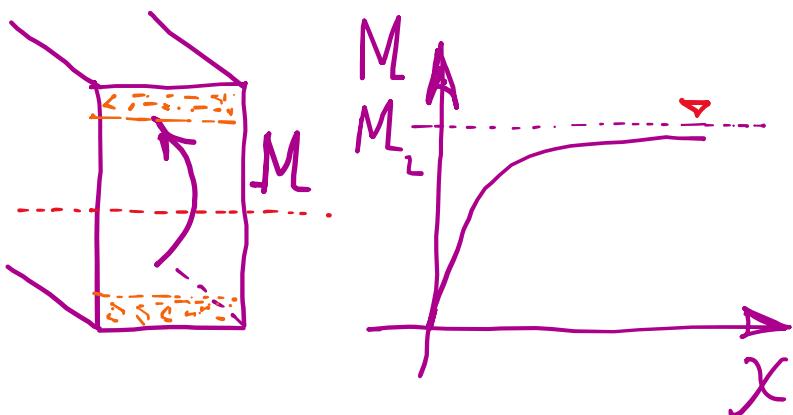
- Le diverse scale strutturali (flessione elastoplastica delle travi):



punto materiale

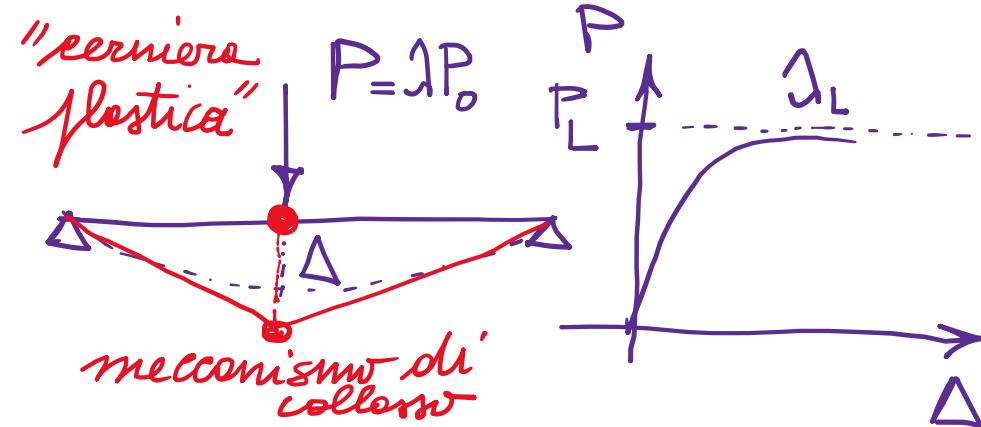
(Teorie della Plasticità)

Mecanica dei Continui in campo elastoplastico.



sezione trasversale

"Legge costitutiva" delle trave per flessione elastoplastica (in particolare per comportamento "perfettamente elastoplastico").



struttura nel suo complesso

Risposta non-lineare globale, forza-spostamento, della struttura (trave o sistemi di travi + telai), sino al collasso (plastico, duttile), descriv. anche per "localizzazioni" delle defor.

SOMMARIO (Lec. 22)

III - Anelasticità delle strutture (Plasticità) -

- Introduzione al comportamento non-lineare (elastoplastico) del materiale.
- Regimi tipici: elastico, perfettamente plastico, incud. positivo/^{"hardening"} negativo/^{"softening"}.
- Comportamento anolonomo: legame incrementale (cerico pl. vs. scorico el.).
- Dipendenze delle storie di cerico (integras. del legame incrementale).
- Tipologie di incremento e loro modellazione.
- Unicità del legame diretto/inverso.
- Incrudimento lineare e modulo tangente.
- Generalizzazione 3D: teorie della plasticità -

Next step: Flessione elastoplastica - Comportamento delle sezioni trasversale delle trave
(verso una teoria strutturale in ambito di non-lin. di materiale).