

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

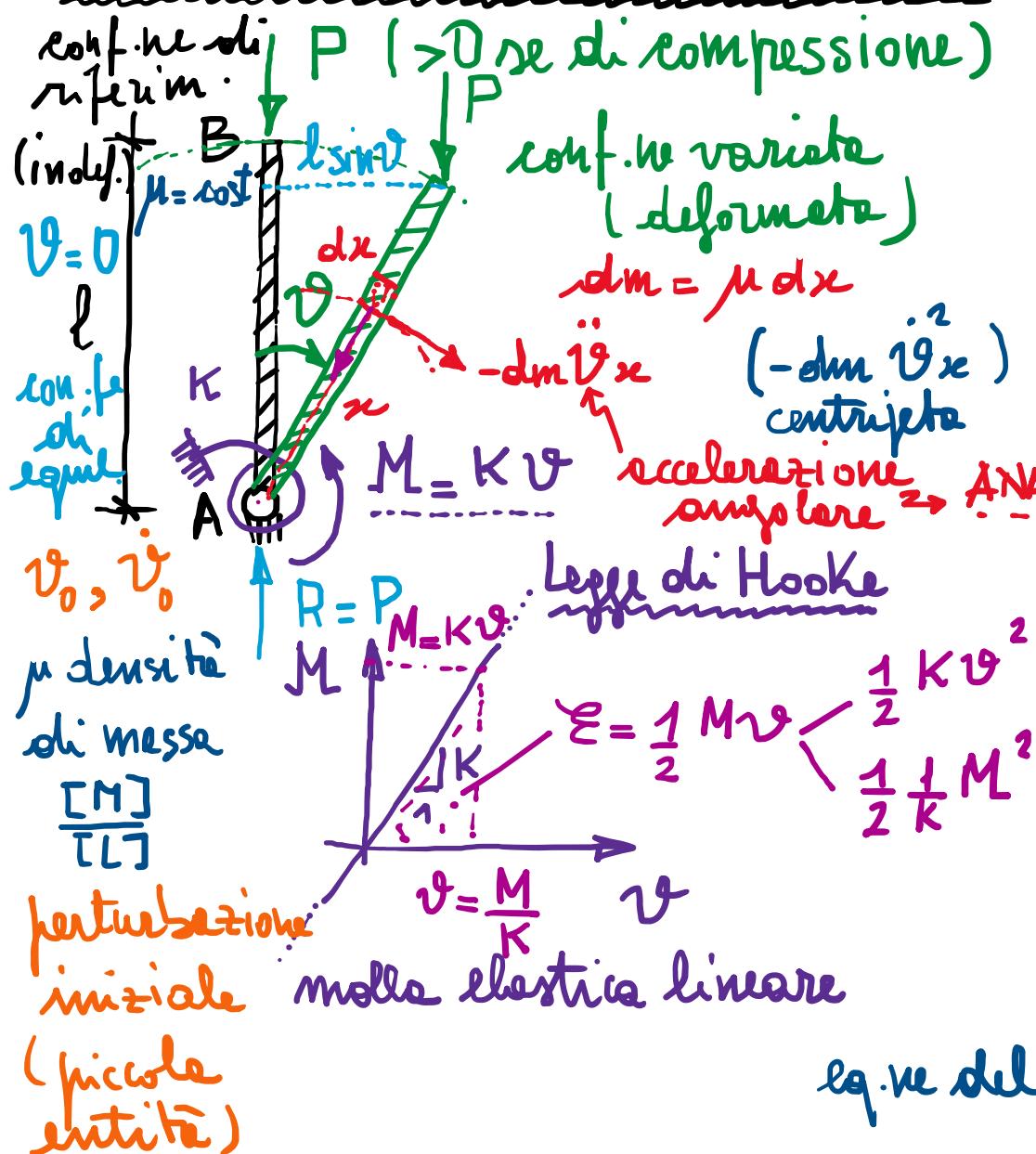
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 16

## II - Instabilità delle Strutture



(Introduzione ai sistemi discreti - SDOF)

Sisteme a deformabilità elastica concentrata

Forze conservative (campo gravitazionale):

Per direz. verticale costante (no forze "follower")

di intensità costante (variabile in maniera "quasi-statica")  $\Rightarrow P = \mu P_0 > 0$

L'carico base  
L'oltiplicatore del carico

$$\mu = \frac{P}{P_0}$$

ANALISI DINAMICA

Eq. ne di "equilibrio dinamico" (alla rotazione rispetto alle

$\Rightarrow P l \sin \vartheta = K v - \int (-dm \ddot{\vartheta} x) x$  (effetto elastico legato all'inerzia non-lineare)

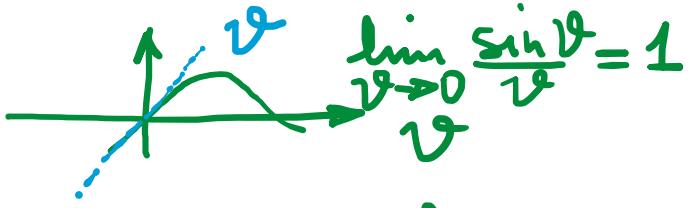
momento ribatt. mom. momento elastico

$$\text{eq. ne del moto: } P l \sin \vartheta = K v + \mu \int_0^l x^2 dx \ddot{\vartheta} > 0$$

I =  $\frac{1}{3} \mu l^3$  momento d'inerzia

Eq. del moto:

$$Pl \sin \vartheta = I \ddot{\vartheta} + K \vartheta$$



Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" ( $|\vartheta| \ll 1$ )  $\Rightarrow \sin \vartheta \approx \vartheta$

$$I \ddot{\vartheta} + (K - Pl) \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \frac{K - Pl}{I} \vartheta(t) = 0$$

linearizzazione  
(dell'eq. del moto)

mom.  
d'inerzia  $I > 0$   
rigidezza totale:  $K_{\text{elast}} - \frac{K_g}{l}$

rigidezza geometrica (sottrae rigidezze del sistema,  
al crescere del carico  $P$ )

$$1) K - Pl > 0 ; \quad P < \frac{K}{l} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta(t) = 0 \quad \omega_1^2 = \frac{K - Pl}{I} \quad (\text{dip. del valore di } P)$$

(caso sub-critico) ep. ne dei moti armonici

Sistema stabile (secondo criterio di stabilità dinamica di LIAPUNOV)

c.i. il sistema non tende ad abbandonare le conf. re di rif. (di equil.), oscillando di poco intorno ad esse (+ smorz.)

$$\vartheta(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t = \dot{\vartheta}_0 \cos \omega_1 t + \frac{\ddot{\vartheta}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

moto armonico

- di pulsaz.  $\omega_1(P)$

- di ampiezza  $\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{\ddot{\vartheta}_0^2}{\omega_1^2}}$  (piccole)

attorno alle conf. re di riferimento che attenua progressivamente l'oscillazione

$$2) K - Pl = 0; \quad P = \frac{K}{\ell} \Rightarrow I \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta(t) = A + Bt$$

Perdita di stabilità delle conf. ne di equil.  $\dot{\vartheta} = 0$ : sistema tende a divergere, cioè ad abbandonarla

Condizione di transizione  $P_{cr} = \frac{K}{\ell}$   
carico critico

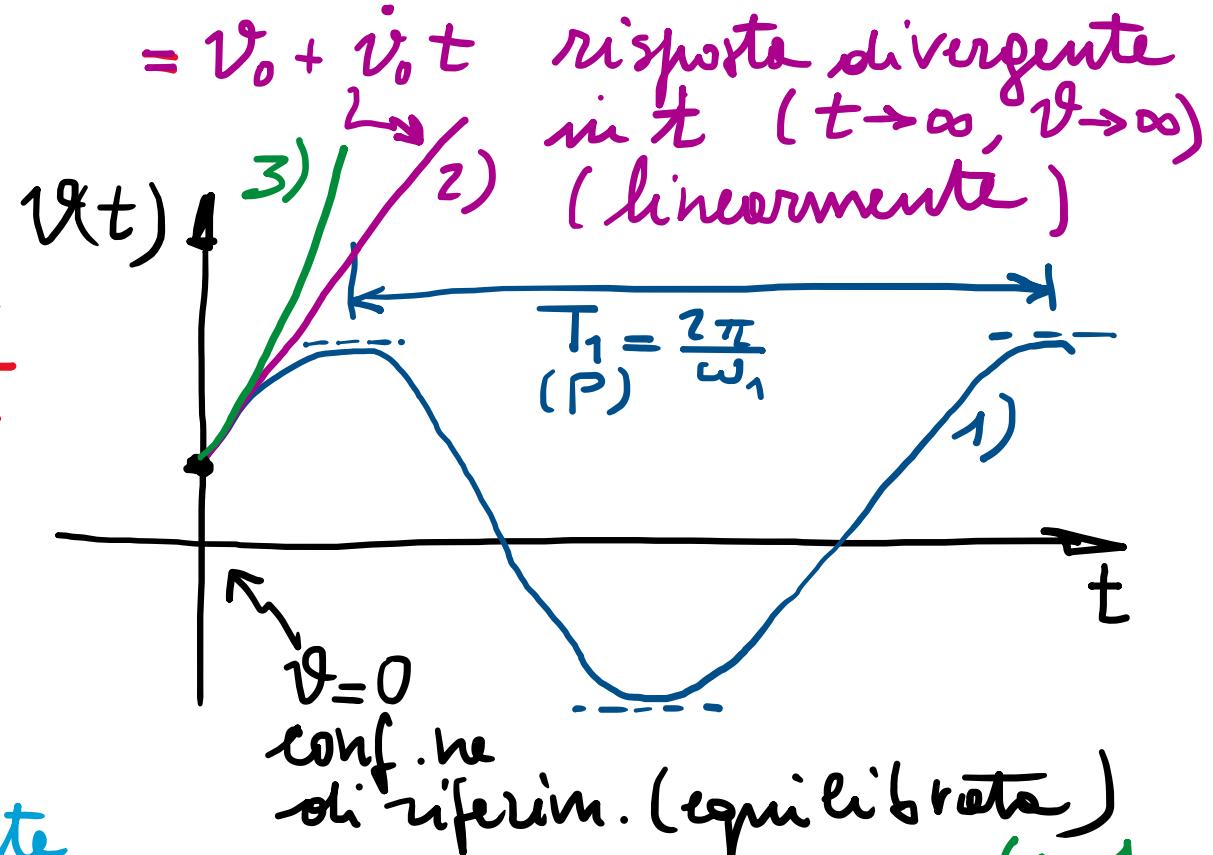
$$3) K - Pl < 0; \quad P > \frac{K}{\ell} \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \alpha^2 \vartheta = 0$$

$$\text{eq. ne corrett. } (-e^{\lambda t}) \quad \alpha^2 = -\frac{K - Pl}{I} > 0$$

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha \Rightarrow e^{\pm \alpha t}$$

$$\vartheta(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

caso supercritico



In sintesi:  $P = p P_{cr} = p \frac{K}{\ell}$  ( $p = 1$  carico critico)

- Stabile  $P < P_{cr} = \frac{K}{\ell}$  ( $p < 1$ )

- Instabile  $P \geq P_{cr} = \frac{K}{\ell}$  ( $p \geq 1$ )

Approssimazione statico

eq. non lineare in  $\vartheta$

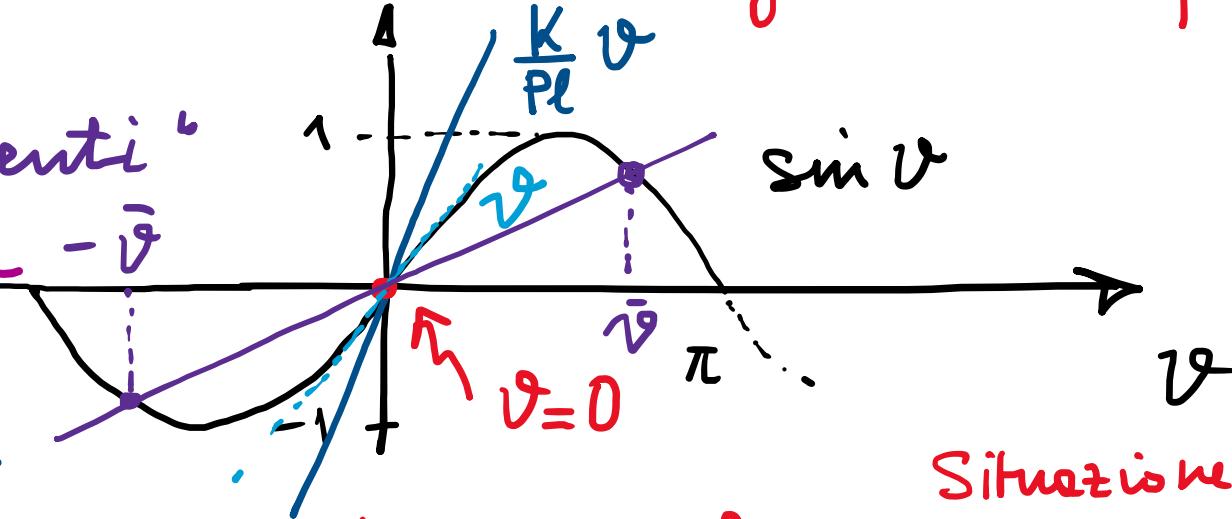
eq. di equil.  $\{ P \sin \vartheta = K \vartheta \} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{K}{P \ell} \vartheta$

( $\vartheta=0$  è una conf. ne di equil.)

nelle conf. ne deformate (gli spostamenti sono tali da influenzare l'eq. ne di equilibrio):

- analisi in "grandi spostamenti"
- non-linearietà geometrica -  $\bar{\vartheta}$

1)  $\frac{K}{P \ell} > 1 ; P < \frac{K}{\ell}$   $\vartheta=0$  unica solut.



2)  $\frac{K}{P \ell} = 1 ; P = \frac{K}{\ell} = P_{cr}$  infinite soluzioni nell'intorno di  $\vartheta=0$

Situazione di transizione

(critica) si

3)  $\frac{K}{P \ell} < 1 ; P > \frac{K}{\ell}$  più soluz. equil.  $\{ \vartheta=0 \} \vartheta = \pm \bar{\vartheta}$

produce per lo stesso valore  $P = \frac{K}{\ell}$

det. con LIAPUNOV

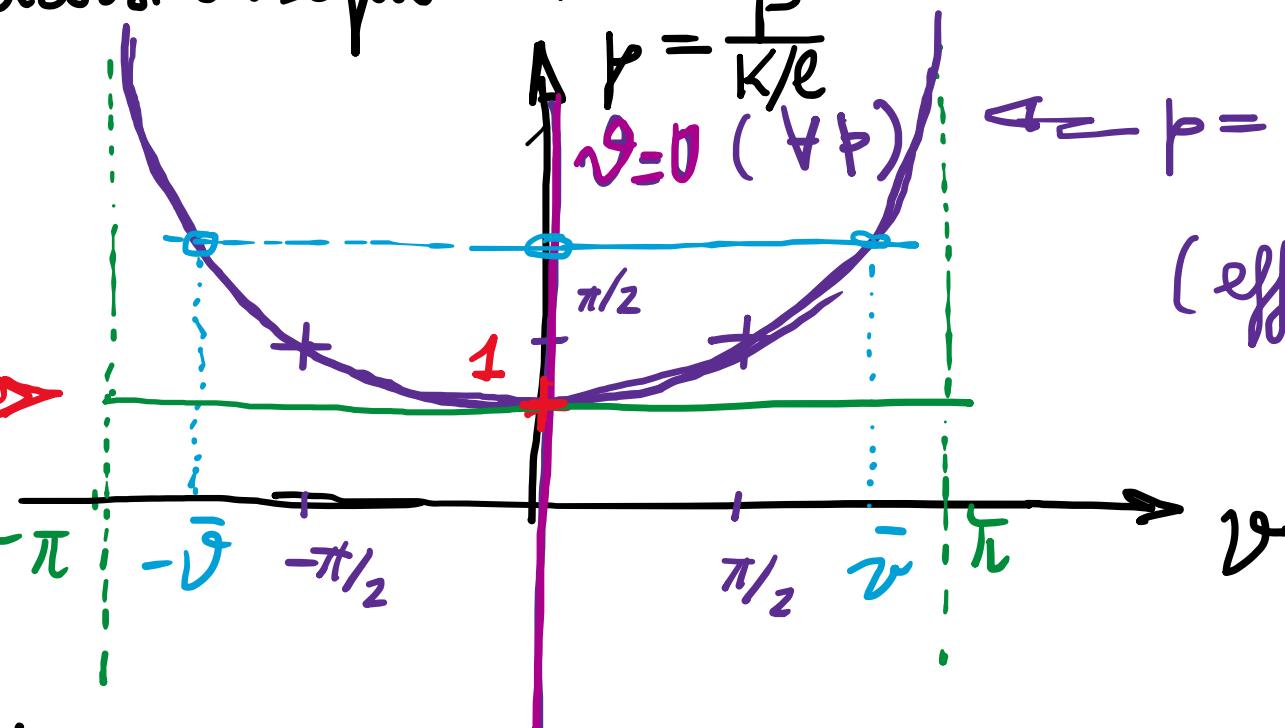
$b = \frac{P \ell}{K} : b = \frac{\bar{\vartheta}}{\sin \bar{\vartheta}}$

$P = P_{cr} = \frac{K}{\ell}$  perdite di stabilità -

Mappe dei percorsi di equilibrio:

$$P = P_{cr} \quad (\rho = 1)$$

punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio  $\Rightarrow$



(f.un "pari"  $P(v) = P(-v)$ )

$$\Leftrightarrow P = \frac{F}{\sin v}$$

(effetto P-Δ)

curva forza-spost.  
non lineare

Il corso critico viene deolatto in base alla presenza di un p.tto di biforcazione dei percorsi di equilibrio (perdita di unicità della solut.)

Idem per analisi sui spostamenti "geometricamente fricoli": (resto utile a determinare  $P_{cr}$ )

$$|\dot{v}| \ll 1 \Rightarrow \sin v \approx v \Rightarrow (K - Pl)v = 0 \quad \begin{cases} K - Pl \neq 0 \Rightarrow v = 0 \\ K - Pl = 0 \Rightarrow v = v_{rb} \end{cases}$$

p.tto di biforcaz. per  $P = \frac{K}{l} = P_{cr}$

## SOMMARIO (Lec. 16)

- Dalle Dinamica all'Instabilità delle strutture  $\Rightarrow$  criterio dinamico di stabilità secondo LIAPUNOV.
- Carico critico : valore caratteristico che segnala le perdite di stabilità del sistema (piccole perturbazioni non restano più confinate a risposte limitate).
- Transizione dinamica (verso il collasso).

### Instabilità delle strutture

- Approssimazione statica : scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate (perdite di unicità della soluzione).
- Non-linearità geometrica carico/spostamento.
- Carico critico : p.t.o. di biforcazione nelle mappe dei percorsi di equilibrio.
- Analisi per spostamenti "geometricamente pieni" (con stesso  $P(r)$ ).

Next step: Approssimazione energetica per indagare la natura (stabile/instabile) delle configurazioni di equilibrio.