

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

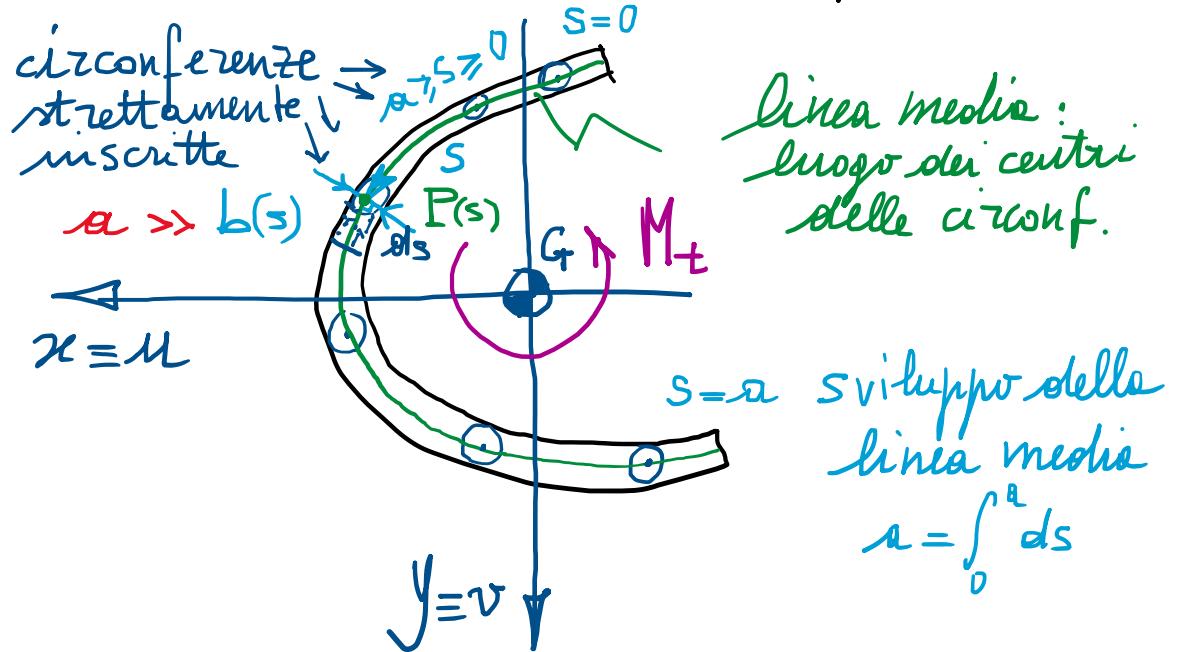
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

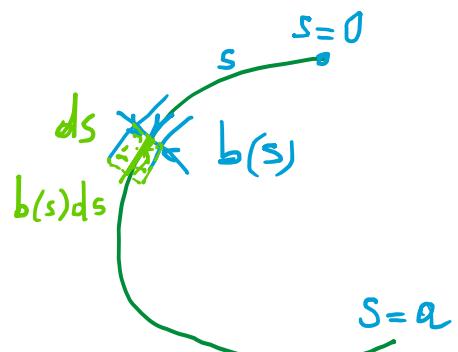
[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 22

Torsione nei profili sottili aperti ( $\rightarrow$  generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile) "ripiagato"



Caratteristiche geometriche (riferite alla linea media):

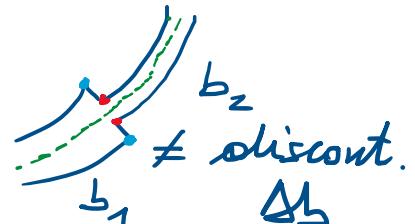


$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

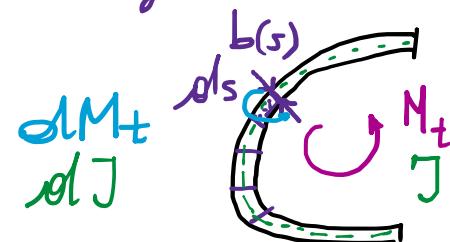
$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore  $b(s)$ , anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).
- Variazione ammessa, seppur con  $b(s) \ll a$  e  $s$ , con continuità: non

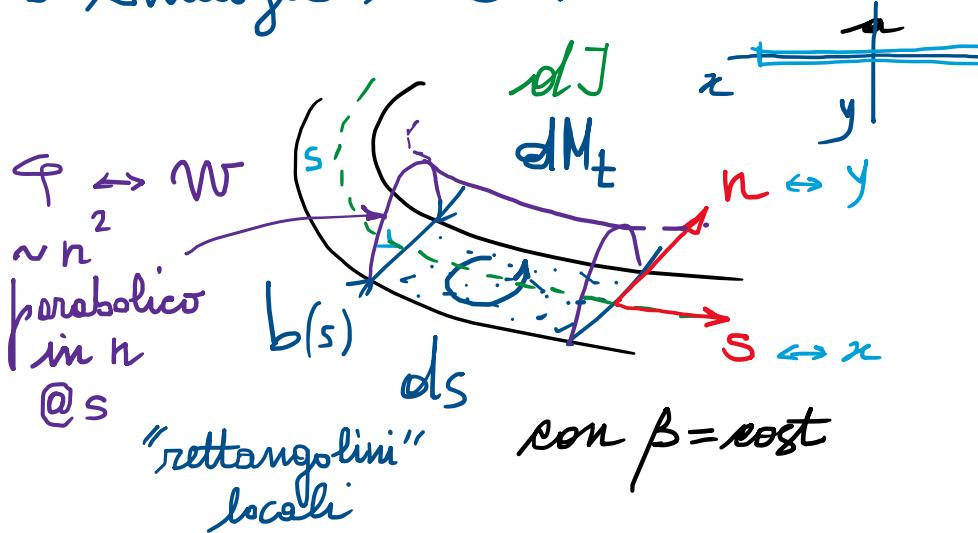


- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo  $b(s) ds$  si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione

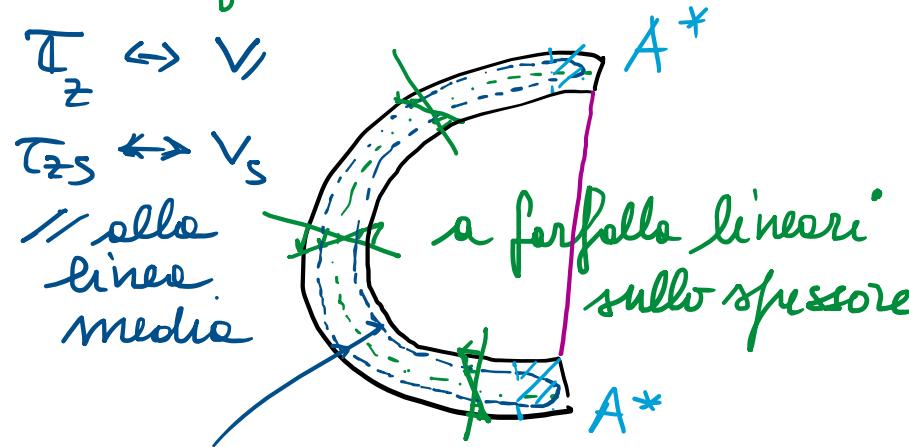


a parità di  
torsione  
 $\beta = \text{cost}$

## • Analogie delle membrane:



## • Analogie idrodinamica:



traiettorie che si richiudono all'interno dello spessore  $\Rightarrow$

"bracci di leva" delle  $T_{zs}$  dell'ordine dello spessore  $b(s)$  quindi piccoli  $\Rightarrow$  scarsa capacità portante a torsione

## • F.ve di Airy:

$$\Phi(s, n) = K \left( \frac{b(s)^2 - n^2}{4} \right)$$

locale

$$M = \pm \frac{b}{2}$$

$$G\beta$$

$$T_{zs}(s) = \frac{M_t}{J} b(s)$$

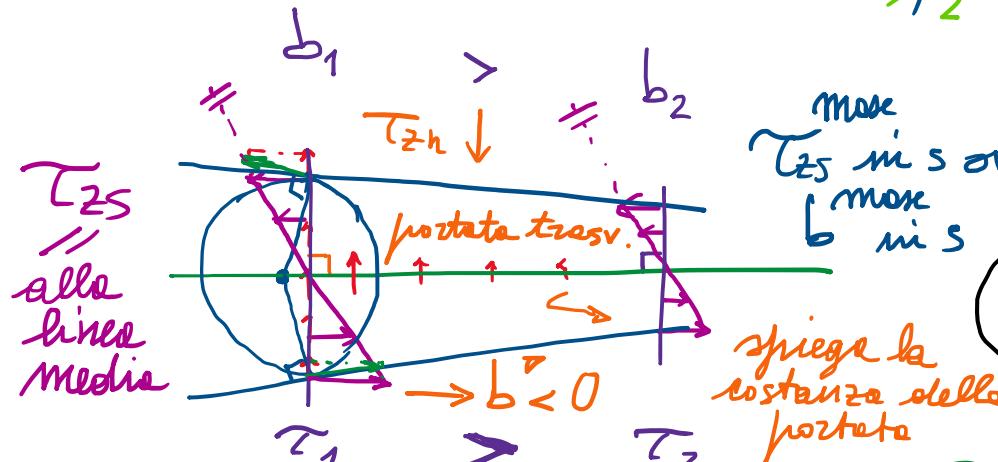
## • tensioni tangenziali:

$$\begin{cases} T_{zs}(n; s) = \Phi_{,n} = G\beta (-2n) = -2G\beta n = -2 \frac{M_t}{J} n \\ T_{zn}(s) = -\Phi_{,s} = K \frac{2b(s)}{4} \frac{b(s)}{ds} \simeq 0 \end{cases}$$

trascurabili in senso ingegneristico

$$\frac{db(s)}{ds} \simeq 0$$

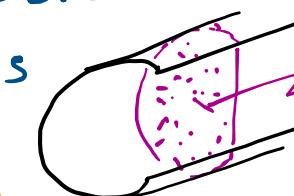
spessore resto piccolo



$T_{zs}$  in s ove

$b$  in s

spiega la costanza della portata



irrigidimenti per garantire  $\beta = \text{cost}$

$T_z$  tangente al contorno

$T_{zn}$

$T_{zs}$  (fluido uscisse dal profilo)

-  $\int J$  determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle  $T_{2S}$  e il momento torcente  $M_t$ ):

$$M_t = 2 \int_A CP dA = 2 G\beta \int_0^a \int_{-\frac{b(s)/2}{2}}^{\frac{b(s)/2}{2}} \left( \frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) dn ds$$

$$\begin{aligned} &= 2G\beta \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \\ &= G\beta J \end{aligned}$$

$dJ \quad \frac{ds}{b(s)}$

$b = \text{cost} \Rightarrow J = \frac{1}{3} ab^3$

$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds$  "piccolo"  
 $\sim b^3(s)$

momento d'inerzia torsionale

torsione  
 $\downarrow$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad G\beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ} \Rightarrow dM_t = \frac{dJ}{J} M_t$$

cost. per tutti i  $b(s) \cdot ds$   
rigidezza torsionale



$$T_{2S}(s) = G\beta b(s) = \frac{M_t}{J} b(s) = \frac{dM_t}{dJ} b(s)$$

- Ingobbiamento fuori piano (riferito alle linee media)  $[\Psi_g(s) \neq 0, \Psi_c(s) \neq 0]$

campus  
phi

spostamenti  
(rif. a G)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\beta z y \\ \dot{y} = \beta z x \\ \dot{z} = \beta \Psi_G(x(s), y(s)) \end{array} \right. \quad 1.$$

$$\Delta_s = \Delta \cdot t = \Delta_x t_x + \Delta_y t_y$$

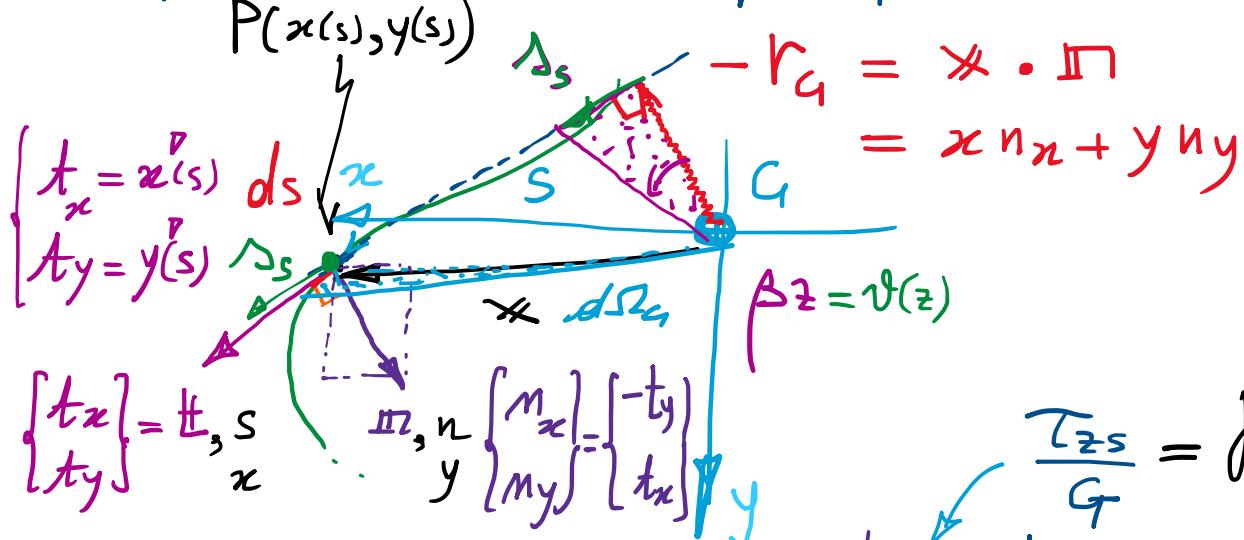
$$= \beta z (-yt_x + xt_y)$$

$$= \beta_2 (-ymy - xnx)$$

$$= -\beta z (x n_x + y n_y)$$

$$= \beta^2 r_g = \Delta_s$$

vedi mappe di  
spostamento



$$d\psi_g = -2 d\Omega_g \quad \bar{A}_g = 0$$

$$\Phi_h(s) = -2 \left( \bar{\Omega}_h(s) - \bar{\bar{\Omega}}_h(s) \right)$$

$$\frac{T_{zs}}{G} = f_{zs} = \alpha_{z,s} + \alpha_{s,z} = \beta (\psi_{a,s}^{(s)} + r_g^{(s)})$$

$$\frac{d\Psi_a}{ds} = \Psi_{a,s} = \frac{\mathcal{T}_{zs}(s)}{G\beta} - r_a(s)$$

$$d\Psi_g = \frac{T_{\bar{z}S}(s)}{g\beta} ds - 2 \underbrace{\frac{1}{2} r_g(s) ds}_{2}$$

profilo aperto: qui  $T_{es}(s) = 0$  sulla linea media

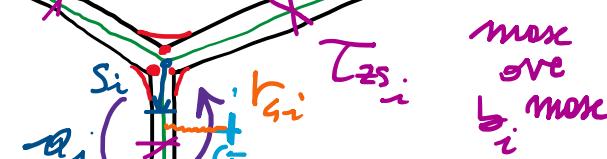
Per i profili sottili aperti, le fusioni di ingobbiamento sono definite dalle f. ne aerea

settoriale  $N_g(s) \rightarrow x_c, y_c$   
 funzione coordinate  
 area settoriale del centro di  
 torsione

- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili (caso frequente nella pratica):

smussi per abbattere concentraz. di tensione

max over  $b_i$  max



$$M_t \ll a_i \ll a = \sum a_i$$

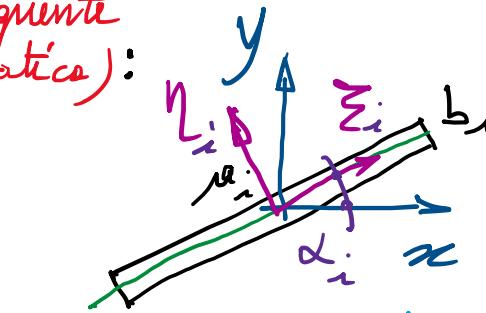
$$(T_{2\sum_i}^{\text{max}})^{\text{max}} = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M_t i}{J_i} b_i^{\text{max}}$$

$$A = \sum_i a_i b_i$$

$$J_x = \sum_i J_{x_i}$$

$$J_y = \sum_i J_{y_i}$$

$$\begin{aligned} J &= \sum_i J_i \\ &= \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3 \end{aligned}$$



$$J_{\Sigma_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \approx 0$$

$$J_y = \frac{1}{12} a_i b_i^3$$

trasf. per rotazione d'assi  
(con  $J_{\Sigma_i} = 0$ )

vedi  
Cerchiwodh'  
Mohr  
(tutte le inerzie)

- Funzione di ingombro:  $\psi_{g_i}(s_i) \sim \Omega_{g_i}(s_i)$  con  $r_{g_i} = \text{cost}_i + \text{tutto } i$

- Profili "a stella"

particolarmente  
debolli e  
torsione



centro delle stelle  
è il centro di torsione

no ulteriori risorse portanti ole  
ev. ingombramento impedito (torsione  
per congruenza  $\Leftrightarrow$  secondaria)

$$r_{g_i} \neq 0$$

$$r_{c_i} = 0 \Rightarrow \Omega_{c_i} = 0 \Rightarrow \psi_c = 0$$

$$\begin{aligned} \int_A \psi_c dA &= 0 & \checkmark \\ \int_A T_x dA &= 0 & \checkmark \\ \int_A T_y dA &= 0 & \checkmark \end{aligned}$$

f. n. di ingombro  
riferite al centro  
delle stelle identic.  
nulle

