

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

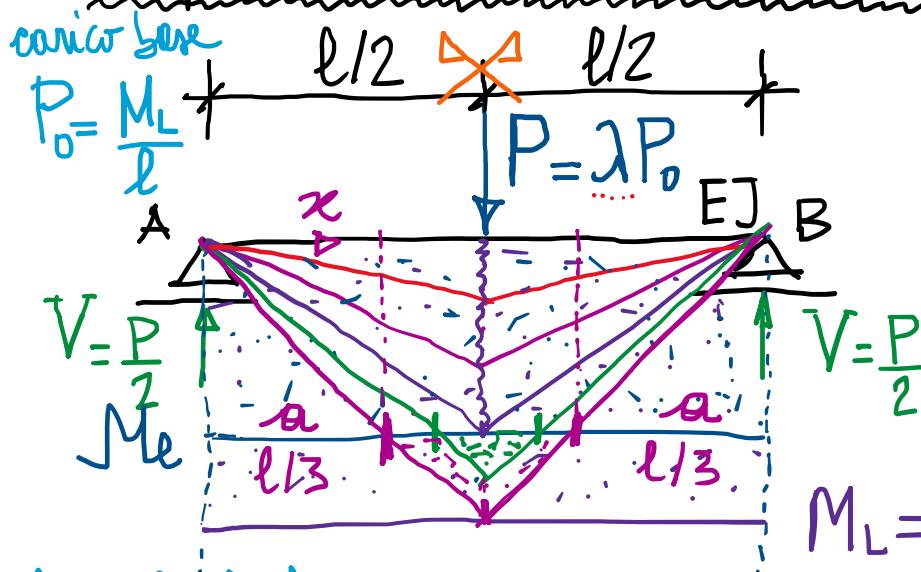
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 24

Risposta elastoplastica della trave sino a collasso plastico



$$\text{1: moltiplicatore max del cerchio } M = \frac{P}{2} \frac{L}{2} = \frac{Pl}{4}$$

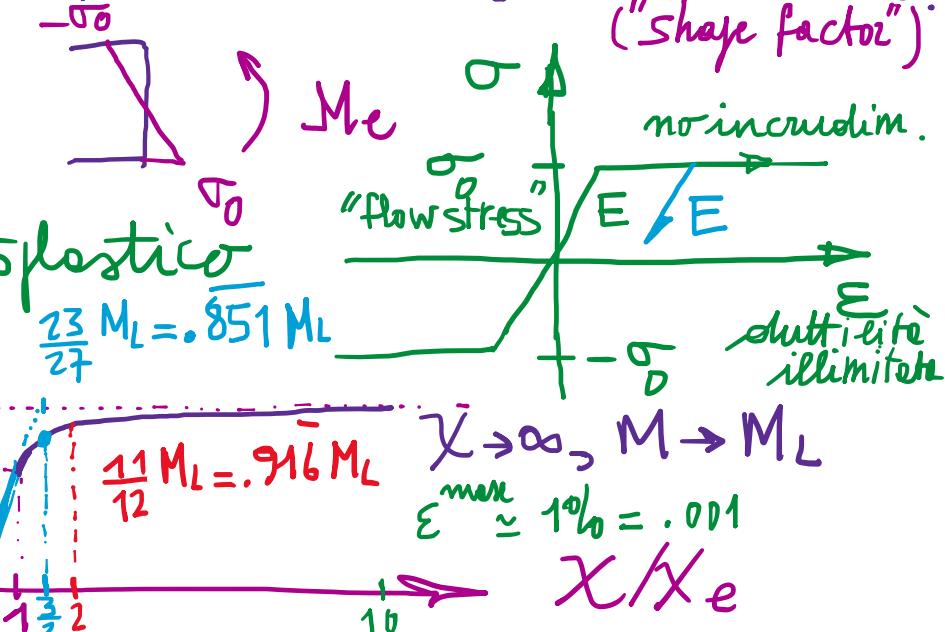
$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_L}{M_e} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_e}{x} \right)^2 \right)$$

Scheme isostatici (storicamente determinati), con distribuzione di M governata dal solo equilibrio.

$$M(x) = \frac{P}{2}x = \frac{1}{2}M_L \frac{x}{P}$$

$$M_L = \alpha M_e \quad h \quad \alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\frac{W_p}{W_e}}{\frac{W_e}{W_e}} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

fattori di forma della sezione trasversale ("shape factors").



- Comportamento del materiale perfettamente el.

- Comportamenti
 - delle sezioni trasversale

(con incremento !)

- Regime elastico: $M(x) \leq M^{\max} \leq M_e = \frac{2}{3} M_L$

$$\frac{1}{4} M_L \leq \frac{2}{3} M_L \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq \lambda_e = \frac{8}{3}$$

limite elastico

- Regime elasto-plastico:

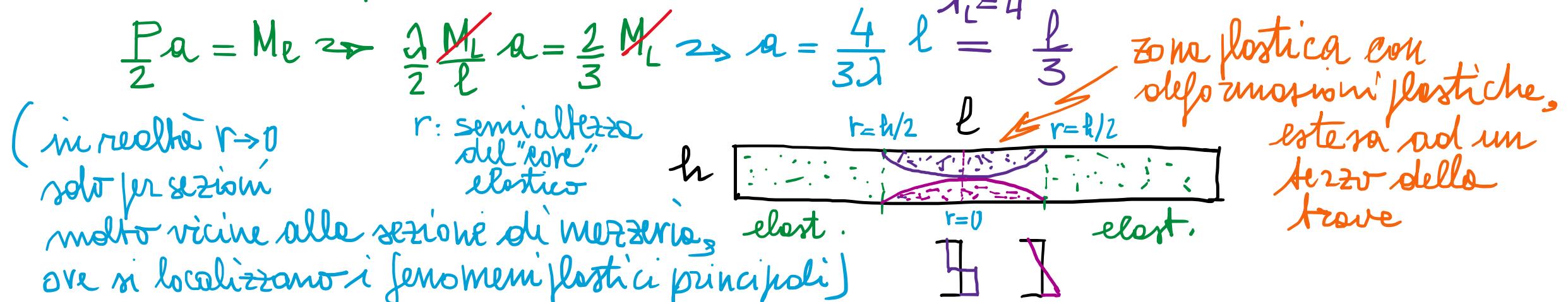
$$M_e \leq M \leq M_L$$

limitato da condizione di collasso plastico $\lambda = \lambda_L = 4$, oltre la quale non è più possibile far crescere il carico esterno (e quindi M^{\max} oltre M_L)

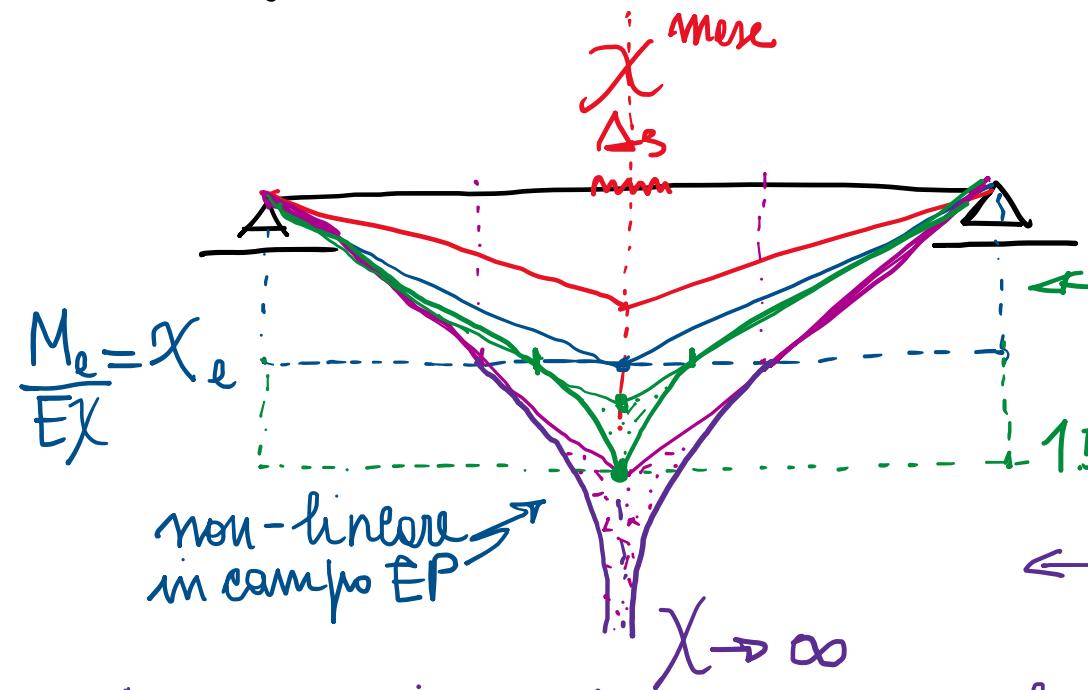
$$\frac{1}{4} M_L \leq M_L \Rightarrow \frac{8}{3} \leq \lambda \leq \lambda_L = 4$$

moltiplicatore limite di collasso (plastico)

- Estensione zone plasticizzate:



- Diagramme di curvatura $\chi(x)$: A limite elastico $M_{max} = M_e \Rightarrow \lambda = \lambda_e = \frac{8}{3}$



• χ lineare in campo elastico $1 \leq \frac{8}{3}$

$$M_{max} = M_e \Rightarrow \lambda = \lambda_e = \frac{8}{3}$$

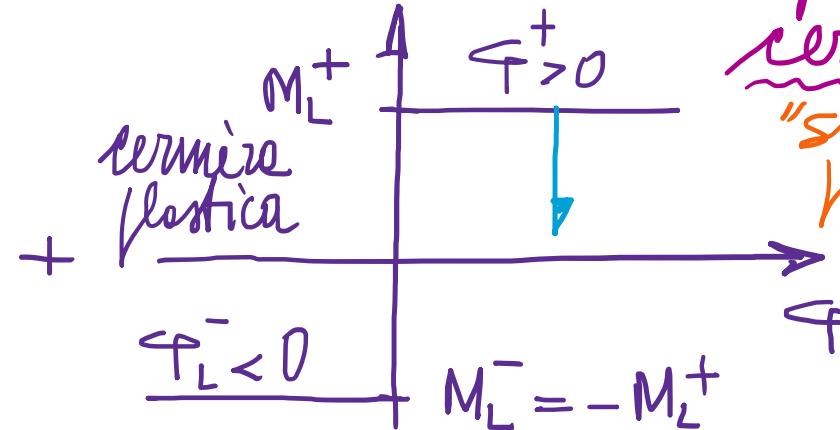
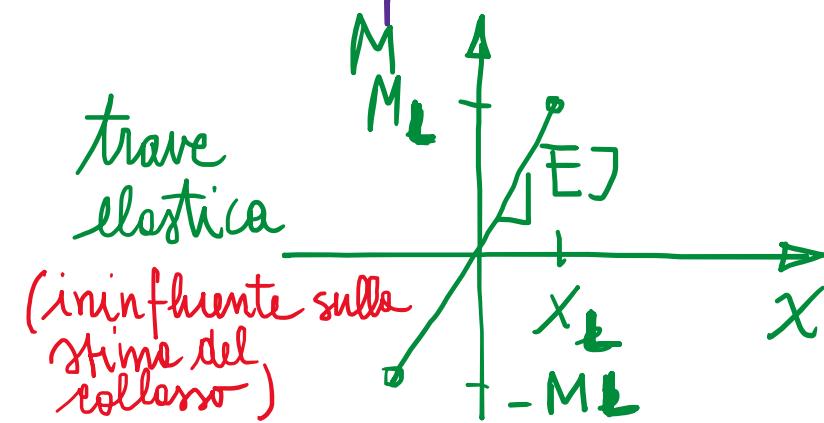
$$\chi = \chi_e = \frac{M_e}{EJ}$$

$$M = \frac{23}{27} M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftarrow M = M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} \rightarrow \infty$$

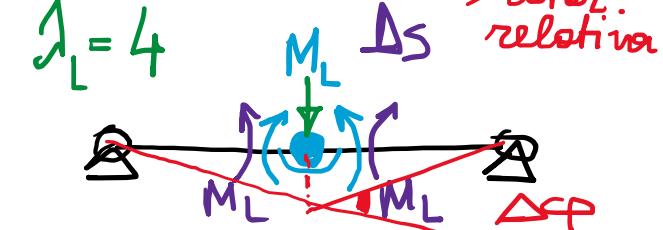
Ai fini di cogliere la situazione di collasso (λ_L)

N.B. Le sezioni che producono elevate curvature (plastiche) risultano concentrate in prossimità delle mezzerie delle trave \Rightarrow Ipotesi semplificativa di cerniere plastiche

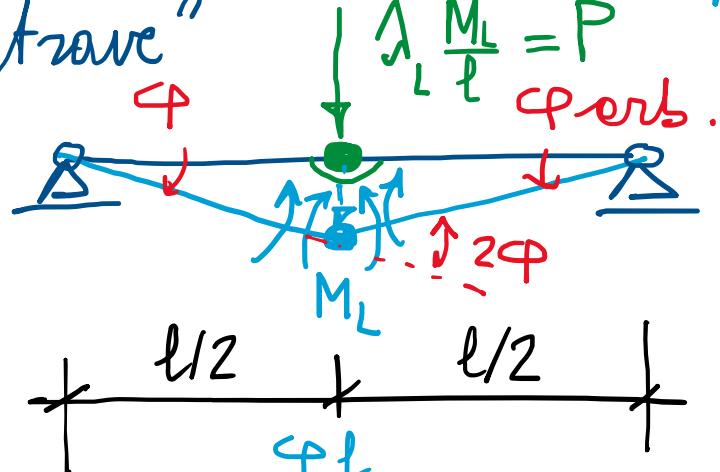


"Snoolo plastico"

$$\Delta \Phi = \int \frac{d\Phi}{dx} dx$$



Mecanismo di collasso (plastico) : situazione di collasso iniziale
 "di trave" $\downarrow \frac{I_L M_L}{l} = P$
 $\uparrow \varphi_{\text{verb}}$



(sotto
 tre
 cerneie
 ellineste)

$$I_L = \frac{D}{f_{e0}} = 4$$

$$(f_{e0} = P_0 \varphi \frac{l}{2})$$

lavoro esterno del
 pericolo base

$$\text{PLV: } \Delta_e = \frac{I_L}{l} \frac{M_L}{l} - \cancel{\frac{P}{2}} \cancel{\frac{l}{2}} - M_L 2\varphi = 0$$

bilancio
 energetico

$$I_L = 4$$

come preced.
 determini

$$\Delta_e = P \cancel{\frac{l}{2}} = f_{ip} = D = M_L 2\varphi$$

lavoro
 plastico interno
 alla cerchia plastica

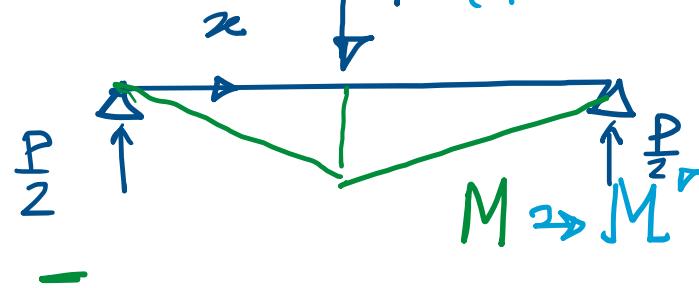
dissipazione
 plastica

NB: Nell'ipotesi di cerchia plastica, il moltiplicatore di collasso risulta facilmente individuabile tramite PLV, coerentemente col meccanismo di collasso plastico che si viene a manifestare -

Risposte elasto-plastiche effettive delle trave (non-lin.):

- Campo elastico : f_e freccia elastica (spost. in mezzerie)

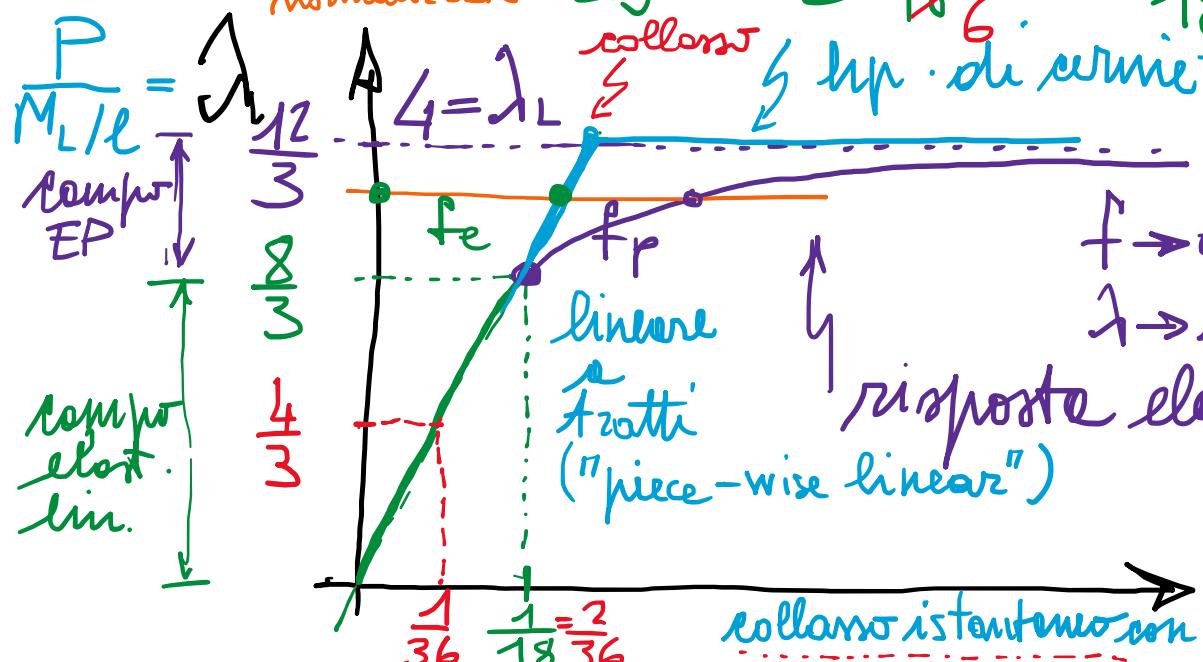
P ($P=1$)



$$f_e^{\text{mese}} = \frac{f_e^{\text{max}}}{\text{frecce normalizzate}} = \frac{M_L l^2}{EJ} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{18}$$

collarsi

hip. di cerniere plastiche (CP)



PLV : $1 f_e = \int M \frac{M}{EJ} dx$

campo
elastico

$$= \frac{P}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx$$

$$= \frac{P}{EJ} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8}$$

spost. max EJ

$$f_e = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

$\lambda \frac{M_L}{l^2}$

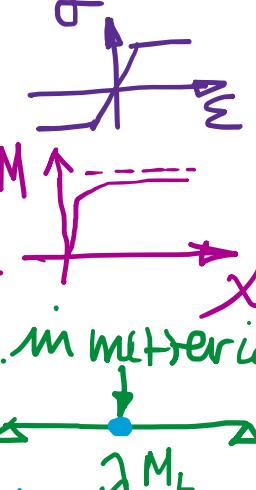
$$= \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{48} \left(\frac{M_L l^2}{EJ} \right)$$

Diagramma forze/spostamento delle trave ($P-\Delta$) [moltiplicatore/frecce]

$$\bar{f} = f / \frac{M_L l^2}{EJ}$$

NB: Con cerniere plastiche sotto stime delle deformazioni globali molto velutate. corrette da λ_L .

SOMMARIO (Lec. 24)

- Risposte elasto-plastiche delle trave (fino al collasso plastico) - Dopo: *risposta* *se.trov.*
- Analisi di sistemi isostatici (trave appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria)
- Momento noto per puro equilibrio \Rightarrow curvatura da legge costitutiva . 
- Concentrazione curvature (plastiche) in mezzeria \Rightarrow ipotesi di cerniere plastiche e schematizzazione semplificata per stima del collasso.
- Meccanismo di collasso plastico e stima del moltiplicatore di collasso λ_L da bilancio energetico (PLV).
- Curva P-Δ, forza/spostamento (moltiplicatore/frecce) non-lineare da reale risposta elasto-plastica con approssimazione lineare a tratti (piece-wise linear) nell'ip. di cerniere plastiche (utile alle stime di λ_L).

Next step: Schema iperstatico (trave incostretta) \Rightarrow ulteriori risorse elasto-plastiche da ridistribuzione di sforzo, con sviluppo di deformazioni plastiche - Risposta evolutiva (lineare a tratti) con sequenza di attivazione delle cern. plast.