Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

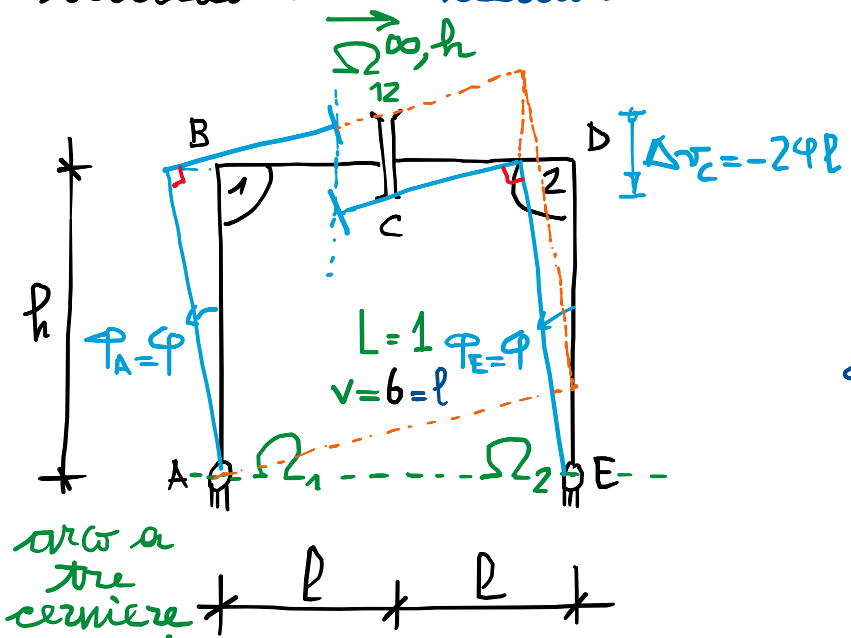
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

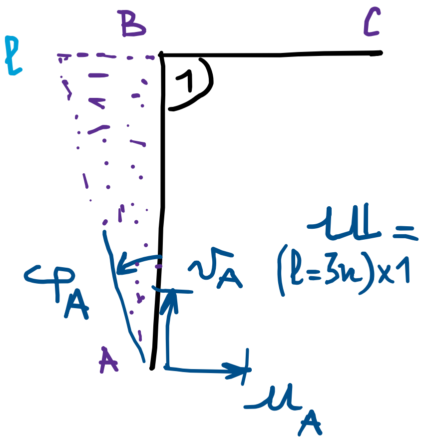
LEZIONE 05

AC analitica – Formalizzazione (sistemi articolati di corpi rigidi)

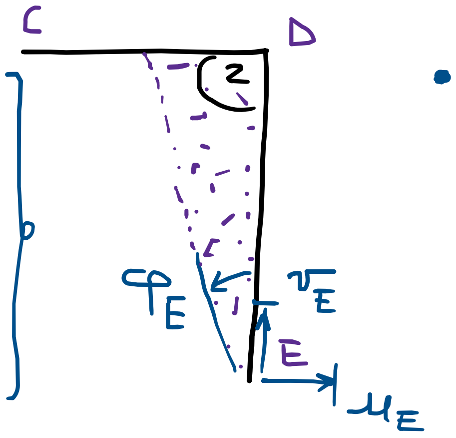


arco a tre cerniere allineate

– Approccio completo ⇒ rimozione di tutti i gdv



$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ \hdashline u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}_{(\ell = 3n)\times 1}$$



- Scelta dei gdl del sistema, in numero pari a $\ell = 3n = 6$, elencati nel vettore dei gdl $\mathbb{u}$.

$$\begin{cases} u_C^1 = u_A - \varphi_A h \\ v_C^1 = v_A + \varphi_A \ell \end{cases} \qquad \begin{cases} u_C^2 = u_E - \varphi_E h \\ v_C^2 = v_E - \varphi_E \ell \end{cases} \leftrightarrow \text{relazioni lineari in } \mathbb{u}$$

- Sistema di congruenza (completo): scrittura esplicita delle eq.ni di vincolo, in corrispondenza dei gdv rimossi (in numero pari a v)
(o di compatibilità)

$$v \begin{cases} u_A = u_A = 0 \\ v_A = v_A = 0 \\ \Delta u_C = u_C^2 - u_C^1 = (u_E - \varphi_E h) - (u_A - \varphi_A h) = \\ \Delta\varphi_C = \varphi_C^2 - \varphi_C^1 = \varphi_E - \varphi_A = 0 \\ u_E = u_E = 0 \\ v_E = v_E = 0 \end{cases}$$

$$u_E - h\varphi_E - u_A + h\varphi_A = 0$$

vettore degli spostamenti in corrispond. dei vincoli rimossi

$$\boxed{\mathbb{V} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{u} = \bar{\mathbb{V}} = \mathbb{0}}$$

$v\times\ell$ matrice di congruenza

$$\Rightarrow \mathbb{V}_{v\times 1} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta u_C \\ \Delta\varphi_C \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}}_{\mathbb{C}\;\; v\times\ell} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ \hdashline u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{bmatrix}}_{\mathbb{u}\;\; \ell\times 1} = \bar{\mathbb{V}} = \mathbb{0}$$

- Proprietà algebriche del sistema di congruenza:

$$\mathbb{v} = \underset{v\times\ell}{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{u} = \bar{\mathbb{v}} = \mathbb{0}$$

n. incognite

$$L = N[\mathbb{C}] = \ell - r[\mathbb{C}] \geq 0$$

grado di indetermin. cinematica o grado di labilità del sistema

dimensione del nucleo della matrice $\mathbb{C}$ (n. di vettori lin. indip. soluzioni non banali $\mathbb{u} \neq \mathbb{0}$)

rango della matrice $\mathbb{C}$ (max n. di righe o di colonne linearmente indipendenti)

$$r \leq \min\{v, \ell\}$$

- Nell'esempio in esame: 6^a colonna lin. dip. dalle 3^a,

  $r[\mathbb{C}] = 5$, $L = \ell - r = 6 - 5 = 1$

  $\det[\mathbb{C}] = h - h = 0$ ($\mathbb{C}$ è singolare)

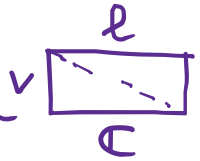
  Soluz.: $\varphi_A = \varphi_E = \varphi$ arbitrario

- Approccio analitico codificabile in programmi di calcolo.

- Osservazioni:

- Per avere $L=0$, occorre $r=\ell$. Pertanto se $v<\ell$, sist. certamente labile (indet.):

rett. bassa



$$r \leq v < \ell \Rightarrow \ell > r \Leftrightarrow L = \ell - r > 0$$

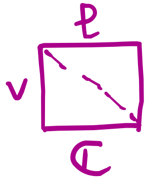
$$L = \ell - r + v - v = \underbrace{\ell - v}_{>0} + \underbrace{v - r}_{\geq 0}$$

sist. almeno $\ell - v$ volte labile

differenza tra gdl e gdv

- Se $v=\ell$, sist. potenz. cinematicamente isodeterminato.

quadrata

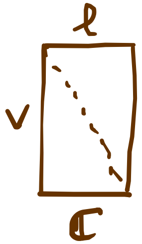


Se $\mathbb{C}$ di rango pieno ($r=\ell=v$), il sist. è cinem. isodeterminato.

$$\det[\mathbb{C}] \neq 0 \Rightarrow L = 0$$

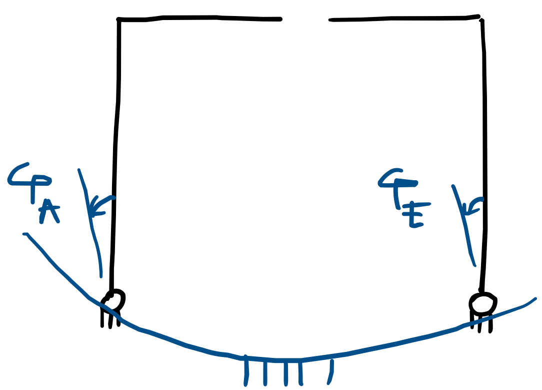
- Se $v>\ell$, sist. potenz. iperdeterminato

rett. alta



Se $\mathbb{C}$ di rango pieno ($r=\ell<v$), il sist. è cinem. iperdeterminato

– Approccio ridotto (schema ad albero) ⇒ apertura maglia chiusa, che la struttura forma con la terra



$$\underset{2\times 1}{\underline{u}^{\triangledown}} = \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_E \end{Bmatrix} \text{ sottovettore di } \underline{u}$$

$$\underline{v}^{\triangledown} = \begin{Bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta \varphi_c \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h & -h \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^{\triangledown}} \overbrace{\begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_E \end{Bmatrix}}^{\underline{u}^{\triangledown}} = \bar{\underline{v}} = \underline{0} \Rightarrow \text{soluz.}: \varphi_A = \varphi_E$$

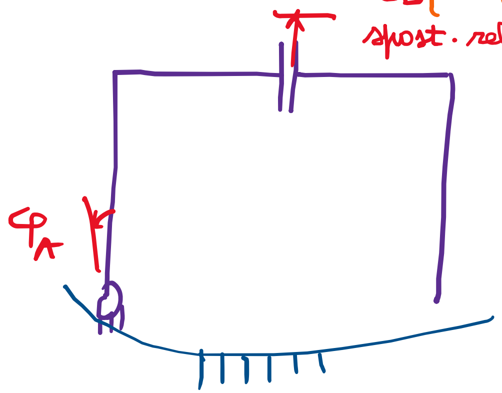
sottovettore di $\underline{v}$

$\mathbb{C}^{\triangledown}$ matrice di congruenza ridotta ($\mathbb{C}^{\triangledown}$ sottomatrice di $\mathbb{C}$)

$r[\mathbb{C}^{\triangledown}] = 1$, $\det[\mathbb{C}^{\triangledown}] = h - h = 0$

Altra possibilità:

$v_{CD} \left(= v_C^2 - v_C^1 = \Delta v_C\right)$ spost. relativo



(schema ad albero vero e proprio, con una sola radice a terra)

$$\underline{u}^{\triangledown\triangledown} = \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ v_{CD} \end{Bmatrix} \text{ non sottovettore di } \underline{u}$$

$$\underline{v}^{\triangledown\triangledown} = \begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{array}{cc} \varphi_A & v_{CD} \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2\ell & 1 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{array}}_{\mathbb{C}^{\triangledown\triangledown}} \overbrace{\begin{Bmatrix} \varphi_A \\ v_{CD} \end{Bmatrix}}^{\underline{u}^{\triangledown\triangledown}} = \bar{\underline{v}} = \underline{0} \Rightarrow v_{CD} = -2\ell\varphi_A$$

sottovettore di $\underline{v}$

$\mathbb{C}^{\triangledown\triangledown}$ (non sottom. di $\mathbb{C}$)

$r[\mathbb{C}^{\triangledown\triangledown}] = 1$, $\det[\mathbb{C}^{\triangledown\triangledown}] = 0$

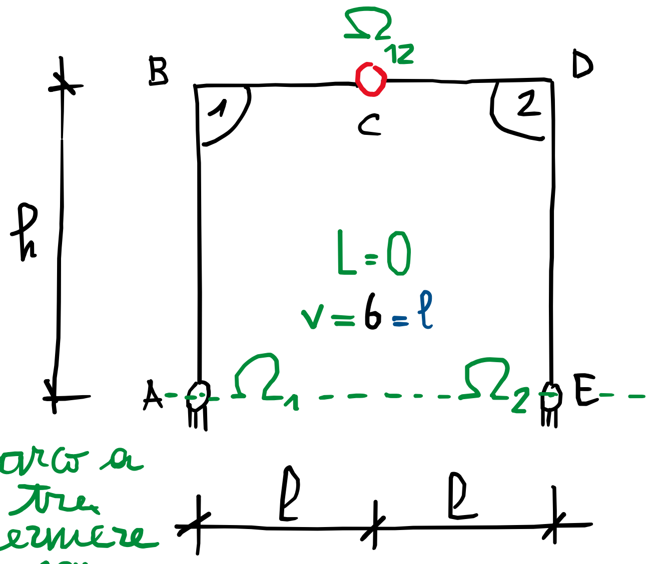
– Variante isodeterminata (⇒ modifica di un solo gdv relativo in C: da pattino a cerniera)

Anzichè scrivere $\Delta\varphi_c = 0$, occorre imporre:

$$\Delta v_c = v_c^2 - v_c^1 = v_E - \ell\varphi_E - v_A - \ell\varphi_A = 0$$

unica equazione mutata

⇒ modifica solo della 4ª riga della matrice $\mathbb{C}$



arco a tre cerniere non allineate

$$\underset{v\times 1}{\mathbb{V}} = \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta u_c \\ \Delta v_c \\ u_E \\ v_E \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & -\ell & 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}}^{\mathbb{C}}_{v\times \ell} \cdot \overbrace{\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{Bmatrix}}^{\mathbb{u}} = \bar{\mathbb{V}} = 0$$

ora:

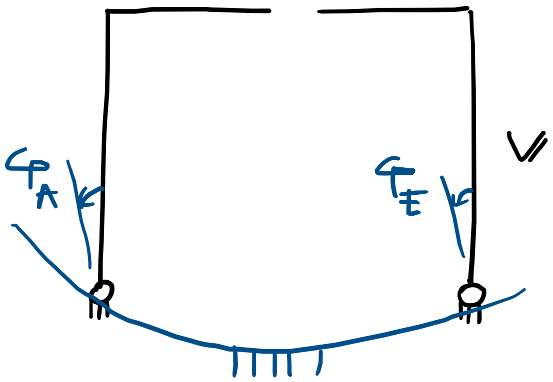
$\det[\mathbb{C}] = -h\ell - h\ell = -2h\ell \neq 0$

$r[\mathbb{C}] = 6$

$l = \ell - r = 6 - 6 = 0$

sistema non labile, cinem. isodeterminato

– Idem per schema ad albero:



è sottomatrice di $\mathbb{C}$

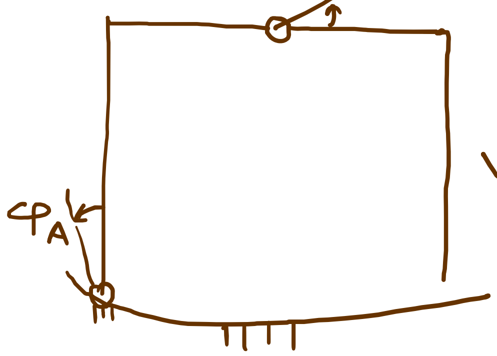
$$\mathbb{V}' = \begin{Bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta v_c \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} h & -h \\ -\ell & -\ell \end{bmatrix}}^{\mathbb{C}'} \overbrace{\begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_E \end{Bmatrix}}^{\mathbb{u}'} = 0$$

$r[\mathbb{C}'] = 2$

$\det[\mathbb{C}'] = -2h\ell \neq 0$

φ_{CD} (rotazione relativa)

$\varphi_2 - \varphi_1$



$$\mathbb{V}'' = \begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & h \\ 2\ell & \ell \end{bmatrix}}^{\mathbb{C}''} \overbrace{\begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_{CD} \end{Bmatrix}}^{\mathbb{u}''} = 0$$

$r[\mathbb{C}''] = 2$

$\det[\mathbb{C}''] = -2h\ell \neq 0$