

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

"Cerchio" di (Culmann) - Mohr (circolo e circonferenza es. $\sigma_{III} = 0 \Rightarrow \sigma_z = 0$)
 [1866] [1882] di Mohr)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \cdot \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Rappresentazione analitico-grafica delle componenti di sforzo (piano), normale σ e tangenziale τ , al variazione delle grecitura nel piano (α)

[es. stato di sforzo nelle travi alla DSV]

(vedi relazione di Cauchy; caso particolare)

$$d\Sigma = dx dz = ds \sin \alpha dz$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sin \alpha d\Sigma$$

$$d\Sigma = ds dz$$

$$(\tau_{yx} =) \tau_{xy}$$

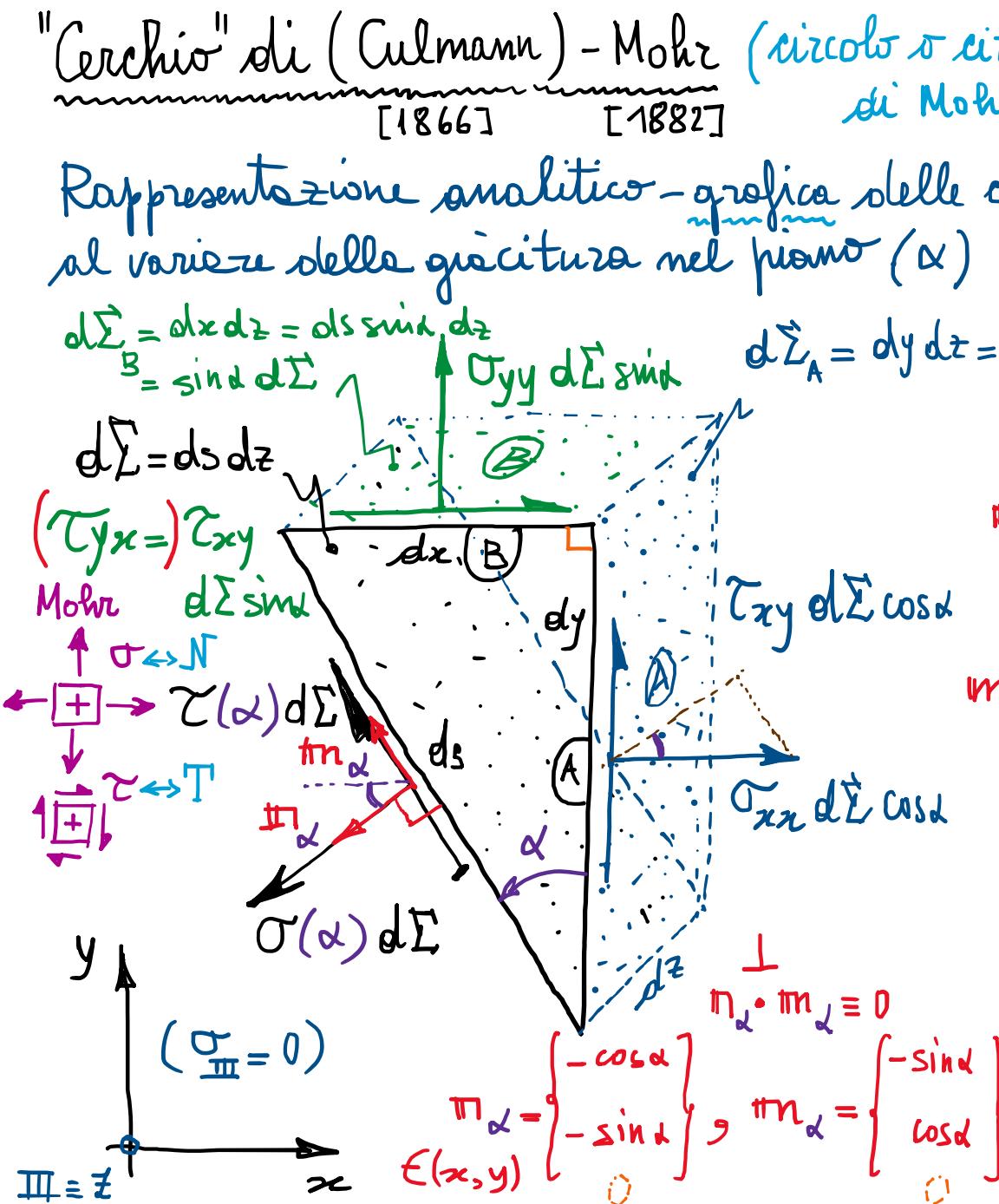
$$\text{Mohr } d\Sigma \sin \alpha$$

$$\sigma \leftrightarrow N$$

$$+ \rightarrow \tau (\alpha) d\Sigma$$

$$\tau \leftrightarrow T$$

$$1 \quad +$$



Equilibrio alle traslazioni: ($\nabla d\Sigma$) [tra forze]

$$m_\alpha: \sigma d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \cos \alpha + \sigma_{yy} d\Sigma \sin \alpha$$

$$+ \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin \alpha \cos \alpha$$

$$m_\alpha: \tau d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \sin \alpha - \sigma_{yy} d\Sigma \cos \alpha$$

$$- \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(2\alpha) = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau(2\alpha) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{array} \right.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Relazioni finali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = \quad \textcircled{1} \quad \quad \quad \vdots \quad \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

Si sono ottenute le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano di Mohr ($\sigma_3 \tau$) di:

↑ piano delle componenti di
spazio normale e tangenziale
su facce di giacitura &

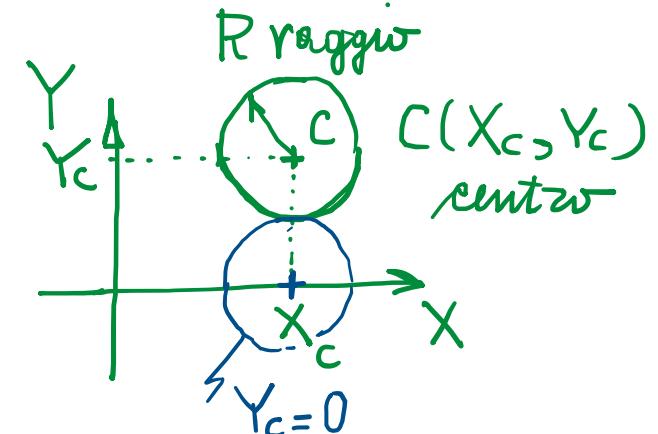
Infatti :

$$\begin{aligned}
 & \left(\sigma - \underbrace{\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}}_{\sigma_c} \right)^2 + (\tau_{xy})^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 \cos^2 \alpha + \tau_{xy}^2 \sin^2 \alpha + 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\
 & \quad + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 \sin^2 \alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\
 & = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2
 \end{aligned}$$

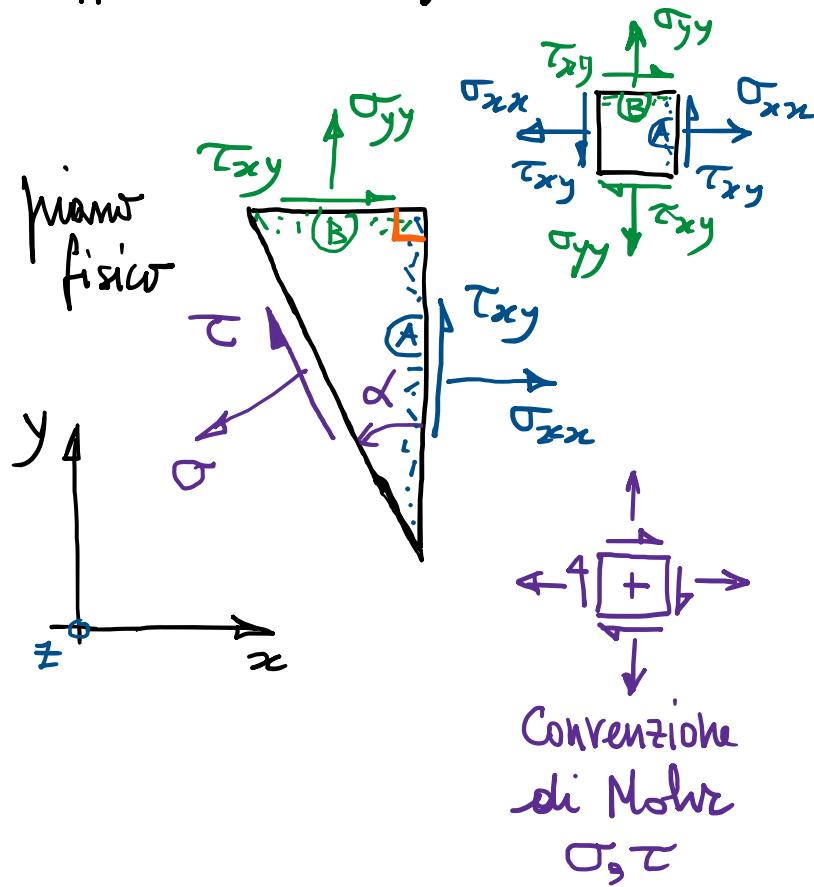
R: Radius
Y: A
C: C

$$(O - O_c)^2 + (\tau - \tau_c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2$$

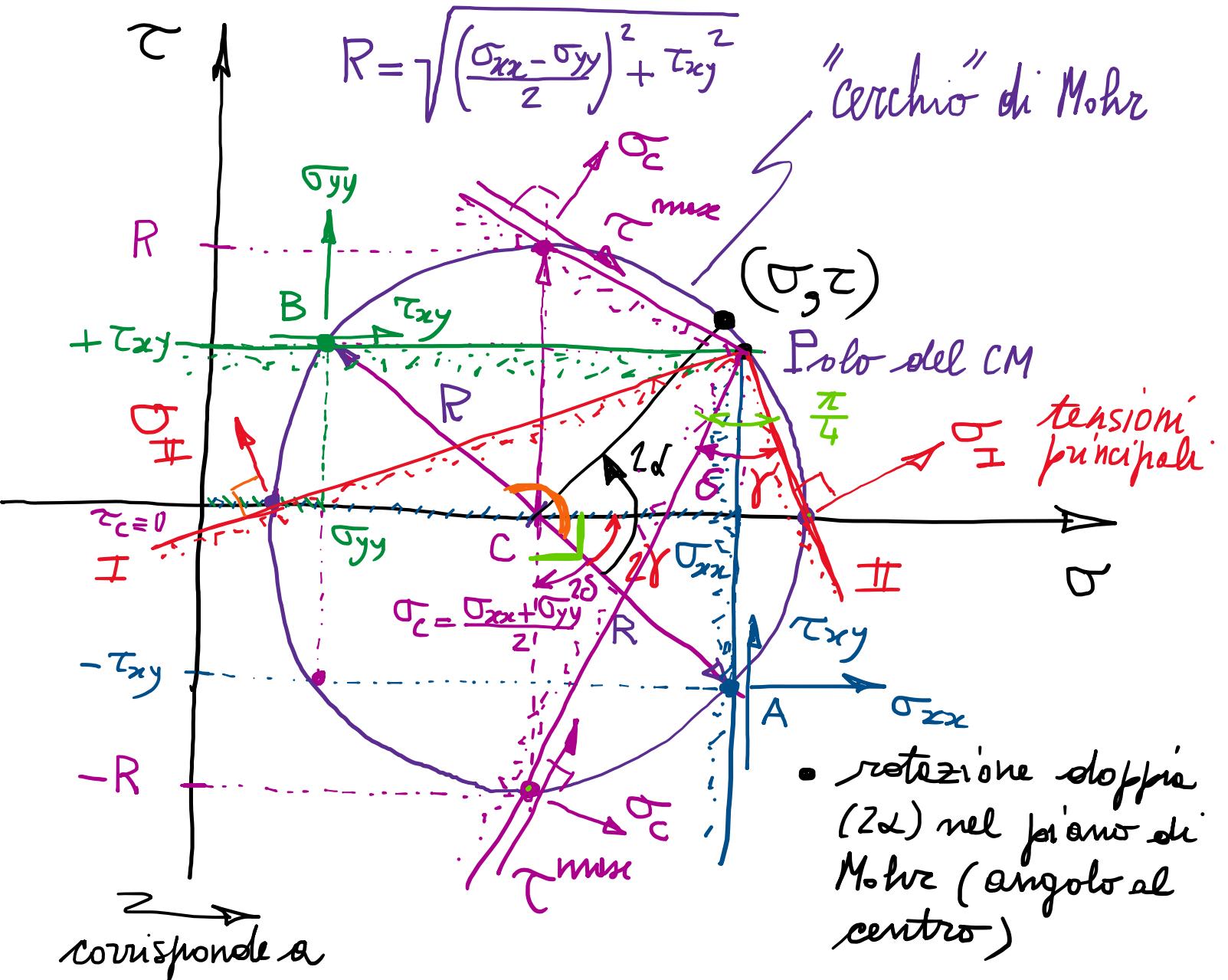
Equazione di circonferenza
nel piano X, Y



Rappresentazione grafica nel piano di Mohr (σ, τ):



- giaciture con rotazione α nel piano fisico
(nel sovrapporre le facce verticali a quelle inclinate)



Commenti:

- Rotazioni α nel piano fisico corrispondono a rotazioni doppie (2α) nel piano di Mohr (piano delle componenti σ, τ).
- I punti A e B del Cerchio di Mohr (CM) corrispondenti a componenti σ, τ su facce mutuamente \perp , risultano diametralmente opposti sul CM ($2\alpha = \pi$).
- Le tensioni principali nel piano $\sigma_{I,II}$ sono agevolmente individuate dalle intersezioni del CM con l'asse σ ($\tau=0$) e rappresentano i valori max e min dello sforzo normale al variare di tutte le sezioni nel piano:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{soluz. eq. ne caratteristiche} \\ \sigma_{III}=0 \Rightarrow I_3=0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{eq. ne di} \\ 2^{\text{o}} \text{ grado} \end{array} \end{array}$$

- La tensione tangenziale max in valore assoluto è individuata in corrispondenza di σ_c ed è rappresentata dal raggio del CM:

$$\tau^{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

[N.B.: (τ^{\max})
essa si accompagna
a $\sigma = \sigma_c$; punti del
CM ($\sigma_c, \pm \tau^{\max}$)]

- Polo del CM, avente le seguenti proprietà: la retta per esso (P) e il generico p.t. (σ, τ) del CM rappresenta la giacitura delle facce su cui insistono tali componenti σ, τ .
 [possibilità di rappresentare il piano "fisico" sovrapposto al piano di Mohr] \rightarrow caratteristiche
su CM

- Tramite P sono ferentate individuabili specifiche direzioni γ del piano, es.:
 - direzioni principali I, II , inclinate di γ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

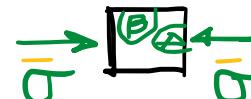
- direzioni secondo cui agisce la τ^{\max} (insieme a σ_c), inclinate di angolo δ tale che:

$$2\delta + 2\gamma = \pi/2 \rightarrow \delta + \gamma = \pi/4 \rightarrow \delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$$

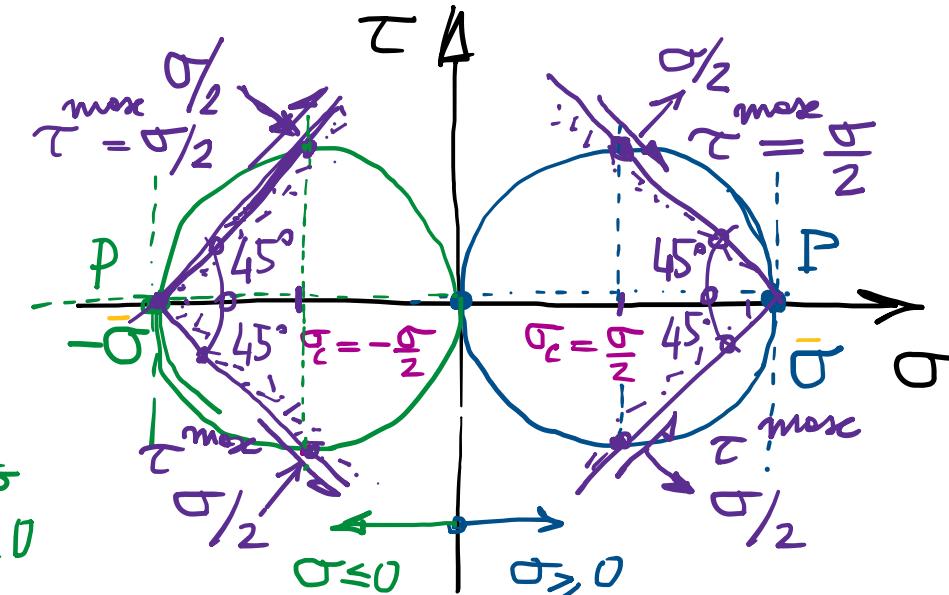
- Ferentate, le direzioni secondo cui agisce la τ^{\max} risultano sempre inclinate a 45° rispetto alle direzioni principali.

Esempi tipici:

- Stato di spazio monomassiccio di trazione σ e compressione

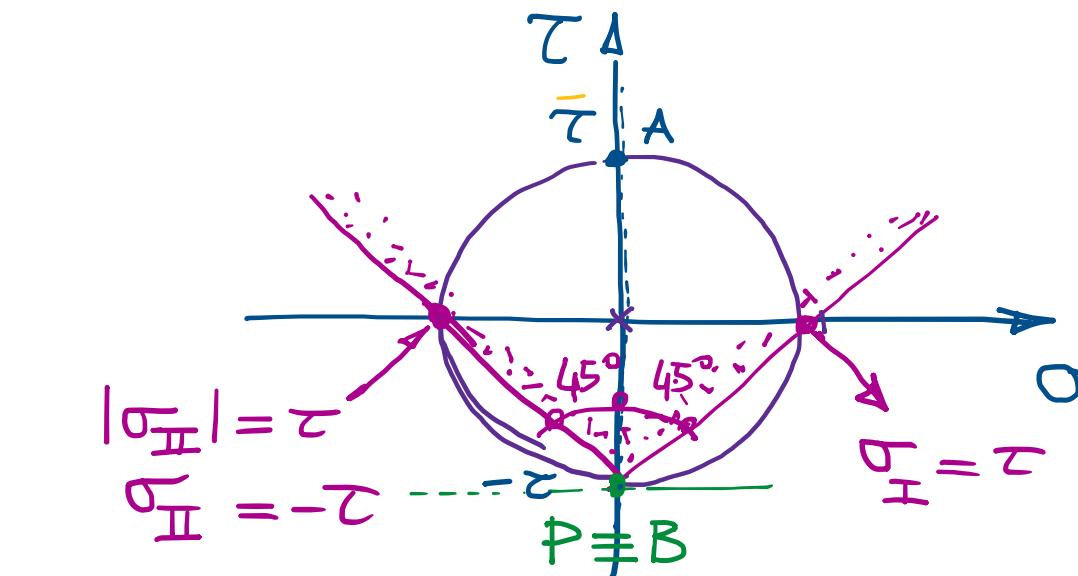
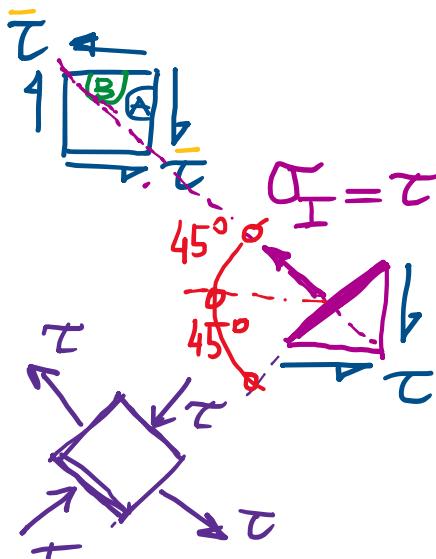


CM tangente all'asse τ , tutto nel semipiano $\sigma \leq 0$



CM tangente all'asse τ , tutto nel semipiano $\sigma \geq 0$ nell'origine

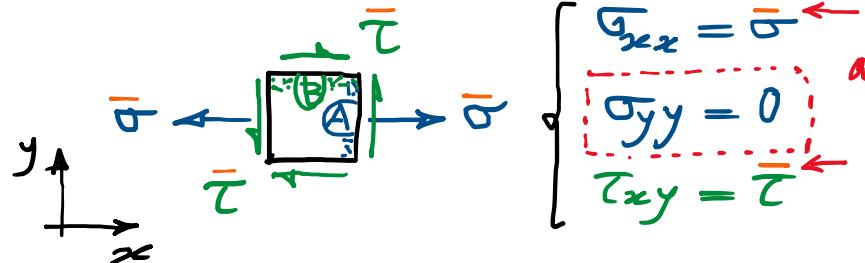
- Stato di spazio di taglio puro



CM centrato sull'origine degli assi del piano di Mohr

tensioni principali uguali e di segno opposto:
 $\sigma_I = -\sigma_{II}$ ($\sigma_I = -\sigma_I$)

- CM per stato di sforzo piano alle de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \bar{\sigma} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = \bar{\tau} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{valori} \\ \text{assegnati} \end{array}$$

particolare stato di sforzo piano con una componente di sforzo normale nulle

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$= \bar{\tau}^{max}$$

tensioni principali

$$\sigma_{H,II} = \sigma_c \pm R$$

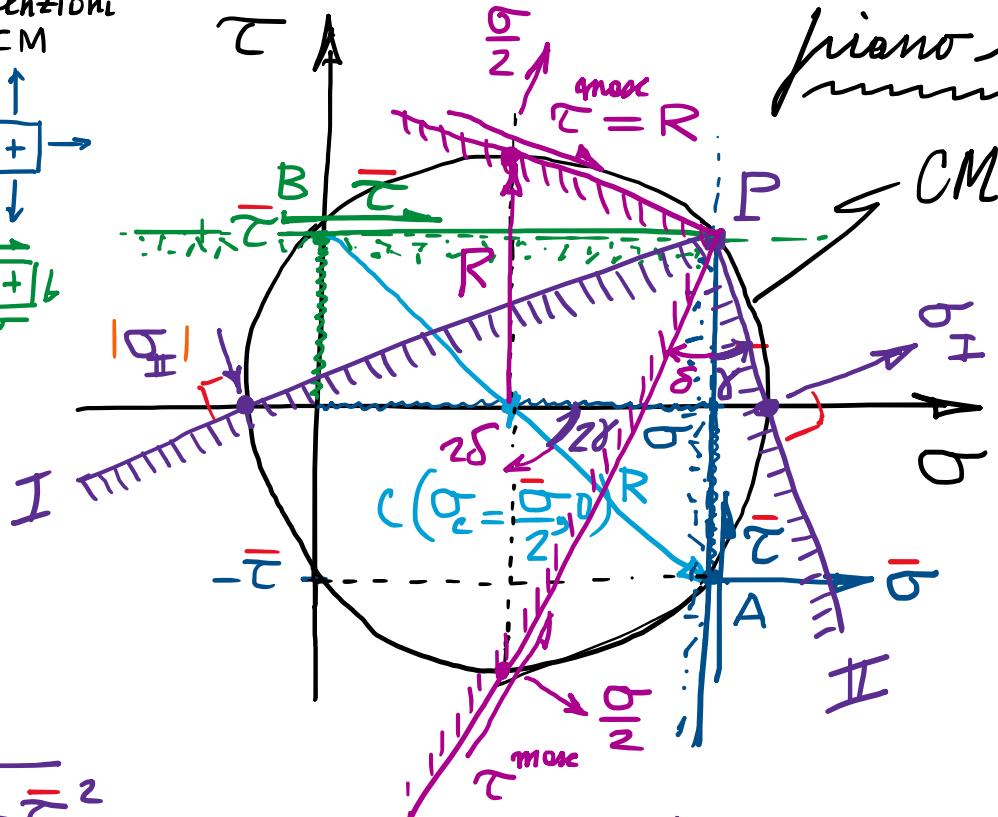
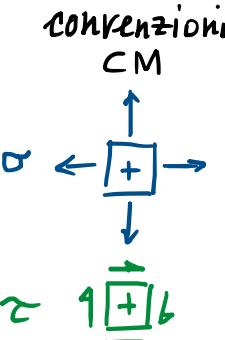
$$= \frac{\bar{\sigma}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$\sigma_H \cdot \sigma_{II} = (\sigma_c + R)(\sigma_c - R)$$

$$= \sigma_c^2 - R^2$$

$$= \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \bar{\tau}^2 \leq 0$$

$\bar{\tau}^{max}$ nel piano \rightarrow tensioni principali di segno opposto



$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar{\tau}}{\sigma_H}$$

inclinaz. dirz. princ. $\gamma = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma_H} \right)$

inclinaz. $\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$ ($2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2}$)
dirz. secondo cui agisce le $\bar{\tau}^{max}$ $\delta + \gamma = \frac{\pi}{4}$)

Cerchi e Arbèlo di Mohr (sforzo triassiale)

direzioni principali di sforzo

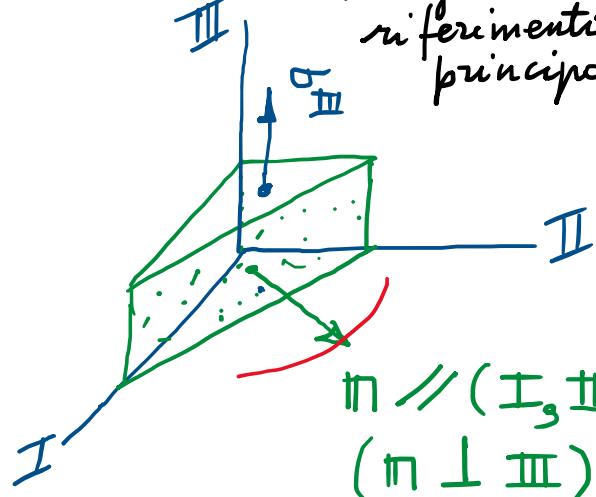
elementino 3D ritagliato
secondo le trema
principale

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

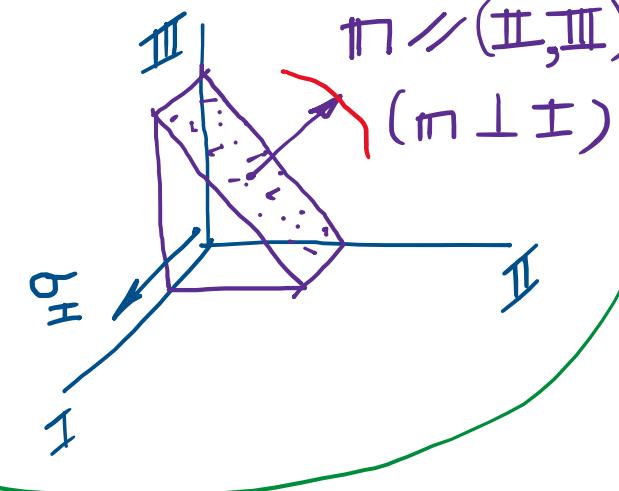
tens. principali

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

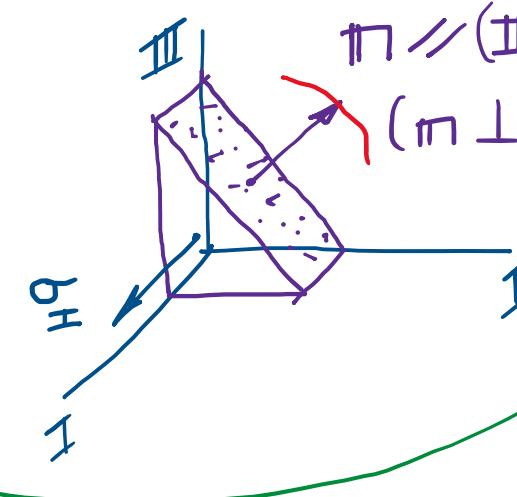
matrice sforzo
diagonale nel
riferimento
principale



$\Pi \parallel (I, II)$
 $(\Pi \perp III)$



$\Pi \parallel (II, III)$
 $(\Pi \perp I)$



$\Pi \parallel (I, III)$
 $(\Pi \perp II)$

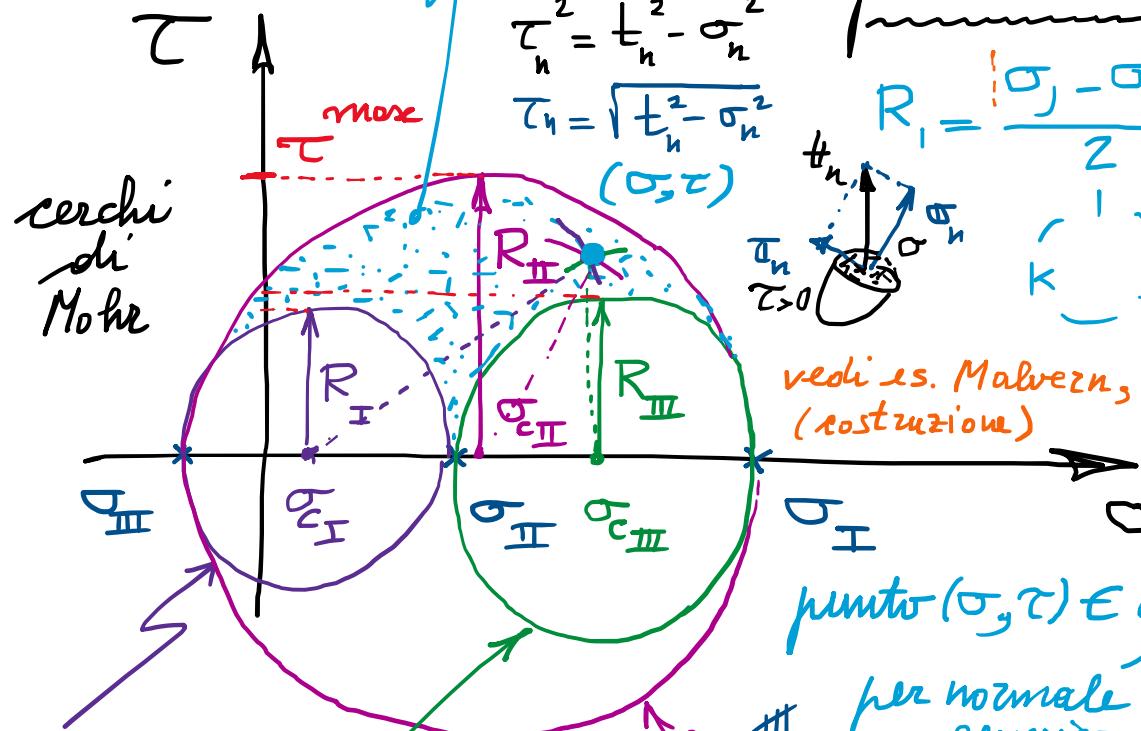
arbèlo di Mohr

N.B. i definite in modulo
in 3D

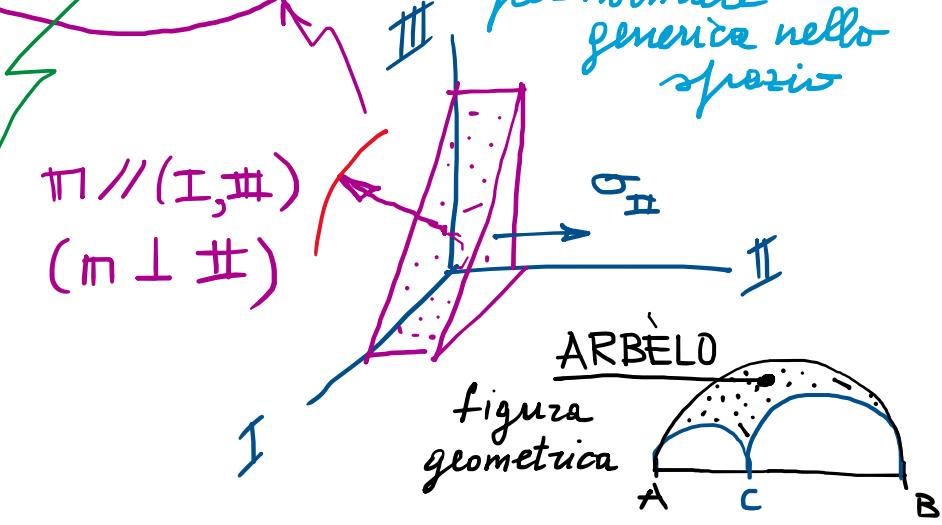
piano di Mohr

$$R_I = \frac{|\sigma_I - \sigma_K|}{2} = \frac{\tau_{JK}}{2}$$

vedi es. Malvern, 1969
(costruzione)

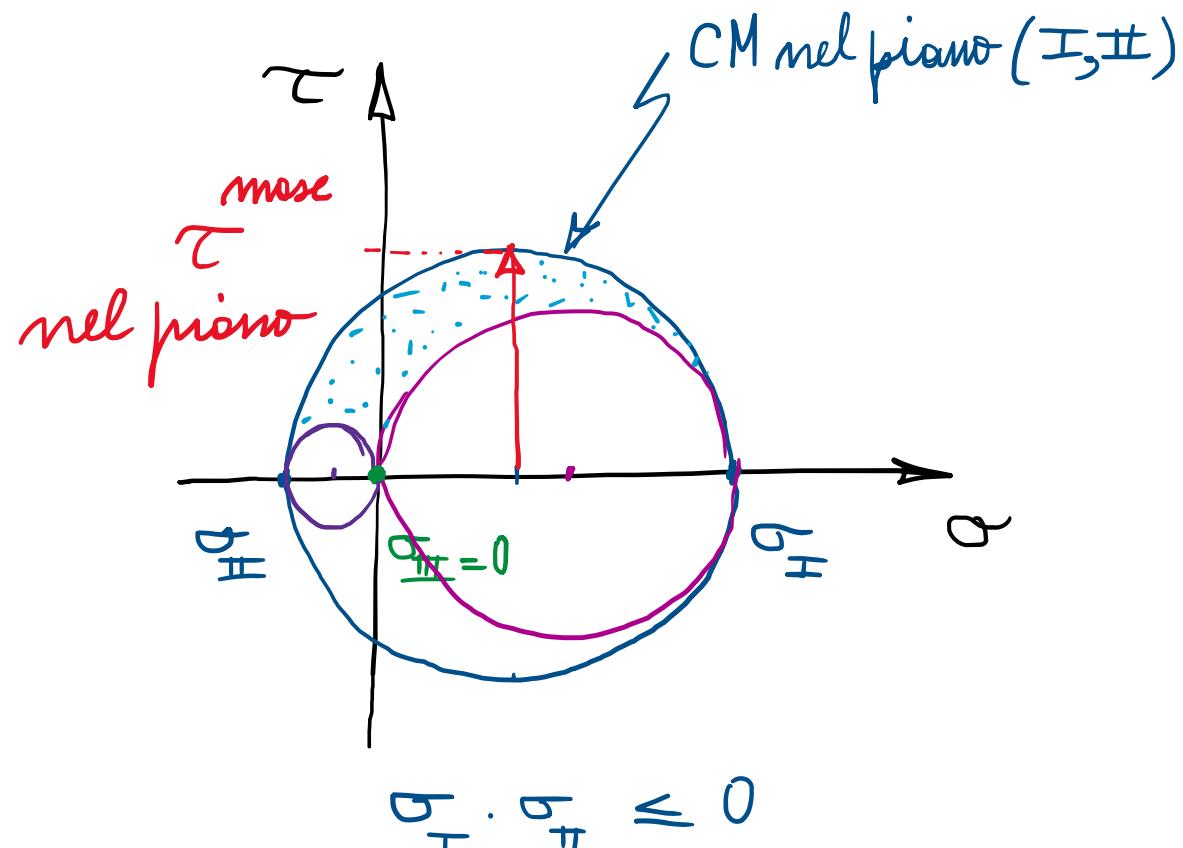


punto $(\sigma, \tau) \in$ arbèlo
di Mohr
per normale
generica nello
spazio



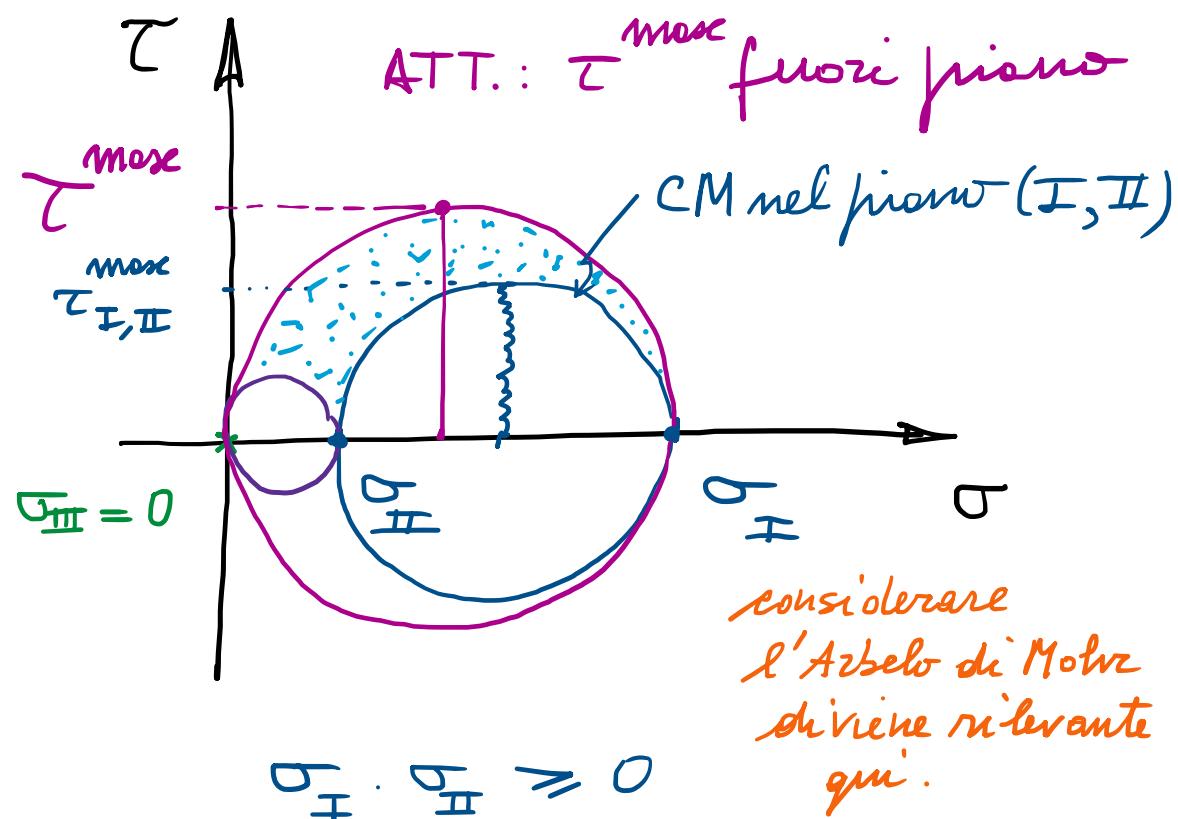
A B C

- Rilevanza dell'Arbolo di Mohr per stato di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$) [ai fini della verifica di resistenza]



tensioni principali
di segno opposto

il CM nel piano è il CM più "grande" (R^{max})
 $\Rightarrow \tau^{\text{max}}$ colte nel piano



tensioni principali
di segno uguale

il CM nel piano non è il più "grande"
 $\Rightarrow \tau^{\text{max}}$ avviene fuori piano

considerare
l'Arbolo di Mohr
diviene rilevante
qui.