Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

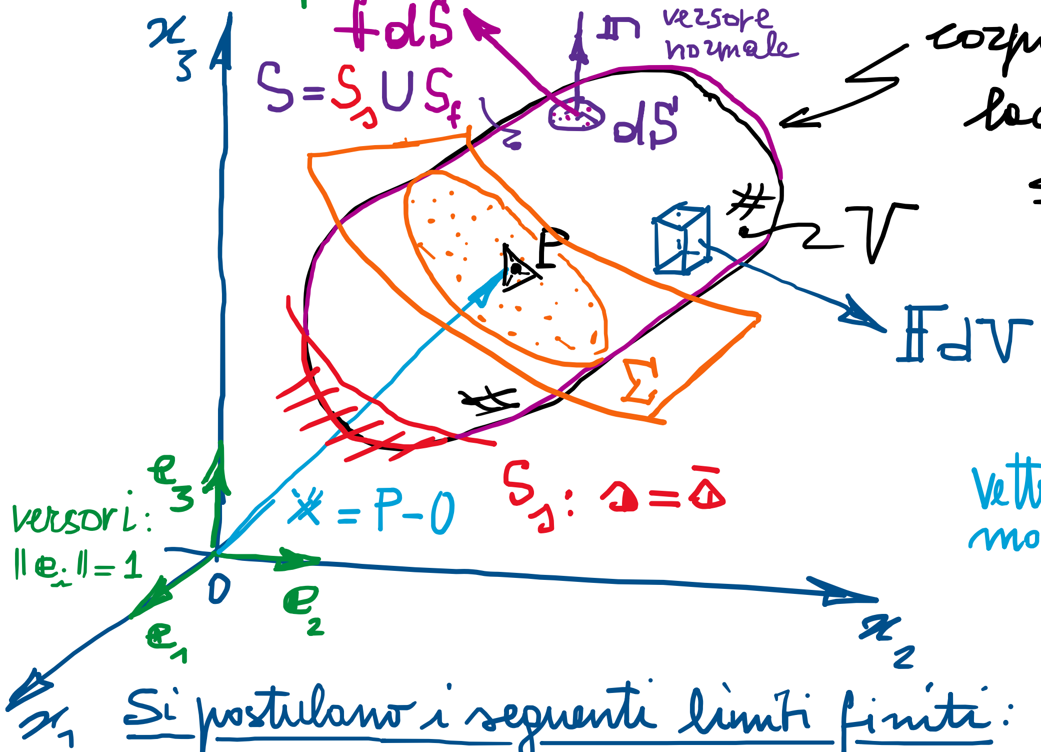
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 12

Meccanica dei Solidi – Continuo di Cauchy (Statica dei Continui)

Generalizzazione del concetto di sforzo, visto in ambito monodimensionale (prove di trazione; prova di torsione), al contesto tridimensionale generico.



corpo solido: mezzo continuo (privo di vuoti interni, lacerazioni, cricche) $\Rightarrow \forall\, P \in V$ è un punto materiale

Soggetto a: forze di volume $\mathbb{F}$ (es. peso proprio) in V

(su S_f) forze di superficie $\mathbf{f}$ (es. pressione di un fluido)

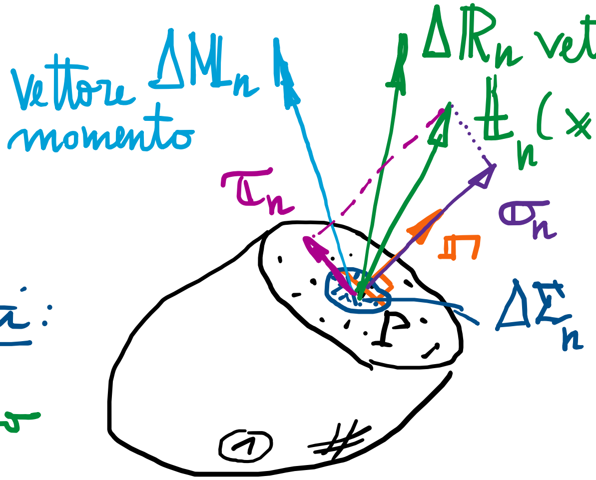
spostamenti assegnati su contorno vincol. (S_s)

Si postulano i seguenti limiti finiti:

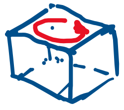
$$\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta\Sigma_n} = \mathbf{t}_n(\mathbf{x})$$ vettore sforzo di Cauchy

$$\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta\Sigma_n} = 0$$ (continuo non polare di Cauchy)

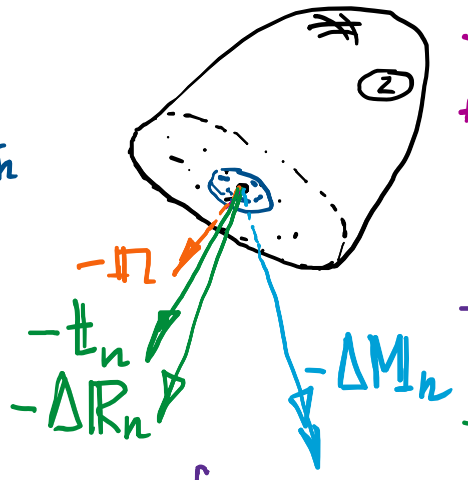
m_n "microcoppie" nulle



$[\mathbf{t}_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$ (forza fratto area)



Risultanti su $\Delta\Sigma_n$ trasmesse dalla parte rimossa (effetti di ② su ①):



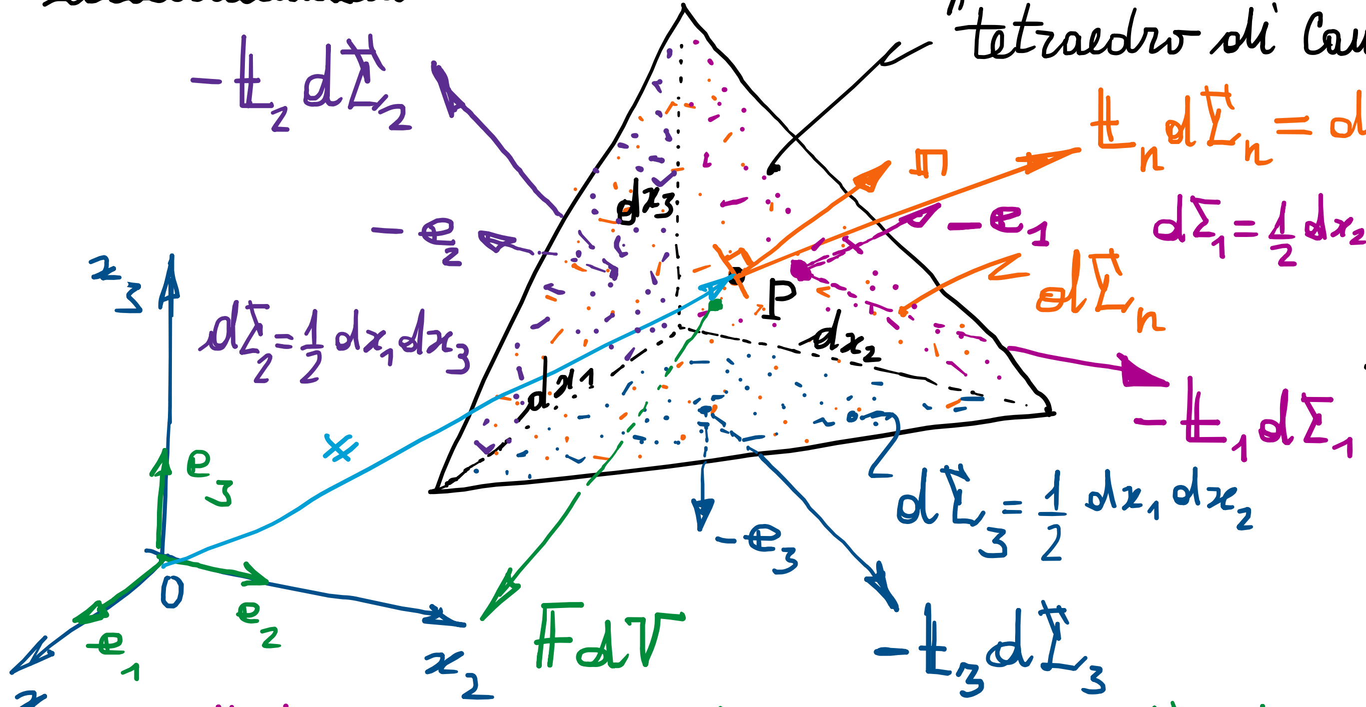
N.B.:

+ $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ fornisce sforzo in P su faccia di normale uscente $\mathbf{n}$
+ $\mathbf{t}_{-n}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$
+ $\mathbf{t}_n \not\parallel \mathbf{n}$

$\mathbf{t}_n = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_n}_{\text{sforzo normale}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_n}_{\text{sforzo tagliante}}$

Relazione di Cauchy ($\sim$ 1822): come individuare $\mathbb{t}_n$, su faccia di normale $\mathbb{n}$, in base a sforzo in $\mathbb{x}$

"tetraedro di Cauchy": con risultanti trasmesse dal mondo esterno attraverso le quattro facce, una inclinata e tre // ai piani coordinati



$$dV = \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{3}\, d\Sigma_i\, dx_i$$

$$d\Sigma_i = \frac{1}{2} dx_j\, dx_k \qquad (i, j, k)$$

$$= n_i\, d\Sigma_n$$

$$\mathbb{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$n_i = \frac{d\Sigma_i}{d\Sigma_n} = \cdots$$

$n_i = \mathbb{n} \cdot e_i$
$= \cos(\widehat{\mathbb{n}\, e_i})$

coseno direttore del versore normale $\mathbb{n}$

$\left(\sum_i n_i^2 = 1\right)$

n_i scalari (coseni direttori)

vettoriale

Equazione di equil. alla traslazione:

$$\mathbb{t}_n\, \cancel{d\Sigma_n} - \sum_i \mathbb{t}_i\, \underbrace{\frac{d\Sigma_i}{d\Sigma_n}}_{n_i} + \cancel{\mathbb{F}\, dV} = \mathbb{0} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbb{t}_n = \mathbb{t}_1 n_1 + \mathbb{t}_2 n_2 + \mathbb{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbb{t}_i\, n_i}$$

$\sim dx_i^2 \qquad \sim dx_i^3$

vettore sforzo di Cauchy su faccia inclinata di normale uscente $\mathbb{n}$

vettori sforzo di Cauchy agenti su facce parallele ai piani coordinati

Quindi, data $\mathbb{n}$ (cioè i coseni direttori n_i), il vettore sforzo $\mathbb{t}_n$ è noto una volta noti i tre vettori sforzo $\mathbb{t}_i$ agenti su facce // piani coordinati. $\Rightarrow$ essi definiscono pertanto lo stato di sforzo locale in $\mathbb{x}$

Relazione in termini di componenti: $(j=1,2,3)$ componenti: $t_{nj} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{e}_j$; $t_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbf{t}_i n_i$$

$\sigma_{ij} = t_{ij}$ = comp. di $\mathbf{t}_i$ nella direz. j

$$\begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \end{Bmatrix} n_1 + \begin{Bmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{Bmatrix} n_2 + \begin{Bmatrix} t_{31} \\ t_{32} \\ t_{33} \end{Bmatrix} n_3 \Rightarrow \begin{cases} t_{n1} = t_{11} n_1 + t_{21} n_2 + t_{31} n_3 \\ t_{n2} = t_{12} n_1 + t_{22} n_2 + t_{32} n_3 \\ t_{n3} = t_{13} n_1 + t_{23} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases}$$

$$t_{nj} = n_i \sigma_{ij} = \sigma^T_{ji} n_i$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(T)} \cdot \mathbf{n}$$

$\mathbf{t}_n$ è la "proiezione" di $\boldsymbol{\sigma}$ nella direzione $\mathbf{n}$

$$\begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{array} \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

noto $\boldsymbol{\sigma}$, data $\mathbf{n}$, è noto $\mathbf{t}_n$

tensore sforzo di Cauchy (del 2° ordine)

(trasformazione lineare di $\mathbf{n}$ in $\mathbf{t}_n$)

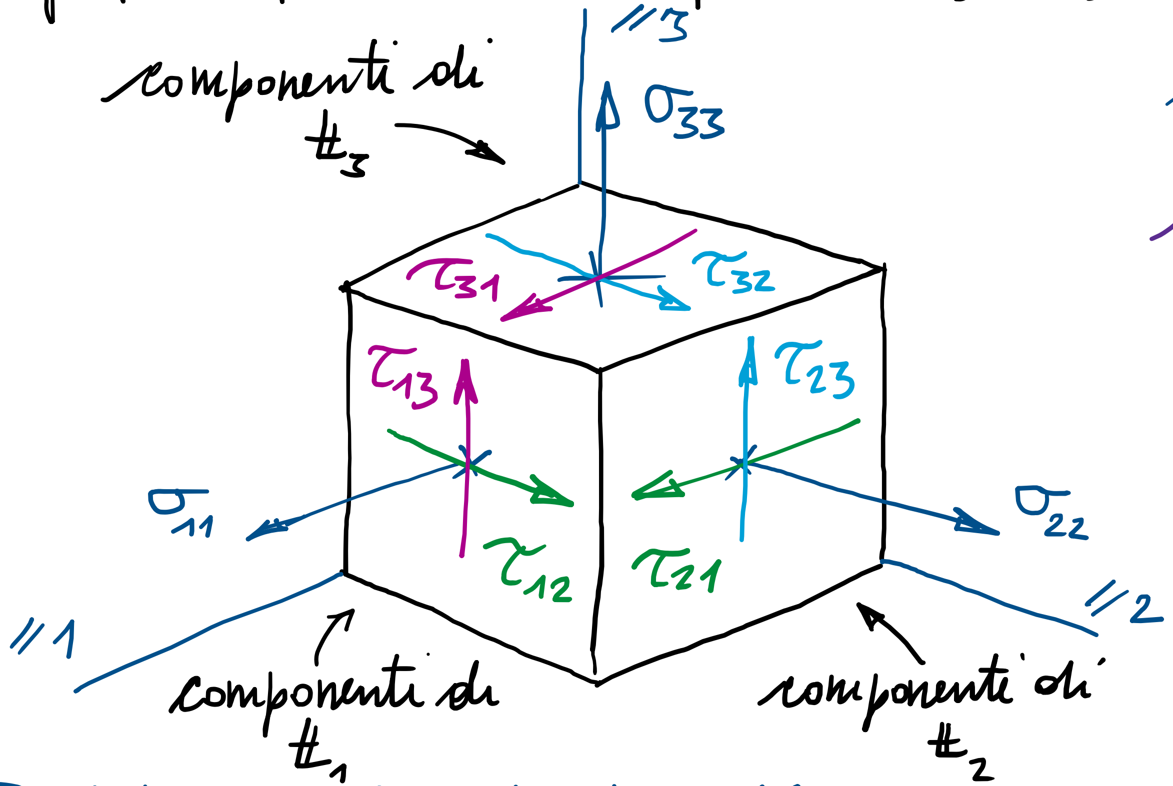
$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

σ_{ij}

matrice sforzo di Cauchy: componenti del tensore sforzo di Cauchy (9)

- tensore: oggetto fisico-matematico atto a rappresentare grandezze fisiche
- indipendente dal sistema di riferimento ma con componenti variabili con leggi di trasformaz. particolari. ⇒ vedi CdSdC

Significato fisico delle componenti $\sigma_{ij}=t_{ij}$ del tensore sforzo di Cauchy:



$i=j$ $\quad \sigma_{ii}$ sforzi normali (alle faccie) (3)

$i\neq j$ $\quad \sigma_{ij} = \tau_{ij}$ sforzi tangenziali (alle faccie) (6)

taglianti

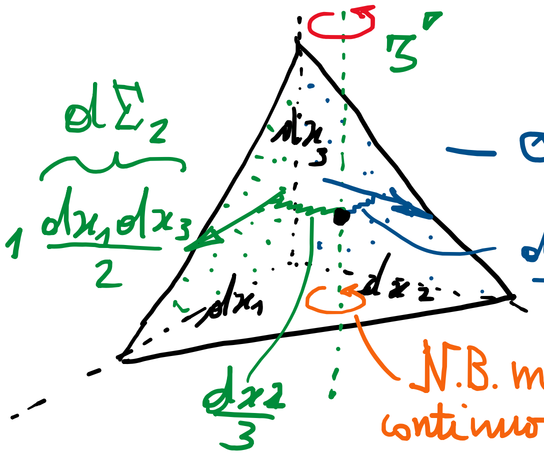
(9)

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}$$

6 componenti indipendenti: ($3\,\sigma_{ii}$ e $3\,\sigma_{ij}$)

tensore del 2° ordine simmetrico

Equilibrio alla rotazione del tetraedro: $\sigma_{ji}=\sigma_{ij}$ $\quad (\sigma^T=\sigma)$



$$-\sigma_{21}\overbrace{\frac{dx_1 dx_3}{2}}^{d\Sigma_2}\frac{dx_2}{3} \qquad -\sigma_{12}\overbrace{\frac{dx_2 dx_3}{2}}^{d\Sigma_1}\frac{dx_1}{3}$$

N.B. microcoppie assenti in continuo non polare $\Rightarrow \sigma^T=\sigma$

$$3':\ -\sigma_{21}\overbrace{\frac{dx_1 dx_3}{2}\,\frac{dx_2}{3}}^{dV}+\sigma_{12}\overbrace{\frac{dx_2 dx_3}{2}\,\frac{dx_1}{3}}^{dV}=0$$

Idem: $\quad \Rightarrow \sigma_{21}=\sigma_{12}$

$1'$: $\quad \Rightarrow \sigma_{32}=\sigma_{23}$

$2'$: $\quad \Rightarrow \sigma_{31}=\sigma_{13}$

} 3 componenti taglianti