

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

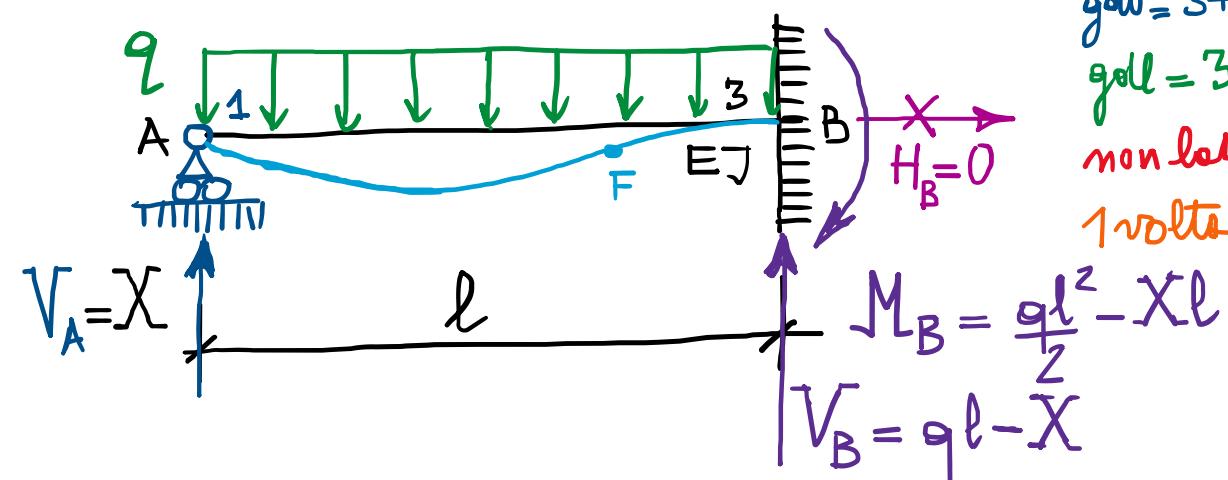
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Risoluzione di strutture iperstetiche (tramite LE)



$$gdw = 3 + 1 = 4$$

$$gdl = 3$$

non labile

1 volta iprst.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0 \text{ static. indeterminato} \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow -V_A l + q l \frac{l}{2} - M_B = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - q l = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2 \text{ eq. in } 3 \text{ incognite} \\ (V_A, V_B, M_B) \text{ pl. staticam.} \end{array}$$

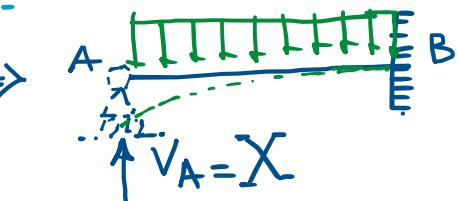
Scelte dell'incognita iperstetica ("metodo delle forze") $\Rightarrow X$ agente in corrispondenza del vincolo ritenuto ridondante $\Rightarrow RV = RV(q, X)$ nel rispetto dell'equilibrio.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ eq. ne} \Rightarrow V_B = ql - X \\ 1^{\text{a}} \text{ eq. ne} \Rightarrow M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl \end{array} \right\} RV(X)$$

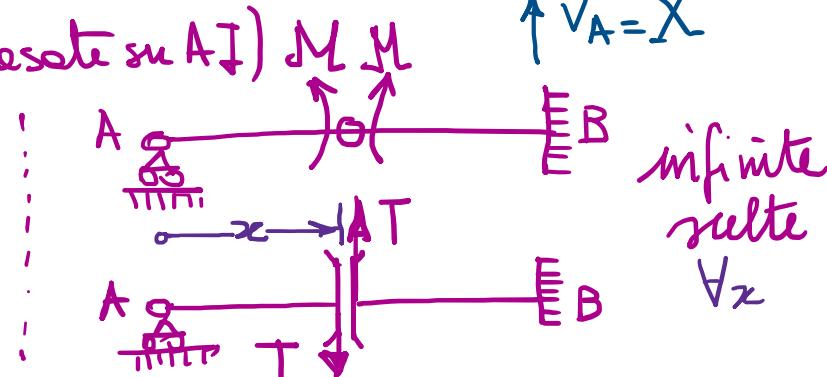
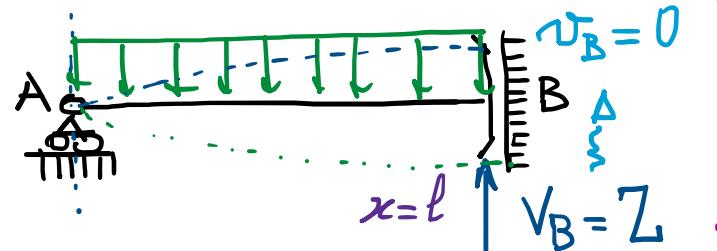
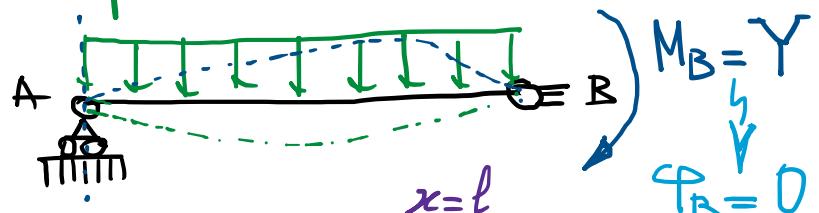
(cioè in eccesso numero)

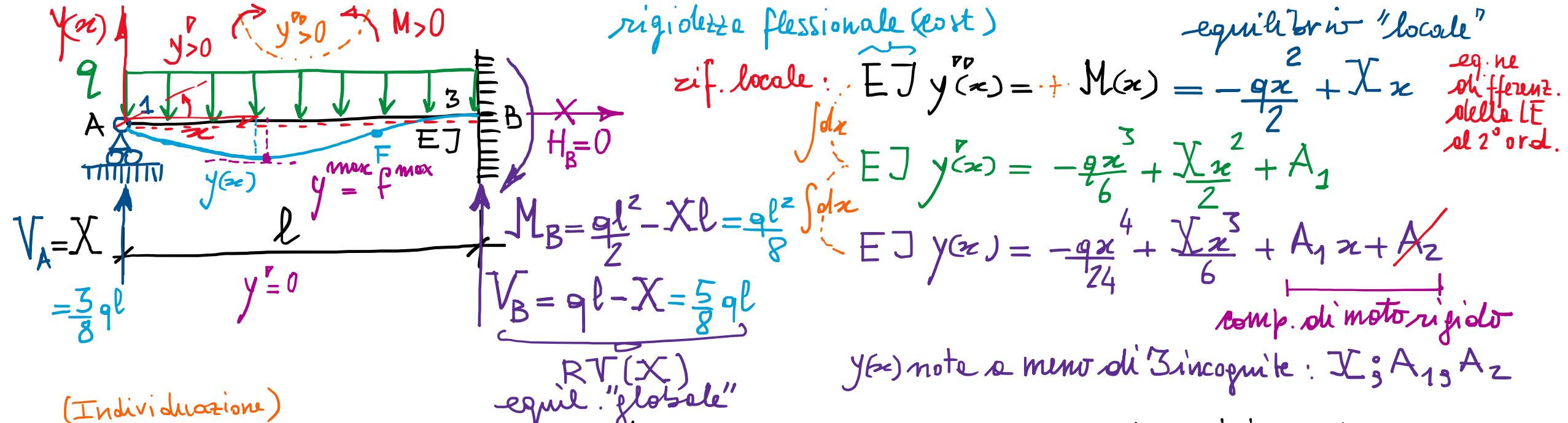
Condizione di congruenza:

$$V_A = X \Rightarrow \boxed{V_A = 0}$$



Altre possibili scelte:





(Individuazione)

Scrittura delle condizioni al contorno (e.c.)

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ v_B = 0 \\ \varphi_B = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{carrello in A (gdl sovrabbondante)} \\ \text{"fisiche"} \end{array}$$

$RV(X)$
equil. "globale"

$y(x)$ note a meno di 3 incognite: $X; A_1, A_2$

[$x=0, x=l$] Imposizione delle e.c.:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_2 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{q l^4}{24} + \frac{X l^3}{6} + A_1 l + A_2 = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{q l^3}{6} + \frac{X l^2}{2} + A_1 = 0 \quad (3)$$

sistema delle e.c. (algebrico, nelle incognite $X; A_1, A_2$)

$$\text{Dalla (3): } A_1 = \frac{q l^3}{6} - X \frac{l^2}{2} = A_1(X)$$

$$\text{Dalla (2): } A_2 = \frac{q l^4}{24} - X \frac{l^3}{6} - \left(\frac{q l^3}{6} - X \frac{l^2}{2} \right) l = A_2(X) \stackrel{\text{Dalla (1)}}{=} 0 \quad \text{Eq. ne di congruenza } y(0) = 0: \text{ consente di calcolare l'incognita ieristica } X$$

$$\frac{q l^4}{24} - \frac{4 q l^4}{48} - X \left(\frac{l^3}{6} - \frac{3 l^3}{3 \cdot 2} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{q l^4}{24} + \frac{1}{6} X l^3 = 0 \Rightarrow X = \frac{3 q l}{8} = \frac{\frac{1}{8} \frac{q l^4}{E J}}{\frac{1}{3} \frac{l^2}{E J}} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{1}{8} \frac{q l^4}{E J}}{\frac{1}{3} \frac{l^2}{E J}}$$

Sostituendo la \bar{x} ottenuta:

$$f_1 = \frac{ql^3}{6} - \frac{3}{8} ql \frac{l^2}{2} = \frac{ql^3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8} \right) = \frac{ql^3}{2} \frac{8-9}{24} = -\frac{1}{48} ql^3 \Rightarrow |f_A| = \frac{1}{48} \frac{ql^3}{EJ}$$

Equazione finale delle LE:

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{qx^4}{24} + \cancel{\frac{3}{8} ql \frac{x^3}{6}} - \frac{1}{48} ql^3 x \right] \quad \text{N.B.: } y=0 \text{ in } x=0$$

$$EJ y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{1}{16} ql x^3 - \frac{1}{48} ql^3 x$$

$$\begin{aligned} EJ y'(x) &= -\frac{qx^3}{6} + \frac{3}{16} ql x^2 - \frac{1}{48} ql^3 = \frac{q}{48} (-8x^3 + 9lx^2 - l^3) = 0 \\ &= \frac{q}{48} (-8x^2 + lx + l^2)(x-l) = 0 \end{aligned}$$

$$EJ y''(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{8} ql x = M(x) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{4}l \end{cases}$$

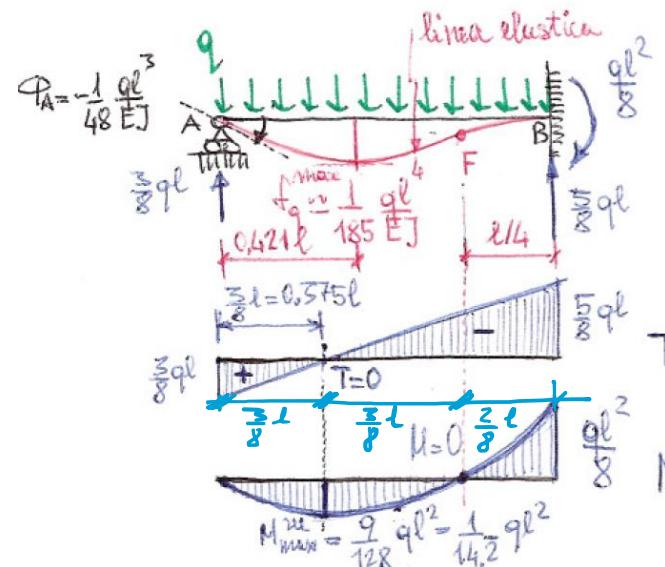
- Tracciamento dei diagrammi delle AI
 - Rappresentazione delle deformate qualitative (linee elastiche)
- \Rightarrow vedi note sul sito \Rightarrow

$$f_A = y'(0) = \frac{A_1}{EJ} l^3$$

gruppo dimensionale
per rotazione flessionale
elastica legata a q

condiz. distaz. (per y^{\max})
 $y=0$

$$x=l \quad \bar{x} = \frac{1+\sqrt{33}}{16} l \approx 0.421 l$$

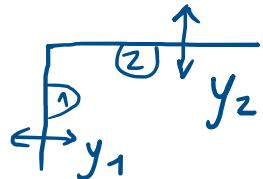


$$\begin{aligned} f^{\max} &\approx \frac{1}{185} \frac{ql^4}{EJ} \\ &= -y(\bar{x}) \\ &= "fricce" \text{ maxima} \end{aligned}$$

Quadro generale del metodo delle LE

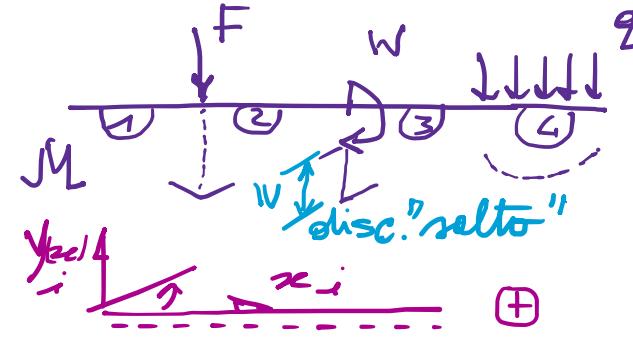
- Suddisione in campi di integrazione :

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \quad \text{EJ}_1 \neq \text{EJ}_2$$



con stesse eq. le differenziali delle LE

$$E J_i(x_i) y_i^{\tau}(x_i) = \pm M_i(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n$$



eq. m diverse di $M_i(x_i)$
nei vari tratti

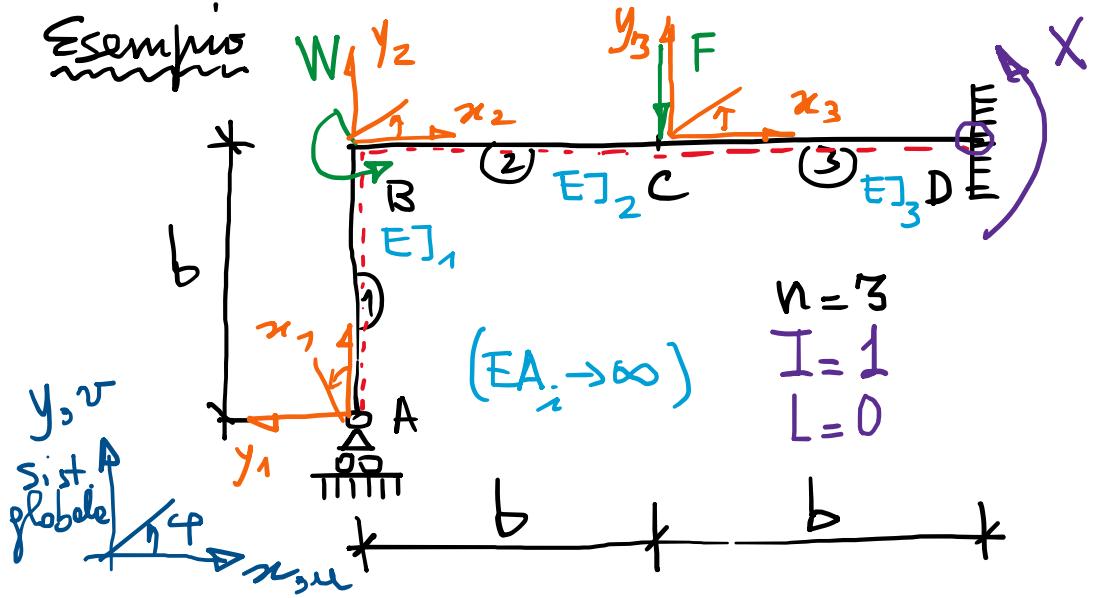
- Scelta dei sistemi di riferimento locali

- Integraz. delle eq. m differenziali $\Rightarrow 2n$ costanti di integraz. (+ inc. inferst.)

- Scrittura e imponzione delle c. e. ($M_{c.c.} = 2n + I$)

- Soluzione, LE finali; RV; N, T, M; calcolo di comp. di "spost." ; deformata qualitativa

Esempio



$$M_{c.c.} = 2n + I = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(b) = 0 \quad \text{Incastro in D} + EA_{BCD} \rightarrow \infty \\ y_1^{\tau}(b) = y_2(0) \quad \text{Continuità alle rotaz. in B} \\ y_2(0) = 0 \quad \text{Corollo in A} + EA_{AB} \rightarrow \infty \\ y_2(b) = y_3(0) \\ y_2^{\tau}(b) = y_3^{\tau}(0) \\ y_3(b) = 0 \\ y_3^{\tau}(b) = 0 \end{array} \right.] \quad \begin{array}{l} \text{Continuità allo spostamento in C} \\ \text{alle rotazioni} \\ \text{Incastro in D} \\ \text{condizione di congruenza} \\ \text{associata alle scelte di X} \end{array}$$