

Università degli studi di Bergamo  
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni  
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

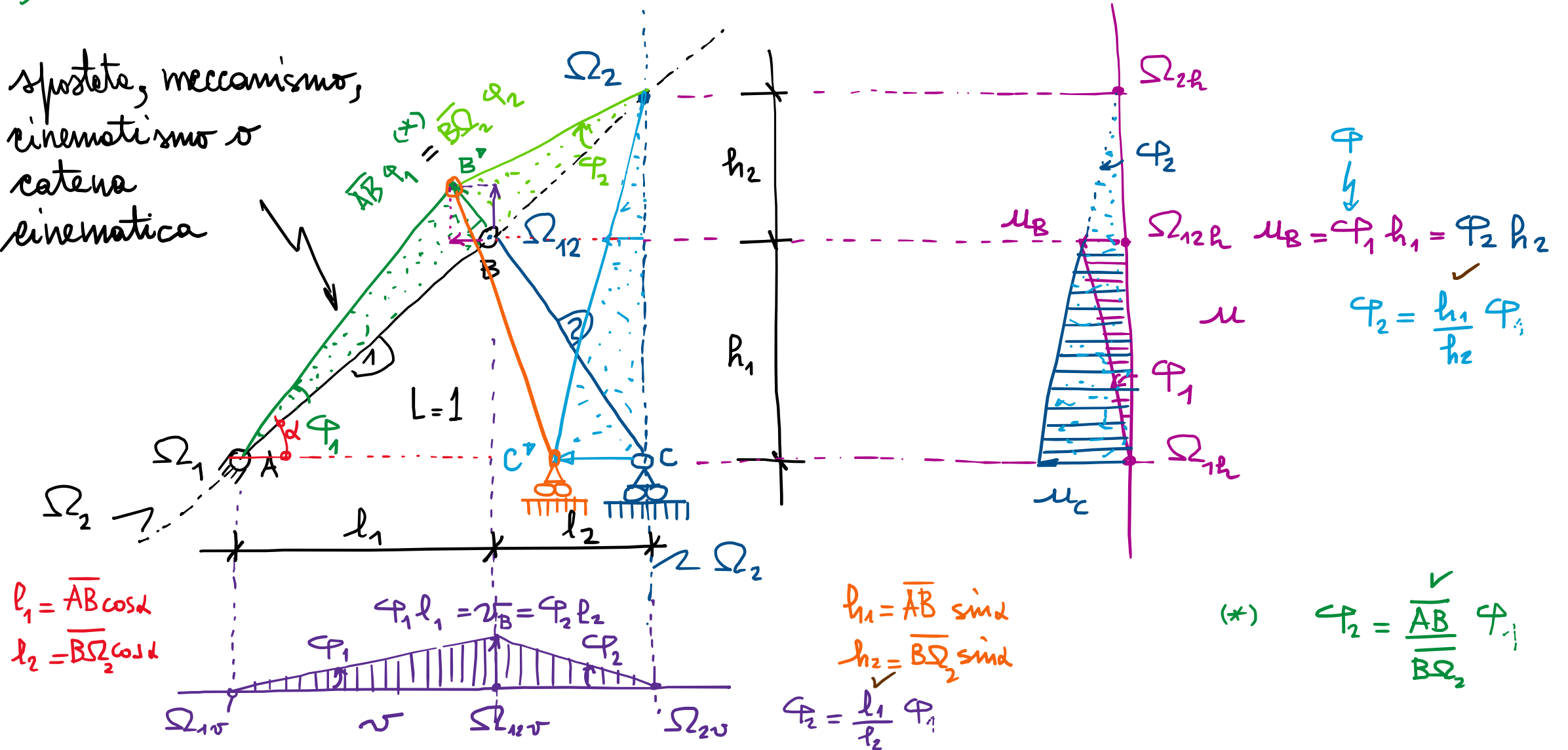
prof. Egidio RIZZI  
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 04

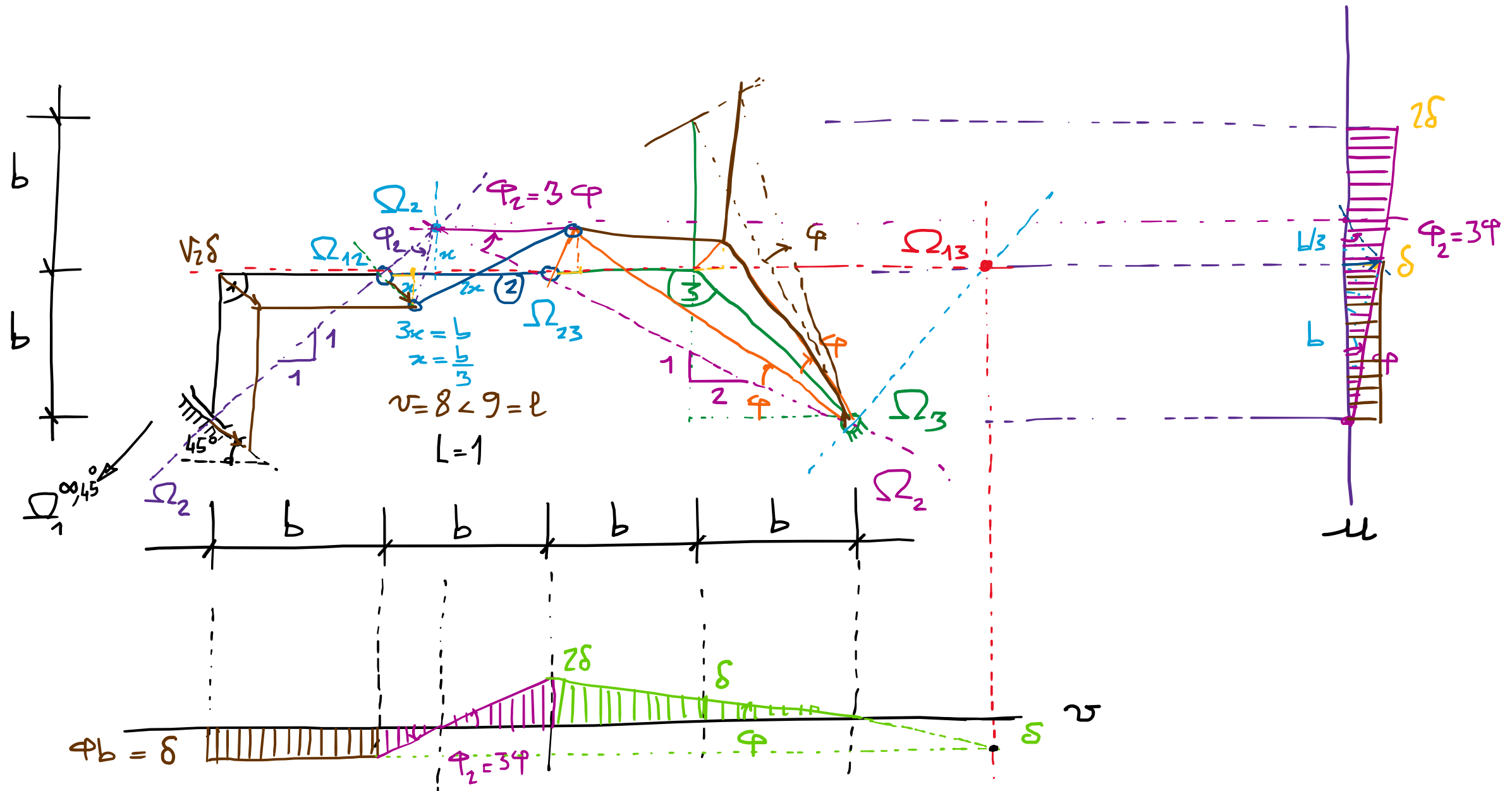
# AC geometrica - Esempi di sistemi articolati labili, con spostate e mappe di componenti di spost. (u,v)

1) Sistema biella-manovella (vedi cilindro/pistone/biella di un motore) [due aste]

spostate, meccanismo,  
cinematismo o  
catena  
cinematica



2) Sistema articolato con tre aste

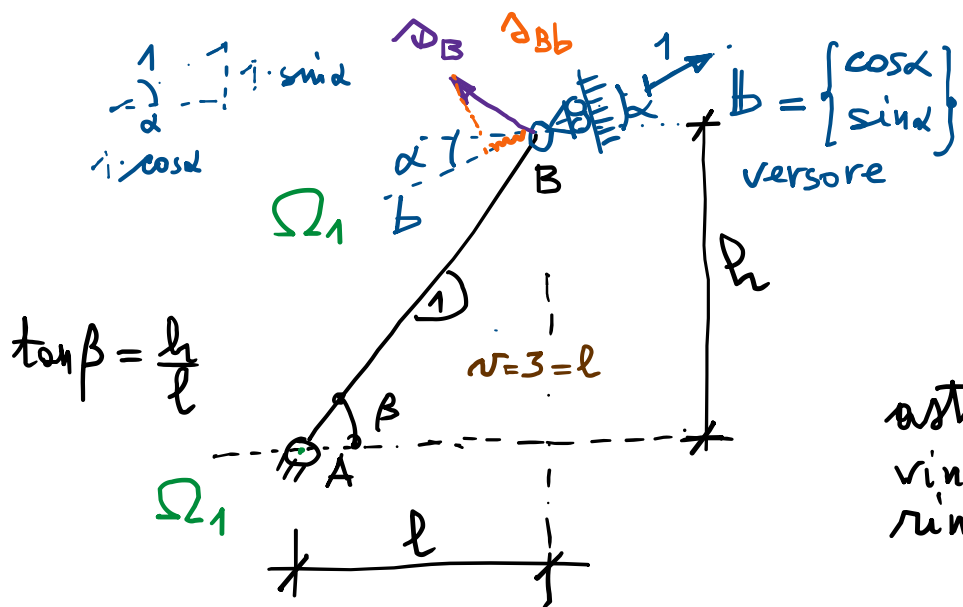


AC analitica  $\Rightarrow$  scrittura esplicita delle eq. di vincolo (cinematico)

- Da AC geometrica: Se  $\alpha \neq \beta, \nexists \Omega_1 \Rightarrow$  sist. non labile (isodeterminato)

Se  $\alpha = \beta, \exists \Omega_1 \equiv A_2$ , sist. labile (indeterminato)

- Approccio "completo"  $\Rightarrow$  rimozione di tutti i vincoli (p.d.v.)



$$\tan \beta = \frac{h}{l}$$

Spostamenti in corrisp. dei g.d.r. rimossi:

$$\begin{cases} u_A = u_A = 0 \\ v_A = v_A = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_{BB} = \Delta_B \cdot b = u_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha = 0$$

sistemi di congruenze

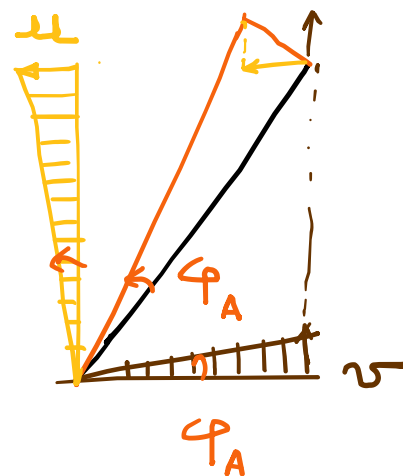
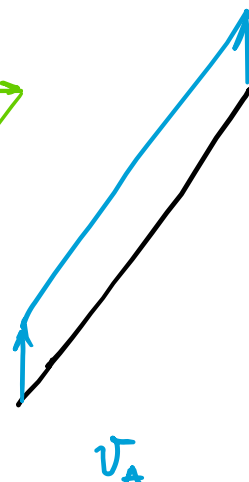
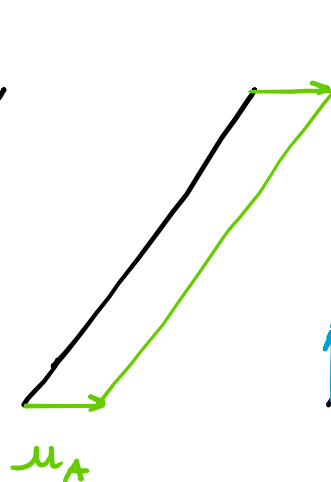
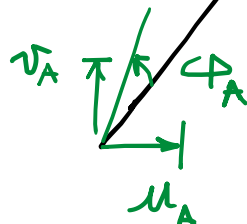
$$(u_A - h \varphi_A) \cos \alpha + (v_A + l \varphi_A) \sin \alpha = 0$$

scelta dei g.d.r.

$$U = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{bmatrix}$$

$3n = l \times 1$

asta con vincoli rimossi



$$\begin{cases} u_B = u_A - \varphi_A h \\ v_B = v_A + \varphi_A l \end{cases}$$

matrice di congruenza

$$V = C \cdot U$$

$v \times l$

$$V = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta_{BB} \end{bmatrix}$$

$v \times 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & (l \sin \alpha - h \cos \alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \bar{V} = 0$$

- Il sistema di congruenze ammette soluz. non banali ( $u \neq 0$ ) sse  $\det C = 0$

$$\det C = l \sin \alpha - h \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \text{condizione di labilit\`a}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{l} = \tan \beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

- In tal caso, la soluzione (non banale) risulta:

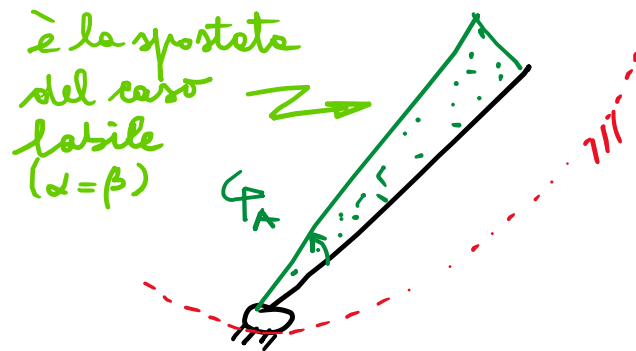
$$u_A = 0$$

$$v_A = 0$$

$$\underbrace{(l \sin \alpha - h \cos \alpha)}_{=0} \varphi_A = 0 \rightarrow \varphi_A \text{ arbitrario}$$

(invece se  $l \sin \alpha - h \cos \alpha \neq 0$ , allora  $\varphi_A = 0$ )  
 $\Rightarrow$  caso non labile

- Approccio ridotto con schema ad albero (rimozione del solo carrello in B):



apertura delle maglie chiuse  
che la struttura forma con la terra

unica eq.ne di vincolo

$$\delta_{Bb} = u_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha$$

$$= -h \varphi_A \cos \alpha + l \varphi_A \sin \alpha$$

$$= \underbrace{(l \sin \alpha - h \cos \alpha)}_{C^T} \varphi_A = 0$$

sistema di congruenze ridotto

$$\underset{1 \times 1}{V} = \underset{1 \times 1}{C^T} \cdot \underset{1 \times 1}{U} = 0$$

$$C^T \neq 0, \varphi_A = 0 \quad (L=0)$$

$$\underbrace{C^T=0}_{(\alpha=\beta)}, \varphi_A \text{ arb.} \quad (L=1)$$