Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

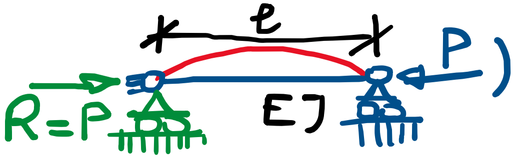
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

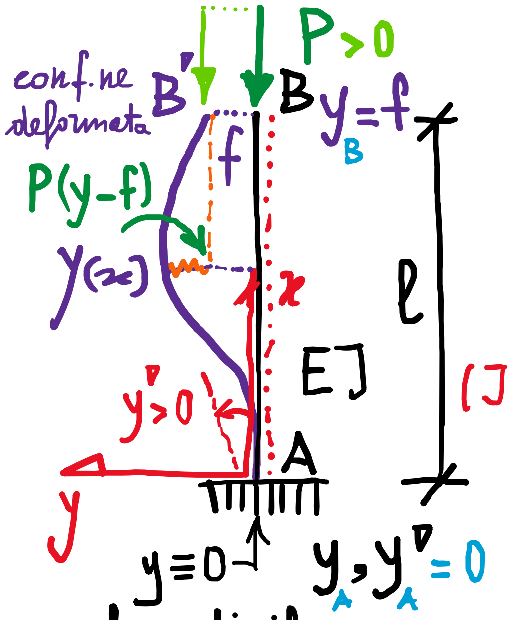
LEZIONE 21

Altre condizioni di vincolo (generalizzazione dell'asta di Eulero)



$$P^E_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{\ell^2}$$ $\simeq 10$

formula di Eulero



LE: $\underbrace{EJ}_{>0}\, y''(x) = +\, M(x)$ (nella configuraz. deform.)

$= -P(y(x) - f) = -Py + Pf$

$$y''(x) + \underbrace{\frac{P}{EJ}}_{\alpha^2>0}\, y(x) = \underbrace{\frac{P}{EJ}}_{\alpha^2 = \frac{P}{EJ}} f \;\leadsto\; y(x) = \underbrace{A \sin\alpha x + B\cos\alpha x}_{\text{integr. gen. omog. assoc.}} + \underbrace{f}_{\text{integr. part.}}$$

$\alpha\ell\frac{x}{\ell}$

$$P = \alpha^2\ell^2\frac{EJ}{\ell^2} = (\alpha\ell)^2\frac{EJ}{\ell^2}$$

Scrittura e imposizione delle c.c.:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow B + f = 0 \dashrightarrow B = -f \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha\ell\, \boxed{A = 0} \\ y(\ell) = f \Rightarrow \sin\alpha\ell\, A + \cos\alpha\ell\, B + \cancel{f} = \cancel{f} \checkmark \end{cases}$$

Soluzioni non banali $y \neq 0$ sse:

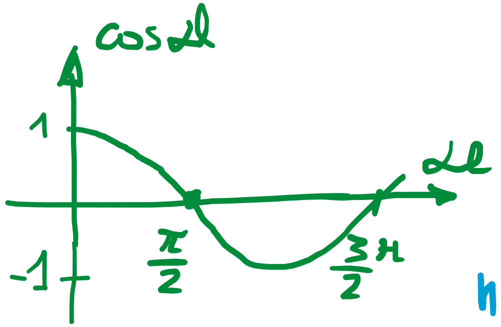
condiz. di singolarità: $\det \mathbb{D} = \underbrace{\alpha\ell}_{\neq 0}\, \cos\alpha\ell = 0$

$\alpha\ell = n\frac{\pi}{2}$ dispari $n = 1, 3, 5 \ldots$

Sistema delle condizioni al contorno

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha\ell & 0 & 0 \\ \sin\alpha\ell & \cos\alpha\ell & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ f \end{Bmatrix}}_{\mathbb{X}} = 0$$

($\mathbb{X} = 0$ soluz. "banale")



$$(\alpha\ell)^2 = n^2\frac{\pi^2}{4} \;\leadsto\; P_{cr,n} = n^2\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{\ell^2}$$

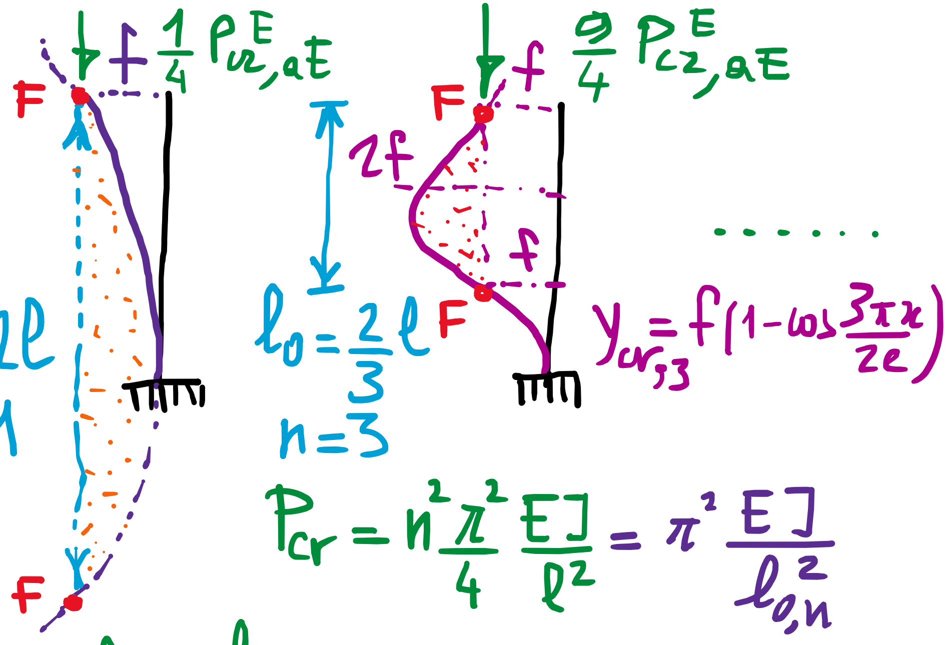
$n=1$ $P^E_{cr} = \frac{1}{4}\pi^2\frac{EJ}{\ell^2} = \frac{1}{4}P^E_{cr,aE} = \pi^2\frac{EJ}{\ell_{0,n}^2}$; $\ell_{0,n} = \frac{2}{n}\ell$ lungh. di libera inflessione

- Soluzione e deformate critiche ($\mu \;\; \alpha l = n\frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} B = -f \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{cr,n}(x) = \underset{\text{arbitr.}}{f}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\frac{x}{l}\right)$$

$$l_{0,n} = \frac{2}{n}\, l \qquad y_{cr,1} = f\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$$

⇒ nota la lunghezza di libera inflessione della deformata critica è noto il carico crit.

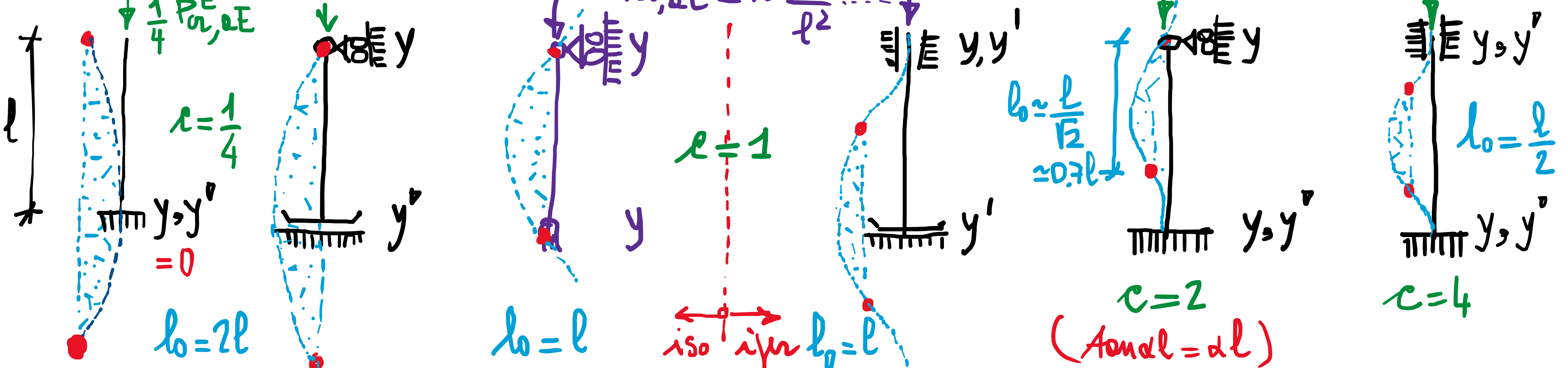


$$P_{cr} = n^2\frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2} = \pi^2\frac{EJ}{l_{0,n}^2}$$

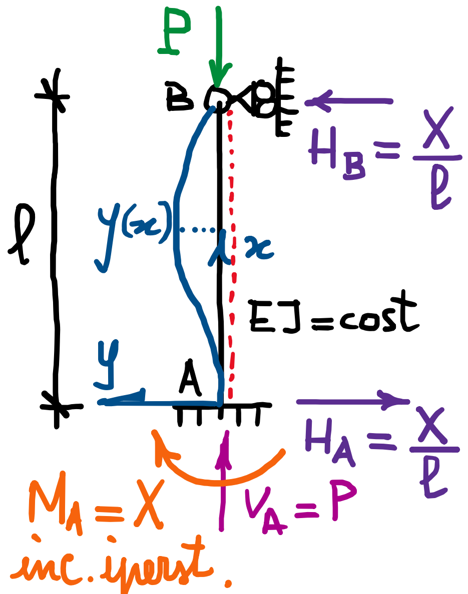
- Altre condizioni di vincolo: $P^E_{cr} = c\,\pi^2\frac{EJ}{l^2} = \pi^2\frac{EJ}{l_0^2} \Rightarrow l_0 = \frac{l}{\sqrt{c}}$

coeff. di vincolo $c = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2$

$$P^E_{cr,aE} = \pi^2\frac{EJ}{l^2}$$



- Soluzione asta iperstatica incastro-carrello



• Eq.ne differenziale della LE (con equil. nella conf.ne deformata):

$$EJy''(x) = M(x) = -Py(x) + \frac{X}{\ell}(\ell - x)$$

$$EJy'' + Py = \frac{X}{\ell}(\ell - x)$$

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{\alpha^2}{\alpha^2\ell^2}\frac{\ell^2}{EJ}X\left(1-\frac{x}{\ell}\right) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2\ell^2}\bar{X}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

$$\alpha^2\ell^2 = \frac{P}{EJ}\ell^2 \Rightarrow P = (\alpha\ell)^2\frac{EJ}{\ell^2} \qquad \bar{X} = \frac{X\ell^2}{EJ}$$

• Condizioni al contorno (c.c.)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \quad \text{eq.ne di congruenza} \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$$

• Integrale generale: lin. in x, con $y''=0$

$$y(x) = \underbrace{A\sin\alpha x + B\cos\alpha x}_{\text{int. gen. omog. associata}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha^2\ell^2}\bar{X}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}_{\text{int. particolare}}$$

• Imposizione delle c.c.

$$\begin{cases} y(0)=0 & B + \frac{1}{\alpha^2\ell^2}\bar{X} = 0 \\ y'(0)=0 & \alpha A - \frac{1}{\alpha^2\ell^2}\frac{\bar{X}}{\ell} = 0 \quad \cdot\ell \\ y(\ell)=0 & A\sin\alpha\ell + B\cos\alpha\ell = 0 \end{cases}$$

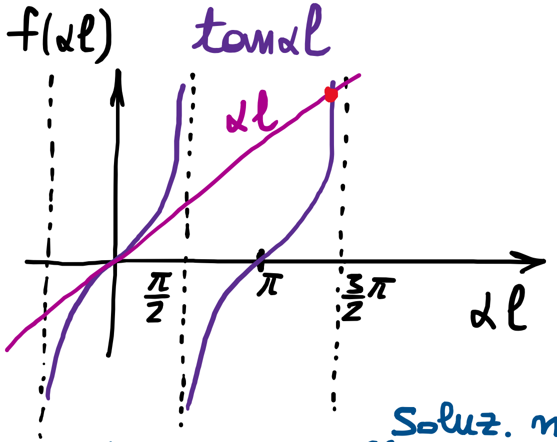
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\alpha^2\ell^2 \\ \alpha\ell & 0 & -1/\alpha^2\ell^2 \\ \sin\alpha\ell & \cos\alpha\ell & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ \bar{X} \end{Bmatrix}}_{\mathbb{X}} = \mathbb{0}$$

Sistema delle c.c.

Soluz. non banali ($\mathbb{X} \neq \mathbb{0}$) sse $\det\mathbb{D} = 0$:

$$\det\mathbb{D} = -1\,\frac{\sin\alpha\ell}{\cancel{\alpha^2\ell^2}} + \frac{1}{\cancel{\alpha^2\ell^2}}\alpha\ell\cos\alpha\ell = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\alpha\ell = \alpha\ell}$$

eq.ne trascendente



Soluz. (ove $\det\mathbb{D} = 0$)

$$\bar{X} = -\alpha^2\ell^2 B \qquad \left(\frac{\bar{X}}{\alpha^2\ell^2} = -B\right)$$

$$A = \frac{\bar{X}}{\alpha^3\ell^3} = -\frac{B}{\alpha\ell} \qquad \left(\frac{A}{B} = -\frac{1}{\alpha\ell}\right)$$

(B arbitr.)

Soluz. numerica (iterativa) ricorsiva

$\alpha\ell$	$\operatorname{atan}\alpha\ell + \pi$
4	4.467
	4.492
	4.493
	4.493

$$\Rightarrow \quad \alpha\ell = 4.493 = 1.431\pi$$

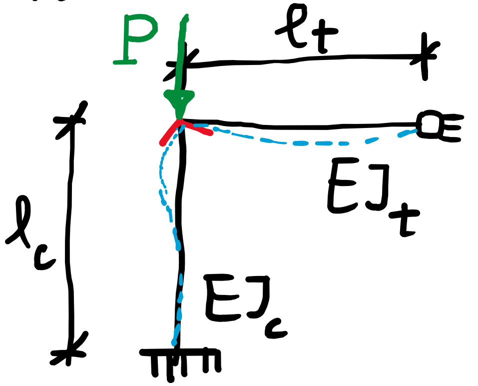
$$\alpha^2\ell^2 = 20.19 = 2.046\pi^2 \simeq 2\pi^2$$

$$P_{cr}^{E} = 2.046\,\pi^2\frac{EJ}{\ell^2} \simeq \pi^2\frac{EJ}{(\ell/\sqrt{2})^2}$$

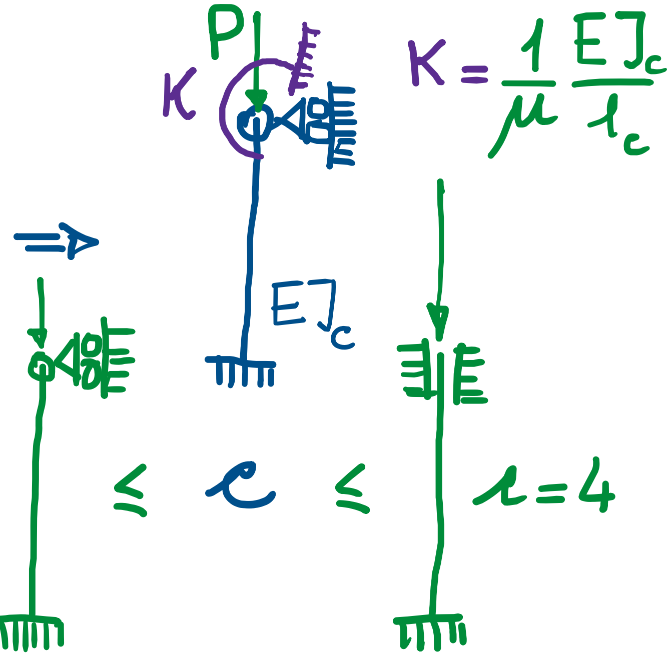
lungh. di libera infless. $\ell_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\ell \simeq 0.7\ell$

Deformata critica: $y_{cr}(x) = B\left[-\frac{1}{\alpha\ell}\sin\alpha\ell\frac{x}{\ell} + \cos\alpha\ell\frac{x}{\ell} - \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right]$ con $\alpha\ell = 1.431\pi$

– Telai a nodi fissi (solo rotazioni)



$\Longrightarrow$

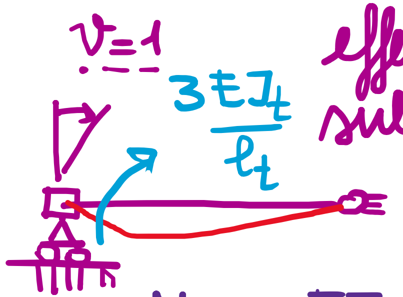


$$K = \frac{1}{\mu}\frac{EJ_c}{\ell_c}$$

$$c = 2 \;\le\; c \;\le\; c = 4$$

$K = 0,\ \mu \to \infty$ $\qquad$ $K \to \infty,\ \mu = 0$

effetto flessionale della trave sulla colonna



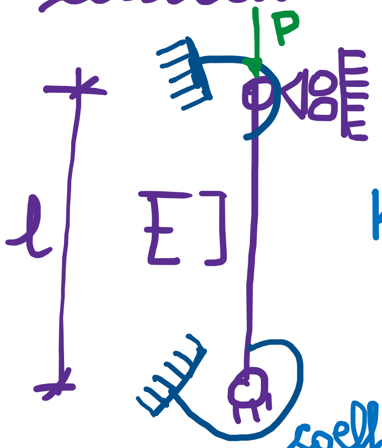
$$K = \frac{M}{v} = 3\frac{EJ_t}{\ell_t}\,\frac{EJ_c}{\ell_c}\,\frac{\ell_c}{EJ_c} = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{3}\frac{EJ_c}{EJ_t}\frac{\ell_t}{\ell_c}}}_{\frac{1}{\mu}\ \dots\ \text{coeff. di cedevolezza}}\,\frac{EJ_c}{\ell_c}$$

Es. $\mu_0 \to 0$, $\mu_e = \mu$

$$c_N = 2\,\frac{0.4+\mu}{0.2+\mu}\ ; \quad \frac{EJ_t}{\ell_t} = \frac{EJ_c}{\ell_c} \ \Rightarrow\ \mu = 1/3$$

$$= \frac{11}{4} = 2.75$$

– Formule di Newmark:



μ_e $\qquad$ y

$$K_i = \frac{1}{\mu_i}\frac{EJ}{\ell}$$

μ_0 $\qquad$ y

coeff. di cedevolezza

$$P_{cr} \simeq c_N \pi^2 \frac{EJ}{\ell^2} \quad (\text{valori approx., err.} < 4\%)$$

$$c_N = \frac{(0.4+\mu_0)(0.4+\mu_e)}{(0.2+\mu_0)(0.2+\mu_e)}$$

– $\mu_i \to 0$ $\quad c_N = 4$

– $\mu_i \to \infty$ $\quad c_N = 1$

(valori esatti in casi particolari)

Verifica di stabilità

(vs. verifica di resistenza: $N = P$; $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} < \sigma_0$)

$$\sigma = \frac{P}{A} < \frac{P_{cr}^E}{A} = \sigma_{cr}^E \Rightarrow \sigma_{cr}^E = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}\frac{1}{A}$$

$r_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ oppure ρ raggio giratore d'inerzia

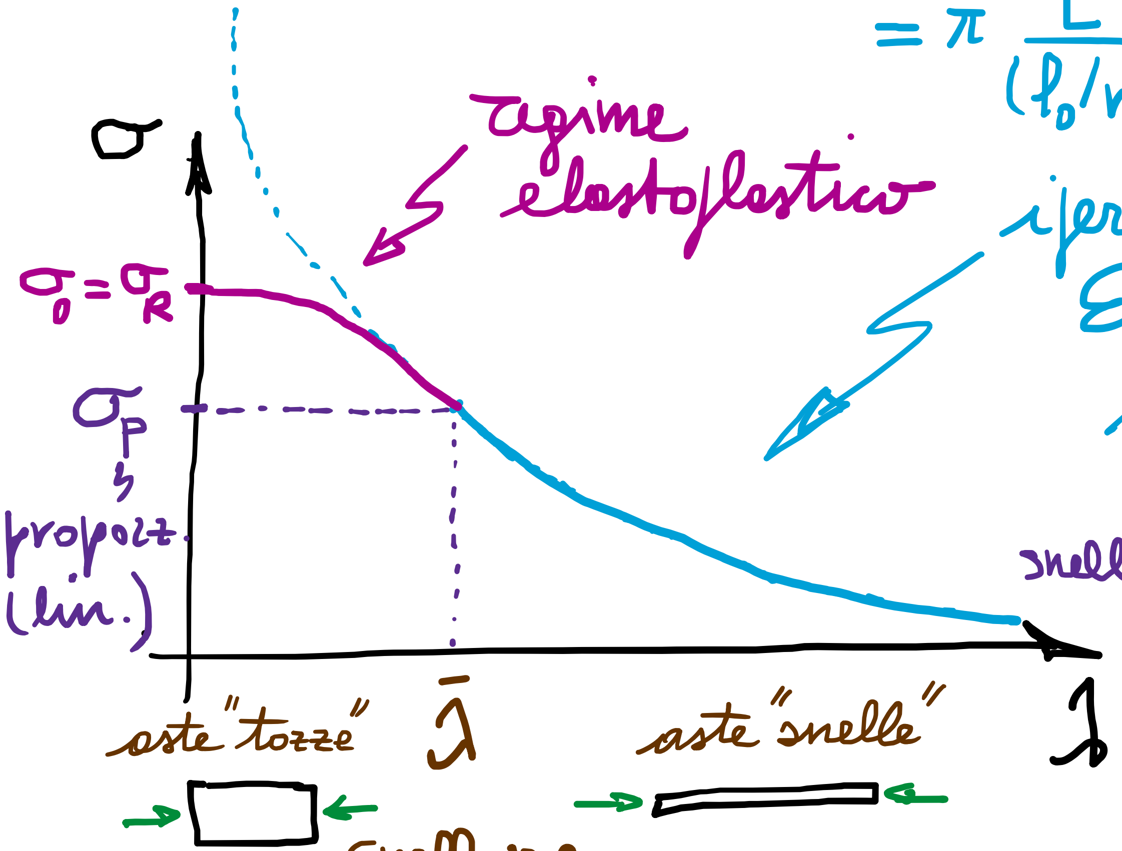
$$= \pi^2 \frac{E}{(l_0/r)^2} = \boxed{\pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \sigma_{cr}^E}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{l_0}{r}}$$

l_0 ← lunghezza l.e.

r ← sez. trasv.

snellezza (rapporto di)



iperbole di Eulero (elastico lineare)

$$\pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

snellezza limite $\sigma_p = \pi^2 \frac{E}{\bar\lambda^2} \Rightarrow \bar\lambda = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \simeq \sqrt{10^4} = 100$ (acciaio)

come verifica di resist.

$$\sigma < \sigma_{cr}^E \frac{\sigma_0}{\sigma_0} \Rightarrow \underbrace{\frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^E}}_{\omega}\sigma < \sigma_0$$

$$\omega\,\sigma < \sigma_0 \qquad \sigma = \frac{P}{A}$$

$$\omega = \underbrace{\frac{\lambda^2}{\pi^2}}_{\text{snellezza}}\underbrace{\frac{\sigma_0}{E}}_{\text{materiale}}$$

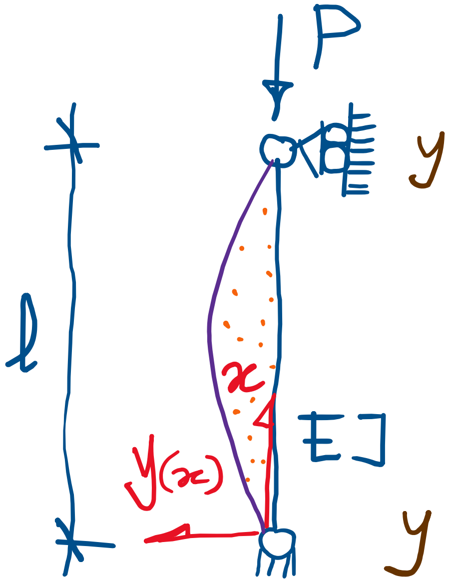
Metodo "omega"

fattore di amplificazione del carico P ai fini dell'inst.

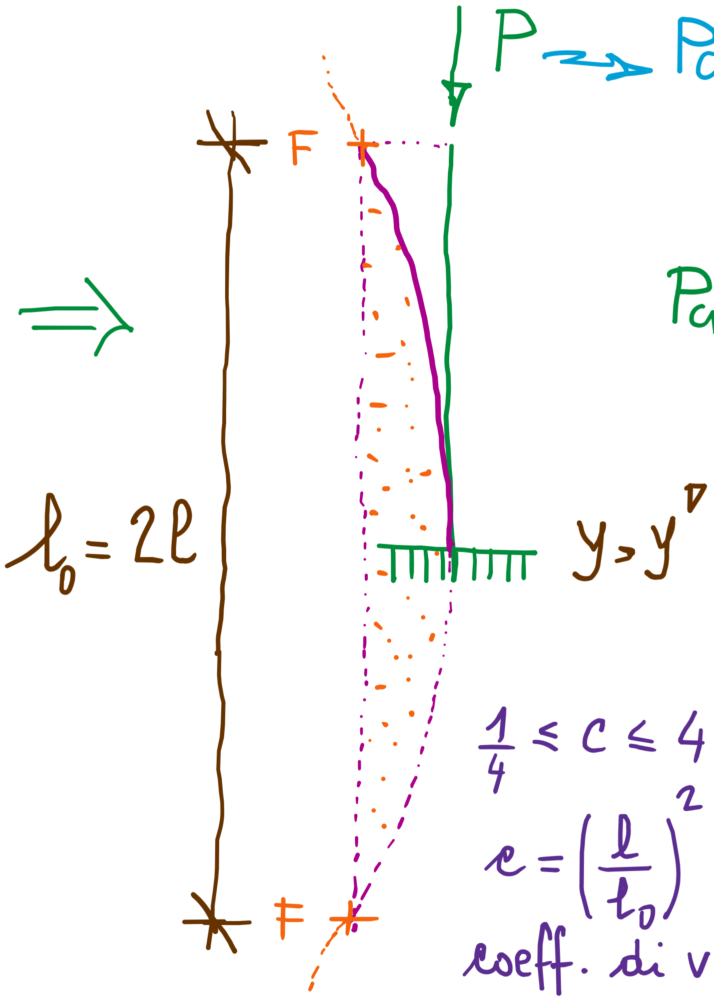
(tabellato per tipologie)

Concetti fondamentali:

- Generalizzazione dell'analisi dell'asta di Eulero per altre condizioni al contorno (c.c.), cioè di vincolo:



$$P_{cr,E} = \underbrace{\pi^2}_{\sim 10} \frac{EJ}{l^2} \quad \Longrightarrow$$



$$P_{cr,E} = \frac{1}{4} P_{cr,E\ a\ E}$$

$$P_{cr,E} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}$$

l_0: lunghezza di libera inflessione

$$\frac{1}{4} \le c \le 4$$

$$c = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 \qquad = c\,\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

coeff. di vincolo

- Estensione per telai (a nodi fissi)
- Formula di Newmark (vincoli cedevoli elasticamente ⇝ molle rotazionali)

} Asta di Eulero generalizzata

- Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza)

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \qquad\qquad \sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_0$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0}\,\sigma_0$$

$$\underbrace{\frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}}}_{\omega}\,\sigma \leq \sigma_0$$

(Metodo "omega") ⇝ $\omega \frac{P}{A} \leq \sigma_0$

ω coeff. amplificativo di P (ai fini dell'instabilità)

SOMMARIO (Lez. 21)

- Asta incastrata e generalizzazione ad altre condizioni di vincolo.
- Coefficiente di vincolo, lunghezza di libera inflessione.
- Telai a nodi fissi: effetto flessionale delle travi condensato in molle rotazionali (elementi a deform. elastica concentrata).
- Formula di Newmark per travi appoggiate (errori contenuti).
- Verifica di stabilità (può essere interpretata come verifica di resistenza con carico amplificato di fattore ω → "Metodo omega").
- Fine Instabilità delle Strutture – (2ª parte).

Next step: Anelasticità (plasticità) delle Strutture (3ª parte).

Comportamento elastoplastico del materiale.