

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

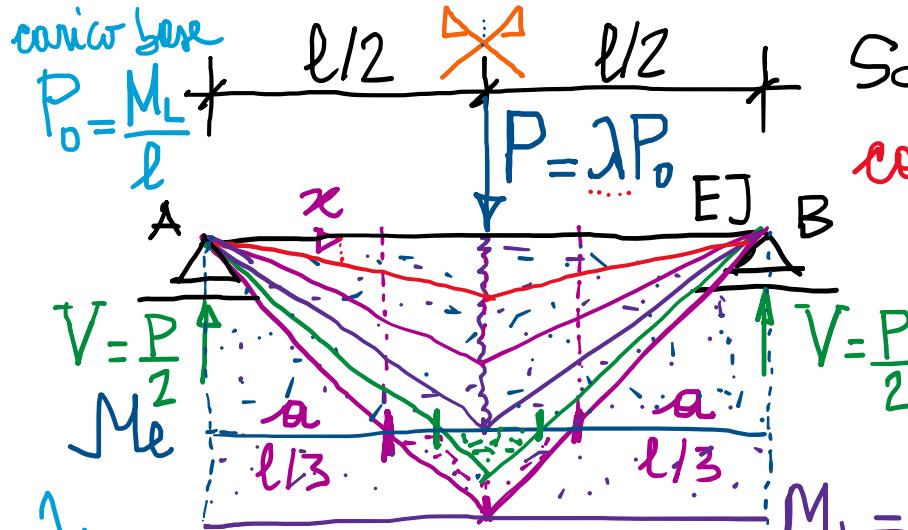
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 24

# Risposta elastoplastica delle trave sino a collasso plastico



1:  
moltiplicatore  
del carico

$$M_{max} = \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

$$= \frac{1}{4} M_L$$

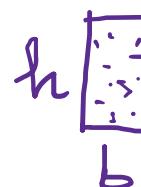
$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_L}{M_e} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x_e}{x} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_e}{x} \right)^2$$

Schema isostatico (statischamente determinato),  
con distribuzione di  $M$  governata dal solo equilibrio.

$$M(x) = \frac{P}{2}x = \frac{1}{2}M_L \frac{x}{l}$$

$$\frac{M_L}{M_e} = \frac{W_p}{W_e} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^3}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$



$$\alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{W_p}{W_e} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^3}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

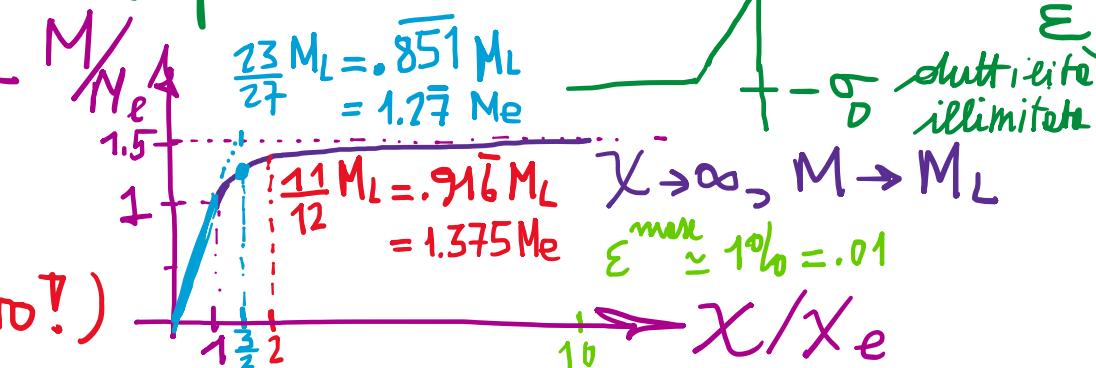
fattore di forma della sezione trasversale ("shape factor")



- Comportamento del materiale perfettamente elastoplastico

- Comportamento delle sezioni trasverse (con incrudimento!)

(con incrudimento!)



- Regime elastico:  $M(x) \leq M^{\text{max}} \leq M_e = \frac{2}{3} M_L$   
 $\frac{1}{4} M_L \leq \frac{2}{3} M_L \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq \lambda_e = \frac{8}{3}$  limite elastico
- Regime elasto-plastico:  
 limitato da condizione  
 di collasso plastico  $\lambda = \lambda_L = 4$ ,  
 oltre la quale non è più possibile  
 far crescere il carico esterno (e quindi  $M^{\text{max}}$  oltre  $M_L$ ). (plastico)

### - Estensione zone plasticizzate:

$$\frac{P}{2} a = M_e \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \frac{M_L}{l} a = \frac{2}{3} \frac{M_L}{l} \Rightarrow a = \frac{4}{3\lambda} l$$

(in realtà  $r \rightarrow 0$   
 solo per sezioni  
 molto vicine alle sezioni di mezzeria,  
 ove si localizzano i fenomeni plastici principali)

$r$ : semialtezza  
 del "core" elastico

$r = h/2$

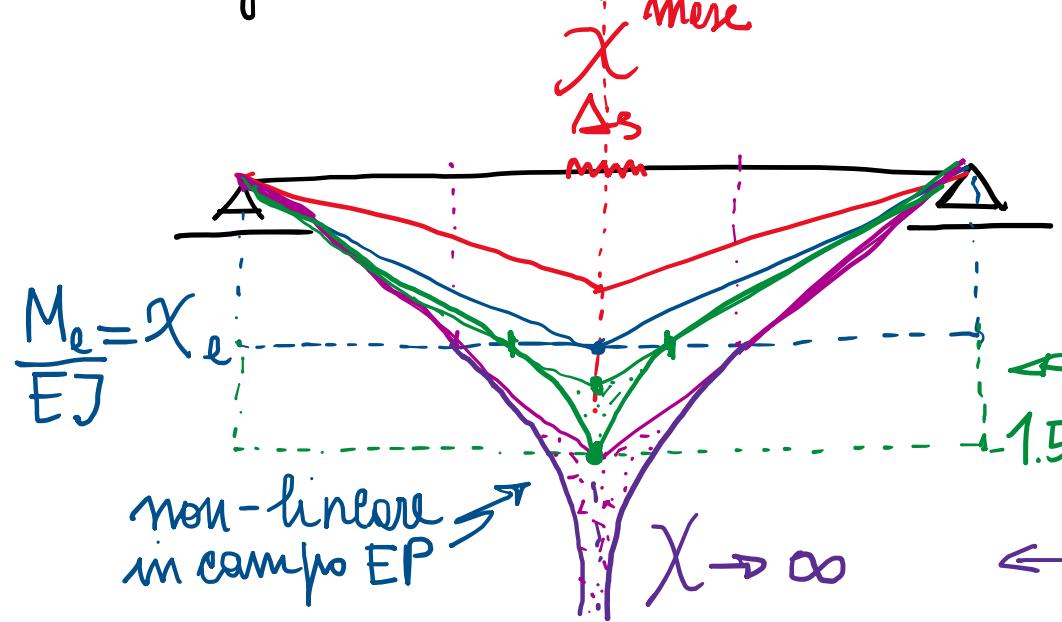
$r = l/2$

$\lambda_L = 4$

$l = \frac{l}{3}$

zone plasticica con deformazioni plastiche, estesa ad un terzo della base

- Diagramme di curvatura  $\chi(x)$ : A limite elastico  $M_{max} = M_e \Rightarrow \lambda = \lambda_e = \frac{8}{3}$



- $\chi$  lineare in campo elastico  $\lambda \leq \frac{8}{3}$

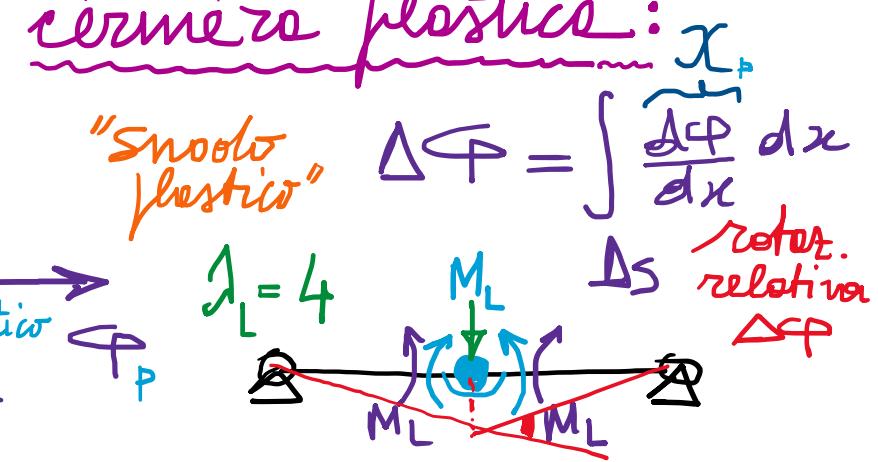
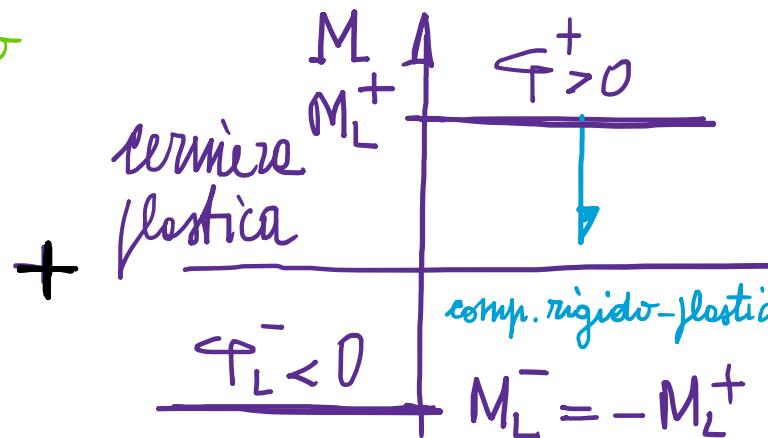
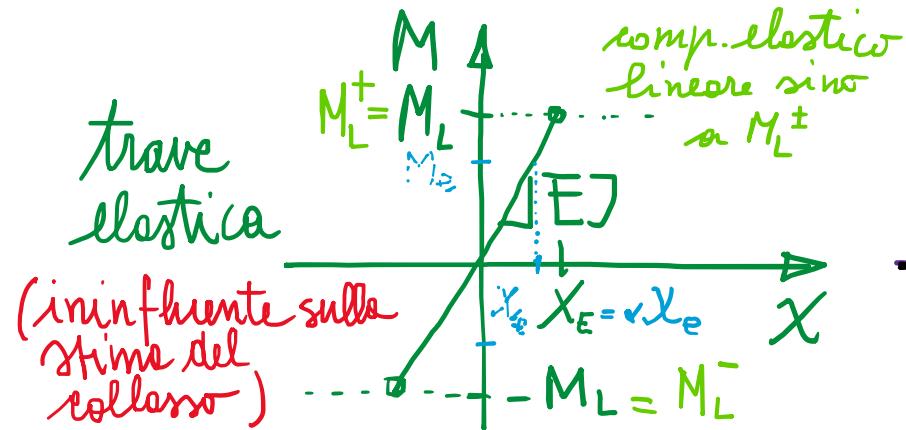
$$\chi_{max} = \chi_e = \frac{M_e}{EJ}$$

$$M_{max} = \frac{23}{27} M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} = \frac{3}{2}$$

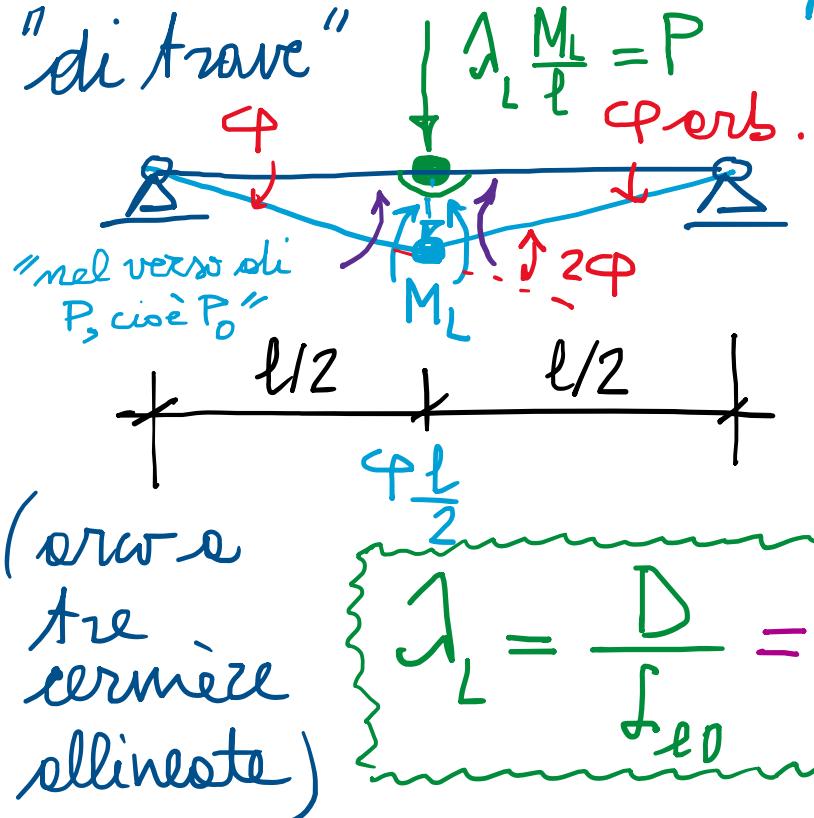
$$M_{max} = M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} \rightarrow \infty$$

Ai fini di cogliere la situazione di collasso ( $\lambda_L$ )

N.B. Le sezioni che producono elevate curvature (plastiche) risultano concentrate in prossimità delle mettereie delle trave  $\Rightarrow$  Ipotesi semplificativa di cerniere plastiche:



Mecanismo di collasso (plastico): situazione di collasso iniziale  
 "di trave" (equilibrio limite)



PLV:  $\Delta_e = I_L \frac{M_L}{l} - \cancel{P \frac{\phi}{2}} - M_L 2\phi = 0$

$\cancel{P}$   $\cancel{\frac{\phi}{2}}$   $\cancel{M_L 2\phi} = 0$

$I_L = 4$

bilancio energetico

$\Delta_e = P \frac{\phi}{2} = \int_{ip}^P = D = M_L 2\phi > 0$

$\cancel{P}$   $\cancel{\frac{\phi}{2}}$   $\cancel{D}$

$(\Delta_{e0} = P_0 \frac{\phi}{2} > 0)$

lavoro esterno del cerchio base

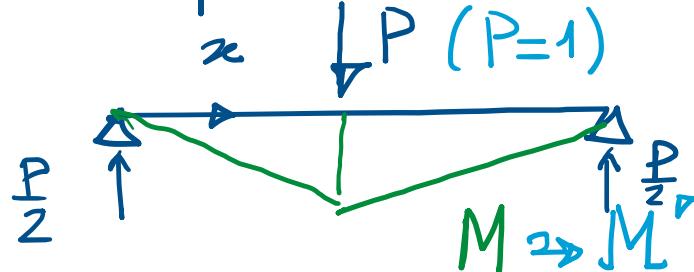
lavoro plastico interno alla cerchiella plastica

L dissipazione plastica

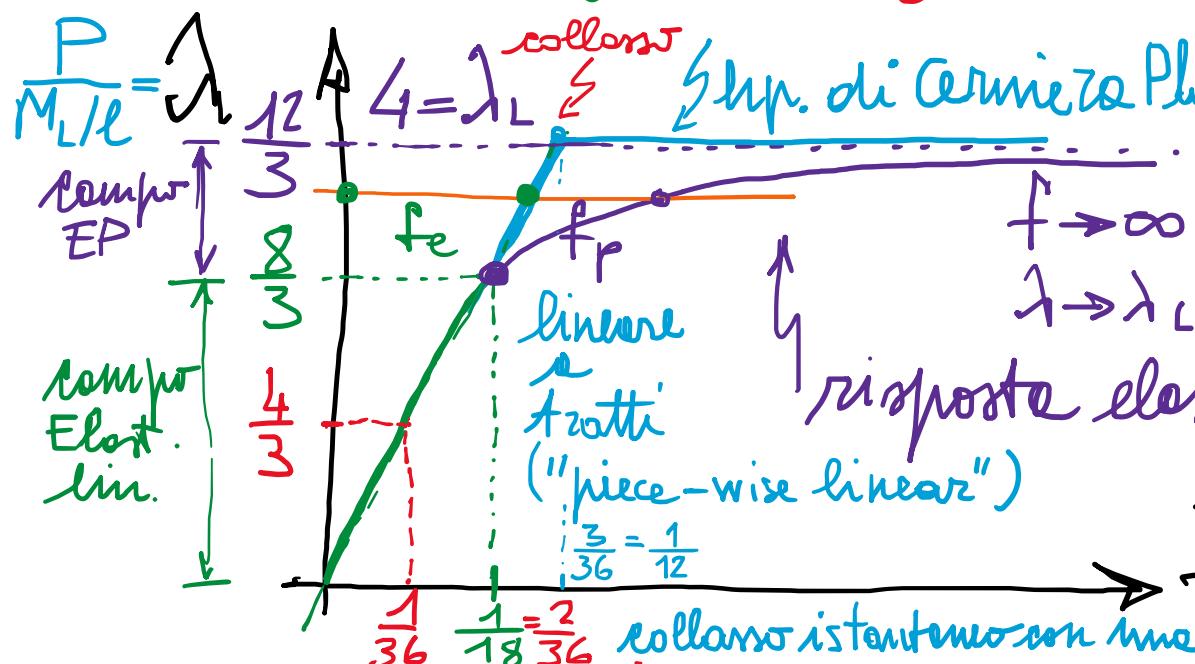
NB: Nell'ip. di cerchiella plastica, il moltiplicatore di collasso risulta facilmente individuabile tramite PLV, coerentemente col meccanismo di collasso plastico che si viene a manifestare -

# Risposte elasto-plastiche effettive delle trave (non-lin.):

- Campo elastico :



$$f_{e, \text{norm}} = f_e / \frac{M_L l^2}{EJ} = \frac{8}{3} \frac{1}{48} = \frac{1}{18}$$



$f_e$  freccia elastica (spost. in mezzerie)

$$\text{PLV: } 1 f_e = \int_{\text{campo elastico}}^l \frac{M}{EJ} dx$$

$\therefore \lambda \leq \frac{8}{3}$

$$= \frac{P}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} x^2 dx$$

$$= \frac{P}{EJ} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{EJ}$$

s.p. max EJ

$$f_e = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{EJ}$$

Diagramma forze/spostamento delle trave (P-Δ) [moltiplicatore/freccie]

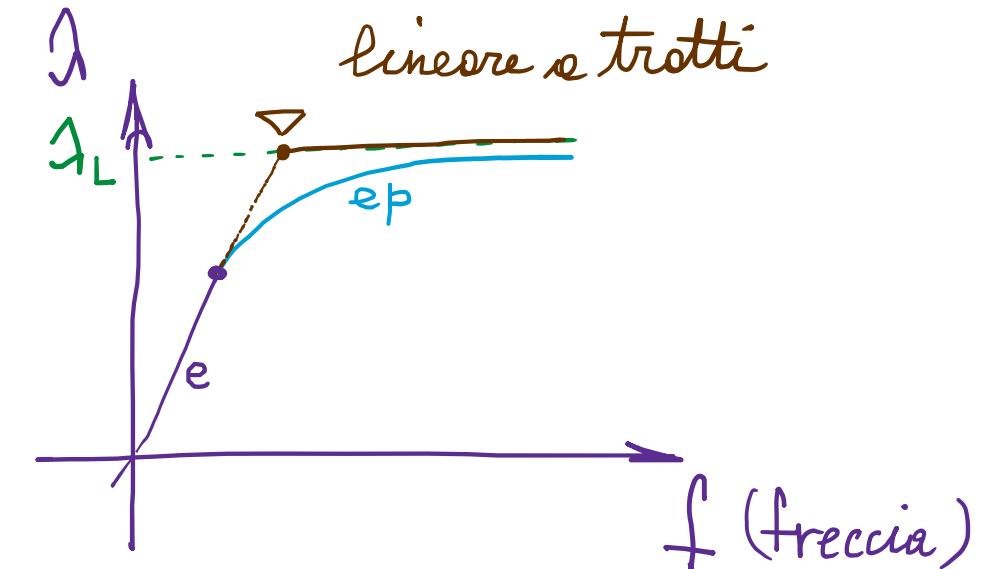
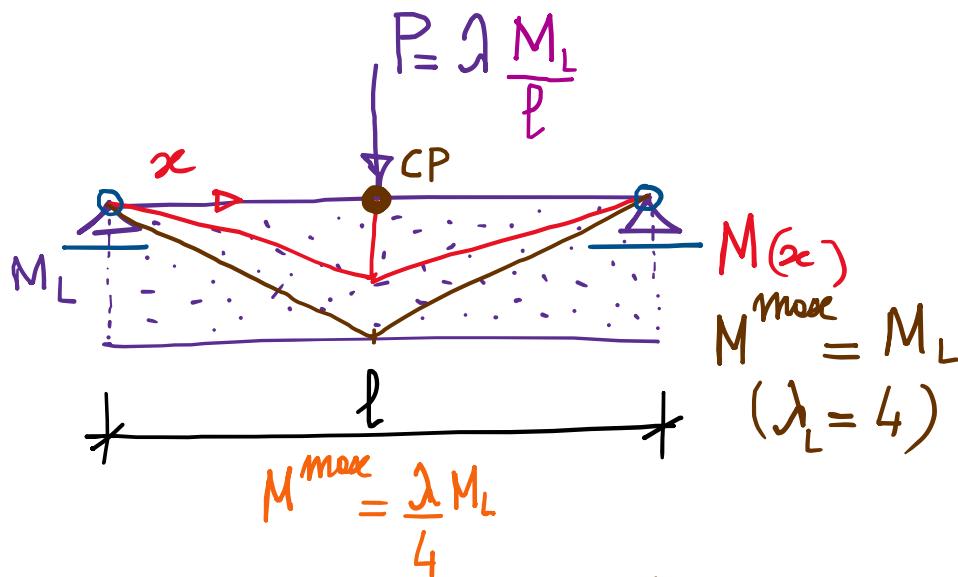
risposta elasto-plastica non-lineare

$$\bar{f} = f / \frac{M_L l^2}{EJ}$$

NB: Con cerniere plastiche, sotto stima delle deformazioni globali ma valutat. corrette di  $\Delta_L$ .

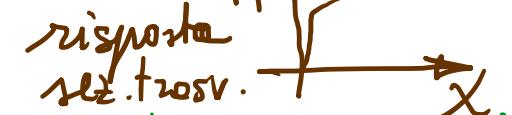
## Concetti fondamentali :

- Passaggio alle scie strutturale dell'intera trave  $\Rightarrow$  curva forza/spostamento, in campo elastoflessivo delle strutture -
- Riferimento a caso semplice, di trave isostatica appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria :



- Ipotesi di formazione di "cerniere plastiche" in determinate sezione ove si registrano una "localizzazione delle deformazioni plastiche".

## SOMMARIO (Lec. 24)

- Risposte elasto-plastiche delle trave (fino al collasso plastico). Dopo: 
- Analisi di sistemi isostatici (trave appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria).
- Momento netto per puro equilibrio  $\Rightarrow$  curvatura da legge costitutiva.
- Concentrazione curvatura (plastiche) in mezzeria  $\Rightarrow$  ipotesi di cerniere plastiche e schematizzazione semplificata per stime del collasso.
- Meccanismo di collasso plastico e stime del moltiplicatore di collasso  $\lambda_L$  da bilancio energetico (PLV).
- Curva  $P-\Delta_s$  forza/spostamento (moltiplicatore/frecce) non-lineare da reale risposta elasto-plastica, con approssimazione lineare a tratti (piece-wise linear) nell'ip. di cerniere plastiche (utile alle stime di  $\lambda_L$ ).

Next step: Schema iperstatico (trave incostretta)  $\Rightarrow$  ulteriori risorse elasto-plastiche da ridistribuzione di sforzo, con sviluppo di deformazioni plastiche. Risposte evolutive (lineare a tratti) con sequenze di attivazione delle cern. plast.

