Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

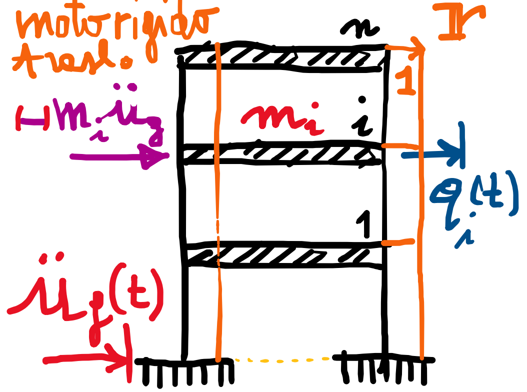
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

Azione sismica su sistemi MDOF (telai multipiano "shear-type")

[generata per inerzia, in seguito al moto del terreno ⇒ distr. di azioni orizz. proporz. ad m_i e naturalm. $-\ddot{u}_g(t)$]



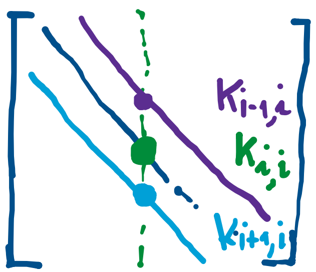
Telaio shear-type:

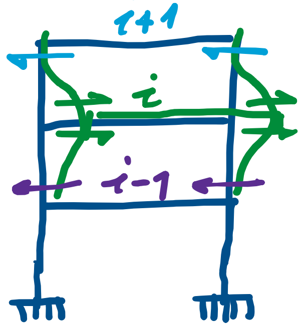
- elementi assialm. rigidi $\frac{EA}{\ell}\to\infty$
- travi infinitamente rigide anche fless. $\frac{EJ_t}{\ell_t}\to\infty$
- colonne flessionalmente elastiche, $\frac{EJ_c}{\ell_c}$ finita
- masse concentrate ai piani m_i
- gdl dinamici: spost. orizz. dei piani, relativi al terreno

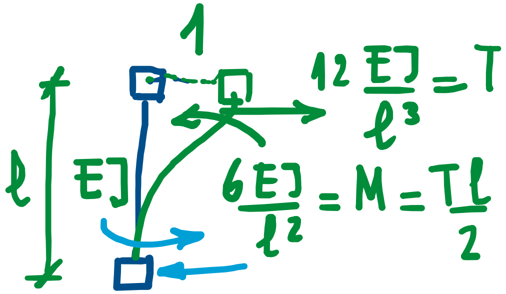
(spost. totale: $\ddot{q}_{t_i}=\ddot{u}_g+\ddot{q}_i$)

$Q_g(t)=-\{m_i\}\ddot{u}_g=-\mathbb{M}\,\mathbb{r}\,\ddot{u}_g(t)$, $\mathbb{r}^T=\{1\;1\cdots1\}$

- Matrice di masse: $\underset{n\times n}{\mathbb{M}}=\mathrm{diag}[m_i]$
- Matrice di rigidezza tridiagonale $\underset{n\times n}{\mathbb{K}}=$







- Matrice di smorzamento (diagonalizzabile):
  - alla Rayleigh o "classico" $\mathbb{C}=\alpha\mathbb{M}+\beta\mathbb{K}$ (α,β det. fissando ζ_1,ζ_2 primi due modi) $\simeq 5\%$
  - $\mathbb{C}=\mathrm{diag}[C_i=2\zeta_i\sqrt{K_iM_i}]$, definendo i fattori di smorz. modali $\begin{cases}K_i: \text{rigidezze}\\ M_i: \text{masse}\end{cases}$ modali
- Pb. agli autovalori: $\mathbb{K}\phi_i=\omega_i^2\mathbb{M}\phi_i \Rightarrow \omega_i^2=\frac{K_i}{M_i}$, ϕ_i $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}\Phi=\mathbb{M}\Phi\Omega^2$

$K_i=\phi_i^T\mathbb{K}\phi_i$, $M_i=\phi_i^T\mathbb{M}\phi_i$

• Eq.ni del moto:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq(t) = (-)\,M r\,\ddot{u}_g(t)$$

$q = \Phi p$ Analisi dinamica modale

$$\Rightarrow \mathcal{M}\,\ddot{p} + \mathcal{C}\,\dot{p} + \mathcal{K}\,p(t) = -\underbrace{\Phi^T M r}_{\Lambda = \{\Lambda_i\}}\,\ddot{u}_g(t)$$

$\mathcal{M} = \Phi^T M \Phi = \mathrm{diag}[M_i]$, $\quad M_i = \phi_i^T M \phi_i$

$\mathcal{C} = \Phi^T C \Phi = \mathrm{diag}[C_i]$

$\mathcal{K} = \Phi^T K \Phi = \mathrm{diag}[K_i]$

$\Lambda = \{\Lambda_i\}$ vettore masse partecipanti modali

$$\underset{n\times 1}{r} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

modo i

n. eq.ni disacc. (per i vari modi)

$$\cancel{M_i}\,\ddot{p}_i + \frac{C_i}{M_i}\,\dot{p}_i + \frac{K_i}{M_i}\,p_i(t) = -\frac{\Lambda_i}{M_i}\,\ddot{u}_g(t)$$

$$\boxed{\Lambda_i = \phi_i^T M r}$$

modo i

[M] dimensioni di una massa

$$\ddot{p}_i + 2\xi_i\omega_i\,\dot{p}_i + \omega_i^2\,p_i(t) = -\Gamma_i\,\ddot{u}_g(t)$$

$$\mathcal{M}^{-1}\cdot \Rightarrow \ddot{p} + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\,\dot{p} + \underbrace{\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}}_{\Omega^2}\,p(t) = -\underbrace{\mathcal{M}^{-1}\Lambda}_{\Gamma = \{\Gamma_i\}}\,\ddot{u}_g(t)$$

$\Gamma = \{\Gamma_i\}$ vettore dei fattori di partecipazione modale

$$\boxed{\Gamma_i = \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\phi_i^T M r}{\phi_i^T M \phi_i}}$$

[1] è numero puro (rapporto di masse)

fattore di partecipazione modale (alla azione sismica)

Quindi:

$$\Gamma = \mathcal{M}^{-1}\Lambda$$
$$= (\Phi^T M \Phi)^{-1}\,\Phi^T M r$$
$$= \underbrace{\Phi^{-1} M^{-1} \underbrace{\Phi^{-T}\Phi^T}_{I} M}_{I}\, r = \Phi^{-1} r$$

$$\boxed{r = \Phi\,\Gamma} \Rightarrow 1_j = \sum_i \phi_{ij}\,\Gamma_i \quad \left(\phi_{ij} = 1 \Rightarrow \sum_i \Gamma_i = 1\right)$$

es. ultimo piano ($j = n$)

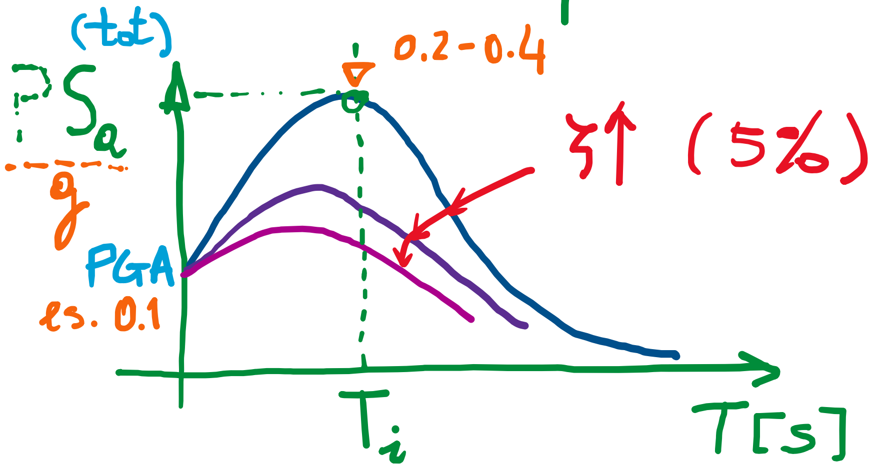
N.B.: M_i, Λ_i, Γ_i assoc. a ϕ_i dip. da normal. di ϕ_i

- Risposta dell'azione sismica:
  - Tramite Int. di Duhamel
    Metodo di Newmark

$$\ddot{u}_g(t) \Rightarrow p_i(t) \Rightarrow q_j(t) = \sum_i \phi_{ij}\, p_i(t)$$

j gdl i modo

  - Tramite Spettro di risposta (ev. di progetto, in base a zonazione sismica)



periodo modo i-esimo

Si "entra" nello spettro di risposta col periodo proprio del modo i-esimo

$$S_{d_i} = \max_t \{p_i\} \Rightarrow PS_v = \omega_i S_d \Rightarrow PS_a = \omega_i^2 S_d$$

pseudo

$$S_{d_i} = \frac{PS_{a_i}}{\omega_i^2}$$

ruolo di "amplificazione" del fattore di partecipazione modale Γ_i

modo i $\boxed{p_i^{max} = |\Gamma_i| \dfrac{S_{a_i}}{\omega_i^2}}$

(che si registreranno in istanti di tempo diversi)

Stima spostamento complessivo q^{max}

$$q_j^{max} = \sum_i |\phi_{ij}|\, p_i^{max} \quad \text{(in genere eccess. conserv.)}$$

$$= \sum_i |\phi_{ij}\, \Gamma_i| \frac{S_{a_i}}{\omega_i^2}$$

grado di libertà j-esimo

or

$$= \sqrt{\sum_i \left(\phi_{ij}\, \Gamma_i \frac{S_{a_i}}{\omega_i^2}\right)^2}$$

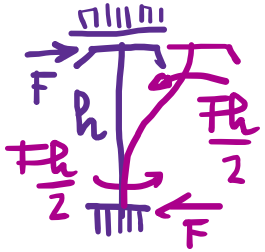
Square Root of Sum of Squares

SRSS (efficace ingegner.)

- Azioni interne (a partire da quelle modali $\bar{A}_i(s_k)$) ← Sez. caratteristiche

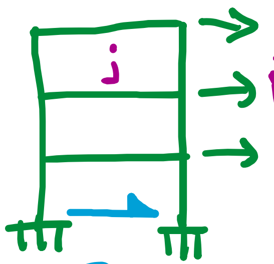
$$A^{max}(s_k) \overset{SRSS}{=} \sqrt{\sum_i \left(\bar{A}_i(s_k)\,\Gamma_i\,\frac{S_{a_i}}{\omega_i^2}\right)^2}$$

(vedi calcolo dei telai col metodo degli spostam.)



S cellula base (N non nota nelle travi)

- Taglio modale alla base



$$\bar{E}_i = K\Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i = F_{I_i}$$

$$\tau_i = \sum_j \bar{E}_{ij} = \bar{E}_i^T r = \omega_i^2 \underbrace{|\Phi_i^T M^{(T)} r|}_{\Lambda_i} = \boxed{|\Lambda_i|\,\omega_i^2 = \tau_i} \quad (\tau = \Omega^2 \Lambda)$$

τ_i : somma di tutte le forze d'inerzia ai piani

dip. dalle normalizz. di Φ_i

- Taglio modale max:

$$\tau_i^{max} = \tau_i\, p_i^{max} = |\Lambda_i|\,\cancel{\omega_i^2}\,|\Gamma_i|\,\frac{S_{a_i}}{\cancel{\omega_i^2}} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} S_{a_i} = \boxed{M_{eff_i} S_{a_i} = \tau_i^{max}}$$

$$\Gamma_i = \frac{\Lambda_i}{M_i}$$

$$m_{tot} = \sum_i m_i = r^T M r = \Gamma^T \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\mathcal{M}} \Gamma \qquad \Gamma = \mathcal{M}^{-1}\Lambda$$

$$= \Gamma^T \Lambda = \sum_i \Gamma_i \Lambda_i = \sum_i \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \sum_i M_{eff_i}$$

proprietà "fisica" delle masse modali efficaci

$$|\Lambda_i \Gamma_i| = M_{eff_i} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T M r)^2}{\Phi_i^T M \Phi_i} \sim \frac{\cancel{\chi^2}\,\phi_i^2}{\cancel{\chi^2}\,\phi_1^2}$$

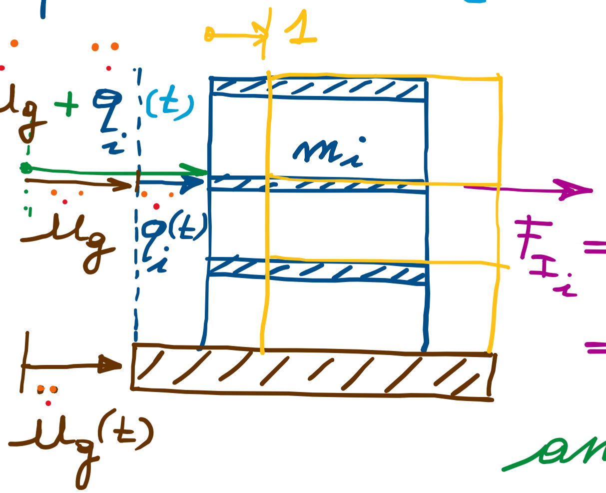
[M] dim. di massa

massa modale efficace (indip. da norm. di Φ_i)

Concetti fondamentali:

- Risposta sismica (con specifico rif. ai "telai shear-type"):

$$(t)\,\ddot{q}_{i_{tot}} = \ddot{u}_g + \ddot{q}_i(t)$$



$$F_{I_i} = -m_i \ddot{q}_{i_{tot}} = -m_i\left(\ddot{u}_g(t) + \ddot{q}_i(t)\right)$$

Eq.ni del moto:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\mathbf{q} = -\underbrace{\begin{Bmatrix} \vdots \\ m_i \\ \vdots \end{Bmatrix}}\ddot{u}_g(t)$$

$$\mathbb{M} = \mathrm{diag}[m_i] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{m}} = \underset{n\times n}{\mathbb{M}} \underset{n\times 1}{\begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}} = \mathbb{M}\,\mathbf{r}$$

$\mathbf{r}$: rigid body motion vector di ampiezza unitaria (spostamento traslazionale)

analisi dinamica modale

$$\mathbf{q} = \Phi\,\mathbf{p}$$

$\mathbf{p}$: coord. princip.

Φ: matrice degli autovettori $(\mathbb{K}\phi_j = \omega_j^2 \mathbb{M}\phi_j)$

$$\Phi^T(\cdots = \cdots)$$

$$\underbrace{\Phi^T\mathbb{M}\Phi}_{\mathcal{M}}\ddot{\mathbf{p}} + \underbrace{\Phi^T\mathbb{C}\Phi}_{\mathcal{C}}\dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\Phi^T\mathbb{K}\Phi}_{\mathcal{K}}\mathbf{p} = -\underbrace{\Phi^T\mathbb{M}\mathbf{r}}_{\underset{n\times 1}{\Lambda}}\ddot{u}_g(t)$$

$\mathcal{M}$: $\mathrm{diag}[M_i = \phi_i^T \mathbb{M}\phi_i]$

$\mathcal{C}$: hp. $\mathrm{diag}[C_i = \phi_i^T \mathbb{C}\phi_i]$

$\mathcal{K}$: $\mathrm{diag}[K_i = \phi_i^T \mathbb{K}\phi_i]$

Λ: vettore delle masse partecipanti modali: $\boxed{\Lambda_i = \phi_i^T \mathbb{M}\,\mathbf{r}}$

$\mathbb{M} = \text{diag}[m_i]$ masse dei piani

$\mathcal{M} = \text{diag}[M_i]$ masse modali

$M_i = \phi_i^T \mathbb{M} \phi_i$ ....

– Premoltiplicando per $\mathcal{M}^{-1}$:

$$\ddot{\mathbb{p}} + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\dot{\mathbb{p}} + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}\mathbb{p} = -\underbrace{\mathcal{M}^{-1}\Lambda}_{\Gamma}\ddot{u}_g(t) \qquad \Gamma = \Phi^T \mathbb{M}\,\mathbb{r}$$

$$\Gamma = \left\{\Gamma_i = \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\phi_i^T \mathbb{M}\,\mathbb{r}}{\phi_i^T \mathbb{M}\,\phi_i}\right\}$$

N.B. M_i, Λ_i, Γ_i dipendono dalla normalizzazione dell'autovet. ϕ_i

fattori di partecipazione modale: coeff. moltiplicativo di $\ddot{u}_g(t)$ per il generico modo i $[\Gamma_i] = [1]$

$\forall$ modo i:

$$\ddot{p}_i(t) + \underbrace{\frac{C_i}{M_i}}_{2\zeta_i\omega_i}\dot{p}_i(t) + \underbrace{\omega_i^2}_{\frac{K_i}{M_i}} p_i(t) = -\Gamma_i\,\ddot{u}_g(t)$$

"amplifica" $\ddot{u}_g$ per il modo i-esimo

$\llcorner$ SDOF $\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} = 1$

– Proprietà:

$$\Gamma = \mathcal{M}^{-1}\Lambda$$
$$= (\Phi^T\mathbb{M}\Phi)^{-1}\overbrace{\Phi^T\mathbb{M}\,\mathbb{r}}^{\Lambda}$$
$$= \underbrace{\Phi^{-1}\mathbb{M}^{-1}\underbrace{\Phi^{-T}\Phi^T}_{\mathbb{I}}\mathbb{M}}_{\mathbb{I}}\,\mathbb{r} = \Phi^{-1}\mathbb{r} \Rightarrow \mathbb{r} = \Phi\,\Gamma$$

$$\mathbb{q} = \Phi\,\mathbb{p}$$

(se $j = n$, $\phi_{in} = 1$ ad es. $\sum \Gamma_i = 1$)

$$1 = r_j = \sum_i \phi_{ij}\Gamma_i$$

modo i

Γ_i sono le componenti di $\mathbb{r}$ nella base degli autovettori $\mathbb{r} = \sum_i \phi_i \Gamma_i$

- Masse modali efficaci:

$$M_{eff_i} = \Lambda_i \Gamma_i = \Lambda_i \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\phi_i^T M \mathbb{I})^2}{\phi_i^T M \phi_i} > 0$$

$\sim \frac{M^2}{M}$ è una massa $[M]$

$\sim \frac{\cancel{\lambda^2} \phi_i^2}{\cancel{\lambda^2} \phi_i^2}$ indipendente da come è normalizzato ϕ_i

- Esprimono il taglio modale alla base massimo secondo i vari modi:

$$\tau_i^{max} = M_{eff_i} \, S_{a_i}$$

$\leftrightarrow$ relazione tipo $\overset{\text{forza}}{F} = \underset{\text{massa}}{m} \, \overset{\text{accelerazione}}{a}$

è la massa strutturale coinvolta nel modo i a dare il taglio alla base massimo.

- Proprietà "fisica": $\overset{\text{sui modi } i}{\sum_i} M_{eff_i} = m_{tot} = \overset{\text{sui piani } j}{\sum_j} m_j$ massa totale del telaio

(in genere i primi due/tre modi cubano una larga percentuale (anche $\sim 90\%$) della massa totale dell'edificio).

SOMMARIO (Lez. 15)

- Risposta sismica di strutture MDOF (telai "shear-type").
- Equazioni del moto con azione sismica per effetto di trascinamento.
- Analisi dinamica modale con disaccoppiamento in n eq.ni $\forall$ modo i.
- Determinazione della risposta tramite spettro di risposta.
- Stime (SRSS) degli indici di risposta sismica (spost., AI, taglio alla base).
- Parametri di partecipazione modale (masse, fattori) e masse modali efficaci (legate alla stima del taglio modale alla base massimo).

Next step: (Dinamica dei sistemi continui).

II: Instabilità delle strutture (dipartendo dall'analisi dinamica).