

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

Esempio 3DOF - Deformate critiche

Eq. ni di equil. (de stat. dell'EPT $\nabla_2(\vartheta)$), $|V_i| \ll 1 \sim V_i^2$

$$(1) \begin{cases} (3-p)V_1 - V_2 = 0 \\ -V_1 + (2-p)V_2 - V_3 = 0 \\ -V_2 + (1-\frac{p}{2})V_3 = 0 \end{cases}$$

$$q_i = \dot{\vartheta}_i$$

lineariz.
 V_i^1

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix}$$

$$K_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, K_G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P = p \frac{K}{l}$$

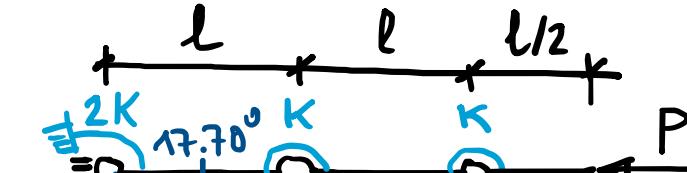
carichi critici: $\det(K) = 0 \Rightarrow p_i^*$

Deformate critiche associate ai p_i^* $\Rightarrow \delta q_i^* = q_i^* - q_0^*$

$$\text{Dalla (1)} \Rightarrow V_1 = \frac{V_2}{3-p} = \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} V_3$$

$$\text{Dalla (3)} \Rightarrow V_2 = (1-\frac{p}{2})V_3 \div \frac{2-p}{2} V_3$$

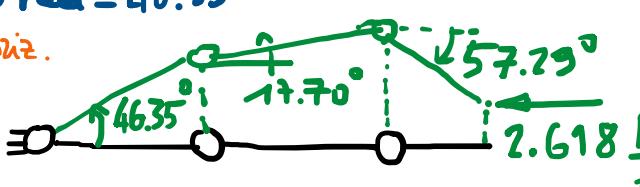
• 1° carico critico ($p_1^* = .3820$): $V_1 = .3090 \text{ rad} = 17.70^\circ$



1° deformata critica

N.B. $\dot{\vartheta}_1 \approx 0$
al 1° ord.
($\cos \vartheta_i \approx 1$)
 $\epsilon \sin \vartheta_i \approx \dot{\vartheta}_i$

$$.3820 \frac{K}{l} = P_{cr,E}$$



2° def. critica

Alternativamente: $K \delta q_i = 0$

$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*$$

pb. agli autovetori generalizzati

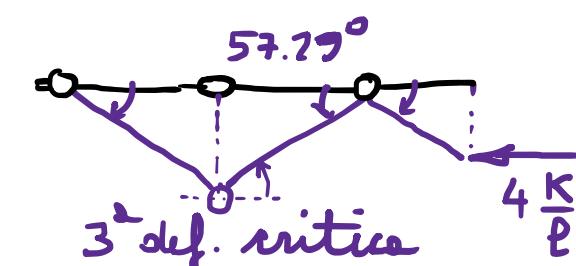
p_i^* : autovetori

δq_i^* : autovettori

note a mani di cost. arbitraria

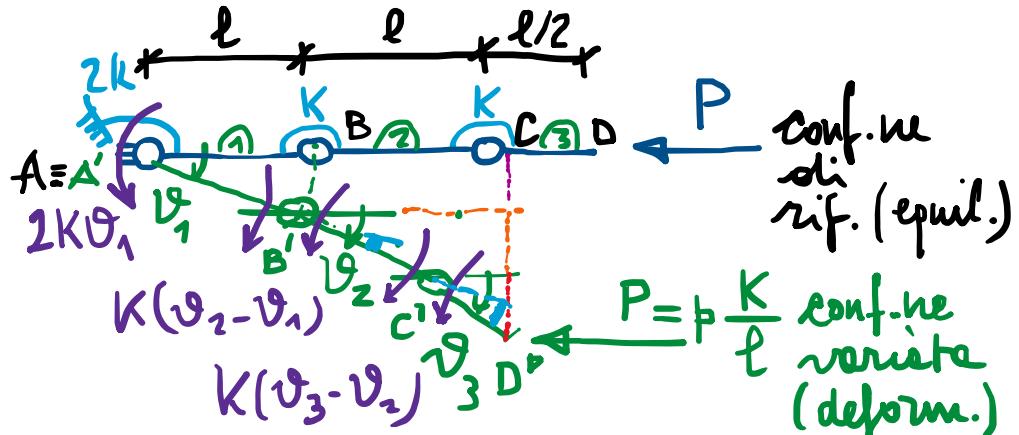
$$\hookrightarrow V_3 = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ$$

• Analogam. per p_2^* e p_3^* :



3° def. critica

Approccio statico: scritture dirette delle eq.m. di equilibrio varietà (nelle conf. he def.)



conf. ne
di
rif. (equil.)
 $P = p \frac{K}{l}$ conf. ne
varietà
(deform.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_C^3 = 0 \Rightarrow K(v_3 - v_2) - P \frac{l}{2} \sin v_3 = 0 \\ \sum M_B^{3+2} = 0 \Rightarrow K(v_2 - v_1) - P \left(\frac{l}{2} \sin v_3 + l \sin v_2 \right) = 0 \\ \sum M_A^{3+2+1} = 0 \Rightarrow 2Kv_1 - P \left(\frac{l}{2} \sin v_3 + l \sin v_2 + \frac{l}{2} \sin v_1 \right) = 0 \end{array} \right.$$

\Leftrightarrow 3 eq.
 \Leftrightarrow 2+3 eq.
 \Leftrightarrow 1+2+3 eq.

eq.m. di equil. non-lineari (non-lin. geometrica)

Spost. "geometricamente piccoli" $|v_i| \ll 1 \Rightarrow \sin v_i \approx v_i$: eq.m. linearizzate
conf. ne di rif. equil.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_2 + (1 - \frac{p}{2}) v_3 = 0 \\ -v_1 + (1-p)v_2 - \frac{p}{2} v_3 = 0 \\ (2-p)v_1 - p v_2 - \frac{p}{2} v_3 = 0 \end{array} \right.$$

N.B.: bracci di leva di P
non nulli al 1° ordine
($\sin v_i \approx v_i$)

coh
identici
risultati

$$\tilde{\mathbf{K}} \delta q = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{K}}_E - p \tilde{\mathbf{K}}_G$$

non simm.

Carichi critici:

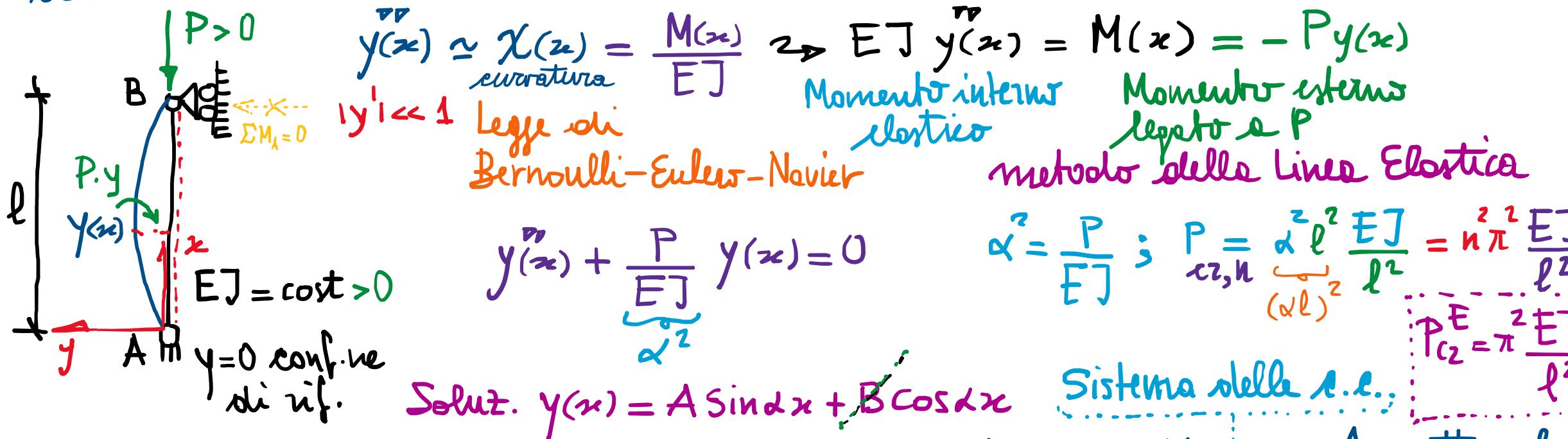
$$- \det(\tilde{\mathbf{K}}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$- \tilde{\mathbf{K}}_E \delta q_i^* = p_i^* \tilde{\mathbf{K}}_G \delta q_L^* \Rightarrow \text{autovel. autovett.}$$

N.B. $\tilde{\mathbf{K}}$ de appross statico può offrire
de \mathbf{K} de appross energetico (sim.)
ma con le stesse proprietà
algebriche sottostanti.

Sistemi continui (aste semplicemente compresse deformabili elasticamente flessionali.)

Aste di Euler (1750) - Approssimazione statica
nelle confine def.



a.e. (scrittura e impostazione)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ y(l) = 0 \rightarrow A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\sin \alpha l) A = 0 \quad \text{sin } \alpha l \neq 0 \rightarrow A = 0 \quad (y \equiv 0)$$

$$\sin \alpha l = 0 \rightarrow A \text{ arb.} \quad \boxed{\alpha l = n\pi}; n=1, 2, 3 \dots$$

$$\boxed{D} \quad \boxed{x}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$\det D = -\sin \alpha l = 0$$



Ammette soluz. non banali

$\alpha \neq 0$
se D sing.

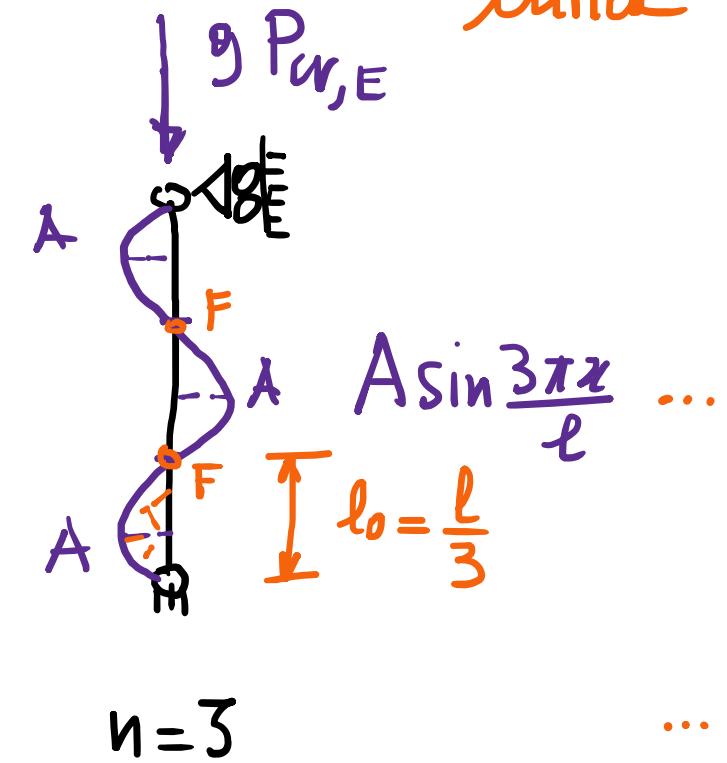
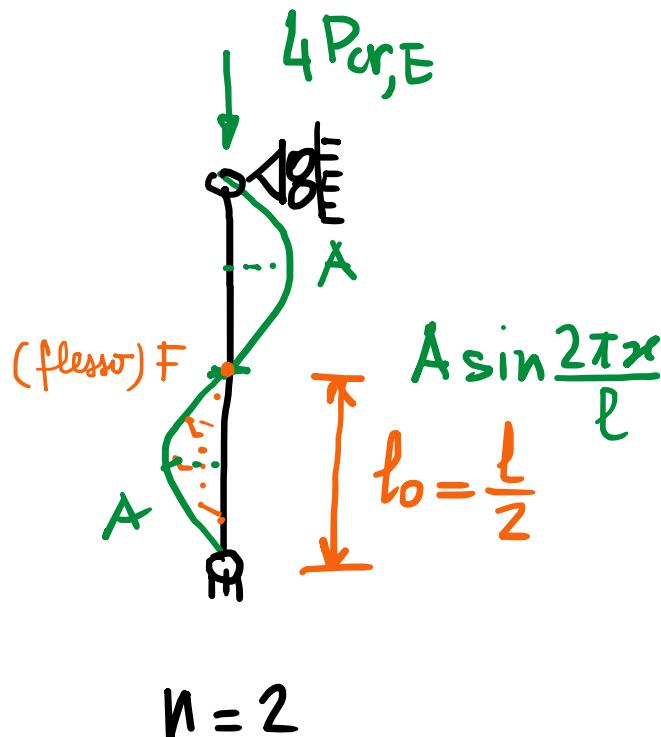
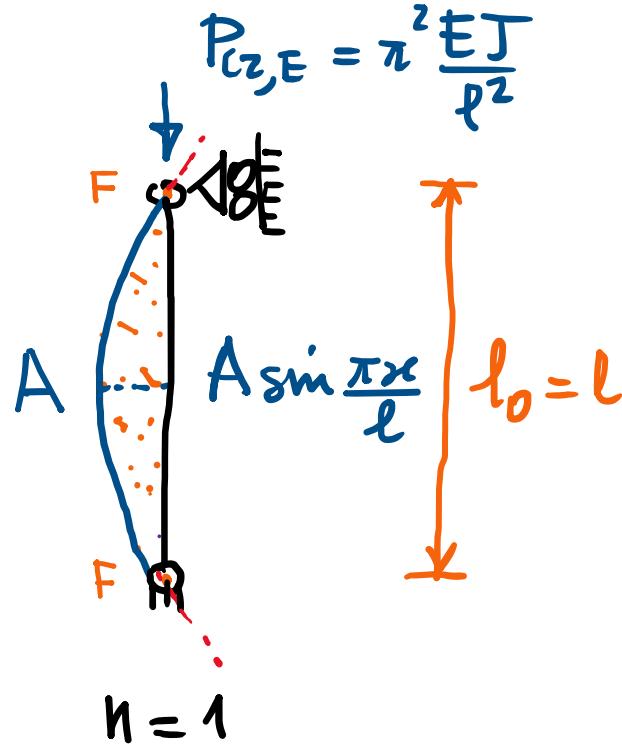
carichi critici

$$P_{cr,n} = \frac{h^2 \pi^2 E J}{l^2} = \pi^2 \frac{E J}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} = \pi^2 \frac{E J}{l_{0,n}^2}$$

≈ 10 

$l_{0,n} = \frac{l}{n}$ lunghezza di libera inflessione
distanza tra due punti di flesso consecutivi delle deform. critica

$y_{cr,n}(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$ deformate critiche



- Successive generalizzazioni per altre condizioni di vincolo (el costruzio).

Concetti fondamentali :

- Esempio 3-DOF :

- determinazione delle deformate critiche δq_i^*

da soluzione del sistema omogeneo

$K \delta q = 0$, in presenza di singolarità di K per $p = p_i^+$.

da soluzione del ps. generalizzato agli autovalori

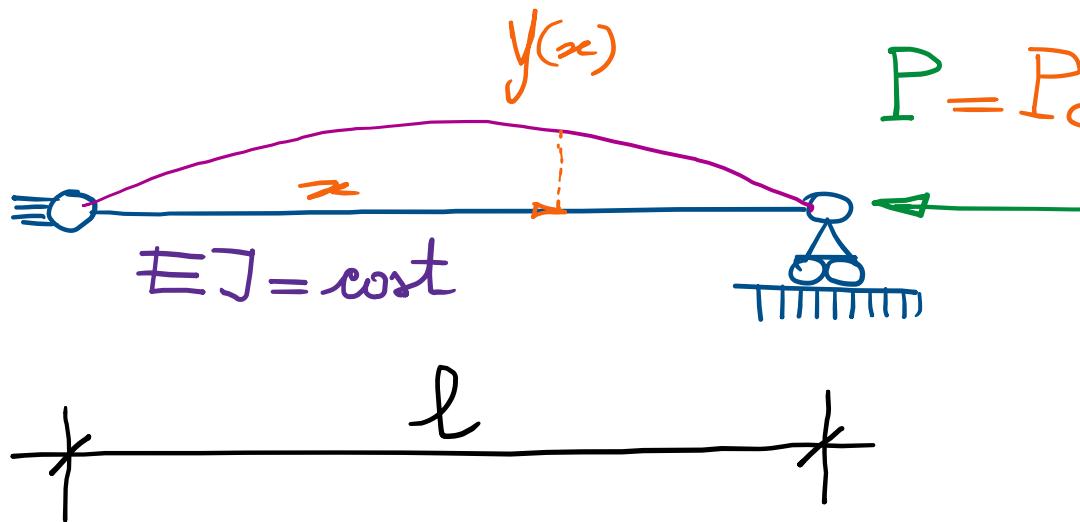
$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*.$$

- analisi tramite approccio statico:

scrittura diretta delle equazioni di equilibrio, nello stato di deformazione, con linearizzazione per spostamenti "geometricamente piccoli" (coerentemente con l'analisi al 2° ordine per $V \approx V_0$) e studio delle proprietà algebriche del sistema ottenuto.

- L'approccio statico appare concettualmente il più semplice, e conveniente, anche dal punto di vista metodologico, in quanto contempla la (sola) scrittura delle eq.ni di equilibrio (nella configurazione deformato, in particolare per spostamenti "geometricamente piccoli", tali da indurre ad eq.ni lineari, di immediata analisi dal punto di vista algebrico), individuando i carichi critici quali punti di biforcazione dei percorsi di equilibrio.
- L'esistenza di soluzioni biforcate segnala poi la perdita di stabilità della conf.ne di riferimento, la quale definisce le condizioni di lavoro ordinarie del sistema strutturale, definendo così i livelli tollerabili dei carichi (pre-critici) ai fini pratici.

- Sistemi continui (\Rightarrow Aste di Euler) :
 - sistemi elastici, deformabili flessionalmente, soggetti a carichi di compressione (aste semplicemente compresse).



instabilità
"buckling"
"carico di punta"

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$$

≈ 10

\downarrow

$\uparrow P_0^2$

generalizz.

- analisi tramite "approssimazione statica" (equilibrio nelle confe deformate).

SOMMARIO (Lec. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approssimazione statico: scrittura diretta delle eq.ni di equilibrio nella configurazione deformata.
 - non-lineari per spost. finiti.
 - lineari per spost. geometricamente piccoli ($\sin \theta_i \approx \nu_i$).
 - Eq.ni risultano comb. lineare di quelle de stat. di EPT₂, con matrice di rigidezze \bar{K} con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Asta di Euler (con approssimazione statico) [eq.ne LE nelle conf. ne deform.].
- Carichi critici, deformate critiche, lunghezza di libera inflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, secco o flesso, formule di Newmark, verifica di stabilità.