Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

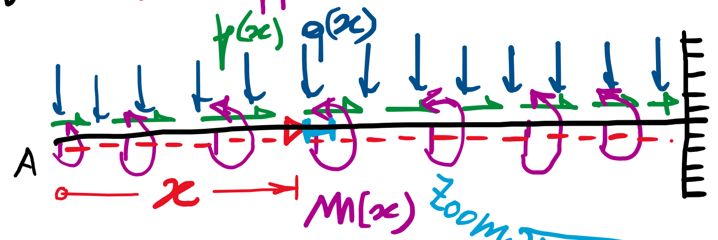
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Equazioni indefinite di equilibrio delle travi (rettilinee)

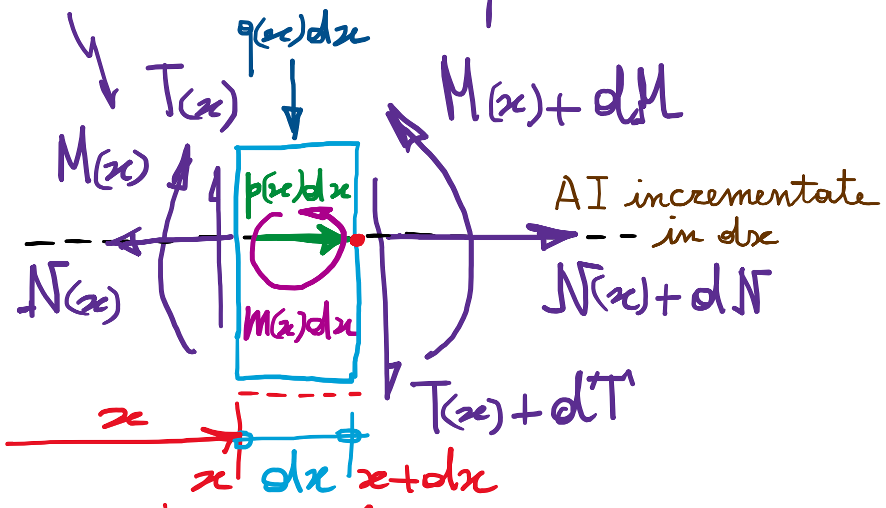
Vedi convenzioni assunte per le AI

$$\left\{\begin{array}{l} p(x): \text{ carico assiale distribuito} \\ q(x): \text{ carico trasversale distribuito} \\ m(x): \text{ coppie distribuite} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \frac{[F]}{[L]} \\ \frac{[F]\cancel{[L]}}{\cancel{[L]}} \end{array}$$



$\lim_{\Delta x \to 0}$

enucleiamo un concio di trave in sede indefinita ($\forall\, x, dx$)



rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = A'(x) \text{ (concetto di derivata prima)}$$

Equazioni di equilibrio del concio:

- $\sum F_t^{dx} = \sum F_x^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{N(x)} + \frac{dN}{dx} - \cancel{N(x)} + p(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{N'(x) = \frac{dN(x)}{dx} = -p(x)}$

- $\sum F_n^{dx} = \sum F_y^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{T(x)} + \frac{dT}{dx} - \cancel{T(x)} + q(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{T'(x) = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)}$

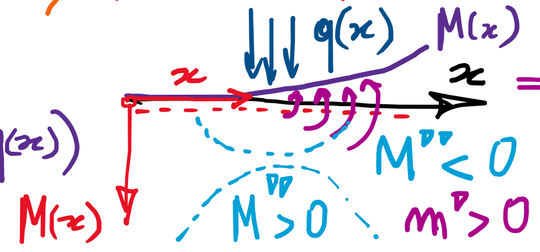
- $\sum M_{x+dx}^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{M(x)} + \frac{dM}{dx} - \cancel{M(x)} + m(x)\cancel{dx} - T(x)\cancel{dx} + q(x)\frac{dx^2}{2} = 0$ infinitesimo di ordine superiore

$\Rightarrow \boxed{M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -m(x) + T(x)}$

Inoltre, per ulteriore derivazione:

$$M''(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -m'(x) + T'(x) = -(m'(x) + q(x))$$

concavità di M(x) nel verso di q(x)



accoppiamento tra azione tagliante e flettente (se c'è taglio, c'è momento)

Casi tipici di interesse:

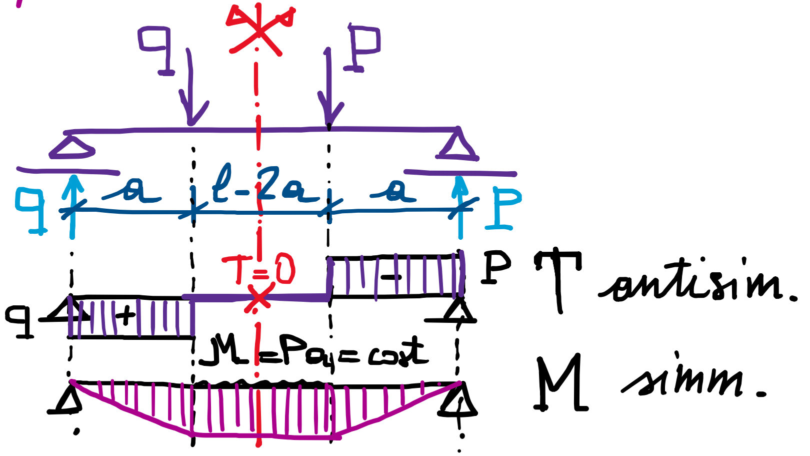
tratto con carico ...	$N(x)$	$T(x)$	$M(x)$
$p=0$ nullo (tratto "scarico")	costante		
$q=0$		costante	lineare*
$m=0$			costante
$p=\text{cost}$ uniformemente distribuito o ripartito	lineare		
$q=\text{cost}$		lineare	quadratico
$m=\text{cost}$			lineare
$p=\text{lin}$ linearmente distribuito	quadratica		
$q=\text{lin}$		quadratico	cubico
$m=\text{lin}$			quadratico

$M'(x) = T(x)$

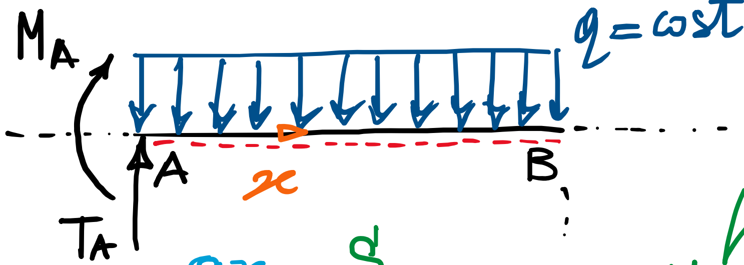
* N.B.: il caso lineare contiene anche il caso costante, come istanza particolare.

Esempio:

Prova di flessione su quattro punti (tratto centrale con pura flessione)



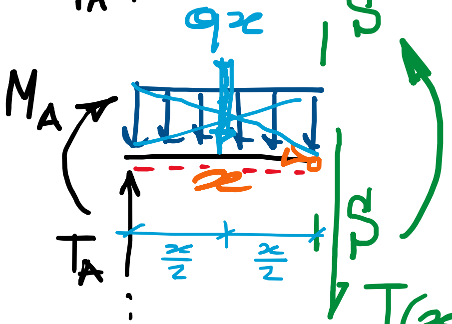
Andamenti di T e M per q = cost (e calcolo di M_{max}):



$q = \text{cost}$ (carico uniformemente ripartito)

Infatti:

$$\overset{m=0}{\boxed{M'(x) = T(x)}} \Rightarrow M' = T_A - \frac{q}{2}2x = T_A - qx = T(x)$$



parabolico

$$M(x) = M_A + T_A x - q\frac{x^2}{2}$$

per equilibrio del tratto Ax

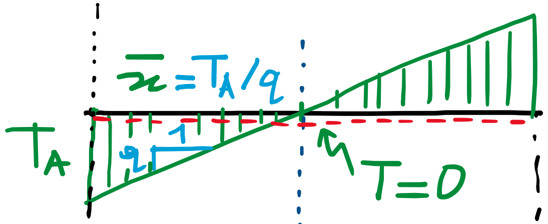
$$\Rightarrow M_{max} = M(\bar{x} = T_A/q) =$$

$$= M_A + T_A\frac{T_A}{q} - \frac{q}{2}\left(\frac{T_A}{q}\right)^2$$

$$= \boxed{M_A + \frac{T_A^2}{2q} = M_{max}}$$

lineare

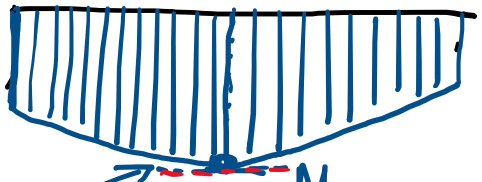
$$T(x) = T_A - qx = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{T_A}{q}}$$



N.B.: M massimo (relativo) ove si annulla il taglio

(tangente orizzontale)

p.to di stazionarietà (max rel.)

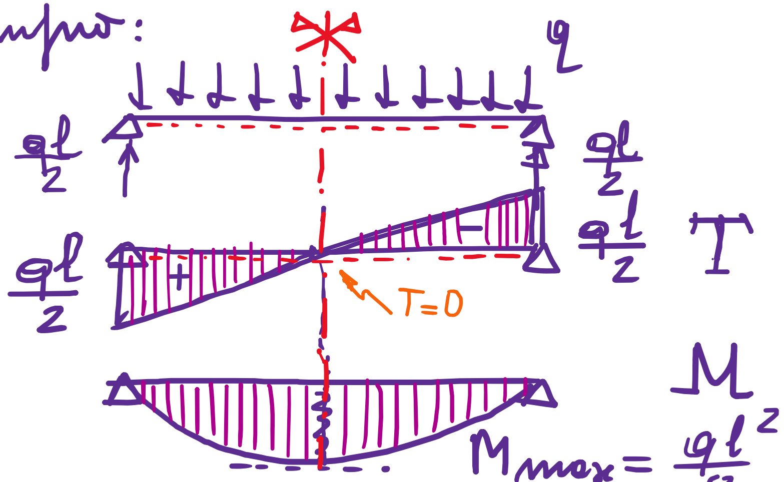


parabola

Concavità di M nel verso di q

$$M_{max} = M_A + \frac{T_A^2}{2q}$$

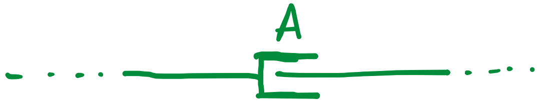
Esempio:



$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

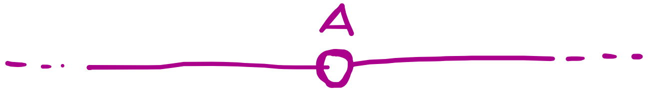
Commenti sulle AI nei sistemi articolati di corpi rigidi

- Relazione tra AI e vincoli (svincoli) presenti



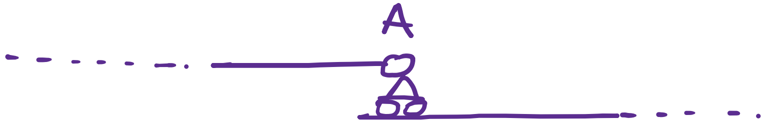
$N_A \equiv 0$! $\begin{pmatrix} T_A \neq 0 \\ M_A \neq 0 \end{pmatrix}$

$T_A \equiv 0$! $\begin{pmatrix} N_A \neq 0 \\ M_A \neq 0 \end{pmatrix}$

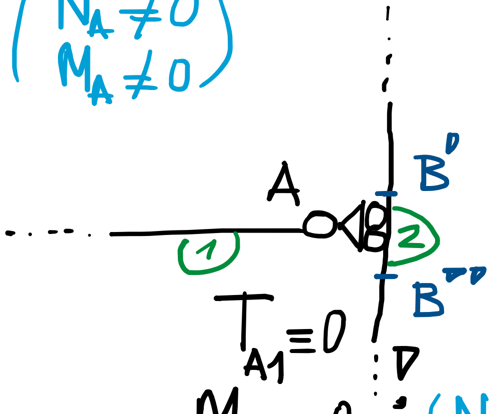


$M_A \equiv 0$! $\begin{pmatrix} N_A \neq 0 \\ T_A \neq 0 \end{pmatrix}$

vincoli doppi (svincoli semplici)



$N_A \equiv 0$, $M_A \equiv 0$! $(T_A \neq 0)$



$T_{A1} \equiv 0$, $M_{A_1} \equiv 0$! $(N_{A1} \neq 0)$

$N_{B'_2} = N_{B''_2}$

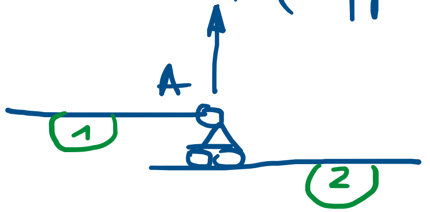
$M_{B'_2} = M_{B''_2}$

$(T_{B'_2} \neq T_{B''_2})$

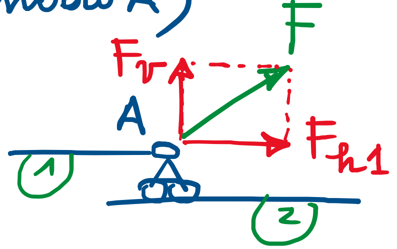
vincoli semplici (svincoli doppi)

- Azioni concentrate ai nodi

F (applicata al nodo A)



$\neq$

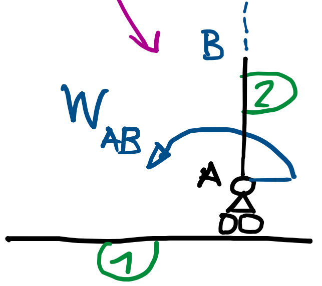


$N_{A1} = F_{h1}$, $N_{A2} \equiv 0$

applicate al nodo A dell'asta 1

- Verifica di tutti gli equilibri nodali!

azioni con componente nella direz. dello svincolo (sconnessione)



$M_{A2} \equiv W_{AB}$

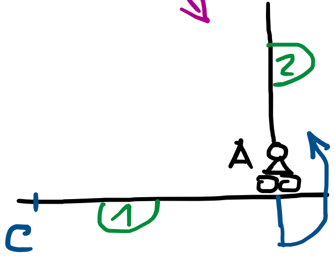
$N_{A1} = 0$

$T_{A2} = 0$

$M_{A1} \equiv 0$

$\neq$

$M_{A2} \equiv 0$



$M_{A1} = W_{AC}$ W_{AC}