

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

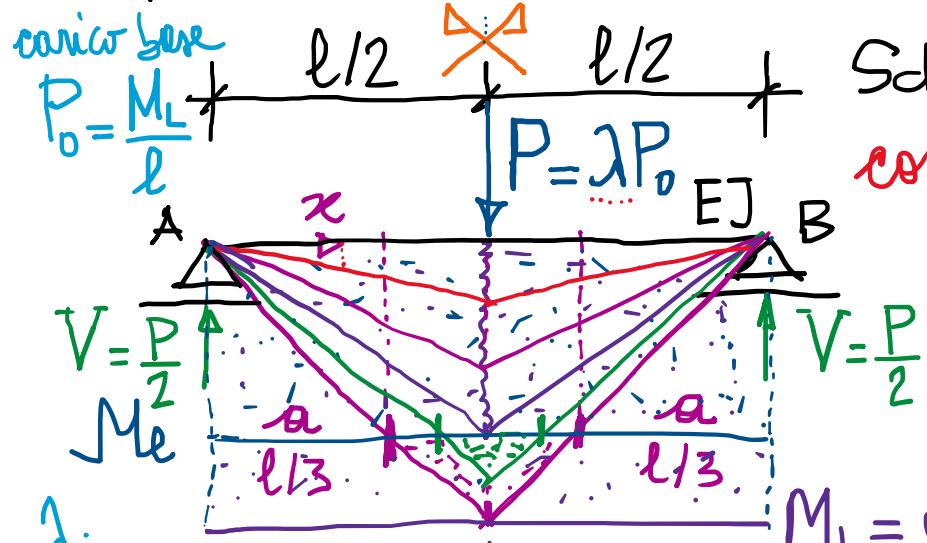
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 24

# Risposta elastoplastica delle trave sino a collasso plastico



λ:

moltiplicatore  
del carico

$$\bar{M}^{\max} = \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

$$= \frac{1}{4} M_L$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{M_L}{M_e}} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x_e}{x} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_e}{x} \right)^2$$

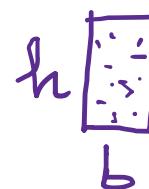
Scheme isostatico (staticamente determinato),  
con distribuzione di  $M$  governata dal solo equilibrio.

$$M(x) = \frac{P}{2} x = \frac{\lambda}{2} M_L \frac{x}{l}$$



$$M_L = \alpha M_e$$

$$= \frac{3}{2} M_e$$



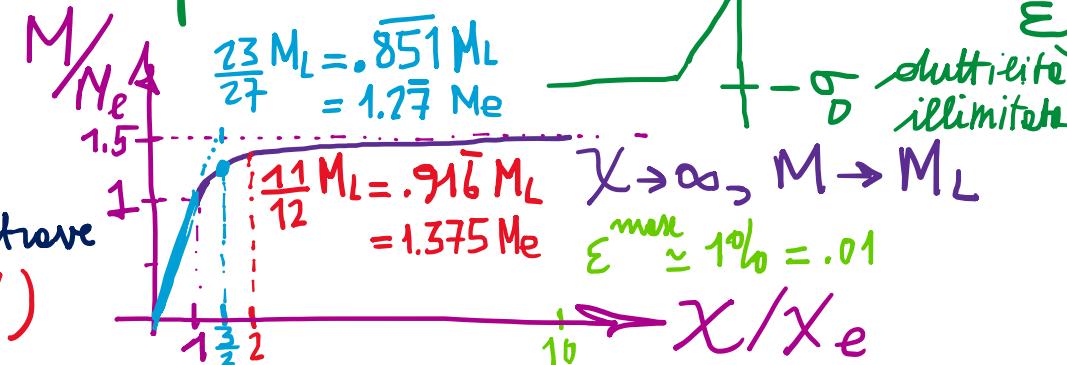
$$\lambda = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\sigma_0 W_p}{\sigma_0 W_e} = \frac{\frac{b h^2}{4}}{\frac{b h^3}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

fattore di forma della sezione trasvers.



- Comportamento del materiale perfettamente elastoplastico

- Comportamento delle sezioni trasversali delle trave (con incrudimento!)



- Regime elastico:  $M(x) \leq M^{\text{max}} \leq M_e = \frac{2}{3} M_L$   
 $\frac{1}{4} M_L \leq \frac{2}{3} M_L \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq \lambda_e = \frac{8}{3}$  limite elastico
- Regime elasto-plastico:  
 limitato da condizione  
 di collasso plastico  $\lambda = \lambda_L = 4$ ,  
 oltre la quale non è più possibile  
 far crescere il carico esterno (e quindi  $M^{\text{max}}$  oltre  $M_L$ ). (plastico)

### - Estensione zone plasticizzate:

$$\frac{P}{2}a = M_e \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{M_L}{l} a = \frac{2}{3} \frac{M_L}{l} \Rightarrow a = \frac{4}{3\lambda} l = \frac{l}{\frac{3\lambda}{4}}$$

(in realtà  $r \rightarrow 0$   
 solo per sezioni  
 molto vicine alle sezioni di mezzeria,  
 ove si localizzano i fenomeni plastici principali)

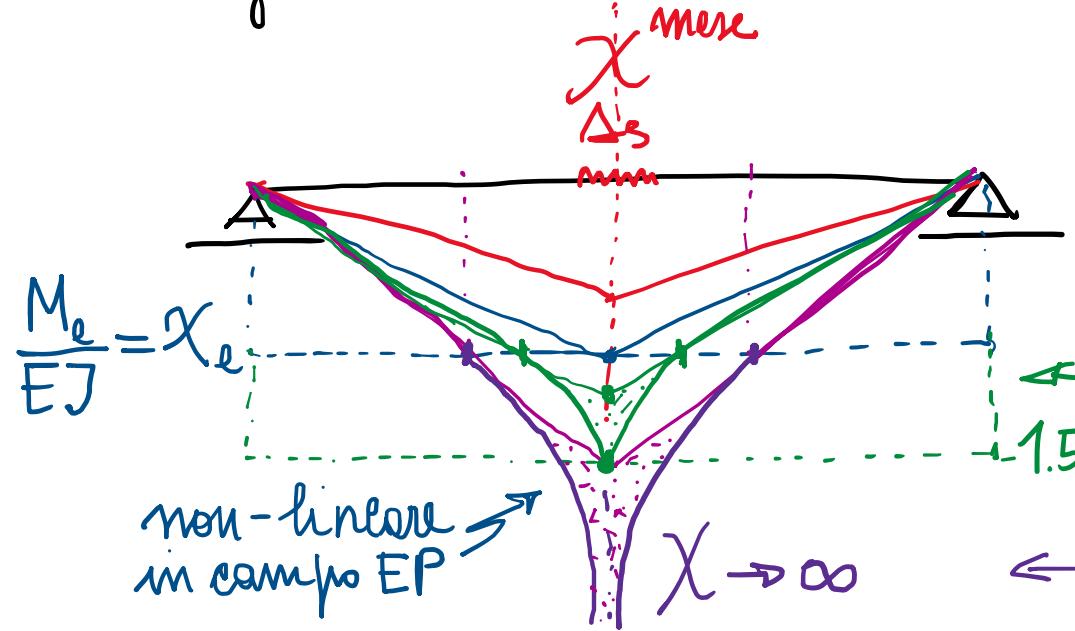
r: semialtezza  
 del "core" elastico

$\lambda_L = 4$

zone plasticica con deformazioni plastiche, estesa ad un terzo dello spessore

- Diagramme di curvatura  $\chi(x)$ : A limite elastico

$$\begin{aligned} M_{\text{max}}^{\text{max}} &= M_e \Rightarrow \lambda = \lambda_e = \frac{\delta}{3} \\ \chi^{\text{max}} &= \chi_e = \frac{M_e}{EJ} \end{aligned}$$



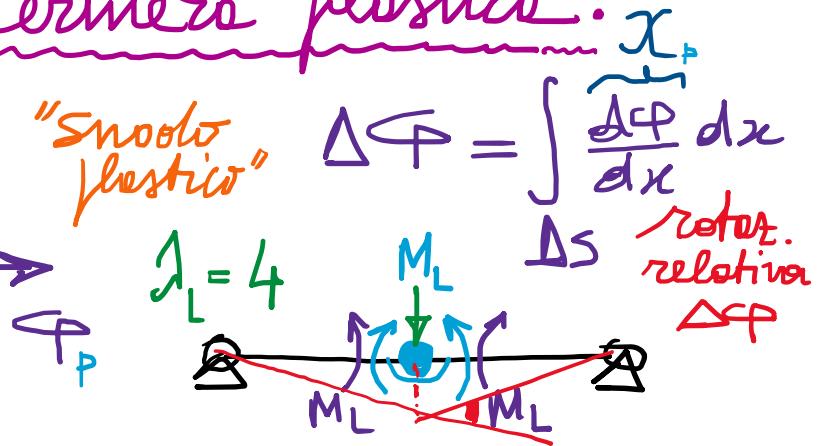
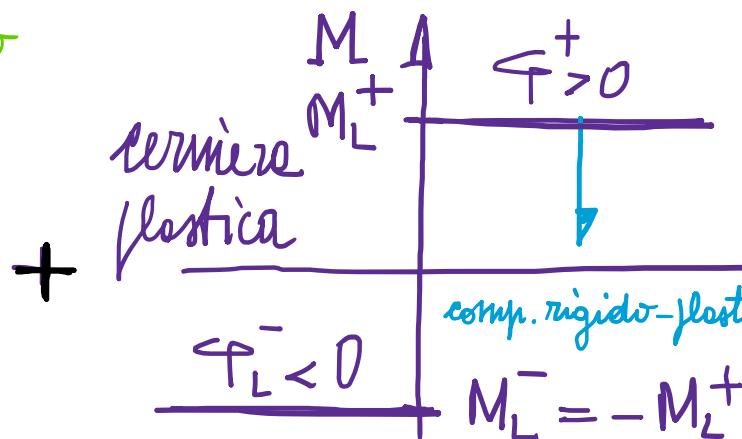
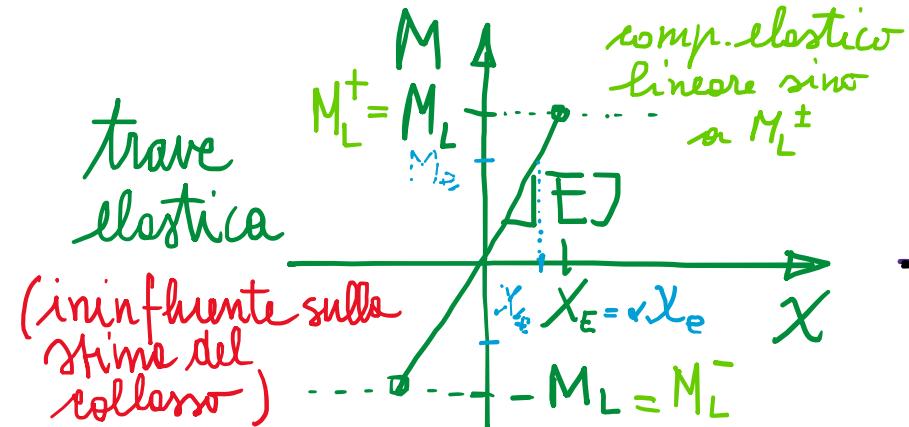
- $\chi$  lineare in campo elastico  $\lambda \leq \frac{8}{3}$

$$\leftrightarrow M^{\text{max}} = \frac{23}{27} M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} = \frac{3}{2}$$

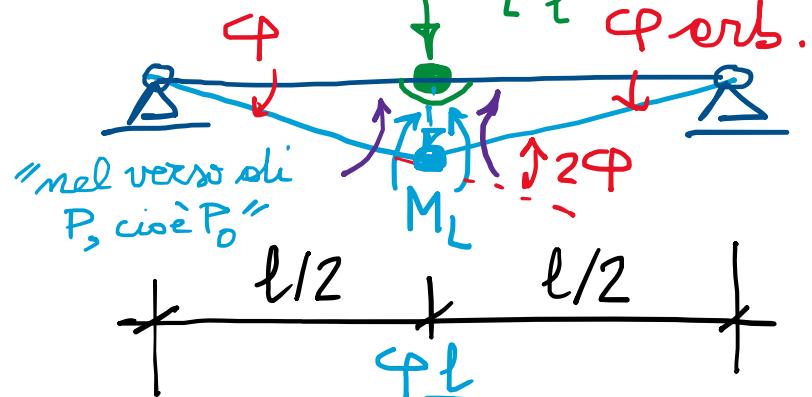
$$\leftrightarrow M^{\text{max}} = M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} \rightarrow \infty$$

Ai fini di cogliere la situazione a collasso ( $\lambda_L$ )

N.B. Le sezioni che producono elevate curvature (plastiche) risultano concentrate in prossimità delle mezzerie delle trave  $\Rightarrow$  Ipotesi semplificativa di "cermiera plastica":



Mecanismo di collasso (plastico) : situazione di collasso incipiente  
 "di trave" |  $\sum \frac{M_L}{P} = P$  (equilibrio limite)



(saw a  
tree  
ceramic  
elliptical)

$\frac{1}{2}$

$J_L = \frac{D}{l_0} = 4$

$$-^5 \quad \left( F_{l0} = P_0 + \frac{1}{2} > 0 \right)$$

lavoro esterno del  
cerchio base

$(\sum_{i=0}^n P_i \frac{q_i l}{2} > 0)$  lavoro plastico interno  
 lavoro esterno del cerchio base

$$\Delta_e = P + \frac{P_0}{\rho g}$$

$$A_2 = P + \frac{l}{2} = A_i$$

$$- M_L 2 \varphi = 0$$

$$\overbrace{I_L}^{\text{~~~~~}} = 4$$

come preced.  
determinato

$$D = M_L 2\varphi > 0$$

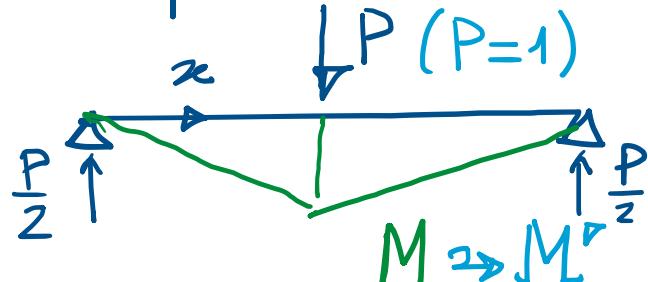
L dissipazione  
plastica

plastico interno  
sulle serrature plastico

NB: Nell'ip. di ernieplastica, il moltiplicatore di collasso risulta facilmente individuabile tramite PLV, coerentemente col meccanismo di collasso plastico che si vede e manifestare -

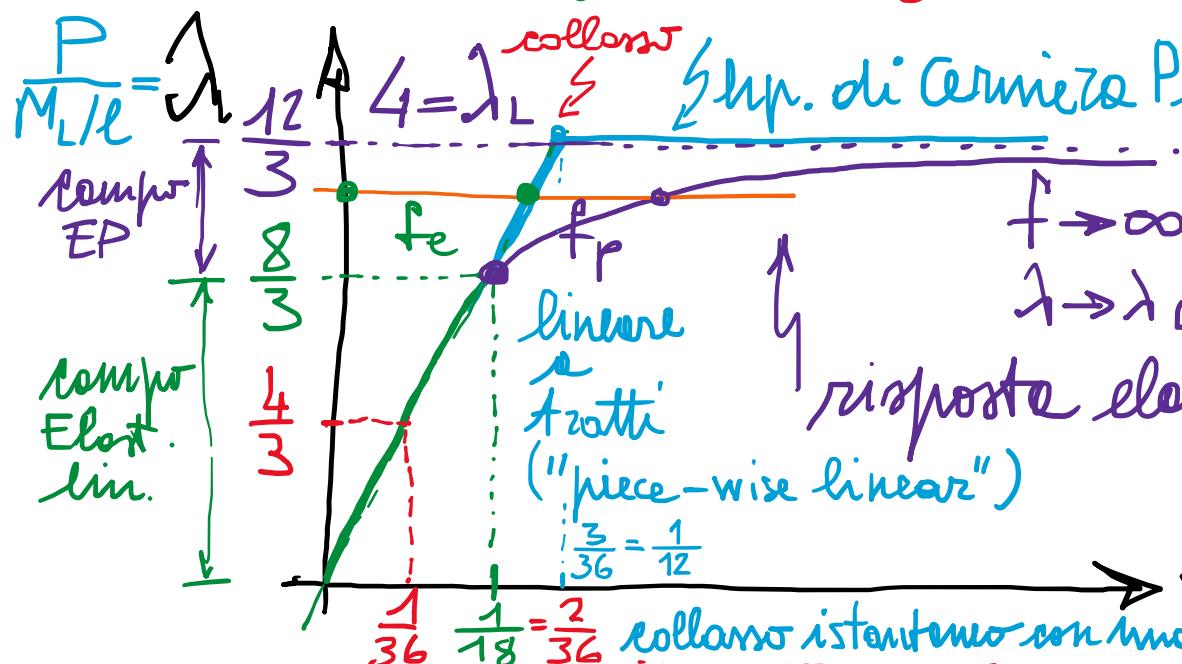
# Risposte elasto-plastiche effettive delle trave (non-lin.):

- Campo elastico :



$$f_e^{\text{max}} = \frac{f_e}{M_{LL} l^2} = \frac{8}{3} \frac{1}{48} = \frac{1}{18}$$

frecce normalizzate



$f_e$  freccia elastica (spost. in mezzerie)

$$\text{PLV: } 1 f_e = \int_{\text{campo}} M \frac{M}{EJ} dx$$

$$\text{campo elastico} \quad J \leq \frac{8}{3}$$

$$= \frac{P}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx$$

$$= \frac{P}{EJ} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{l}{2}}$$

spost. max  $EJ$

$$f_e = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$= \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{48} \left( \frac{M_{LL} l^2}{EJ} \right)$$

Sup. di Cerniere Plastiche ( $C_P$ )

Diagramma forze / spostamento sullo  
trave ( $P-\Delta$ ) [moltiplicatore / frecce]

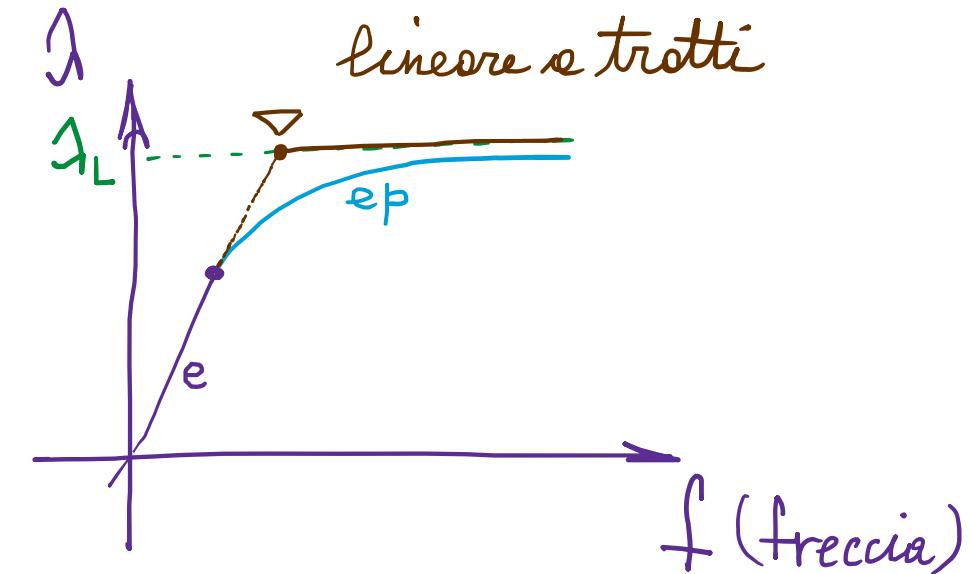
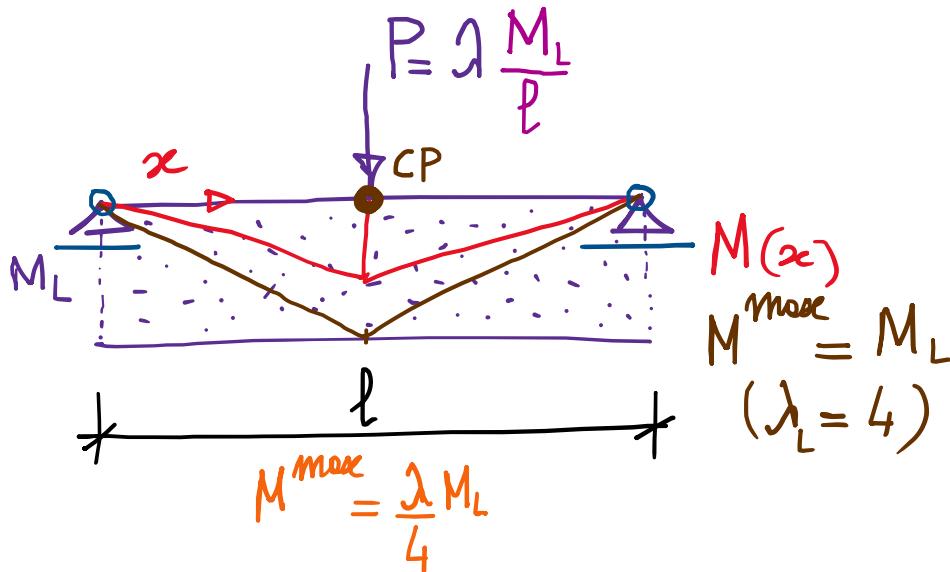
risposta elasto-plastica non-lineare

$$\bar{f} = f / \left( \frac{M_{LL} l^2}{EJ} \right)$$

NB: Con cerniere plastiche,  
sottostima delle deformaz.  
globali ma valutat. corrette  
di  $\Delta_L$ .

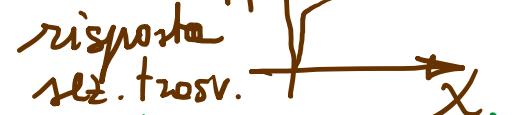
## Concetti fondamentali :

- Passaggio alle scie strutturale dell'intera trave  $\Rightarrow$  curva forza/spostamento, in campo elastoflessivo delle strutture -
- Riferimento a caso semplice, di trave isostatica appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria :



- Ipotesi di formazione di "cerniere plastiche" in determinate sezione ove si registra una "localizzazione delle deformazioni plastiche".

# SOMMARIO (Lec. 24)

- Risposte elasto-plastiche delle trave (fino al collasso plastico). Dopo: 
- Analisi di sistemi isostatici (trave appoggio-appoggio con carico concentr. in metteria).
- Momento netto per puro equilibrio  $\Rightarrow$  curvatura da legge costitutiva.
- Concentrazione curvatura (plastiche) in mezzerie  $\Rightarrow$  ipotesi di cerniere plastiche e schematizzazione semplificata per stime del collasso.
- Mecanismo di collasso plastico e stime del moltiplicatore di collasso  $\lambda_L$  da bilancio energetico (PLV).
- Curva P-Δ<sub>s</sub> forza/spostamento (moltiplicatore/frecce) non-lineare da reale risposta elasto-plastica, con approssimazione lineare a tratti (piece-wise linear) nell'hyp. di cerniere plastiche (utile alle stime di  $\lambda_L$ ).

Next step: Schema iperstatico (trave ricostruita)  $\Rightarrow$  ulteriori risorse elasto-plastiche da ridistribuzione di sforzo, con sviluppo di deformazioni plastiche - Risposta evolutiva (lineare a tratti) con sequenze di attivazione delle cern. plast.

