Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

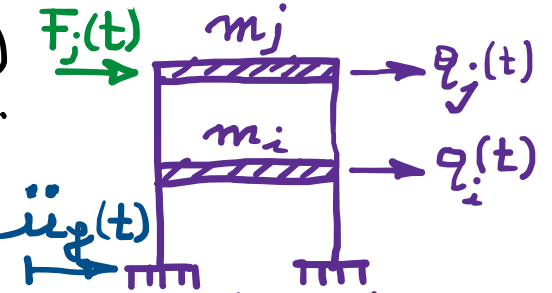
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

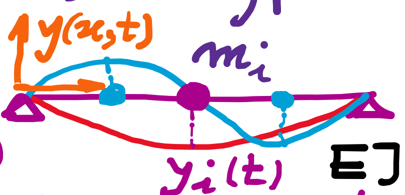
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 11

Sistemi dinamici discreti a più gradi di libertà (MDOF)

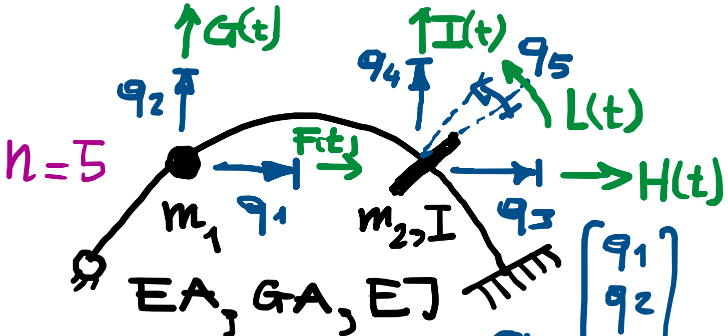


- Generalizzazione dei sistemi SDOF
- Rappresentativi di sistemi reali
  - intrinsecamente discreti
  - sistemi continui "discretizzati": ∞ gdl $\rightarrow$ n gdl; lumped mass (masse concentrate)

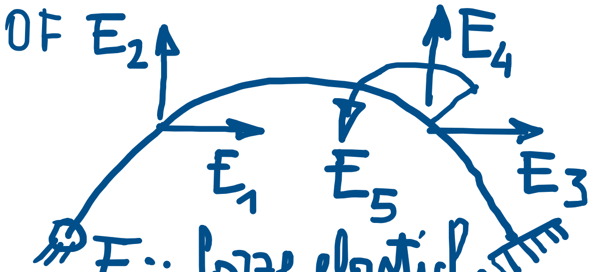


+ Impostazione generale per un sistema strutturale elastico lineare (non smorzato):

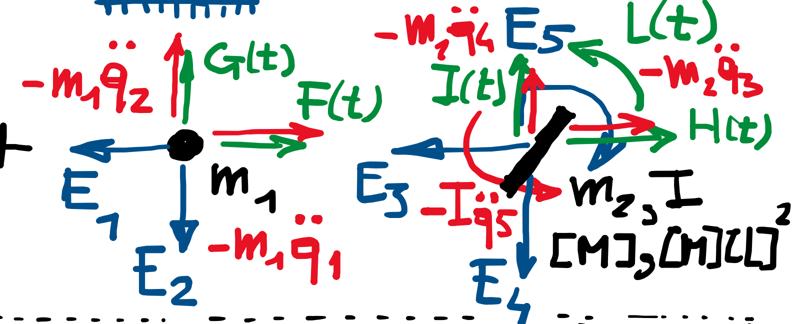
SDOF



MDOF



$\Rightarrow$ +



$$\underset{n\times 1}{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \underset{n\times 1}{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{Bmatrix}$$

vettore dei gdl dinamici del sist.

applicate staticamente alla struttura producono spostamenti elastici q_i

vettore delle forze elastiche $E_i(q_j)$

Generalizzazione (Legge di Hooke):

$$\mathbf{E} = \mathbb{K}\mathbf{q} \Leftrightarrow E_i = \sum_j K_{ij}\, q_j$$

matrice di rigidezza $n \times n$ — coefficienti di rigidezza (n^2)

K_{ij} = Forza elastica in i per spostamento unitario in j

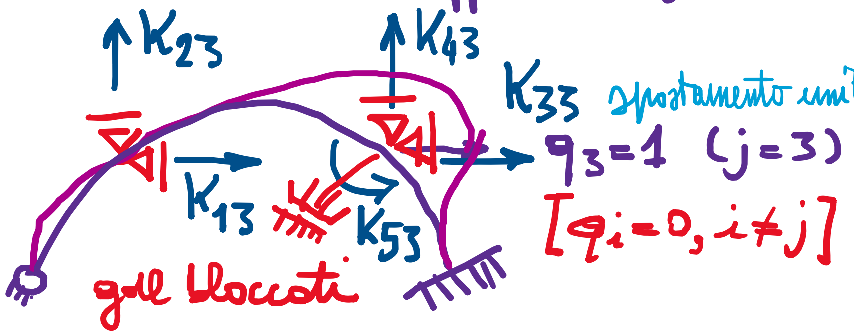
Equazioni del moto (d'Alembert)

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + E_1 = F(t) \\ m_1\ddot{q}_2 + E_2 = G(t) \\ m_2\ddot{q}_3 + E_3 = H(t) \\ m_2\ddot{q}_4 + E_4 = I(t) \\ I\,\ddot{q}_5 + E_5 = L(t) \end{cases}$$

n = 5 n° dei gdl

"equilibrio dinamico" del sist.

Illustrazione dei coeff. di rigidezza (vedi "metodo degli spostamenti")



$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_n \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nj} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{E} = \mathbb{K}\, q$$

($q_j = 1$ sopra la colonna j)

$n \times 1$ $\quad n \times n$ $\quad n \times 1$

matrice di rigidezza $\to \mathbb{K}$

$(q = \mathbb{K}^{-1} \mathbb{E})$

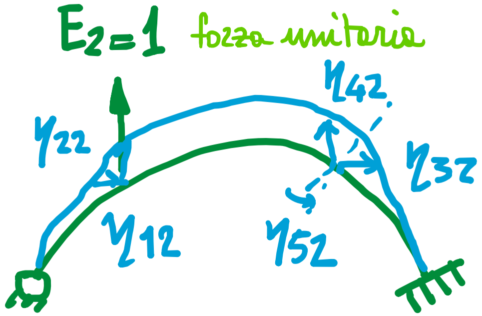
Visione duale ("metodo delle forze")

Matrice di cedevolezza:

$$q = \eta\, \mathbb{E} \Rightarrow \eta = \mathbb{K}^{-1} ; \quad \mathbb{K} = \eta^{-1}$$

$$q_i = \sum_j \eta_{ij}\, E_j$$

coeff. di influenza: spostamenti in i per effetto di forza unitaria in j



Energia elastica (def. positiva)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbb{E}^T q = \frac{1}{2} q^T \mathbb{E} = \frac{1}{2} E_i\, q_i$$

forma quadratica associata a η o $\mathbb{K}$

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}^T \eta\, \mathbb{E} = \frac{1}{2} q^T \mathbb{K}\, q > 0 \quad \forall\ q \neq 0,\ \mathbb{E} \neq 0$$

(di reciprocità) forme quadratiche def. pos.

Th. di Maxwell (v. PLV) $\boxed{\eta_{ji} = \eta_{ij}}$; $K_{ji} = K_{ij}$

matrici simmetriche e def. pos.

- **Forze di inerzia**

$$-\mathbb{F}_I = \mathbb{M}\, \ddot{q} \Leftrightarrow -F_{I_i} = M_{ij}\, \ddot{q}_j$$

$\mathbb{M}$: matrice di massa (d'inerzia)

$-F_{I_i}$: forza in i per effetto di acceleraz. unitaria in j

forma quadratica associata a $\mathbb{M}$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbb{M}\, \dot{q} > 0 \quad \forall\ \dot{q} \neq 0$$

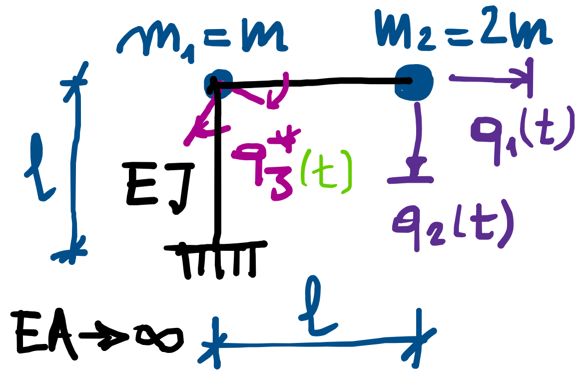
$$\left(P = \frac{dT(\dot{q})}{dt}\right) \qquad M_{ji} = M_{ij} \ \text{(in generale non diagonale)}$$

- Eq.ni del moto (matriciale)

$$\text{e.i. } q_0, \dot{q}_0 \ + \ \boxed{\mathbb{M}\, \ddot{q} + \mathbb{K}\, q(t) = Q(t)}$$

(vedi eq.ni di Lagrange)

Esempio di struttura con due gdl dinamici (e un gdl "statico")



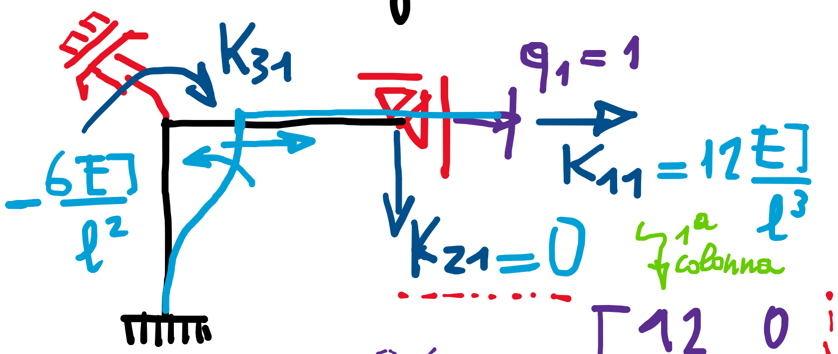
- gdl "dinamici": individuano la posizione delle masse del sistema (utili a definire la matrice di massa) ← equil. dinamico (d'Alembert)
  cioè l'energia cinetica / le forze d'inerzia
  ← Eq.ni di Lagrange
- gdl "statici": eventualmente utili ad esprimere la risposta elastica (matrice di rigidezza/cedevolezza).
  cioè l'energia elastica

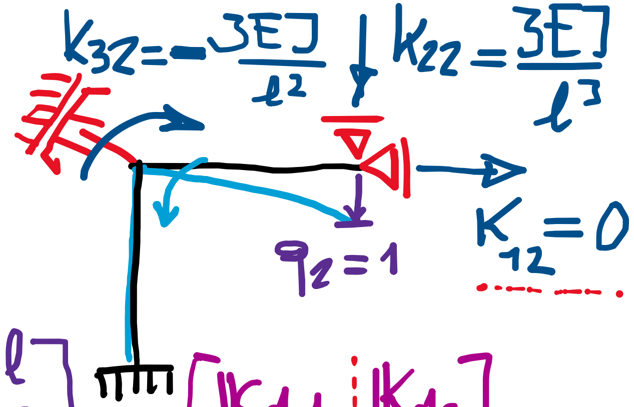
- Energia cinetica:

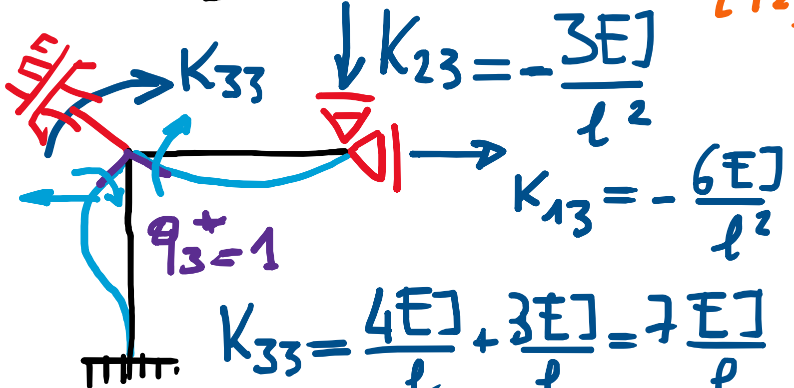
$$T = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{3m}_{m_1+m_2}\dot{q}_1^2 + \underbrace{2m}_{m_2}\dot{q}_2^2\Big] = \frac{1}{2}m\left[3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2\right] = \frac{1}{2}\{\dot{q}_1\ \dot{q}_2\}\ \underbrace{m\overset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}_{\mathbb{M}} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbb{M}\, \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

- Matrice di rigidezza [3×3]







$$K_{33} = \frac{4EJ}{\ell} + \frac{3EJ}{\ell} = 7\frac{EJ}{\ell}$$

compilata per colonne

$$\underset{3\times 3}{\mathbb{K}} = \frac{EJ}{\ell^3}\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 0 & -6\ell \\ 0 & 3 & -3\ell \\ \hline -6\ell & -3\ell & 7\ell^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{2\times 2}{\mathbb{K}_{dd}} & \underset{2\times 1}{\mathbb{K}_{ds}} \\ \hline \underset{1\times 2}{\mathbb{K}_{sd}} & \underset{1\times 1}{\mathbb{K}_{ss}} \end{array}\right] \Rightarrow \underset{(2\times 2)}{\mathbb{K}^*_{dd}} = \frac{6}{7}\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \underset{2\times 2}{\mathbb{K}}$$

Condensazione "statica" (dei gdl "statici").

$$\mathbb{E} = \begin{Bmatrix} \mathbb{E}_d \\ \mathbb{E}_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} \mathbb{K}_{dd} & \mathbb{K}_{ds} \\ \hdashline \mathbb{K}_{sd} & \mathbb{K}_{ss} \end{array}\right]}_{\mathbb{K}} \begin{Bmatrix} q_d \\ q_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}_d = \mathbb{K}_{dd}\, q_d + \mathbb{K}_{ds}\, q_s \\ \mathbb{E}_s = \mathbb{K}_{sd}\, q_d + \mathbb{K}_{ss}\, q_s \end{cases}$$

eliminazione ("condensazione") di q_s

$$q_s^{(t)} = -\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\, q_d^{(t)} + \mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s \Rightarrow q_s\left(q_d^{(t)}\right)$$

inversione da eseguire

$$\mathbb{E}_d = \underbrace{\left(\mathbb{K}_{dd} - \mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\right)}_{\mathbb{K}'_{dd}} q_d + \mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}_d - \mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s}_{\mathbb{E}'_d} = \mathbb{K}'_{dd}\, q_d$$

$\mathbb{K}'_{dd}$ matrice di rigidezza condensata (o efficace)

$\mathbb{E}'_d$ forze elastiche condensate (o efficaci)

- Visione duale tramite matrice di cedevolezza (2×2 o 3×3).

Determinazione di $\underset{3\times3}{\tilde{\mathbb{K}}} = \underset{3\times3}{\tilde{\eta}^{-1}}$; $\underset{2\times2}{\mathbb{K}} = \mathbb{K}'_{dd} = \eta_{2\times2}^{-1}$

Imposizione di forze unitarie $E_j = 1 \Rightarrow \eta_{ij}$ spost. in corrisp. dei q_i.

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{6}\frac{\ell^3}{EJ}\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & \frac{3}{\ell} \\ 3 & 8 & \frac{6}{\ell} \\ \hdashline \frac{3}{\ell} & \frac{6}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} \end{array}\right]$$

2×2 $\rightarrow \underset{2\times2}{\left(\eta'_{dd}\right)^{-1}} = \underset{2\times2}{\mathbb{K}'_{dd}} = \mathbb{K}$; $\underset{3\times3}{\tilde{\eta}^{-1}} = \underset{3\times3}{\tilde{\mathbb{K}}}$ come preced. determinato

$\mathbb{K}$ finale 2×2

Concetti fondamentali:

Degree Of Freedom

- Passaggio SDOF (L Single) → MDOF (L Multiple) systems ⇒

sistemi dinamici discreti a più gdl

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + K u(t) = F(t)$$

equazione del moto $(n=1)$

notazione/calcolo matriciale

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t)$$

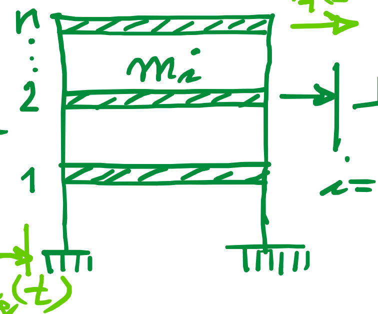
equazioni del moto (n)

Vettori $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \{\ddot{q}_i(t)\}$; $\mathbf{Q}(t) = \{Q_i(t)\}$

Matrici $\mathbb{M}, \mathbb{C}, \mathbb{K}$ di massa, smorz., rigidezza.
o inerzia

- sistemi "naturalmente" dotati di più gdl dinamici (in numero discreto, cioè finito): n

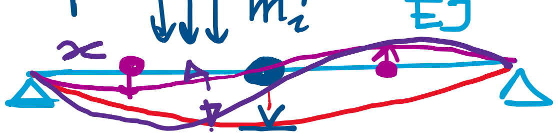
sistema a masse concentrate ("lumped mass")



$i = 1, 2, \dots n$ ∠ coordin. lagrangiane

telaio "shear-type" (gdl dinamici)

- Sistemi continui, trattati in modo approssimato (tramite "modellazione"):



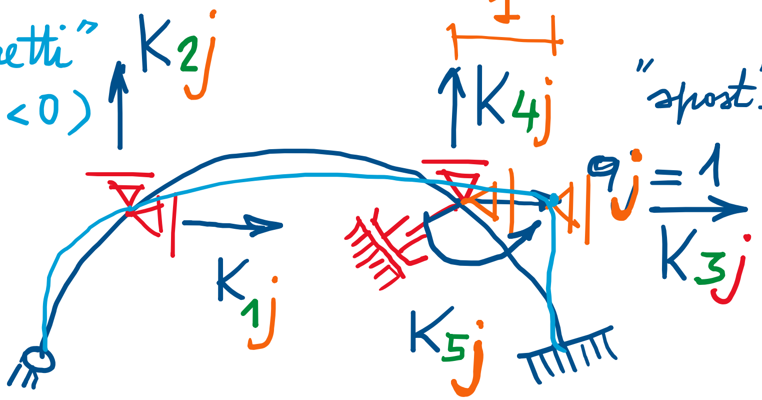
sist. continui $y(x, t_k)$ ∞ gdl

sist. discreti $y_i(x_i, t_k)$ n gdl

"discretizzazione"

– Matrice di rigidezza: (elastica lineare)

coeff. "indiretti" (possono essere < 0)



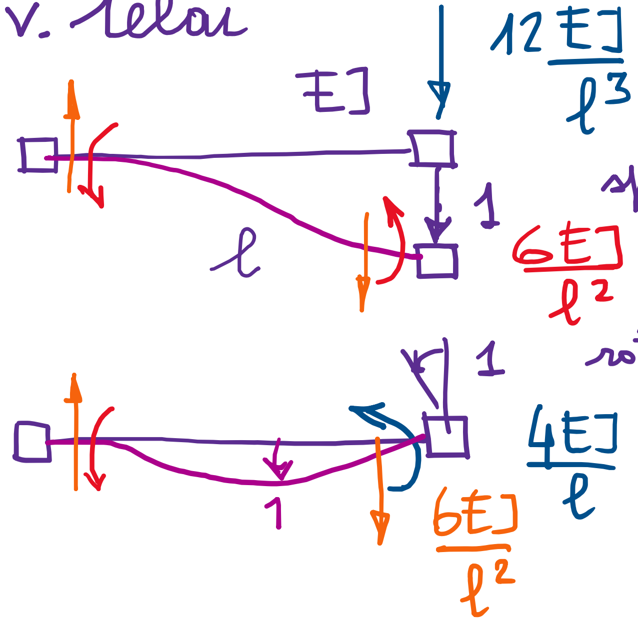
coeff. "diretto" (è > 0)

coefficienti di rigidezza K_{ij}

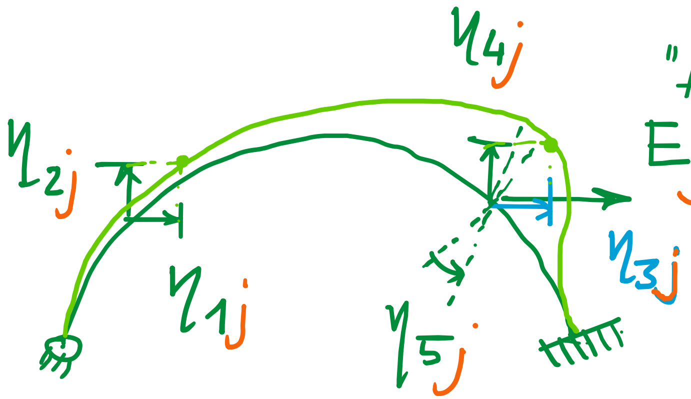
v. "metodo degli spostamenti"

esempio (coeff. codificati)

v. telai

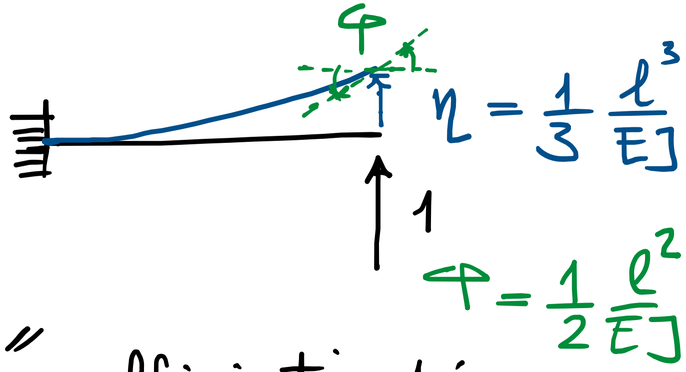


– Matrice di cedevolezza:



coefficienti di cedevolezza η_{ij}

v. "metodo delle forze"



"coefficienti di influenza"

SOMMARIO (Lez. 11)

- Sistemi dinamici a più gradi di libertà (MDOF).
- Matrice di rigidezza/cedevolezza; energia elastica (def. pos.). $\mathcal{E} \stackrel{\text{en. potenz.}}{=} V$
- Matrice di massa (inerzia); energia cinetica (def. pos.) T. $\mathcal{L} = T - \mathcal{E}$
- Equazioni del moto (princ. di d'Alembert – "eq. dinamico"; eq.ni di Lagrange).

— o —

- Esempio di telaio con due gdl dinamici e un gdl "statico".
- Condensazione statica, e definire la matrice di rigidezza associata ai soli gdl dinamici.
- Scrittura della matrice di rigidezza/di cedevolezza (m. spost./forze).

Next step: Modi principali di vibrare (oscillazioni libere del sistema MDOF).