

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

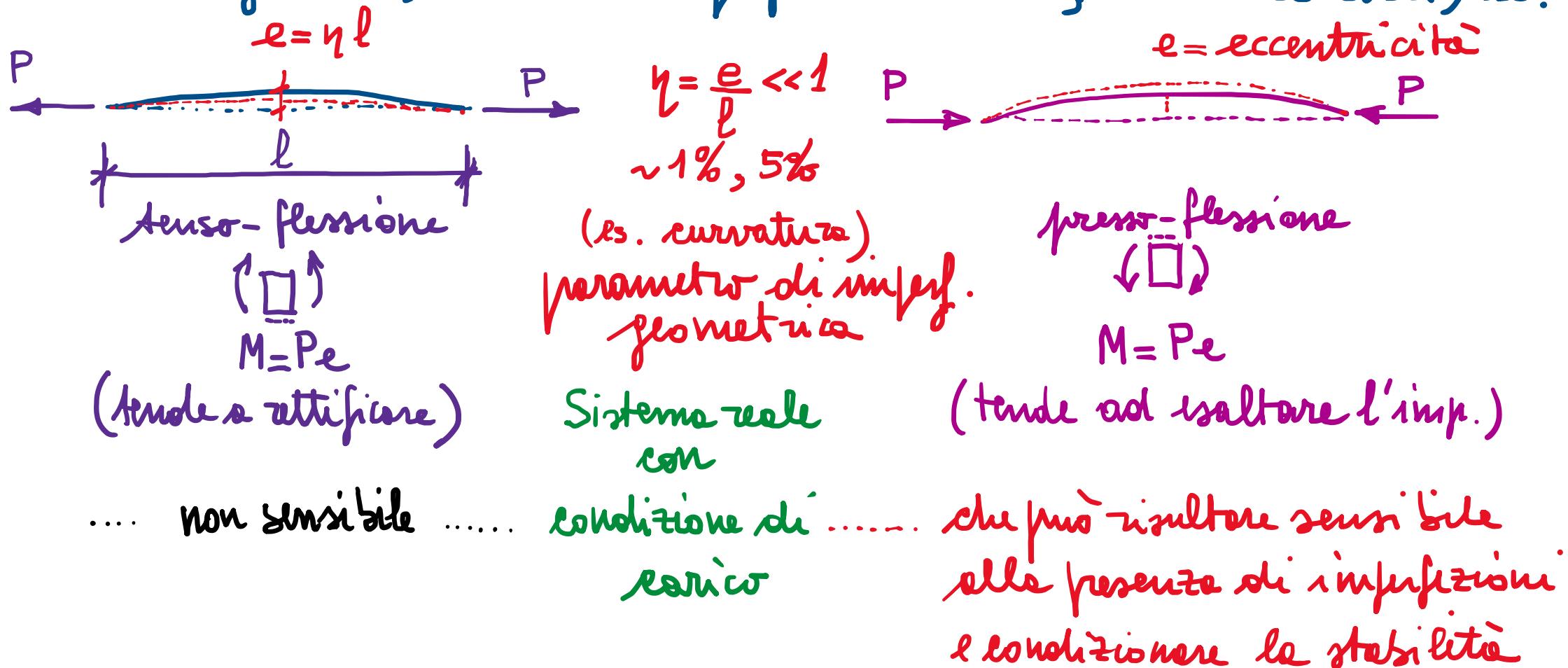
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 18

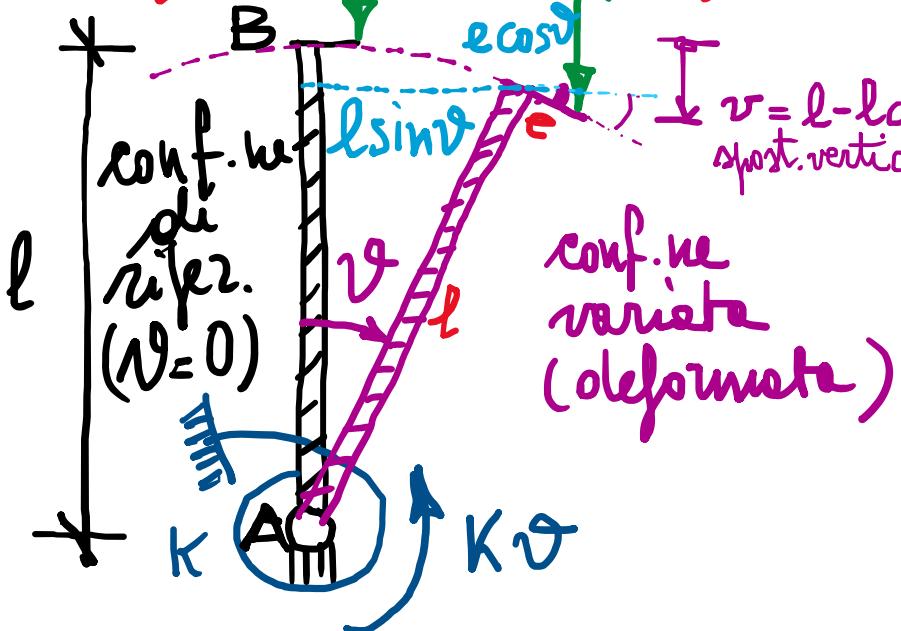
Instabilità di sistemi reali (effetto delle imperfezioni)

- Sistemi reali possono generalmente manifestare imperfezioni: astre non perfettamente rettilinee, sezione trasversale non omogenee, materiale con difetti e disomogeneità, carico non perfett. centrato, nichil cedevoli, ecc.



Esempio SDOF con imperfezione (eccentricità del carico di compressione).

$$e = \eta l + P > 0 \quad \eta = 5\%$$



$$P = p \frac{K}{l}$$

carico base
 $P_0 = P_{cr}$
L' moltiplicatore
del carico

(caso partic.) $\eta = 0 \Rightarrow$ sist. ideale

$$\mu(v) = \frac{v}{\sin v}$$

Approssimazione statica: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate.

$$e = 0 \text{ sist. ideale}$$

$$P(l \sin \vartheta + e \cos \vartheta) = K v$$

effetto destabilizz.
(momento ribaltante) effetto stabilizz.
(momento elastico)

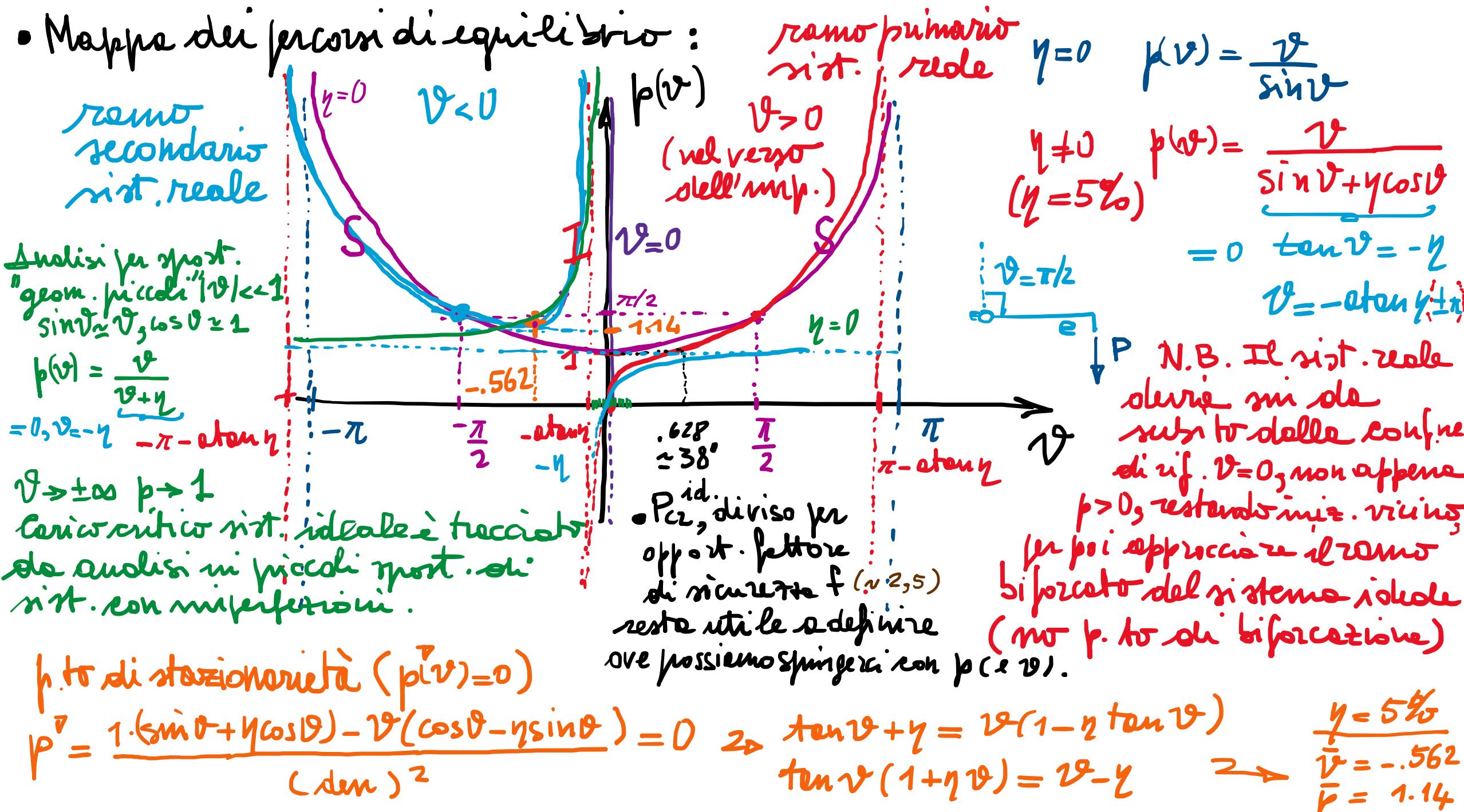
N.B. Se $e \neq 0$ ($\eta \neq 0$), $\vartheta = 0$ è conf. ne di equil.
solo per $P=0$ ($P_e=0$).

$$\frac{Pl}{K} (\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = v$$

equazione di equilibrio
non-lineare, in ϑ

$$p(v) = \frac{v}{\sin v + \eta \cos v}$$

risposta $P-\Delta$ non-lineare
(non-linearità geometrica)



Approccio energetico

EPT $\tilde{V}(\vartheta) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - P(l - l \cos \vartheta + e \sin \vartheta)$ $\Rightarrow e = \eta l$

Energia Potenziale Totale $\tilde{V} = K > 0$

$\frac{d}{d\vartheta}$

spost. verticale \approx $\tilde{V}_e = \Sigma$ elastiche $\tilde{V}_f = -\Sigma$ forze esterne conservative

condiz. staz. (CN di equil.)

$$\tilde{V}(\vartheta) = K \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 - p(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) \right) = 0 \Rightarrow p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

equazione non-lineare

$$\frac{d}{d\vartheta}$$

$$\tilde{V}'(\vartheta) = K(1 - p(\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta))$$

nelle config. in equil.

$$p = \bar{p} \quad \tilde{V}'(\vartheta) = K \left(1 - \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta} (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) \right)$$

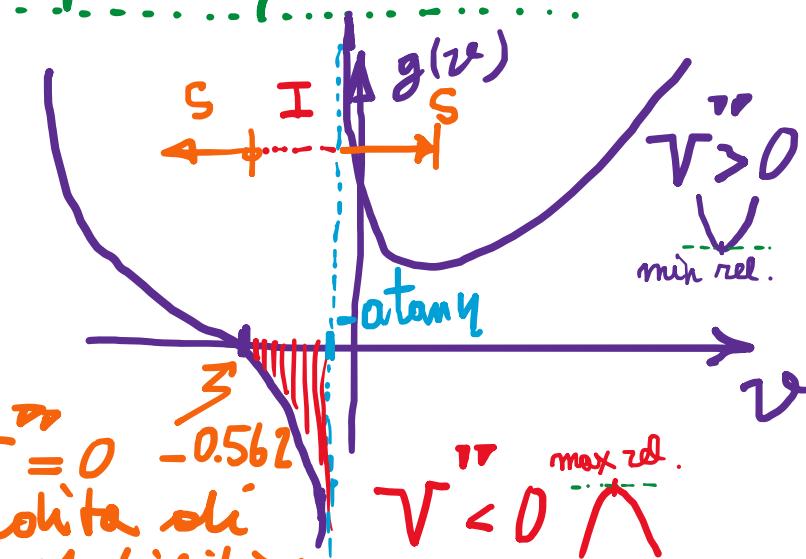
$$= K \left[1 - \vartheta \frac{1 - \eta \tan \vartheta}{\tan \vartheta + \eta} \right]$$

$$g(\vartheta)$$

$$\tilde{V}' = 0 \Rightarrow g(\vartheta) = 0 \Rightarrow \tan \vartheta + \eta = \vartheta(1 - \eta \tan \vartheta)$$

$$(1 + \eta \vartheta) \tan \vartheta = \vartheta - \eta$$

config. in equilibrio



$\tilde{V}' = 0$ (perdita di stabilità)

$\tilde{V}'' < 0$ ^{max rel.}

Studio del segno di \tilde{V}'' (Th. di Dirichlet, CS di stabilità)

- Anelini in spostamenti "geometricamente piccoli": "quadraticizzazione"

$$V \approx V_2(v) = \frac{1}{2} K v^2 - P \left(l - l \left(1 - \frac{v^2}{2} + \dots \right) + e \left(v + \dots \right) \right)$$

di V

oppo x. el 2° ord.

$$= \frac{1}{2} K v^2 - P l \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) = K \left(\frac{1}{2} v^2 - p \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) \right)$$

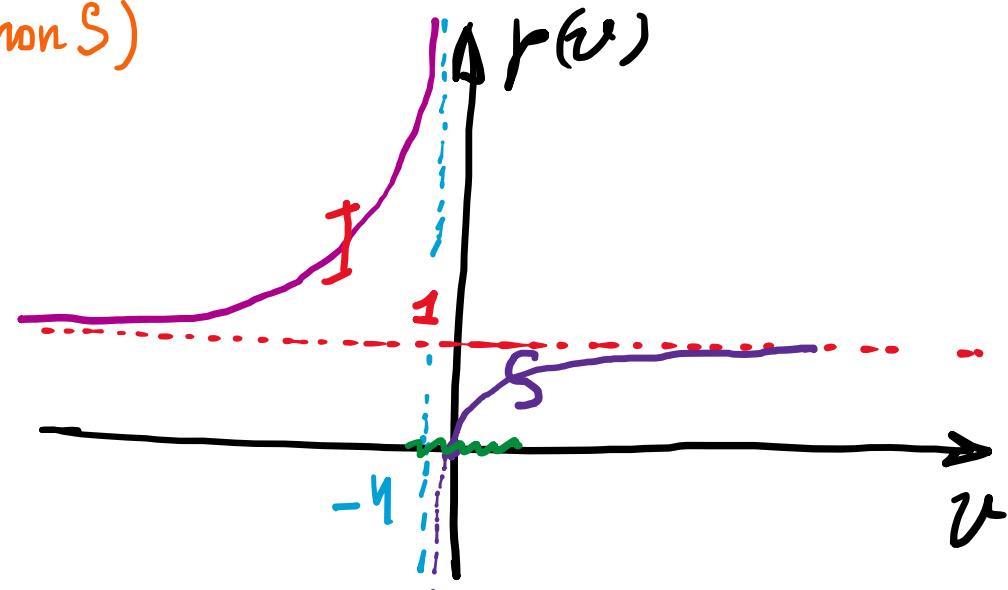
$$V_2(v) = K \left(\vartheta - p(v + \gamma) \right) = 0 \Rightarrow p(v) = \frac{v}{v + \gamma}$$

"linearizzazione" delle eq. di equilibrio

$$V_2'(v) = K (1 - p) \begin{cases} > 0 & p < 1 \quad S \\ = 0 & p = 1 \quad \text{condiz. critica di pericolosità di stabilità} \\ < 0 & p > 1 \quad I \ (\text{non } S) \end{cases}$$

Come per anelini di rist. ideale privo di imperf.

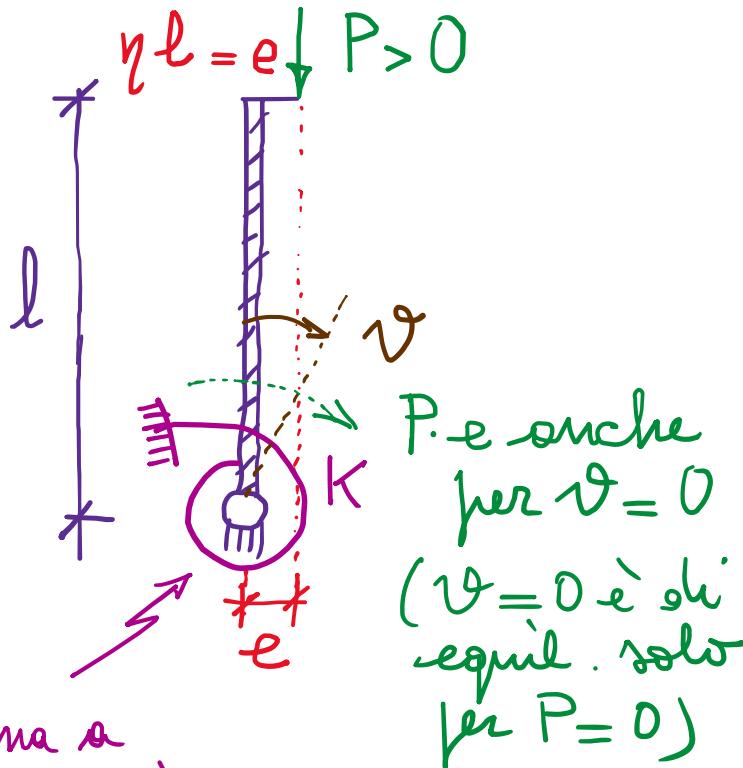
(derivate seconde di V_2 costante, a destra valore del carico P)



Concetti fondamentali :

- Sistemi ideali : improvvisa perdita di stabilità (della configurazione di equilibrio) per $P = P_{cr}$ (sistema stabile per $P < P_{cr}$) \Rightarrow p.to di "biforcazione" dei percorsi di equilibrio, alias transizione discontinua stabile/instabile (al crescere del carico P).
- Sistemi reali : dotati di imperfezioni \Rightarrow attesa una transizione continua del sistema al crescere del carico, con deformazione "pendente" della perte dell'imperfezione presente, non appena $P \neq 0$ ($P > 0$), e di entità crescente, al crescere del carico P stesso \Rightarrow assenza di un punto di biforcazione.

- Analisi per esempio SDOF:



sistema a deformabilità elastica concentrata ("molla", elastica lineare)

- approccio statico: equazione di equilibrio nella configurazione deformata.
- approccio energetico: scrivere dell'EPT V e applicazione delle CS di stabilità (Th. di Dirichlet)

[per spostamenti "geometricamente grandi" e "piccoli"]

→ eq. m. di equilibrio linearizzate + EPT "quadraticizzato", $V \approx V_2$

SOMMARIO (Lec. 18)

- Instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) [vs. sistemi ideali: privi di imp.]
 - transitione continua vs. ramo bifurcato
del sistema ideale.
 - bifurcazione per $P = P_{cr}$.
- Approccio statico per spost. "geom. grandi" e mappa dei percorsi di equilibrio.
 - validità delle stime di P_{cr} .
- " " " " " piccoli" \Rightarrow stabilità asintotica per P_{cr} .
 - Per trovare lo trend asintotico di sist. reale resta di rignif. ingegnerist.
- Approccio energetico, per spost. di entità come sopra (grandi/piccoli).
 - Individua, oltre alle stesse conf. in di equilibrio, le nature stabile o non stabile di esse (stabile per il ramo primario deviato dalla parte dell'imperfezione).

Next step: pb. euleriani di stabilità - Quadro generale ed esempi discreti MDOF.