Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

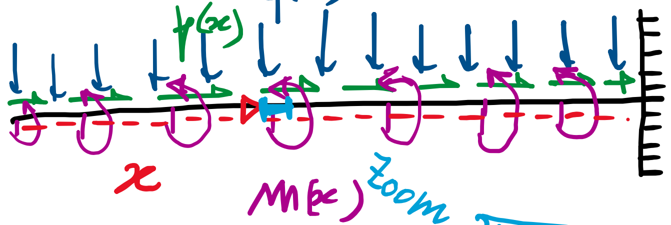
LEZIONE 07

Equazioni indefinite di equilibrio delle travi (rettilinee)

vedi convenzioni assunte per le AI

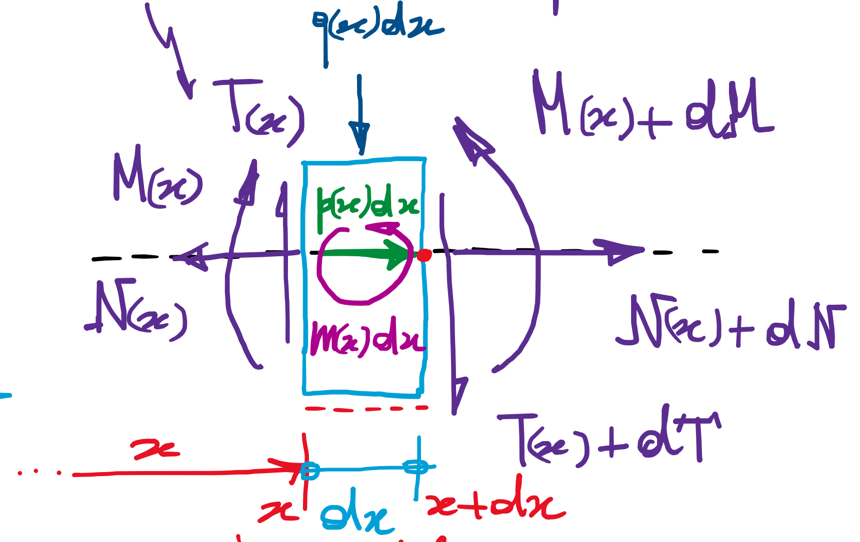
$$\left\{\begin{array}{l} p(x): \text{carico assiale distribuito} \\ q(x): \text{carico trasversale distribuito} \end{array}\right\} \frac{[F]}{[L]}$$

$m(x)$: coppie distribuite $\quad \frac{[F]\cancel{[L]}}{\cancel{[L]}}$



$\lim_{\Delta x \to 0}$

enucleiamo un concio di trave in sede indefinita ($\forall x, dx$)



rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = A'(x) \quad \text{(concetto di derivata prima)}$$

Equazioni di equilibrio del concio:

- $\sum F_t^{dx} = \sum F_x^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{N(x)} + \frac{dN}{dx} - \cancel{N(x)} + p(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{N'(x) = \frac{dN(x)}{dx} = -p(x)}$

- $\sum F_n^{dx} = \sum F_y^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{T(x)} + \frac{dT}{dx} - \cancel{T(x)} + q(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{T'(x) = \frac{dT(x)}{dz} = -q(x)}$

- $\sum M_{x+dx}^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{M(x)} + \frac{dM}{dx} - \cancel{M(x)} + m(x)\cancel{dx} - T(x)\cancel{dx} + \cancel{q\frac{dx^2}{2}} = 0$

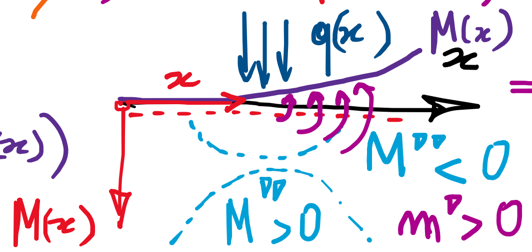
infinitesimo di ordine superiore

$$\Rightarrow \boxed{M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -m(x) + T(x)}$$

Inoltre, per ulteriore derivazione:

$$M''(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -m'(x) + T'(x) = -(m'(x) + q(x))$$

concavità di $M(x)$ nel verso di $q(x)$



accoppiamento tra azione tagliante e flettente (se c'è taglio, c'è momento)

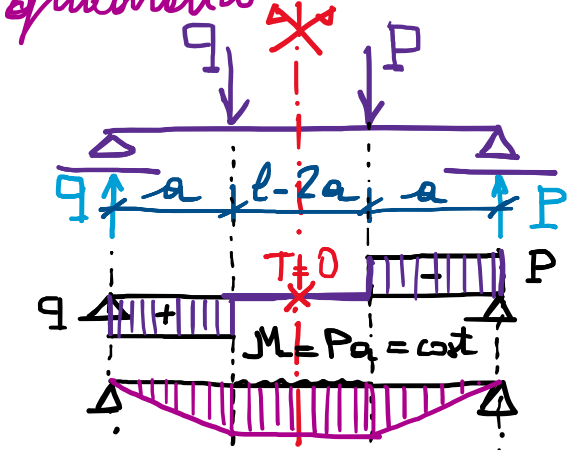
Casi tipici di interesse:

tratto con carico...	$N(x)$	$T(x)$	$M(x)$
$p=0$, $q=0$, $m=0$ nullo (tratto "scarico")	costante	costante	lineare * / costante
$p=\text{cost}$, $q=\text{cost}$, $m=\text{cost}$ uniformemente distribuito o ripartito	lineare	lineare	quadratico / lineare
$p=\text{lin}$, $q=\text{lin}$, $m=\text{lin}$ linearmente distribuito	quadratica	quadratico	cubico / quadratico

$M'(x) = T(x)$

* N.B.: il caso lineare contiene anche il caso costante, come istanza particolare.

Esempio: Prova di flessione su quattro punti (tratto centrale con pura flessione)

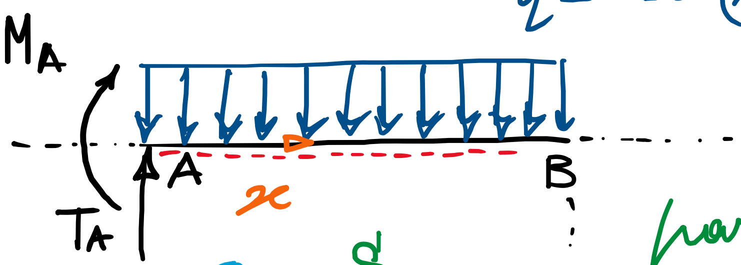


T antisim.

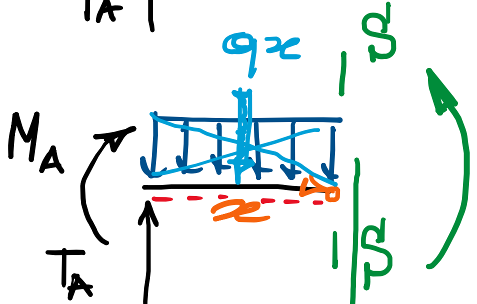
M simm.

Andamenti di T e M per q = cost (e calcolo di M_{max}):

$q = \text{cost}$ (carico uniformemente ripartito)



$\boxed{M'(x) = T(x)} \Rightarrow$ Infatti: $M' = T_A - \frac{q}{2} 2x = T_A - qx = T(x)$



parabolico

$$M(x) = M_A + T_A x - \frac{q x^2}{2} \Rightarrow M_{max} = M\left(\bar{x} = T_A/q\right) =$$

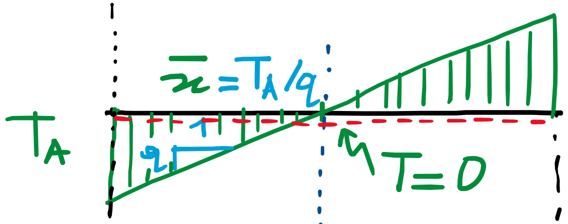
$$= M_A + T_A \frac{T_A}{q} - \frac{q}{2}\left(\frac{T_A}{q}\right)^2 =$$

$$= \boxed{M_A + \frac{T_A^2}{2q} = M_{max}}$$

: per equilibrio del tratto Ax

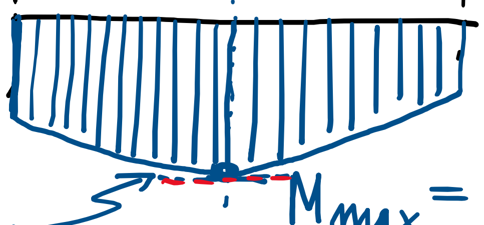
lineare

$$T(x) = T_A - qx = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{T_A}{q}$$



N.B.: M massimo (relativo) ove si annulla il taglio

(tangente orizzontale)



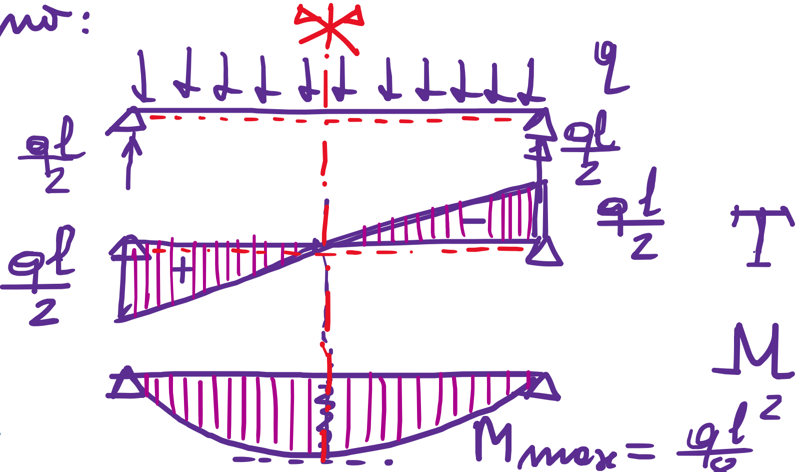
parabola

p.to di stazionarietà (max rel.)

$$M_{max} = M_A + \frac{T_A^2}{2q}$$

concavità di M nel verso di q

Esempio:

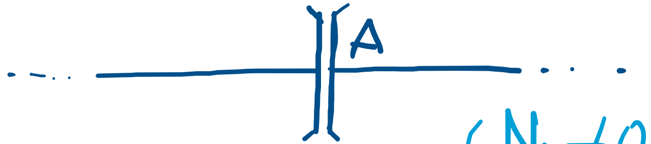


$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

Commenti sulle AI nei sistemi articolati di corpi rigidi

– Relazione tra AI e vincoli (svincoli) presenti

$N_A \equiv 0$! $\left(\begin{matrix} T_A \neq 0 \\ M_A \neq 0 \end{matrix}\right)$

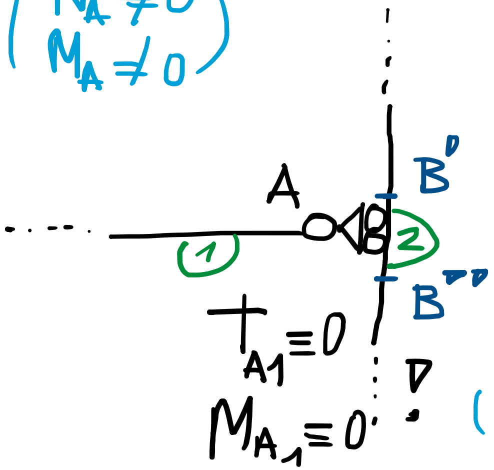


$T_A \equiv 0$! $\left(\begin{matrix} N_A \neq 0 \\ M_A \neq 0 \end{matrix}\right)$

$M_A \equiv 0$! $\left(\begin{matrix} N_A \neq 0 \\ T_A \neq 0 \end{matrix}\right)$

vincoli doppi (svincoli semplici)

$N_A \equiv 0$
$M_A \equiv 0$! $(T_A \neq 0)$



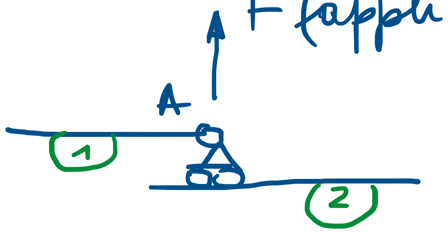
$T_{A1} = 0$
$M_{A_1} \equiv 0$! $(N_{A1} \neq 0)$

$N_{B'_2} = N_{B''_2}$
$M_{B'_2} = M_{B''_2}$
$(T_{B'_2} = T_{B''_2})$

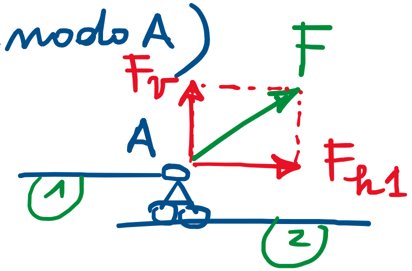
vincoli semplici (svincoli doppi)

– Azione concentrate ai nodi

F (applicato al nodo A)



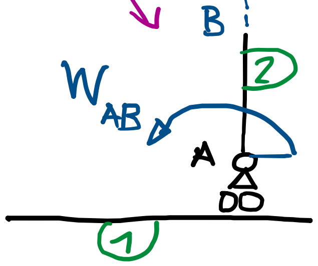
$\neq$



$N_{A1} = F_{h1}$, $N_{A2} \equiv 0$
applicate al nodo A dell'asta 1

– Verifica di tutti gli equilibri nodali!

azioni con componente nella direz. dello svincolo (sconnessione)



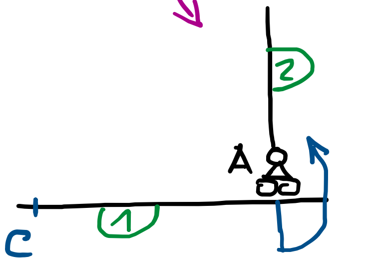
$M_{A2} = W_{AB}$

$N_{A1} = 0$
$T_{A2} = 0$

$M_{A1} \equiv 0$

$\neq$

$M_{A2} \equiv 0$



$M_{A1} = W_{AC}$ $\quad W_{AC}$