

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

A.A. 2021/2022

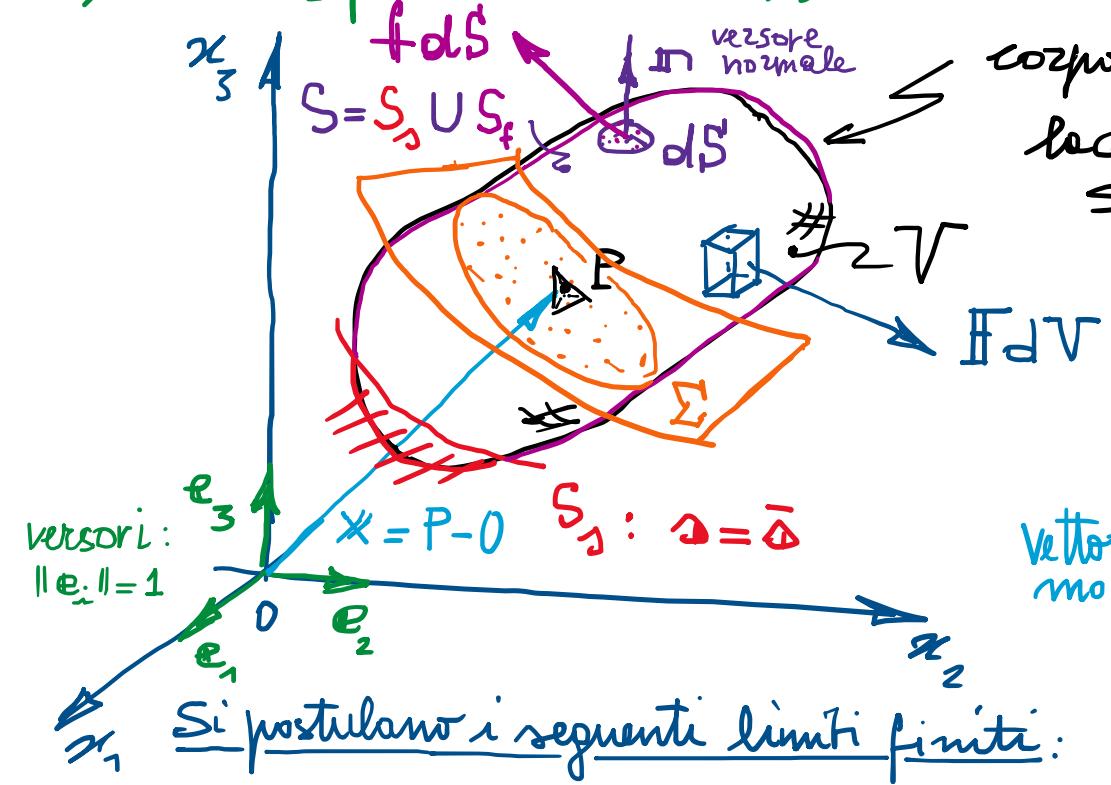
prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 12

# Meccanica dei Solidi - Continuo di Cauchy (Statica dei Continui)

Generalizzazione del concetto di sforzo, visto in ambito monodimensionale (prove di trazione; prova di torsione), al contesto tridimensionale generico.



$$\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta \Sigma_n} = t_n(x) \text{ vettore sforzo di Cauchy}$$

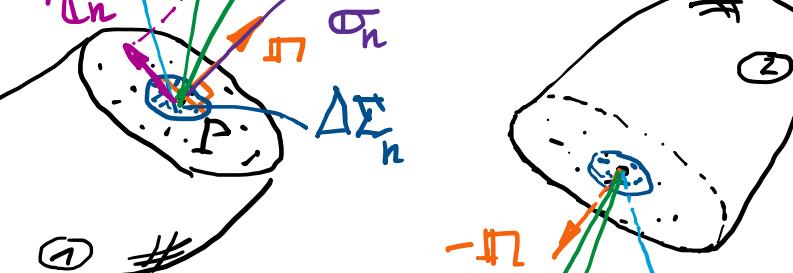
$$\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0 \quad (\text{continuo non polare di Cauchy})$$

"microcoppie" nulla

corpo solido: mezzo continuo (più di vuoti interni, lacerazioni, cricche)  $\Rightarrow \forall P \in V$  è un punto materiale soggetto a: forze di volume  $F_dV$  (es. peso proprio) in  $V$  (su  $S_f$ ) forze di superficie  $f$  (es. pressione di un fluido) spostamenti assegnati su contorno vincol. ( $S_J$ )



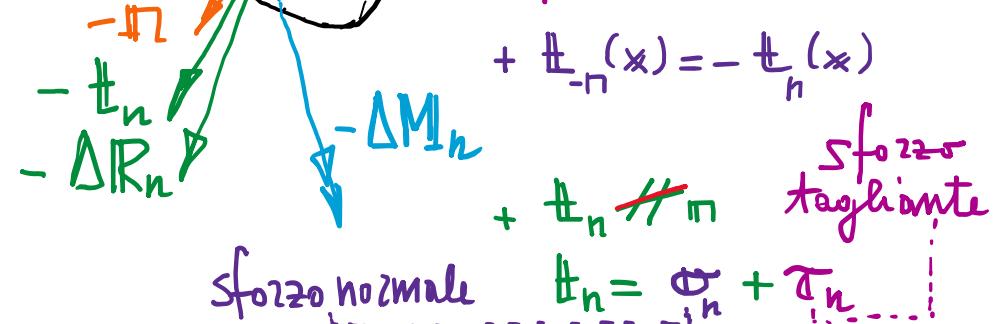
Risultanti su  $\Delta \Sigma_n$  trasmesse dalla parte rimossa (effetti di ② su ①)



N.B.:

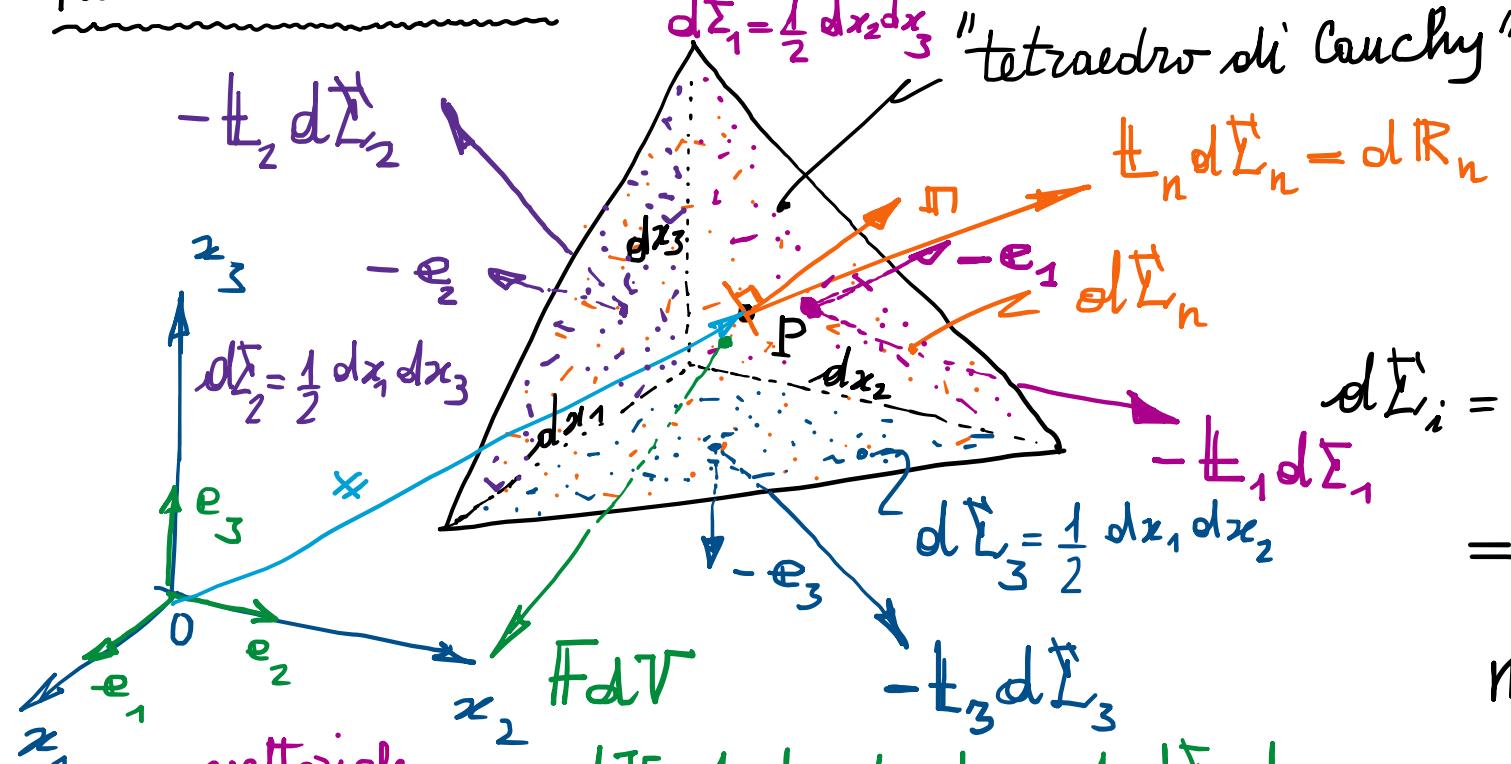
- +  $t_n(x)$  fornisce sforzo in  $P$  su faccia di normale uscente  $n̂$

$$+ t_{-n}(x) = - t_n(x)$$



$$t_n = t_{n̂} + T_{n̂} \quad \text{sforzo tangente}$$

Relazione di Cauchy (~1822): come individuare  $\mathbf{t}_n$ , su faccia di normale  $\Pi$ , in base a sforzo in  $x$



Equazione di equil. alla trazione:

$$\mathbf{t}_n \cdot d\Sigma_n - \sum_i \frac{\mathbf{t}_i \cdot d\Sigma_i}{n_i} + FdV = 0 \Rightarrow$$

Quindi, data  $\Pi$  (cioè i coseni direttori  $n_i$ ), il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  è noto una volta noti i tre vettori sforzo  $\mathbf{t}_i$  agenti su facce // piani coordinati

vettore sforzo di Cauchy:

su faccia inclinata  
di normale uscente  $\Pi$

→ essi definiscono pertanto lo stato di sforzo locale in  $x$

$d\Sigma_1 = \frac{1}{2} dx_2 dx_3$  "tetraedro di Cauchy":

$$\mathbf{t}_n \cdot d\Sigma_n = dR_n$$

con risultanti trasmesse dal monolo esterno attraverso le quattro facce, una inclinata e tre // ai piani coordinati

$$d\Sigma_i = \frac{1}{2} dx_j dx_k \quad \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \quad \begin{matrix} j \\ j \end{matrix}$$

$$= n_i d\Sigma_n$$

$$n_i = \frac{d\Sigma_i}{d\Sigma_n} = \dots$$

$n_i$  scalari  
(cosini direttori)

$$\Pi = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$n_i = \Pi \cdot \mathbf{e}_i$$

=  $\cos(\hat{\Pi} \cdot \mathbf{e}_i)$   
coseno diretto  
del verso normale

$$\text{or } (\sum_i n_i^2 = 1)$$

Relazione in termini di componenti: ( $j = 1, 2, 3$ ) componenti:  $t_{nj} = t_n \cdot e_j$ ;  $t_{ij} = t_i \cdot e_j$

$$t_n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 = \sum_i t_i n_i \quad \sigma_{ij} = t_{ij} = \text{comp. di } t_i \text{ nella direz. } j$$

$$\begin{bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \end{bmatrix} n_1 + \begin{bmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{bmatrix} n_2 + \begin{bmatrix} t_{31} \\ t_{32} \\ t_{33} \end{bmatrix} n_3 \Rightarrow \begin{cases} t_{n1} = t_{11} n_1 + t_{21} n_2 + t_{31} n_3 \\ t_{n2} = t_{12} n_1 + t_{22} n_2 + t_{32} n_3 \\ t_{n3} = t_{13} n_1 + t_{23} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} t_{nj} = n_i \sigma_{ij} \\ \uparrow \downarrow \\ t_n = \Pi \cdot \sigma = \sigma \cdot \Pi^T \end{array}$$

$t_n$  è la "proiezione" di  $\sigma$  nella direzione  $n$

motore  $\sigma$ , dato in  $n$ ,  
è moto  $t_n$

tensore sforzo di Cauchy (del 2° ordine)  
(trasformazione lineare di  $\sigma$  in  $t_n$ )

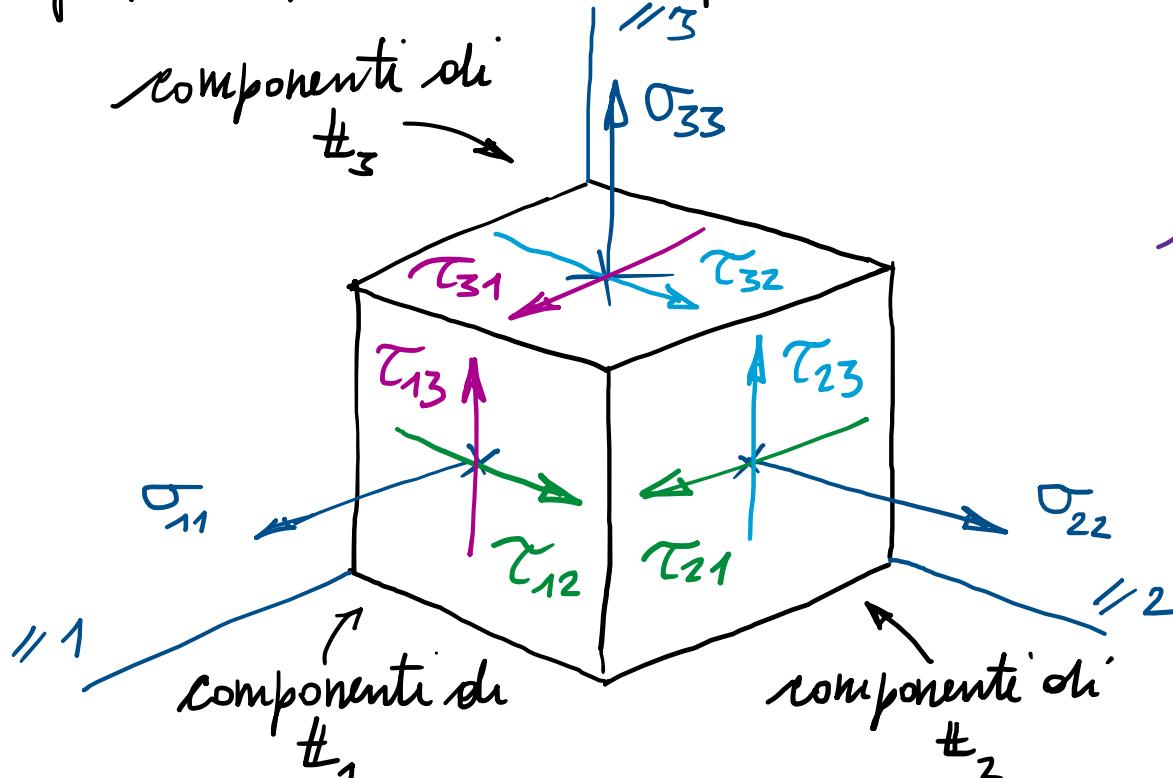
$$\begin{bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

matrice sforzo: componenti del tensore sforzo (9) di Cauchy

- tensore: oggetto fisico-matematico  
atto a rappresentare grandezze fisiche  
- indipendente dal sistema di riferimento ma con componenti variabili con leggi di trasformaz. particolari:  $\rightarrow$  vedi Col Sol C

Significato fisico delle componenti  $\sigma_{ij} = t_{ij}$  del tensore sforzo di Cauchy:



$i=j$   $\sigma_{ii}$ , sforzi normali (alle facce) (3)

$i \neq j$   $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$  sforzi tangenziali (alle facce) taglienti (6)

---

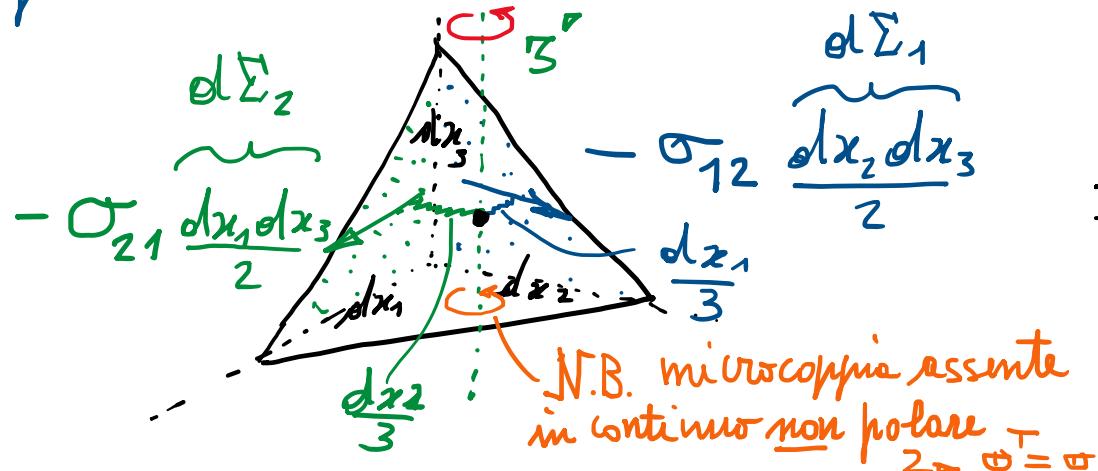
(9)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

6 componenti indipendenti:  
 $(3\sigma_{ii} + 3\sigma_{ij})$

tensore del 2° ordine simmetrico

Equilibrio alle rotazioni del tetraedro:  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$  ( $\sigma^T = \sigma$ )



Idem:

1<sup>o</sup>:

2<sup>o</sup>:

$$3^o: -\sigma_{21} \frac{\partial x_1 \partial x_3}{2} \frac{\partial x_2}{3} + \sigma_{12} \frac{\partial x_2 \partial x_3}{2} \frac{\partial x_1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{12}$$

$$\Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

$$\Rightarrow \sigma_{31} = \sigma_{13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial}$$

3 componenti taglienti