Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

# Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

## LEZIONE 12

# Modi principali di vibrare e oscillazioni libere (di sistemi dinamici MDOF)

- Eq.ni del moto ("eq. dinamico" o eq.ni di Lagrange): [n eq.ni accoppiate] n: n° dei gdl

es. $\mathbb{K}$ non diagonale

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\,\ddot{q} + \underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underset{n\times 1}{q(t)} = \underset{n\times 1}{Q} = 0 \qquad \left[\begin{matrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{matrix}\right. \text{c.i.}$$

$q(t)$: coordinate lagrangiane (gdl "fisici" del sistema dinamico)

- Soluzioni in termini di moto armonico:

$$q = \phi_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = \phi_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = \phi_i (A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t)$$

modi principali di vibrazione

$\omega_i$: pulsazione modale

$\phi_i$: vettore di ampiezze — forma modale

$$\dot{q} = \omega \phi \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{q} = -\omega^2 \underbrace{\phi \sin(\omega t + \varphi)}_{q(t)} = -\omega^2 q(t)$$

$\mathbb{A}x = \lambda \mathbb{B}x$ < $\lambda$ autovalore, $x$ autovettore

Problema agli autovalori (generalizzato)

- Sostituendo nelle eq.ni del moto:

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M})\phi \cancel{\sin(\omega t + \varphi)} \overset{\forall t}{=} 0 \Rightarrow (\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M})\phi = 0; \quad \boxed{\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i}$$

$\omega_i^2$ autovalore

$\phi_i$ autovettore

- soluzioni non banali sse: $\phi \neq 0$

$$0 = \det(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M}) = \underbrace{a_n(\omega^2)^n + a_{n-1}(\omega^2)^{n-1} + \dots + a_2\omega^2 + a_1}_{\text{polinomio caratteristico associato a } \mathbb{K} \text{ e } \mathbb{M} \text{ grado } n} = 0$$

eq.ne caratteristica

- n soluz. $\omega_i^2$: $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_i^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ ($\omega\uparrow$)

1° modo; n° modo (ultimo modo)

$\omega_i$ pulsazione propria o naturale del sistema; periodo proprio $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{1}{f_i}$

$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_i \geq \dots \geq T_n$ ($T\downarrow$)

Proprietà delle autosoluzioni:

- $\omega_i^2$ reali e positivi $\Rightarrow$ $\omega_i = \sqrt{\omega_i^2} > 0$ reali (in genere distinti per sistemi strutturali reali)

$\mathbb{K}, \mathbb{M}$ (reali) e definite positive simmetriche

- a due autovalori distinti corrisp. due autovettori mutuamente perpendicolari rispetto alle matrici $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$:

$\sum_i \phi_{ri} \cdot \phi_{si} = \phi_r^T \mathbb{I} \phi_s = 0$ matrice identità $n \times n$

$\omega_r : \phi_s^T ( \mathbb{K} \phi_r = \omega_r^2 \mathbb{M} \phi_r )$

hp. $\neq$

$\omega_s : \phi_r^T ( \mathbb{K} \phi_s = \omega_s^2 \mathbb{M} \phi_s )$ $-$

(proprietà chiave è la simmetria delle matrici strutturali $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$)

$$\phi_s^T \mathbb{K} \phi_r - \phi_r^T \mathbb{K} \phi_s = \omega_r^2 \phi_s^T \mathbb{M} \phi_r - \omega_s^2 \phi_r^T \mathbb{M} \phi_s$$

$$0 = \phi_r^T \mathbb{K}^{(T)} \phi_s - \text{''} = \omega_r^2 \phi_r^T \mathbb{M}^{(T)} \phi_s - \text{''} = \underbrace{(\omega_r^2 - \omega_s^2)}_{\neq 0 \text{ per hp.}} \boxed{\phi_r^T \mathbb{M} \phi_s = 0}$$

$$\boxed{\phi_r^T K \phi_s = 0}$$

- quindi, presi due autovettori $\phi_r, \phi_s$:

$\phi_r^T \mathbb{M} \phi_s = \delta_{rs} M_r$ — delta di Kronecker

$r = s$ ($\delta_{rs} = 1$): $M_r = \phi_r^T \mathbb{M} \phi_r > 0$ massa modale

$r \neq s$ ($\delta_{rs} = 0$): $0$

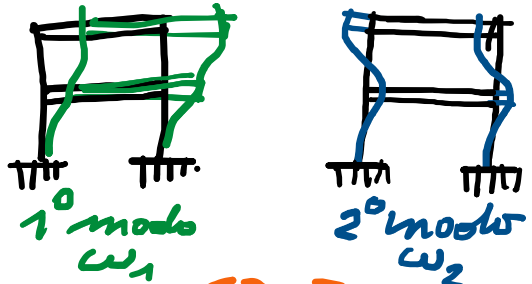
;

$\phi_r^T \mathbb{K} \phi_s = \delta_{rs} K_r$

$r = s$: $K_r = \phi_r^T \mathbb{K} \phi_r > 0$ rigidezza modale

$r \neq s$: $0$

- Pertanto: $\phi_i$ autovettori $\Rightarrow$ forme modali




$$\phi_i^T \left( \mathbb{K} \phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M} \phi_i \right) \Rightarrow \underbrace{\phi_i^T \mathbb{K} \phi_i}_{K_i} = \omega_i^2 \underbrace{\phi_i^T \mathbb{M} \phi_i}_{M_i}$$

MDOF SDOF

$$\tilde{\omega}_i^2 = \frac{\frac{1}{2} \tilde{\phi}_i^T \mathbb{K} \tilde{\phi}_i}{\frac{1}{2} \tilde{\phi}_i^T \mathbb{M} \tilde{\phi}_i} = \frac{\mathcal{E}_i^*}{T_i^*} = \frac{K_i}{M_i} \Rightarrow \underline{\omega_i} = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \longleftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Rapporto di Rayleigh (in dinamica)

$\dfrac{\text{En. elastica}}{\text{En. cinetica}}$ modo $i$

stime degli autovettori $\tilde{\phi}_i$ (buona stima della pulsazione propria)

- Autovettori: $(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M}) \phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i$, noti gli $\omega_i^2$

- Forme standard: $(\mathbb{A} x = \lambda \mathbb{I} x)$

forme generalizzate $\mathbb{K} \phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M} \phi_i$

- $\underbrace{\mathbb{K}^{-1} \mathbb{M}}_{\mathbb{G}} \phi_i = \dfrac{1}{\omega_i^2} \phi_i$

$\mathbb{G} = \mathbb{H}^{-1}$; $\mathbb{H} = \mathbb{G}^{-1}$ (def. pos. ma non simm.)

- $\underbrace{\mathbb{M}^{-1} \mathbb{K}}_{\mathbb{H}} \phi_i = \omega_i^2 \phi_i$

(comunque autovalori reali, poiché matrici sorgenti simmetriche)

- Normalizzazione degli autovettori $\phi_i \Rightarrow \alpha\, \phi_i$ è autovet. (definito a meno di costante arbitraria)

- $1 = \|\phi_i\| = \sqrt{\phi_i^T \mathbb{I}\, \phi_i} = \sqrt{\sum_k \phi_{ik}^2} = 1$, $\phi_i \Rightarrow \dfrac{\phi_i}{\|\phi_i\|}$ versore $\dfrac{\cancel{\alpha}\,\phi_{iz}}{\cancel{\alpha}\,\phi_{is}}$ invariante
- $1 = M_i = \phi_i^T \mathbb{M}\, \phi_i$ massa modale unitaria
- $1 = K_i = \phi_i^T \mathbb{K}\, \phi_i$ rigidezza " "
- sistemi dinamici tipici $\phi_{ik} = 1$ < es. K ultimo piano $k = n$ / primo " $k = 1$ (telai shear-type)

- Notazione matriciale

$$\underset{n\times n}{\Phi} = [\, \phi_1 \mid \phi_2 \mid \cdots \mid \underset{n\times 1}{\phi_i} \mid \cdots \mid \phi_n \,]$$ matrice degli autovettori (per colonne)

$\Phi_{ki} = \phi_{ik}$ comp. $k$ di autov. $\phi_i$

$$\underset{n\times n}{\Omega^2} = \mathrm{diag}[\omega_i^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$ matrice degli autovalori

(è matrice diagonale)

$$- \mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i = \mathbb{M}\phi_i \omega_i^2 \Rightarrow \Phi^T\left(\boxed{\mathbb{K}\Phi = \mathbb{M}\Phi\Omega^2}\right)$$

n modi unitamente rappresentati (tramite $\Phi$ e $\Omega^2$)

riscrittura del pb. agli autovalori generalizzato originario, per tutti i modi $i=1,n$, tramite matrici degli autovettori $\Phi$ e degli autovalori $\Omega^2$

$i = 1, 2, \ldots, n$ numero del modo

$$\underbrace{\Phi^T \mathbb{K} \Phi}_{} = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{} \Omega^2$$

matrici modali $\mathcal{K} = \mathrm{diag}[K_i]$ di rigidezza $\mathcal{M} = \mathrm{diag}[M_i]$ di massa

$$\Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} = \mathrm{diag}\left[\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}\right]$$

trasformazione di coordinate

- Coordinate principali (significato matematico)

$$\ddot{q} = \sum_i \phi_i \ddot{p}_i = \Phi \ddot{p} \qquad (p = \Phi^{-1} q)$$

comb. lineare (comp. di q nelle base degli autovett.)

Anche $p = (\underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{\mathcal{M}})^{-1} \Phi^T \mathbb{M} q \rightarrow p_i = \frac{\phi_i^T \mathbb{M} q}{\underbrace{\phi_i^T \mathbb{M} \phi_i}_{M_i}}$

$\Phi$ invertibile se autovalori distinti (autovettori lin. indip.)

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q = \mathbb{Q} \Rightarrow \Phi^T\left(\mathbb{M}\Phi\ddot{p} + \mathbb{K}\Phi p = \mathbb{Q}\right)$$

n eq.ni disaccopp.

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathrm{diag}[M_i]} \ddot{p} + \underbrace{\mathcal{K}}_{\mathrm{diag}[K_i]} p = \Phi^T \mathbb{Q} = \mathbb{P} \longleftrightarrow M_i \ddot{p}_i + K_i p_i(t) = \phi_i^T \mathbb{Q} = P_i(t)$$

$\forall$ modo $i$

• Oscillazioni libere: condizioni iniziali $q_0$, $\dot{q}_0$ (composizione di n moti armonici)

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \Rightarrow q(t) = \sum_i \phi_i (A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t)$$

$$q(0) = \sum_i \phi_i B_i = \underbrace{\Phi \mathbb{B}}_{\{B_i\}} \Rightarrow \mathbb{B} = \Phi^{-1} q_0$$

Le $\omega_i A_i$ sono le $p_i$ di $\dot{q}_0$

$$\Phi^T M q_0 = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \mathbb{B} \rightarrow \boxed{\mathbb{B} = m^{-1} \Phi^T M q_0}$$

Le $B_i$ sono le $p_i$ di $q_0$

$$B_i = \frac{\phi_i^T M q_0}{\underbrace{\phi_i^T M \phi_i}_{M_i}}$$

Analogamente:

$$\dot{q}_0 = \sum_i \phi_i \omega_i A_i = \underbrace{\Phi \Omega \mathbb{A}}_{\{A_i\}}$$

$$\mathbb{A} = (\Phi\Omega)^{-1} \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \Phi^{-1} \dot{q}_0$$

$$\Phi^T M \dot{q}_0 = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \Omega \mathbb{A}$$

$$\boxed{\mathbb{A} = (m\Omega)^{-1} \Phi^T M \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \underbrace{m^{-1} \Phi^T M}_{\Phi^{-1}} \dot{q}_0}$$

N.B.: $q_0 = \phi_j < \begin{cases} B_j = 1 & i = j \\ B_i = 0 & i \neq j \end{cases}$

Il sistema, rilasciato ($\dot{q}_0 = 0$) dal modo j, vibra solo secondo tale modo (selezione del generico modo di vibrare).

# Concetti fondamentali:

- Caratteristiche intrinseche vibrazionali di sistema dinamico ad n gdl $\Rightarrow$ oscillazioni libere (no damping, $\mathbb{C} = 0$) (modi principali di vibrare o di vibrazione):

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\,\underset{n\times 1}{\ddot{\mathbb{q}}} + \underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underset{n\times 1}{\mathbb{q}(t)} = \underset{n\times 1}{\mathbb{0}}$$

n eq.ni del moto scalari, per sistema MDOF con n gdl $q_i(t)$ (coordinate lagrangiane)

- Soluzione nella forma:

$$\mathbb{q}(t) = \Phi_i \sin(\omega_i t + \psi_i) = \Phi_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = \dots$$

fasi: $\psi_i$, $\varphi_i$

$\omega_i$: pulsazione (i-esima $\forall$ modo)

$\Phi_i$: vettore di ampiezze, definito a meno di una cost.

gdl: $\frac{\phi_{i2}}{\phi_{i3}}$

$$\ddot{\mathbb{q}}(t) = -\omega_i^2 \underbrace{\Phi_i \sin(\dots\dots)}_{\mathbb{q}(t)} = -\omega_i^2\, \mathbb{q}(t)$$

- Sostituendo:

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\, \alpha \Phi_i \cancel{\sin(\dots\dots)} = \mathbb{0} \quad \forall t \Rightarrow (\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\Phi_i = 0; \quad \boxed{\mathbb{K}\Phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\Phi_i}_{\,n\times n}$$

problema agli autovalori generalizzato, associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ $\Rightarrow$ n autoval. $\omega_i^2$, autovet. $\alpha\Phi_i$

$$\mathbb{A}x = \lambda \mathbb{B}x$$

$\mathbb{B} = \mathbb{I}$: $\mathbb{A}x = \lambda x$ standard

# SOMMARIO (Lez. 12)

- Modi principali di vibrare < pulsazioni naturali$^2$ ↔ autovalori. / forme modali ↔ autovettori.
- Ortogonalità e normalizzazione degli autovettori.
- Autovalori da rapporto di Rayleigh (in dinamica) => generaliz. SDOF.
- Scrittura compatta del pb. agli autovalori tramite matrici degli autovettori e degli autovalori.
- Trasformazione in coordinate principali => disaccoppiamento delle eq.ni del moto (analisi dinamica modale).
- Oscillazioni libere (sovrapposizione di n moti armonici).

Next step: esempio 2DOF; smorzamento; Azioni Interne.