

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

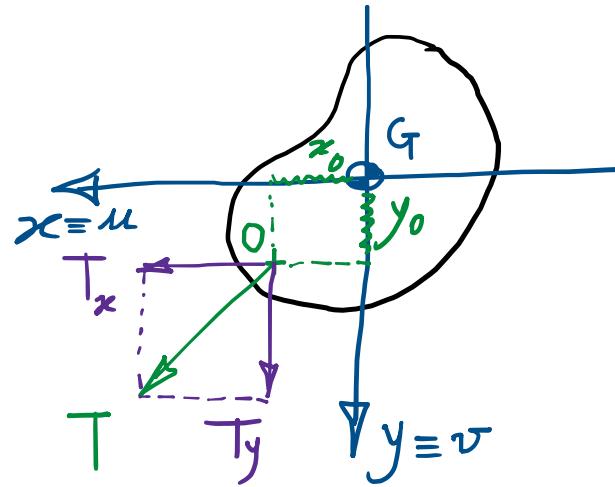
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

Taglio e Centro di Taglio



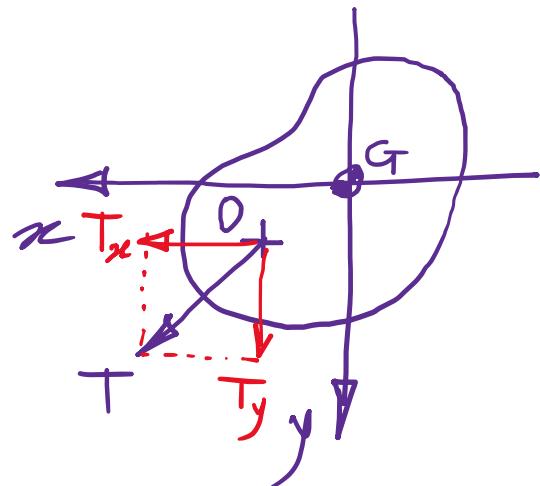
CTa

Centro di Taglio : p. to di applicazione della forza tagliente T tale per cui si registra un'inflessione del prisma di dSV (flessione associata al taglio) senza rotazione delle sezioni nel suo piano (disaccoppiamento taglio/torsione).

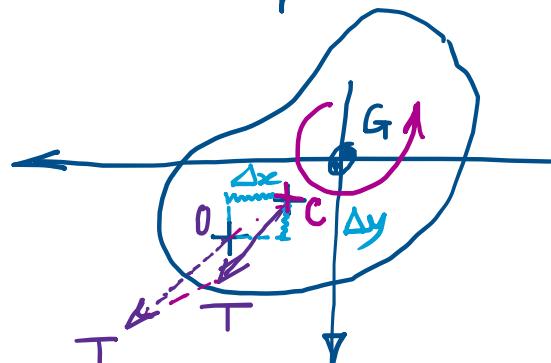
- Quindi, se $D = CTa$, la sollecitazione risulta di puro taglio (flessione composta), senza effetti torcenti (cioè senza "torsione", rotazione delle sezioni).
- Infatti, vi è in generale presente un accoppiamento taglio/torsione, in base al punto di applicazione dell'azione tagliente T , in quanto, trasponendo la forza T nel piano, restando parallela e se stessa, si genera un momento torcente di trasporto, tale da indurre effetti torcenti.
- Il CTa, pertanto, è quel punto di applicazione dell'azione tagliente T che non induce effetti torcenti sul prisma di dSV (no rotazione delle sezioni).

- Rotazione ("torsione") nulla: in senso "energetico", vri PLV, quando sforzi taglienti e deformazioni torcenti (e viceversa), risultano energeticamente ortogonalili, cioè tali da produrre lavoro interno mutuo nullo.

- Sistema A (static. ammissibile)



static. equiv. a:



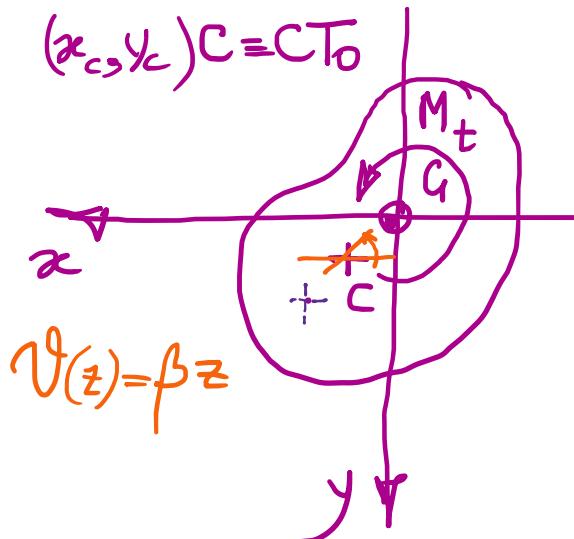
Momento torcente di trasporto

$$T_y \underbrace{(x_0 - x_c)}_{\Delta x} - T_x \underbrace{(y_0 - y_c)}_{\Delta y}$$

$$\frac{T_a}{T_z} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{zx}}{T_{zy}} \\ \frac{T_{zy}}{T_{zx}} \end{array} \right\}$$

sforzi taglienti

- Sistema B (cinematic. ammissibile)



$$\vartheta(z) = \beta z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x = -\beta z (y - y_c) \\ \Delta_y = \beta z (x - x_c) \\ \Delta_z = \beta \psi_c (x_c, y) \end{array} \right.$$

$$\frac{T_o}{\gamma_z} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{zx}^T \\ \gamma_{zy}^T \end{array} \right\}$$

deformazioni taglienti

legame elast. lin.
isotropo

(G: modulo di elast. tangenziale)

$$\gamma_z^T = \frac{T_o}{G}$$

PLV:

$$\frac{d\sigma_e^{AB}}{dz} = T_x^A \cancel{\gamma_{xc}^B} + T_y^A \cancel{\gamma_{yc}^B} + \underbrace{[T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c)]}_{=0 \quad \forall T_x, T_y} \cdot \beta^B = \int_A \cancel{\tau_z^A} \cdot \gamma_z^B dA = \frac{d\sigma_i^{AB}}{dz} = 0$$

\Downarrow

$$\begin{cases} x_0 = x_c \\ y_0 = y_c \end{cases} \Rightarrow CT_a \equiv CT_o \equiv C$$

energeticamente ortogonali

Inoltre, invertendo \textcircled{A} e $\textcircled{B} \Rightarrow \textcircled{A} \equiv \text{Torsione}; \textcircled{B} \equiv \text{Taglio}$

$$\frac{d\sigma_e^{ToTa}}{dz} = M_t^{To} \cdot \beta^{Ta} = \int_A \tau_z^{To} \cdot \gamma_z^{Ta} dA = \frac{d\sigma_i^{ToTa}}{dz}$$

$$\beta^{Ta} = 0 \quad \int_A \tau_z^{To} \cdot \frac{\tau_z^{Ta}}{G} dA = \int_A \frac{\tau_z^{To}}{G} \cdot \tau_z^{Ta} dA = \int_A \gamma_z^{Ta} \cdot \tau_z^{Ta} dA = 0$$

rotazione della

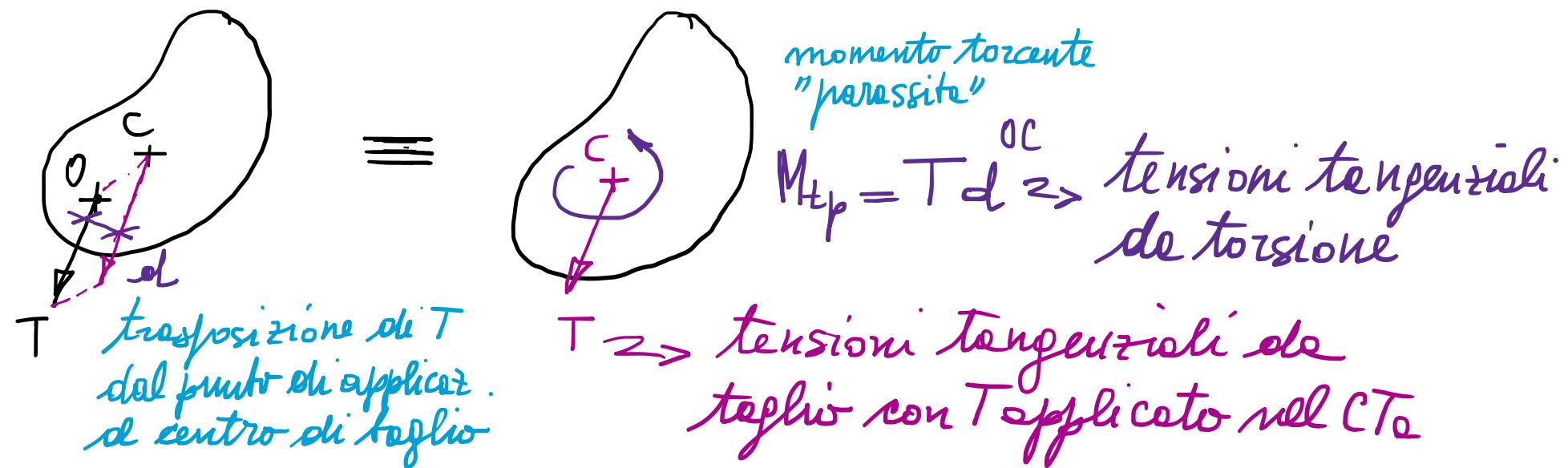
sezione dovuta al taglio:

nulle se T è applicato in $C \equiv CT_a \equiv CT_o$

- Determinazione di C:
 - se C_{T_0} è noto del ps. delle torsione, è noto anche il C_{T_e}
 - se $C_{T_e} \approx 0 \Rightarrow$ teglio $\approx C_{T_0}$
- Note le soluz. del ps. del teglio (in generale di difficile determinazione in forma analitica), il C_{T_e} può essere determinato dalla seguente condizione di equivalenza statica:

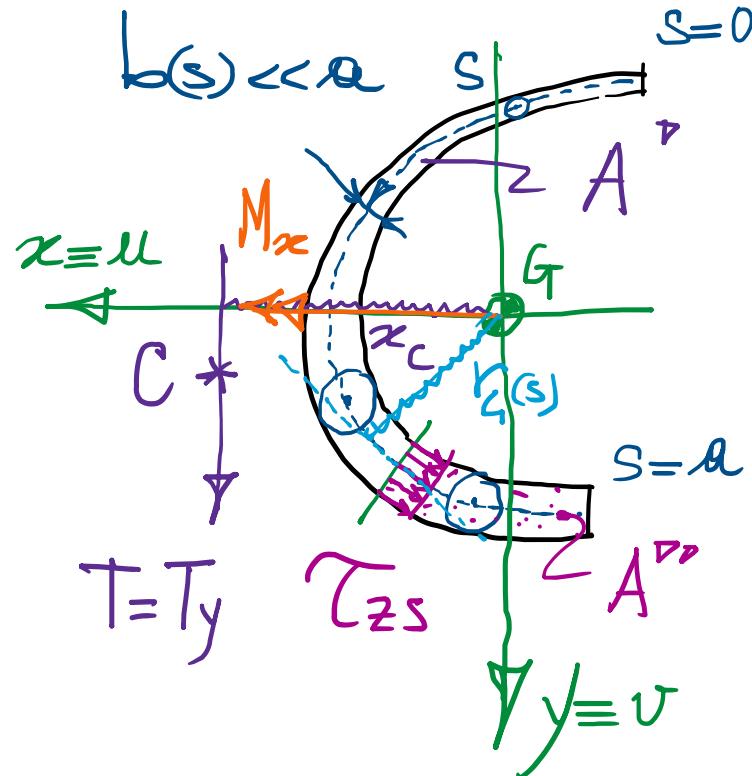
$$\int_A \left(\tau_{zy}^{T_e} x - \tau_{zx}^{T_e} y \right) dA = T_y x_c - T_x y_c \Rightarrow \begin{cases} x_c & (T_x = 0, T_y = 1) \\ y_c & (T_x = 1, T_y = 0) \end{cases}$$
- Soluzioni eventualmente approssimate del ps. del teglio e delle torsione che prevedono τ_z e γ_z energeticamente ortogonali consentiranno di determinare $C_{T_e} = C_{T_0} \equiv C$ in forma approssimata (C prossimo al C reale, tanto quanto la soluz. approssimata risulta vicina a quelle reale).

- N.B.: se T è applicato in $O \neq C$, la trasposizione di T da O a C induce un momento torcente "parassite", da tenere in debito conto per la valutazione dello stato tensione-deformativo (con effetti che possono risultare rilevanti, per es. nel caso di profili sottili aperti, dotati di scarsa capacità portante e torsione).



- Se \exists esse di simmetria, $C \equiv CT_0 \equiv CT_0$ E' tale esse
- Per sezione propriamente simmetrica, $C \equiv G$ (p. to di intersez. dei due assi di simm.)

- Taglio nei profili sottili (aperti) [soluzione approssimata di D.J. Tjorawsky] ~ 1856



$$M = M_x = T_y \neq 0 \Rightarrow$$

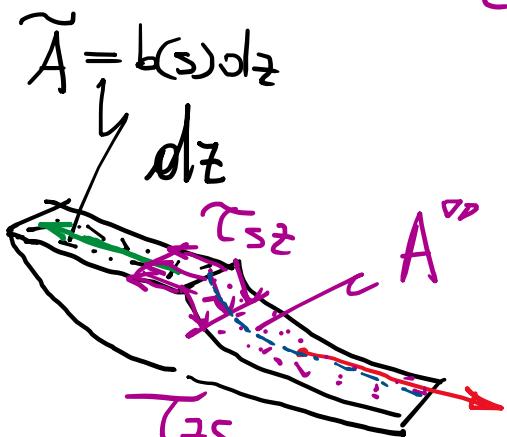
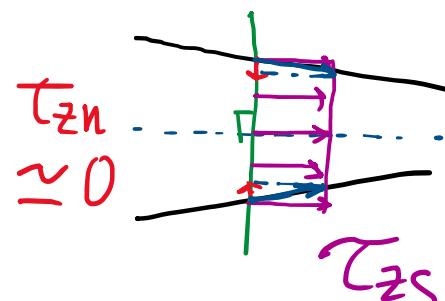
$$dM_x = T_y dz$$

flessione legata
al taglio

$$\sigma_{zz} = \frac{T_y}{J_x} z$$

formula di Navier
per le flessioni

- Corsa di taglio \perp alle linee medie del profilo sottile $\Rightarrow \bar{\tau}_{zs} = \bar{\tau}_{zs} = \text{cost. sullo spessore}$



τ_{zn} (antisimm. e lineari lungo lo spessore) trascurabili a fini ingegneristici

$$dR = \int_{A''} d\tau_{zz} dA = \int_{A''} \frac{T_y dz}{J_x} y dA$$

equil. alle
tensioni nelle
direzioni z

$$\int_{\bar{A}} \tau_{sz} dn dz = dR$$

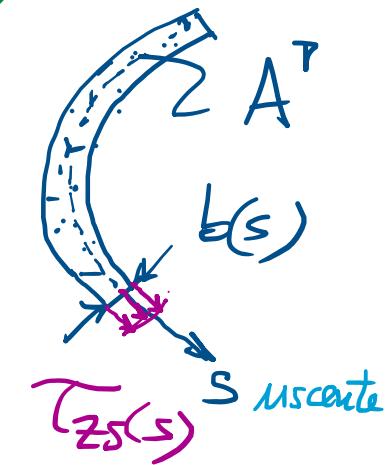
$$\frac{1}{dz} \bar{\tau}_{zs} b(s) = \frac{T_y dz}{J_x} \int_{A''} y dA$$

$\overbrace{\bar{\tau}_{zs}}$
 $\overbrace{b(s)}$

- Formule di Joukowsky: GEZ: $S_x = S_x'' + S_x''' = 0 \Rightarrow S_x'' = -S_x'''$

$$\overline{T_{zs}(s)} = \overline{\tau_{zs}} = \frac{\overline{T_y} S_x''(s)}{\overline{J_x} b(s)} = -\frac{\overline{T_y} S_x''(s)}{\overline{J_x} b(s)}$$

valore medio sulla corda
Approx.



- N.B.: Le $T_{zs}(s)$ alle J. non dipendono dal punto di applicazione di $T = T_y$; esse possono farsi riferire alle $T = T_y$ applicate nel centro di Taglio. Esso risulta così determinabile dalle condizioni di equivalente statica (rispetto a G, o a punto comodo):

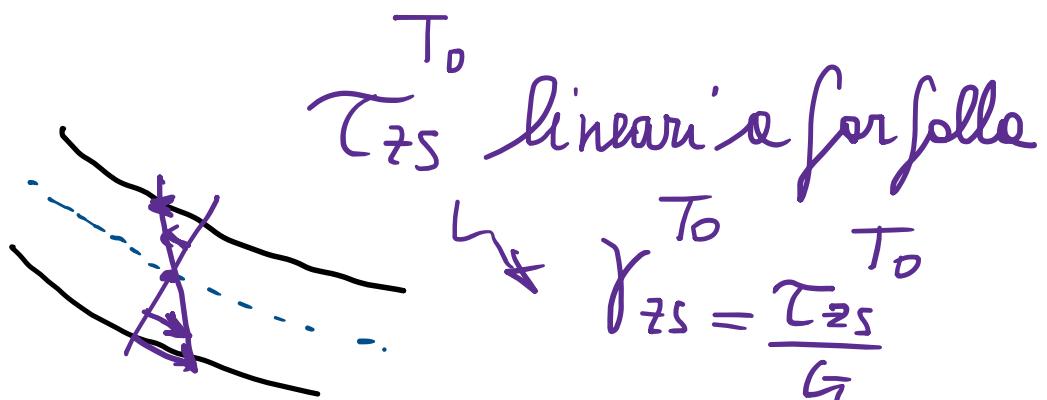
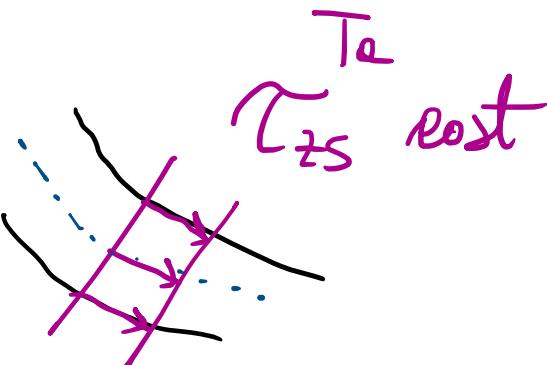
$$\int_0^a \underbrace{T_{zs}(s) b(s) ds}_{\substack{\text{forze} \\ \text{braccio}}} \cdot \underbrace{r_g(s)}_{\text{buccio}} = T_y x_c$$

$(T_y = 1)$ CTa

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{\overline{J}_x} \int_0^a S_x'''(s) r_g(s) ds \\ y_c = -\frac{1}{\overline{J}_y} \int_0^a S_y'''(s) r_g(s) ds \end{array} \right.$$

frofr. geom. del profilo

- Infatti τ_{zs}^{Te} alle Jourkowsky, costanti sullo spessore, risultano energeticamente ortogonali e $\gamma_{zs}(s) = \frac{\tau_{zs}^{To}}{G}$ lineari e ferfolle sullo spessore:

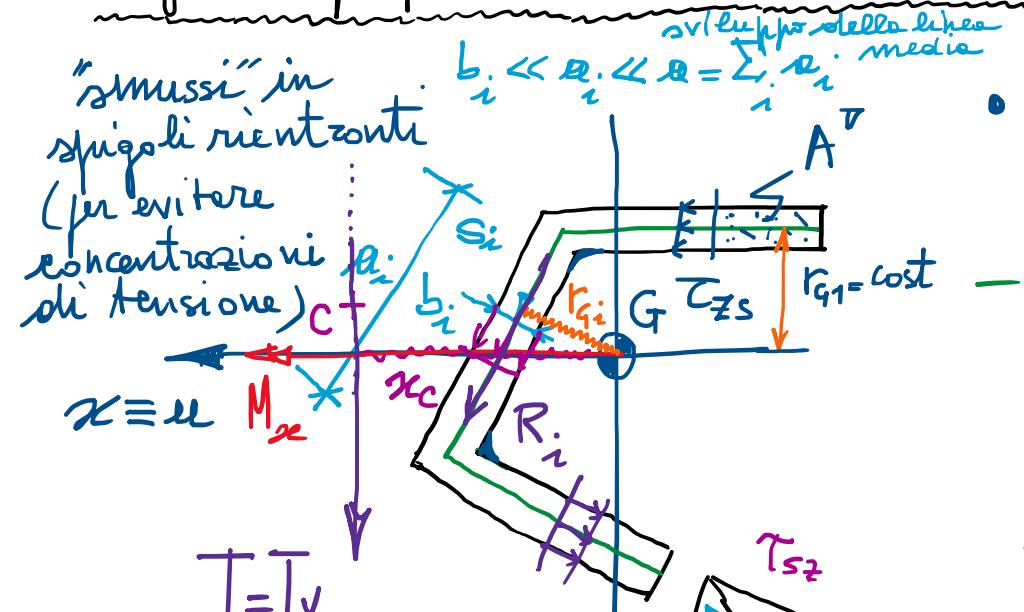


$$\gamma_{zs}^{To} = \frac{\tau_{zs}^{To}}{G}$$

$$\frac{df_i}{dz} = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}^{Te} \gamma_{zs}^{To} dn ds \equiv 0$$

$\frac{\tau_{zs}^{To}}{G}$

Taglio in profili sottili aperti formati da rettangoli sottili ($b_i = \text{cost}$ in ogni tratto)

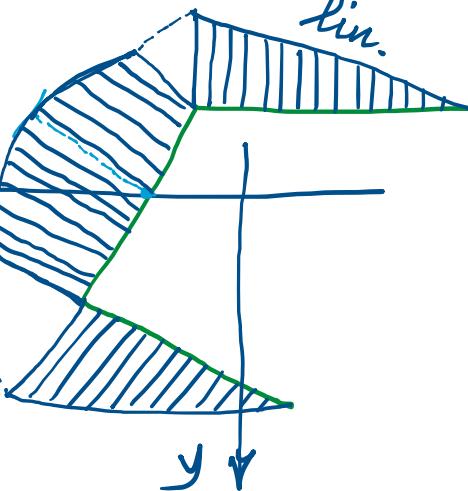


C: Centro di Taglio

$$q_i(s_i) = T_{zs_i}(s_i) b_i$$

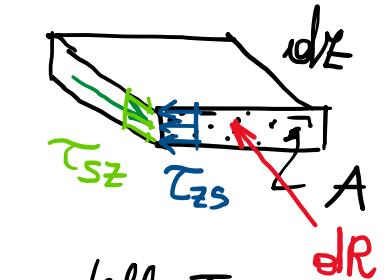
$$\sim S_x^{\triangleright}(s_i)$$

$\Rightarrow T_{zs_i}$
dip. anche dei b_i



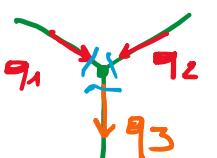
$$T_{zs_i}(s_i) = \frac{T_y S_x^{\triangleright}(s_i)}{J_x b_i} = - \frac{T_y S_x^{\triangleright}(s_i)}{J_x b_i}$$

$- S_x^{\triangleright}(s_i)$ al più parabolico in $s_i \sim s_i^2$, in quanto $A_i \sim s_i$ e G_i di tale posizione ha distanza da x altrettanto lin. in s_i ($\sim s_i$). secondo ragionamento di Joukowski (equil. alle trsl. in direzione z)



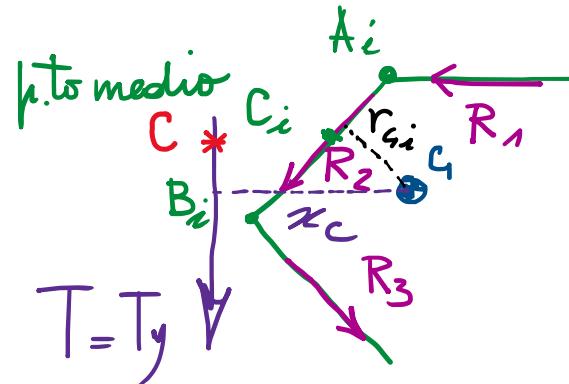
verso delle T_{zs}

- Se tratto i -esimo // all'asse x , $r_{G_i} = \text{cost}$, $S_x^{\triangleright}(s_i) \sim s_i$ (caso particolare)
- In punto ove le linee medie tocchi l'asse x , si registra punto di stazionarietà di $S_x^{\triangleright}(s_i)$, max. rel., punto con $T_{zs_i}^{\max}$.
- Bilancio di "flussi delle tensioni tangenziali", entranti/uscenti nei nodi delle linee medie :



$$q_3 = q_1 + q_2 \Leftrightarrow S_{x3}^{\triangleright} = S_{x1}^{\triangleright} + S_{x2}^{\triangleright}$$

- Per determinare il CTe, quale punto di applicazione del risultante delle tensioni tangenziali (alle Jouravsky) dovute al taglio, risulta comodo valutare le risultanti R_i delle T_{zs_i} sui vari tratti:



$$R_i = \int_0^{a_i} T_{zs_i}(s_i) b_i ds_i = - \int_0^{s_i} \frac{T_y}{J_x} S_x(s_i) ds_i$$

$$= - \frac{T_y}{J_x} \int_0^{a_i} S_x(s_i) ds_i \quad \text{forma analitica}$$

Sono tre valori dei momenti statici

$$= \frac{a_i}{6} (S_{xA_i} + 4S_{xC_i} + S_{xB_i}) \quad \text{formule di Simpson}$$

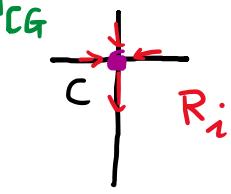
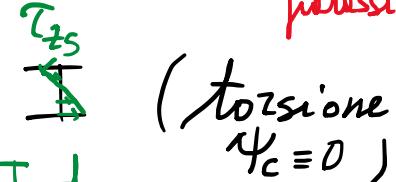
(integre esattamente una parabola)

- Quindi, imponere le condizioni di equivalenza statica (in termini di momento torcente) rispetto al bocentro G (o altro punto comodo):

$$T_y x_c = \sum_i R_i r_{s_i} \Rightarrow x_c = \sum_i \frac{R_i}{T_y} r_{s_i}$$

$$x_c \leftarrow T_y = 1 \\ y_c \leftarrow T_x = L$$

Att. al momento
parassita



- N.B.: nei profili a stelle, il CTe coincide col centro delle stelle (poiché tutte le R_i convergono in esso)

Profiles a Few CTs

The diagram illustrates a T-beam cross-section with the following dimensions and features:

- Vertical Flange:** Width b_f , thickness t .
- Flange Slant:** Slope s_1 .
- Web:** Thickness t_w .
- Flange Top:** Slope s_2 .
- Centerline:** A purple line passing through point C (bottom center) and point G (center of gravity).
- Coordinate Systems:**
 - Global:** $x = u$ horizontal axis, $y = v$ vertical axis.
 - Local:** c horizontal axis along the centerline, y' vertical axis along the centerline.
 - Flange:** a horizontal axis along the flange top, y vertical axis along the flange top.
- Geometric Properties:**
 - Distance from centerline to flange top: $r_{G1} = \frac{h}{2}$
 - Section modulus of the flange: S_1 .
 - Section modulus of the web: S_2 .
 - Section modulus of the entire beam: $S = S_1 + S_2$.
- Material Properties:** Modulus of elasticity E .
- Boundary Conditions:** The beam is fixed at the bottom edge.

$$A = 2c b_f + h b_a = b_f c \left(2 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)$$

$$\eta_G = \frac{5y_1}{A} = \frac{2ebf\frac{c}{2}}{A} = \frac{\cancel{bf}c^2}{\cancel{bf}c\left(2 + \frac{5ah}{bf}c\right)} = \boxed{\frac{c}{2 + \frac{5ah}{bf}c} = \eta_G}$$

$$J_x = \frac{1}{12} b_a h^3 + 2 \left(\frac{1}{12} c b_f^3 + c b_f \frac{h^2}{4} \right) = \frac{b_f c h^2}{12} \left(6 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)$$

Tensioni tangenziali T_{25}

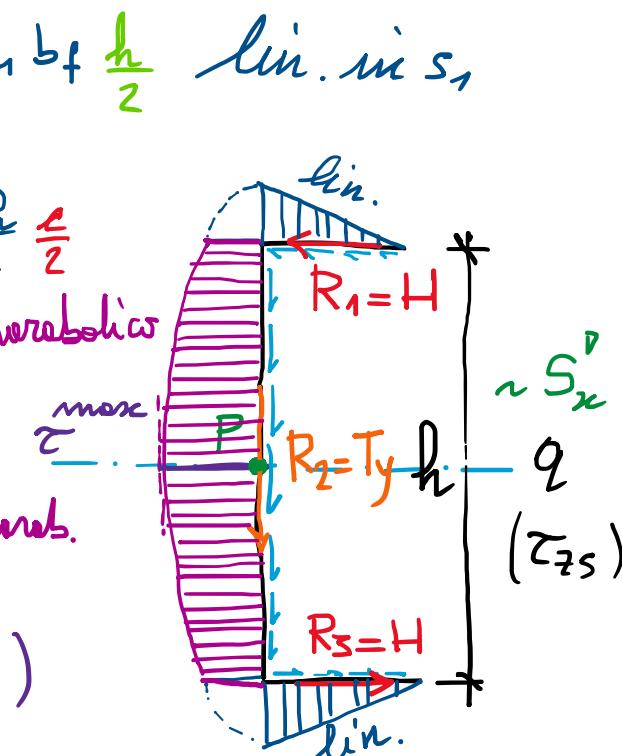
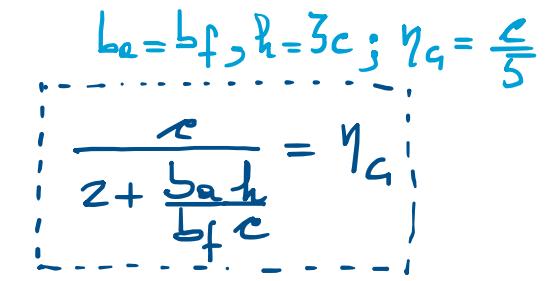
$$\textcircled{1} \quad T_{xz}(s_1) = -\frac{T_y}{J_x} \frac{S_x(s_1)}{b_f}; \quad S_x(s_1) = -s_1 b_f \frac{h}{2} \quad \text{lin. in } s_1$$

$$T_{2s_1}^{\max} = \frac{T_y}{J_x} e \frac{h}{2} \quad H = \int_0^e T_{2s_1} b_f ds_1 = \frac{T_y}{J_x} b_f \frac{e h}{2} \frac{e}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \tau_{zs}(s_2) = -\frac{T_y}{J_x} \frac{S_x(s_2)}{L_a}$$

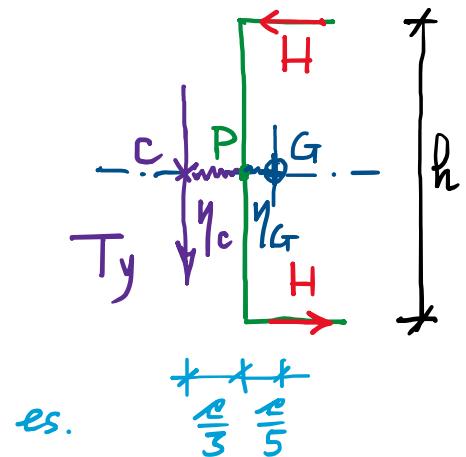
$$S_x(s_2) = c b_f \frac{h}{2} + b_a s_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) \sim s_2^2 \text{ para } b$$

$$\tau^{\text{max}} = \tau_{2S} (s_2 = \frac{h}{2}) = \frac{T_y}{J_x} \frac{h^2}{8} \left(1 + 4 \frac{b+c}{b+2h} \right)$$



Centro di taglio:

- Equivalenza statica rispetto a P (punto "comodo")



$$T_y \eta_c = Hh \quad \text{coppia generata dalle H}$$

N.B. Casinistre
dell'asse
verticale

$$\bar{c}c_1 = \eta_c + \eta_G \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)c = \frac{8}{15}e$$

N.B.: per $T=T_y$ applicato in $O \neq C$

(ad es. tipicamente in G), cioè

"eccentrico" rispetto al CTa,

nasce, da considerare, un concomitente
momento torcente parassita $M_{tp} = T_y \eta_{co}$

(es. $D \equiv G$ ecc. $\eta_{ca} = \eta_c + \eta_G$)

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{H}{T_y} h = \frac{1}{J_x} \frac{b_f h c^2}{4} h$$

$$= 3 \frac{1}{6 + \frac{b_f h}{b_f e}} c$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{3} \frac{b_f h}{b_f e}} c > \eta_G \Leftrightarrow \frac{c}{5}$$

$$\text{es. } b_f = b_f, h = 3c \text{ ; } \eta_G = \frac{c}{3}$$

$$\eta_c = \frac{3c}{4 + c/\eta_G} = \eta_G \frac{3c/\eta_G}{4 + c/\eta_G}$$

Conclusioni sul Corso di CdSdC (da Indice delle Lezioni)

[ARCHIVIO LEZIONI ONLINE CdSdC 2021](#)

Meccanica delle Strutture

- [Lezione 01. Introduzione al corso di CdSdC. Programma. Analisi Cinematica \(AC\) e suoi approcci. Rappresentazione analitica e geometrica di atto di moto \(piano\)](#)
- [Lezione 02. Spostate e mappe di componenti di spostamento \(oriz. e vert.\). Ruolo cinematico di biella e carrello. AC geometrica. I e II Teorema sulle catene cinematiche](#)
- [Lezione 03. AC geometrica per applicazione sistematica di Th. I e II sulle catene cinematiche. Computo di doppiette, triplette e CIR. Esempi di AC geometrica](#)
- [Lezione 04. Esempi di tracciamento di spostate e mappe. AC analitica. Esempio con singolo corpo rigido. Sistema di congruenza. Sistema ridotto da schema ad albero](#)
- [Lezione 05. AC analitica di sistemi articolati. Sistema di congruenza. Proprietà algebriche. Grado di indeterminazione cinematica o di labilità. Classificazione](#)
- [Lezione 06. Analisi Statica \(AS\) e dualità S/C. Sistema di equilibrio. Proprietà algebriche. Grado di indeterminazione statica o di iperstaticità. Classificazione delle strutture](#)
- [Lezione 07. PLV, CN di equilibrio e congruenza; PSV, CS di equil.; PFV, CS di congr. Deformazioni elementari elastiche e termiche. Dualità via PSV. Calcolo di RV/AI col PSV](#)
- [Lezione 08. Soluzione di strutture iperstatiche col PLV \(PFV\). Scrittura indiretta della condizione di congruenza tramite PLV. Calcolo di componenti di spostamento](#)
- [Lezione 09. Soluzione di strutture iperstatiche mediante metodo della Linea Elastica. Condizioni al contorno in presenza di molle assolute e relative, elongazionali e rotazionali](#)
- [Lezione 10. Travature reticolari. AC e AS \(Metodo dei nodi; Metodo delle sezioni\). Esempio di travatura reticolare isostatica, con diagonali tesi o compresi](#)
- [Lezione 11. Travatura reticolare iperstatica soggetta a dilatazione termica. Azione interne in aste curve: arco semicircolare con carico concentrato in chiave](#)
- [Lezione 12. Equazioni indefinite di equilibrio del concio di trave curvilinea. Esempio di arco semicircolare: con q uniforme; con p uniforme](#)

Meccanica dei Solidi

- [Lezione 13. Statica dei continui: sforzo, invarianti, problemi agli autovalori; equazioni indefinite di equilibrio](#)
- [Lezione 14. Cinematica dei continui: spostamento e deformazione; equazioni di congruenza](#)
- [Lezione 15. Problema elastico lineare: bilancio equazioni/incognite. Legame costitutivo iperelastico \(lineare; isotropo, trasversalmente isotropo, ortotropo\)](#)
- [Lezione 16. PLV in meccanica dei continui; dimostrazione \(CN di equilibrio e congruenza\). Proprietà del problema elastico lineare; unicità della soluzione \(Teorema di Kirchhoff\)](#)
- [Lezione 17. Problema di de Saint Venant: ipotesi e definizioni; approccio semi-inverso agli sforzi; sforzo normale lineare; problema differenziale nelle tensioni tangenziali](#)
- [Lezione 18. Caso di DSV della torsione. Approccio agli spostamenti: problema di Neumann-Dini per l'equazione di Laplace](#)
- [Lezione 19. Centro di torsione. Approccio agli sforzi: problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Quadro sinottico dei due approcci](#)
- [Lezione 20. Analogie fisiche del problema della torsione: analogia idrodinamica; analogia della membrana](#)
- [Lezione 21. Soluzioni analitiche del problema della torsione: sezione ellittica; sezione rettangolare sottile](#)
- [Lezione 22. Torsione nei profili sottili aperti](#)
- [Lezione 23. Torsione nei profili sottili chiusi. Formula di Bredt. Confronto profilo aperto/chiuso](#)
- [Lezione 24. Taglio e centro di taglio. Taglio nei profili sottili aperti e formati da rettangoli sottili. Centro di taglio del profilo a C. Conclusioni sul corso](#)