Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

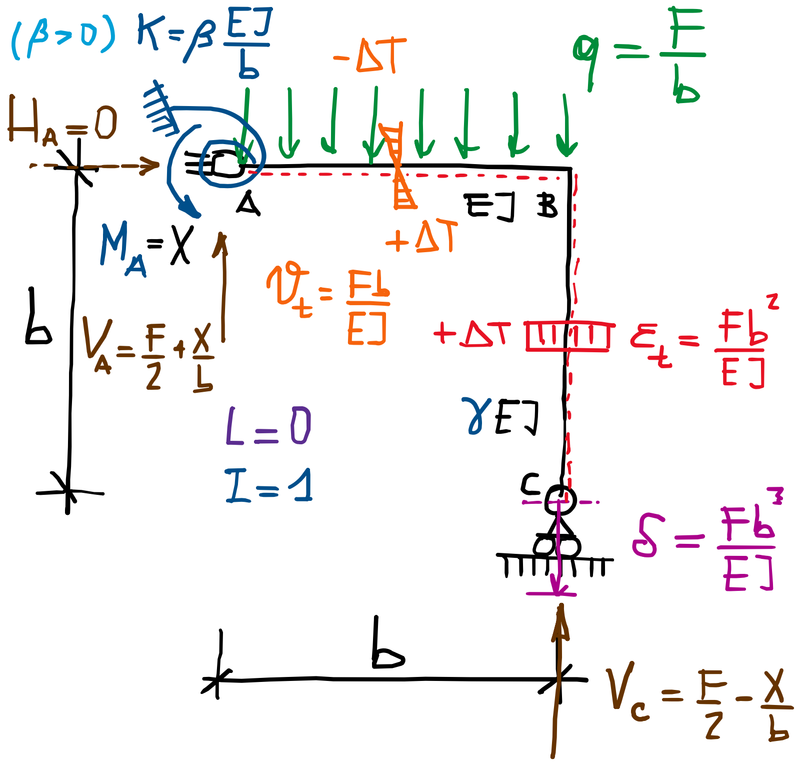
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

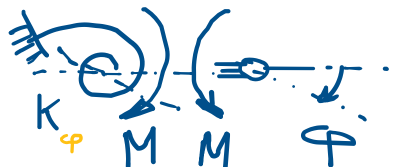
LEZIONE 08

Soluzione di strutture staticamente indeterminate (tramite PLV ⇒ PFV, (S di congruenza)

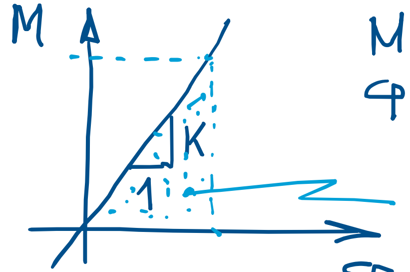


Dati:

- carico uniformemente ripartito $[q]=\frac{[F]}{[L]}$
- molla elastica (lineare) rotazionale ⇒ vincolo cedevole elastic.



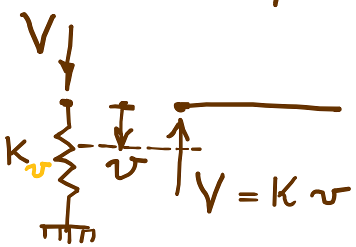
$K\to 0$ $M\to 0$ (no molla)
$K\to\infty$ $\varphi\to 0$ (incastro)

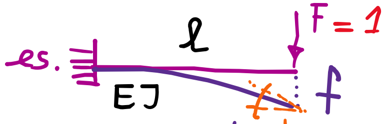


$M=K\varphi$
$\varphi=\frac{1}{K}M$ Legge di Hooke

$\mathcal{E}=\frac{1}{2}M\varphi=\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{2}K\varphi^2\\ \frac{1}{2}\frac{1}{K}M^2\end{array}\right.>0$ energia elastica

similmente per molla elongazionale





$f_1=\frac{1}{3}\frac{F\ell^3}{EJ}$ coeff. di influenza

$\phi_1=\frac{1}{2}\frac{F\ell^2}{EJ}$

$K=\frac{M}{\varphi}\sim\frac{\cancel{Fb}}{\frac{\cancel{Fb^2}}{EJ}}=\frac{EJ}{b}$

rigidezza elastica >0

- cedimento vincolare (permanente, anelastico) $\delta\sim\frac{Fb^3}{EJ}$
- deformazione termica uniforme $\varepsilon_t\sim\frac{Fb^2}{EJ}$
- curvatura termica // (lungo AB) $\vartheta_t\sim\frac{Fb}{EJ}$ come per $\chi_e=\frac{M}{EJ}$

Equazioni di equilibrio:

$\sum F_x=0 \Rightarrow H_A=0$

$\sum M_c=0 \Rightarrow V_A=\frac{F}{2}+\frac{M_A}{b}$

$\sum M_A=0 \Rightarrow V_c=\frac{F}{2}-\frac{M_A}{b}$

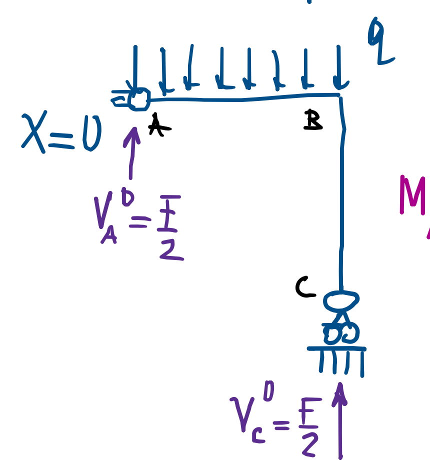
RV=RV(X)

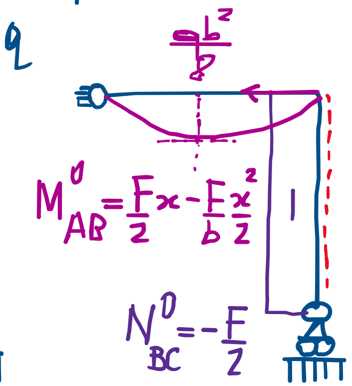
$(\sum F_y=0$ ✓ $V_A+V_c=F)$

↑ scelta inc. iperstatica X (metodo delle forze) ⇒ eq. di congruenza $\varphi_A=X/K$

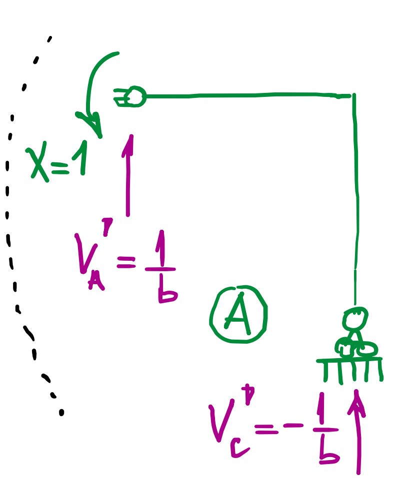
Soluzione mediante PLV (PFV)

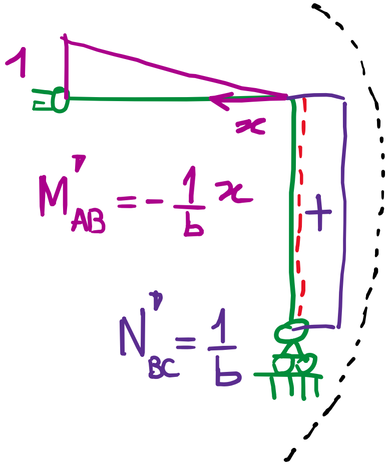
• Struttura principale isostatica • Struttura fittizia • Struttura reale



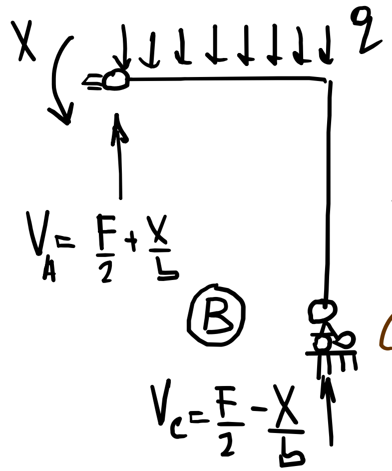


$+X$





$=$



PSE

$$\begin{cases} RV = RV^0 + X\,RV^1 \\ AI = AI^0 + X\,AI^1 \end{cases}$$

(quantità statiche)

• Scrittura del PFV: $\begin{cases} Ⓐ \text{ equil.} \\ d_e^{AB} = d_i^{AB} \end{cases} \Rightarrow$ Ⓑ congruente

$$\underbrace{\frac{1}{b}\cancel{v_A} + \left(-\frac{1}{b}\right)(-\delta) + 1\left(-\frac{X}{K}\right)}_{\text{cedimenti vincolari}} = \underbrace{\int_{St_2} M^1 \frac{(M^0 + XM^1)\,ds}{EJ}}_{d\varphi_e \text{ reale}} + \underbrace{\int_B^C N^1 \varepsilon_t\,ds + \int_A^B M^1 \vartheta_t\,ds}_{\text{effetti termici}} \Rightarrow \text{eq.ne di congruenza in } X$$

$$X = -\frac{\int_{St_2} \frac{M^1 M^0 ds}{EJ} - \frac{\delta}{b} + \int_B^C N^1 \varepsilon_t ds + \int_A^B M^1 \vartheta_t ds}{\int_{Str} \frac{M^{1\,2} ds}{EJ} + \frac{1}{K}} = -\frac{-\frac{1}{24}\frac{Fb^2}{EJ} - \cancel{\frac{Fb^2}{EJ}} + \cancel{\frac{1}{b}\frac{Fb^2}{EJ}X} - \frac{1}{2}\frac{1}{b}b^2\frac{Fb}{EJ}\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\frac{b}{EJ} + \frac{1}{\beta}\frac{b}{EJ}} =$$

-o-- $\beta \to 0,\ X \to 0$
⫨-- $\beta \to \infty,\ X \to \frac{13}{8}Fb$

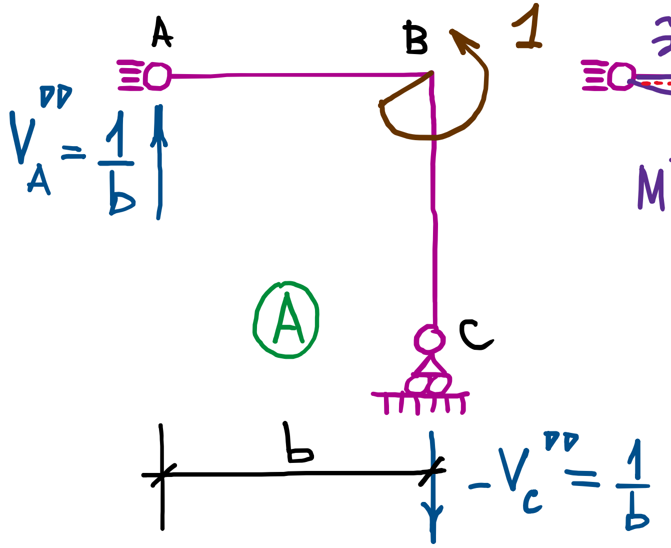
$$= \frac{\frac{13}{24}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\beta}} \frac{\frac{Fb^2}{\cancel{EJ}}}{\frac{b}{\cancel{EJ}}} = \frac{13}{\cancel{24}_8} \frac{\cancel{3}\beta}{3+\beta} Fb = \boxed{\frac{13}{8}\frac{\beta}{3+\beta}Fb = X}$$

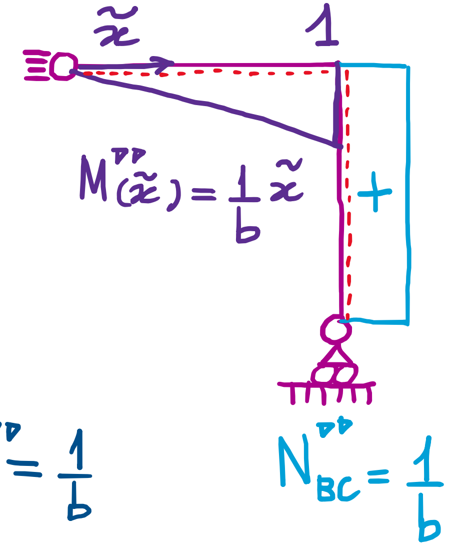
$\rightarrow V_A = \frac{1}{8}\frac{12+17\beta}{3+\beta}F,\ V_C = \frac{3}{8}\frac{4-3\beta}{3+\beta}F \Rightarrow$ N.B.: $V_C \le 0$ per $\beta \ge \frac{4}{3}$

• <u>Calcolo di componenti di spostamento</u>, a valle del calcolo dell'incognita iperstatica X e avendo quindi note $RV = RV(X)$ e $AI = AI(X)$ finali, per il valore di X trovato, tale da imporre la congruenza, in corrispondenza del gdv ritenuto iperstatico, mediante scrittura del PLV (PFV, quale CS di congruenza).

<u>Esempio</u>: calcolo di φ_B (utile a rappresentare la deformata qualitativa; si noti che B risulta nodo "fisso", cioè con $u_B = v_B = 0$)

- Nuova scrittura del PLV, con ulteriore struttura fittizia (o ausiliaria, virtuale), avente solo una coppia unitaria in B:





PFV (B str. reale): M finale, $M(\tilde{x}) = -X + V_A \tilde{x} - \frac{q\tilde{x}^2}{2}$ con X, V_A finali

$$1\,\varphi_B + \frac{1}{b}\,\delta = \int_{str} M'' \underbrace{\frac{(M^0 + X M')}{EJ}}\, ds + \int_A^B M''\, \vartheta_t\, ds + \int_B^C N''\, \varepsilon_t\, ds$$

Risulta: $\varphi_B = \frac{13}{48}\,\frac{6+\beta}{3+\beta}\,\frac{Fb^2}{EJ}$ (rotazione antioraria)

Mentre: $\varphi_A = -\frac{X}{K} = -\frac{13}{6\cdot 8}\,\frac{6\cdot 1}{3+\beta}\,\frac{Fb^2}{EJ}$ (" oraria, $\varphi_B > |\varphi_A|$ $(\beta > 0)$)

Quindi, per moto rigido BC $(+\Delta l_t^{BC})$: $u_C = \varphi_B\, b$, $v_C = -\delta$