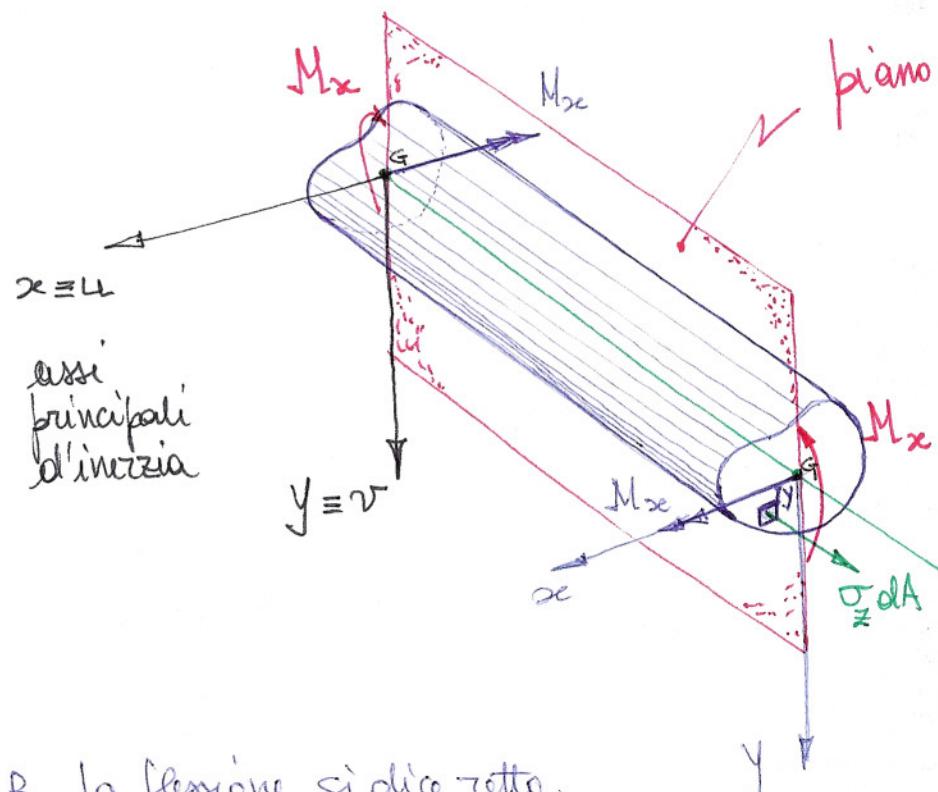


2) Flessione (retta).

le forze di superficie equivalgono ad una coppia agente secondo un piano di sollecitazione (contenente un asse principale d'inerzia della sezione).



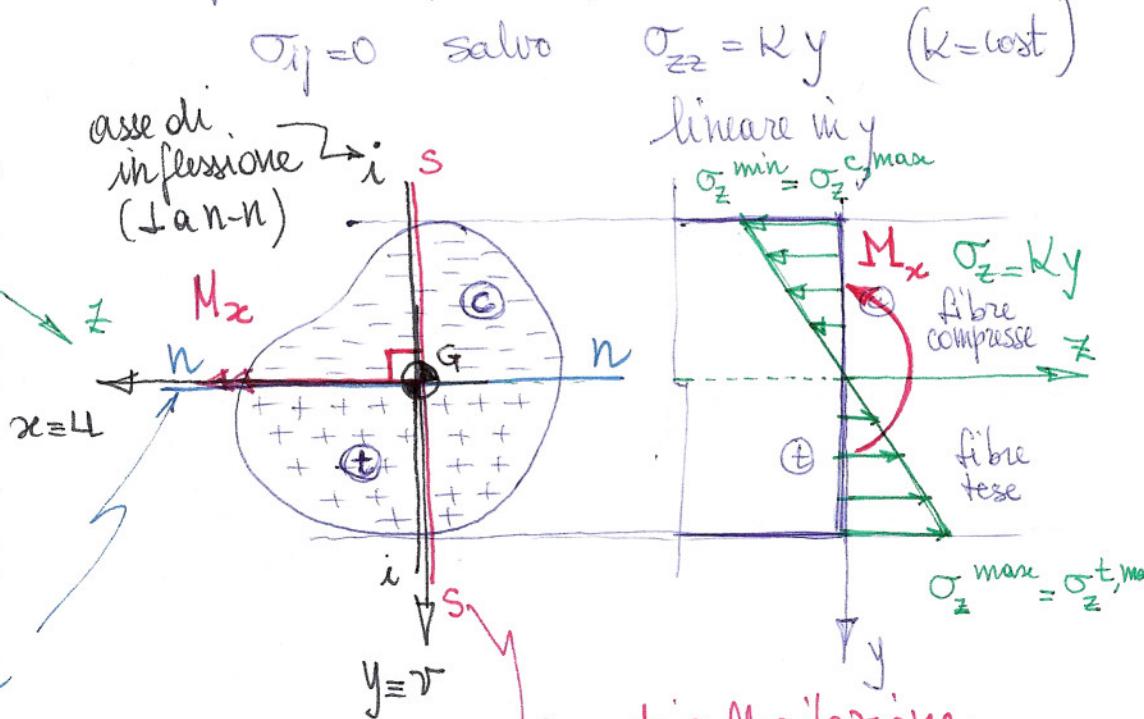
N.B. la flessione si dice retta poiché  $n-n \perp s-s$

( $s-s$  coincide con un asse principale d'inerzia,  $n-n$  con l'altra asse principale).

asse neutro  
(luogo dei p.ti della sezione ove  $\sigma_z = 0$ )

piano di sollecitazione (qui coincidente col piano  $(y, z)$ , con  $y=r$  asse principale d'inerzia)

- H.p. sul campo di spazza:



asse di sollecitazione  
(traccia del piano di sollecitazione sul piano della sezione)

- Si può verificare che tutte le equazioni governanti il pb. elastico sono soddisfatte in corrispondenza della soluzione ipotizzata.
- Resta da determinare  $K$  per mezzo della condizione di equivalenza statica:

$$\int_A (\sigma_z dA) \cdot y = \int_A dM_{zc} = M_{zc} \quad \text{con } \sigma_z(y) = K y$$

$$\int_A K y^2 dA = K \underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_{zc}} = K J_{zc} = M_{zc} \Rightarrow K = \frac{M_{zc}}{J_{zc}}$$

Momento d'inerzia  
rispetto all'asse se

- Pertanto si ottiene:

$$\sigma_z(y) = \frac{M_{zc}}{J_{zc}} y$$

Formula di NAVIER  
per la flessione

Gli sforzi normali massimi in valore assoluto si producono nei p.ti della sezione più lontani dall'asse neutro (baricentrico e  $\perp$  all'asse di sollecitazione).



$$\sigma_z = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{Eq. dell'asse neutro}$$

(coincidente in questo caso con l'asse  $zc$ )

## Campo di deformazione:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EJ_x} y$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \rightarrow \epsilon_z = -\frac{y M_x}{E J_x} y$$

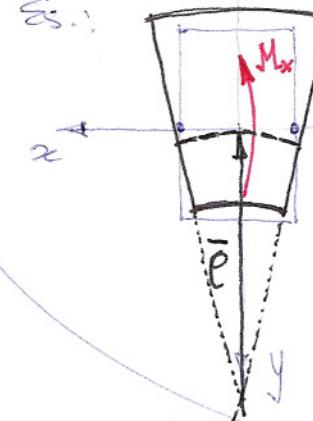
mentre  $\gamma_{ij} = 0$  (scorrimenti angolari nulli)

Deformazione del concio  
di prisma

+

Responsabile di una deformazione  
nel piano della sezione

Ese.:



Curvatura  
anticlastica

$$\bar{x} = \nu x < x$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\nu} \rho > \rho$$

$EJ_x$ : rigidità flessionale

$$[EJ_x] = [F][L]^2$$

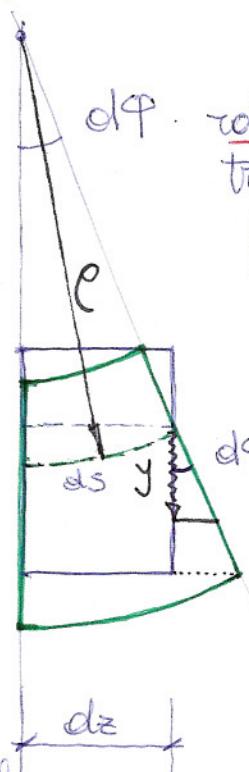
$$ds = \rho d\phi$$

$$x = \frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} \approx \frac{d\phi}{dz}$$

curvatura della linea d'asse deformata

$x = \frac{M_x}{EJ_x}$   
nel piano di inflessione + allo asse neutro, qui  $\equiv$  al piano di sollecitazione

- Soluz. in termini di spostamento noto e meno di mati rigidi.



rotazione relativa  
tra due sezioni poste a distanza  $dz$

$$ds_z = \epsilon_z(y) dz = y \cdot d\phi \Rightarrow$$

la sezione ruota rimanendo piana e i alla linea media deformata

$$\frac{\sigma_z}{E} dz = y d\phi$$

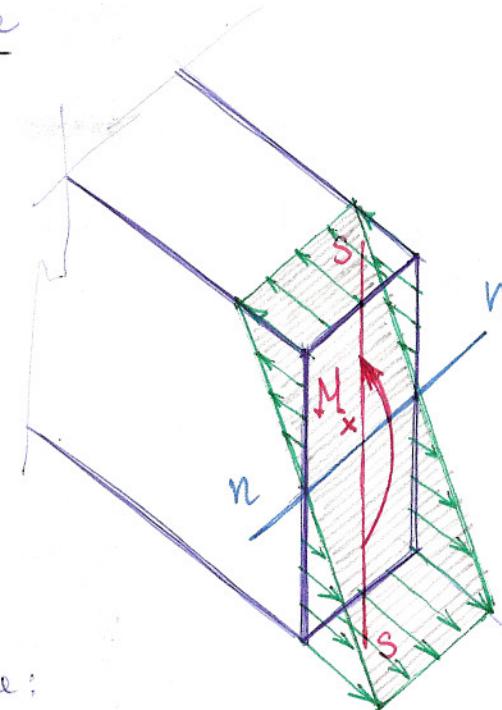
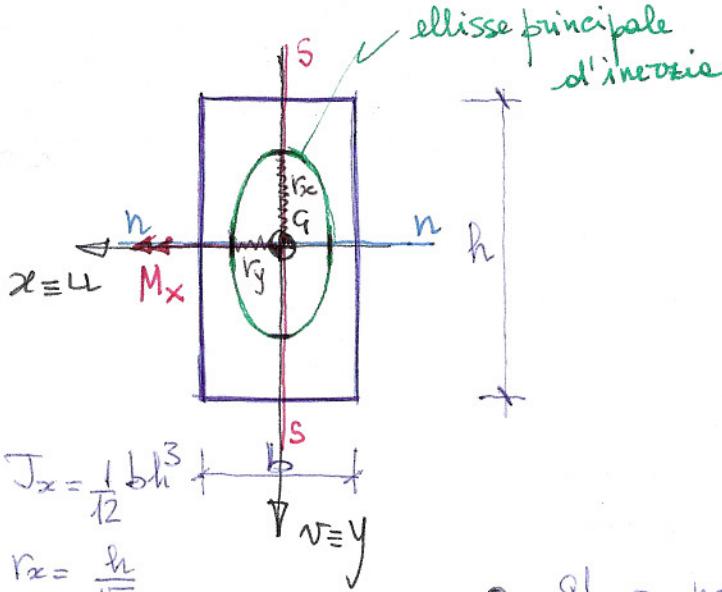
$$\frac{M_x}{E J_x} y dz = y d\phi \Rightarrow$$

$$d\phi = \frac{M_x dz}{E J_x}$$

- Rotazione relativa tra le due facce del prisma poste a distanza  $l$ :

$$\Delta\phi = \frac{M_x l}{E J_x}$$

## Caso della sezione rettangolare



$$\sigma_z(y) = \frac{M_x}{J_x} y$$

- Sforzo normale:

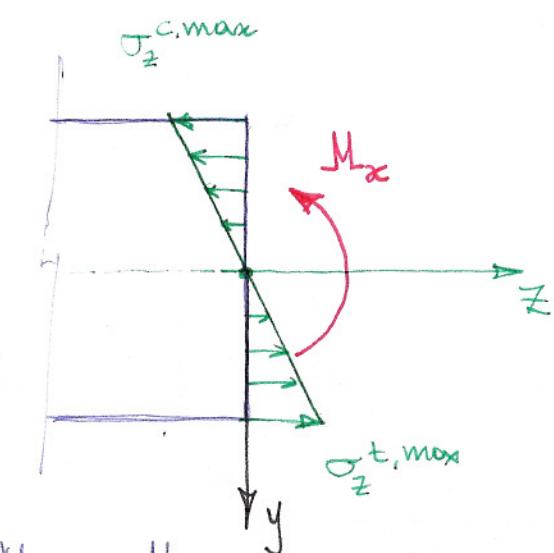
$$\begin{aligned}\sigma_z(y) &= \frac{M_x}{J_x} y = \\ &= \frac{M_x}{\frac{1}{12} b h^3} y = \frac{12 M_x}{b h^3} y\end{aligned}$$

- Sforzo normale massimo:

$$\sigma_z^{t,\max} = \sigma_z^{c,\max} = \frac{\frac{6}{12} M_x \frac{h}{2}}{b h^3 \frac{h}{2}} = \frac{6 M_x}{b h^2} = \frac{M_x}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{M_x}{W_x}$$

$$\text{ove } W_x = \frac{J_x}{\frac{h}{2}} = \frac{2 J_x}{h} = \frac{b h^3}{6}$$

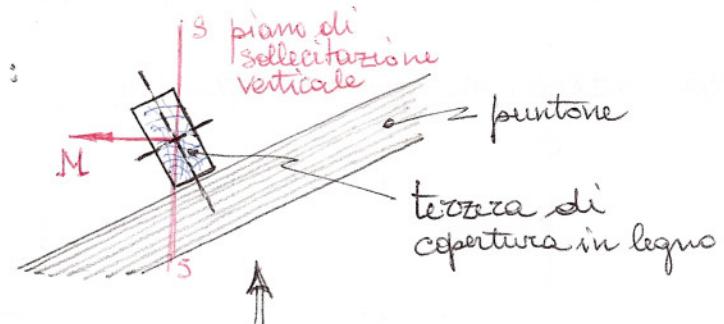
modulo di resistenza a flessione delle sezioni  $[W_x] = [L]^3$



## Sollecitazioni composite:

- flessione deviata  $(M_x, M_y)$
- tensio-flessione  $(N, M)$

Esempio:  
di fless.  
deviata

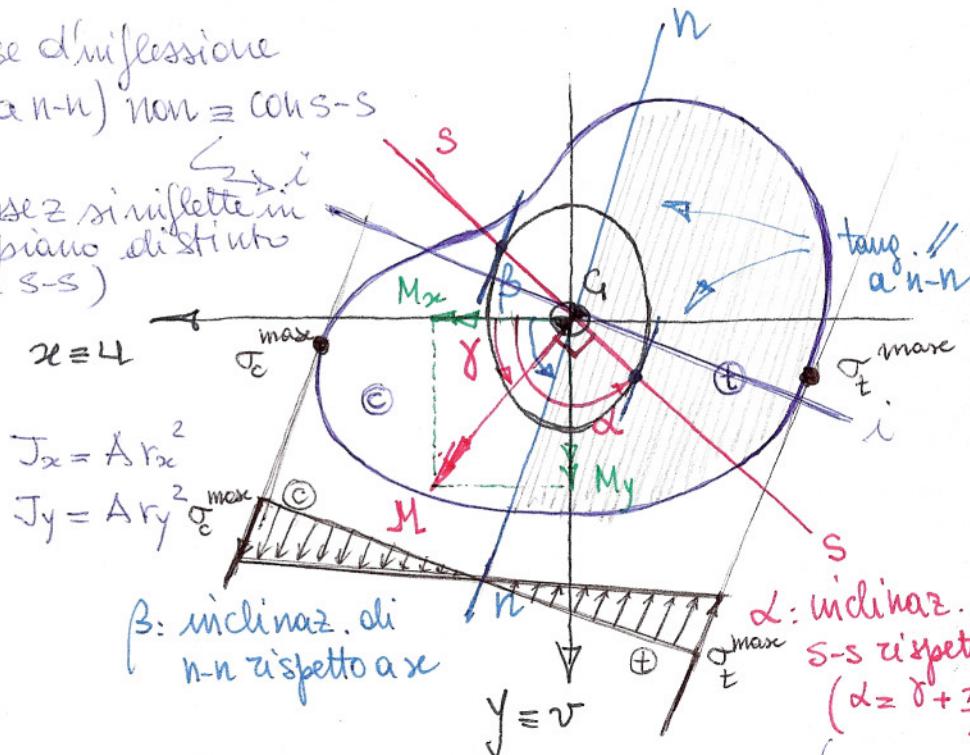


Flessione deviata: asse s-s non coincide con un asse principale d'inerzia.

asse d'inversione

$(I_{an-n}) \neq I_{ch-s-s}$

(l'asse z si riflette in  
un piano distinto  
dal s-s)



Eq. dell'asse neutro:

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow y = \left( \frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y} \right) \cdot x = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} x \quad (\text{è baricentrico})$$

ove  $\tan \beta = \tan \gamma \frac{r_x^2}{r_y^2} \rightarrow \tan \alpha \tan \beta = -\frac{r_x^2}{r_y^2}$   
n-n compreso tra il vettore M  
è l'asse principale ad inerzia  
minore

$$m \ m' = -\frac{r_x^2}{r_y^2}$$

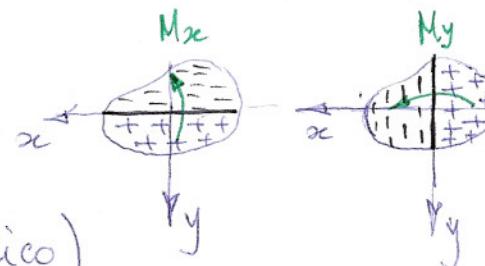
Il vettore coppia M, agente la s-s, può essere decomposto in due componenti, utili a determinare lo sforzo per sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} M_{xc} = M \cos \gamma \\ M_{yc} = M \sin \gamma \end{cases}$$

$$\frac{M_y}{M_{xc}} = \frac{M \sin \gamma}{M \cos \gamma} = \tan \gamma$$

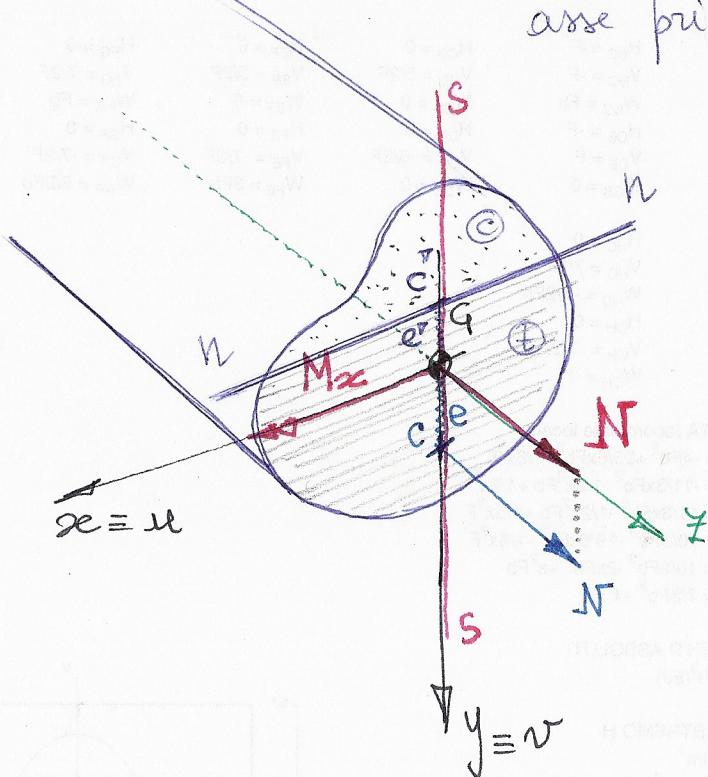
$$\sigma_z(x,y) = \frac{M_{xc} \cdot y}{J_x} - \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

Lo sforzo normale massimo si produce nei p.ti più lontani dall'asse neutro



Dalle geom. proiettive: Inviluppo dei diametri coniugati dell'ellisse centrale d'inerzia.  
L'asse n-n è il coniugato di s-s nella polarità avente come conica fondamentale reale l'ellisse centrale d'inerzia.

Tenso-flessione (retta:  $N$  centrale in  $G$  +  $M$  agente secondo un asse principale, cioè  $N$  centrale in  $C \neq G$ , centro di sollecitazione, è ad un asse principale)



$$e = \overline{GC} : \text{eccentricità}$$

$$\text{tale che } M_x = N \cdot e \text{ oppure } e = \frac{M_x}{N}$$

Il campo di sforzo si ottiene per sovrapposizione degli effetti (dovuti a  $N$  e  $M_x$ ):

$$\sigma_z(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$$

$$= \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e}{r_x^2} y \right)$$

$$\begin{cases} M_x = N \cdot e \\ J_x = A r_x^2 \end{cases}$$

In  
Geometria proiettiva:

Relazione tra punti  $C, C'$  coniugati in una involuzione:  
 $n-n$  è l'antipolare di  $C$  rispetto alla ellisse centrale di incisiva della sezione

Equazione dell'asse neutro (luogo dei punti ove  $\sigma_z = 0$ ):

$$\frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e}{r_x^2} y \right) = 0 \Rightarrow y = - \frac{r_x^2}{e} = - e^\tau \quad \text{con} \quad e \cdot e^\tau = r_x^2$$

L'asse neutro è sempre  $\perp$  all'asse  $y$  ma risulta a sua volta eccentrico rispetto a  $G$

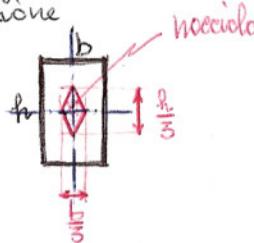
e collocato dalla parte opposta di  $C$  rispetto a  $G$ .

Quindi, se appare  $N$ , l'asse neutro non risulta più baricentrico come nel caso delle pure flessioni

## Osservazioni

- Se  $e=0$  ( $M_x=0$ ),  $e^2 \rightarrow \infty$ : significa che la sezione è interamente tesa o compresa.
- Se  $e \rightarrow \infty$  ( $N=0$ ),  $e^2=0$ : " " " " " " parzialmente tesa e parzialmente compresa, per la sola sollecitazione di flessione, con asse neutro barientrico.
- $e \cdot e^2 = r_x^2$ :  $r_x$  è medio geometrico tra  $e$  ed  $e^2$ . ( $r_x = \sqrt{e \cdot e^2}$ )  
L'asse n-n e il centro C tendono a respingersi: per  $e$  da  $\infty$  a 0,  $e^2$  passa da 0 a  $\infty$  (con  $C^*$  sempre dalla parte opposta di C rispetto a G).

vedi nocciolo centrale d'inerzia: luogo dei centri C con n-n esterno o tangente alla sezione

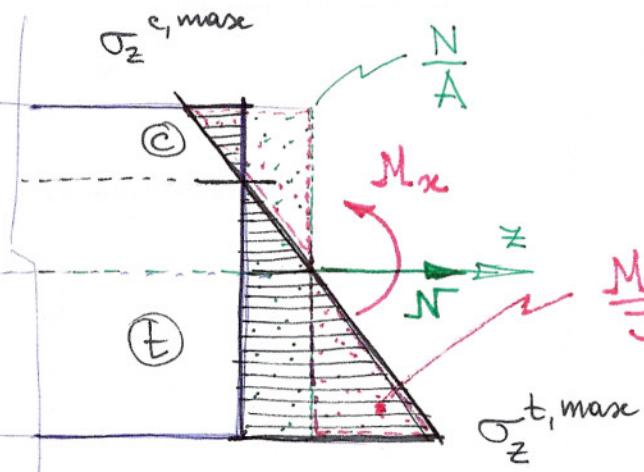
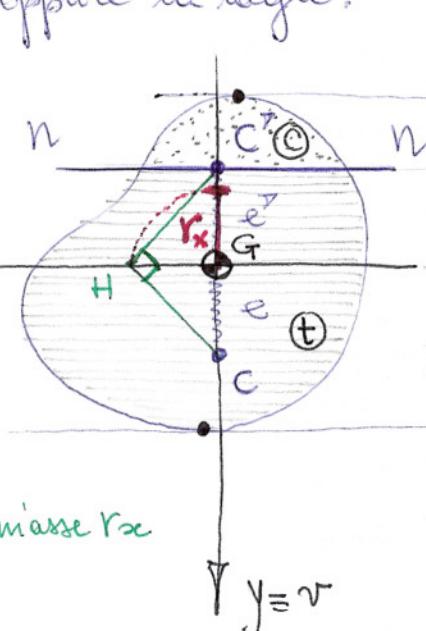


II<sup>th</sup>. di Euclide:

$$\overline{GC} \cdot \overline{GC}^* = \overline{GH}^2$$

(+ ottenuto ribaltando il semiasse  $r_x$  sull'asse x)

$\overline{HC}^*$  preso  $\perp$  a  $\overline{HC}$



$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$$

Tensioni normali max in valore assoluto nei p.t. delle sezioni più lontani dall'asse neutro