Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

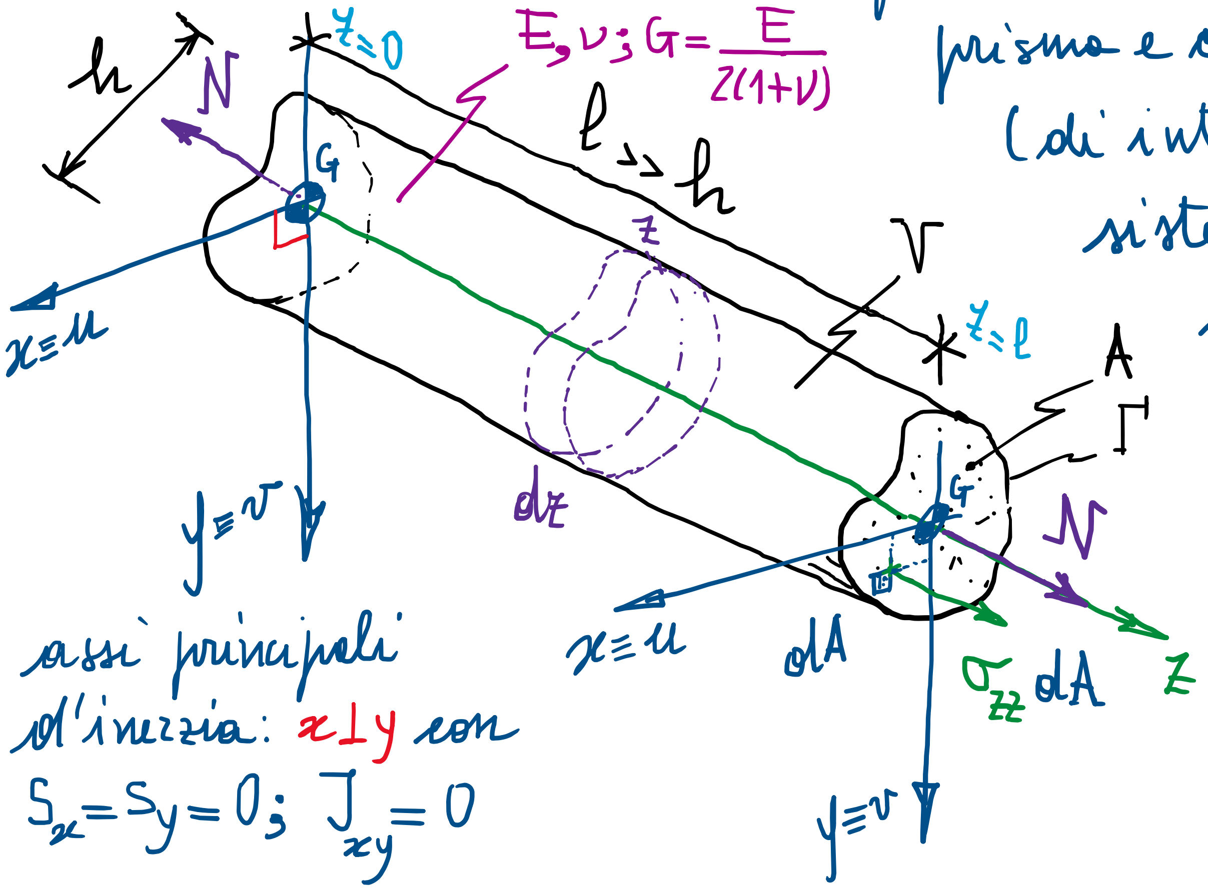
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

Casi di de Saint Venant

1) Azione assiale o normale N: presenti due risultanti assiali, cioè normali alle basi del prisma e centrate nel baricentro G, uguali e contrarie (di intensità N), quindi tali da formare un sistema di forze autoequilibrato (in particolare alla traslazione lungo l'asse).



assi principali d'inerzia: $x \perp y$ con $S_x = S_y = 0$; $J_{xy} = 0$

- Si opera con approccio "seminverso" agli sforzi mediante ipotesi sul campo di sforzo:

$$\sigma_{zz} = \sigma_z = K = \text{cost}\,; \quad \sigma_{ij} = 0 \ \text{altrimenti}$$

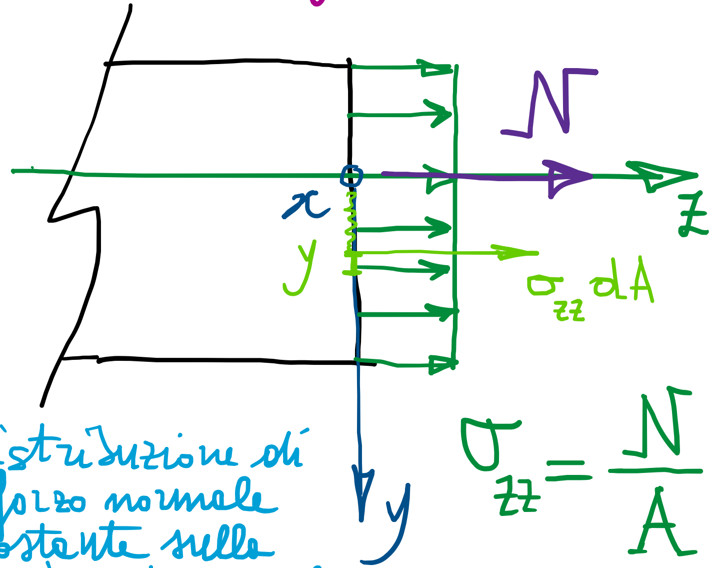
distribuzione di sforzo normale costante sulla sezione trasversale.

- Si verifica che le equazioni governanti il pb. di DSV (particolare pb. elastico lineare), di equilibrio, congruenza e legame costitutivo, risultino soddisfatte, in maniera tale che la soluzione ipotizzata corrisponda alla soluzione reale cercata. $\rightarrow$ CdSdC

- Resta da determinare la costante K, mediante la seguente condizione di equivalenza statica (tra il campo σ_{zz} e l'azione N che l'ha ingenerato):

$$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA$$

$$= \int_A K\, dA = K\int_A dA = K A \Rightarrow \boxed{K = \frac{N}{A}}$$



$$\boxed{\sigma_{zz} = K = \frac{N}{A}}$$

distribuzione di sforzo normale costante sulla sezione trasversale

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$

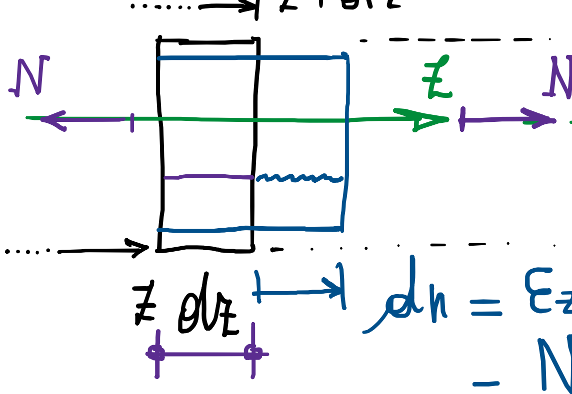
- Campo di deformazione:

Da legge costitutiva,

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{N}{EA}$$

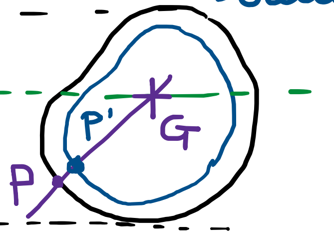
$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\, \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu N}{EA}$$

$$\left(\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \equiv 0\right)$$



$$d\eta = \varepsilon_{zz}\, dz = \frac{N\, dz}{\underbrace{E \cdot A}_{\text{rigidezza assiale}}}$$

contrazione omotetica della sez. trasv. nel suo piano



$$\varepsilon_r = \varepsilon_{PG} = \frac{\overline{P'G} - \overline{PG}}{\overline{PG}} = -\frac{\nu N}{EA}$$

(materiale isotropo)

- Soluzione in termini di spostamento: nota a meno di moti rigidi, in particolare nella direzione dell'asse (z) del prisma.

- Allungamento totale (spostamento relativo nella direzione assiale, tra le due basi):

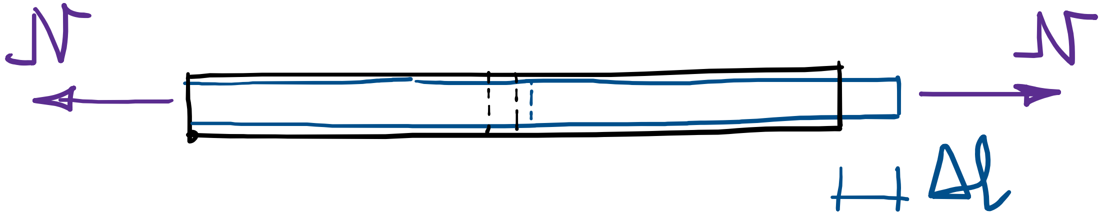
$$\ell = \int_0^\ell dz$$

$$\Delta \ell = \int_0^\ell du = \int_0^\ell \frac{N\,dz}{EA} = \frac{N\ell}{\boxed{EA}}$$

- dirett. prop. a N
- " " a ℓ
- invers. prop. alla rigidezza assiale $E \cdot A$

quindi:

- inv. prop. a E
- " " a A



legge "costitutiva" della trave soggetta ad azione assiale

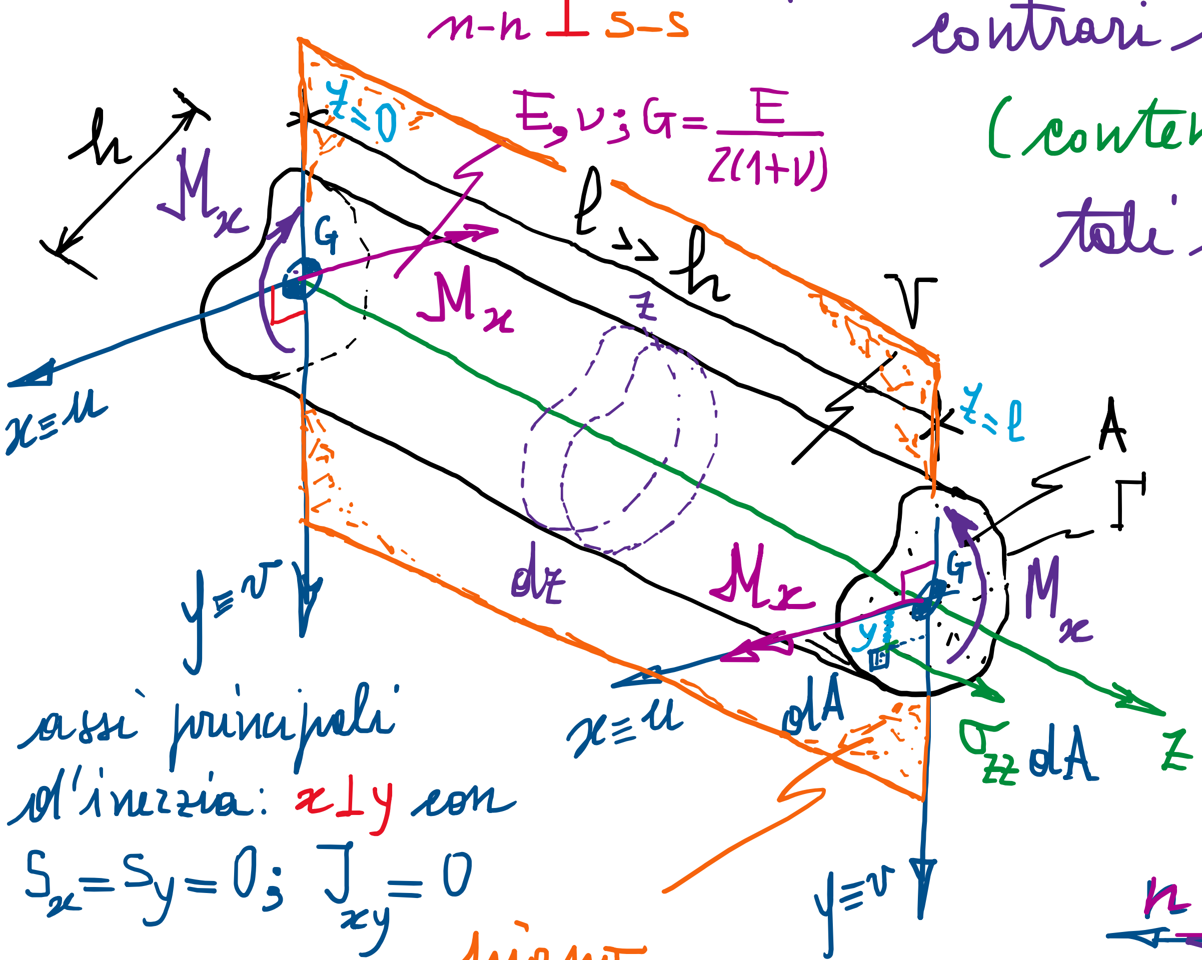
$$\Delta \ell = \overbrace{\frac{1}{EA/\ell}}^{\text{cedevolezza}} N \quad \longleftrightarrow \quad x = \overbrace{\frac{1}{K}}^{\text{cedevolezza}} F$$

molla elastica lineare (Hooke)

equivalente a

$$N = \underbrace{\frac{EA}{\ell}}_{\text{rigidezza}} \Delta \ell \quad \longleftrightarrow \quad F = \underbrace{K}_{\text{rigidezza}} x$$

2) Flessione (retta): presenti sulle basi due momenti flettenti, uguali e contrari agenti in un piano di sollecitazione (contenente un asse principale d'inerzia, es. y), tali da formare un sistema autoequilibrato.



– Hp. sul campo di sforzo:

$$\sigma_{zz} = \sigma_z = \underbrace{k}_{\text{cost}}\, y \; ; \quad \sigma_{ij} \equiv 0 \text{ altrimenti}$$

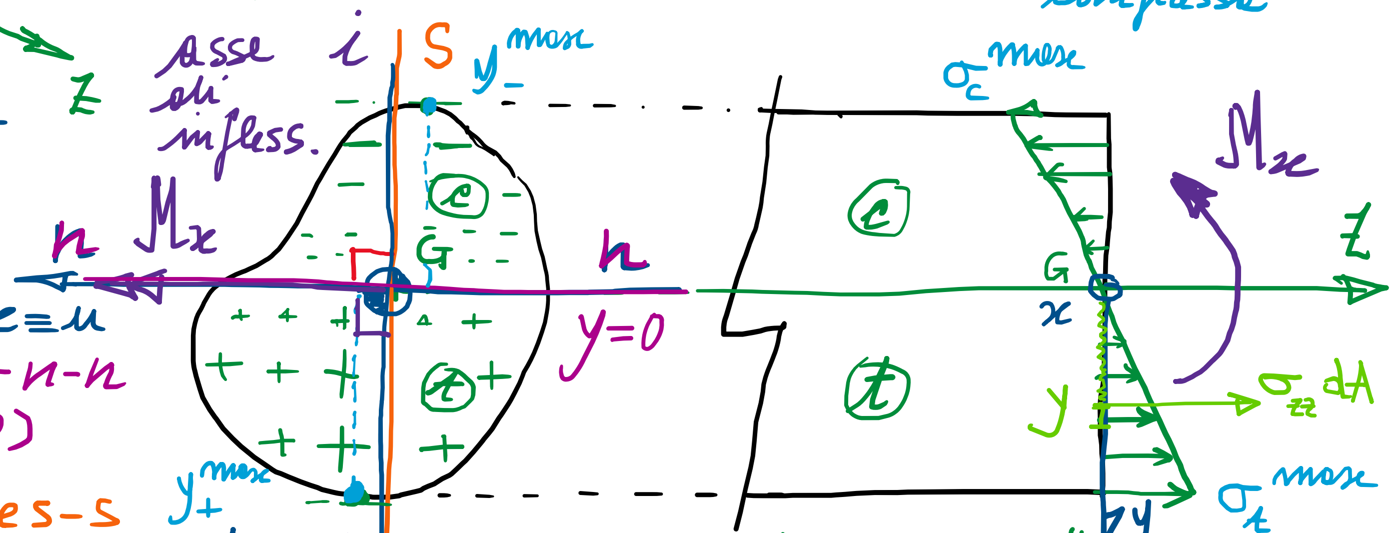
sforzo lineare sulla sez. (in y)

sezione parzialm. tesa e parzialm. compressa

assi principali d'inerzia: x⊥y con $S_x = S_y = 0$; $J_{xy} = 0$

piano di sollecitazione

asse neutro n-n ($\sigma_{zz} = 0$)



s-s avente traccia asse s-s (y≡v, z) nel piano della sez.

σ_{zz} lin. "a farfalla" sulla sez.

– Si può verificare che le eq.ni governanti risultano soddisfatte. 2 → CdSdC

– Resta da determinare la costante k, dalla condizione di equivalenza statica (tra M_x e le σ_{zz} da esso ingenerate):

$$M_x = \int_A \underbrace{\sigma_{zz}}_{ky} dA \cdot y = \int_A k \underbrace{y\, y}_{y^2} dA = k \underbrace{\int_A y^2 dA} \Rightarrow \boxed{k = \frac{M_x}{J_x}} \quad [F][L]$$

– Formula di Navier per la flessione:

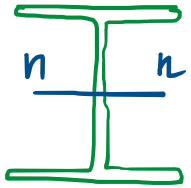
$$\boxed{\sigma_{zz}(y) = \frac{M_x}{J_x}\, y} \qquad \frac{[F]}{[L]^2}$$

– dirett. prop. a M_x

– invers. " a J_x

– dirett. prop. a y (distanza da n-n)

$0 < J_x$ momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse x (asse n-n) $[L]^4$



IPE in acciaio $J_x \uparrow$

$$\begin{cases} \sigma_t^{max} = \dfrac{M_x}{J_x}\, y_+^{max} = \dfrac{M_x}{J_x / y_+^{max}} = \dfrac{M_x}{W_x^+} \\[2ex] \sigma_c^{max} = \dfrac{M_x}{J_x}\, |y_-^{max}| = \dfrac{M_x^+}{J_x / |y_-^{max}|} = \dfrac{M_x}{W_x^-} \end{cases}$$

moduli di resistenza a flessione (a traz./compr.) $[L]^3$ (sforzi max invers. prop. a tali moduli)

prop. geometrica sez. trasv.

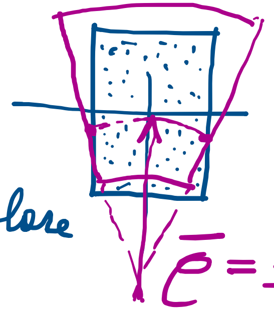
- Campo di deformazione:

Da legge costitutiva

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \overbrace{\frac{M_x}{EJ_x}}^{\chi_x} y$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\,\varepsilon_{zz} = -\overbrace{\nu\frac{M_x}{EJ_x}}^{\bar{\chi}_x} y$$

$$\left(\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \equiv 0\right)$$



es. sez. rettangolare

$\bar{\rho} = \frac{1}{\nu}\rho > \rho$ (fuori scala)

curvatura "anticlastica" $\bar{\chi}_x = \nu\chi_x < \chi_x$

nel piano della sezione

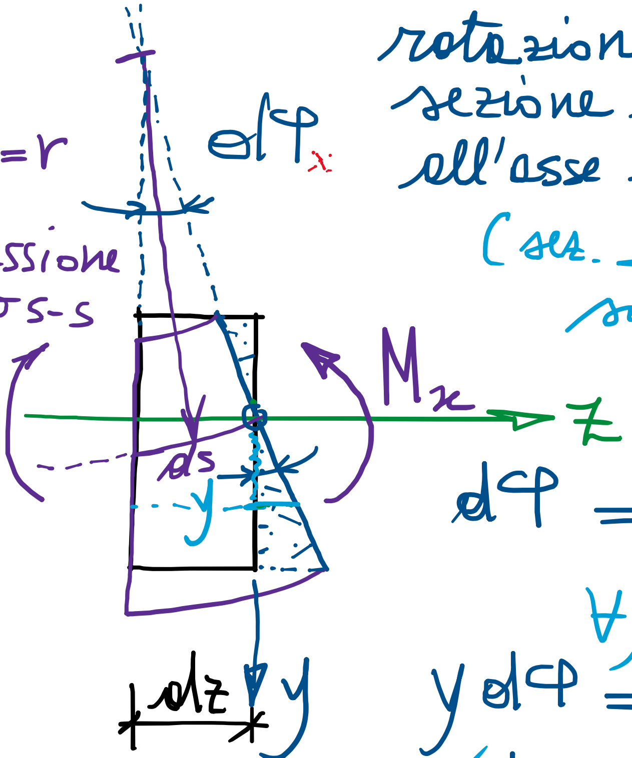
piano i-i

≡ in piano di inflessione

≡ con piano s-s

linea d'asse inflessa

$\rho = r$



$$\rho\, d\varphi = ds \simeq dz$$

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \simeq \frac{d\varphi}{dz}$$

rotazione della sezione piana e ⊥ all'asse inflesso

(sez. ⊥ al piano di sollecitazione)

rotazione relativa

$$d\varphi = \frac{M_x\, dz}{EJ_x} \quad \forall y$$

$$y\, d\varphi = \varepsilon_{zz}\, dz$$

$$\cancel{y}\, d\varphi = \underbrace{\frac{M_x}{EJ_x}}_{\chi_x}\cancel{y}\, dz$$

χ_x curvatura elastica

$$d\varphi = \frac{M_x\, dz}{\boxed{EJ_x}}$$

rigidezza flessionale

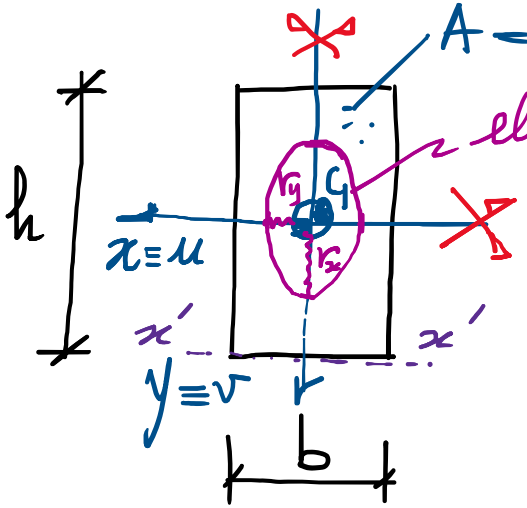
- Per l'intero prisma (rotazione relativa tra le basi):

$$\Delta\varphi_x = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_x\, dz}{EJ_x} = \frac{M_x l}{EJ_x} = \frac{1}{\underbrace{EJ_x/l}_{\text{cedevolezza}}} M_x \,; \quad M_x = \frac{EJ_x}{\underbrace{l}_{\text{rigidezza}}}\Delta\varphi_x$$

$$\chi_x = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Legge di E-B-N

Es.: Sezione rettangolare



$$J_{x'} = \int_A y'^2 \, dA$$

$$= \int_0^b \int_0^h y'^2 \, dx' \, dy'$$

$$= \frac{1}{3} b h^3 \quad [L]^4$$

$$J_x = J_{x'} - A y_G'^2$$

$$= \frac{1}{3} bh^3 - bh \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\frac{3}{3}\right) bh^3 = \frac{1}{12} bh^3 \Rightarrow r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \frac{1}{\sqrt{12}} h = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{h}{2} \simeq .6 \frac{h}{2}$$

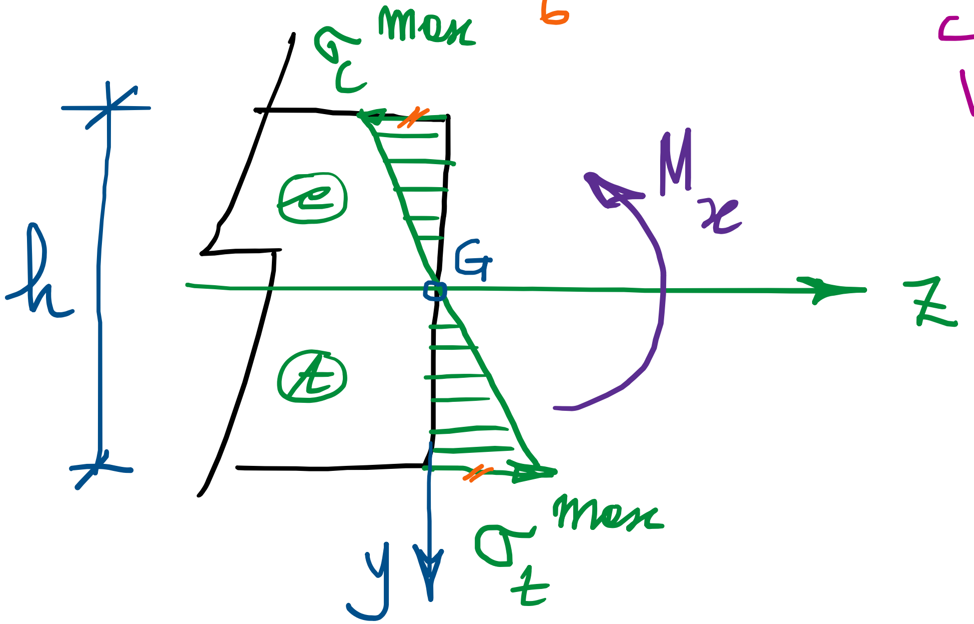
raggio giratore d'inerzia

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{M_x}{\frac{1}{12} bh^3} y = \frac{12 M_x}{bh^3} y$$

$$\left(y = \frac{h}{2}\right) \quad \sigma_{zz}^{max} = \frac{M_x}{\frac{1}{\cancel{12}_{\,6}} bh^{\cancel{3}\,2}} \frac{\cancel{h}}{\cancel{2}} = \frac{M_x}{\underbrace{\frac{bh^2}{6}}} = \frac{M_x}{W_x}$$

W_x modulo di resistenza a flessione

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad [L]^3$$



idem per

$$J_y = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$r_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b}{2}$$