Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

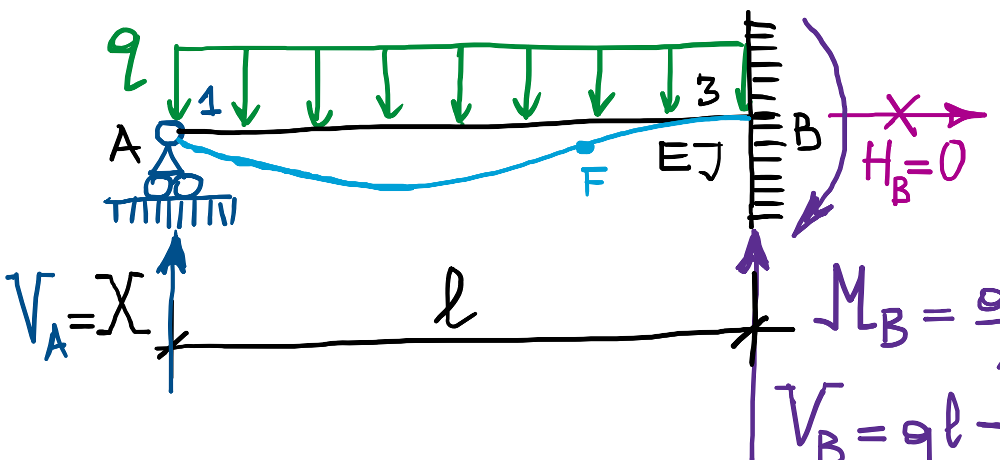
(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Risoluzione di strutture iperstatiche (tramite LE)



$M_B = \frac{q\ell^2}{2} - X\ell$

$V_B = q\ell - X$

gdv = 3+1 = 4
gdl = 3
non labile
1 volta iperst.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0$ static. determinata

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_B = 0 \Rightarrow -V_A \ell + q\ell\frac{\ell}{2} - M_B = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - q\ell = 0 \end{array} \right.$$

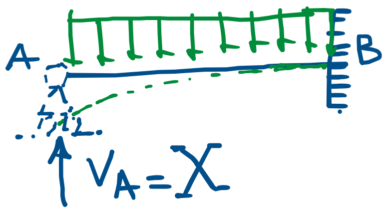
2 eq.ni in 3 incognite (V_A, V_B, M_B) pb. staticam. indeterm.

Scelta dell'incognita iperstatica ("metodo delle forze") $\Rightarrow$ X agente in corrispondenza del vincolo ritenuto ridondante o sovrabbondante (cioè in eccesso, esubero) $\Rightarrow$ RV = RV(q, X) nel rispetto dell'equilibrio.

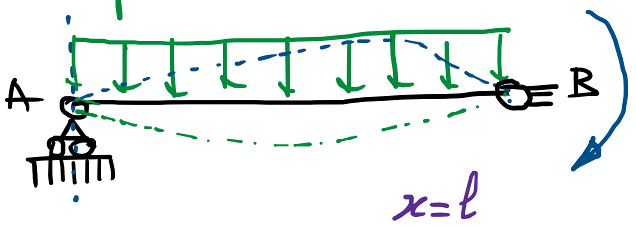
$$\left. \begin{array}{l} 3^a \text{ eq.ne} \Rightarrow V_B = q\ell - X \\ 1^a \text{ eq.ne} \Rightarrow M_B = \frac{q\ell^2}{2} - X\ell \end{array} \right\} RV(X)$$

Condizione di congruenza:

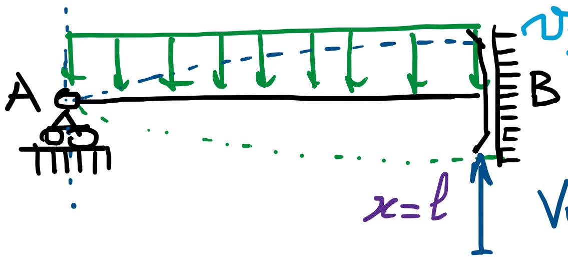
$V_A = X \Rightarrow \boxed{v_A = 0} \Leftrightarrow$



Altre possibili scelte: (basate sulle RV)

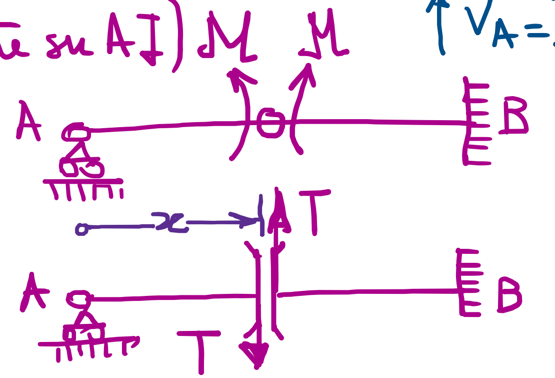


$M_B = Y$
$\varphi_B = 0$

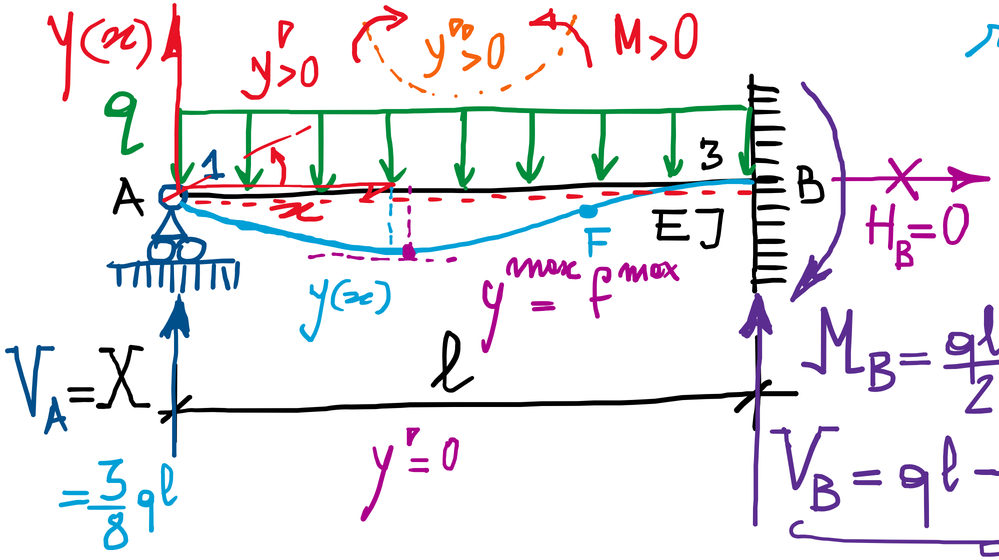


$v_B = 0$
$V_B = Z$

(basate su AI)



infinite scelte $\forall x$



rigidezza flessionale (cost)

equilibrio "locale"

rif. locale : $EJ\,y''(x) = +M(x) = -\dfrac{qx^2}{2} + Xx$ — eq.ne differenz. della LE al 2° ord.

$\int dx$

$EJ\,y'(x) = -\dfrac{qx^3}{6} + \dfrac{Xx^2}{2} + A_1$

$\int dx$

$EJ\,y(x) = -\dfrac{qx^4}{24} + \dfrac{Xx^3}{6} + \underbrace{A_1 x + \cancel{A_2}}_{\text{comp. di moto rigido}}$

$M_B = \dfrac{ql^2}{2} - Xl = \dfrac{ql^2}{8}$

$\underbrace{V_B = ql - X = \dfrac{5}{8}ql}_{RT(X)}$

equil. "globale"

y(x) nota a meno di 3 incognite: $X;\ A_1,\ A_2$

(Individuazione)

Scrittura delle condizioni al contorno (c.c.) $[x=0,\ x=l]$ Imposizione delle c.c.:

$$\begin{cases} \boxed{v_A = 0} & \text{carrello in A (gdv sovrabbondante)} \\ v_B = 0 & \\ \varphi_B = 0 & \end{cases}$$

$v_B = 0$, $\varphi_B = 0$ } incastro in B

"fisiche"

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y(0)=0 \dashrightarrow A_2 = 0 & (1) \\ y(l)=0 \Rightarrow -\dfrac{ql^4}{24} + X\dfrac{l^3}{6} + A_1 l + A_2 = 0 & (2) \\ y'(l)=0 \Rightarrow -\dfrac{ql^3}{6} + X\dfrac{l^2}{2} + A_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

sistema delle c.c. (algebrico, nelle incognite $X;\ A_1,\ A_2$)

Dalla (3): $A_1 = \dfrac{ql^3}{6} - X\dfrac{l^2}{2} = \underbrace{A_1(X)}$

Dalla (2): $A_2 = \dfrac{ql^4}{24} - X\dfrac{l^3}{6} - \left(\dfrac{ql^3}{6} - X\dfrac{l^2}{2}\right) l = A_2(X) \overset{\text{Dalla (1)}}{=} 0$

Eq.ne di congruenza $y(0)=0$: consente di calcolare l'incognita iperstatica X

$$\frac{ql^4}{24} - \frac{4ql^4}{4\cdot 6} - X\left(\frac{l^3}{6} - \frac{3l^3}{3\cdot 2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\cancel{3}}{\cancel{24}_{8}}\,q\cancel{l^4} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_{3}}X\cancel{l^3} = 0 \Rightarrow \boxed{X = \frac{3}{8}ql} = \frac{f_q}{f_1} = \frac{\frac{1}{8}\frac{ql^4}{\cancel{EJ}}}{\frac{1}{3}\frac{l^3}{\cancel{EJ}}}$$

Sostituendo la X ottenuta:

$$\varphi_A = y'(0) = \frac{A_1}{EJ}$$

$$A_1 = \frac{ql^3}{6} - \frac{3}{8} q l \frac{l^2}{2} = \frac{ql^3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{8}\right) = \frac{ql^3}{2}\,\frac{8-9}{24} = -\frac{1}{48} q l^3 \Rightarrow |\varphi_A| = \frac{1}{48}\,\underbrace{\frac{ql^3}{EJ}}$$

gruppo dimensionale per rotazione flessionale elastica legato a q

Equazione finale della LE:

$$y(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qx^4}{24} + \frac{\cancel{3}}{8} q l \frac{x^3}{\cancel{6}_{2}} - \frac{1}{48} q l^3 x\right]$$

N.B.: $y=0$ in $x=0$

$$EJ\,y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{1}{16} q l x^3 - \frac{1}{48} q l^3 x$$

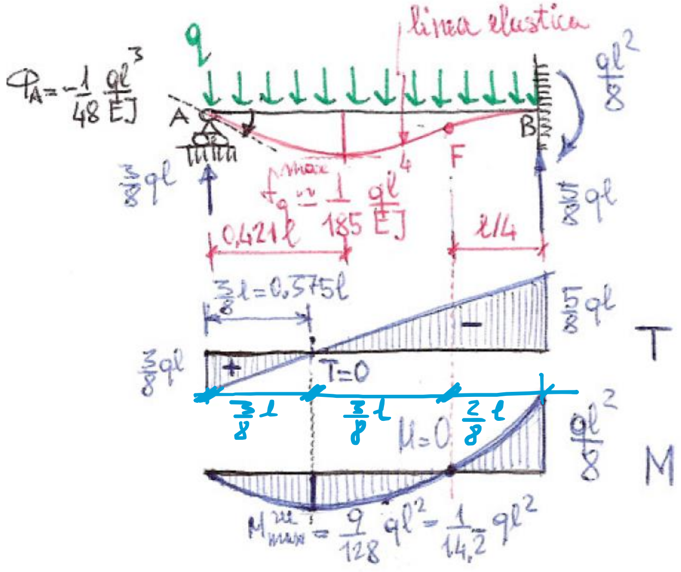
condiz. di staz. (per y^{max}) $y'=0$

$$EJ\,y'(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{3}{16} q l x^2 - \frac{1}{48} q l^3 = \frac{q}{48}\left(-8x^3+9lx^2-l^3\right)=0$$

$$= \frac{q}{48}\left(-8x^2+lx+l^2\right)(x-l) = 0 \quad \begin{cases} x = l \\ \bar{x} = \dfrac{1\pm\sqrt{33}}{16}\, l \simeq 0{,}421\, l \end{cases}$$

$$EJ\,y''(x) = -\frac{qx^2}{2}+\frac{3}{8} qlx = M(x) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{3}{4} l \end{cases}$$

- Tracciamento dei diagrammi delle AI
- Rappresentazione della deformata qualitativa (Linea Elastica) ⇒ vedi note sul sito ⇒



spost.

$$f^{max} \simeq \frac{1}{185}\frac{ql^4}{EJ} = -y(\bar{x})$$

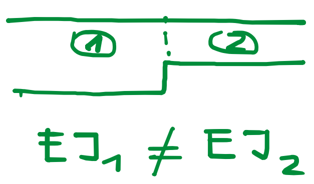
"freccia" massima

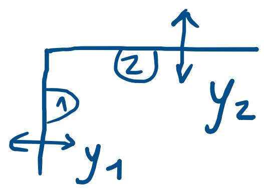
Quadro generale del metodo della LE

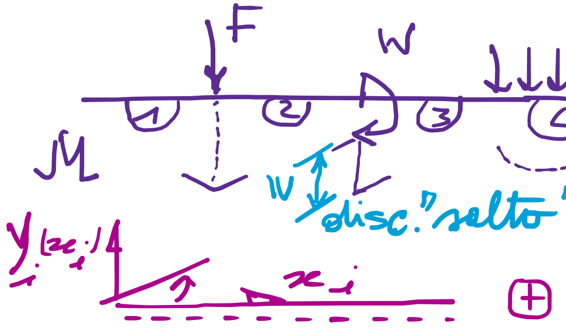
- Suddivisione in campi di integrazione:

con stessa eq.ne differenziale della LE

$$EJ_i(x_i)\, y_i''(x_i) = \pm M_i(x_i), \quad i=1,2,\dots n$$



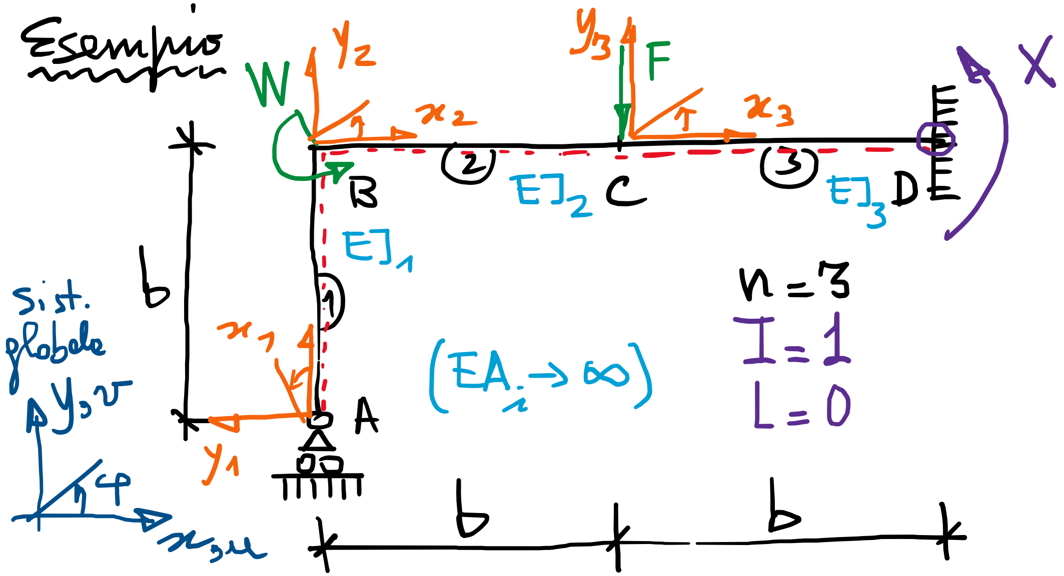




eq.ni diverse di $M_i(x_i)$ nei vari tratti

- Scelta dei sistemi di riferimento locali
- Integraz. delle eq.ni differenziali ⇒ 2n costanti di integraz. (+ inc. iperst.)
- Scrittura e imposizione delle c.c. ($n_{c.c.} = 2n + I$)
- Soluzione, LE finali; RV; N, T, M; calcolo di comp.ti di "spost."; deformata qualitativa

Esempio



$n_{cc} = 2n + I = 2\cdot 3 + 1 = 7$

$y_1(b) = 0$ Incastro in D + $EA_{BCD} \to \infty$

$y_1'(b) = y_2'(0)$ Continuità alla rotaz. in B

$y_2(0) = 0$ Carrello in A + $EA_{AB} \to \infty$

$y_2(b) = y_3(0)$, $y_2'(b) = y_3'(0)$ } Continuità allo spostamento / alla rotazione in C

$y_3(b) = 0$ } Incastro in D

$y_3'(b) = 0$ condizione di congruenza associata alla scelta di X