

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

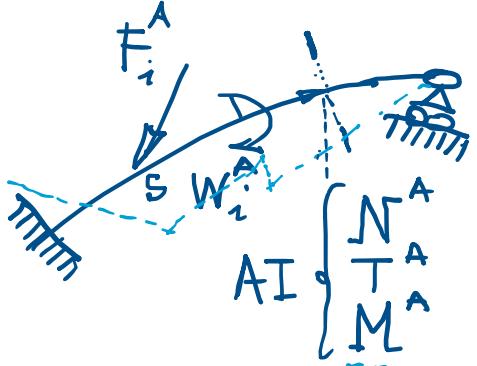
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 11

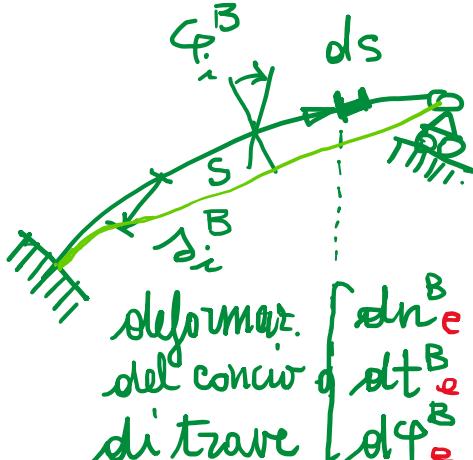
Principio dei Lavori Virtuali (PLV) [Analisi dei sistemi di travi]

Ai fini dell'enunciato, si pongano le seguenti definizioni:

- (A) Sistema staticamente ammissibile: famiglie di quantità statiche (forze, coppie; Azioni Interne: N, T, M) equilibrate



- (B) Sistema cinematicamente ammissibile: famiglie di quantità cinematiche (spostamenti, rotazioni; deformazioni elementari $dn, dt, d\varphi$) congruenti o compatibili



← legate a corrispondenti (EA, GA, EJ)
AI: N^B, T^B, M^B

NB: Sono le classi all'interno delle quali potremo definire ammissibili dei sistemi "virtuali" cioè non necessariamente coincidenti col sistema reale

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza):

Per coppie di sistemi (anche "virtuali") \textcircled{A} e \textcircled{B} , rispettivamente staticamente e cinematicamente ammissibili, vale la seguente identità dei Lavori (Virtuali) mutui esterni ed interni:

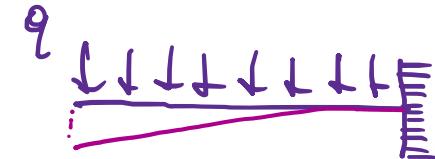
$$\int_{\text{est.}}^{AB} = \sum_i F_i^A \cdot \gamma_i + W_i^A \cdot \Phi_i^B = \int \text{N}^A \cdot d\gamma_e + T^A \cdot dt_e + M \cdot d\Phi_e = \int_{\text{int.}}^{AB} \text{Struttura}$$

- I sistemi \textcircled{A} e \textcircled{B} non sono necessariamente coincidenti col sistema reale ma possono essere "virtuali", cioè del tutto indipendenti e in particolare non legati a delle relazioni di causa-effetto (se pur associabili nel senso dei lavori virtuali).
- Enunciato valido indipendentemente dal comportamento del materiale (in particolare elastico o anelastico).
- In genere si ritengono trascurabili i contributi assiali e tangenti, a fronte di quelli flessionali (predominanti nei sistemi di travi "snelle"). Per corpi rigidi: $\int_i^{AB} = 0$, quindi: $\int_e^{AB} = 0$.
- Si tratta di un teorema dimostrabile (oltre un assunto, un principio) \Rightarrow vero dim. nelle meccaniche dei continui (CdSdC).
- Manifestazioni del PLV: PSV_{post.} (CS di equilibrio), PFV_{oltre} (CS di congruenza) \Rightarrow CdSdC

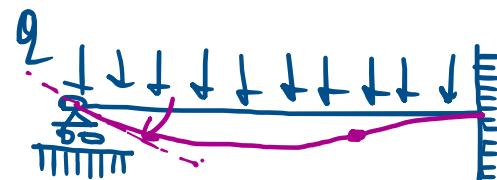
Utilizzi del PLV, come metodo di analisi dei sistemi di travi (deformabili):

- Determinazione di componenti di spostamento (in particolare elastico) di strutture deformabili:

P
F_o
V

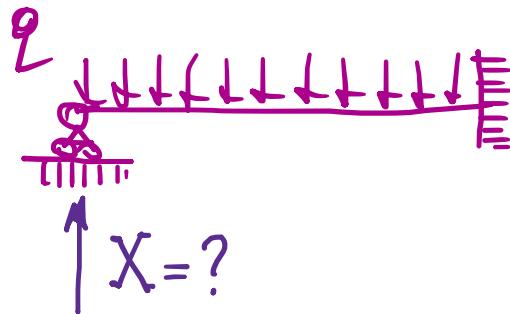


$$f_q = ? \text{ isost.}$$



$$\Phi_q = ? \text{ iperst.}$$

- Risoluzione di strutture staticamente indeterminate, cioè ijerstatiche:

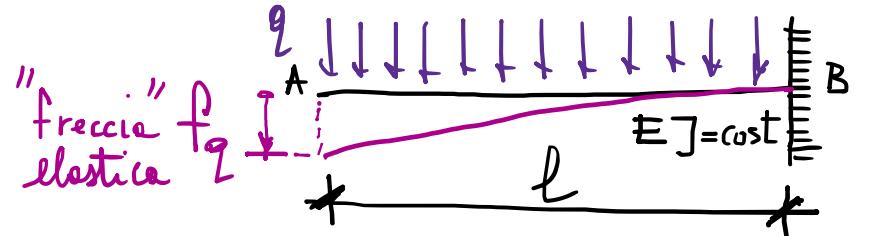


$$X = ?$$

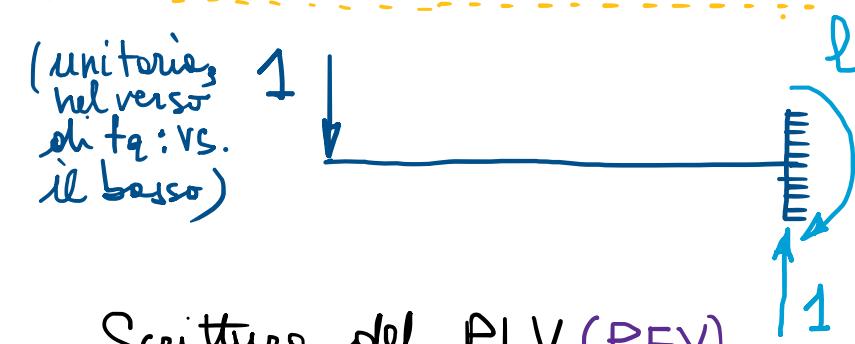
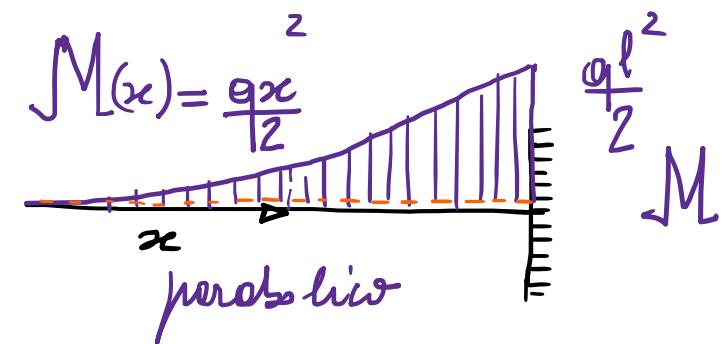
P
V

- Calcolo di RV o AI tramite PLV nei sistemi articolati di corpi rigidi ($\delta_e = 0$) [ColSdC]

Calcolo di componenti di spostamento di travi deformabili:



B) Struttura reale
(\rightarrow congruente)



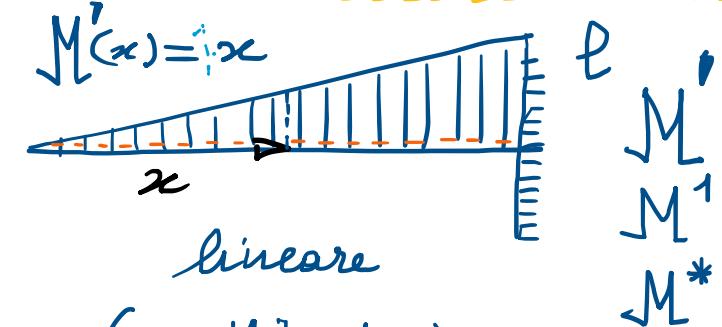
A) Struttura virtuale
(fittizia, ausiliaria)
avente solo forza unitaria
in corrispondenza delle
componente di spost. da calcolare (equilate)

Scrittura del PLV (PFV):

$$P_e = 1 f_q + 1 \cancel{\tau_B} + l \cancel{\tau_B} = \int_{\text{Str.}} M' d\varphi_e = \int_{\text{Str.}} M' \frac{M dx}{EJ} = P_i$$

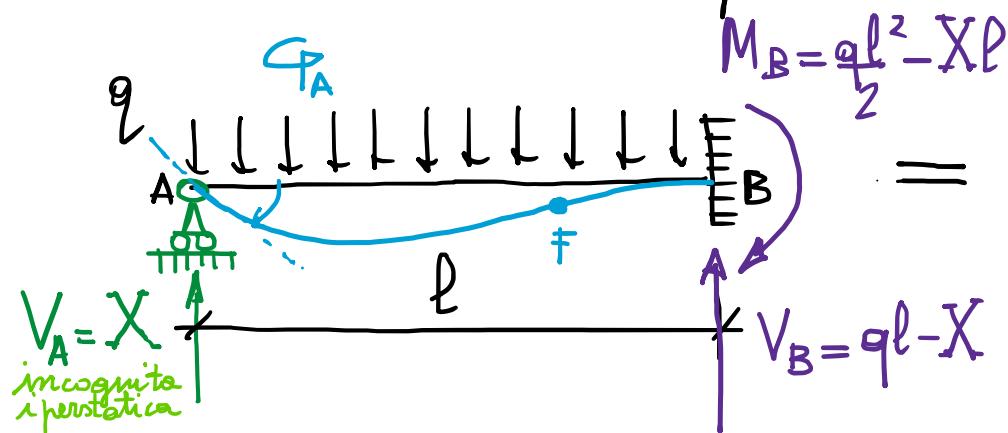
$\cancel{\tau_B}$ vincoli perfetti (non cedevoli)

$$f_q = \int_0^l M'(x) M(x) \frac{dx}{EJ} = \int_0^l x \frac{qx^2}{2} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{q}{EJ} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^l = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{EJ} = f_q$$



- Il PLV, come metodo di calcolo, consente di calcolare "chirurgicamente" le sole quantità di specifico interesse.
- Di fatto, si è resa necessaria la risoluzione "statica" di un'altra struttura (due strutture isostatiche)

Risoluzione di strutture iperstatiche tramite PLV (PFV):

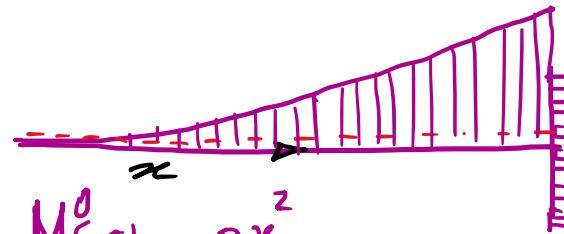


Ⓐ Sistema reale
(\Rightarrow congruente)

$$RV(X) =$$

Sovraffigurazione
degli
effetti

$$RV^0$$



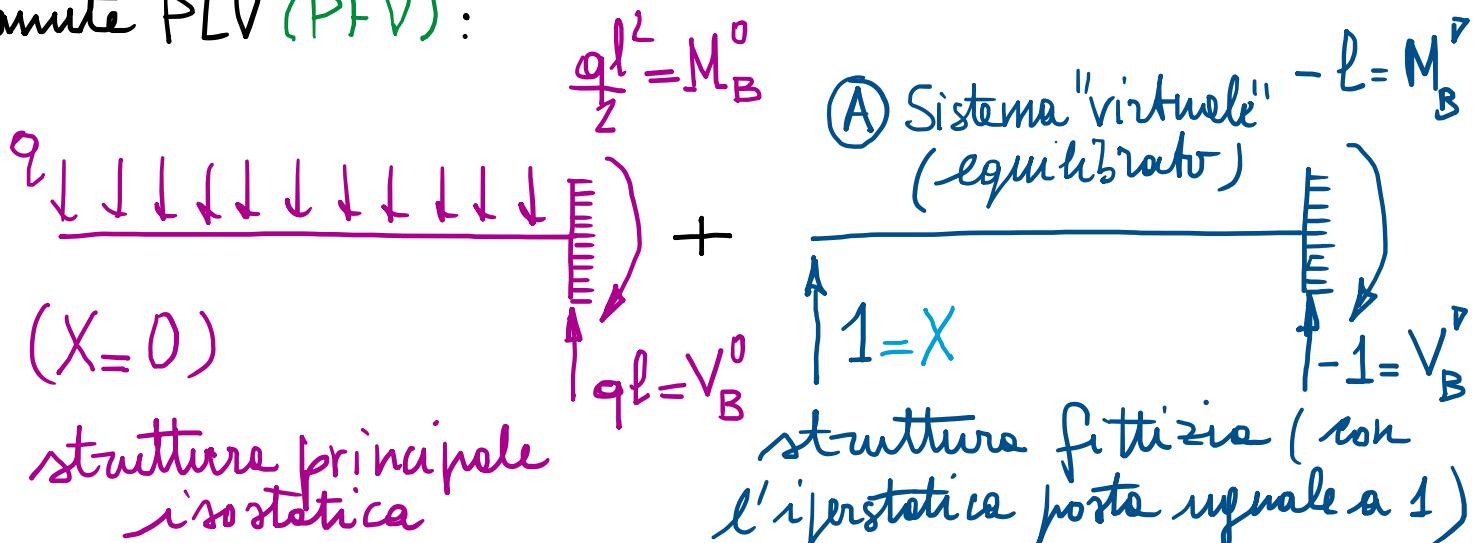
$$M^0(x) = \frac{qx^2}{2}$$

Scrittura del PLV:

$$\int_e^{AB} = 1 \cancel{V_A} - 1 \cancel{V_B} - l \cancel{M_B} = \int_{Str} M^P \frac{M^0 + XM^D}{EJ} ds$$

$$\cancel{V_A} = 0$$

condizione di congruenza



$$+ X RV'$$

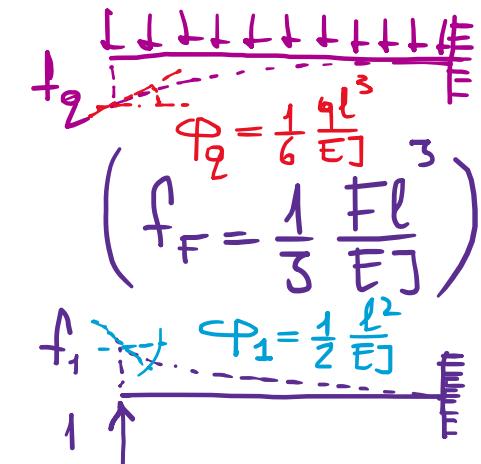
$$+ M^D(x) = -1 \cdot x = M^1 = M^*, \text{ ecc.}$$

$$+ X M^D(x)$$

$$0 = \int_{Str} M^P M^0 \frac{ds}{EJ} + X \int_{Str} M^P M^D \frac{ds}{EJ} - \frac{\int_{Str} M^P^2 \frac{ds}{EJ}}{\int_{Str} M^P^2 \frac{ds}{EJ}}$$

$$\int_0^l M_{(x)}^{\tau} M_{(x)}^0 \frac{dx}{EJ} = \int_0^l (-x) \frac{q x^2}{2} \frac{dx}{EJ} = -\frac{1}{2} \frac{q}{EJ} \frac{x^4}{4} \Big|_0^l = -\frac{1}{8} \frac{q l^4}{EJ} = -\frac{f_q l^4}{2}$$

$$\int_0^l M_{(x)}^{\tau^2} \frac{dx}{EJ} = \int_0^l (-x)^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ} = f_1 = \frac{f_F}{F}$$

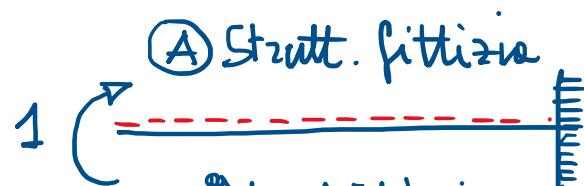


$$X = -\frac{-\frac{8}{1} \frac{q l^4}{EJ}}{\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}} = \frac{3}{8} q l \Leftrightarrow v_A = -f_q + X f_1 = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{f_1}$$

condizione di congruenza

metodo delle "forze" Coeffienti di influenza

- Sostituendo in $RV(X)$, $M(X, x) \rightarrow RV$ finali, M finale (islem per $N_e T$)
- A valle, calcolo di componenti di "spostamento" di interesse, per ulteriori scorrere del PLV:



$$M_{\tau^0} = -1$$

$$M_{\tau^2} = -1$$

$$M_{\tau^4} = 0$$

$$\textcircled{B} \text{ Sist. reale } 1 \Phi_A = \int_0^l M_{(x)}^0 (M_{(x)}^0 + X M_{(x)}^{\tau}) \frac{dx}{EJ}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{3}{8} \frac{1}{2} = -\frac{8+9}{48} = \int_0^l M_{(x)}^{\tau} M_{(x)}^0 \frac{dx}{EJ} + X \int_0^l M_{(x)}^{\tau} M_{(x)}^{\tau} \frac{dx}{EJ} + X \Phi_1$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EJ} = -\Phi_q$$

sovraffosizione degli effetti