Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

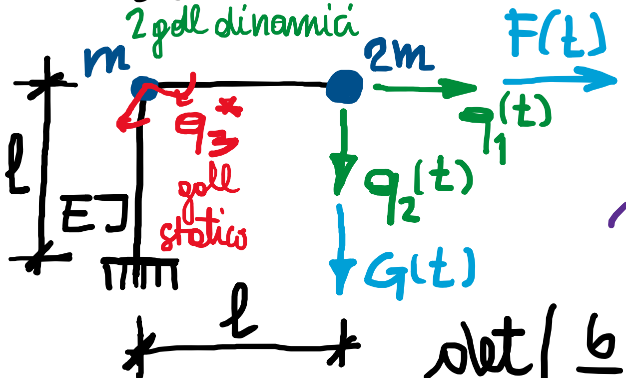
LEZIONE 13

Esempio 2DOF → Modi principali di vibrazione:

$\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i$

ω_i: pulsazione naturale

ϕ_i: forma modale



$$\underset{2\times2}{\mathbb{M}} = m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};\quad \underset{2\times2}{\mathbb{K}} = \frac{6}{7}\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

matrice di massa — matrice di rigidezza

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2\mathbb{M})\,\phi_i = 0$$

$$\det\left(\frac{6}{7}\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \omega_i^2 m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = 0 \text{ sse}$$

← pb. agli autovalori generaliz. associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ (simmetriche e definite positive).

$$\lambda_i = \omega_i^2 \boxed{\frac{m\ell^3}{EJ}}\ [t]^2$$

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}}$$

$K \sim EJ/\ell^3$

$m \sim m$

$\omega^2 \sim \frac{K}{m} \sim \boxed{\frac{EJ}{m\ell^3}}\ \frac{1}{[t]^2}$

λ_i numero puro

$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7}\\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{48}{7} - 3\lambda_i\right)\left(\frac{12}{7} - 2\lambda_i\right) - \frac{18^2}{7^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(48 - 21\lambda_i)(12 - 14\lambda_i) - 18^2 = 0$$

$$\cancel{3}(16 - 7\lambda_i)\cancel{2}(6 - 7\lambda_i) - 18\cdot\cancel{6}\cdot 3 = 0$$

$$\cancel{7}\cdot 7\lambda_i^2 - \cancel{7}\underbrace{(16+6)}_{22}\lambda_i + \underbrace{16\cdot 6 - \overset{9\cdot 2}{18}\cdot 3}_{(16-9)6 \;\to\; \cancel{7}} = 0$$

eq.ne caratteristica (2° grado)

$$\boxed{7\lambda_i^2 - 22\lambda_i + 6 = 0}$$

soluzione analitica

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \mp \sqrt{121 - 42}}{7} = \frac{11 \mp \sqrt{79}}{7} = \begin{cases}\lambda_1 = .3017\\ \lambda_2 = 2.841\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_1 = .5493\\ \omega_2 = 1.686\end{cases}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}}$$

I modo di vibrare

II modo " "

[rad/s] pulsazioni proprie (freq. proprie $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ [Hz])

- Autovettori: $\quad i=1,2$

$$\begin{bmatrix} \frac{48}{7}-3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7}-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

N.B.: due eq.ni linearmente dipendenti per $\lambda=\lambda_i \; (i=1,2)$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{18}^{\,9}}{7}\phi_{i1} + \cancel{2}\left(\frac{6}{7}-\lambda_i\right)\phi_{i2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi_{i1}}{\phi_{i2}} = \frac{\frac{6}{\cancel{7}}-\frac{7}{\cancel{7}}\lambda_i}{\frac{9}{\cancel{7}}} = \frac{6-7\lambda_i}{9}$$

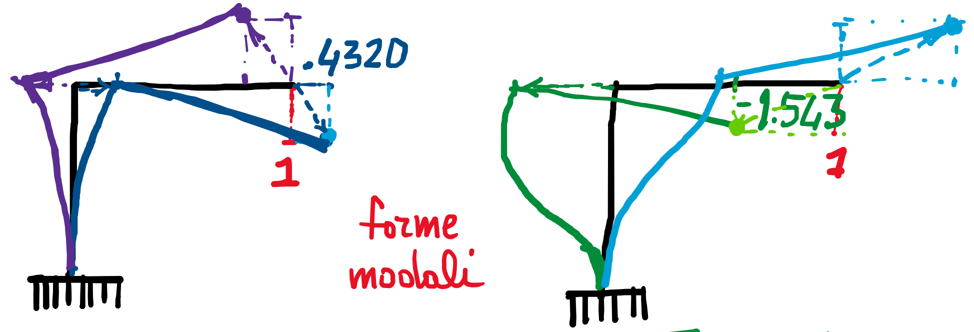
ad es., dalla 2ª eq.ne

$i=1,\ \lambda_1 \ (.3017) \Rightarrow \frac{\phi_{11}}{\phi_{12}} = .4320$

$i=2,\ \lambda_2 \ (2.841) \Rightarrow \frac{\phi_{21}}{\phi_{22}} = -1.543$

$$\Rightarrow \quad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} .4320 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.543 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

normalizzazione con $\phi_{i2}=1$



forme modali

I modo ω_1 (utili i momenti modali $M_i(x)$) II modo ω_2

(definite a meno di un fattore di proporzionalità arbitrario)

- Altre normalizzazioni:

• $\|\Phi_i\|=1$ norma unitaria $\quad \Phi_i = \alpha_i \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ 1 \end{Bmatrix},\ \alpha_i = \frac{1}{\|\Phi_i\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\phi_{i1}^2}} \quad \left(\Phi_i \Rightarrow \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}\right)$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \begin{Bmatrix} .3966 \\ .9180 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} -.8392 \\ .5439 \end{Bmatrix}$$

• $\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = M_i = \begin{cases} 1 \\ m \end{cases} = \beta_i \{\phi_{i1} \ \ 1\}\, m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \beta_i \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ 1 \end{Bmatrix}$

masse modali unitarie (o valore specifico, es. m)

$$= \beta_i^2 \{\phi_{i1} \ \ 1\}\, m \begin{Bmatrix} 3\phi_{i1} \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$= m\beta_i^2 \left(3\phi_{i1}^2+2\right) \Rightarrow \beta_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{3\phi_{i1}^2+2}}$$

se $M_i = m$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} .2700 \\ .6250 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} -.5103 \\ .3307 \end{Bmatrix}$$

se $M_i = 1$

- Coordinate principali:

somma su tutti i modi

$$q = \Phi\, p = [\phi_1 \;\; \phi_2]\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = \sum_i \phi_i p_i$$

$$\Phi\,\Phi^{-1} = I_{2\times 2}$$

$$\Phi^T M q = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\mathcal{M}}\, p$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} .2700 & -.5103 \\ .6250 & .3307 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_1 = .2700\, p_1 - .5103\, p_2 \\ q_2 = .6250\, p_1 + .3307\, p_2 \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} .8101 & 1.250 \\ -1.531 & .6614 \end{bmatrix}$$

- Relaz. inversa:

$$p = \Phi^{-1} q = (\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\mathcal{M}})^{-1} \Phi^T M q \Rightarrow p_i = \frac{\phi_i^T M q}{M_i} \rightarrow \begin{cases} p_1 = .8101\, q_1 + 1.250\, q_2 \\ p_2 = -1.531\, q_1 + .6614\, q_2 \end{cases}$$

$$\cancel{m}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_i = \phi_i^T M \phi_i \qquad \cancel{m}$$

$$= \phi_i^T \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \phi_i^T \begin{Bmatrix} 3q_1 \\ 2q_2 \end{Bmatrix} = 3\phi_{i1} q_1 + 2\phi_{i2} q_2$$

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto:

$$\mathcal{M} = m I; \quad \mathcal{K} = \Phi^T K \Phi = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} \underbrace{.3017}_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \underbrace{2.841}_{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T (K\Phi = M\Phi\Omega^2)$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \Leftrightarrow \omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}; \quad \omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$$

$$\begin{cases} m\ddot{p}_1 + \frac{EJ}{\ell^3}\, .3017\, p_1(t) = .2700\, F(t) + .6250\, G(t) = P_1(t) \\ m\ddot{p}_2 + \frac{EJ}{\ell^3}\, 2.841\, p_2(t) = -.5103\, F(t) + .3307\, G(t) = P_2(t) \end{cases}$$

coordin. lagrang. (fisiche) — coord. principali (matematiche)

$$\Rightarrow p(t) \Rightarrow q(t) = \Phi\, p(t)$$

risposta finale

- Determinazione numerica delle autosoluzioni (metodo iterazione vettoriale inversa)

Forme standard: $\begin{cases} G\,\phi_i = \dfrac{1}{\omega_i^2}\,\phi_i\,, & G = K^{-1}M \\ H\,\phi_i = \omega_i^2\,\phi_i\,, & H = M^{-1}K \end{cases}$

$\phi_i^{(0)} \rightarrow$ $\hat{\phi}_i^{(1)} = G\,\phi_i^{(0)}$ $\dashrightarrow$ conv. a ϕ_1 (primo)

k iter.

$\hat{\phi}_i^{(1)} = H\,\phi_i^{(0)}$ $\dashrightarrow$ conv. a $\phi_n = \phi_2$ (ultimo)

autov. di tentativo (trial vector)

processo iterativo (mediante semplici moltiplicazioni successive)

- Ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT (da inserire ad ogni iterazione per evitare di convergere sugli autovettori già precedentemente determinati).

- Algoritmo iterativo (pseudo-code), di agevole implementazione

converge a ϕ_1 (modo 1)

- $\phi^{(0)}$ trial vector
- $\hat{\phi}^{(1)} = G\,\phi^{(0)}$ ← l'autovettore si aggiorna mediante semplice moltiplicazione (con G o H)

converge a ϕ_n (modo n)

- $\phi^{(1)} \leftarrow \hat{\phi}^{(1)}$ tramite normalizzazione
- $\omega^2_{(1)} = \dfrac{\phi^{(1)T} K\, \phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M\, \phi^{(1)}}$ stima dell'autovalore da rapporto di Rayleigh (successiva)
- $\dfrac{|\omega^2_{(i+1)} - \omega^2_{(i)}|}{\omega^2_{(i)}} < tol \simeq 10^{-4} - 10^{-6} \rightarrow$ end ; $>$

ciclo ("loop")

- **Concetti fondamentali** (analisi dinamica modale) ⇐ sistemi dinamici lineari tempo-invar.

- Soluzione del pb. agli autovalori "generalizzato" associato alle matrici di rigidezza $\mathbb{K}$ e di massa $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{K}\,\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\phi_i \qquad \begin{cases} \lambda_i = \omega_i^2 & \text{autovalori } (\omega_i \text{ pulsazioni proprie o naturali}) \\ \phi_i & \text{autovettori (forme modali)} \end{cases}$$

- forma analitica, solo per n (n. dei gdl dinamici) < 5 — autoval. da eq.ne caratteristica di grado n.; autovett. da sist. lin. omogeneo.

- forma numerica, per sistemi generici, aventi anche molti gdl.

- Trasformazione in coordinate principali $p_i(t)$:

$$\underbrace{\mathbf{q}(t)}_{\text{coordinate lagrangiane (di senso fisico)}} = \Phi\,\mathbf{p} = \underbrace{\left[\phi_1 \mid \phi_2 \mid \cdots \mid \phi_i \mid \cdots \mid \phi_n\right]}\,\mathbf{p} = \sum_{i} \phi_i\, p_i(t)$$

Φ: matrice degli autovettori (ϕ_i per colonne)

modi

p_i: componente (modale) del vettore $\mathbf{q}$ nella base degli autovettori ϕ_i.

$\mathbf{p}$: coordinate principali, associate ai modi di vibrare (di significato matematico: coeff. della combinazione lineare dei ϕ_i).

– Conseguente trasformazione in matrici modali (diagonali): ⇒ disaccoppiamento delle equazioni del moto

$$\mathbb{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

$\mathbf{q} = \Phi\,\mathbf{p}$ trasformaz. di coordinate — $\Phi = [\boldsymbol{\phi}_i]$ matrice degli autovettori (per colonne)

⇒ coerentemente: $\Omega^2 = \mathrm{diag}[\omega_i^2]$ matrice degli autovalori (diagonale)

$$\mathbb{K}\,\boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\boldsymbol{\phi}_i = \mathbb{M}\,\boldsymbol{\phi}_i\,\omega_i^2$$

scalare

$$\Updownarrow$$

$$\Phi^T\left(\mathbb{K}\,\Phi = \mathbb{M}\,\Phi\,\Omega^2\right)$$

$$\mathcal{K} = \Phi^T\mathbb{K}\,\Phi = \underbrace{\Phi^T\mathbb{M}\,\Phi}_{\mathcal{M}}\,\Omega^2 = \mathcal{M}\,\Omega^2 \Rightarrow \Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$$

$$\omega_i^2 = M_i^{-1}K_i = \frac{K_i}{M_i}$$

$$\Phi^T\left(\mathbb{M}\,\Phi\,\ddot{\mathbf{p}} + \mathbb{K}\,\Phi\,\mathbf{p} = \mathbf{Q}\right)$$

$$\underbrace{\Phi^T\mathbb{M}\,\Phi}_{\mathcal{M}=\mathrm{diag}[M_i]}\,\ddot{\mathbf{p}} + \underbrace{\Phi^T\mathbb{K}\,\Phi}_{\mathcal{K}=\mathrm{diag}[K_i]}\,\mathbf{p} = \Phi^T\mathbf{Q} = \mathbb{P}(t)$$

$$\underbrace{M_i}_{\substack{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbb{M}\,\boldsymbol{\phi}_i \\ \text{massa modale}}}\,\ddot{p}_i + \underbrace{K_i}_{\substack{\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbb{K}\,\boldsymbol{\phi}_i \\ \text{rigidezza modale}}}\,p_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{Q} = P_i(t)$$

……… n eq.ni del moto disaccoppiate, nelle n coordinate principali $p_i(t)$ (ripetizione, n volte, tante quanti sono i modi, di quanto visto per un sistema SDOF) ⇒ interpretazione: sistema MDOF ad n gdl, come n sistemi SDOF, per ciascun modo di vibrare.

$$\Updownarrow$$

ricorda: sistema SDOF $q_1 = u(t)$

$$m\,\ddot{u} + k\,u(t) = F(t)$$

semplice generalizzazione

SOMMARIO (Lez. 13)

- Esempio 2DOF: modi principali di vibrazione.
- Soluzione (analitica) dell'eq.ne caratteristica ⇒ autovalori.
- Determinazione degli autovettori (dal pb. agli autoval. originario), a meno di costante arbitraria.
- Normalizzazione degli autovettori. (⇐ scelta della costante arbitraria)
- Trasformazione in coordinate principali e disaccoppiamento delle eq.ni del moto.
- Calcolo numerico delle autosoluzioni (metodo dell'iterazione vettoriale inversa).

Next step: introduzione dello smorzamento; azioni interne (modali).