Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 23

Flessione elastoplastica delle travi

Scopi:

- Descrivere il salto di scala, da materiale a struttura, per cogliere il comportam. dell'elemento strutturale anche oltre l'uscita dal campo elastico (di quotidiano funzionamento, per condizioni di esercizio regolari), per non-linearità di materiale (comportamento elastoplastico).
- "Analisi Limite" dei sistemi di travi ("Calcolo a Rottura" dei telai) utile a determinare le possibili condizioni di collasso strutturale (plastico), sia nelle caratteristiche statiche (livello dei carichi $\Rightarrow$ carico di collasso, o moltiplicatore di), che cinematiche (meccanismo di collasso).
- Individuare la relazione tra comportamento locale (elastoplastico) del punto materiale della trave e comportamento globale dell'intero elemento strutturale.

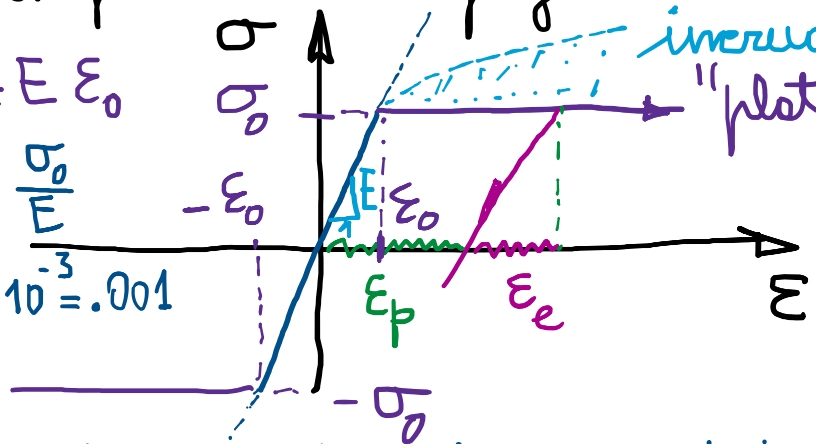
Lo facciamo nell'ambito dell'ipotesi di comportamento perfettamente elasto-plastico del materiale (no incrudimento) [da un lato conservativo, dall'altro sotto l'ipotesi di garantire una elevata (illimitata) duttilità del materiale].

- Comportamento perfettamente elastoplastico del materiale

$\sigma_0 = E\,\varepsilon_0$

$\varepsilon_0 = \dfrac{\sigma_0}{E}$

$\simeq 10^{-3} = .001$



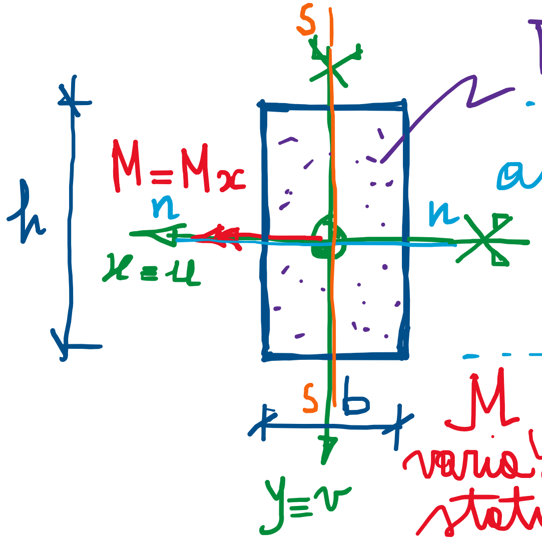
incrudimento (limite di snervamento variabile)

"plateau" a sforzo costante (flow stress), con sviluppo di deformazioni plastiche illimitate.

(limite elastico fisso)

- Sezione doppiamente simmetrica rettangolare (flessione retta)

$E, \sigma_0 \; \left(\varepsilon_0 = \dfrac{\sigma_0}{E}\right)$ cost.

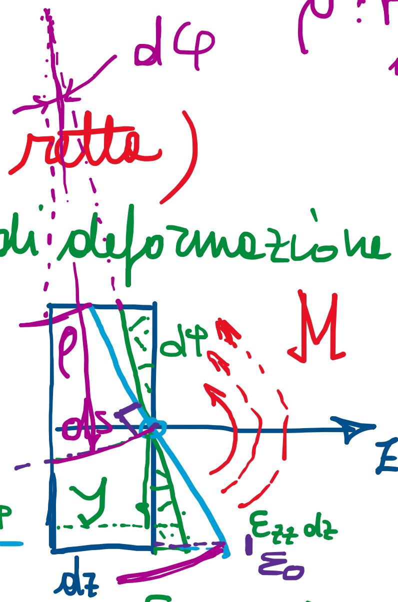


asse neutro (in campo elastoplastico)

ρ : raggio di curvatura asse inflesso

(B-E-N)

campo di deformazione



Ipotesi di conservazione delle sezioni piane (e $\perp$ all'asse inflesso)

asse inflesso

$ds = \rho\, d\varphi$ $\quad y\,d\varphi$

M $\leftrightarrow$ curvatura (z) $\chi = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\varphi}{ds} \simeq \dfrac{d\varphi}{dz}$

variabile statica

dell'asse inflesso (variabile cinematica)

$\varepsilon_{zz} = \dfrac{d\varphi}{dz}\,y$

$= \chi\, y$

lineari sulle sez. (y)

$\boxed{\varepsilon^{max} = \chi\,\dfrac{h}{2}}$

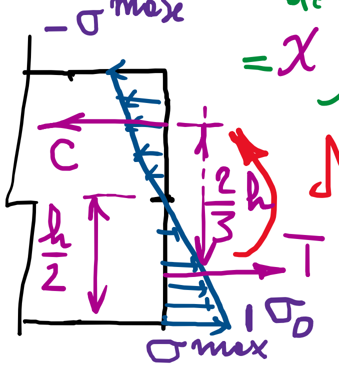
Campo elastico lineare $\Rightarrow \sigma_{zz} = E\,\varepsilon_{zz}$

$\varepsilon^{max} \leq \varepsilon_0$

legame costitutivo (Hooke)

$= E\,\chi y$ lineare sulla sezione

$\sigma_{zz}(y)$



$T = C = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{h}{2}\,\sigma^{max}\,b$

$M = T\,\dfrac{2}{3}h$ equiv. statica

$= \dfrac{bh}{4}\sigma^{max}\dfrac{2}{3}h = \dfrac{bh^2}{6}\sigma^{max}$

W_e

- Quindi, in maniera diretta:

$$M = W_e \, \sigma^{max} \Rightarrow \sigma^{max} = \frac{M}{W_e}, \quad W_e = \frac{bh^2}{6}$$ modulo di resistenza (a flessione) elastico

- Altrettanto, per equivalenza statica (tra M_x e σ_{zz} che ne deriva):

$$M_x = \int_A (\sigma_{zz} \, dA) \, y = \int_A \sigma_{zz} \, y \, dA = \int_A \underbrace{E \chi y}_{\sigma_{zz}} \, y \, dA = E\chi \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{J_x} \qquad J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

momento d'inerzia della sezione trasv. rispetto all'asse x (asse n-n)

Legge di B-E-N: (comp. costitut. della sez. trasv. della trave in campo elastico)

$$M_x = \underbrace{EJ_x}_{} \chi_x \Leftrightarrow \chi_x = \frac{M_x}{\underbrace{EJ_x}_{}}$$

rigidezza flessionale (elastica)

- Formula di Navier: (sforzi lineari sulla sez.)

$$\sigma_{zz} = E \underbrace{\chi y}_{\varepsilon_{zz}} = \cancel{E} \frac{M}{\cancel{E} J} y = \frac{M_x}{J_x} y \Rightarrow \sigma^{max} = \sigma_{zz}\left(y = \frac{h}{2}\right) = \frac{M_x}{\frac{J_x \cdot 2}{h}} = \frac{M_x}{W_{ex}}$$

limite elastico

- Regime elastico: $\varepsilon^{max} = \chi \frac{h}{2} \le \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$; $\chi \le \chi_e = \chi_0$

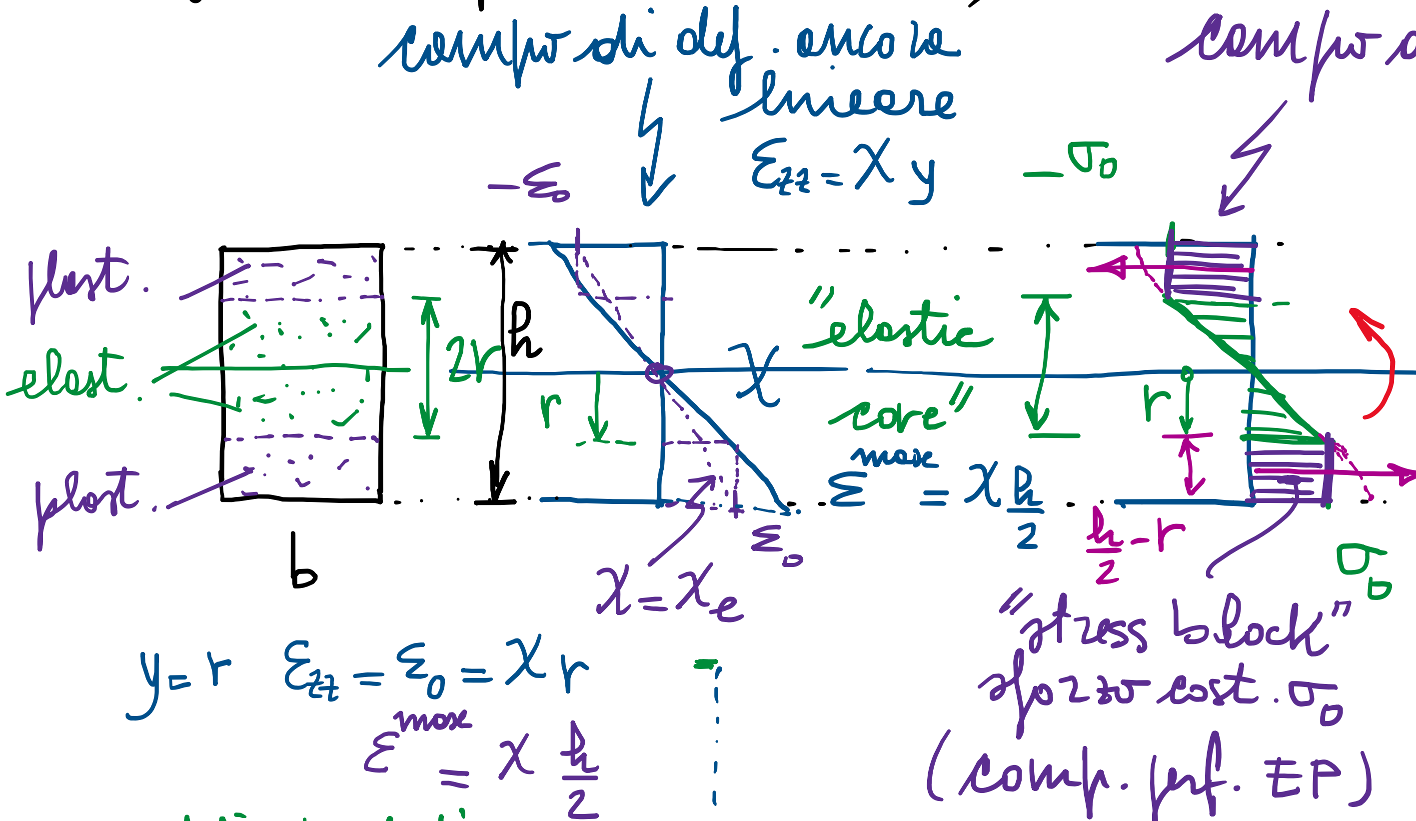
$\sigma^{max} \le \sigma_0$

$\varepsilon^{max} = \varepsilon_0 \Rightarrow \boxed{\chi_e = \frac{2\varepsilon_0}{h}}$

$$W_e = \frac{J_x}{h/2} = \frac{1}{\cancel{12}_6} \frac{b h^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{h}/\cancel{2}} = \frac{1}{6} bh^2 \Rightarrow M_e = \sigma_0 W_e$$

Momento limite elastico

- Regime elastoplastico ($\chi \geq \chi_e$) $\Rightarrow$ ($M \geq M_e$)



$\sigma_0 b$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz}\, y \, dA$$

$$= \frac{b(2r)^2}{6}\sigma_0 + \sigma_0 b\left(\frac{h}{2} - r\right)\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{h}{2} + r\right)$$

$$= \frac{4}{6} b r^2 \sigma_0 + \sigma_0 b\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$= \sigma_0 \frac{bh^2}{4} + \left(\frac{2}{3}\sigma_0 b - \frac{3}{3}\sigma_0 b\right) r^2$$

$$= \sigma_0 \frac{bh^2}{4} - \frac{1}{3}\sigma_0 b r^2$$

$r = \frac{\varepsilon_0}{\chi} = \frac{\chi_e h/2}{\chi} = \frac{h}{2}\frac{\chi_e}{\chi}$

$$= \underbrace{\sigma_0 \frac{bh^2}{4}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\cancel{\sigma_0 b}\, 4 r^2}{\cancel{\sigma_0 b}\, h^2}\right)$$

$\frac{r}{h/2} = \frac{\chi_e}{\chi}$

$$= M_L\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{h/2}\right)^2\right) \quad \text{non-lin.}$$

$$= M_L\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\chi_e}{\chi}\right)^2\right) = M(\chi)$$

$y = r \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 = \chi r$

$\varepsilon^{max} = \chi \frac{h}{2}$

A limite elastico:

$\varepsilon_0 = \varepsilon^{max} = \chi_e \frac{h}{2}$ $\Rightarrow$ $1 = \frac{\chi r}{\chi_e \frac{h}{2}}$

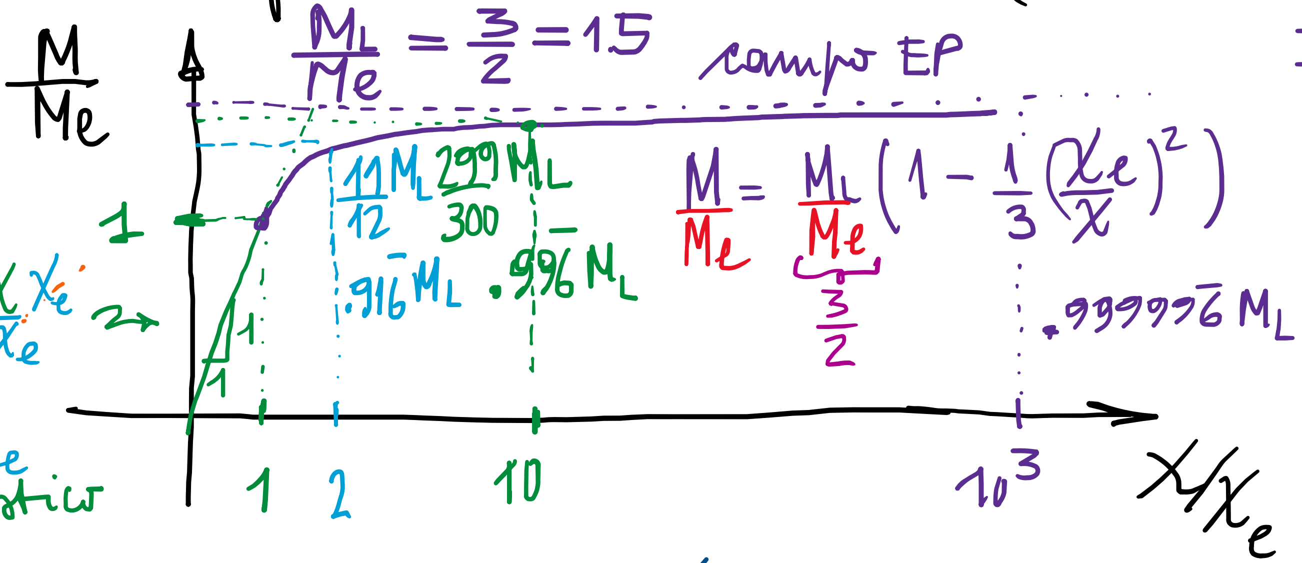
$$\frac{r}{h/2} = \frac{\chi_e}{\chi} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^{max}}$$

Momento limite

$M_L = \sigma_0 W_p$

modulo plastico $W_p = \frac{bh^2}{4} = Z$ ($\chi \to \infty$, $M \to M_L$)

– legame elastoplastico della sez. trasv. ($M = M(\chi)$ non-lineare) con incrudim.



B.E.N.

$$\frac{M}{M_e} = \frac{EJ\chi}{M_e}\frac{\chi_e}{\chi_e} = 1\,\chi/\chi_e \Rightarrow$$

campo elastico

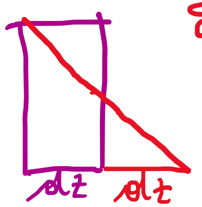
$$\frac{M}{M_e} = \underbrace{\frac{M_L}{M_e}}_{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\chi_e}{\chi}\right)^2\right)$$

– M_L : comp. asintotico per $\chi \to \infty$ ($r \to 0$)

– Caso limite : (compenetrazione impossibile)

$$\varepsilon^{max} = 1 \Rightarrow \chi = \frac{2}{h} \Leftarrow \varepsilon^{max} = \chi\frac{h}{2}$$

$\varepsilon^{max} \le 1$



$$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{1}{\varepsilon_0} \simeq \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000.$$

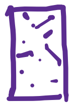
– Caso tipico $\varepsilon^{max} = 1\% = 10^{-2} \Rightarrow \chi = \frac{2}{h}10^{-2}$

(in campo EP)

$$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{10^{-2}}{\varepsilon_0} \simeq 10$$

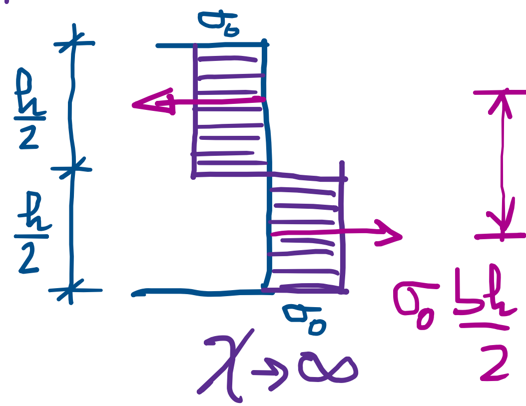
deformazioni che possono tipicamente manifestarsi in ambito EP.

Fattore di forma:



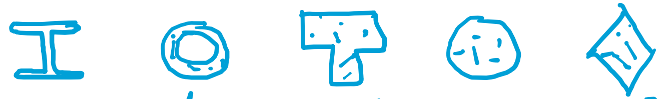
$$\alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\cancel{\sigma_0} W_p}{\cancel{\sigma_0} W_e} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Momento Limite:



$$M_L = \sigma_0\frac{bh^2}{4}$$

Generalizz. ad altre sezioni:



α: 1.1-1.2 1.27 1.6-1.8 1.7 2.0

$$\frac{bh^2}{4} = W_p = 2\underbrace{S'_x}_{} = \cancel{2}\,\frac{bh}{2}\,\frac{h}{\cancel{4}\,2}$$

massimizza il guadagno plastico

Momento statico parte sez. sotto asse neutro

Concetti fondamentali :

- Flessione elastoplastica (trave): da comportamento elastico a comportamento elastoplastico -

- Ipotesi cinematica sul campo di deformazione (conservazione delle sezioni piane) : $\varepsilon_{zz} = \chi\, y$ valida in campo elastoplastico

$\sigma_{zz} = E\, \varepsilon_{zz}$

campo elastico

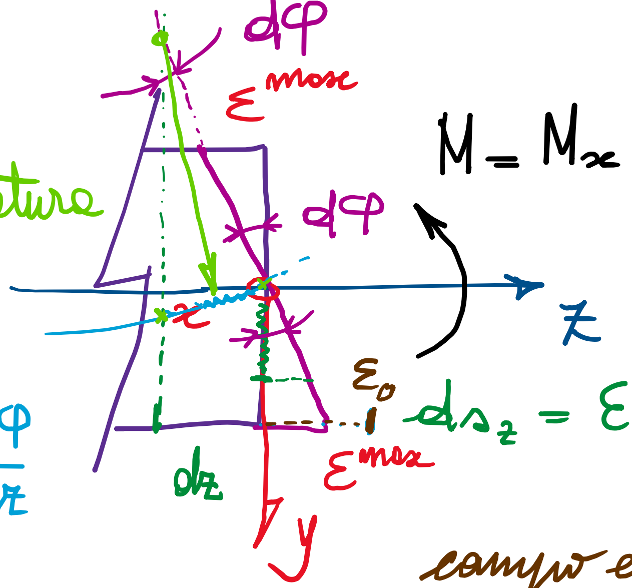
$\rho = r$

raggio di curvatura

$ds = \rho\, d\varphi$

$\chi = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\varphi}{ds} \simeq \dfrac{d\varphi}{dz}$

curvatura della linea d'asse inflessa



ε_0

$$ds_z = \varepsilon_{zz}\, \frac{dz}{dz} = y\, \frac{d\varphi}{dz} \quad (\chi) \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{zz} = \chi\, y} \quad \rightarrow \quad \sigma_{zz}(y) = E\, \chi\, y$$

campo elastico (lin.)

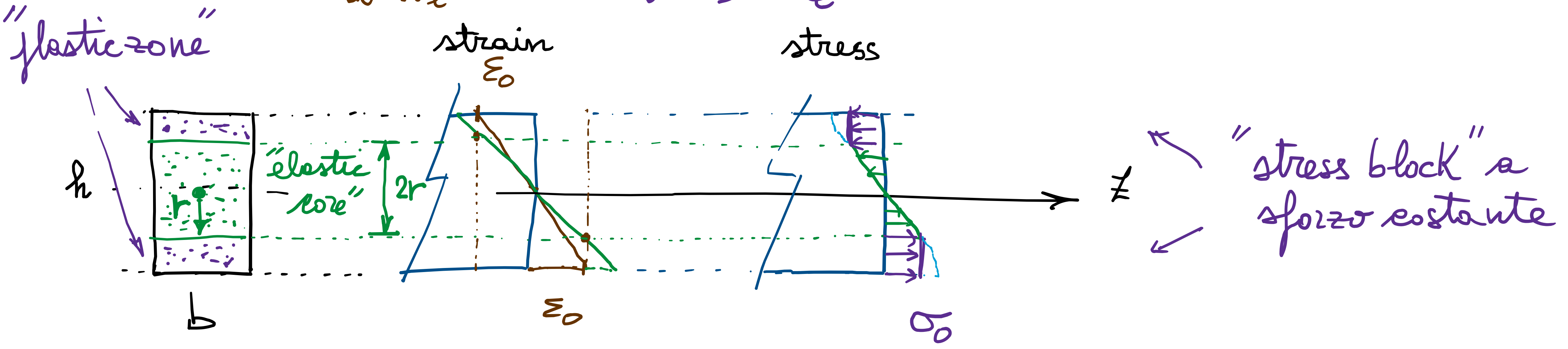
$\varepsilon^{max} \leq \varepsilon_0$

deformazioni lineari sulla sezione

sforzo lin. sulla sezione

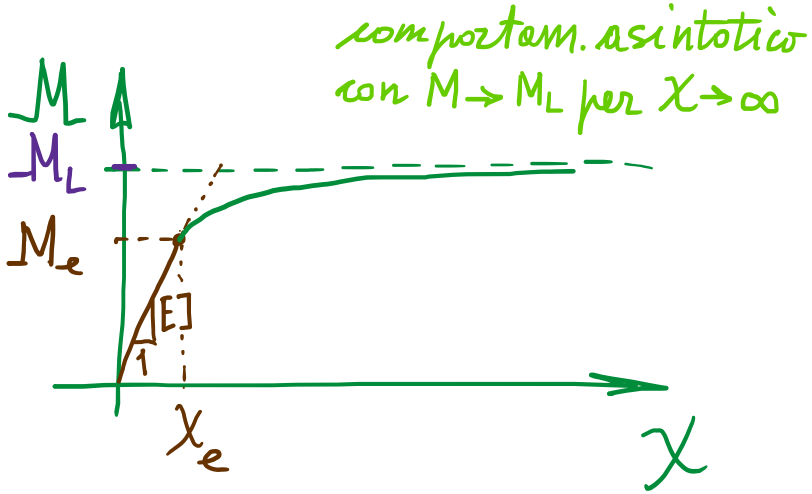
– Campo elastoplastico: $\varepsilon^{max} \geq \varepsilon_0$

$\chi = \chi_e \qquad \chi \geq \chi_e$

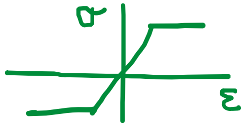


a χ crescente, oltre il campo elastico, r si riduce da $\frac{h}{2}$ $(\chi = \chi_e)$ a 0 $(\chi \to \infty)$

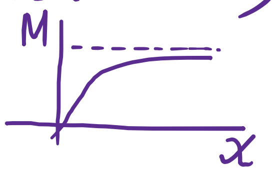
– Conduce a legge Momento/Curvatura $M = M(\chi)$ non lineare



SOMMARIO (Lez. 23)



- Flessione elastoplastica (vs. legge costitutiva della sez. trasversale). [da materiale a sezione]
- Hp. di conservazione delle sezioni piane (campo lineare di deformazione).
- Regime elastico (lineare): modulo di resistenza elastico, momento/curvatura e limite elastico.
- Regime elastoplastico: plasticizzazione con "stress block" che si diffonde, per curvature crescenti, dai lembi vs. l'interno; legame M/χ non-lin. con incrudimento; modulo (di resistenza) plastico; momento limite (χ→∞).



- Fattore di forma: guadagno plasticità/elasticità.
- Casi pratici: momento limite quasi raggiunto per deformazioni osservabili ~1% in campo elastoplastico.

Next step: comportamento globale della trave inflessa; ipotesi di cerniera plastica; meccanismo di collasso (plastico) della trave.