

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

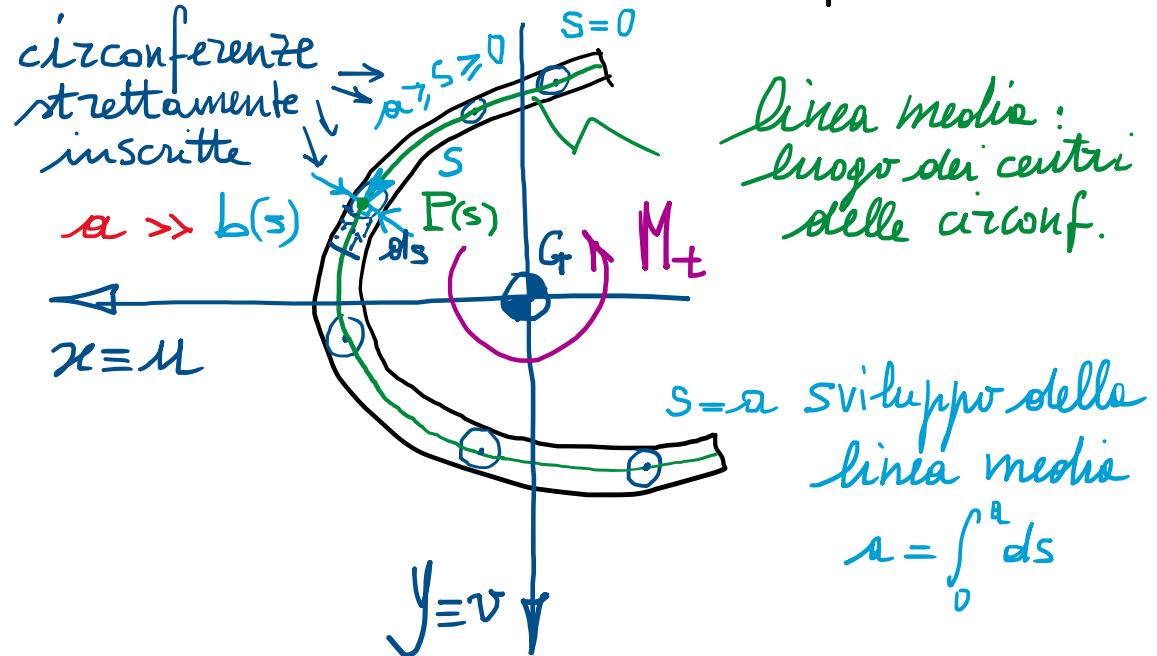
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

Torsione nei profili sottili aperti ( $\rightarrow$  generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile) "ripiegato"



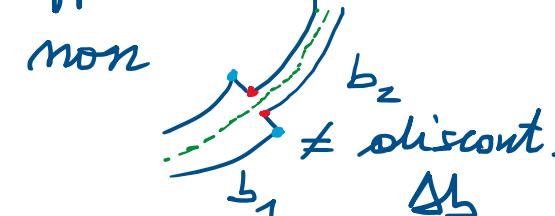
Caratteristiche geometriche (riferite alla linea media):

$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

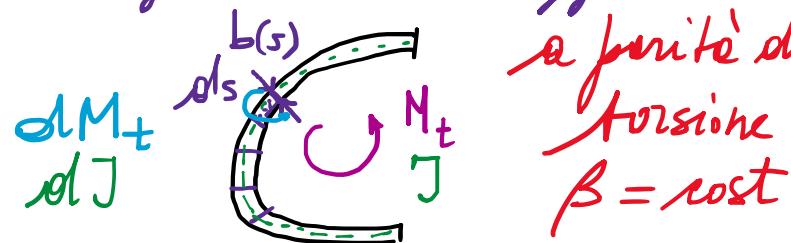
$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

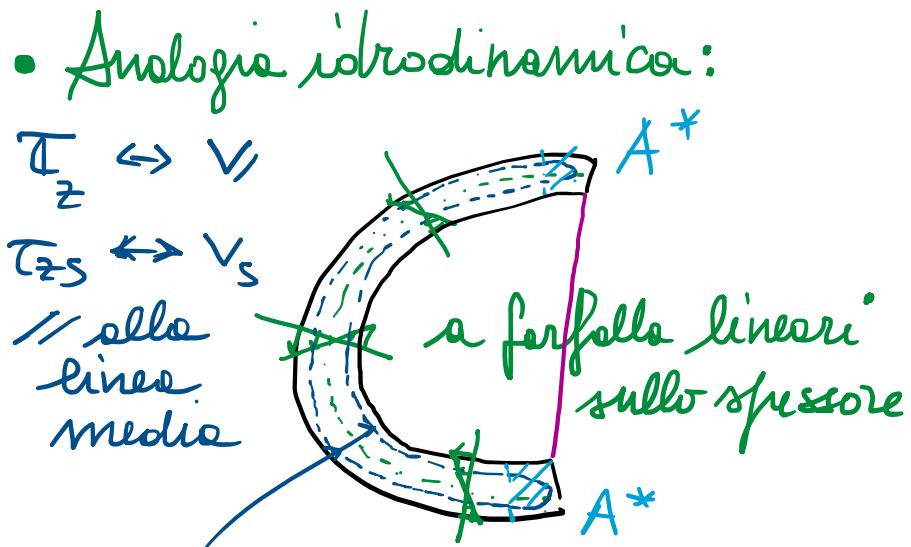
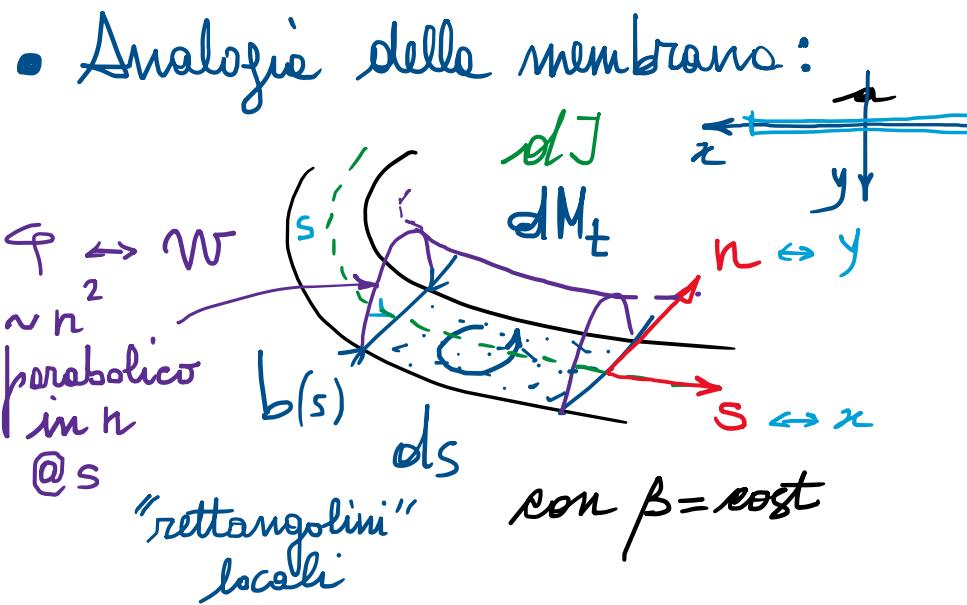
$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore  $b(s)$ , anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).
- Variazione ammessa, seppur con  $b(s) \ll a$  e  $s$ , con continuità:



- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo  $b(s)ds$  si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione





traiettorie che si  
richiudono all'interno  
dello spessore

→ "bracci di leva" delle  $\tau_{zs}$   
dell'ordine dello spessore  $b(s)$   
quindi piccoli → scarsa capacità portante  
e torsione

• f. re di Airy:  $\frac{M_t}{J}$

$$\Phi(n; s) = K \left( \frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right)$$

locale

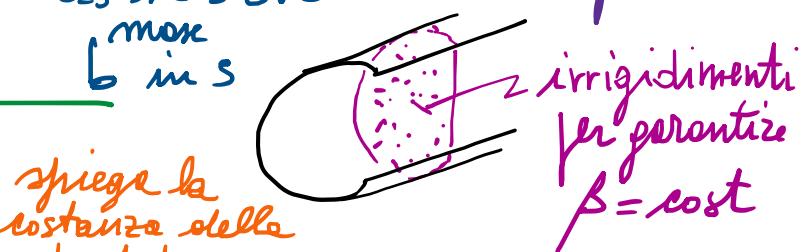
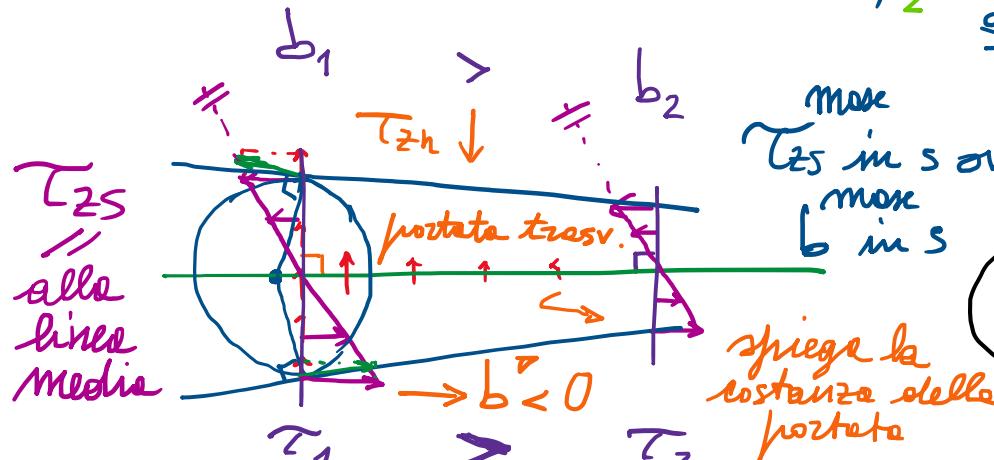
$$T_{zs}(s) = \frac{M_t}{J} b(s)$$

• tensioni tangenziali:

$$\begin{cases} T_{zs}(n; s) = \Phi_{,n} = G\beta (-2n) = -2G\beta n = -2 \frac{M_t}{J} n \\ T_{zh}(s) = -\Phi_{,s} = K \frac{2b(s)}{4} b(s) \underset{db(s)/ds \approx 0}{\underset{\substack{\sim 0}}{\approx}} 0 \end{cases}$$

trascurabili  
in senso  
ingegneristico

spessore  
resto  
piccolo



$\tau_z$  tangente al  
contorno

$\tau_{zs}$  (flusso uscibile del  
profilo)

-  $\int J$  determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle  $T_{2s}$  e il momento torcente  $M_t$ ):

$$M_t = 2 \int_A G\beta dA = 2 G\beta \int_0^a \left( \frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) dn ds$$

$$\begin{aligned} &= 2 G\beta \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \\ &= G\beta J \end{aligned}$$

$dJ \quad \frac{ds}{b(s)}$

$b = \text{cost} \Rightarrow J = \frac{1}{3} ab^3$

$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \quad \text{"piccolo"} \sim b^3(s)$

momento d'inerzia torsionale

torsione

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad G\beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ} \Rightarrow dM_t = \frac{dJ}{J} M_t$$

cost. per tutti i  $b(s) \cdot ds$

rigidezza torsionale

$$\frac{b(s)}{\int ds}$$

$$T_{2s}(s) = G\beta b(s) = \frac{M_t}{J} b(s) = \frac{dM_t}{dJ} b(s)$$

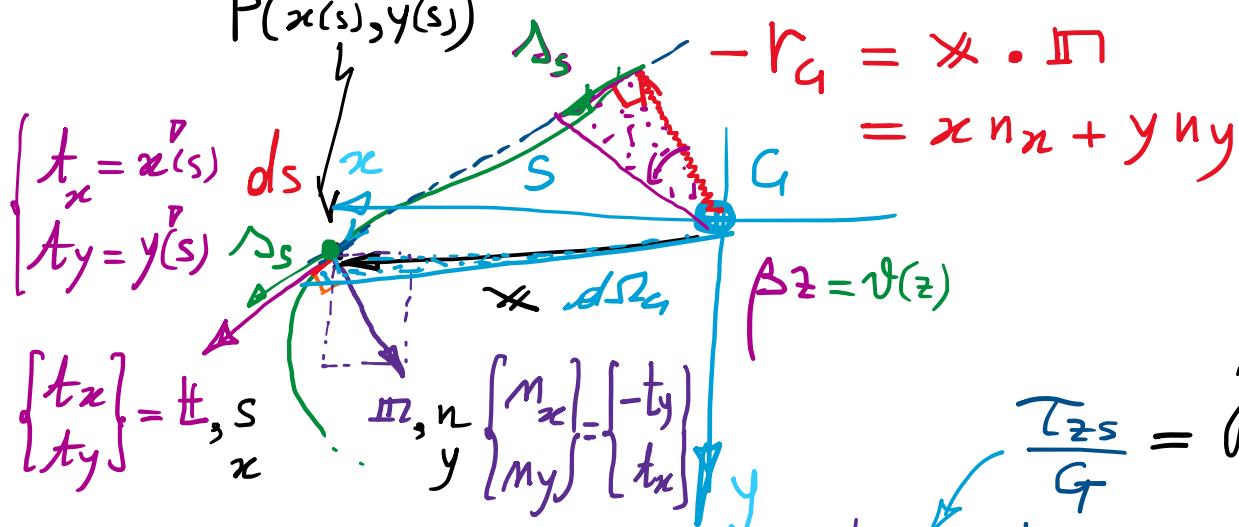
- Ingobbiamento fuori piano (riferito alle linee media)  $[\Psi_G(s) \neq 0, \Psi_c(s) \neq 0]$

campo  
di  
sforzi

spostamenti  
(rif. a G)

$$P(x(s), y(s))$$

$$\begin{cases} \Delta_x = -\beta z y \\ \Delta_y = \beta z x \\ \Delta_z = \beta \Psi_G(x(s), y(s)) \end{cases}$$



$$d\Psi_g = -2 d\Omega_g \quad \bar{\Psi}_g = 0$$

$$\Psi_g(s) = -2 \left( \bar{\Omega}_g(s) - \bar{\bar{\Omega}}_g(s) \right)$$

$$\bar{\bar{\Omega}}_g = \frac{1}{A} \int_0^a \bar{\Omega}_g(s) b(s) ds$$

Velocità  
media

$$\underbrace{\Psi_g(s)}_{+} \quad \underline{\underline{\Psi}_g} = 0$$

$$\underline{\underline{\Psi}_g} = \Delta_s = \Delta \cdot \underline{\underline{t}} = \Delta_x t_x + \Delta_y t_y$$

$$= \beta z (-y t_x + x t_y)$$

$$= \beta z (-y n_y - x n_x)$$

$$= -\beta z (x n_x + y n_y)$$

$$= \beta z r_g = \Delta_s$$

vedi mappe di  
spostamento  
nella direzione s

$$\frac{\mathcal{T}_{zs}}{G} = f_{zs} = \Delta_{z,s} + \Delta_{s,z} = \beta (\Psi_{g,s}(s) + r_g(s))$$

$$\frac{d\Psi_g}{ds} = \Psi_{g,s} = \frac{\mathcal{T}_{zs}(s)}{G \beta} - r_g(s)$$

$$d\Psi_g = \frac{\mathcal{T}_{zs}(s)}{G \beta} ds - 2 \frac{1}{2} r_g(s) ds$$

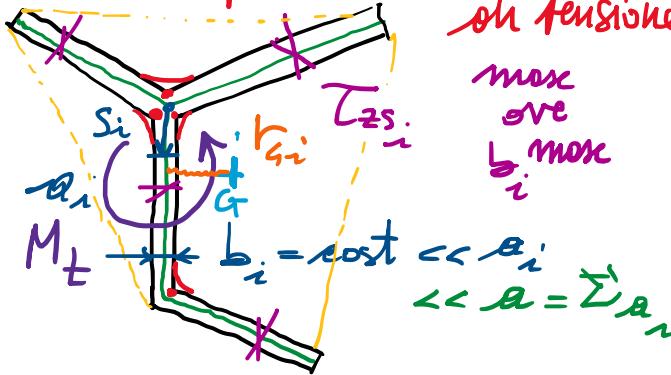
profili aperti: qui  $\mathcal{T}_{zs}(s) = 0$  sulla linea media  $d\Omega_g$

Per i profili rottili aperti,  
le funzioni di ingombro  
sono definite delle f.n. area  
settoriale  $\Psi_g(s) \rightarrow x_c, y_c$

funzione  
 $\Omega_g$ : area settoriale  
coordinate  
del centro di  
torsione

- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili (caso frequente nella pratica):

*smussi per abbattere concentraz. di tensione max over  $b_i$  max*



$$(T_{2s_i}^{\max})^{\text{max}} = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M_t i}{J_i} b_i^{\max}$$

- Funzione di ingombro:  $\psi_{g_i}(s_i) \sim \Omega_{g_i}(s_i)$  con  $r_{g_i} = \text{cost}_i + \text{tutto } i$

- Profili "a stella"

particolarmente  
debolli e  
a torsione



*centro della stella  
è il centro di torsione*

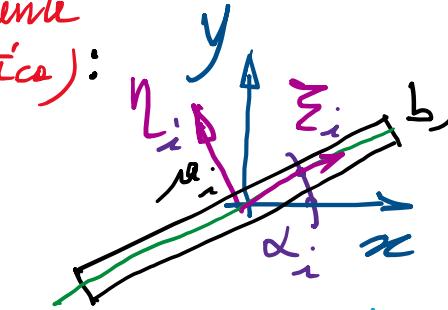
no ulteriori risorse portanti da  
ev. ingombro impedito (torsione  
per congruenza  $\leftrightarrow$  secondaria)

$$A = \sum_i a_i b_i$$

$$J_x = \sum_i J_{x_i}$$

$$J_y = \sum_i J_{y_i}$$

$$\begin{aligned} J &= \sum_i J_i \\ &= \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3 \end{aligned}$$



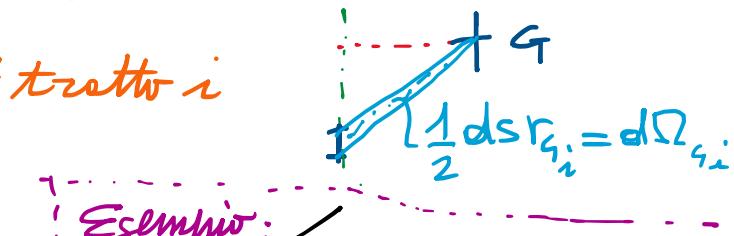
$$J_{\Sigma_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \approx 0$$

$$J_{\eta_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3$$

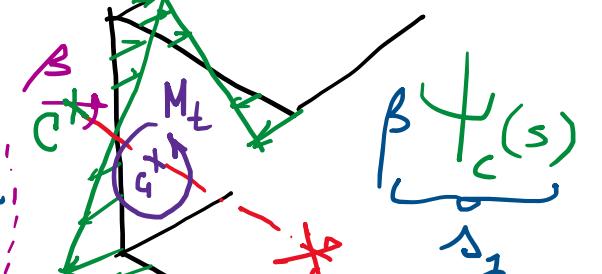
trasf. per rotazione d'assi  
(con  $J_{\Sigma_i} = 0$ )

vedi  
Cerchiwodh'  
Mohr  
(delle inerzie)

$$\begin{aligned} J_{x_i} &= J_{\eta_i} \sin^2 \alpha_i \\ J_{y_i} &= J_{\eta_i} \cos^2 \alpha_i \\ J_{x_i y_i} &= \frac{J_{\eta_i}}{2} \sin 2\alpha_i \end{aligned}$$



Esempio:



f.n. di ingombro  
riferite al centro  
della stella idntic.  
nulle

ingombro  
riferito al  
centro di torsione

$$r_{g_i} \neq 0$$

$$r_{c_i} = 0$$

$$\begin{aligned} \int_A \psi_c dA &= 0 & \checkmark \\ \int_A t_{c,x} dA &= 0 & \checkmark \\ \int_A t_{c,y} dA &= 0 & \checkmark \end{aligned}$$

$$\psi_c = 0$$

profilo a  $\Sigma$