

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problemi euleriani di stabilità (Teorie del 2° ordine - Sistemi discreti MDOF)

Hip. • Esistono condizioni di equilibrio dipendenti linearmente dai carichi:

n gradi

$$\vec{P} = p \vec{P}_0 \quad \text{vettore dei carichi base}$$

... moltiplicatore dei carichi (adimensionale, ≥ 0)

• Linearità pre-critica:

$\vec{q}_L = p \vec{q}_{L_0}$... conf. ne equilibrata corrispondente ai carichi base (q_i : coordinate lagrangiane)

• Si assume una forma lineare in p per le variazioni 2^a dell'EPT:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \delta \vec{q}_L^\top K \delta \vec{q}_L = \underbrace{\omega(\delta \vec{q}_L)}_{\omega = \frac{1}{2} \delta \vec{q}_L^\top K_E \delta \vec{q}_L} - p w(\delta \vec{q}_L)$$

$\omega = \frac{1}{2} \delta \vec{q}_L^\top K_E \delta \vec{q}_L$ \leftrightarrow energia potenz. elastica > 0

matrice di

rigidità elastica

Matrice di rigidità

$$K = K_E - p K_G \quad (\text{cost. in } q_i, \text{lin. in } p)$$

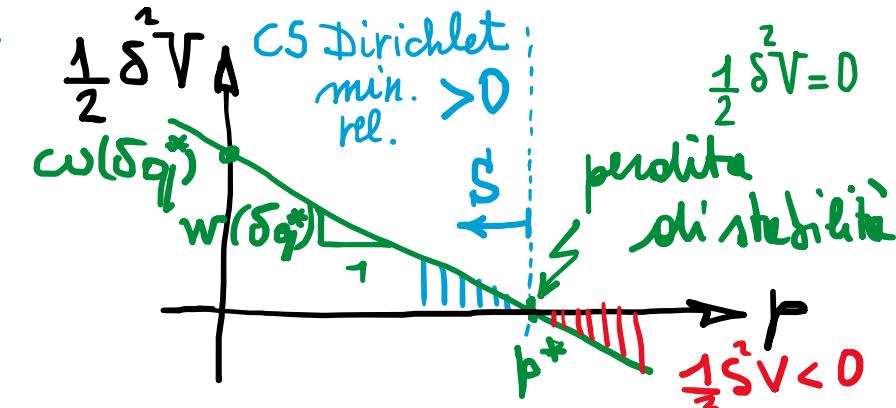
$n \times n$
coerentemente figlie gli due contributi, con p che, per livelli crescenti, porta a "negativizzare" K

p_i^* : moltiplicatori critici

$\delta \vec{q}_i^*$: deformate critiche

$w = \frac{1}{2} \delta \vec{q}_L^\top K_G \delta \vec{q}_L$ \leftrightarrow matrice di rigidità geometrica

lavoro del 2^o ordine dei carichi esterni conservativi $> 0 \forall \delta \vec{q} \neq 0$



- Condizione di perdita di stabilità \Rightarrow valori critici:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \omega(\delta q_L^+) - p^* w(\delta q_L^+) = 0 \Rightarrow p_i^*(\delta q_L^+) = \frac{\omega(\delta q_L^+)}{w(\delta q_L^+)} = \frac{\frac{1}{2} \delta q_L^{+T} K_E \delta q_L^+}{\frac{1}{2} \delta q_L^{+T} K_G \delta q_L^+} = R(\delta q_L^+)$$

- Il minimo valore dei moltiplicatori critici si dice moltip. critico eulero:

$$p_{cr}^E = \min \{ p_i^* \} \Rightarrow P_{cr}^E = p_{cr}^E P_0$$

(prime condiz. di perdita di stabilità al crescere di p).

- Per $p = p_{cr}^E$, K diviene semidef. pos. (perde per le prime volte le sue def. pos.)

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \omega(\delta q_L) - p_{cr}^E w(\delta q_L) = \frac{1}{2} \delta q_L^T (K_E - p_{cr}^E K_G) \delta q_L \geq 0 \quad \forall \delta q_L \neq 0$$

- Det. dei mott. critici (p_i^+):

- Studio propr. algebriche di $K = K_E - p K_G$

+ min. princ.

+ singolarità, det $K = 0 \Rightarrow p_i^*$

- Studio pb. agli autov. associati a K_E, K_G generalizzato

$$K \delta q = (K_E - p K_G) \delta q = 0 \Rightarrow$$

$$p_{cr}^E < \frac{\omega(\delta q_L)}{w(\delta q_L)} = R(\delta q_L)$$

\hat{p}_i^+ $\hat{\delta q}_{L,i}^+$ vedi analogia con Dinamica

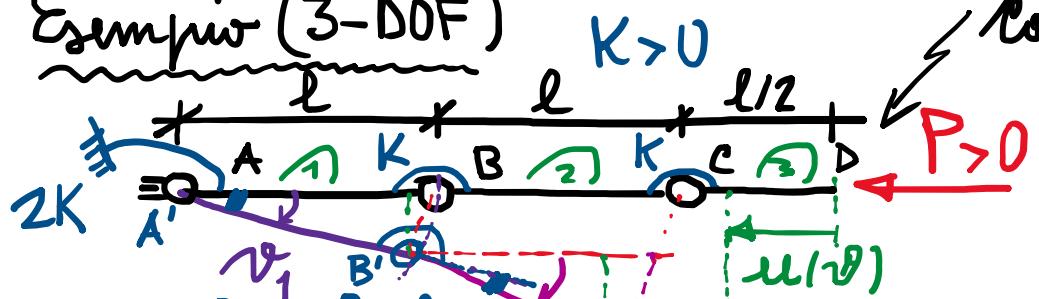
$\left\{ \begin{array}{l} p_i^* \text{ autovel. e minimo per } p_{cr}^E \text{ (slm.)} \\ \hat{\delta q}_{L,i}^* \text{ autovettori (deform. critiche)} \end{array} \right.$

- Rapporto di Rayleigh fornisce stime per eccesso del moltip. cr.

- R è stazionario nelle conf. in equilibrio

e minimo per p_{cr}^E (slm.)

Esempio (3-DOF) Conf. ne di riferimento $\vartheta_i = 0$ ($\bar{\vartheta}_0 = 0$ s.t. equil.)



$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta} = \begin{cases} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{cases} &= \boldsymbol{\vartheta} \quad \dot{\vartheta}_{12} = \dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1 \quad \dot{\vartheta}_{23} = \dot{\vartheta}_3 - \dot{\vartheta}_2 \quad \dot{\vartheta}_3 \\ \text{conf. ne variate} \\ (\text{discosta dalle conf. ne di rif.}) \end{aligned}$$

Approssim. energetico $\Delta \vartheta = \bar{\vartheta} - \vartheta_0 = \vartheta$

$$\text{EPT: } \tilde{V}(q) = \frac{1}{2} K \left[2\dot{\vartheta}_1^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1)^2 + (\dot{\vartheta}_3 - \dot{\vartheta}_2)^2 \right] - P \mu$$

$\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3$ energie potenziali elastiche

$$\mu = \frac{P l}{K} = \frac{P}{K/l} \Rightarrow P = \mu \frac{K}{l} = \mu P_0$$

\tilde{V}_f EP
carichi esterni conservat.
- Lef

$$\tilde{V} = \frac{K}{2} \left[\frac{1}{2} (3\dot{\vartheta}_1^2 + 2\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\vartheta}_3^2 - 2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - 2\dot{\vartheta}_2\dot{\vartheta}_3) - P \left(\frac{5}{2} - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 - \frac{1}{2} \cos \vartheta_3 \right) \right]$$

- equaz. di equil. (de stat.) $\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} = \ddot{\vartheta}_i$ $\cos \vartheta_i = \left(1 - \frac{\dot{\vartheta}_i^2}{2}\right) \Rightarrow \tilde{V}_2(q)$

$$\begin{cases} \tilde{V}_{,\vartheta_1} = 3\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 - p \sin \vartheta_1 = 0 \\ \tilde{V}_{,\vartheta_2} = -\dot{\vartheta}_1 + 2\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3 - p \sin \vartheta_2 = 0 \\ \tilde{V}_{,\vartheta_3} = 0 - \dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_3 - p \sin \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \tilde{V}_2(q) = \frac{\omega}{K} - p \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{\vartheta}_3^2)$ $\Rightarrow \tilde{V}_{2,\vartheta_i}$

$\begin{cases} (3-p)\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 = 0 \\ -\dot{\vartheta}_1 + (2-p)\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3 = 0 \\ 0 - \dot{\vartheta}_2 + (1-\frac{p}{2})\dot{\vartheta}_3 = 0 \end{cases}$

$K = K_E - p K_G$
già si delineano
 $K_E = K_0$

Derivate prime \Rightarrow vett. gradiente. eq. di equil. non lineari $\sin \vartheta_i \approx \dot{\vartheta}_i$ eq. di equil. linearizz., de stat. di \tilde{V}_2

- Derivate seconde (matrice hessiana):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{2, v_i, v_j} \\ = \tilde{V}_{v_i, v_j, v_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 - p \cos \vartheta_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - p \cos \vartheta_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{p}{2} \cos \vartheta_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{|v_i| \ll 1} \begin{bmatrix} 3 - p & -1 & 0 \\ -1 & 2 - p & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{p}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K} \end{aligned}$$

[Th. Schwarz]

$$\tilde{K}_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{K}_G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrice di rigidità elast.

matrice di rigid. geom.

$$\Rightarrow \tilde{K} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

3×3
matrice di rigidità di V_2
(cost. in ϑ_i , lineare in p)

- Carichi critici (de singolarità di \tilde{K}):

$$\det(\tilde{K}) = 0 \xrightarrow{} p_i^*$$

$$p^3 - 7p^2 + 13p - 4 = 0 \xrightarrow{} (p-4)(p^2 - 3p + 1) = 0$$

eq. n. caratteristiche
(3° grado \rightarrow 3 radici)

$p=4$ è soluz.

$$16 \cdot 1/4 - 28 \cdot 1/4 + 13 \cdot 1/4 - 1 \cdot 1/4 = 0$$

$$\begin{cases} \text{radici:} \\ p_{1,2}^* = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ p_3^* = 4 \end{cases}$$

moltiplicatori critici

$$\tilde{V}_{2, v_i, v_j} = \begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}$$

$$.3820 = p_{cr}^E \min_{p_i^*}$$

$$P_{cr}^E = .3820 \frac{K}{l}$$

Concetti fondamentali :

- Problemi euleriani di stabilità per sistemi discreti a più gradi (MDOF):
 - Analisi al 2° ordine \Rightarrow EPT $V(q) \approx V_z(q)$ (quadratica)
Utile ad indagare il segno della variazione seconda $\frac{1}{2} \delta^2 V$:
(ove $\frac{1}{2} \delta^2 V > 0$, conf. equil. con $\delta V = 0$ è min. rel. \Rightarrow stabile)
(ove $\frac{1}{2} \delta^2 V = 0$, " " no min. rel. \Rightarrow cessa di essere stabile)
 \hookrightarrow condizioni "critiche"
(no CS Dirichlet)
- Cerchi variabili proporzionalmente tramite comune moltiplicatore dei carichi p , ad amplificare i carichi base.
- Si considera una dipendenza lineare della variazione seconda $\frac{1}{2} \delta^2 V$ col moltiplicatore dei carichi p : la condizione di annullamento di $\frac{1}{2} \delta^2 V$ conduce ad un'equazione lineare in $p \Rightarrow$ carichi critici -

- "Modi di instabilità": p_i^* carichi critici \Rightarrow di cui il min. è p_E^*
 δq_i^* deformate critiche

configurazioni critiche in corrispondenza delle quali il sistema cessa di essere stabile (e le prime che si incontra, al crescere di p , è quella corrispondente al carico critico euleriano del sistema).

- Perdita di stabilità $\frac{1}{2} \dot{\delta}^T \dot{v} = 0 \Rightarrow K \delta q_i = 0$

condiz. di singolarità

matrice di rigidezza

$$K = K_E - p K_G$$

L geometrice
elastica

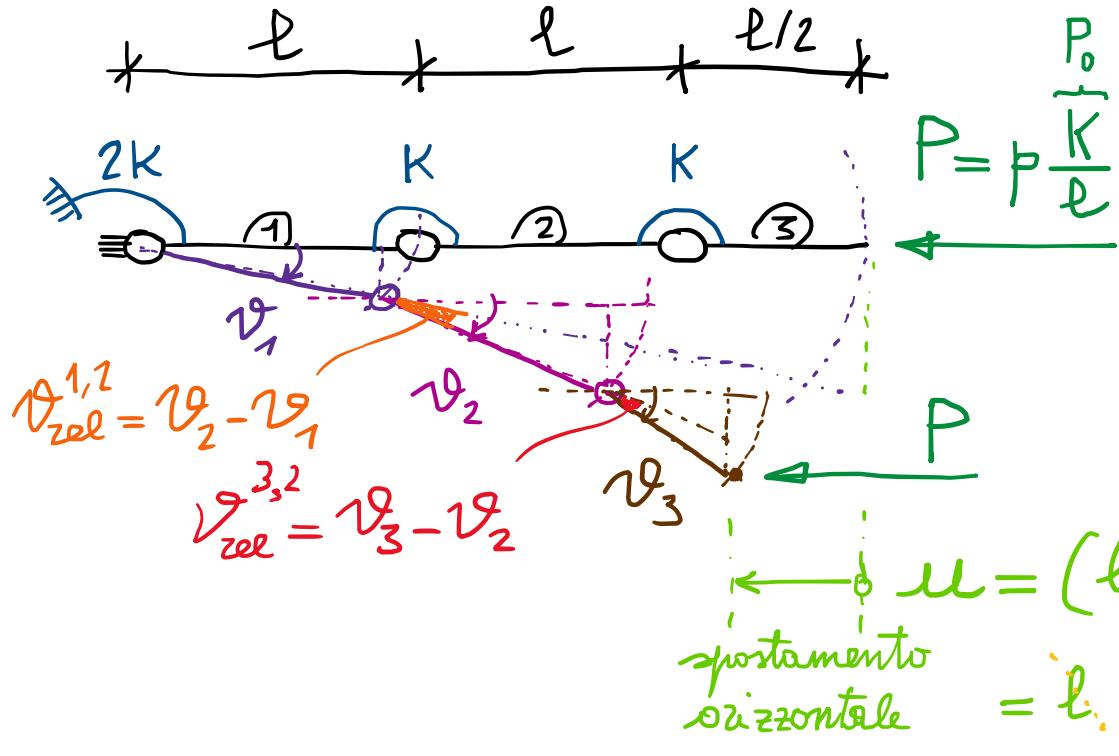
DINAMICA

$$IK \Phi_i = \omega_i^2 M L \Phi_i \quad \longleftrightarrow \quad \text{analogia}$$

modi principali
di vibrare

$$\underbrace{K_E \delta q_i^*}_{\text{problema agli autovettori generalizzato associato alle matrici } K_E \text{ e } K_G} = p_i^* K_G \delta q_i^* \quad \rightarrow \quad p_i^* \text{ autovoltori} \\ \delta q_i^* \text{ autovettori}$$

• Esempio MDOF (3-DOF):



coordinate lagrangiane

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\boldsymbol{q}}_0 = 0$$

rotazioni assolute

$$E.P.T.: \tilde{T} = \frac{\nabla(\varphi)}{K} = \frac{1}{2} K \left(2 \dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)^2 \right) - \underbrace{P u}_{-L_{ef}}$$

$$= \frac{1}{2} K \left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \right)$$

SOMMARIO (Lec. 19)

- Pb. euleriani di stabilità secondo teoria del 2°ordine, sistemi discreti MDOF.
- Condizione di perdita di stabilità ($\frac{1}{2}\delta^2\tau = 0$) \Rightarrow corichi critici.
- Matrice di rigidità elastica e geometrica: $K = K_E - \rho K_G$ (lin. int. ρ , cost. in q).
- Rapporto di Rayleigh e pb. agli autovariori generalizzati \leftrightarrow analisi con Dinamica.
- Esempio 3-DOF:
 - Scrittura dell'EPT (per spost. "geometricamente grandi").
 - Valutazione derivate prime e seconde.
 - Scrittura dell'EPT al 1°ord. ("... " " piccoli") $\sim q_i^2$.
 - Conseguenti valutaz. derivate prime ($\sim q_i^1$ lin.) e seconde ($\sim q_i^0 = 1$ cost.).
 - Calcolo dei corichi critici che condit. di singolarità di K (det $K=0$).

Next step: Deformate critiche; approccio statico (equil. nelle conf. ne deformata).
Sistemi continui (resta di Euler).