

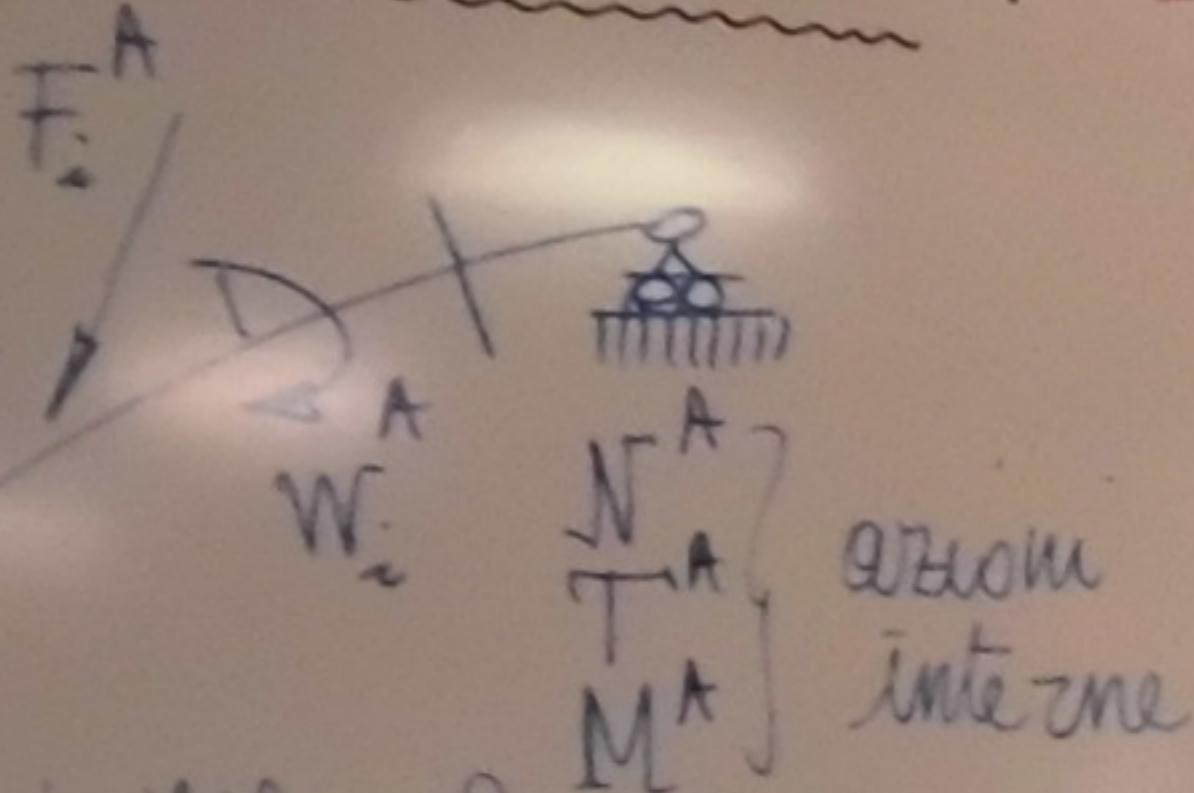
Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Definizioni:

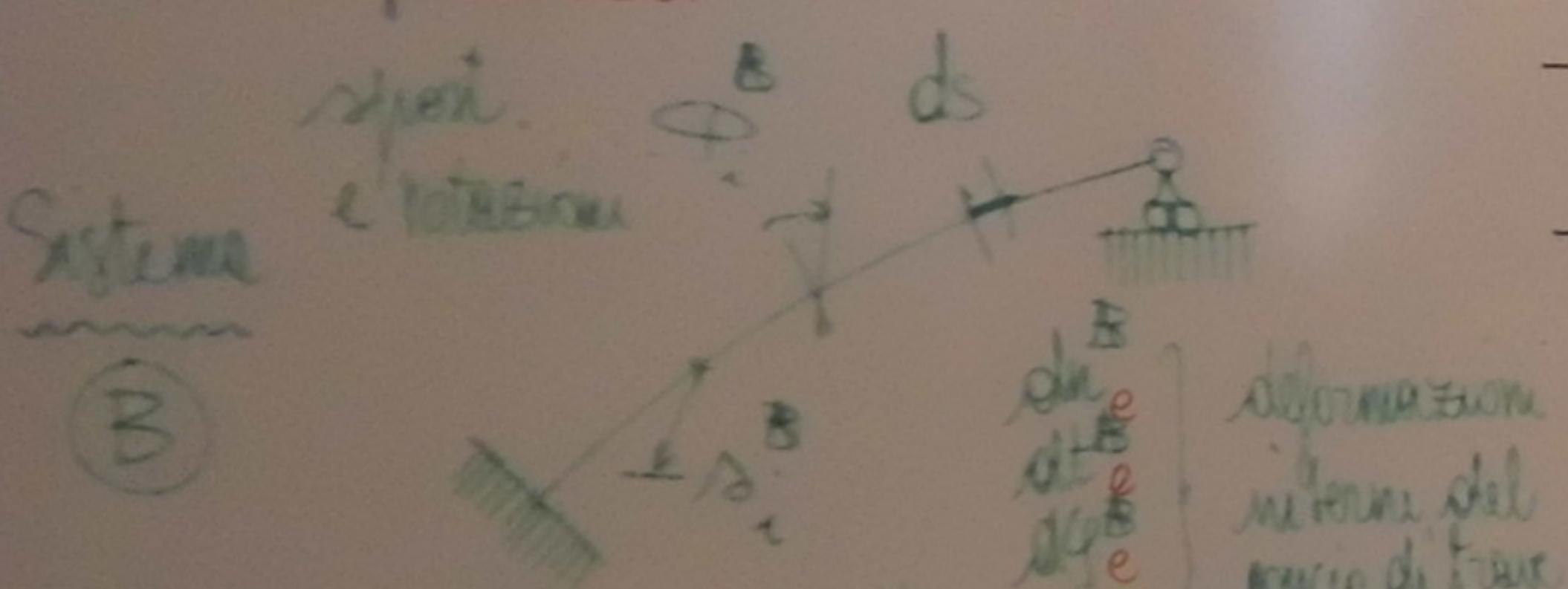
azione

Sistema esterne

(A)



Staticamente ammisible: famiglia di quantità statiche equilibrate



cinematicamente ammisible: famiglia di quantità cinematiche consante

Enunciato del PLV (CN di equil. e sangr.)

$$\text{Sist. } A, B \Rightarrow \int_{AB}^e = \int_{AB}^e \text{ ove}$$

$$d_e = \sum_i F_i s_i + W_i \varphi_i$$

$$L_e = \int_{AB}^e N_{de}^e + T_{de}^e + M_{de}^e$$

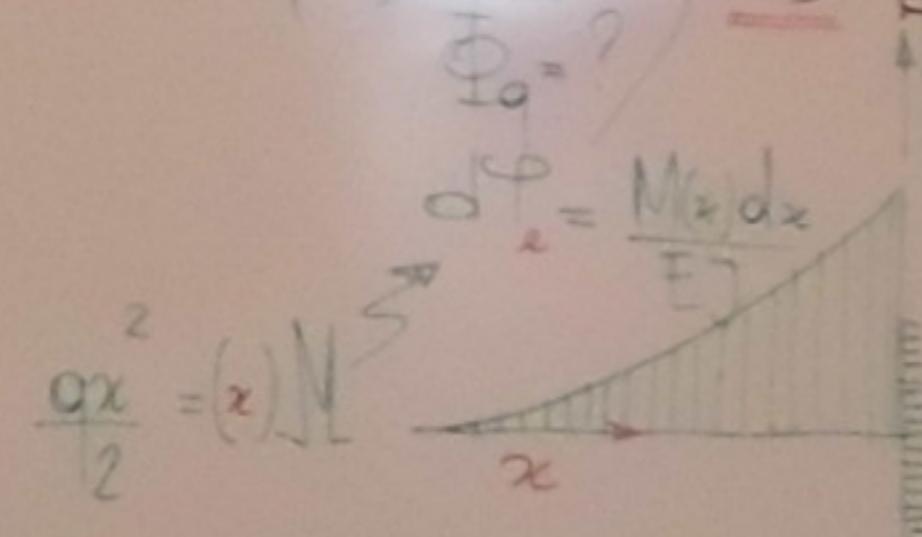
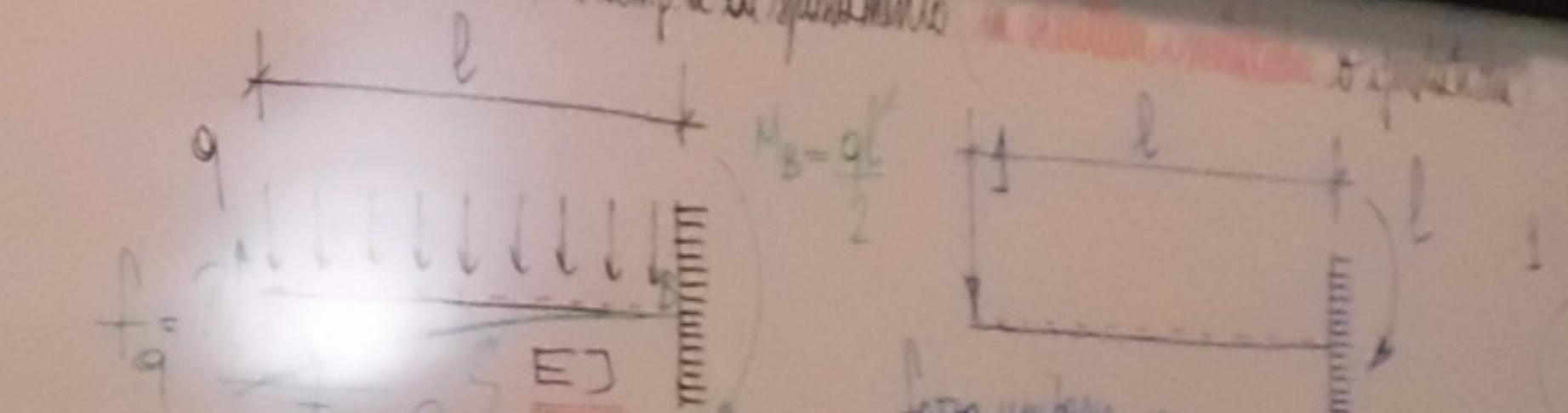
- Assunto, se pure dimostrabile (TLV).

- I due sistemi (ammisibili) possono essere virtuali, cioè non necessari. \equiv col sist. reale

Pertanto non esiste tra essi nessuna relazione di causa/effetto (causal indip. del campo dei materiali)

Usi tipici del PLV: determinat. di comp. di spost., risoluzione di strutture instabili

• Determinazione di comp. di spostamento



(B) Sistema reale

$$\text{Sist. reale: } L_e = 1 \cdot f_q + (1 \cdot f_q + l \cdot f_q) = f_q = \frac{q}{2} l^2$$

(A) Sistema virtuale

$$\text{Sist. virtuale: } L_e = 1 \cdot f_q + (1 \cdot f_q + l \cdot f_q) = f_q = \frac{q}{2} l^2$$

(C) Sist. falso

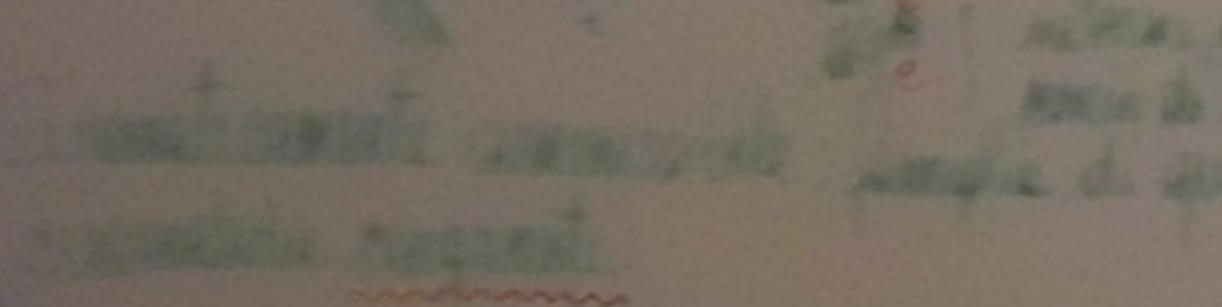
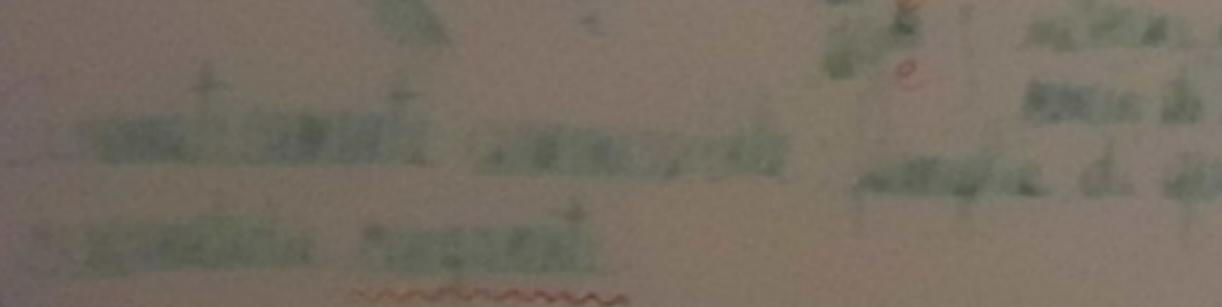
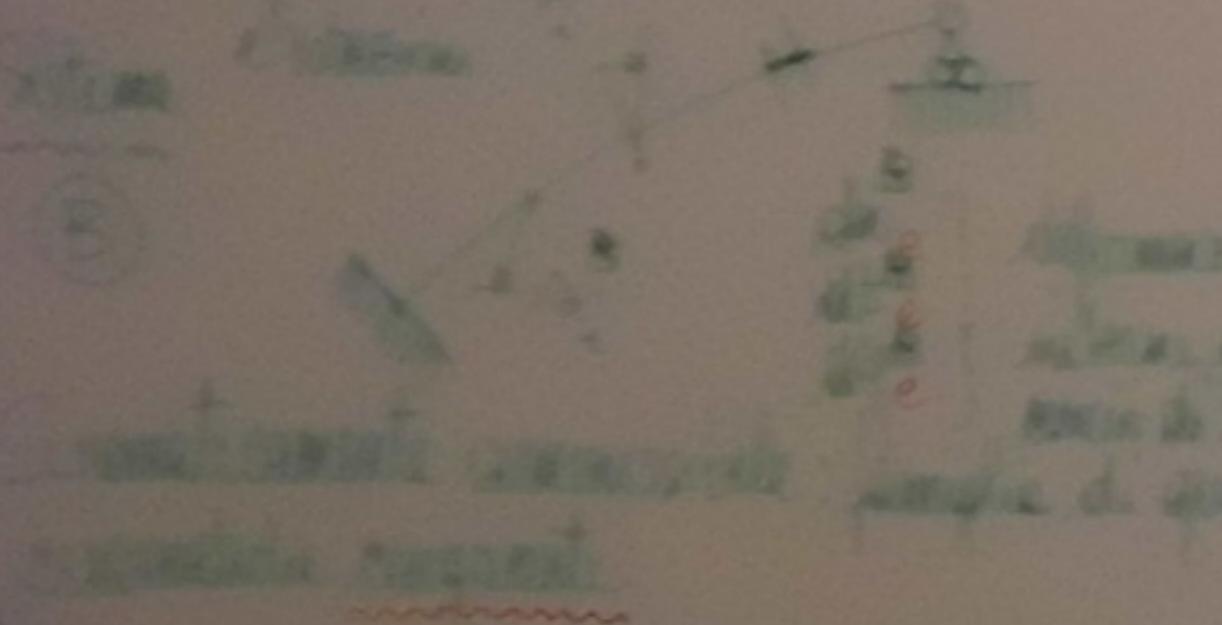
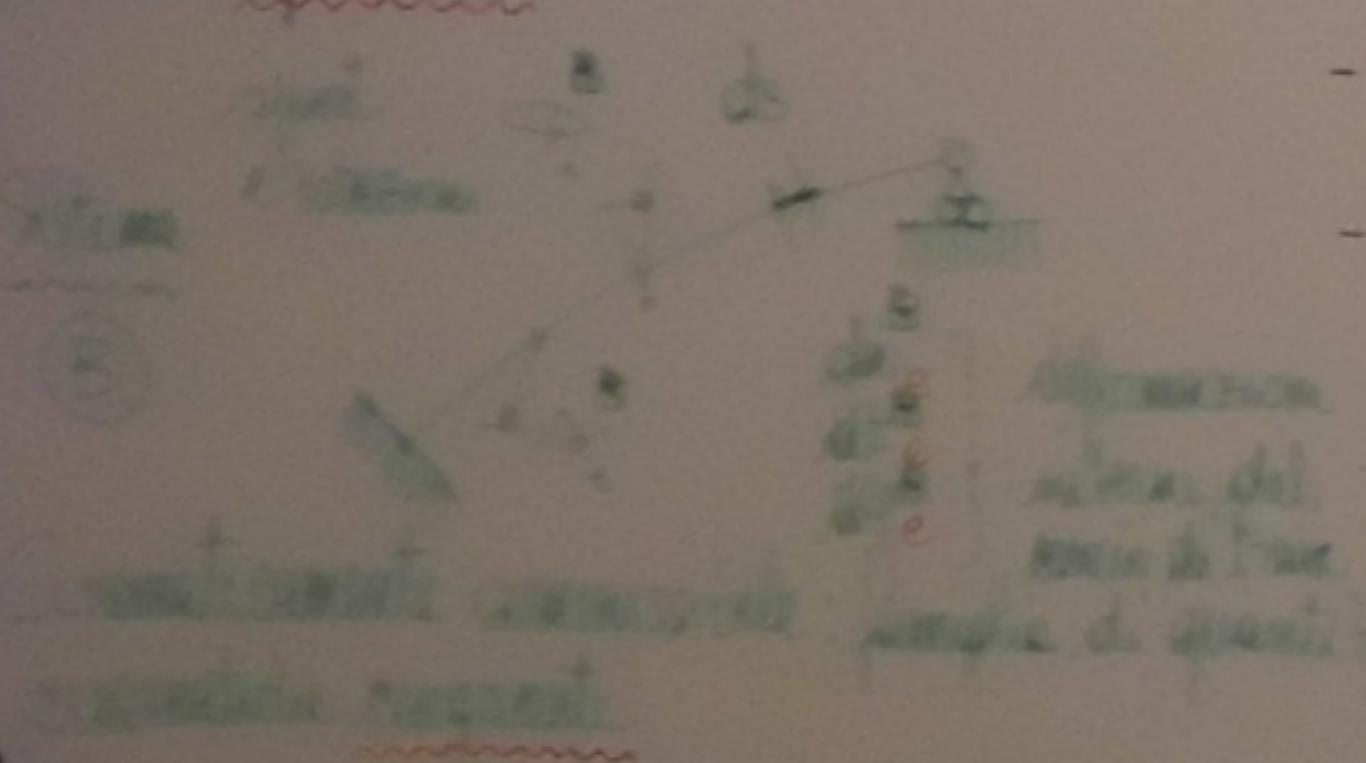
$$\text{Sist. falso: } L_e = 1 \cdot f_q + (1 \cdot f_q + l \cdot f_q) = f_q = \frac{q}{2} l^2$$



Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Definizione:
azione
Sistema reale

Stato ammesso: famiglia di quantità statiche reali



Enunciato del PLV (CN di agil e sonor.)

$$\text{Sist. } A, B \Rightarrow \Delta_e = \Delta_i \text{ ove}$$

$$\Delta_e = \sum_i F_{ix} + W_x$$

$$\Delta_i = \int_{\text{str}}^A N_e dx + T_e dx + M_e \phi_e$$

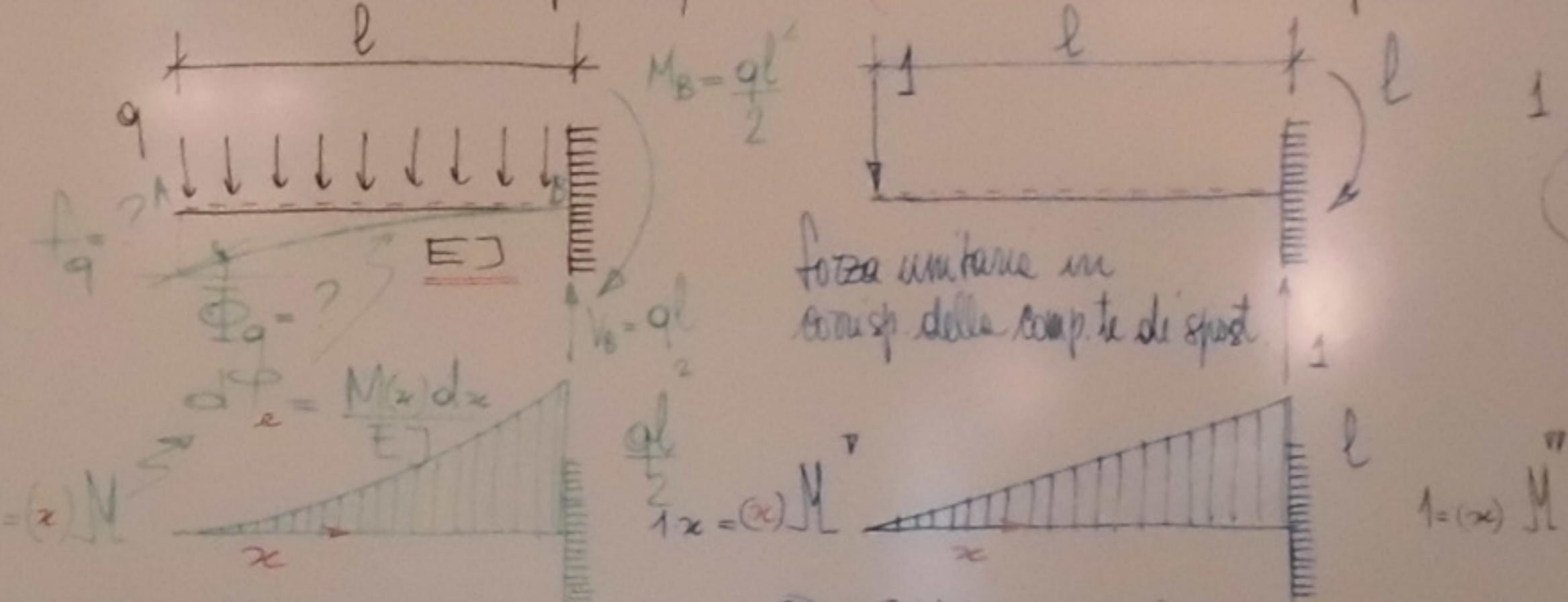
- Assunto, se pure dimostrabile (TLV).

- I due sistemi (ammessibili) possono essere virtuali, cioè non necessariamente del syst. reale.

Esiste un rapporto tra una reazione esterna di uno stato ammesso e del suo opposto.

Usi tipici del PLV: determinaz. di comp. di spost., risoluz. di strutture ipostatiche

• Determinazione di comp. di spostamento (in struttura ipostatica o postonica)



B Sistema reale

Sistema del

$$\text{PLV: } \Delta_e = 1 \cdot f_q + (1 \cdot y_B + l \cdot f_B) = f_q = \int_0^l N(x) M(x) dx = \int_0^l$$

A Sistema virtuale

(struttura fictizia)

$$f_q = \int_0^l x \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{q}{EJ} \frac{l^4}{4} = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{EJ} = f_0$$

A 2° struttura fictizia

AB

$$\text{PLV: } \Delta_e - 1 \cdot \Phi_q = \Phi_q = \int_0^l N(x) M(x) dx = \int_0^l$$

$$\Phi_q = \int_0^l x \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} dx = \frac{1}{6} \frac{q l^4}{EJ} = \frac{1}{6} \frac{q l^4}{EJ} = \Phi_0$$



Progetto di Lamiera flessibile (PLV) Enunciato del PLV (CN da legge e sangue)

$\text{risultante} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1$ ovvero
 $\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0$
 $\alpha_1 = \sum F_x + W_c$
 $\alpha_1 = \frac{M_B}{EJ} + T_A + M_{do}$

- assunto, se pure dimostrabile (TLV).
 - direzione flessibile passante per il centro di massa = risultante.
 - funzione PLV: determinata da tipo di spostamento

Determinazione di compiti di spostamento (in strutture isostatiche o iperstatiche)

forza unitaria in corrispondenza delle componenti di spostamento

$\Delta^F = \frac{M(x)dx}{EI}$

Sistema virtuale (struttura fictizia)

PLV: $\Delta = \int f_q d\Phi_q = \Phi_q = \int M(x) \frac{M(x)dx}{EI} = \int_0^l x \cdot \frac{qx^2}{2} \frac{dx}{EI} = \frac{1}{2} \frac{q}{EI} \frac{x^4}{4} \Big|_0^l = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI} = f_q$

2° struttura fictizia

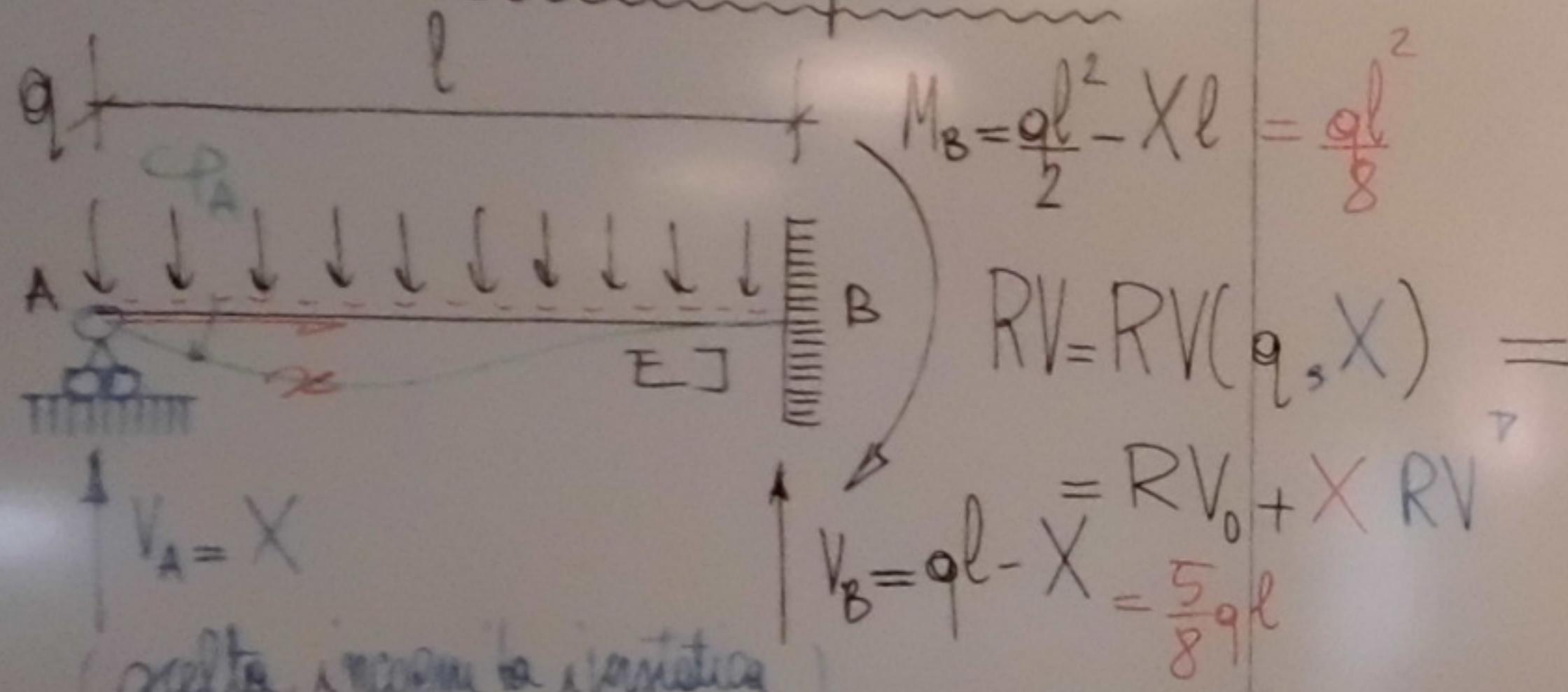
PLV: $\Delta = \int f_q d\Phi_q = \Phi_q = \int M^{pp}(x) \frac{M^{pp}(x)dx}{EI} = \int_0^l 1 \cdot \frac{qx^2}{2} \frac{dx}{EI} = \frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI} = \Phi_q$

generalizzazioni

1
 s
 y(s)
 come ottenuto con LE

Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

- Risoluzione di strutture iperstatiche



Metodo delle Forze

$$\omega_A = 0$$

Condizione
di compattezza

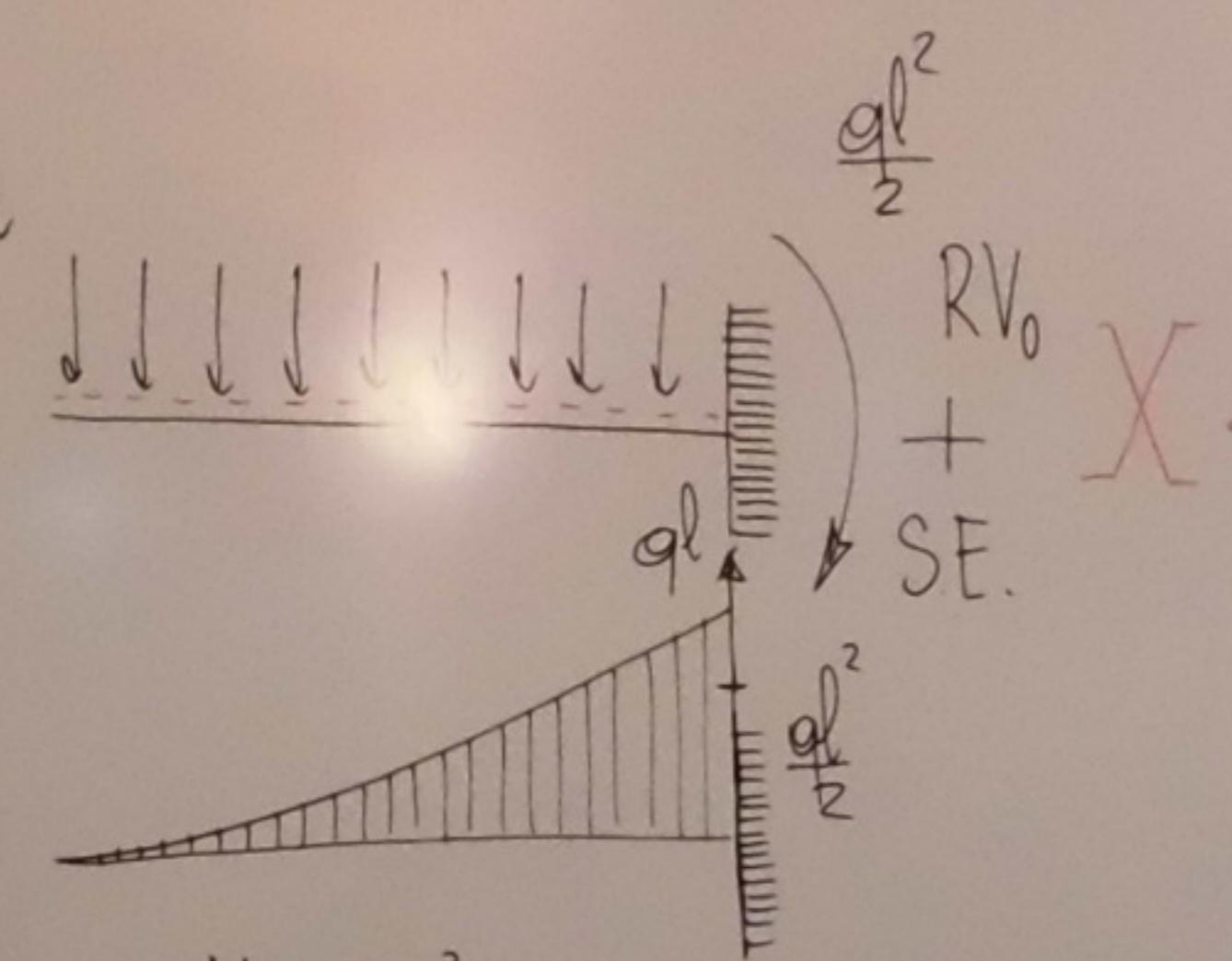
Sistema B
Sistema reale

$$M = M_0 + X M'$$

$$M_{\text{eff}} = \frac{qx^2}{12} - X \cdot x$$

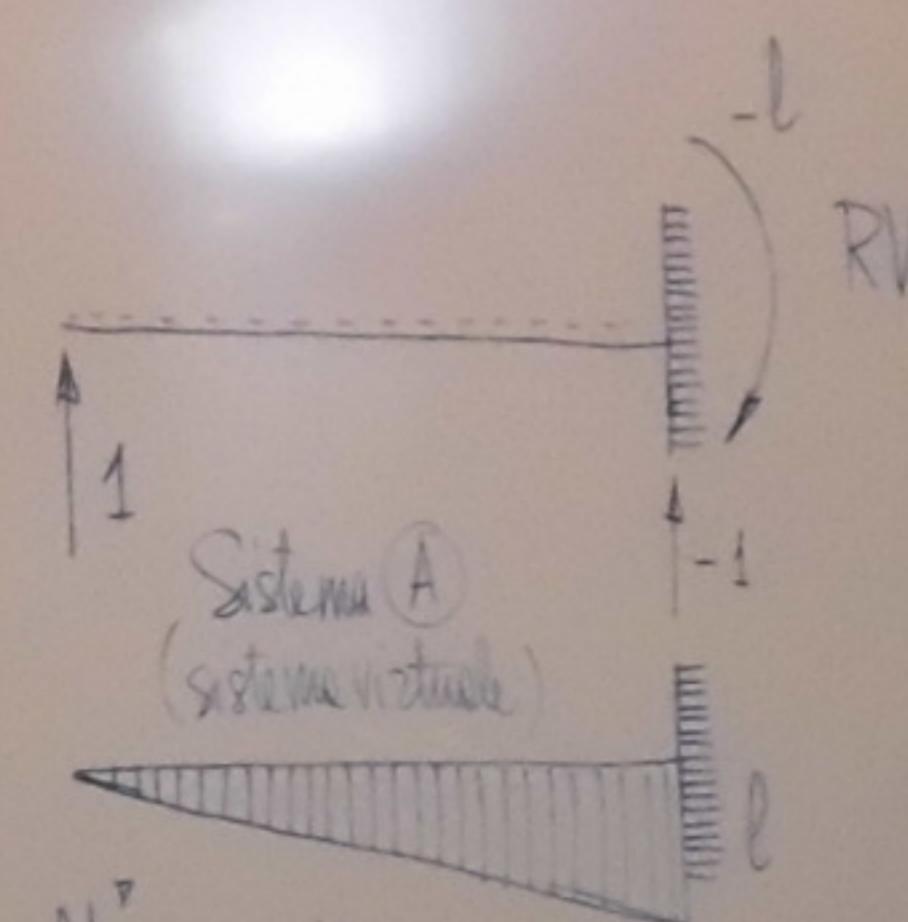
$$dM = M dx$$

Struttura principale instatica ($X=0$)



$$M_0 = \frac{qx^2}{2}$$

Struttura fittizia ($X=1$)



$$M(x) = -1x = -x$$

Struttura del PLV:

$$\begin{aligned} d_e &= 1 \cdot V_A + \frac{1}{l} \cdot V_B - P = \\ 0 &= V_A - \frac{1}{l} V_B - P = \\ 0 &= \left[\frac{1}{l} \cdot M_0(x) dx + X \cdot M'(x) \right]_0^l = \\ &\quad \int_0^l \left(\frac{1}{l} \cdot M_0(x) dx + X \cdot M'(x) \right) dx = \\ &\quad \frac{1}{l} \int_0^l M_0(x) dx + X \int_0^l M'(x) dx = \\ &\quad \frac{1}{l} \int_0^l \frac{qx^2}{2} dx + X \int_0^l (-x) dx = \\ &\quad \frac{1}{l} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{l^3}{3} - X \cdot \frac{l^2}{2} = \\ &\quad \frac{q}{6} l^2 - X \cdot \frac{l^2}{2} = \\ &\quad X = -\frac{q}{3} l^2 \end{aligned}$$

Risolvendo

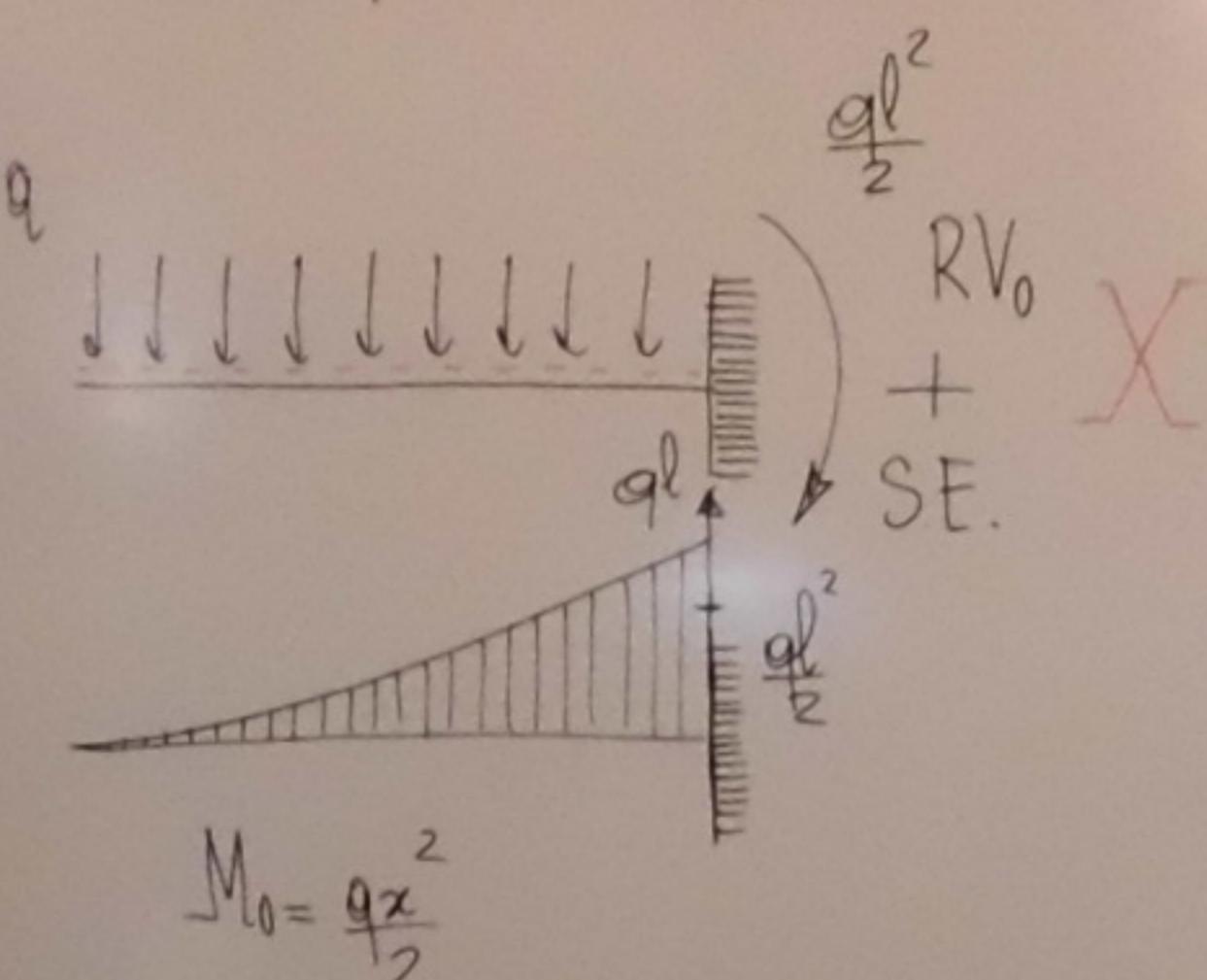
$$\text{Calcolo di } Q_A \text{ (a valle)}$$

$$Q_A = \int_0^l N(x) \frac{dx}{E I} = \frac{1}{12} \frac{q l^3}{E I}$$

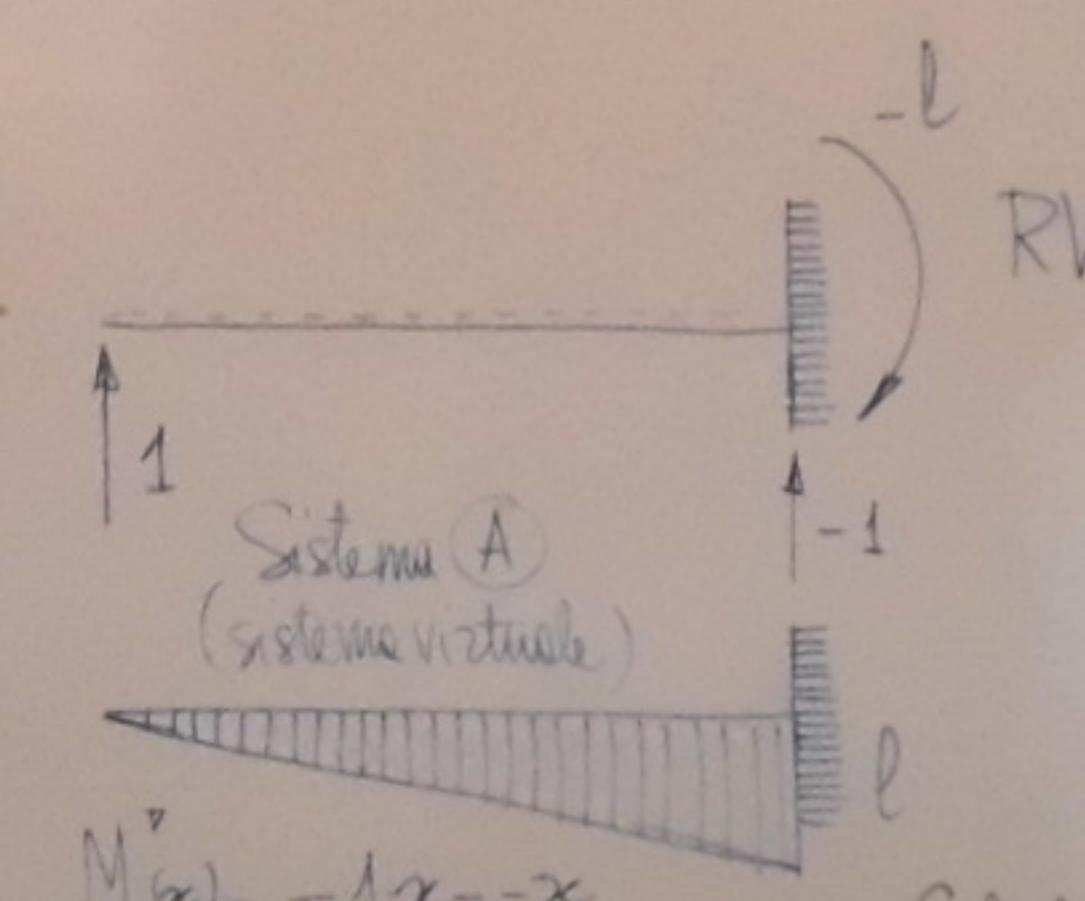
Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

- Risoluzione di strutture ipostatiche

Struttura principale instatica ($X=0$)



Struttura fitzina ($X=1$)



Scrittura del PLV

Scrivere del PLV:

Vedere
caso singolare

$$\int_a^{AB} \Delta_e = 1 \cdot v_A - \left(\frac{1}{EJ} M_0(x) + X M^0(x) \right) dx = \int_a^l \frac{M(x) dx}{EJ} = \frac{\Delta_e}{EJ}$$

$$0 = - \int_0^l N(x) \frac{M_0(x) + X M^0(x)}{EJ} dx$$

$$0 = \int_0^l N(x) M_0(x) \frac{dx}{EJ} + X \int_0^l M^0(x) dx$$

Risolvendo:

$$X = - \frac{\int_0^l M(x) \cdot M_0(x) dx}{\int_0^l N(x) dx} = - \frac{\frac{P}{8} \frac{a^4}{EJ}}{\frac{P}{3} \frac{a^3}{EJ}} = - \frac{\frac{1}{8} \frac{a^4}{EJ}}{\frac{1}{3} \frac{a^3}{EJ}}$$

φ_A (a valle)

$$M''(x) M_0(x) + \frac{3}{8} \frac{a^4}{EJ} N(x) dx$$

$$0 \underset{f_1}{=} \frac{1}{48} \frac{a^6}{EJ}$$

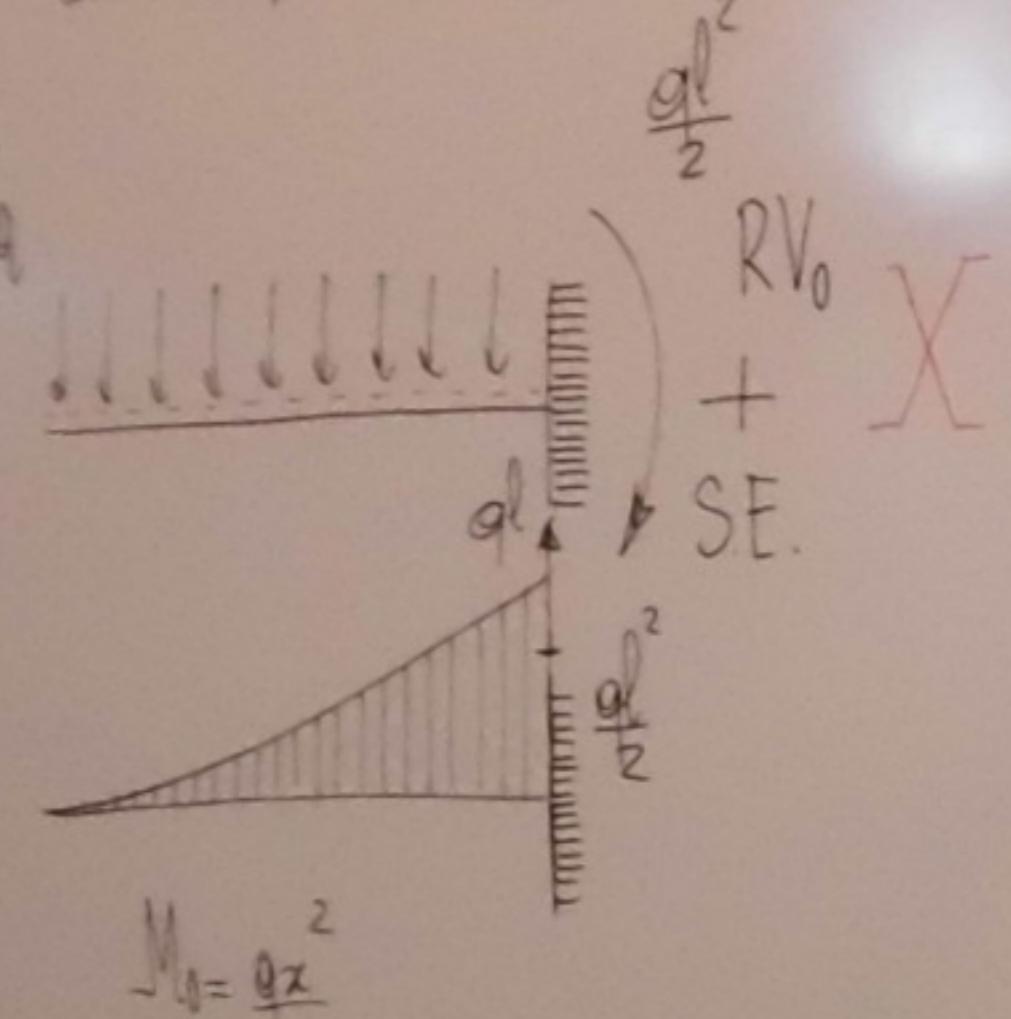
Principe di Leva (rituale) (PLV)

Risoluzione di struttura ipostatiche

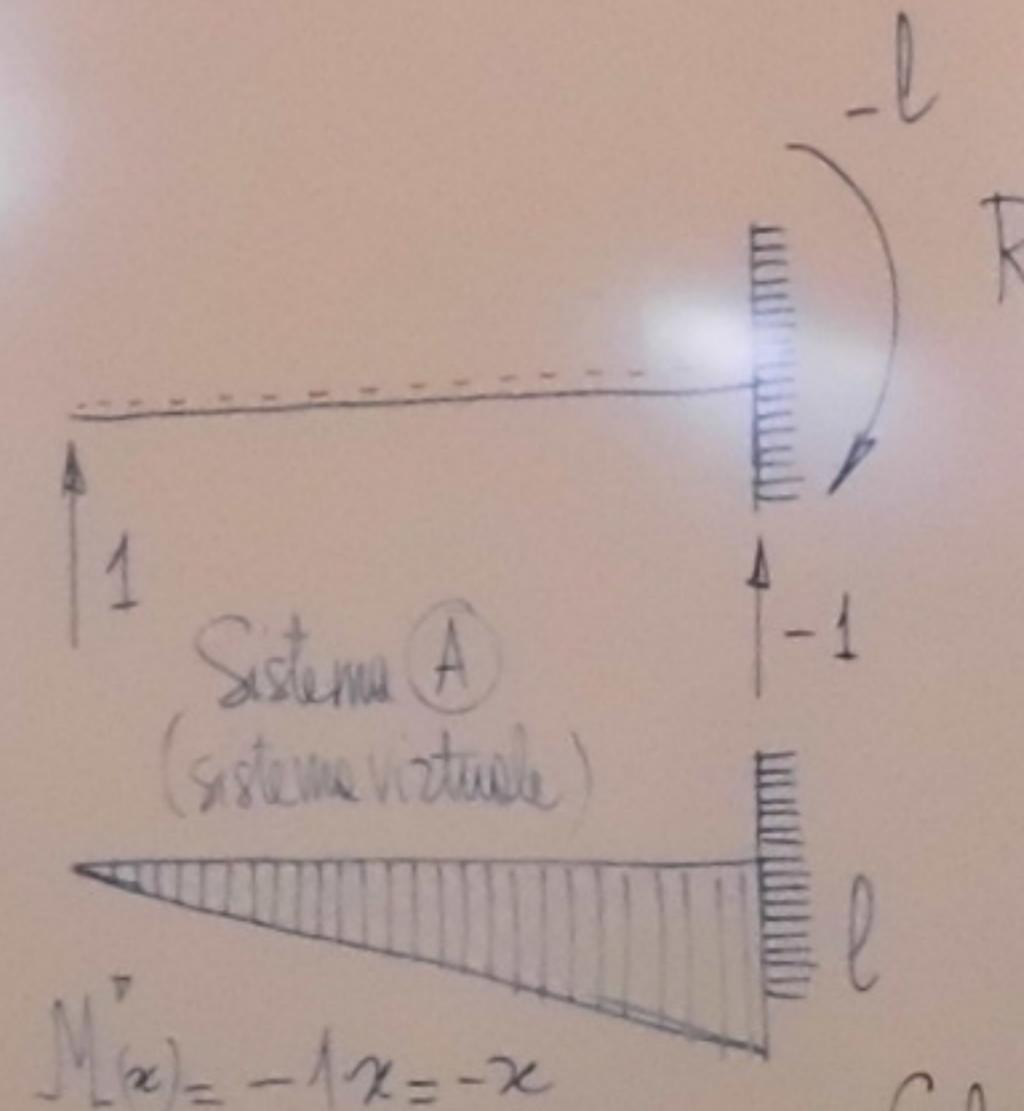
$$M_0 = \frac{q}{2}l^2 - Xl = \frac{q}{8}$$

$$M_0 = \frac{q}{2}l^2 - Xl$$

Struttura principale ipostatica ($X=0$)



Struttura fittizia ($X=1$)



Scrittura del PLV:

$$\int_{AB} M(x) dx = 1 \cdot V_A + \left(-\frac{1}{2} V_B - l \cdot f_B \right) = \int_{EJ} M(x) dx$$

$$0 = V_A = \int_{0}^{l} N(x) \frac{M_0(x) + X M(x)}{EJ} dx$$

$$0 = \int_{0}^{l} N(x) \frac{M_0(x) dx}{EJ} - f_a + X \int_{0}^{l} \frac{M(x) dx}{EJ}$$

Risolvendo:

$$X = -$$

$$\frac{\int_0^l M(x) \cdot M_0(x) dx / EJ}{\int_0^l M(x)^2 dx / EJ} = \frac{f_9}{f_p} = \frac{\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ}}{\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}} = \frac{3}{32} ql^3$$

Calcolo di Φ_A (a valle)

$$1 \cdot \Phi_A = \int_0^l N(x) \left(M_0(x) + \frac{3}{8} \frac{ql^3}{EJ} M(x) \right) dx$$

$$= \frac{1}{48} \frac{ql^5}{EJ}$$

$$\boxed{\frac{3}{32} ql^3}$$