

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

2) Criterio di resistenza di de Saint Venant - Grashof

- Concetto: analogamente a G.-R.-N., assume come G.I.P. la deformazione normale massima (e minima):

$$-\varepsilon_c \leq \varepsilon_n \text{ min}, \quad \varepsilon_n^{\max} \leq \varepsilon_t$$

"traduzione"
- $\varepsilon_c \leq \varepsilon_1$

- Trasformazione del criterio nel dominio degli sforzi

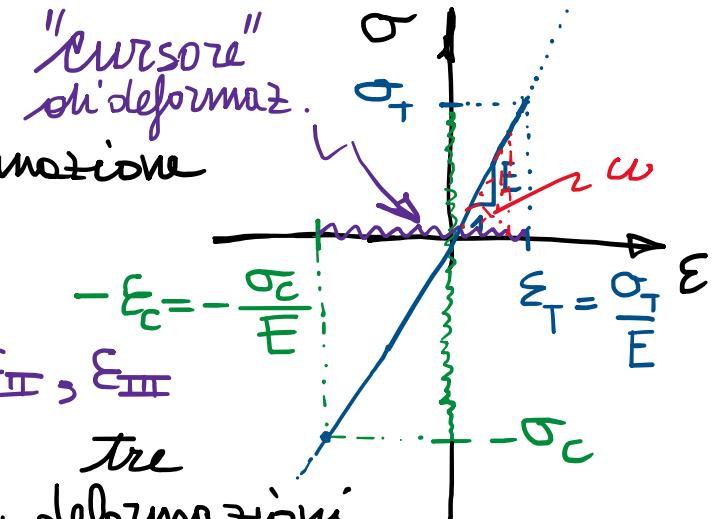
$$-\frac{\sigma_c}{E} = -\varepsilon_c \leq \frac{\sigma_1}{E} - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \leq \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$$

$$-\sigma_c \leq \underbrace{\frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_j + \sigma_k)}{\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon)}}_{\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon)} \leq \sigma_t$$

N.B.: criterio fondato sulle deformazioni, dipendente da parametri elastici (un parametro elastico: ν)

ν dipendente da ν (coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson)

N.B. $-1 < \nu < \frac{1}{2}$
materiali ingegneristici



tre εᵢ deformazioni principali

$$\varepsilon_{\min}^{\max} = \varepsilon_{\text{III}} \leq \varepsilon_{\text{II}} \leq \varepsilon_{\text{I}} = \varepsilon_n$$

- Per stato di spacco piano (ad es. $\sigma_{III} = 0$), le 6 diseguaglianze divengono:

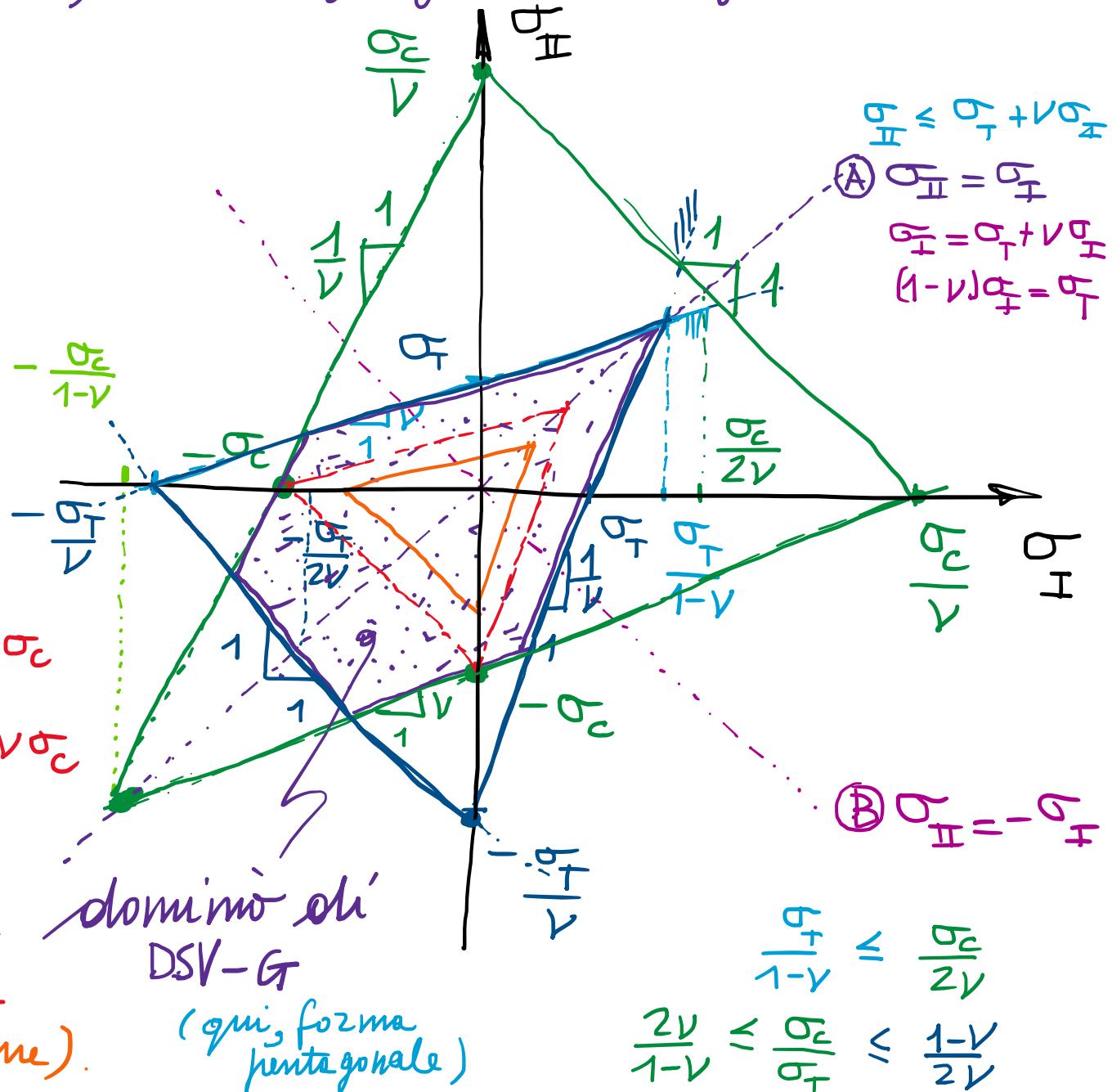
$$\begin{aligned} -\sigma_c &\leq \sigma_I - \nu \sigma_{II} \leq \sigma_T \\ -\sigma_c &\leq \sigma_{II} - \nu \sigma_I \leq \sigma_T \\ -\sigma_c &\leq -\nu(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq \sigma_T \end{aligned}$$

- Dominio di resistenza: intersezione di due triangoli isosceli, dipendenti da σ_T , σ_c ; ν .

- Forma rombica se:

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{\sigma_T} \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

- Può cadere in difetto se $\sigma_T < \nu \sigma_c$, per materiali con marcato comportamento asimmetrico a trazione/compressione (non raggiungibile la resist. a compressione).

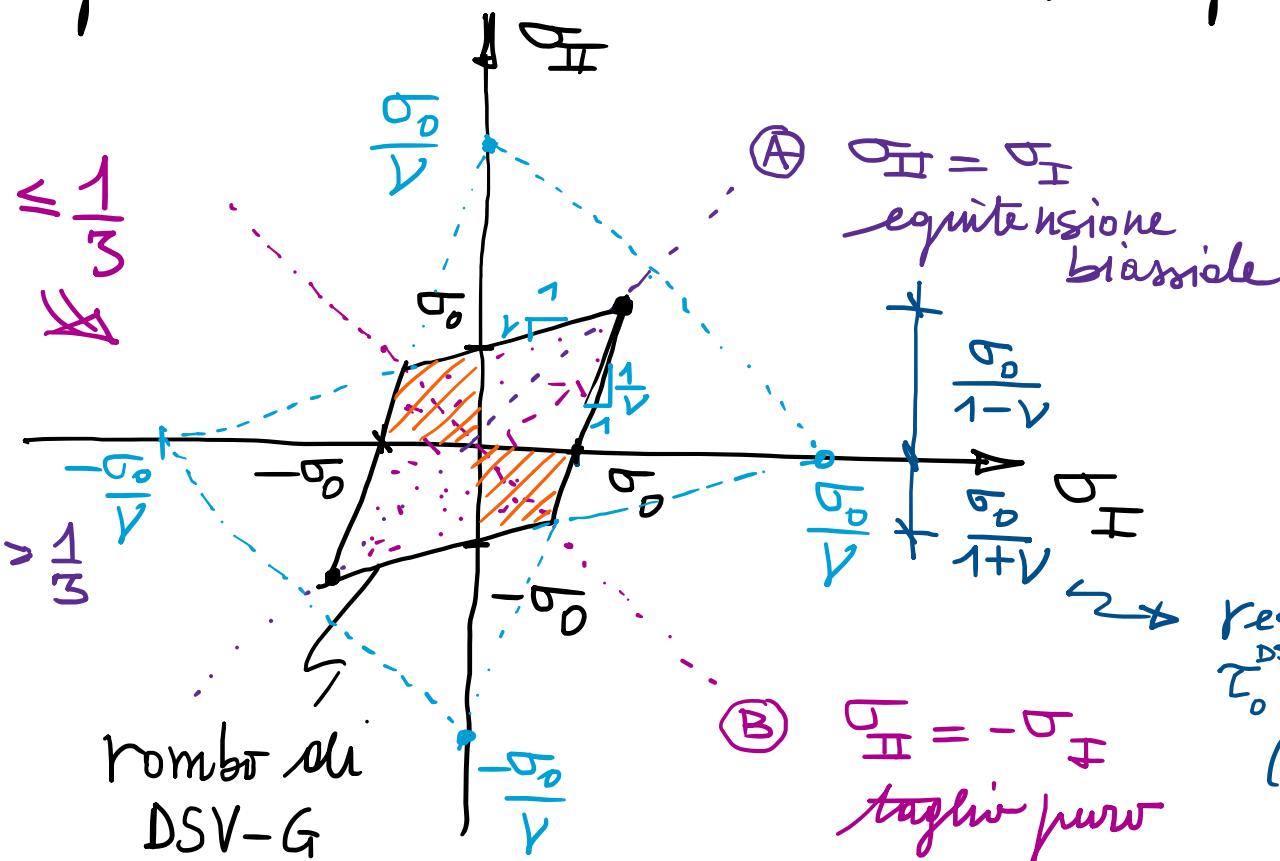


- Per materiali a comportamento simmetrico a trazione/compressione, cioè con $\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_C$:

- Forma rombica: $\nu \leq \frac{1}{3}$

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq 1 \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

- Forma esagonale: $\nu > \frac{1}{3}$



$\nu \rightarrow 0 \Rightarrow$ G.R.N.

resistenza a taglio
 $\sigma_0^{\text{DSV-G}}$ secondo DSV-G
(dipend. da ν)

piano

- Utilizzato per le verifiche di resistenza in presenza di stati di stress alle de Saint Venant (vedi pb. di DSV), caratterizzati da tensioni principali di segno opposto: $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$.

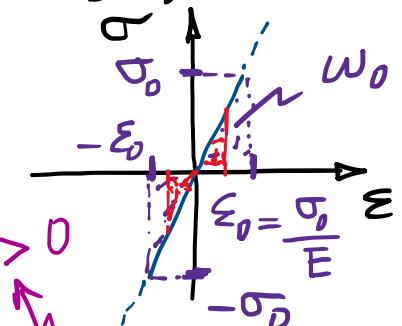
- Recepisce il diverso (maggiore) livello di pericolosità di stati (B) vs. (A).

3) Criterio di Beltrami (per materiali a comportamento simmetrico traz./compz.) -

- Di significato energetico, assume come G.I.P. l'energia di deformazione elastica:

$$\omega = \frac{1}{2} \sigma : \epsilon \leq \omega_0 = \text{valore ammesso a limite elastico}$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 \quad (\text{da prova monoassiale}) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E} > 0$$



- Nel calcolo degli sforzi, esprimendo ϵ tramite legge costitutiva:

quadratiche
in σ

$$\epsilon = -\frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma \mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E} \sigma \quad [\text{legge di Hooke generalizzata}]$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(-\frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma \underbrace{\sigma : \mathbb{I}}_{\operatorname{tr} \sigma} + \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\sigma : \sigma}_{\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}} \right)$$

$$\text{rif. princ. } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

$$(\operatorname{tr} \sigma)^2 = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \sim \sigma^2$$

$$\sigma : \sigma = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{E} \left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \right] \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E}$$

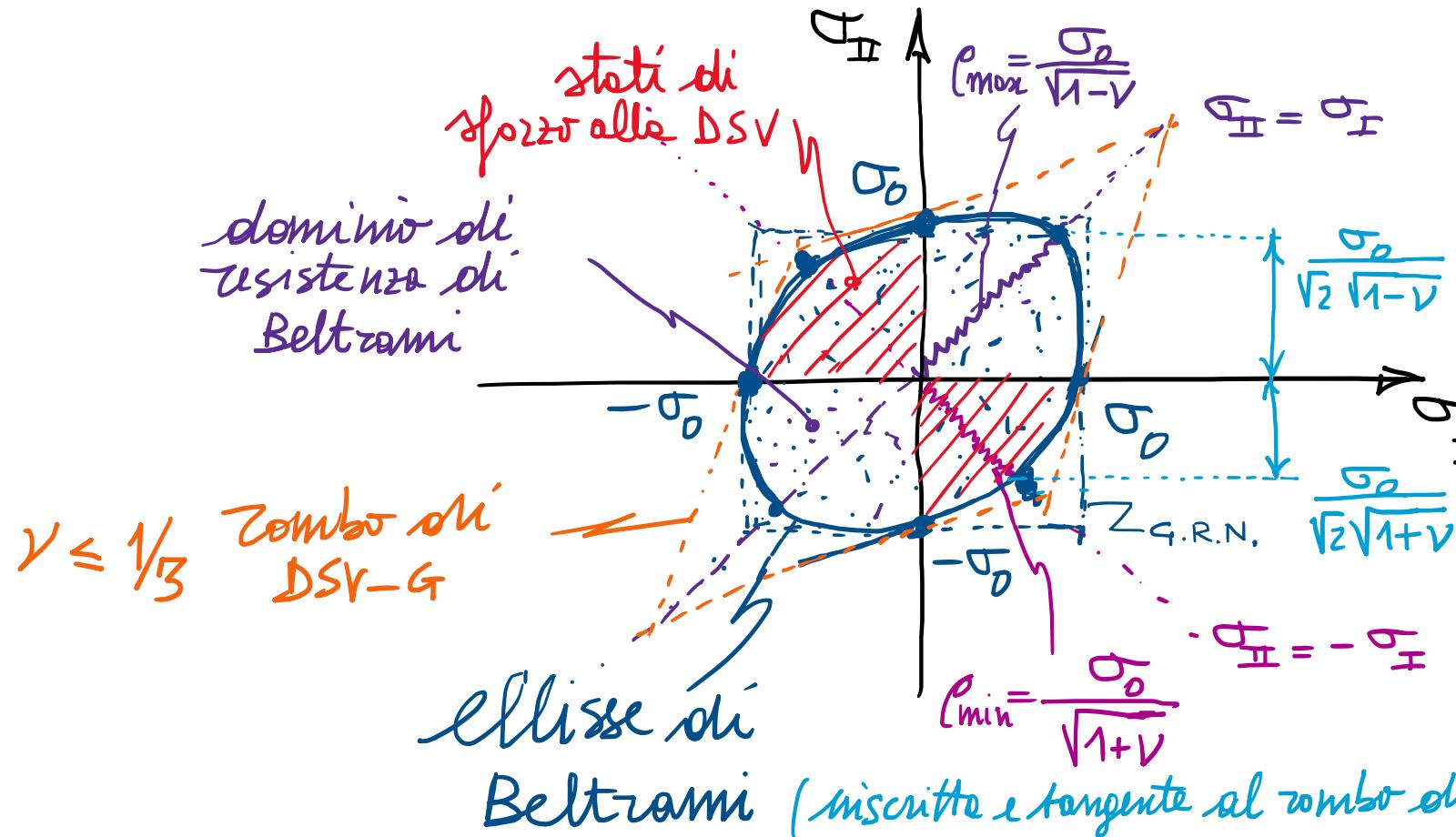
misensibili al
segno dello
stato di sforzo

pressione equivalente di Beltrami $\sigma_{eq}^B = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})} \leq \sigma_0 \quad (\text{indipendente da } \nu)$

ellisseide nello spazio $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

- Nel caso di stato di sforzo piano (ad es. $\sigma_{III} = 0$)

$$\sigma_{eq}^B = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II}} \leq \sigma_0$$



$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} = \sigma_0^2$$

eq. ne s'è ellisse ruotata di 45° simmetrica rispetto alle bisettrici, gli semiassi C_{max} e C_{min}

$$\text{per } \nu > 1/2 : \begin{aligned} C_{max} &= \sqrt{2}\sigma_0 \\ C_{min} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \end{aligned}$$

resistenza a taglio secondo Beltrami

- Utile a rappresentare la verifica di resistenza per materiali a comport. simmetrico, per stato di sforzo piano (non adatto per stati di sforzo triassiali), in particolare alle DSV, con $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$.

4) Criterio di Huber-Hencky - von Mises \Leftrightarrow per materiali metallici ($\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_c$)

- Ancore di significato energetico ma considera le sole energie deviatoriche ai fini del raggiungimento (dell'uscita) del limite elastico del materiale (osservazione sperimentale) [cette triassiali]

- Assume come G.I.P. l'energia deviatorica: ($\omega = \omega_v + \omega_d$)

$$\omega_d = \frac{1}{2} \mathbb{S} : \mathbb{E} \leq \omega_d^0 \quad (\text{per es. con riferimento a una prova monoassiale di tatt.})$$

- Nel dominio degli sfazzi, da legge cost. (deviatorica) $\mathbb{E} = \frac{\mathbb{S}}{2G}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\omega_d = \left[\frac{1}{2} \mathbb{S} : \frac{\mathbb{S}}{2G} \right] = \frac{3 J_2}{32G} = \frac{3 J_2}{6G} \leq \frac{3 J_2^0}{6G} \Rightarrow \overline{J}_{eq}^M = \sqrt{3 J_2} \leq \sqrt{3 J_2^0} = \sigma_0$$

ove:

$$\mathbb{S} = \sigma - \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr} \sigma}_{\text{deviatore}} \mathbb{I}$$

deviatore
di sfazzi

$$p = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \quad \text{tensione media}$$

invariante secondo
del deviatore $J_2 = \frac{1}{2} \mathbb{S} : \mathbb{S} = \frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbb{S}^2 = \frac{1}{2} \sum_i S_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad S_i = \sigma_i - p$

rif.
princ.

$$[\mathbb{S}]^2 = \begin{bmatrix} (\sigma_I - p)^2 \\ (\sigma_{II} - p)^2 \\ (\sigma_{III} - p)^2 \end{bmatrix}$$

\downarrow Beltrami \downarrow von Mises

- Sviluppando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 3J_2 &= \frac{3}{2} \left[(\sigma_I - p)^2 + (\sigma_{II} - p)^2 + (\sigma_{III} - p)^2 \right] \\
 &= \frac{3}{2} \left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 3p^2 - 3 \cdot 2p \underbrace{\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \right)}_{\text{p}} \right] \\
 &\quad - 3p^2 = -3 \underbrace{\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \right)^2}_{\frac{1}{3}} \\
 &= \cancel{\frac{3}{2}} \cancel{\frac{1}{3}} \left[\cancel{3(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2)} - \cancel{3(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2)} - \cancel{2(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})} \right] \\
 &= \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})
 \end{aligned}$$

tensione equivalente di von Mises

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})} \leq \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_I &= \sigma_0; \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0 \\
 3J_2^0 &= \sigma_0^2
 \end{aligned}$$

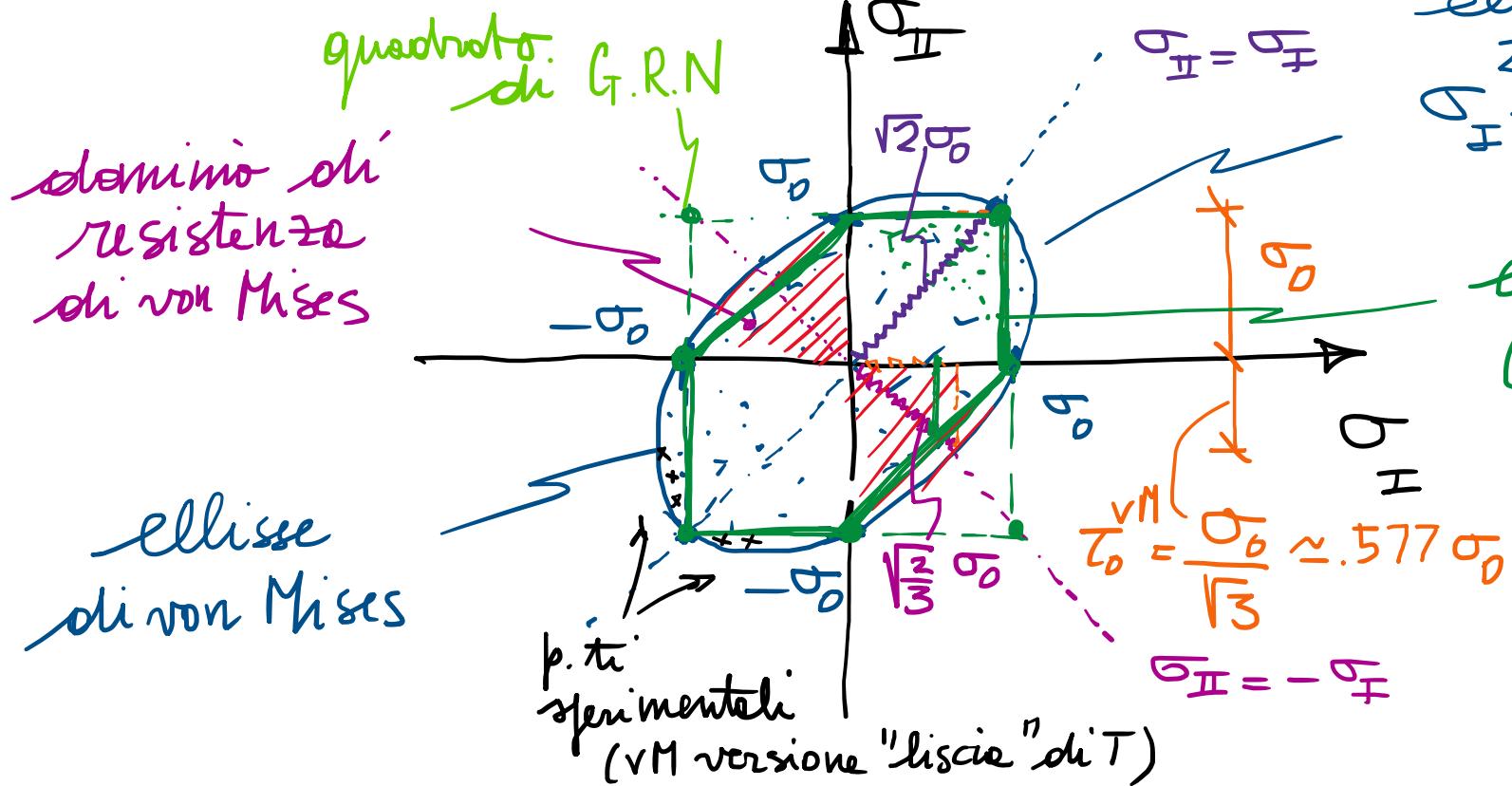
(conincide con
l' σ_I nel caso
monodimensionale)

- Simile a Beltrami, con $\nu \rightarrow 1/2$, corrisponde ad annullare w_V , $w = w_D$, per materiale incompressibile (come se fosse).

- Indipendente dai parametri elastici ($\nu \approx 0.3$ per mat. metallici). (ν è assegnato
ma σ_{eq}^{vM} è
indip. da ν)

$$\text{Caso piano } (\sigma_{III}=0): \quad \sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq \sigma_0$$

- Rappresentazione nel piano degli sforzi principali:



ellisse di von Mises

$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = \sigma_0^2$$

esagono di Tresca
(mascito nell'ellisse di von Mises - per parametrizzazione su prove di trazione)

$$\sigma_0^T = \frac{\sigma_0}{2} = 0.5 \sigma_0$$

- Idoneo a rappresentare la verifica di resistenza (e il criterio di plasticità) per materiali metallici, sotto posti e stati di sforzo generici, anche trassiali, nonché per altri fenomeni, in particolare alle DSV ($\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$) - Interpretate correttamente l'usato del campo elastico per stati tensio-deformativi deviatorici.

5) Criterio di Guest-Tresca (materiali metallici)

- Duele di G.R.N., sempre nel dominio degli sforzi, ma molti si muovono come critici, gli sforzi taglienti, cioè la τ^{\max} : \rightarrow G.I.P.

$$\tau^{\max} \leq \tau_0 \text{ resist. a taglio del materiale}$$

- Cerchi di Mohr (e Arzello di Mohr):

$$\tau^{\max} = \max \left\{ R_I = \frac{|\sigma_I - \sigma_K|}{2} \right\} \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_I - \sigma_K \leq \sigma_0$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_{II} - \sigma_K \leq \sigma_0$$

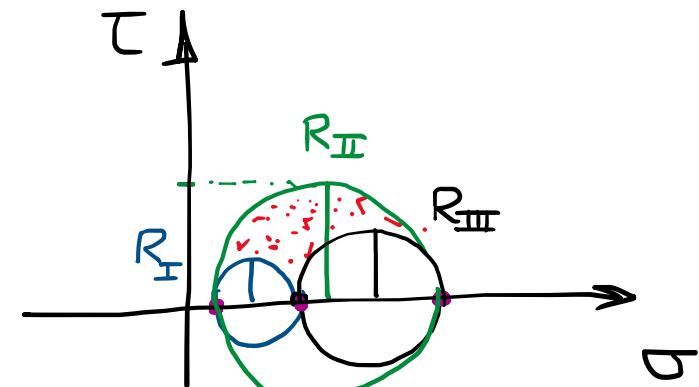
$$-\sigma_0 \leq \sigma_{III} - \sigma_I \leq \sigma_0$$

6 disegnazioni

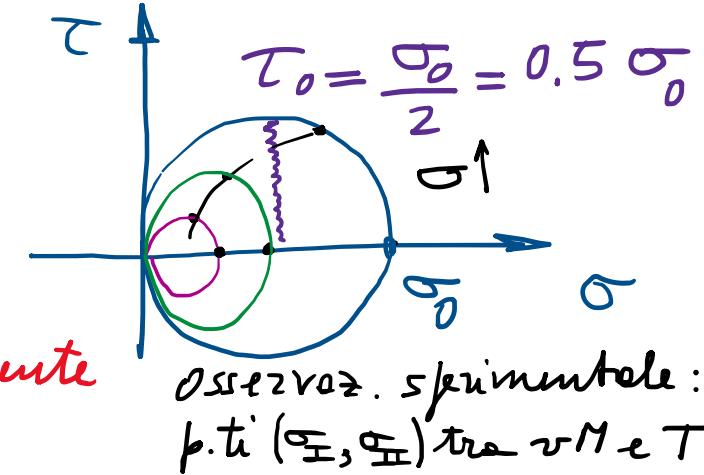
- Caso piano $\sigma_{III} = 0$ σ_{eq}^T

Vedi G.R.N.

\rightarrow rappresentazione a pagine precedente
(esagono di Tresca)



$$\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$$



Osservaz. sperimentale:
p.ti (σ_I, σ_K) tra σM e T