

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

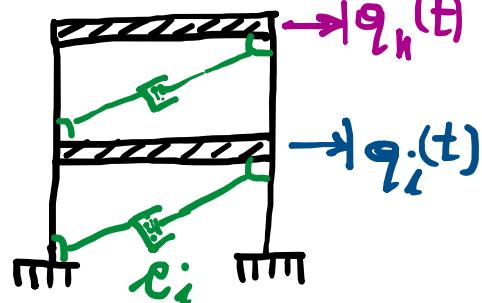
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 14

Sistemi smorzati MDOF



- Smorzamento indotto mediante l'inserzione di appositi dispositivi (smorzatori viscosi lineari). Es.: controventi dissipativi.
- Smorzamento intrinseco "spontaneo" all'interno del sistema strutturale (oltre entità limitata per strutture civili).

$(q_k) \dot{z}_i \rightarrow F_{d,i}^z$
 smorz.
 i-esimo
 (di una)
 c_i
 coeff. di
 smorzamento
 f. ne di dissipazione (Rayleigh)

$$F_{d,i}^z = c_i \dot{z}_i$$

$$D_i = \frac{1}{2} \dot{z}_i \cdot F_{d,i}^z = \frac{1}{2} \dot{z}_i c_i \dot{z}_i$$

Relazione tra \dot{z}_i e q_k :

$$\dot{z}_i = \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow \dot{z} = \sum_i \frac{\partial z}{\partial q}^T \dot{q}$$

$$D = \sum_i D_i = \frac{1}{2} \sum_i z_i c_i z_i = \underbrace{C_{jk}}_{= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j} \underbrace{\sum_i c_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}}_{\sum_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k} \dot{q}_k$$

$$C = \sum_i C_i$$

$$\underbrace{\sum_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} c_i \frac{\partial z_i}{\partial q_l}}_{C_{ij}} \dot{q}_l$$

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Leftrightarrow C = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

$$\rightarrow F_d^z = C_z \dot{z}; F_d = \{F_{d,i}^z\}_{n_d \times 1}, C_z = \text{diag}[c_i]_{n_d \times n_d}, \dot{z} = \{\dot{z}_i\}_{n_d \times 1}$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{2} \dot{z}^T F_d^z = \frac{1}{2} \dot{z}^T C_z \dot{z} = \frac{1}{2} \prod_d D_d \quad \text{forme quadri.}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\frac{\partial C}{\partial q} \frac{\partial C}{\partial q}^T}_{\#_d} \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q}$$

C: matrice di smorzam.
 $n \times n$ simm. e semidef. pos.

Eq. m. del moto:

$$M\ddot{q}_l + Kq_l = Q(t) + Q_d(t) \text{ con } Q_d(t) = -F_d(t) = -\frac{\partial D}{\partial q} = -C\dot{q} \quad (\text{eq.m. di Lagrange})$$

$$M\ddot{q}_l + C\dot{q}_l + Kq_l = Q(t)$$

autorett. (M, K)

\Downarrow

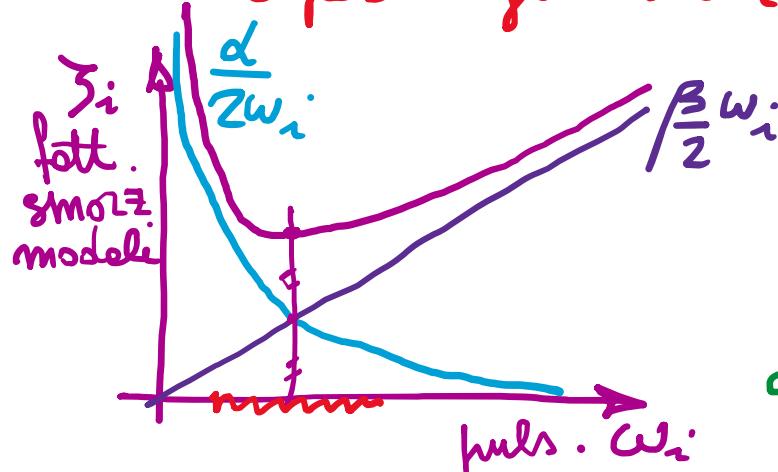
\Downarrow

Traf. in coord. principali: $q_l = \sum_i \phi_i p_i = \Phi P$

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \ddot{P} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C} \dot{P} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K} P = \Phi^T Q = P(t) \quad \text{ove } \begin{aligned} m &= \text{diag}[M_i = \phi_i^T M \phi_i] \\ C &\neq \text{diag}[C_i = \phi_i^T C \phi_i] \text{ in generale} \\ K &= \text{diag}[K_i = \phi_i^T K \phi_i] \end{aligned}$$

In generale C non diagonale: coeff. delle colub. lin.

- CS per diagonalizzazione: $C = \alpha M + \beta K$ (Smorzamento "classico" alle Rayleigh)



$$C = \alpha M + \beta K = \text{diag}[C_i = \alpha M_i + \beta K_i]$$

$$\left(\frac{C_i}{M_i} = 2\zeta_i \omega_i M_i \right)$$

L fattore di smorz.
modale

$$2\zeta_i \omega_i M_i = \alpha M_i + \beta \frac{K_i}{M_i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2} \frac{1}{\omega_i^2} \end{array} \right.$$

α, β determinati in base
 $\rightarrow 2\zeta_i$ (ζ_1, ζ_2)

- Assumere $\mathcal{R} = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}] \Rightarrow C = \Phi C \Psi^{-1}$ $\Leftrightarrow R = \Phi^T \Psi$
 (si ipotizzano gli ζ_i , uguali o diversi per i vari modi, e si risolve alle matrice di smorzamento C in coord. legrangiane) $\zeta_i \approx 1\%, 2-7\%$
 5%
 Valide per smorzamento intrinseco al sistema strutturale.
- Nel caso di dispositivi eggiunti C non è diag. in generale.

Esempio:

$$\ddot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2), \quad \dot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\dot{q}}_1 - \dot{\dot{q}}_2) \quad [\text{N.B. } \dot{q}_1 = \dot{q}_2 \Rightarrow z = 0]$$

$$q_1, q_2, q_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial z}{\partial q_1} C \frac{\partial z^T}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} C \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

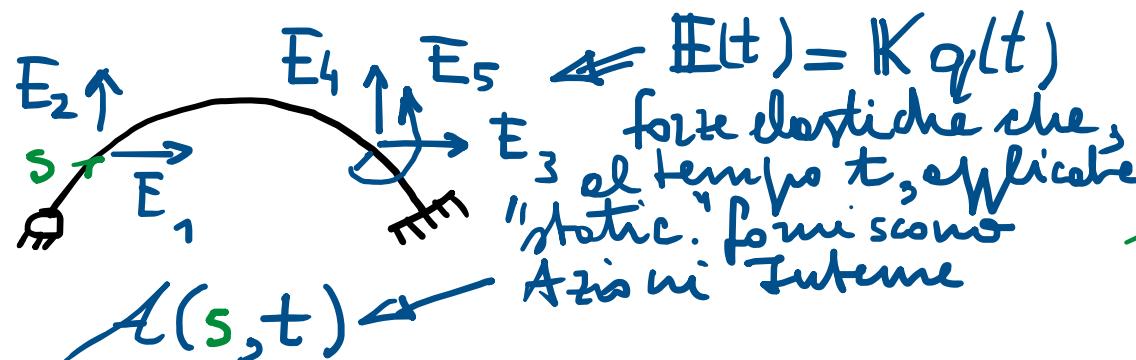
$C = \Phi^T C \Psi$ non diag.

Idem da scritt. di $D = \frac{1}{2} e \dot{z}^2 = \frac{1}{2} e \frac{1}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$

è singolare (det $C = 0$) (semidef. pos.)

Azioni interne

$\forall t$



N, T, M

- A.I. per $q_j = 1 \Rightarrow E_i = K_{ij} \Rightarrow A_j(s)$
 $(q_i = 0, i \neq j)$

$$A(s, t) = \sum_{\text{PSE}} A_j(s) q_j(t) = A(s) q(t)$$

indotte da forte modelli forze d'iniziatore modelle

$$\bar{E}_K = K \Phi_K = \omega_K^2 M \Phi_K = \bar{E}_{IK} \Rightarrow \bar{A}_K(s):$$

forze elastiche
modelli

per gli autovettori

$$A(s, t) = A(s) \underbrace{\Phi}_{q(t)} p(t) = (\Phi^T A(s))^T p(t)$$

- Stima valori max (in t) $\bar{A}(s)$

SRSS

$$A(s)^{\max} = \sqrt{\sum_k (\bar{A}_k(s) p_k^{\max})^2} = \sqrt{\sum_j (\bar{A}_j(s) q_j^{\max})^2} \quad (\text{Square Root of Sum of Squares})$$

$E_j = \{E_i\}$

- A.I. per $q_j = 1 \Rightarrow E_i = K_{ij} \Rightarrow A_j(s)$

$(q_i = 0, i \neq j)$

$$A(s, t) = \sum_{\text{PSE}} A_j(s) q_j(t) = A(s) q(t)$$

- A.I. modelli, per $\mu_K = 1 \Rightarrow q = \Phi_K$ (autovettori)
 $(\mu_i = 0, i \neq K)$

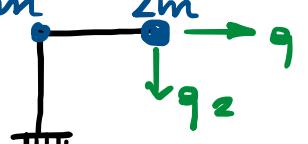
$$A(s, t) = \sum_k \bar{A}_k(s) p_k(t) = \bar{A}(s) p(t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \bar{A}(s) = \sum_k \bar{A}_k(s) \right\} \quad (A(s) = \sum_k \bar{A}(s))$$

$$\bar{A}_k(s) = \Phi_K^{-1} \bar{A}(s)$$

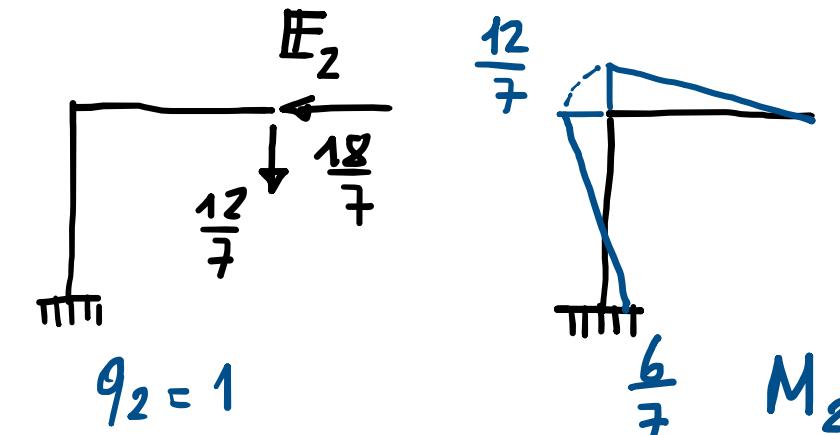
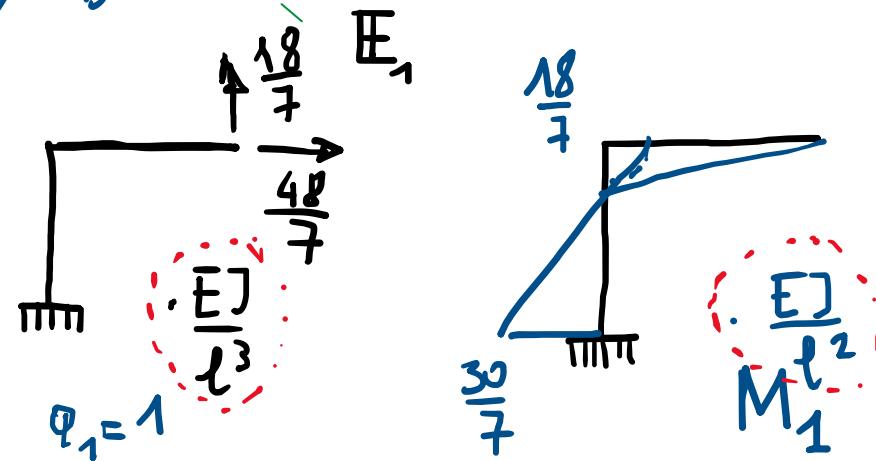
$$\bar{A}_k(s) = \Phi_K^{-1} \bar{A}(s)$$

$$\bar{A}_k(s) = \Phi_K^{-1} \bar{A}(s)$$

Esempio 2 DOF : 

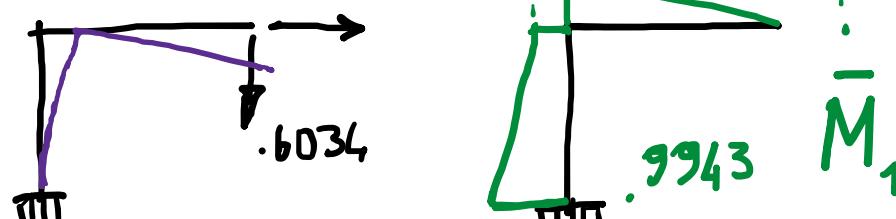
$$K = \frac{6}{7} \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_j (q_j = 1)$



$$\bar{A}_K (\mu=1) \quad \bar{E}_1 \rightarrow \bar{M}_1 = M_1 \phi_{11} + M_2 \phi_{12}$$

Azioni
interne nodali: .3909



$$\Phi_1^T = \left\{ \begin{array}{c} .4320 \\ 1 \end{array} \right\}, .3909 = \frac{48}{7} \cdot .4320 - \frac{18}{7} \cdot 1 = \frac{2.736}{7}$$

$$.6034 = -\frac{18}{7} \cdot .4320 + \frac{12}{7} \cdot 1 = \frac{4.724}{7}$$

$$\bar{E}_2 \rightarrow \bar{M}_2 = M_1 \phi_{21} + M_2 \phi_{22}$$

Diagram showing internal nodal actions. At the left joint, there is a horizontal force of 3.682 and a vertical force of 4.842. At the right joint, there is a horizontal force of 8.524 and a vertical force of 3.682.

$$\Phi_2^T = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -.6481 \end{array} \right\}, 8.524 = \frac{48}{7} \cdot 1 - \frac{18}{7} \cdot (-.6481) = \frac{59.67}{7}$$

$$3.682 = -\frac{18}{7} \cdot 1 + \frac{12}{7} \cdot (-.6481) = -\frac{25.39}{7}$$

SOMMARIO (Lec. 14)

- Smorzamento strutturale di sistemi MDOF
 - intensivo (sistemi reali).
 - aggettivo (dispositivi).
- Funzione di dissipazione e matrice smorzamento
- Diagonaizzazione in coordinate principali
 - smoz. alle Rayleigh .
 - " " modelli .
- Esempio 2DOF con dissipatore.
- —
- Azioni interne
 - per coord. leggeugione unitarie.
 - per coord. principali unitarie (AI modelli).
- Stime dei valori max (in t) [SRSS].
- Esempio 2DOF: azioni interne modelli.

Next step: Risposta sismica di sistemi MDOF (teori shene-type)-END.