Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 09

Analisi dei sistemi di travi deformabili: comp. di spostamento di strutt., risoluz. strutt. iperstatiche

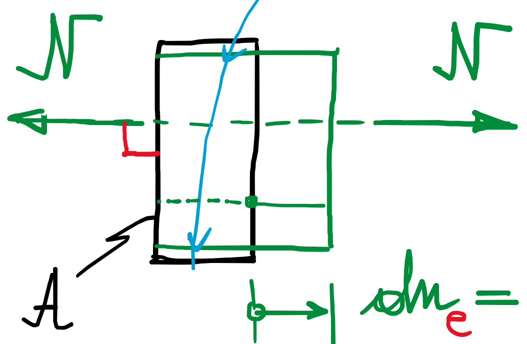
Deformazioni elastiche elementari del concio di trave (vedi casi di de Saint Venant):

$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ legge costitutiva (elastica lineare)

costanti

$\sigma = \frac{N}{A}$

(contraz. trasv., ν)



$du_e = \varepsilon_e\, dx = \frac{N\, dx}{\boxed{E \cdot A}}$

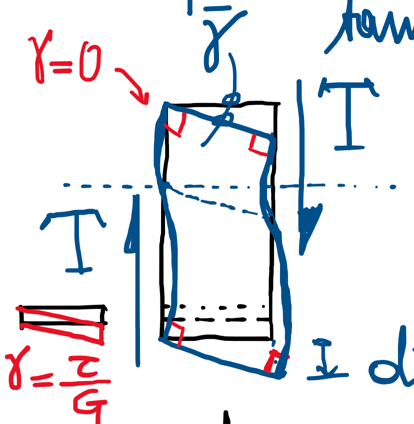
$[F]$ rigidezza assiale

$EA \to \infty$ inesten.

E: modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young $\frac{[F]}{[L]^2}$

A: area della sezione trasversale $[L]^2$

ingobbamento fuori piano (legato alla distribuzione non uniforme delle deform. tangenziali)



scorrimento angolare medio

$\gamma = \frac{\tau}{G}$

$dt_e = \bar{\gamma}_e\, dx = \mu \frac{T\, dx}{\boxed{G \cdot A}}$

$[F]$ rigidezza tagliante

$GA \to \infty$ indeform. a taglio

$\frac{E}{2(1+\nu)} = G$: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio

isotropo

A: idem propr. geom. sez. trasv.

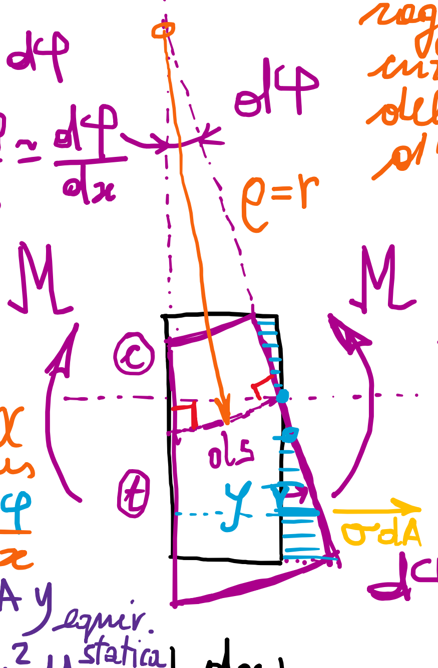
$\mu \geq 1$: fattore di taglio

$ds = \rho\, d\varphi$

$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \simeq \frac{d\varphi}{dx}$

curvatura $[L]^{-1}$

raggio di curvatura della linea d'asse inflessa



rotazione relativa con conservazione della sezione piana

$\sigma = E\varepsilon$

$\varepsilon\, \cancel{dx} = y\, \overbrace{\frac{d\varphi}{dx}}^{\chi}$

$M = \int_A \sigma\, dA\, y$ equiv. statica

$= E\chi \underbrace{\int_A y^2\, dA}_{J > 0}$ $[F][L]^2$

$d\varphi_e = \chi_e\, dx = \frac{M\, dx}{\boxed{E \cdot J}}$

rigidezza flessionale

$EJ \to \infty$ indeform. flession.

$\boxed{\chi_e = \frac{M}{EJ}}$

E: idem

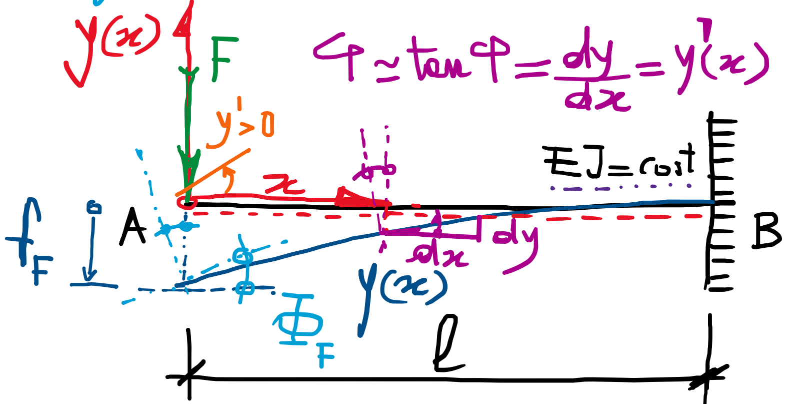
J: momento d'inerzia della sezione trasversale $[L]^4$

Metodo della Linea Elastica (deformazione di strutture inflesse con effetti flessionali predominanti)

$\left[dn \to 0 \; ; \; dt \to 0 \; ; \; EA \to \infty \; ; \; GA \to \infty \right]$

curvatura $\chi_e = \dfrac{M}{EJ}$ $\Longleftrightarrow$ $M = EJ\,\chi_e$ legge "costitutiva" della trave (Eulero-Bernoulli-Navier)

0 < rigidezza flessionale EJ



$\varphi \simeq \tan\varphi = \dfrac{dy}{dx} = y'(x)$

Curvatura di linea piana di eq.ne $y = y(x)$

$$\chi(x) = \frac{y''(x)}{\left[1 + y'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \simeq y''(x)$$

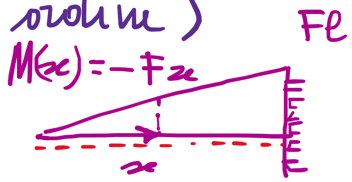
$|y'(x)| \ll 1$ piccole deformazioni (gradienti di spostamento)

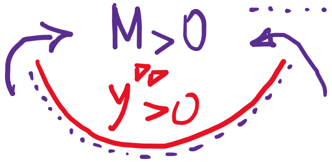
$\varphi(x) = y'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = y''(x) = \chi(x)$

$y(x)$: spost. trasversale (Linea Elastica)

Equazione differenziale della LE (del 2° ordine)

- $EJ\,y''(x) = +M(x) \overset{\text{equil.}}{=} -Fx$





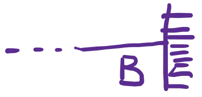
$\int dx$

- $EJ\,y'(x) = -F\dfrac{x^2}{2} + A_1$

$\int dx$

- $EJ\,y(x) = -F\dfrac{x^3}{6} + \underline{A_1 x + A_2}$

- Condizioni al contorno (c.c.)



$v_B = 0$, $\varphi_B = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y(\ell) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$

sist. globale — sist. locale

A_1, A_2: costanti di integrazione

componente di moto rigido rototraslatorio legate alla scelta del sistema di riferimento

Imposizione delle c.c.

$$EJ\,y''(l)=0 \Rightarrow -\frac{Fl^2}{2}+A_1=0 \Rightarrow \boxed{A_1=\frac{Fl^2}{2}}$$

$$EJ\,y(l)=0 \Rightarrow -\frac{Fl^3}{6}+A_1 l+A_2=0 \Rightarrow A_2=\frac{Fl^3}{6}-A_1 l=\frac{Fl^3}{6}-\frac{3}{3}\frac{Fl^2}{2}l=\boxed{-\frac{1}{3}Fl^3=A_2}$$

Equazione finale della LE:

$$y(x)=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{Fx^3}{6}+\frac{Fl^2}{2}x-\frac{Fl^3}{3}\right]$$

$$y'(x)=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{Fx^2}{2}+\frac{Fl^2}{2}\right]$$

$$y''(x)=\frac{1}{EJ}\left[-Fx\right]=\frac{M(x)}{EJ}$$

$$y(0)=\frac{A_2}{EJ}=-f_F \;\hookrightarrow\; f_F=\frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EJ} \quad [L]$$

$$y'(0)=\frac{A_1}{EJ}=\Phi_F \;\hookrightarrow\; \Phi_F=\frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EJ} \quad [1]$$

Significato fisico delle costanti di integrazione

coefficienti di influenza

$$(F=1)\quad f_1=\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}=\frac{f_F}{F}$$

N. B.:

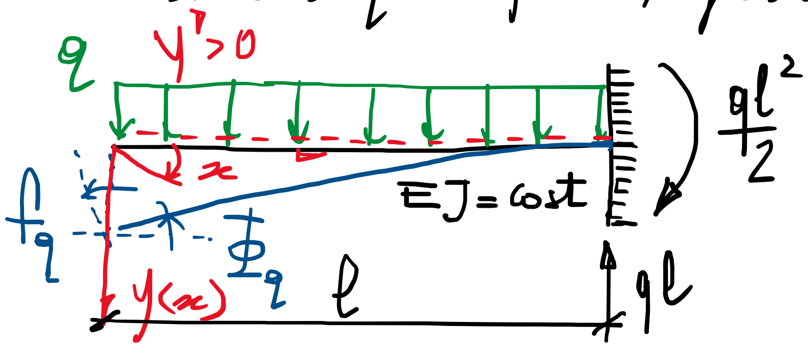
- Il gruppo dimensionale $\frac{Fl^3}{EJ}$ rappresenta spostamenti elastici flessionali
- Il gruppo dimensionale $\frac{Fl^2}{EJ}$ rappresenta rotazioni elastiche flessionali

Infatti:

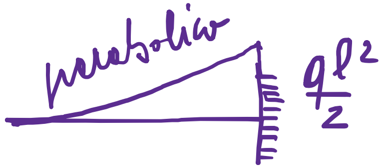
$$\left[\frac{Fl^3}{EJ}\right]=\frac{\cancel{[F]}[L]^{\cancel{3}}}{\frac{\cancel{[F]}}{\cancel{[L]^2}}[L]^{\cancel{4}\,2}}=[L] \text{ lunghezze}$$

$$\left[\frac{Fl^2}{EJ}\right]=\;\cdots\cdots\cdots\;=\frac{[L]}{[L]}=[1] \text{ numero puro}$$

Caso con q uniform. ripartito



$$\begin{cases} EJ\, y''(x) = -M(x) = \frac{q x^2}{2} \\ EJ\, y'(x) = \frac{q x^3}{6} + A_1 \\ EJ\, y(x) = \frac{q x^4}{24} + A_1 x + A_2 = \frac{q x^4}{24} - \frac{q l^3}{6} x + \frac{q l^4}{8} \end{cases}$$

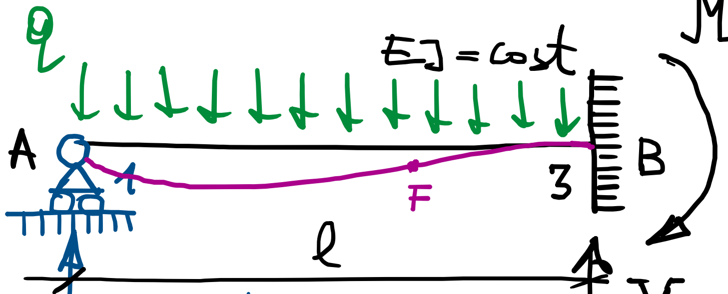


c.c.

$$EJ\, y'(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{q l^3}{6} \quad \Rightarrow \Phi_q = \frac{1}{6}\frac{q l^3}{EJ} \; [1]$$

$$EJ\, y(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -\frac{q l^4}{24} - A_1 l = -\frac{q l^4}{24} + \frac{4}{4}\frac{q l^3}{6} l = \frac{q l^4}{8} \Rightarrow f_q = \frac{1}{8}\frac{q l^4}{EJ} \; [L]$$

Struttura iperstatica (staticamente indeterminata) – Metodo delle forze



$$M_B = \frac{q l^2}{2} - X l$$

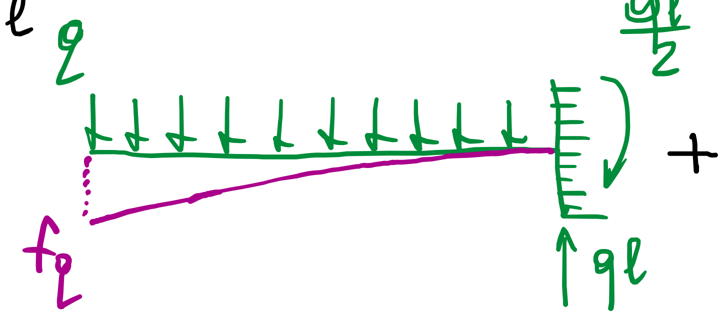
$$V_B = q l - X$$

$$V_A = X$$

incognita iperstatica
(in corrisp. di gdv ritenuto iperstatico)

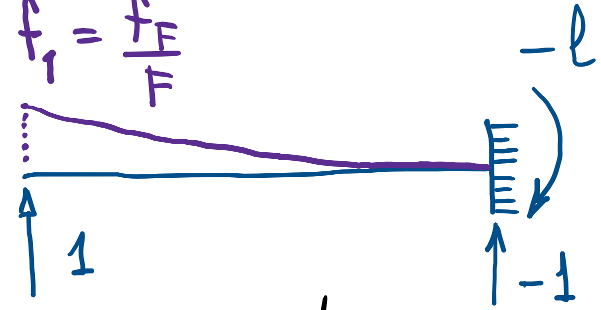
$$RV = RV(q, X)$$

$=$



$+ X$

$$f_1 = \frac{f_F}{F}$$



$$v_A = -f_q + X f_1 = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{f_1} = \frac{\frac{1}{8}\frac{q l^4}{\cancel{EJ}}}{\frac{1}{3}\frac{1\, l^3}{\cancel{EJ}}} = \frac{3}{8} q l$$

condizione di congruenza
rispetto del carrello in A