Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

# Complementi di Scienza delle Costruzioni

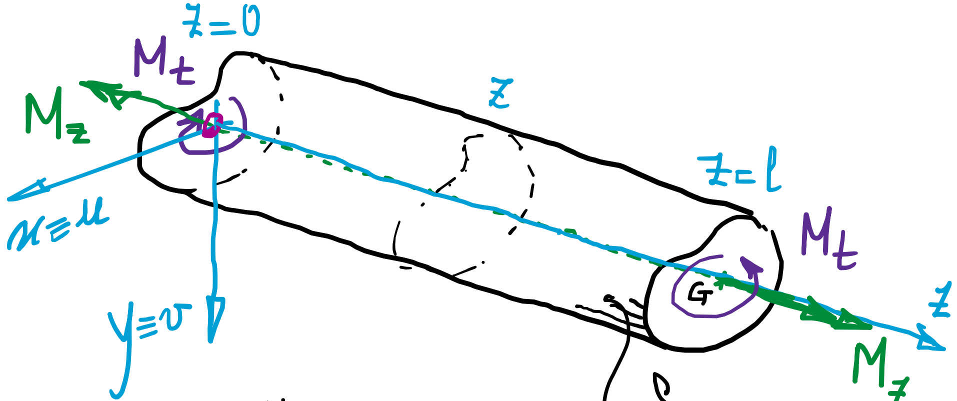
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

## LEZIONE 18

• Caso di DSV della torsione: $N = T_x = T_y = 0$; $M_x = M_y = 0$ $\quad (\sigma_{zz} \equiv 0)$




• Presente solo un momento torcente, nel piano della sezione, costante: $M_t = M_z = \text{cost}$

• Equazioni governanti: (differenziali lineari)

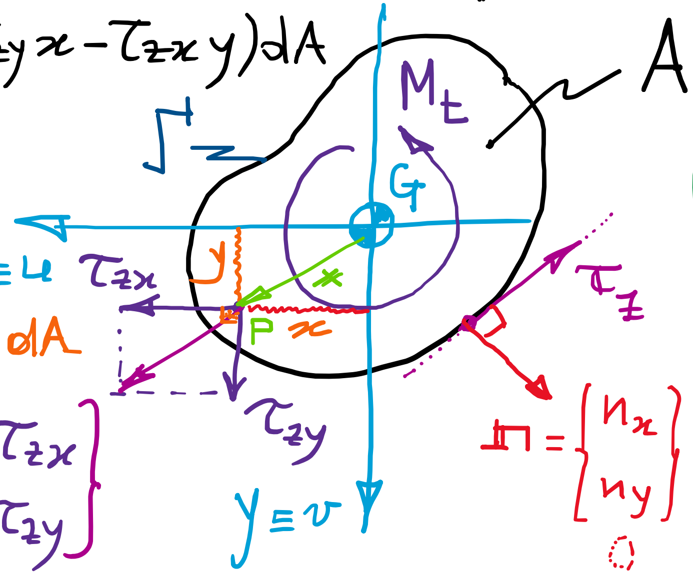
$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \text{ ........ equilibrio} \\ -(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \text{ ...... congruenza} \end{cases} \quad \text{in } A$$

$\operatorname{div}(\ ) = \nabla \cdot (\ )$

$c$ ↕ cost ↕ $M_t$

Equiv. statica:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$




$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$

vettore delle tensioni tangenziali $\tau_z = \tau_z(x, y)$

rotore, gradiente, prodotto vettoriale

$$\operatorname{rot} \tau_z = \nabla \wedge \tau_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = k\,(\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}) = \underbrace{-(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})}_{(\operatorname{rot} \tau_z)_z}\, k$$

$(\tau_z$ tangente al contorno su $\Gamma)$

c.c.: $\tau_z \cdot n = \tau_{zx}\, n_x + \tau_{zy}\, n_y = 0$ su $\Gamma$ condizione (equilibrio) al contorno

hp. $S_{lat}$ scarica

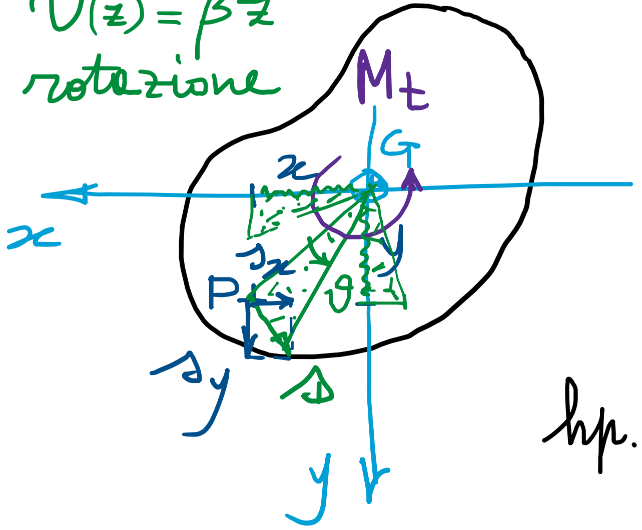
- Approccio agli spostamenti (sceglianmo a priori la congruenza; imponiamo l'equilibrio):

$cost = \beta = \frac{d\vartheta}{dz}$ ($\beta > 0$) angolo unitario di torsione (rotazione per unità di lunghezza) $\left[\frac{1}{L}\right]$

($\vartheta$ "torsione")

$\vartheta(z) = \beta z$
rotazione

rotazione rigida della sezione nel suo piano. ($d\vartheta = \beta\, dz$)




Campo di spostamenti: (osservazione sperimentale)

$$\text{hp.}\quad \begin{cases} s_x(y,z) = -\beta \overbrace{z}^{\vartheta} y \\ s_y(x,z) = \beta z x \\ s_z(x,y) = \beta\, \underbrace{\Psi_G(x,y)} \end{cases}$$

atto di moto piano rotatorio (rispetto a G)

spostamento fuori piano

incognite
$\beta, \Psi_G(x,y)$

funzione di ingobbamento (riferita a G)
note a meno di moti rigidi

In genere si impone $\bar{\Psi}_G = \frac{1}{A}\int_A \Psi_G\, dA \equiv 0$ (valor medio)

(spostamento medio fuori piano nullo)

- Sezione indeformata nel piano:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = s_{x,x} \equiv 0 \\ \varepsilon_{yy} = s_{y,y} \equiv 0 \\ \gamma_{xy} = s_{x,y} + s_{y,x} = -\beta \cancel{z} + \beta \cancel{z} \equiv 0 \end{cases}$$

- Inoltre:

$\varepsilon_{zz} = s_{z,z} \equiv 0$ ($\Psi_G$ f.ne solo di $x$ e $y$) $\longleftrightarrow$ $\sigma_{zz} = 0$

– Campo di deformazione: (scorrimenti angolari)

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

$$\gamma_z \leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{zx} = s_{z,x} + s_{x,z} = \beta\,(\psi_{G,x} - y) \\ \gamma_{zy} = s_{z,y} + s_{y,z} = \beta\,(\psi_{G,y} + x) \end{cases} \Rightarrow \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad \tau_z = G\gamma_z \;\text{legge cost.} \quad \boxed{\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta\,(\psi_{G,x} - y) \\ \tau_{zy} = G\beta\,(\psi_{G,y} + x) \end{cases}}$$

campo delle tensioni tangenziali

– Eq. di congruenza: Th. Schwarz

$$\frac{e}{2G} = \beta = \frac{M_t}{GJ}\,; \quad \frac{e}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$$

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = G\beta\,(\cancel{\psi_{G,xy}} - 1 - \cancel{\psi_{G,yx}} - 1) = -2G\beta \stackrel{\checkmark}{=} -e \qquad \boxed{e = 2G\beta}$$

($y_{,y}$ ; $x_{,x}$)

significato fisico

– Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = G\beta\,\underbrace{(\psi_{G,xx} - \overset{y_{,x}}{0} + \psi_{G,yy} + \overset{x_{,y}}{0})}_{\nabla^2\psi_G \text{ laplaciano}} = G\beta\,(\psi_{G,xx} + \psi_{G,yy})$$

$$= \cancel{G\beta}\;\boxed{\nabla^2\psi_G(x,y) = 0}$$ equazione di Laplace in $A$ (derivate seconde)

(la f.ne di ingobbamento deve soddisfare l'eq.ne di Laplace in $A$)

– c.c. di equilibrio :

$$0 = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = \cancel{G}\beta\left[(\psi_{G,x} - y)\, n_x + (\psi_{G,y} + x)\, n_y\right] = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

$$\frac{\partial \psi_G}{\partial n} = \psi_{G,n} = \psi_{G,x}\, n_x + \psi_{G,y}\, n_y = y\, \overbrace{n_x}^{t_y} - x\, \overbrace{n_y}^{-t_x} \quad \text{su } \Gamma$$

$$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = x t_x + y t_y$$

$$= r(s)\, r'(s) \quad (*)$$

derivata direzionale nella direzione $\mathbf{n}$ ($\perp$ al contorno $\Gamma$): $\nabla \psi_G \cdot \mathbf{n}$

"flusso" di $\psi_G$ nella direzione $n$ assegnato: c.c. di Neumann-Dini

– Si ottiene pertanto un pb. di Neumann-Dini per l'eq.ne di Laplace :

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \psi_G(x,y) = 0 \quad \text{in } A \\ &\psi_{G,n} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} \quad \text{su } \Gamma \end{aligned}}$$

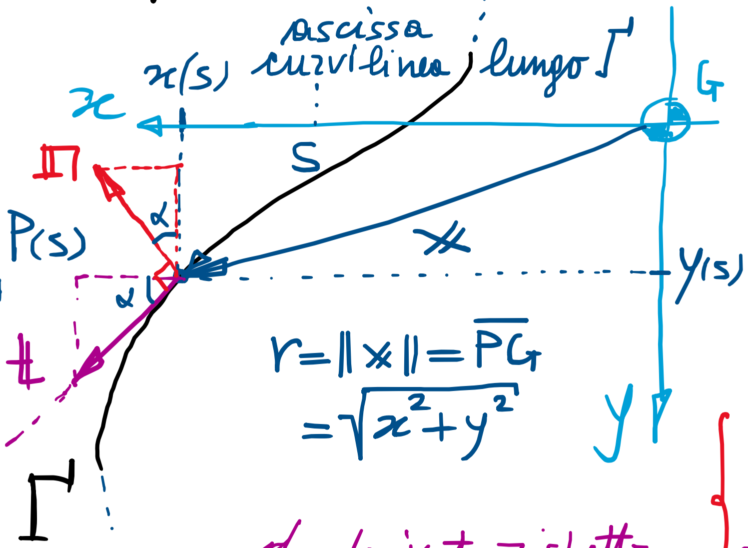
pb. differenziale del 2° ord. alle derivate parziali

$$(*) \quad x t_x + y t_y = x x' + y y' = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2(s)} = \frac{1}{2}(2 x x' + 2 y y')$$

$$\psi_{G,n} = \frac{1}{2} \frac{d r^2(s)}{ds} = r(s)\, r'(s)$$

$\neq 0$ se distanza variabile

$P(x(s), y(s)) = P(s) \in \Gamma$




$$r = \|\mathbf{x}\| = \overline{PG} = \sqrt{x^2 + y^2}$$


$\frac{d}{ds}$ derivata rispetto a $s$

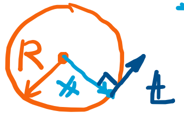
$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = x'(s) = t_x$$

$$\cos\delta = \frac{dy}{ds} = y'(s) = t_y$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \begin{Bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_y \\ -t_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \mathbf{n} \qquad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0)$$

Sezione circolare




$$\nabla^2 \psi_G = 0, \quad \psi_{G,n} = 0 \Rightarrow \psi_G \equiv 0$$

$r = R = \text{cost} \Rightarrow r' = 0$

no ingobbam.

– Da equivalenza statica:

$$M_t = \int_A \left(\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y\right) dA$$

$$= \int_A \Big[\underbrace{G\beta\left(\psi_{G,y} + x\right)}_{\tau_{zy}} x - \underbrace{G\beta\left(\psi_{G,x} - y\right)}_{\tau_{zx}} y\Big] dA$$

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \underbrace{\int_A (x^2+y^2)\, dA}_{J_G} - \underbrace{\int_A \left(\psi_{G,x}\, y - \psi_{G,y}\, x\right) dA}_{J_G > J^*_{\psi_G} \geqslant 0} = J_G - J^*_{\psi_G} > 0$$

momento d'inerzia torsionale

$J_G$ momento d'inerzia polare rispetto a G

$$J_G = \int_A r^2\, dA$$

inerzia legata all'ingobbamento fuori piano

- $J^*_{\psi_G} = \int_A \left[(\psi_{G,x})^2 + (\psi_{G,y})^2\right] dA \geqslant 0$ (× 2 Th. div.) si può dim. (con $\nabla^2\psi_G = 0$ in A)

- $J = \dfrac{M_t}{G\beta} = \dfrac{1}{(G\beta)^2}\displaystyle\int_A \underbrace{(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)}_{\tau_z^2}\, dA$ (via PLV)
  $= \left(\dfrac{2}{e}\right)^2 \displaystyle\int_A \tau_z^2\, dA > 0$

$$d\vartheta = \beta\, dz = \frac{M_t}{\boxed{GJ}}\, dz$$

rigidezza torsionale

fattore di torsione $\geqslant 1$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \eta\, \frac{M_t}{GJ_G} \; ; \quad \eta = \frac{J_G}{J} = \frac{J_G}{J_G - J^*} = \frac{1}{1 - J^*/J_G} \geqslant 1$$

proprietà geometrica della sezione trasversale