

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

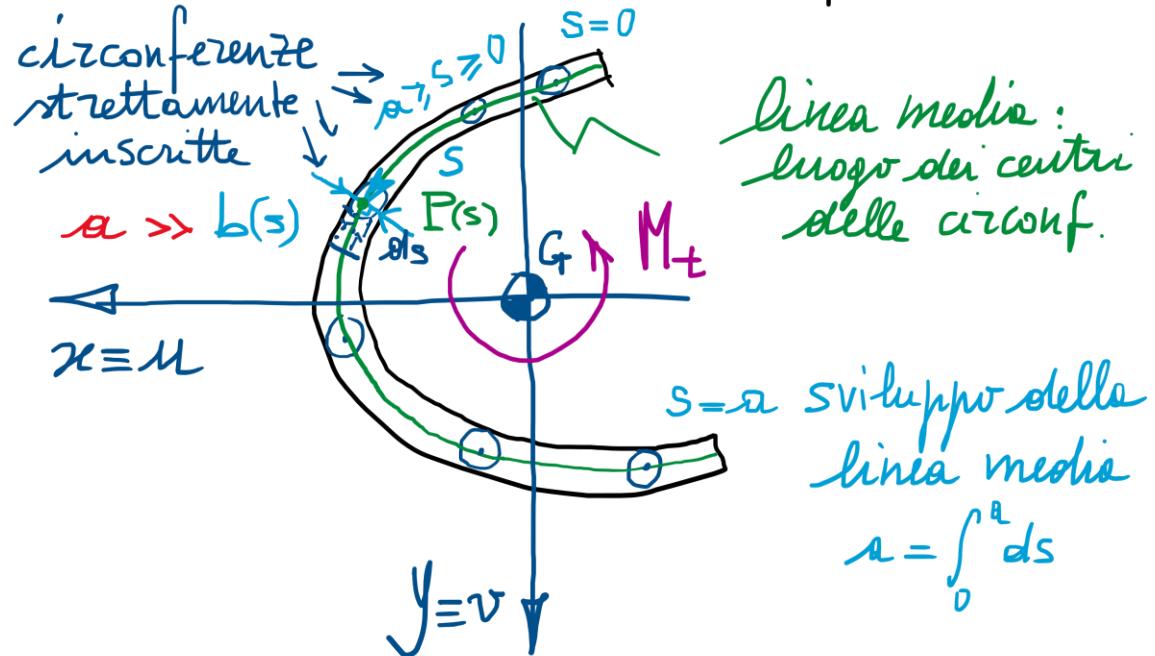
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

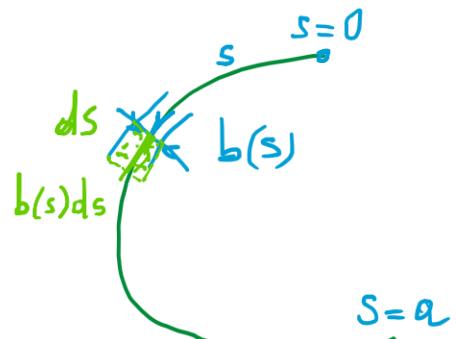
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

Torsione nei profili sottili aperti (\rightarrow generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile) "simplificato"



Caratteristiche geometriche (riferite alla linea media):



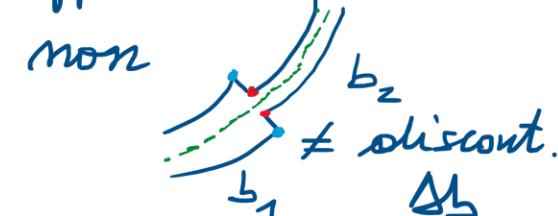
$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

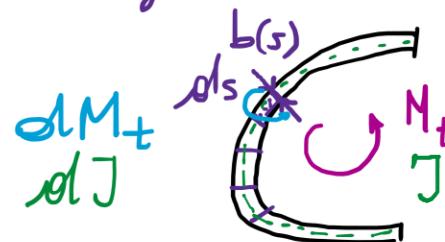
$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore $b(s)$, anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).

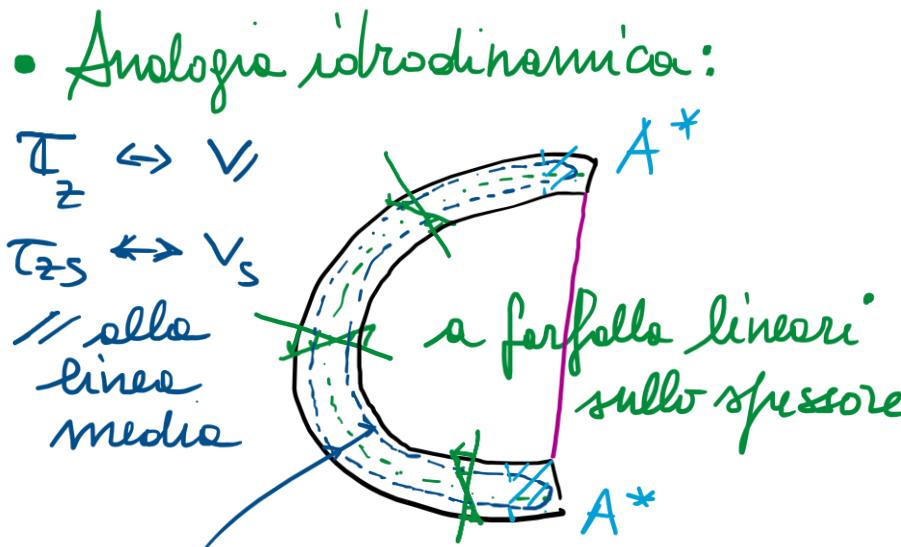
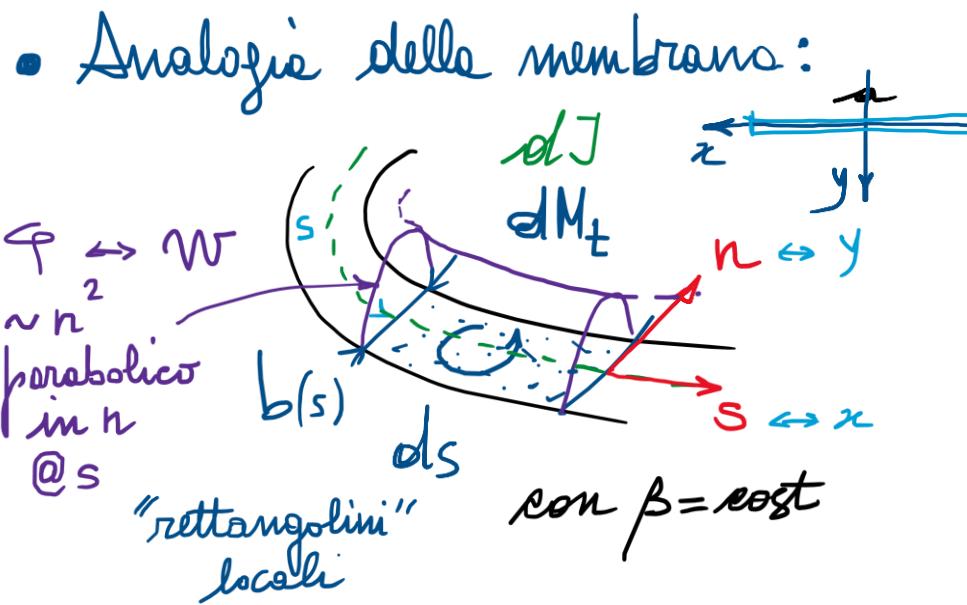
- Variazione ammessa, seppur con $b(s) \ll a$ e s , con continuità:



- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo $b(s) ds$ si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione



a ferita di
torsione
 $\beta = \text{cost}$



traiettorie che si richiudono all'interno dello spessore \Rightarrow

"bracci di leva" delle T_{zs} dell'ordine dello spessore $b(s)$ quindi piccoli \Rightarrow scarsa capacità portante a torsione

• f. le di Airy: $\frac{M_t}{J}$

$\Phi(n; s) = K \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right)$

locale

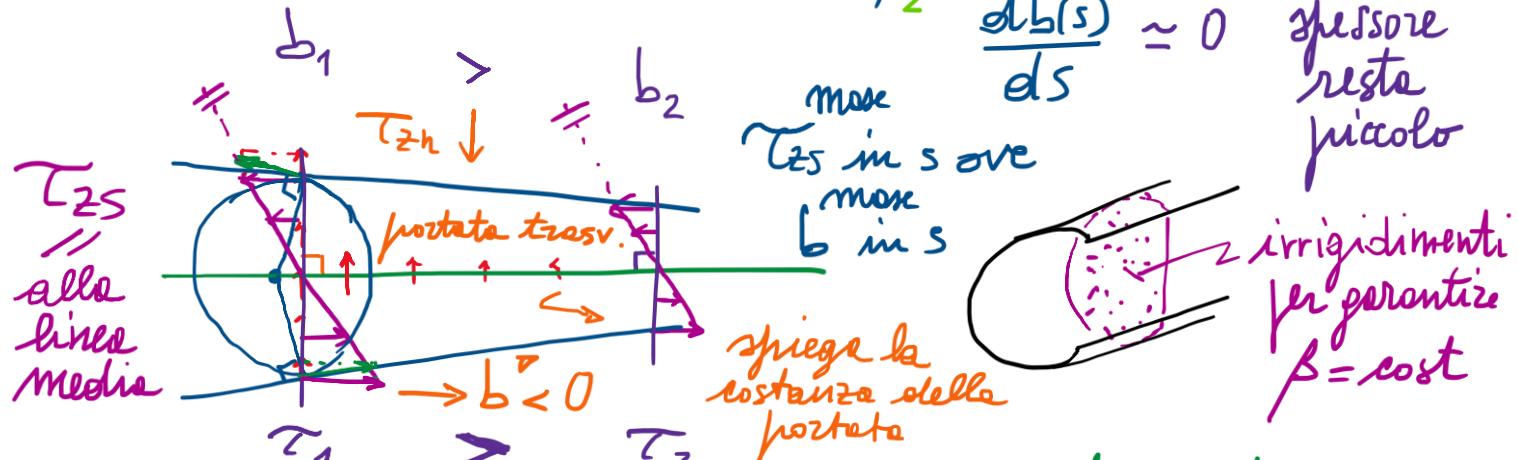
$m = \pm \frac{b}{2}$

Φ \max y

$T_{zs}(s) = \frac{M_t}{J} b(s)$

• tensioni tangenziali:

$$\begin{cases} T_{zs}(n; s) = \Phi_{,n} = G\beta (-2n) = -2G\beta n = -2 \frac{M_t}{J} n \\ T_{zn}(s) = -\Phi_{,s} = K \frac{2b(s)}{4} b(s) \underset{\substack{\approx 0 \\ \frac{db(s)}{ds} \approx 0}}{\underset{\substack{\text{trascurabili} \\ \text{in senso} \\ \text{ingegneristico}}}{\underset{\substack{\text{spessore} \\ \text{resto} \\ \text{piccolo}}}{}}} \end{cases}$$



T_z tangente al contorno

T_{zs} (fluido uscibile dal profilo)

- $\int J$ determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle T_{2s} e il momento torcente M_t):

$$M_t = 2 \int_A G\beta dA = 2 G\beta \int_0^a \int_{-\frac{b(s)/2}{2}}^{\frac{b(s)/2}{2}} \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) dn ds$$

$$\left. \frac{b(s)^2}{4} b(s) - \frac{n^3}{3} \right|_{-b/2}^{b/2} = b(s) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{2^1}{8^4} \right) = \frac{1}{12} b(s) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{b(s)^3}{3}$$

$$= \cancel{G\beta} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds$$

$$dJ \quad \frac{ds}{b(s)}$$

$$= G\beta J$$

\downarrow
torsione

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} ; \quad G\beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ} \Rightarrow dM_t = \frac{dJ}{J} M_t$$

cost. per tutti i $b(s) \cdot ds$

rigidezza torsionale

$$b = \text{cost} \Rightarrow J = \frac{1}{3} ab^3$$

$$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \quad \text{"piccolo"} \sim b^3(s)$$

momento d'inerzia torsionale

$$\frac{b(s)}{1} ds$$

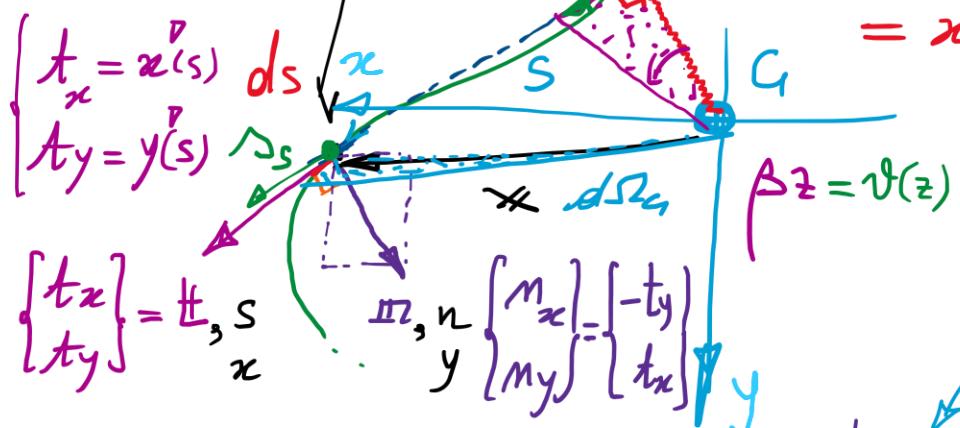
$$T_{2s}^{\max} = G\beta b(s) = \frac{M_t}{J} b(s) = \frac{dM_t}{dJ} b(s)$$

- Ingombro fuori piano (riferito alle linee medie) $[\Psi_G(s) \neq 0, \Psi_c(s) \neq 0]$

campo
di
sforzo

spostamenti
(rif. a G)

$P(x(s), y(s))$



$$d\Psi_g = -2 d\Omega_g \quad \bar{\Omega}_g = 0$$

$$\Psi_g(s) = -2 \left(\bar{\Omega}_g(s) - \bar{\bar{\Omega}}_g \right)$$

$$\bar{\bar{\Omega}}_g = \frac{1}{A} \int_0^a \bar{\Omega}_g(s) b(s) ds$$

Velocità media

$$\begin{cases} \Delta_x = -\beta z y \\ \Delta_y = \beta z x \\ \Delta_z = \beta \Psi_G(x(s), y(s)) \end{cases}$$

$$\Delta_s = \Delta \cdot \underline{t} = \Delta_x t_x + \Delta_y t_y$$

$$= \beta z (-y t_x + x t_y)$$

$$= \beta z (-y n_x - x n_y)$$

$$= -\beta z (x n_x + y n_y)$$

$$-r_g = \underline{x} \cdot \underline{n} = x n_x + y n_y$$

$\beta z r_g = \Delta_s$ vedi mappe di spostamento nelle direzioni s

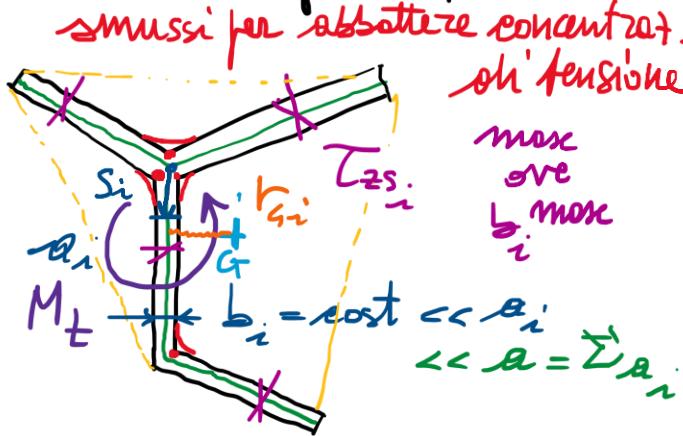
$$\frac{T_{zs}}{G} = f_{zs} = \Delta_{z,s} + \Delta_{s,z} = \beta (\Psi_{g,s}(s) + r_g(s))$$

$$\frac{d\Psi_g}{ds} = \Psi_{g,s} = \frac{T_{zs}(s)}{G \beta} - r_g(s)$$

$$d\Psi_g = \frac{T_{zs}(s)}{G \beta} ds - 2 \underbrace{\frac{1}{2} r_g(s) ds}_{\text{profili aperti: qui } T_{zs}(s) = 0 \text{ sulla linea media}}$$

Per i profili rottigli aperti, le funzioni di ingombro sono definite delle f.h. area settoriale $\Psi_g(s) \rightarrow x_c, y_c$ coordinate del centro di torsione

- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili (caso frequente nella pratica):



$$(T_{2s,i}^{\max})^{\text{max}} = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M_t i}{J_i} b_i^{\max}$$

- Funzione di ingombramento: $\psi_{g_i}(s_i) \sim \Omega_{g_i}(s_i)$ con $r_{g_i} = \text{cost}_i + \text{tutto } i$

- Profili "a stella"

particolarmente
debolli a
torsione

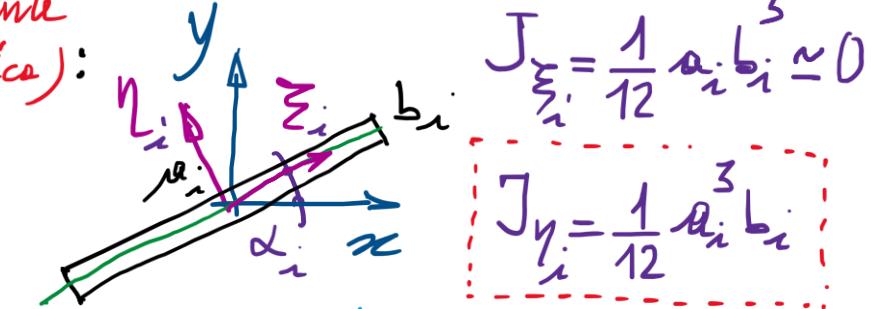


centro della stella
è il centro di torsione

no ulteriori risorse portanti da
ev. ingombramento impedito (torsione
per congruenza \Leftrightarrow secondaria)

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum_i s_i b_i \\ J_x = \sum_i J_{x_i} \\ J_y = \sum_i J_{y_i} \\ J = \sum_i J_i \\ = \sum_i \frac{1}{3} \alpha_i b_i^3 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} J_{\Sigma_i} = \frac{1}{12} \alpha_i b_i^3 \approx 0 \\ J_{y_i} = \frac{1}{12} \alpha_i b_i^3 \end{array} \right.$$



$$\left. \begin{array}{l} J_{x_i} = J_{y_i} \sin^2 \alpha_i \\ J_{y_i} = J_{y_i} \cos^2 \alpha_i \\ J_{xy_i} = \frac{J_{y_i}}{2} \sin 2\alpha_i \end{array} \right.$$

vedi
Cerchio di
Mohr
(delle inerzie)

$$r_{g_i} \neq 0$$

$$r_{c_i} = 0 \Rightarrow \Omega_{c_i} = 0 \Rightarrow \psi_c = 0$$

$$\int_A \psi_c dA = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_A T_{cx} dA = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_A T_{cy} dA = 0 \quad \checkmark$$

f.n. di ingombramento
riferite al centro
della stella idntic.
nulle

