

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2022/2023

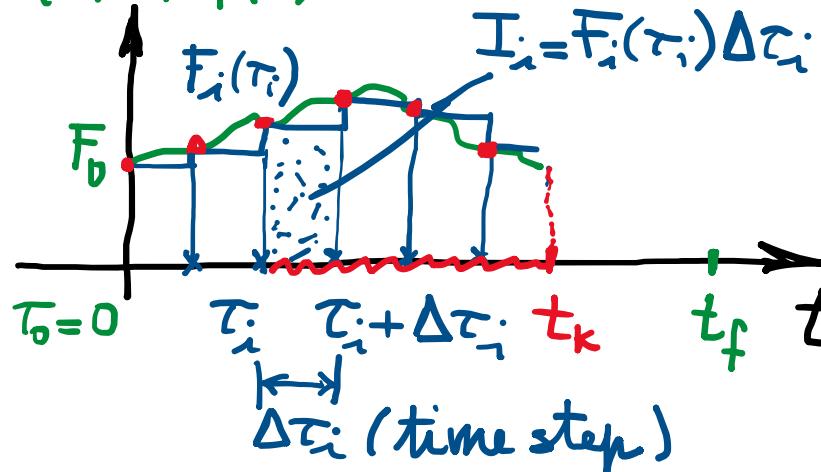
prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 08

Risposta a forzante generica  $\rightarrow$  Integrale di Duhamel

$$F(t) = F_f(t)$$



"discretizzazione  
sull'asse dei t"

$$F(t_k) \approx \sum_{i=0}^{K-1} F_i(\tau_i) \Delta\tau_i \cdot \delta(t_k - \tau_i)$$

f.n. delta di Dirac (impulso unitario in  $\tau_i$ )

Sovraapposizione di un numero finito (discreto) di impulsi  $I_i$  ricevuti dal sistema negli istanti  $\tau_i$

$$\lim_{\Delta\tau_i \rightarrow 0} \delta(t - \tau)$$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

(proprietà tipica della  $\delta$ )

INPUT



OUTPUT

$$\downarrow h(t, \tau)$$

$$u(t) \approx \sum_{i=0}^{K-1} F_i(\tau_i) \Delta\tau_i \underbrace{h(t - \tau_i)}_{f.n. risposta ad impulso unitario}$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\zeta\omega_1 t} \sin \omega_1 t$$

$\omega_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta^2}$   
 $\approx \omega_1, |\zeta| \ll 1$

f.n. risposta ad impulso unitario

("convoglia" in  $t$  gli effetti dinamici di impulsi ricevuti in  $\tau$ )

$$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \rightarrow 0} \frac{F_i}{\Delta\tau_i} h(t - \tau_i) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Integrale di "convoluzione"

Integrale di Duhamel:  $u_0(t) = \int_0^t F(\tau) \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_d(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$

$\tau$  variabile  
di integraz.

- Formisce una rappresentazione formale analitica esatta delle risposte.

$$\omega_d = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$h(t-\tau)$$

$t$  istante di lettura della risposta

- Raramente determinabile analiticamente:

$$= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_d(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$$

- in genere  $F(t)$  non è nota in forma analitica, bensì "campionata" ad istanti di tempo discreti;
- qualora lo fosse, per espressioni generiche delle forzante, non soluz. analitica in forme chiuse possibile.

- In genere valutabile mediante integrazione numerica in forma approssimata.

$$F(t) = \int_0^t F(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \rightarrow \begin{array}{c} S(t) \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \boxed{\text{SISTEMA}} \xrightarrow{\hspace{1cm}} h(t) \xrightarrow{\hspace{1cm}} u_0(t) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

## Scritture alternative

$$- F(t) = F f(t) : u_0(t) = \frac{F K}{m \omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta \omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau$$

ampiezza adimens. [F] [1]

$$= N(t) u_0 ; N(t) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t f(\tau) \frac{e^{\zeta \omega_1 \tau}}{e^{\zeta \omega_1 t}} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau$$

per smorz. piccolo  $\zeta \ll 1$

fattore di amplificazione dinamica  
dipendente dal tempo.

$$- u_0(t) = \frac{1}{\omega_1} \frac{1}{m \sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta \omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau = \frac{V(t)}{\omega_1}$$

(come per risposte armoniche)

$V(t)$  "pseudo-velocità"  $\rightarrow$  reale, poi, "pseudo-spettri"

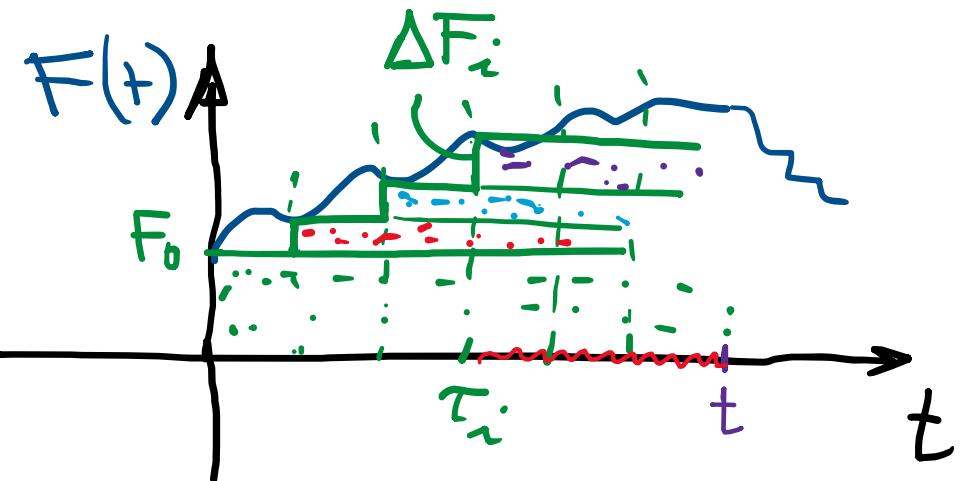
$$- \sin \omega_d(t-\tau) = \frac{\sin \omega_d t \cos \omega_d \tau - \cos \omega_d t \sin \omega_d \tau}{\dots \dots} \rightarrow \int_0^t F(\tau) \frac{e^{-\zeta \omega_1 \tau}}{e^{\zeta \omega_1 t}} \cos \omega_d \tau d\tau = y(\tau)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t F(\tau) \frac{e^{-\zeta \omega_1 \tau}}{e^{\zeta \omega_1 t}} \cos \omega_d \tau d\tau \\ B(t) = \dots \dots \sin \omega_d \tau \dots \dots z(\tau) \end{array} \right.$$

$u_0(t) = A(t) \sin \omega_d t - B(t) \cos \omega_d t$

Ampiezza dip. del tempo

Visione alternativa:



Integrando per parti:

$$m_o(t) = \cancel{F_0 A(t)} + \cancel{F(\tau) A(t-\tau)} \Big|_0^t + \int_0^t F(\tau) \dot{A}(t-\tau) d\tau$$

$\underbrace{F(t) \dot{A}(t-t)}_{\tau=t} - \cancel{F_0 A(t)}$   
 $\tau=0 \quad A_0=0$

Sequenze di forzanti a freddo:

rapporto incrementale

$$m_o(t) = F_0 \cancel{A(t)} + \sum_i \frac{\Delta F_i(\tau_i) A(t-\tau_i) \Delta \tau_i}{\Delta \tau_i}$$

$\lim_{\Delta \tau_i \rightarrow 0} \rightarrow$  f. ha risposta a gradino unitario

$$= F_0 A(t) + \int_0^t \dot{F}(\tau) A(t-\tau) d\tau$$

$\partial A = - \dot{A} \partial \tau$

$$\int_0^t \dot{F}(\tau) \dot{A}(t-\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

avr...

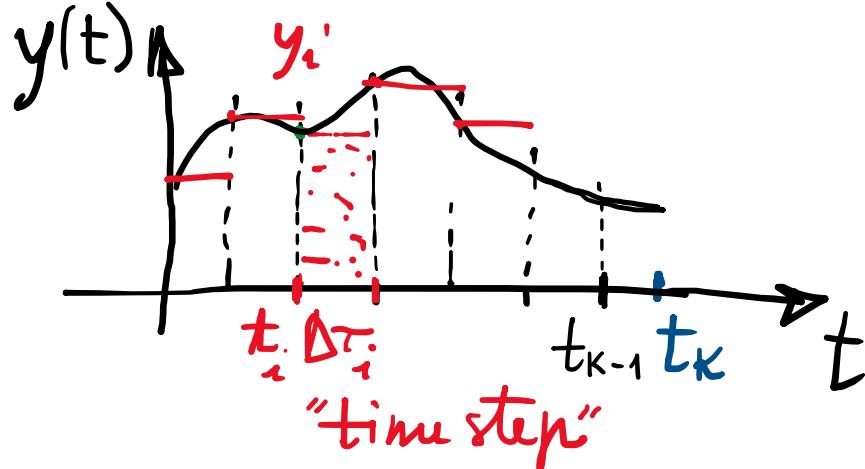
regole di svolgimento  
del prodotto

$$(\dot{F}A) = \dot{F}A + F\dot{A}$$

⇒  $\dot{F}A = (\dot{F}A) - F\dot{A}$

Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel  $\Rightarrow \int_0^t y(\tau) d\tau$   
 → vedi calcolo numerico.

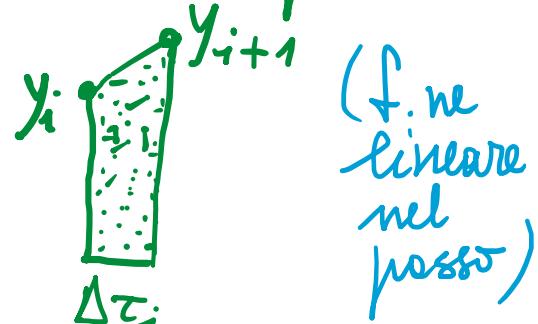
- Regole dei rettangoli:



$$I_{nt} \approx \sum_{i=0}^{k-1} y_i \Delta \tau_i \quad (\text{f.n. costante nel passo temporale})$$

$\Delta \tau_i = \Delta \tau$   
 passo costante  
 $= \Delta \tau (y_0 + y_1 + \dots + y_{k-1})$

- Regole dei trapezi:



$$I \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta \tau_i$$

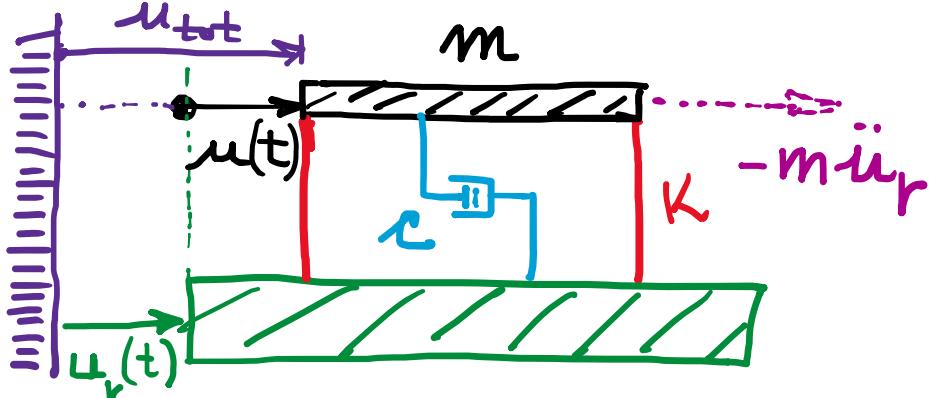
$$= \frac{\Delta \tau}{2} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{k-1} + y_k)$$

$$= \Delta \tau \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{k-1} + \frac{y_k}{2} \right) \frac{y_0 + y_k}{2}$$

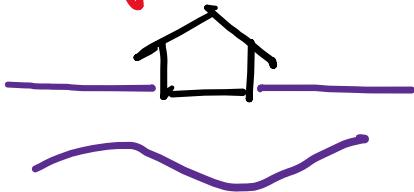
- Regola di Simpson, etc.

(f.n. parabolica nel passo)

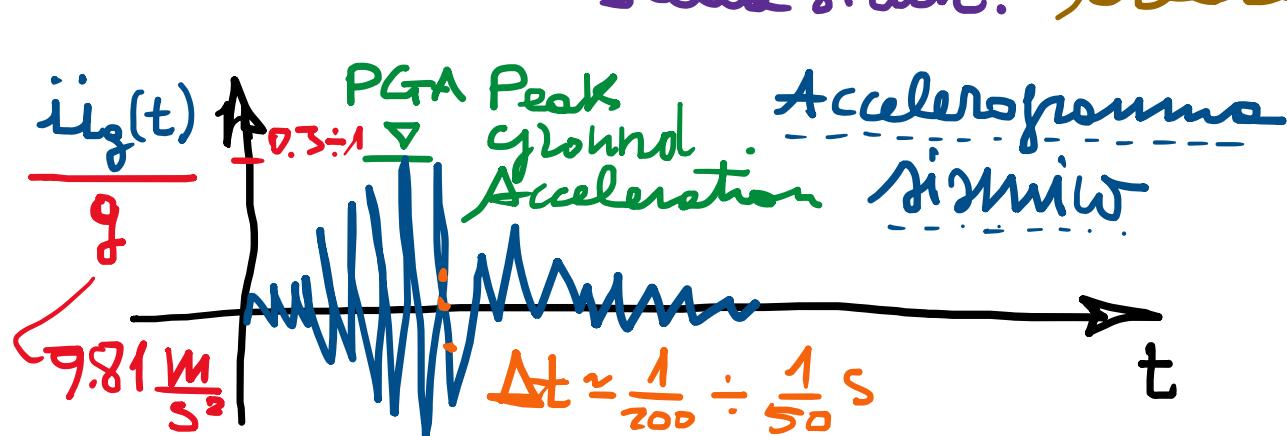
Risposte al moto del riferimento (vedi sezione sismica)  $u_{tot} = u_r + u$



es. moto del terreno per  $\ddot{u}_g(t)$   
effetto del terremoto

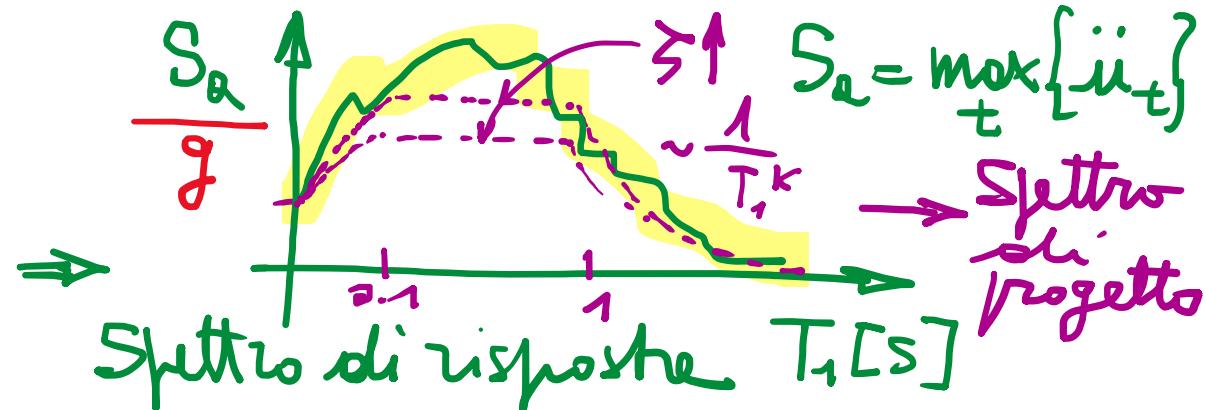


estensione  
limitata  
della strutt.  
di massa contenuta,  
in modo da non (sisme)-  
creare interazioni moto-struttura



$\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + Ku_r = -m\ddot{u}_{tot}$   
 $= -m(\ddot{u}_r + \ddot{u})$

$\ddot{u}_r + c\ddot{u}_r + Ku_r = -m\ddot{u}_r(t) \leftrightarrow$  Forzante  
indotta per inerzie quale  
effetto di trascinamento



Risposte sismica:  $\ddot{u} + 2\zeta\omega_1 \dot{u} + \omega_1^2 u = (-) \ddot{u}_g(t) \Rightarrow u(t)$  per  $\int$  di Duhamel

Spettri di risposta (BIOT, 1932):

displacement  $S_d =$

velocity  $S_v = \max_t$

acceleration  $S_a =$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t; T_1, \zeta) \\ \dot{u}(t; T_1, \zeta) \\ \ddot{u}(t; T_1, \zeta) \end{array} \right. \text{totale}$$

Semplificaz.  
(singolo  
spettro)

Pseudo-spettri:

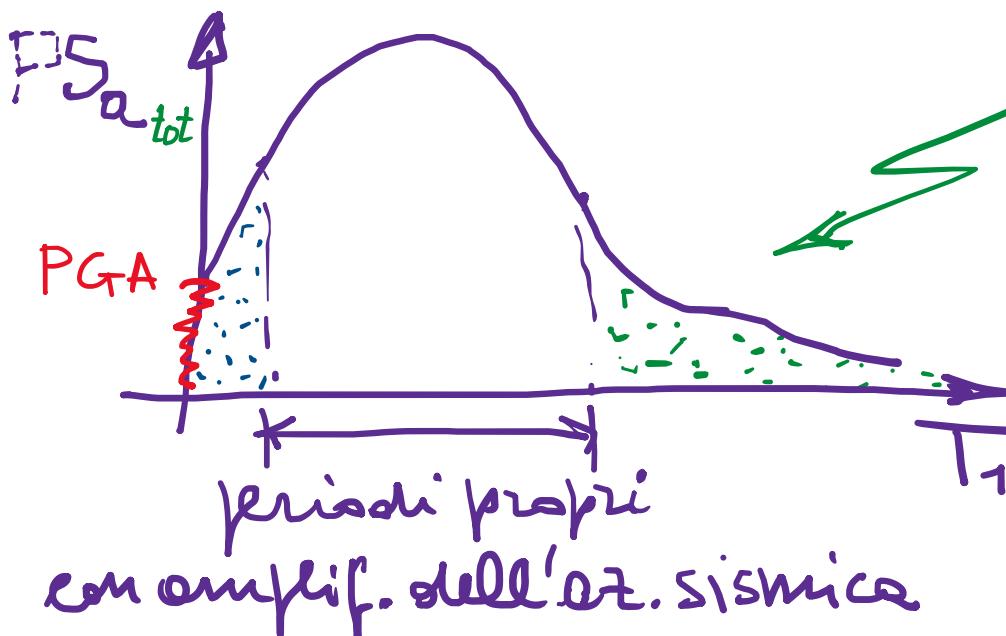
$$S_d \rightarrow PS_v = \omega_1 S_d \approx S_v$$

$$PS_a = \omega_1 PS_v = \omega_1^2 S_d \approx S_a$$

(come per risposta armonica)

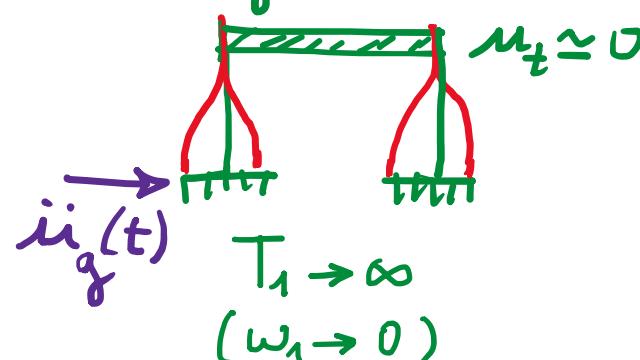
$$S_d = \frac{1}{\omega_1} PS_v: \text{vedi scrittura Duhamel } u(t) = \frac{1}{\omega_1} V(t)$$

pseudo-  
velocità

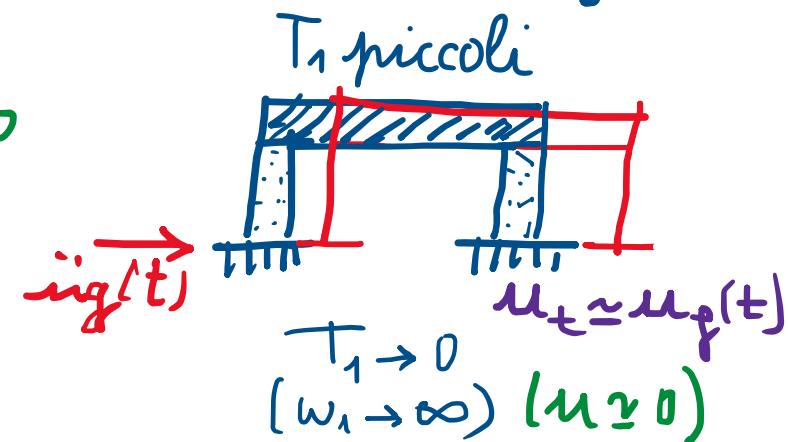


Isolamento sismico  
(strutt. flessibile) vs. Struttura rigida

$T_1$  grandi

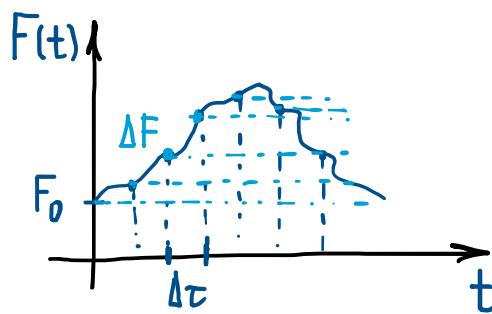


$T_1$  piccoli



## Concetti fondamentali :

- Risposte dinamica del sistema a forzante generica

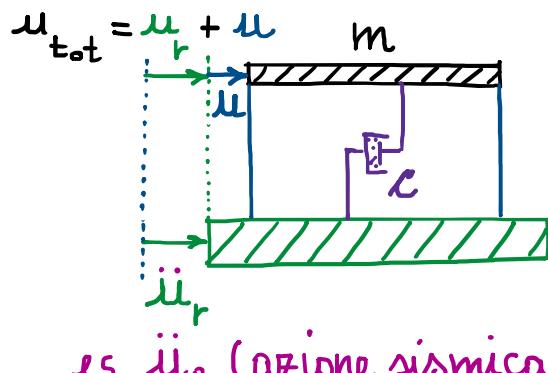


$$F(t) = \int_0^t F(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad \text{per impulsi}$$

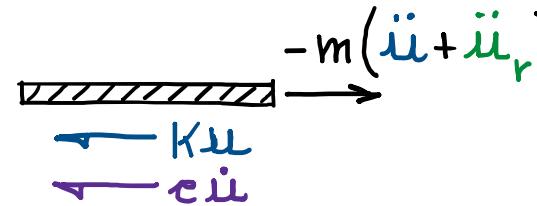
$$= F_0 + \int_0^t \dot{F}(\tau) d\tau \quad \text{per gradini}$$

→ SIST. →

- Risposte al moto del riferimento (del suporto)



es.  $\ddot{u}_g$  (azione sismica)  
"ground" (terreno)



"effetto di trascinamento"

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = -m\ddot{u}_r(t)$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = -\ddot{u}_r(t)$$

$$u_g(t) = \frac{1}{\omega_1} \left[ (-) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1 \sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{\omega_1} V(t) \quad \text{"pseudo-velocità" } V^{\max} = P_S \approx S_{\text{spettro}}$$

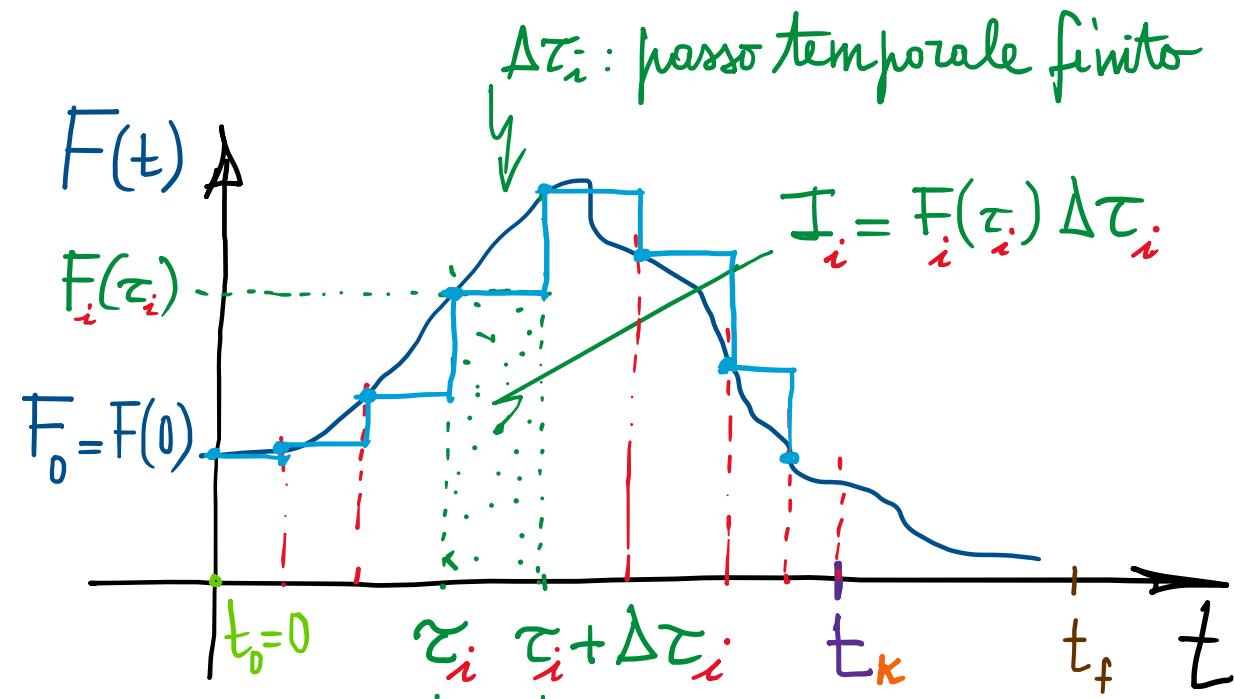
"integrale di convoluzione o  
di Duhamel"

$$u_g(t) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= F_0 A(t) + \int_0^t \dot{F}(\tau) A(t-\tau) d\tau$$

$$h(t) = \dot{A}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_d t} \sin \omega_d t$$

# Risposte dinamica del sistema a forzante generica



"discretizzazione" dell'asse dei tempi  
 $t \rightarrow t_i$

$\tau_i$

"campionati" ogni  $\Delta\tau_i$

istante di manifestazione dell'impulso  $I_i = F(\tau_i) \Delta\tau_i$

istante di lettura del valore delle forzante "convoluzione"

"Concept":

Sovraffosizione di impulsi in  $\tau_i$  ricevuti sino al tempo  $t_K$

$I_i$  Delta di Dirac

$$F(t_K) \approx \sum_i F_i(\tau_i) \Delta\tau_i \delta(t_K, \tau_i)$$

$\downarrow \lim \Delta\tau_i \rightarrow 0$

impulso unitario

$$F(t) = \int_0^t F(\tau) \delta(t, \tau) d\tau$$

$\tau$  variabile di integrazione

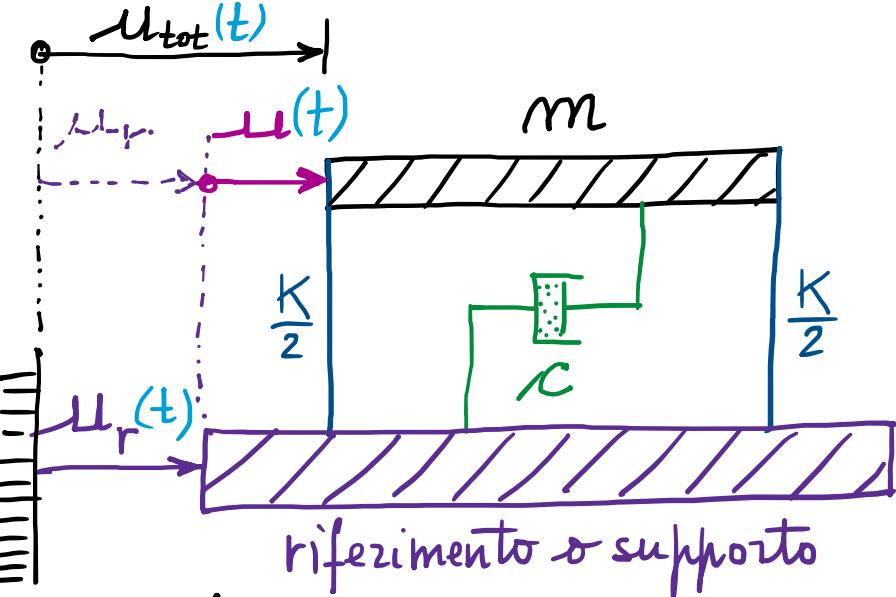
fine risposta a impulso unitario

$$U_0(t_K) \approx \sum_i F_i(\tau_i) \Delta\tau_i h(t_K, \tau_i)$$

Integrale di Duhamel

$$U_0(t) = \int_0^t F(\tau) h(t, \tau) d\tau$$

- Risposta al moto del riferimento (del supporto)  $\Rightarrow$  spostamento totale



riferimento fisso

esempio tipico in ing. civile:  
eccitazione o azione sismica

$$\ddot{u}_r(t) = \ddot{u}_g(t) \quad \text{accelerazione sismica}$$

L "ground" (terreno)

$$\ddot{u}_{tot}(t) = \ddot{u}_r(t) + \ddot{u}(t)$$

acce<sup>l</sup>erazione  
velocità

"Concept": Effetto di "trascinamento"

$$F_{tot} = -m \ddot{u}_{tot}$$

$$= -m \ddot{u}_r +$$

$$-m \ddot{u}$$

$m$

$\ddot{u}_r$

$\ddot{u}$

$Ku$

$$\gamma \ddot{u} + \frac{c}{m} \ddot{u} + \frac{K}{m} u(t) = (-) \underbrace{\ddot{u}_r(t)}_{\substack{\text{forze d'inezzio} \\ \text{legata al moto} \\ \text{del supporto}}}$$

$\gamma$ : coefficiente di smorzamento

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_1 \dot{u} + \omega_1^2 u(t) = (-) \ddot{u}_r(t)$$

$\zeta$ : fattore di smorz.  $\sim 1\%$ , es.  $5\%$

## SOMMARIO (Lec. 08)

(di convoluzione)

- Risposte e forzante generica  $\Rightarrow$  sequenze di impulsi  $\Rightarrow$  Integrale di Duhamel.
- Scritture interpretative alternative (come per risposta sismica).
- Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel  $\Rightarrow$  calcolo numerico.

— o —

- Risposta al moto del riferimento (es. earthquake). <sup>azione sismica</sup>
- Forzante apparente indotta per effetto d'inerzia (trascinamento).
- Risposta simbolica via Duhamel (valutabile numericamente).
- Spettri e pseudo-spettri di risposta (ev. di progetto  $\Rightarrow$  codificati).
- Concetto di isolamento sismico delle vibrazioni. <sup>v. normative</sup>

Next step: Integrazione diretta dell'eq.m del moto (Metodo di Newmark).  
Risposte nel dominio delle frequenze.