

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

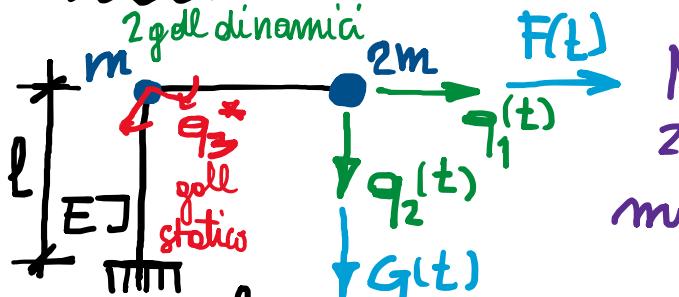
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Esempio 2DOF \rightarrow Modi principali di vibrazione:



$$m \stackrel{2 \text{ d.o.f. dinamici}}{\text{---}} \xrightarrow{\substack{2m \\ q_1(t)}} \xrightarrow{F(t)} M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad K = \frac{6}{7} \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrice di massa matrice di rigidezza

$$K\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i$$

ω_i : pulsazione naturale

ϕ_i : forma modele

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0$$

$$\det \left(\frac{6}{7} \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \omega_i^2 m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{sse} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{pb. agli autovalori generali} \\ \text{associato alle matrici } K \text{ e } M \\ (\text{simmetriche e definite positive}) \end{array}$$

$$\lambda_i = \omega_i^2 \frac{ml^3}{EJ} [t]^{-2}$$

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\begin{array}{l} K \sim EJ/l^3 \\ M \sim m \\ \downarrow \\ \omega_n \sim \sqrt{EJ/m} \sim \sqrt{1/[t]^2} \\ \lambda_i \text{ numero puro} \end{array}$$

$$\text{eq. ne caratteristica (2° grado)} \quad \beta(16 - 7\lambda_i)^2 / (6 - 7\lambda_i) - 18 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$7\lambda_i^2 - 22\lambda_i + 6 = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{48}{7} - 3\lambda_i \right) \left(\frac{12}{7} - 2\lambda_i \right) - \frac{18^2}{7^2} = 0$$

$$(48 - 21\lambda_i)(12 - 14\lambda_i) - 18^2 = 0$$

$$\cancel{7 \cdot 7 \lambda_i^2 - \cancel{7}(16+6)\lambda_i + \underbrace{16 \cdot 6 - 18 \cdot 3}_{(16-9)6} = 0}$$

$$\text{soltuzione analitica} \quad \lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 42}}{7}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{79}}{7} =$$

$$\lambda_1 = .3017 \quad \lambda_2 = 2.841$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = .5493 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \\ \omega_2 = 1.686 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{I modo di vibrare} \\ \text{II modo} \end{array}$$

[rad/s] pulsazioni proprie (freq. proprie $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} [\text{Hz}]$)

- Autovettori:

$$\begin{bmatrix} \frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{cases} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

N.B.: due eq. m. linearmente dipendenti per $\lambda = \lambda_i$ ($i=1,2$)

$$- \frac{18}{7} \phi_{i1} + 2\left(\frac{6}{7} - \lambda_i\right) \phi_{i2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi_{i1}}{\phi_{i2}} = \frac{\frac{6}{7} - \lambda_i}{\frac{9}{7}} = \frac{6-7\lambda_i}{9}$$

ad es. dalle 2 eq. ne

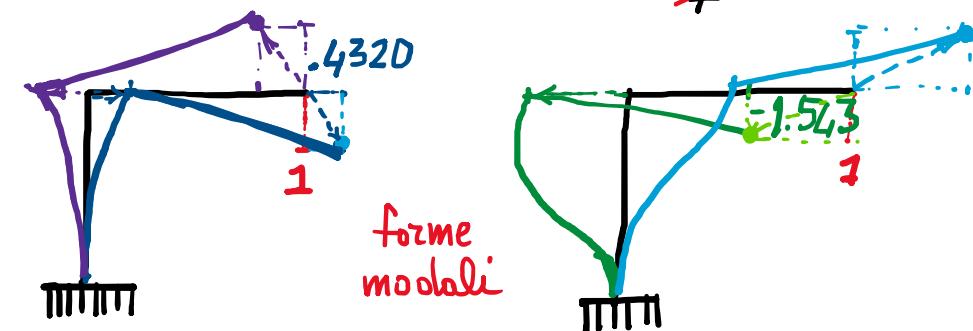
$$i=1, \lambda_1 \Rightarrow \frac{\phi_{11}}{\phi_{12}} = .4320$$

$$i=2, \lambda_2 \Rightarrow \frac{\phi_{21}}{\phi_{22}} = -1.543$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \begin{cases} .4320 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} -1.543 \\ 1 \end{cases}$$

normalizzazione con $\phi_{i2}=1$



- Altre normalizzazioni:

- $\|\Phi_i\|=1$ $\Phi_i = \alpha_i \begin{cases} \phi_{i1} \\ 1 \end{cases}$, $\alpha_i = \frac{1}{\|\Phi_i\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\phi_{i1}^2}}$ ($\Phi_i \rightarrow \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}$)

norme unitarie

- $\Phi_i^T M_i \Phi_i = M_i = \frac{1}{m} \beta_i \begin{cases} \phi_{i1} \\ 1 \end{cases} m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \beta_i \begin{cases} \phi_{i1} \\ 1 \end{cases}$

merse modali unitarie

(valore specifico,
es. m)

$$= \beta_i^2 \begin{cases} \phi_{i1} \\ 1 \end{cases} m \begin{cases} 3\phi_{i1} \\ 2 \end{cases}$$

$$= m \beta_i^2 (3\phi_{i1}^2 + 2) \Rightarrow \beta_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{3\phi_{i1}^2 + 2}}$$

I modo ω_1 (utili i momenti modali M_i) II modo ω_2
(definite a meno di un fattore di proporzionalità arbitrario)

$$\Phi_1 = \begin{cases} .3966 \\ .9180 \end{cases}, \quad \Phi_2 = \begin{cases} -.8392 \\ .5439 \end{cases}$$

... se $M_i = m$...

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} .2700 \\ .6250 \end{cases}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} -.5103 \\ .3307 \end{cases}$$

... se $M_i = 1$...

- Coordinate principali :

$$q = \Phi p = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = \sum_i \phi_i p_i$$

somma su tutti i modi

$$\Phi^T \Phi^{-1} = I_{2x2}$$

$$\Phi^T M q = \underbrace{\Phi^T M}_{\text{matr.}} \Phi p \quad \Phi = \begin{bmatrix} .2700 & -.5103 \\ .6250 & .3307 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_1 = .2700 p_1 - .5103 p_2 \\ q_2 = .6250 p_1 + .3307 p_2 \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} .8101 & 1.250 \\ -1.531 & .6614 \end{bmatrix}$$

- Relaz. inversa :

$$p = \Phi^{-1} q = (\underbrace{\Phi^T M}_{\text{matr.}} \Phi)^{-1} \Phi^T M q \rightarrow p_i = \frac{\phi_i^T M q_i}{M_i} \xrightarrow[M_i = \phi_i^T M \phi_i]{\cancel{M_i}} \begin{cases} p_1 = .8101 q_1 + 1.250 q_2 \\ p_2 = -1.531 q_1 + .6614 q_2 \end{cases}$$

- Disaccoppiamento delle eq.m. del moto:

$$\omega = m \ddot{\theta}; K = \Phi^T K \Phi = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} .3017 & 0 \\ 0 & 2.841 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T (K \Phi = M \Phi \Omega^2)$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = \omega^{-1} K \Leftrightarrow \omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}; \omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$$

$$\begin{cases} m \ddot{p}_1 + \frac{EJ}{l^3} .3017 p_1(t) = .2700 F(t) + .6250 G(t) = P_1(t) \\ m \ddot{p}_2 + \frac{EJ}{l^3} 2.841 p_2(t) = -.5103 F(t) + .3307 G(t) = P_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \Phi_i^T \frac{m}{M} \begin{bmatrix} 3017 & 0 \\ 0 & 2.841 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \Phi_i^T \begin{Bmatrix} 3q_1 \\ 2q_2 \end{Bmatrix} \\ &= 3\phi_{i1} q_1 + 2\phi_{i2} q_2 \end{aligned}$$

coordin.
lagrang.
(fisiche)

coordin.
principali
(metametiche)

$$\Rightarrow p(t) \Rightarrow q(t) = \Phi p(t)$$

- si sposta finale

- Determinazione numerica delle autosoluzioni (metodo iterazione vettoriale inverso)

Forme standard :
$$\left\{ \begin{array}{l} G \phi_i = \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i , \quad G = K^{-1} M I \\ H \phi_i = \omega_i^2 \cdot \phi_i , \quad H = M I^{-1} K \end{array} \right.$$

$\Phi_i^{(0)} \rightarrow \hat{\Phi}_i^{(1)} = G \Phi_i^{(0)} \rightarrow \text{conv. a } \phi_1 \text{ (primo)}$
 autor. $\hat{\Phi}_i^{(1)} = H \Phi_i^{(0)} \xrightarrow{\text{K iterz.}}$
 di tentativi $\hat{\Phi}_i^{(1)} \xrightarrow{\text{processo, iterativo}} \hat{\Phi}_i^{(n+1)} \xrightarrow{\text{ultimo}}$
 (trial vector) (mediante semplificazioni successive)

- Orthogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT (da inserire ad ogni iterazione per ritare di convergere sugli autovettori già precedentemente determinati).

- Algoritmo iterativo (pseudo-code), di agevole implementazione

- $\phi^{(0)}$ trial vector
 - $\hat{\phi}^{(1)} = G \phi^{(0)}$ \leftarrow l'autovettore si aggiorna mediante semplice moltiplicazione (con $G \circ H$)
 - $\phi^{(1)} \leftarrow \hat{\phi}^{(1)}$ tramite normalizzazione
 - $\omega_{i,1}^2 = \frac{\phi^{(1),T} K \phi^{(1)}}{\phi^{(1),T} M \phi^{(1)}}$ stima dell'autovettore dei rapporti di Rayleigh (successiva)
 - $\left| \frac{\omega_{i,i+1}^2 - \omega_{i,i}^2}{\omega_{i,i}^2} \right| \leq tol \approx 10^{-4} - 10^{-6} \rightarrow \text{end}$

• Concetti fondamentali (analisi dinamica modello) \leftrightarrow sistemi dinamici lineari tempo-invar.

- Soluzione del pb. agli autovettori "generalizzato" associato alle matrici di rigidezza K e di massa M :

$$K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \omega_i^2 \text{ autovettori (} \omega_i \text{ pulsazioni proprie o naturali)} \\ \Phi_i \text{ autovettori (forme modelli)} \end{array} \right.$$

- forma analitica, solo per n (n. dei gradi di libertà) < 5 autoval. deq. ne
caratteristica di gradon.
autovett. de sist. lin.
omogeneo.
- forma numerica, per sistemi generici, aventi anche molti gradi.

- Trasformazione in coordinate principali $p_i(t)$:

$$(t) q = \Phi p = \underbrace{[\Phi_1 | \Phi_2 | \dots | \Phi_n]}_{\text{coordinate legrangiane (di senso fisico)}} p = \sum_i \Phi_i p_i(t) \quad p_i : \text{componente (molele) del vettore } q \text{ nelle base degli autovettori } \Phi_i.$$

Φ : matrice degli autovettori (Φ_i per colonne)

Coordinate principali, associate ai modi di vibrazione (di significato matematico: coeff. delle combinazione lineare dei Φ_i).

- Conseguente trasformazione in matrici modali (diagonali): \Rightarrow disaccoppiamento delle equazioni del moto

$$M \ddot{q} + K q = Q(t)$$

$q = \Phi P$ trasformaz. di coordinate. $\Phi = [\phi_i]$ matrice degli autovettori (per colonne)

$$\Phi^T (M \Phi \ddot{P} + K \Phi P) = Q$$

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\mathcal{M} = \text{diag}[M_i]} \ddot{P} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K = \text{diag}[K_i]} P = \Phi^T Q = P(t)$$

$$\mathcal{M} = \text{diag}[M_i] \quad K = \text{diag}[K_i]$$

\Rightarrow coerentemente: $\mathcal{Q}^2 = \text{diag}[\omega_i]$ matrice degli autovalori (diagonale)

$$K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i \quad \uparrow \text{scalone}$$

$$\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}$$

$$\Phi^T (K \Phi_i = M \Phi_i \omega_i^2)$$

$$K = \Phi^T K \Phi = \Phi^T M \Phi \omega_i^2 = \mathcal{M} \omega_i^2 \Phi^T \Phi = \mathcal{M} \omega_i^2 K$$

$$\underbrace{M_i}_{\text{masso modale}} \ddot{p}_i + \underbrace{K_i}_{\text{rigidezza modale}} p_i(t) = \Phi_i^T Q = P_i(t)$$

$$\Phi_i^T M \Phi_i$$

$$\Phi_i^T K \Phi_i$$

masso modale rigidezza modale

ricorda:
sistema SDOF

$$m \ddot{u} + K u(t) = F(t)$$

$$q_1 = u(t)$$

semplificazione

n eq. ni del moto disaccoppiate, nelle n coordinate principali $p_i(t)$ (riflessione, n volte, tante quanti sono i modi, di quanto visto per un sistema SDOF) \Rightarrow interpretazione: sistema MDOF ad n fd, come n sistemi SDOF, per ciascun modo di vibrare.

SOMMARIO (Lec. 13)

- Esempio 2DOF: modi principali di vibrazione.
- Soluzione (analitica) dell'eqn. caratteristica \Rightarrow autovettori.
- Determinazione degli autovettori (dal pd. egli autovol. originario), e menti di costante arbitria.
- Normalizzazione degli autovettori. (\Leftarrow scelta delle costante arbitria)
- Trasformazione in coordinate principali e disaccoppiamento delle eq.m del moto.
- Calcolo numerico delle autosoluzioni (metodo dell'iterazione vettoriale inversa).

Next step: introduzione dello smorzamento; azioni interne (modelli).