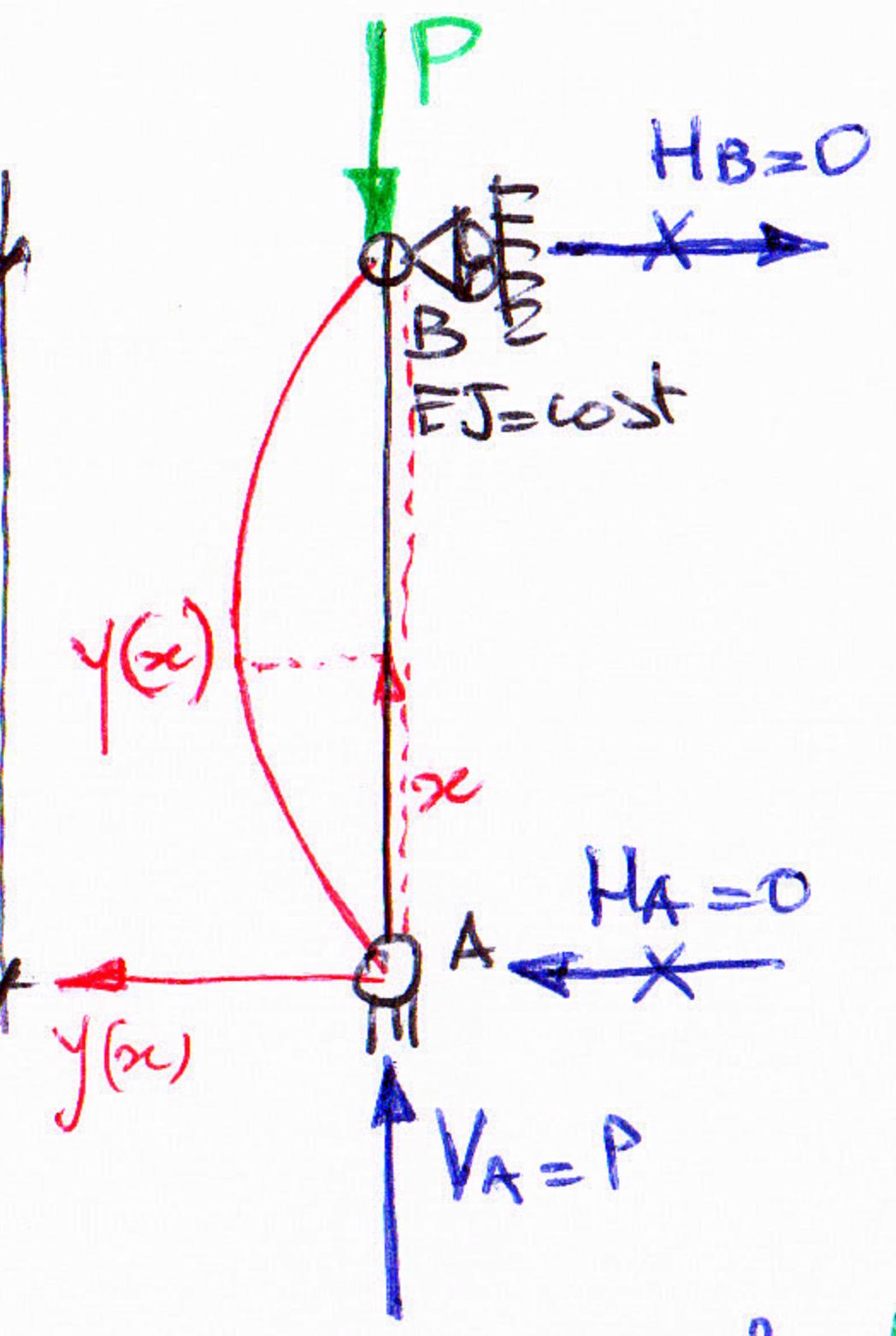


23^a Let. FDIS



L'asta di Euler (~1750)

[1707-1785]

- Analisi di stabilità flessionale di asta semplicemente compresa.

frizzi@unibg.it

Aproccio statico : si cercano configurazioni di equilibrio deformate $y = y(x)$ discoste da quelle di riferimento $y = 0$. Tale conf. m è evident. di equilibrio, con esto semplicemente compresa, sede di sforzo estore assiale pari a P .

eq. del moto armonico (v. dinamica)

- Con deformabilità puramente flessionale: Momento nelle conf. ne

$$\text{curvatura} \quad y''(x) \approx X = \frac{M}{EJ} \Rightarrow EJ y''(x) = M(x) = -P y(x)$$

eq. differenziale della linea elastica

$$\text{per } |y'(x)| \ll 1$$

[Simile a quanto visto per le molle elastiche rotazionali (sistemi a deformabilità concentrata):

$$\vartheta = \frac{M}{K}$$

$$\Rightarrow EJ y''(x) + P y(x) = 0 \Rightarrow \frac{EJ}{EJ} y''(x) + \frac{P}{EJ} y(x) = 0 \Rightarrow y''(x) + \frac{P^2}{EJ^2} y(x) = 0$$

con
l.c.
an

$$y(x) + \frac{P^2}{EJ^2} x^2 y(x) = 0$$

con
l.c.
an

N.B.: qui evident. con $\frac{P^2}{EJ^2} > 0$; $P = \alpha \frac{EJ^2}{l^2}$, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$
 $J = J_{\min}$ delle sez. trasversale, in quanto l'instabilità si manifesterebbe prima in un piano di riflessione contenente l'asse principale con inerzia massima e ortogonale ad inerzia neutra \equiv con l'asse con inerzia minima.

- Integrale generale: (v. Dinamica)

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

$$- Infetti: \quad y''(x) = \alpha^2 A \cos \alpha x - \alpha^2 B \sin \alpha x; \quad y''(x) = -\alpha^2 (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) = -\alpha^2 y(x) \quad \forall \alpha \rightarrow y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0$$

Carico critico Euleriano (Per. min):

$$n=1 \rightarrow P_{cr}^E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Carichi critici cui corrispondono deformazioni critiche:

$$y(x) = A \sin \frac{n \pi x}{l}$$

Ampliette arbitrio

- Imposizione delle c.c.:

$$\begin{cases} y(0) = B = 0 \\ y(l) = A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{componente cosin x nulla (altrimenti violato il vincolo in A)} \\ A = 0, \text{ sin x arb.} \rightarrow \text{solt. banale } y \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(l) = A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0 \\ \sin \alpha l = 0, \text{ A arb.} \rightarrow \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha l = n \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \alpha^2 l^2 = n^2 \pi^2 \end{cases}$$

Scrittura matriciale compatta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{D} \times = 0}$$

Sistema delle seconde al contorno

A, B, d

n.c.:

\Rightarrow

$$\det \mathbb{D} = -\sin \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = n \pi, \text{ come sopra.}$$

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

ha solut. B=0, A arbitrio, come sopra.

Per tali valori:

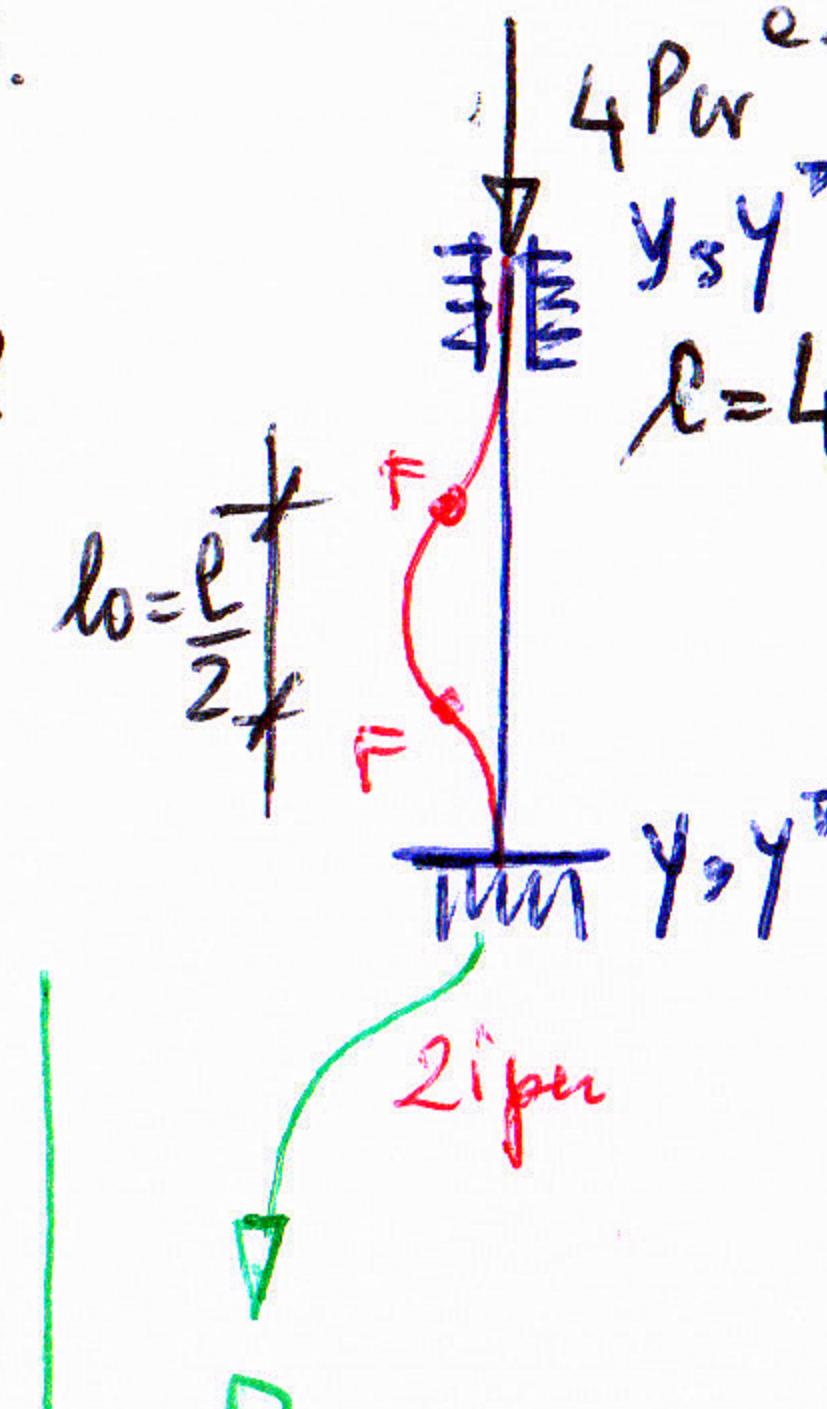
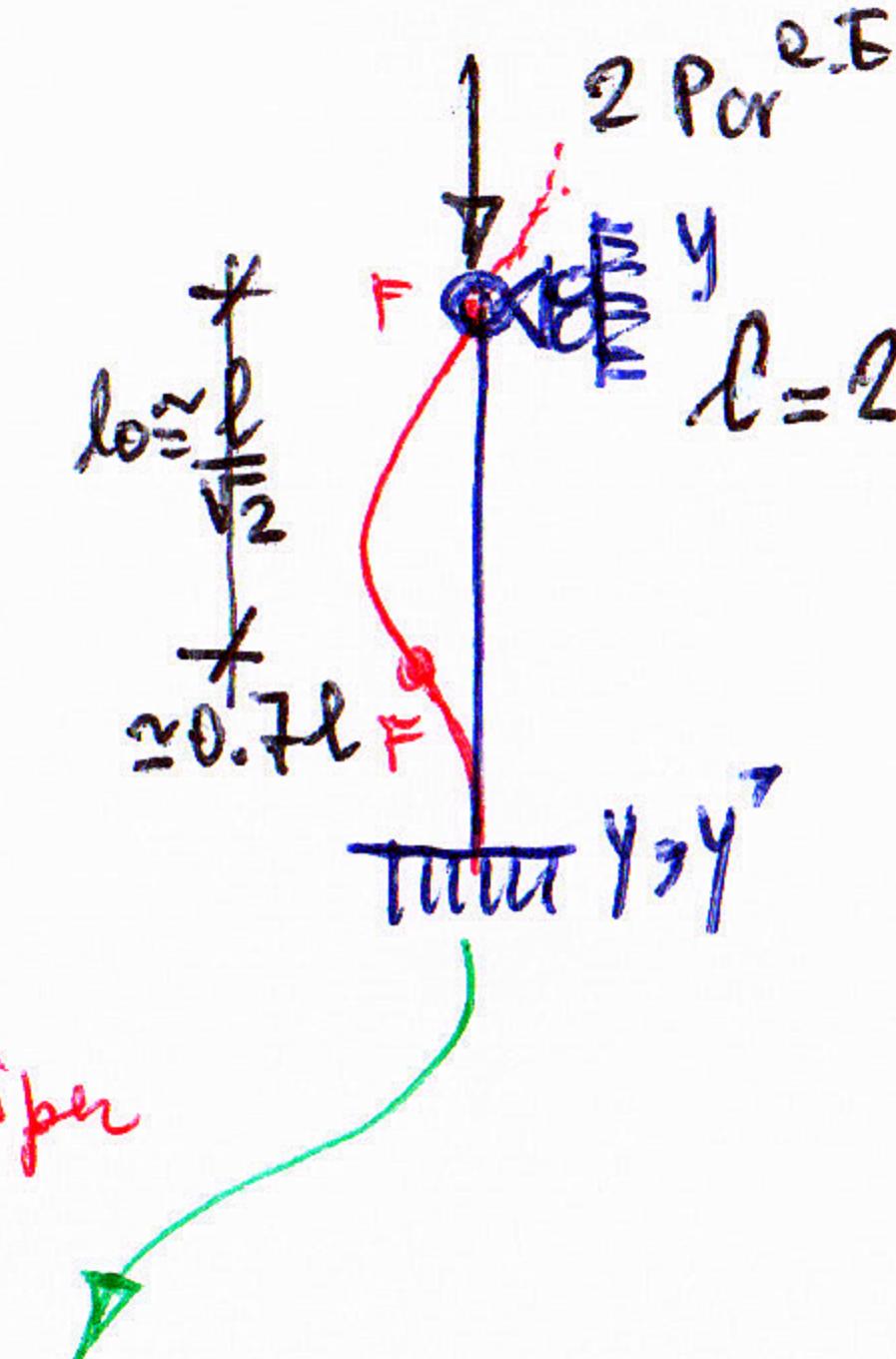
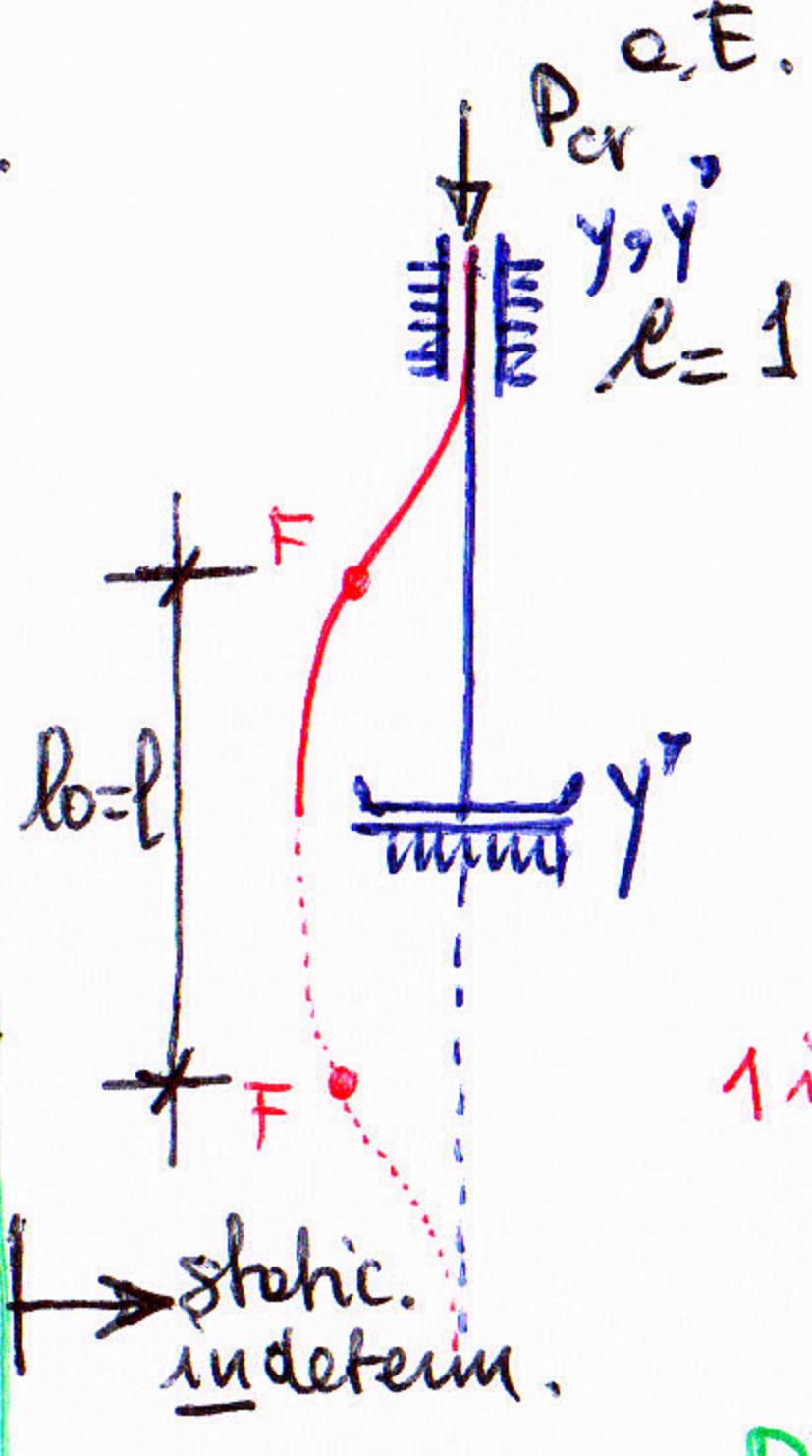
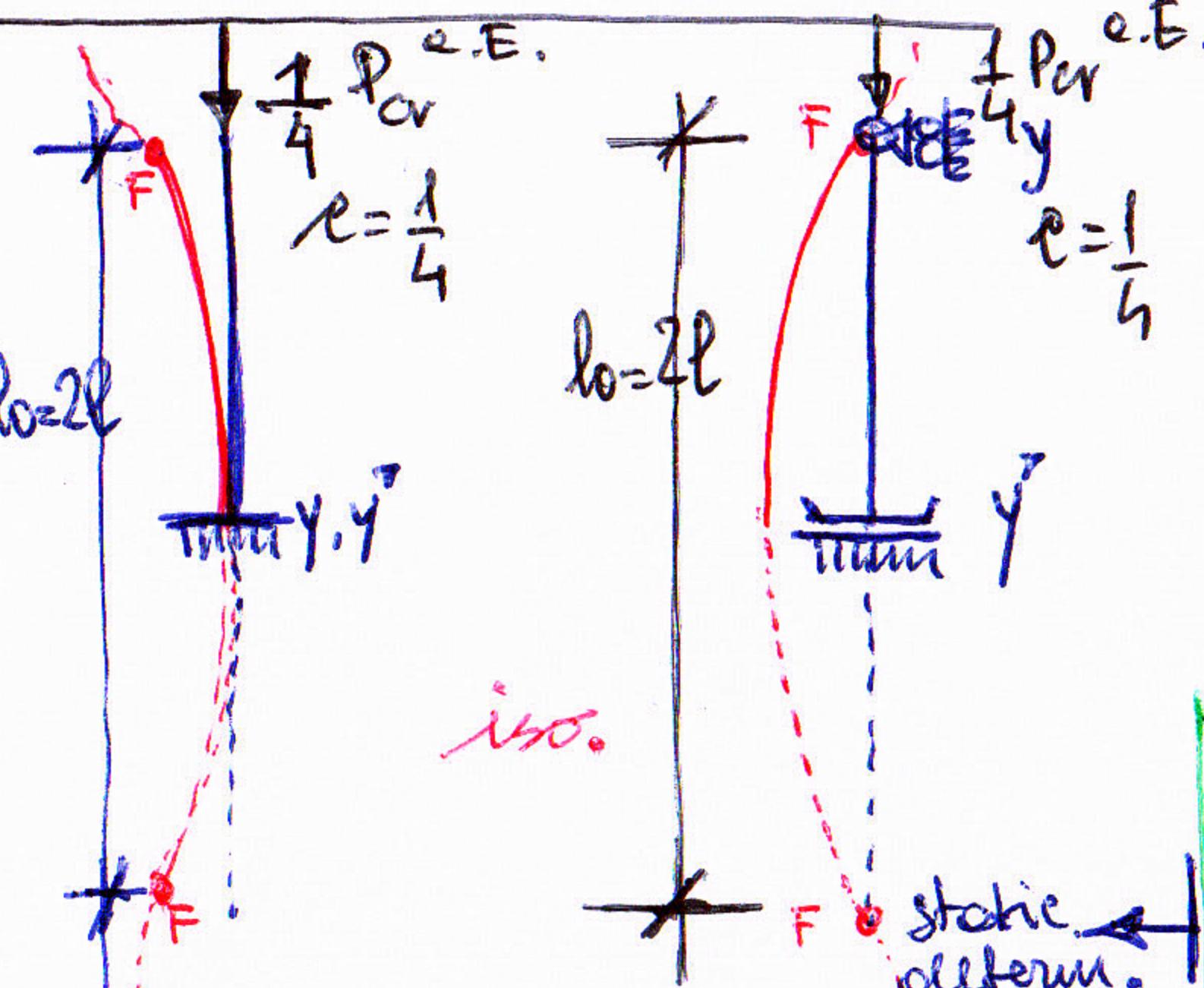
\Rightarrow

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$

24^a Lec. FDIS

Altre condizioni di vincolo

a.E. $P_{cr} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ ASTA DI EULERO
 generalizzazione: $P_{cr}^E = c \cdot \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \frac{\pi^2 E J}{l_0^2}$
 l_0 : lunghezza di libere inflessione
 c: coefficiente di vincolo
 $l_0 = \frac{l}{\sqrt{c}}$; $c = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2$

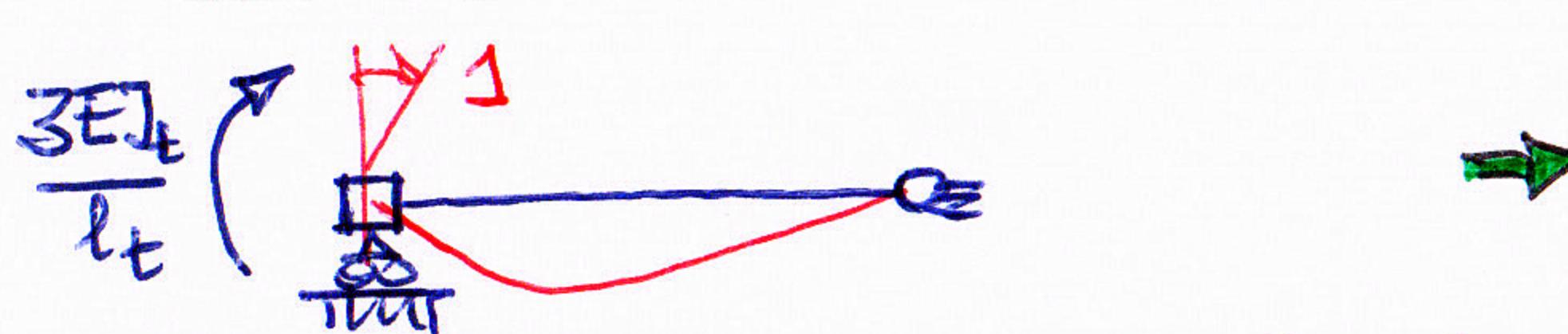


• Apparire di EJ e l (dati caratteristici dell'asta) il P_{cr}^E varia al variare delle c.c. su y e y'.
 $\frac{1}{4} \leq c \leq 4$ con P_{cr}^E crescente per f.d.v aggiuntivi a bloccare restrinzione le deformazioni critiche rispetto alle conf. di vertice dei nodi.

Telai (a nodi fissi)

$EJ_i \rightarrow \infty$: asta assialmente rigide

Rigidesse flessionale delle trave condensabile in molla rotazionale:



$$K = \frac{M}{\theta} = \frac{3EJ_t}{l^2}$$

μ coefficiente di cedevolezza delle molle (da rapporto di rigidesse trave/colonna)

$$K = \frac{3EJ_t}{l^2} \frac{EJ_c}{l} \frac{l_c}{EJ_c} = \frac{1}{3} \frac{EJ_t}{l_c} \frac{l_c}{EJ_t} = \frac{1}{3} \frac{EJ_t}{l_c} = \frac{1}{3} \frac{EJ_c}{l_c} \mu$$

FORMULA DI NEWMARK (1949)

$K_t = \frac{1}{\mu} \frac{EJ}{l}$
 asta di Euler
 generalizzata con vincoli elasticici alle estremità rotazionali
 $K_0 = \frac{1}{\mu_0} \frac{EJ}{l}$

$$P_{cr}^N = c_N \frac{\pi^2 E J}{l^2} \text{ con}$$

$$c_N = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_e)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_e)}$$

Formule esatte per casi particolari

es. $\mu_i \rightarrow 0$ $c_N = 4$
 $\mu_i \rightarrow \infty$ $c_N = 1$ (asta di Euler)

In generale formula ben approssimata
 $1 \leq c_N \leq 4$ (err. < 4%)

$K = 3EJ_t = \frac{1}{l^2} \frac{EJ_c}{l_c}$
 $K \rightarrow \infty$ $\mu \rightarrow 0$
 $2 \leq c \leq 4$
 $2P_{cr} \leq P_{cr} \leq 4P_{cr}$
 $0.7l > l_0 > 0.5l$

Nell'esempio sopra la f. di Newmark fornisce:
 $\mu_0 \rightarrow 0$, $\mu_e \rightarrow \mu$

$$c_N = 2 \frac{0.4 + \mu}{0.2 + \mu}$$

Quindi, per

$$\frac{EJ_t}{l^2} = \frac{EJ_c}{l_c}$$

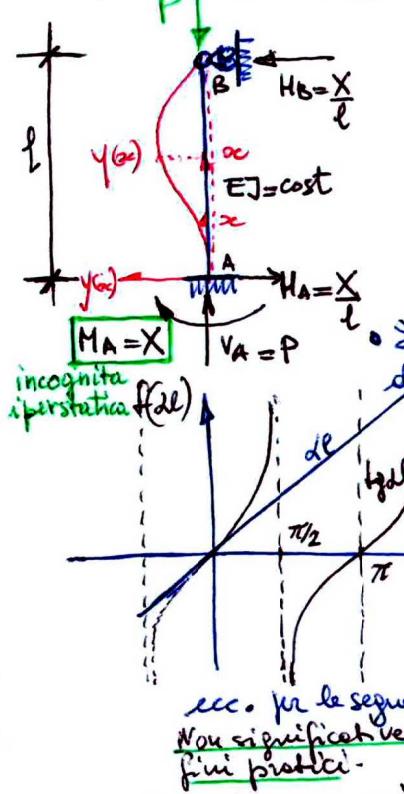
$$P_{cr}^E = 2.75 \frac{\pi^2 E J}{l^2}$$

Se ad es. $\frac{EJ_t}{l^2} = \frac{EJ_c}{l_c}$ e $\mu = \frac{1}{3}$

$$c_N = 2 \cdot \frac{0.4 + 1/3}{0.2 + 1/3} = 2 \cdot \frac{2.2}{1.6} = 2.75$$

orizzi@unibp.it

Soluzione di P_{cr} per l'asta iperstatica appoggio-microastro



• Eq. di differenziale delle LE (con equil. nelle conf. in deformata): $EJy''(x) = M(x) = -Py(x) + \frac{X}{l}(l-x)$

$$EJy'' + Py = \frac{X}{l}(l-x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y + \frac{P}{EJ}x = \frac{X}{l}(1-\frac{x}{l})$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y + \frac{P}{EJ}x = \frac{X}{l}(1-\frac{x}{l}) \Rightarrow P = \frac{d^2}{dx^2}\frac{X}{l}$$

$$\det D = -1 \cdot \sin(\frac{\lambda l}{2}) + \frac{1}{2} \cos(\frac{\lambda l}{2}) = 0 \Rightarrow \lambda l = t g(\frac{\lambda l}{2})$$

3.142 h. 712 ep. n. trascendente da risolvere numericamente

• Prima soluz. fra $\pi/2$ e $3\pi/2$ da risolvere numericamente

$\lambda l = \arctan(\lambda l) + \pi$ Soluz. iterative

$$\lambda l = 4.493 = 1.431\pi$$

$$\lambda l^2 = 20.19 = 2.046\pi^2 \approx 2\pi^2$$

$$P_{cr} = 2.046\pi^2 EJ \approx \pi^2 EJ \approx 2\pi^2 EJ$$

$$\frac{l^2}{l^2} = \lambda l^2 \left(\frac{l}{\sqrt{2.046}}\right)^2$$

$$\frac{l^2}{l^2} = \lambda l^2 \left(\frac{l}{\sqrt{2.046}}\right)^2$$

$$\text{con } l_0 = 0.699l \approx 0.7l$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2}}l$$

$$\text{con } l_0 = 1.131\pi \text{ (Barbitr.)}$$

$$\text{ecc. per le seguenti. Non significative se fini pratici.}$$

$$\lambda l = 7.725, \lambda l^2 = 59.67$$

$$= 2.459\pi = 6.046\pi^2$$

• Condizioni al contorno: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$ (e.g. di congruenza)

int. gen. omog. esse.

int. part. (lineare in x , quindi con $y''(x) = 0$; soddisfa l'equazione di partente).

• Imposizione a.c.

$$y(0) = 0 \Rightarrow B + \frac{1}{2\lambda l^2} \bar{X} = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha A - \frac{1}{2\lambda l^2} \bar{X} = 0 \cdot l \Rightarrow$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow A \sin(\lambda l) + B \cos(\lambda l) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\lambda l^2 \\ dl & 0 & -1/\lambda l^2 \\ \sin(\lambda l) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \bar{X} \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{X} = 0$$

$$\bar{X} = -\frac{1}{\lambda l^2} B$$

$$A = \frac{\bar{X}}{\lambda l^3} = -\frac{B}{\lambda l^3}$$

$$\left(\frac{A}{B} = -\frac{1}{\lambda l^3}\right)$$

$$\bullet \text{Solu. (ave det } D=0\text{)} \quad \bar{X} = -\frac{1}{\lambda l^2} B$$

$$A = \frac{\bar{X}}{\lambda l^3} = -\frac{B}{\lambda l^3}$$

$$\left(\frac{A}{B} = -\frac{1}{\lambda l^3}\right)$$

$$\bullet \text{Deformata critica:}$$

$$y(x) = B \left[-\frac{1}{2} \sin(\lambda l x) + \cos(\lambda l x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right]$$

$$\text{con } l_0 = 1.131\pi \text{ (Barbitr.)}$$

• Verifica di STABILITÀ (vs. Verifica di resistenza: $\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_0$ oppure $P \leq \sigma_0 A$; σ_0 : sforzo ammissibile in compressione).

- Da operarsi per elementi "snelli" (ove può risultare più restrittiva della verifica di resistenza)

$$\frac{P}{A} < \frac{P_{cr}^E}{A} \Rightarrow \sigma < \sigma_{cr}^E = \frac{\pi^2 E J}{l^2 A} \quad \text{con } J = J_{min} = \frac{r^2 A}{4}$$

$$= \frac{\pi^2 E r^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

andamento in campo elastoflessivo (Engesser, Shantley)

• Ierbole di Euler $\sigma_{cr}^E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

• Tratto elastico lineare λ_{lim}

• Fattore di amplificazione del carico λ

• Verifiche di stabilità: $\lambda \geq \lambda_{lim}$ Verifica di stabilità

N.B. $\sigma_{cr}^E \sim \text{lin. con } E$
 $\sim 1/\lambda^2$

Raggio gyroscopio d'inerzia (min.) della sezione trasv.
snellotto: parametro geometrico che contiene informazioni su sezione trasversale e lunghezza, e.c.

• Al limite di proporzionalità della legge $\sigma - \epsilon$:

$$\sigma_p = \sigma_{cr}^E (\lambda_{lim}) = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{lim}^2} \Rightarrow \lambda_{lim}^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} \Rightarrow \lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

• Verifica di stabilità in termini di verifica di resistenza (METODO OMEGA)

$$\sigma < \frac{\sigma_{cr}^E \cdot \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0}{\omega} \Rightarrow \omega \sigma < \sigma_0 \Leftrightarrow \omega P < \sigma_0$$

con $\omega = \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^E} = \frac{P_0}{P_E} = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{\sigma_0}{E}$ param. di materiale

(coeff. ω in genere tabellati per varie tipologie d'asta e di materiale)

24a/2