

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO**  
**FACOLTÀ DI INGEGNERIA, DALMINE**

**INSEGNAMENTO: COMPLEMENTI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI (5 CFU)**  
**CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA: INGEGNERIA EDILE, INGEGNERIA MECCANICA**  
**DOCENTE: PROF. EGIDIO RIZZI**

**INDICE DELLE LEZIONI**

LEZIONI	N. ORE	ARGOMENTO	N. ORE PROGR.
Lez. 01	1	Introduzione al corso. Programma. Parte I – Strutture; Parte II – Solidi. Modalità d'esame. <u>Parte I – Strutture</u> Analisi Cinematica. Labilità. Determinazione e indeterminazione cinematica. CN di non labilità (determinazione statica). Grado di labilità L.	01
"	1	Esempi di labilità (per spostamenti finiti e atti di moto). Approcci in AC: (1) sequenza di montaggio di schemi elementari; (2) approccio geometrico; (3) approccio analitico. Rappresentazione di atto di moto (piano). Vincolo di rigidità. Sovrapposizione (somma) di rotazioni rigide infinitesime.	02
Lez. 02	1	Atto di moto piano: rappresentazione analitica e geometrica, con spostata e mappe di componenti di spostamento orizzontale e verticale. Casi con centri impropri e loro proiezione.	03
"	1	Ruolo cinematico della biella e del carrello per sovrapposizione di rotazioni rigide infinitesime. Catene cinematiche. I e II Teorema sulle catene cinematiche. Enunciato quale CN di labilità. Casi degeneri con CIR coincidenti.	04
Lez. 03	1	Applicazione del I e II Teorema sulle catene cinematica. Computo del numero di doppiette, di triplete e di CIR. Numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n secondo il calcolo combinatorio. Procedura di AC geometrica con applicazione dei due teoremi. Esempi di AC geometrica. Doppio arco a tre cerniere con parte non labile e parte labile; spostata e mappe di spostamento.	05
"	1	Ricostruzione della spostata di coppie di aste per continuità sullo spostamento del CIR relativo. Esempio di pseudo-quadrilatero articolato con gdv assoluto spostato. Analisi completa e con condensazione cinematica della biella.	06

Lez. 04	1	Esempio simile, con gdv relativo spostato e conclusione di non labilità causa non allineamento dei potenziali CIR relativi. Spostata di tentativo incompatibile con vincolo carrello interno. Esempio di tracciamento di spostate e di mappe degli spostamenti orizzontali e verticali (di un sistema con tre aste).	07
"	1	Analisi cinematica analitica. Esempio introduttivo di asta inclinata cerniera-carrello avente asse del carrello con inclinazione variabile. Approccio completo con eliminazione di tutti i vincoli. Sistema di congruenza. Matrice di congruenza. Condizione di labilità da singolarità della matrice quadrata ottenuta. Sistema di congruenza ridotto secondo schema ad albero.	08
Lez. 05	1	Analisi cinematica analitica. Formalizzazione generale con illustrazione di esempio di arco a tre cerniere allineate. Sistema di congruenza completo. Compilazione della matrice di congruenza C. Proprietà algebriche di C e del sistema di congruenza. Grado di labilità o grado di indeterminazione cinematica. Classificazione. Sistemi determinati e indeterminati.	09
"	1	Analisi con schema ad albero. Sistema di congruenza ridotto. Procedura generale di AC analitica con illustrazione delle varie fasi tramite esempio con schema ad albero alternativo al precedente. Modifica della matrice C per arco a tre cerniere non allineate ottenuto da variazione del precedente.	10
Lez. 06	1	Analisi statica e dualità statica/cinematica. Esempio illustrativo di portale a tre cerniere non allineate. Sistema di equilibrio. Matrice di equilibrio E. Proprietà di dualità (trasposizione, $E=C^T$ ) per ispezione. Analisi da schema ad albero e sistema di equilibrio ridotto. Soluzione per l'esempio isostatico considerato, con calcolo di tutte le RV.	11
"	1	Proprietà algebriche del sistema di equilibrio. CNS di esistenza della soluzione (Th. di Rouché-Capelli). Grado di indeterminazione statica o di iperstaticità. Relazione tra i gradi di indeterminazione, statica e cinematica. Casistica e classificazione delle strutture, con esempi. Strutture isostatiche e iperstatiche.	12
Lez. 07	1	Principio dei Lavori Virtuali (PLV). Ponte tra cinematica e statica. Enunciato quale CN di equilibrio e di congruenza. Manifestazioni del PLV: Principio degli Spostamenti Virtuali (CS di equilibrio); Principio delle Forze Virtuali (CS di congruenza). Deformazioni elementari elastiche e anelastiche (termiche). Dualità via PSV con dimostrazione della relazione $E=C^T$ .	13
"	1	Calcolo di componenti di Reazioni Vincolari e di Azioni Interne mediante il PSV per i sistemi articolati di corpi rigidi ( $L_e = 0$ ). Esempi riferiti al portale a tre cerniere già considerato in precedenza per l'analisi cinematica e statica.	14
Lez. 08	1	Soluzione di strutture iperstatiche con vincoli cedevoli elasticamente ed anelasticamente e con effetti termici. Molle elastiche lineari. Ruolo degli effetti termici in strutture isostatiche ed iperstatiche. Esempio di riferimento con telaio trave-colonna e molla rotazionale con rigidità variabile. Scelta dell'incognita iperstatica X. Calcolo delle RV(X).	15
"	1	Soluzione tramite il PLV (PFV). Scrittura indiretta della condizione di congruenza tramite il PLV. Discussione sulla soluzione ottenuta secondo il valore della rigidità della molla rotazionale. Calcolo di componenti di spostamento col PLV.	16

Lez. 09	1	Soluzione completa dell'esercizio precedente mediante il metodo della Linea Elastica. Richiami sul metodo della LE. Novità inerenti deformazioni termiche e cedimenti elastici ed anelastici.	17
"	1	Calcolo di spostamenti e rotazioni nodali. Rappresentazione della deformata qualitativa. Condizioni al contorno in presenza di molle relative, elongazionali e rotazionali.	18
Lez. 10	1	Travature reticolari. Generalità. Ipotesi. Tipologie. Esempi. Tiranti e puntoni. Diagonali tesi o compressi. CN di non labilità. Analisi cinematica.	19
"	1	Analisi statica. Esempio di calcolo di travatura reticolare isostatica mediante: (a) Metodo degli equilibri nodali o dei nodi; (b) Metodo delle sezioni o di Ritter.	20
Lez. 11	1	Travatura reticolare iperstatica soggetta a dilatazione termica. Procedimento risolutivo generale con scrittura del PLV. Soluzione della travatura fittizia con metodo dei nodi e con metodo delle sezioni. Determinazione dell'incognita iperstatica.	21
"	1	Calcolo di componenti di spostamento dei nodi della travatura reticolare. Azione interne in aste curve. Esempio di arco circolare con carico concentrato in chiave. Andamenti funzionali delle azioni interne e loro rappresentazione nei diagrammi di azione interna.	22
Lez. 12	1	Azioni interne in aste curve: equazioni indefinite di equilibrio del concio di trave curvilineo. Esempio di arco circolare con pressione uniforme.	23
"	1	Esempio di arco circolare con carico uniformemente ripartito. Andamenti funzionali delle azioni interne e loro rappresentazione nei diagrammi di azione interna.	24
Lez. 13	1	<u>Parte II – Solidi</u> Statica dei continui. Vettore e tensore sforzo di Cauchy. Relazione di Cauchy. Significato fisico delle componenti di sforzo. Legge di trasformazione delle componenti di un tensore doppio. Equazioni indefinite di equilibrio tramite teorema della divergenza. Tensioni principali. Problema agli autovalori. Invarianti di sforzo. Invarianza dell'operatore traccia al variare del sistema di riferimento.	25
"	1	Componenti di sforzo volumetrica e deviatorica. Rappresentazione grafica nello spazio delle tensioni principali. Problemi agli autovalori per le componenti volumetrica e deviatorica. Equazione caratteristica del deviatore. Invarianti del deviatore.	26
Lez. 14	1	Relazioni tra invarianti del deviatore e invarianti di sforzo. Soluzione analitica del problema agli autovalori del deviatore. Coordinate di Haigh-Westergaard. Rilevanza di tali coordinate e degli invarianti in meccanica dei materiali (con riferimento alla teoria della plasticità). Cinematica dei continui. Spostamento; traslazione rigida. Deformazione. Ipotesi di piccoli spostamenti e di piccole deformazioni. Tensore gradiente di spostamento. Parte simmetrica ed emisimmetrica: deformazione pura e rotazione rigida infinitesime. Significato fisico delle componenti del tensore delle piccole deformazioni.	27
"	1	Concetto di congruenza interna. Equazioni di compatibilità interna (CN). Scrittura compatta nella forma di de Saint Venant (81 equazioni). Identità di Bianchi. Equivalenza delle 6 equazioni di congruenza a 3 equazioni indipendenti. CS di congruenza per corpi monoconnessi.	28

Lez. 15	1	Problema elastico lineare. Equazioni governanti e condizioni al contorno. Bilancio equazioni/incognite. Legame costitutivo iperelastico. Energia di deformazione ed energia complementare. Legge sforzi/deformazioni per derivazione. Tensori di rigidezza e di cedevolezza. Simmetrie minori e maggiori.	29
"	1	Materiale elastico lineare. Legge costitutiva. Comportamento isotropo con 2 parametri indipendenti. Parametri elastici e loro relazione. Espressione esplicita della legge costitutiva sforzi/deformazioni e deformazioni/sforzi. Disaccoppiamento delle risposte volumetrica e deviatorica. Rappresentazione matriciale, con dettaglio per la matrice di cedevolezza.	30
Lez. 16	1	Materiale ortotropo con 9 parametri. Materiale trasversalmente isotropo con 5 parametri. PLV in meccanica dei continui quale "ponte" tra statica e cinematica. Enunciato della CN di equilibrio e congruenza. Enunciato del PFV quale CN di congruenza. Enunciato del PSV quale CN di equilibrio. Dimostrazione del PLV (CN di equilibrio e congruenza) tramite applicazione del teorema della divergenza.	31
"	1	Proprietà del problema elastico lineare. Buona posizione. Principio di Sovrapponibilità degli Effetti (PSE). Unicità della soluzione (Teorema di Kirchhoff). Dimostrazione (per assurdo). Soluzione del problema elastico: metodi e approcci risolutivi, diretti, inversi, semi-inversi. Menzione all'approccio numerico in meccanica computazionale (in particolare per Elementi Finiti).	32
Lez. 17	1	Problema di de Saint Venant (DSV). Ipotesi e definizioni. Postulato di DSV. Sistema di riferimento principale. Definizione delle risultanti agenti sulle basi del prisma e tali da formare un sistema di forze autoequilibrato. Approccio semi-inverso agli sforzi. Ipotesi fondamentale di DSV. Imposizione dell'equilibrio in sede indefinita e al contorno (sulla superficie laterale scarica).	33
"	1	Rispetto del legame costitutivo. Imposizione delle equazioni di compatibilità interna. Sforzo normale lineare in x,y,z. Espressione finale dello sforzo normale con identificazione dei coefficienti in funzione delle azioni presenti. Problema differenziale risultante per le componenti di sforzo tangenziale $\tau_{zx}$ , $\tau_{zy}$ (equazione di equilibrio, equazione di congruenza e condizione al contorno).	34
Lez. 18	1	Torsione. Equazioni governanti. Approccio agli spostamenti. Ipotesi sul campo di spostamenti. Conseguenti campi di deformazione e di sforzo. Problema di Neumann-Dini per l'equazione di Laplace. Scritture differenti della condizione al contorno di Neumann-Dini. Ingobbamento nullo in sezione circolare.	35
"	1	Equivalenza statica del campo di sforzo determinato col momento torcente applicato. Momento d'inerzia torsionale. Rigidezza torsionale. Fattore di torsione.	36
Lez. 19	1	Centro di torsione. Funzione di ingobbamento riferita al centro di torsione. Annullamento delle rotazioni medie fuori piano. Coordinate del centro di torsione.	37
"	1	Torsione: approccio agli sforzi. Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Quadro sinottico dei due approcci (agli spostamenti ed agli sforzi), con relazioni mutue. Approcci risolutivi al problema della torsione: soluzione analitica esatta; soluzione approssimata; soluzione numerica.	38

Lez. 20	1	Analogie del pb. della torsione con altri fenomeni fisici. Analogia idrodinamica (Lord Kelvin). Equazioni governanti e corrispondenze. Sezione rettangolare: campo di sforzo qualitativo; formule ingegneristiche da soluzione per sviluppi in serie.	39
"	1	Fattore di concentrazione delle tensioni (da analogia idrodinamica). Spigoli sporgenti e rientranti. Raccordo circolare di spigolo a 90° (formula di Trefftz). Analogia della membrana (Ludwig Prandtl). Corrispondenze col problema della torsione. Visualizzazione della funzione di sforzo di Airy tramite spostamento trasversale della membrana.	40
Lez. 21	1	Soluzione analitica del problema della torsione per la sezione ellittica. Campo di sforzo. Inerzia torsionale e fattore di torsione. Stima dell'inerzia torsionale di sezioni compatte secondo sezione ellittica equivalente (formula di DSV). Funzione di ingobbamento. Caso particolare della sezione circolare.	41
"	1	Torsione nei profili rettangolari sottili. Considerazioni da analogie idrodinamica e della membrana. Funzione di sforzo. Momento d'inerzia torsionale. Tensioni tangenziali e $\tau^{\max}$ . Equivalenza del campo tensionale a $Mt/2$ . Funzione di ingobbamento (come limite da risultato per la sezione ellittica). $\tau^{\max}$ a pari momento torcente (per spessore minore) o a pari rotazione (per spessore maggiore).	42
Lez. 22	1	Torsione nei profili sottili aperti. Considerazioni da analogie idrodinamica e della membrana. Composizione di rettangoli infinitesimi $b(s)ds$ . Funzione di sforzo e campo delle tensioni tangenziali. Approssimazioni legate all'assunzione $\tau_{zn} = 0$ . Momento d'inerzia torsionale. Tensione tangenziale massima.	43
"	1	Funzione d'ingobbamento (riferita alla linea media). Area settoriale. Centro di torsione. Profili sottili aperti formati da rettangoli allungati. Caratteristiche geometriche. $\tau_{zs}^{\max}$ e funzione di ingobbamento (lineare a tratti). Profili a stella e loro centro di torsione.	44
Lez. 23	1	Torsione nei profili sottili chiusi (monocellulari). Deduzioni risolutive in base alle analogie idrodinamica e della membrana. Ipotesi caratteristiche della soluzione approssimata. Effetto delle $\tau_{zn}$ , ritenute trascurabili. Formula di Bredt da equivalenza statica. Calcolo dell'inerzia torsionale tramite PLV. Ruolo dell'area racchiusa all'interno della linea media.	45
"	1	Funzione di ingobbamento per integrazione della relazione differenziale già considerata per i profili sottili aperti (qui con $\tau_{zs} \neq 0$ ). Caso dei profili scatolari con ingobbamento lineare a tratti. Confronto completo tra profilo aperto e profilo chiuso, in termini di resistenza e deformabilità.	46
Lez. 24	1	Taglio. Commenti sulla soluzione in forma chiusa. Centro di taglio (CTa). Definizione. Dimostrazione della coincidenza tra centro di taglio e centro di torsione (CTo), tramite PLV. Determinazione del CTa per equivalenza statica. Disaccoppiamento tra effetti taglienti e torcenti. Momento torcente parassita.	47
"	1	Taglio nei profili sottili aperti. Soluzione approssimata di Jourawsky. Ipotesi di $\tau_{zs}$ cost sullo spessore e implicazioni su $\tau_{zn}$ (trascurabile). Derivazione della formula di Jourawsky per equilibrio alla traslazione in direzione dell'asse del prisma (con ragionamento per la determinazione del segno reale delle $\tau_{zs}$ ).	48

<b>Lez. 25</b>	<b>1</b>	<b>Calcolo del centro di taglio per equivalenza statica. Ortogonalità energetica tra tensioni tangenziali a taglio e deformazioni tangenziali a torsione (soluzioni approssimate) nei profili aperti. Momento torcente parassita. Profili aperti formati da rettangoli sottili. Andamento dei flussi delle tensioni tangenziali. Calcolo delle risultanti sui vari tratti, in forma analitica e mediante la Regola di Simpson. Calcolo del centro di taglio.</b>	<b>49</b>
<b>"</b>	<b>1</b>	<b>Profilo a C. Calcolo dettagliato delle caratteristiche geometriche e della posizione del centro di taglio (a sinistra della costola verticale). Profili a stella. Taglio nei profili sottili chiusi (monocellulari): il caso simmetrico.</b>	<b>50</b>