

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

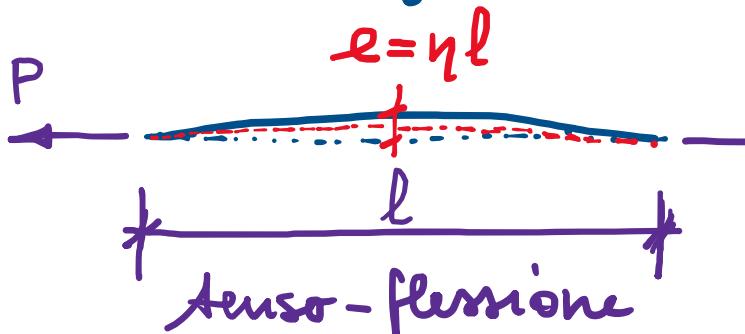
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

Instabilità di sistemi reali (effetto delle imperfezioni)

- Sistemi reali possono generalmente manifestare imperfezioni: astre non perfettamente rettilinee, sezione trasversale non omogenee, materiale con difetti e disomogeneità, carico non perfett. centrato, vincoli cedevoli, ecc.



tensio-flessione



(tende a rittificare)

.... non sensibile

$$\eta = \frac{e}{l} \ll 1$$

$\sim 1\%, 5\%$

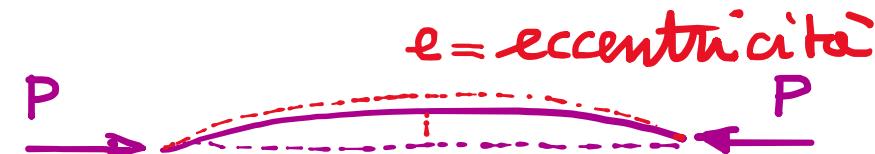
(es. curvatura)

parametro di imperf. geometrica

Sistema reale con

condizione di.....

carico



presso-flessione



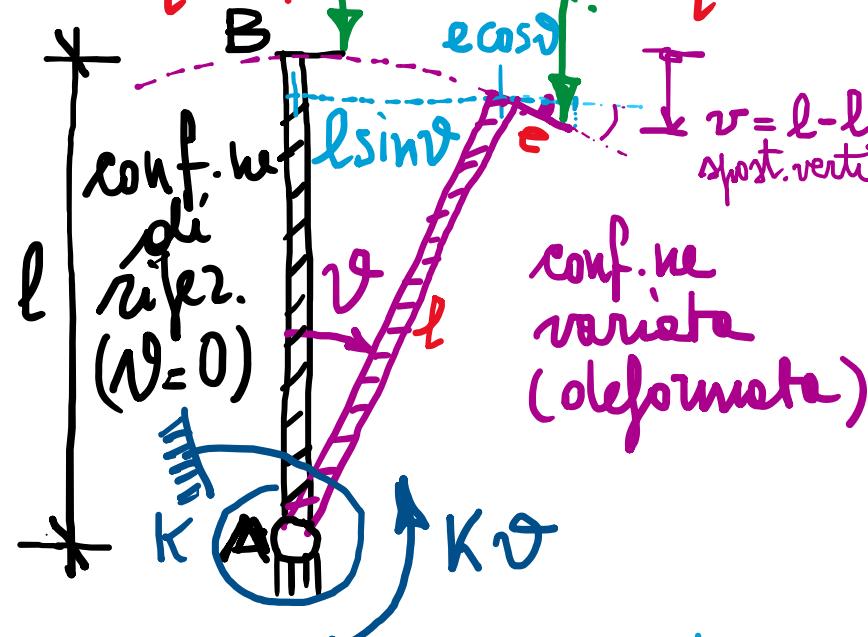
$$M = Pe$$

(tende ad esaltare l'imp.)

..... che può risultare sensibile alle presenze di imperfezioni e condizionare la stabilità

Esempio SDOF con imperfezione (eccentricità del carico di compressione).

$$e = \eta l + \cancel{P > 0} \quad \eta = 5\%$$



$$P = p \frac{K}{l}$$

$P_0 = P_{cr}$

$\underbrace{\qquad}_{p}$ moltiplicatore del carico
(carico/partic.)

$$\eta = 0 \rightarrow \text{sist. ideale}$$

$$p(v) = \frac{v}{\sin v}$$

Approssimazione statico: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate.

$e=0$ sist. ideale

$$P(l \sin \vartheta + e \cos \vartheta) = K \vartheta$$

effetto oleostabilizz. (momento ribaltante) effetto stabilizz. (momento elastico)

N.B. Se $e \neq 0$ ($\eta \neq 0$), $\vartheta = 0$ è conf. ne di equil. solo per $P=0$ ($P_e=0$).

$$\frac{Pl}{K} (\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = \vartheta$$

equazione di equilibrio non-lineare, in ϑ

$$p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

risposta $P-\Delta$ non-lineare
(non-linearità geometrica)

• Applicativo energetico

$$\text{EPT} \quad V(\vartheta) = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - P(l - l \cos \vartheta + e \sin \vartheta)$$

Energia Potenziale Totale $\frac{d}{d\vartheta} V = K > 0$

spost. verticale ϑ ; $e = \eta l$

$$V_e = \epsilon \quad V_f = -L_e \quad = K \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 - \frac{P}{K} (1 - \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta) \right)$$

$$V(\vartheta) = K \left(\frac{1}{2} \vartheta^2 - p (\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) \right) = 0 \quad \begin{matrix} \text{eq. ne non-lineare} \\ \text{in } \vartheta \text{ (lin. in } p) \end{matrix}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}$$

$$V(\vartheta) = K (1 - p (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta))$$

$$\text{nelle conf. in equil.} \quad = K \left(1 - \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta} (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) \right)$$

$$p = \bar{p} \quad = K \left[1 - \vartheta \frac{1 - \eta \tan \vartheta}{\tan \vartheta + \eta} \right]$$

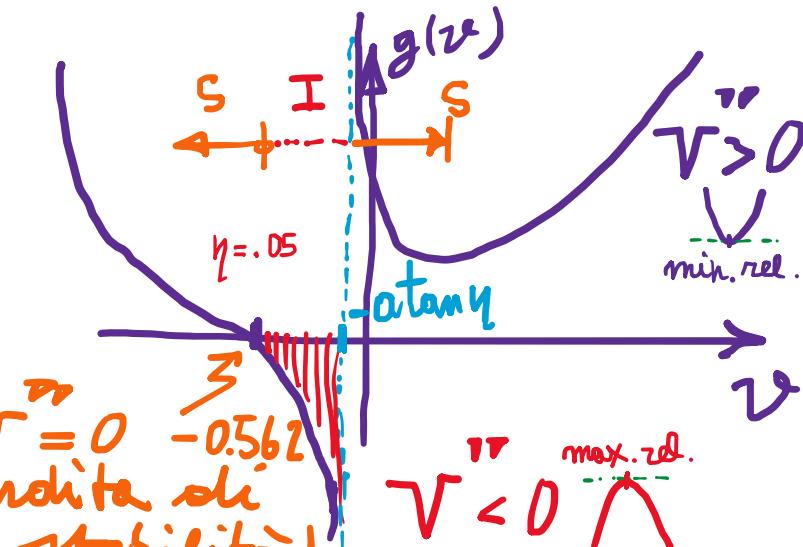
$$\downarrow g(\vartheta)$$

$$V'' = 0 \Rightarrow g(\vartheta) = 0 \Rightarrow \tan \vartheta + \eta = \vartheta (1 - \eta \tan \vartheta)$$

$$(1 + \eta \vartheta) \tan \vartheta = \vartheta - \eta$$

$$p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

conf. in equilibrio



$V'' = 0$ (perdita di stabilità)

Studio del segno di V'' (Th. di Dirichlet, CS di stabilità)

- Anelini in spostamenti "geometricamente piccoli": "quadraticizzazione"

$$V \approx V_2(v) = \frac{1}{2} K \theta^2 - P \left(\ell - \ell \left(\underbrace{1 - \frac{v^2}{2} + \dots}_{\text{cos } v} \right) + e \underbrace{(v + \dots)}_{\eta \ell \sin v} \right) \quad \begin{matrix} \text{di } V \\ \text{opp. x.} \end{matrix}$$

\downarrow

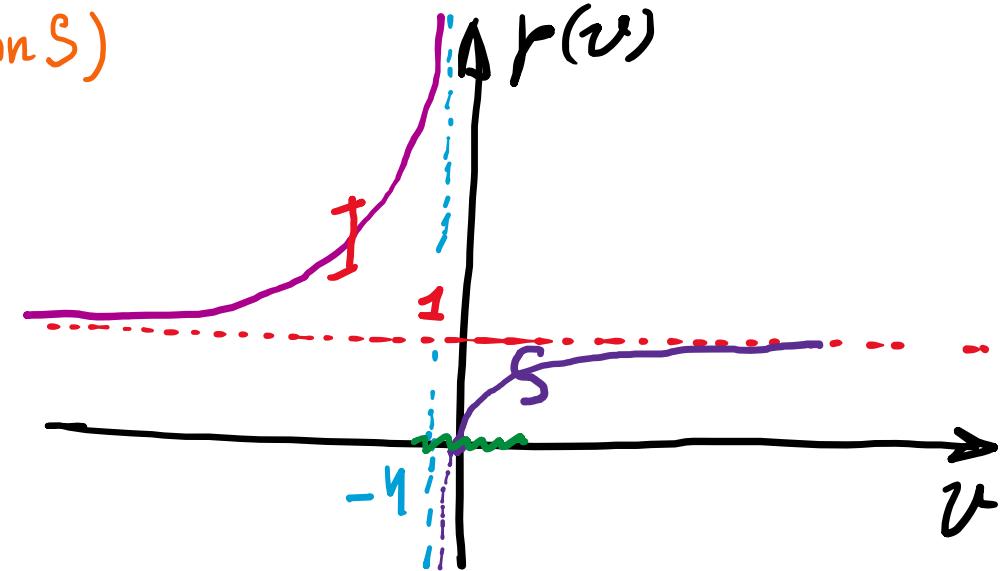
$$\text{al 2° ord.} = \frac{1}{2} K v^2 - P \ell \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) = K \left(\frac{1}{2} v^2 - p \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) \right)$$

$$V_2(v) = K \left(v - p(v + \gamma) \right) = 0 \Rightarrow p(v) = \frac{v}{v + \gamma} \quad \begin{matrix} \text{lin. in } v \\ \text{"linearizzazione"} \\ \text{delle eq. di eq. di equilibrio} \end{matrix}$$

$$V_2''(v) = K \left(1 - p \right) \quad \begin{matrix} \text{cost. in } v \\ > 0 \quad p < 1 \quad S \\ = 0 \quad p = 1 \quad \text{condiz. critica di perdità di stabilità} \\ < 0 \quad p > 1 \quad I \quad (\text{non } S) \end{matrix}$$

Come per anelini di rist.
ideale privo di imperf.

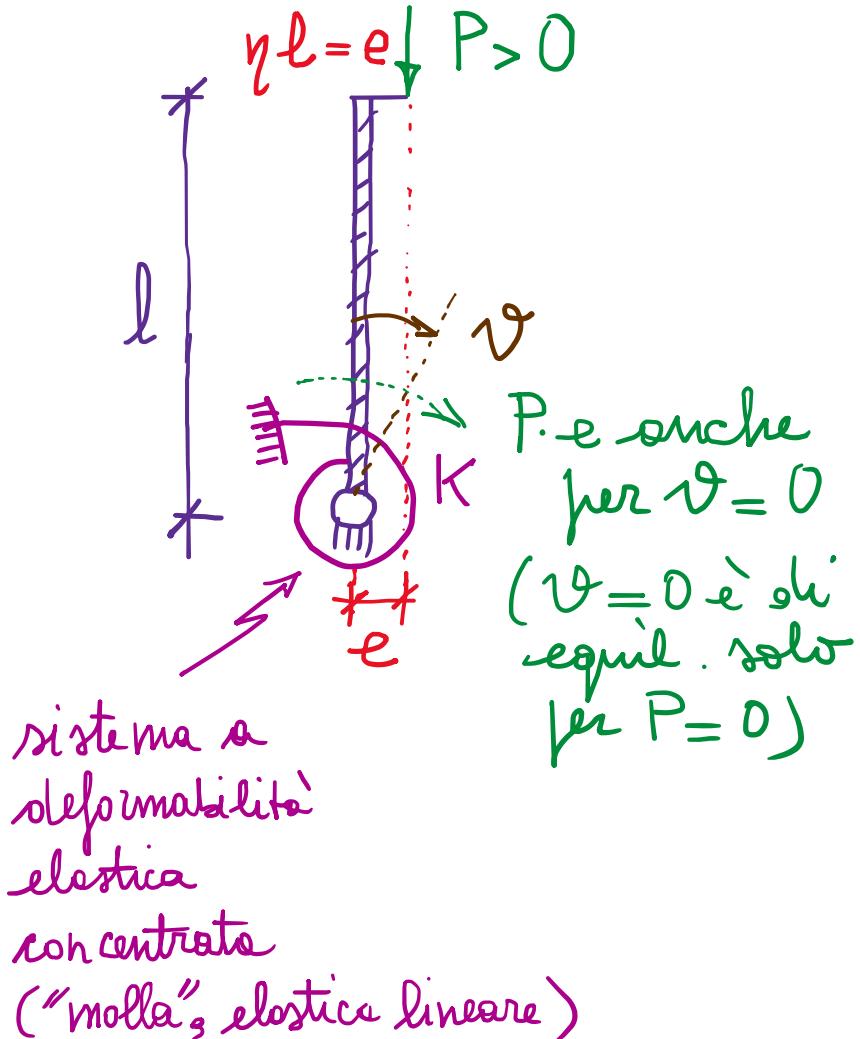
(derivate seconde di V_2 costante,
a dato valore del carico P)



Concetti fondamentali :

- Sistemi ideali: improvvisa perdita di stabilità (della configurazione di equilibrio) per $P = P_{cr}$ (sistema stabile per $P < P_{cr}$) \Rightarrow p.t. di "biforcazione" dei percorsi di equilibrio, alias transizione discontinua stabile/instabile (al crescere del carico P).
- Sistemi reali: dotati di imperfezioni \Rightarrow attesa una transizione continua del sistema al crescere del carico, con deformazione "pendente" della perte dell'imperfezione presente, non appena $P \neq 0$ ($P > 0$), e di entità crescente, al crescere del carico P stesso \Rightarrow assenza di un punto di biforcazione.

- Analisi per esempio SDOF:



- approccio statico: equazione di equilibrio nella configurazione deformata.
- approccio energetico: scrivere dell'EPT V e applicazione delle CS di stabilità (th. di Dirichlet)

[per spostamenti "geometricamente granoli" e "piccoli"]

→ eq. m. di equilibrio linearizzate + EPT "quadraticizzato", $V \approx V_2$

SOMMARIO (Lec. 18)

- Instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) [vs. sistemi ideali: più i di imp.]
 - transitione continua $\xrightarrow{?}$ vs. ramo bifurcati $\xrightarrow{?}$ bifurcazione per $P = P_{cr.}$ del sistema ideale.
- Approccio statico per spost. "geom. grandi" e mappe dei percorsi di equilibrio.
 - validità delle stime di $P_{cr.}$
- " " " " " piccoli" \Rightarrow stabilità asintotica per $P_{cr.}$
 - P_{cr} trovato: trend asintotico di sist. reale resta di r. signif. ingegnerist.
- Approccio energetico, per spost. di entità come sopra (grandi/piccoli).
 - Individua, oltre alle stesse conf. in di equilibrio, le nature $\sqrt{\nu_1}$ $\sqrt{\nu_2}$ stabile o non stabile di esse (stabile per il ramo primario deviato dalla parte dell'imperfezione).

Next step: pb. euleriani di stabilità - Quadro generale ed esempi discreti MDOF.