

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 20

## Esempio 3DOF - Deformate critiche

Eq. ni di equil. (de stat. stell'EPT  $\nabla_2(\mathbf{v})$ ),  $|v_i| \ll 1 \sim v_i^2$

$$(1) \begin{cases} (3-p)v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + (2-p)v_2 - v_3 = 0 \\ -v_2 + (1-\frac{p}{2})v_3 = 0 \end{cases}$$

carichi critici:  $\det(K) = 0 \Rightarrow p_i^*$

Deformate critiche associate ai  $p_i^*$   $\Rightarrow \delta q_i^* = q_i^* - q_0^*$

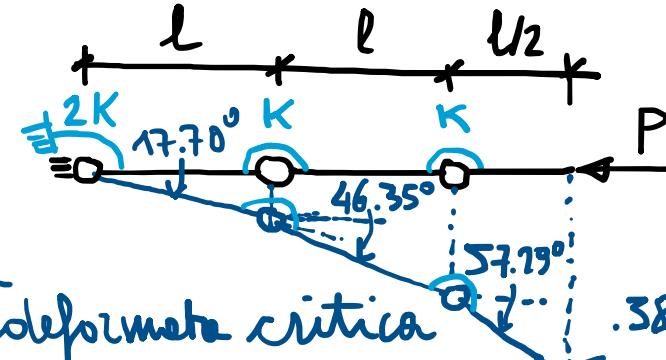
$$\text{Dalla (1)} \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{3-p} = \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} v_3$$

$$\text{Dalla (3)} \Rightarrow v_2 = (1-\frac{p}{2})v_3 \div \frac{2-p}{2} v_3$$

• 1° carico critico ( $p_1^* = .3820$ ):  $v_1 = .3090 \text{ rad} = 17.70^\circ$

$$v_2 = .8090 \text{ rad} = 46.35^\circ$$

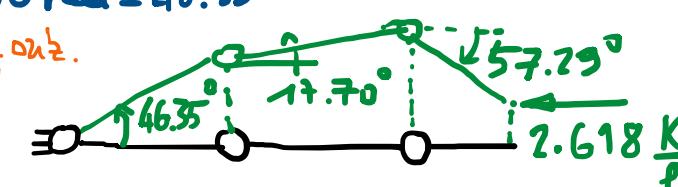
N.B.  $\sin \theta_i \approx 0$   
al 1° ord.  
( $\cos \theta_i \approx 1$ )  
 $\approx \sin \theta_i \approx v_i$



1° deformata critica

$$.3820 \frac{K}{l} = P_{cr,E}$$

2° def. critica



2° def. critica

$$q_i = \dot{v}_i$$

$$|v_i| \ll 1 \sim v_i^2$$

$$P = p \frac{K}{l}$$

$$K_E \quad K_G$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] - p \left[ \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Alternativamente:  $K \delta q_i = 0$

$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*$$

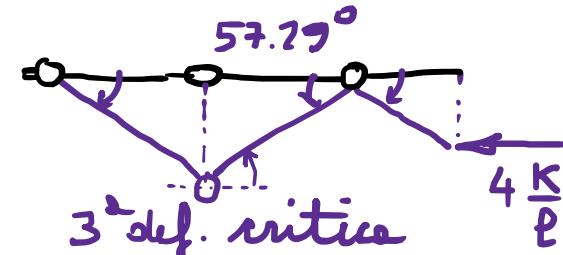
pb. agli autovetori generalizzati

$p_i^*$  autovetori  
 $\delta q_i^*$  autovettori

note a mani di cost. arbitraria

$$\hookrightarrow v_3 = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ$$

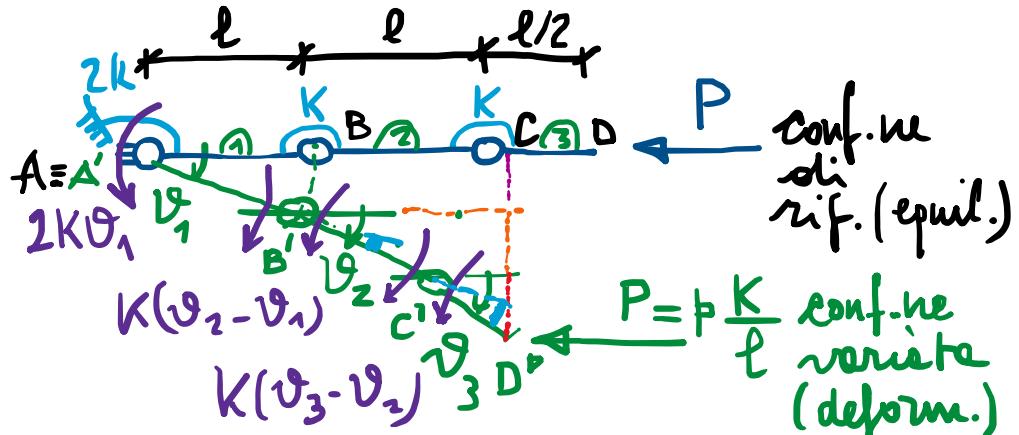
• Analogam. per  $p_2^*$  e  $p_3^*$ :



3° def. critica

$$4 \frac{K}{l}$$

Approccio statico: scritture dirette delle eq.m. di equilibrio varietà (nelle conf. he def.)



conf. ne  
di rif. (equil.)

conf. ne  
varietà  
(deform.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_C^3 = 0 \Rightarrow K(\vartheta_3 - \vartheta_2) - P \frac{l}{2} \sin \vartheta_3 = 0 \\ \sum M_B^{3+2} = 0 \Rightarrow K(\vartheta_2 - \vartheta_1) - P \left( \frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 \right) = 0 \\ \sum M_A^{3+2+1} = 0 \Rightarrow 2K\dot{\vartheta}_1 - P \left( \frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 + l \sin \vartheta_1 \right) = 0 \end{array} \right.$$

eq.m. di equil. non-lineari (non-lin. geometrica)

app. energet.

$\leftrightarrow$  3 eq.

$\leftrightarrow$  2 + 3 eq.

$\leftrightarrow$  1 + 2 + 3 eq.

Spost. "geometricamente piccoli"  $|\vartheta_i| \ll 1 \Rightarrow \sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$ : eq.m. linearizzate

conf. ne di rif. equil.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vartheta}_1 - \vartheta_2 + (1 - \frac{p}{2}) \vartheta_3 = 0 \\ -\dot{\vartheta}_1 + (1-p)\vartheta_2 - \frac{p}{2} \vartheta_3 = 0 \\ (2-p)\vartheta_1 - p\vartheta_2 - \frac{p}{2}\vartheta_3 = 0 \end{array} \right.$$

N.B.: bracci di leva di P  
non nulli al 1° ordine  
( $\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$ )

$$\tilde{K} \delta q = 0 \Rightarrow \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

non simm.

Carichi critici:

$$- \det(\tilde{K}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$- \tilde{K}_E \delta q_{L_i}^* = p_i^* \tilde{K}_G \delta q_{L_i}^* \Rightarrow$$

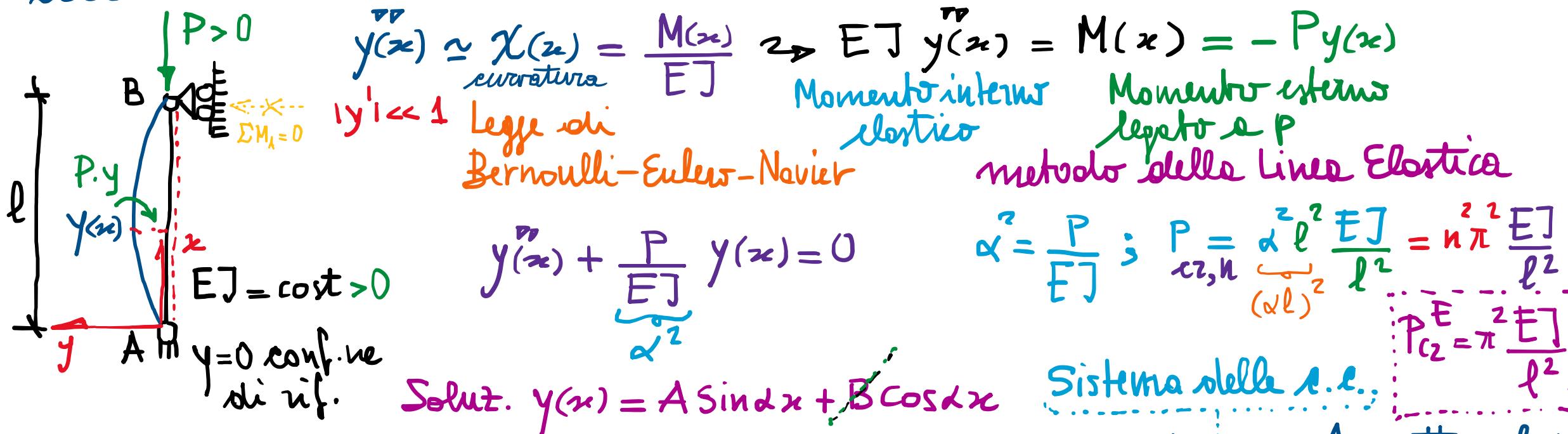
autovel.  
autovett.

coh  
identici  
risultati

N.B.  $\tilde{K}$  de appross statico può differire  
da  $K$  de appross energetico (sim.)  
ma con le stesse proprietà  
algebraiche sottostanti.

# Sistemi continui (aste semplicemente compresse deformabili elasticamente flessionali.)

Aste di Euler (1750) - Approssimazione statica  
nelle confine def.



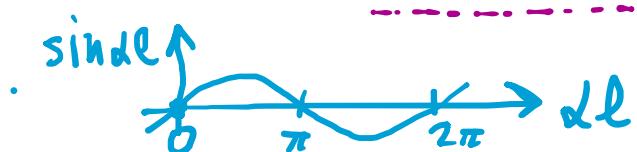
a.e. (scrittura e impostazione)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ y(l) = 0 \rightarrow A \sin(\alpha l) + B \cos(\alpha l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(A \sin(\alpha l)) A = 0 \quad \begin{cases} \sin(\alpha l) \neq 0 \rightarrow A = 0 \quad (y \equiv 0) \\ \sin(\alpha l) = 0 \rightarrow A \text{ arb.} \end{cases}$$

$$\alpha l = n\pi; n = 1, 2, 3, \dots$$

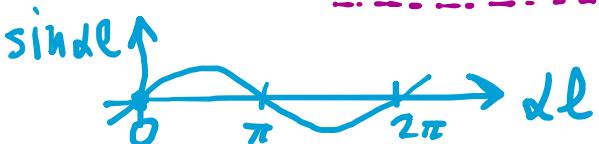
$$\begin{bmatrix} D & X \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ \sin(\alpha l) & \cos(\alpha l) \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$



Ammette soluz. non banali

$X \neq 0$   
se  $D$  sing.

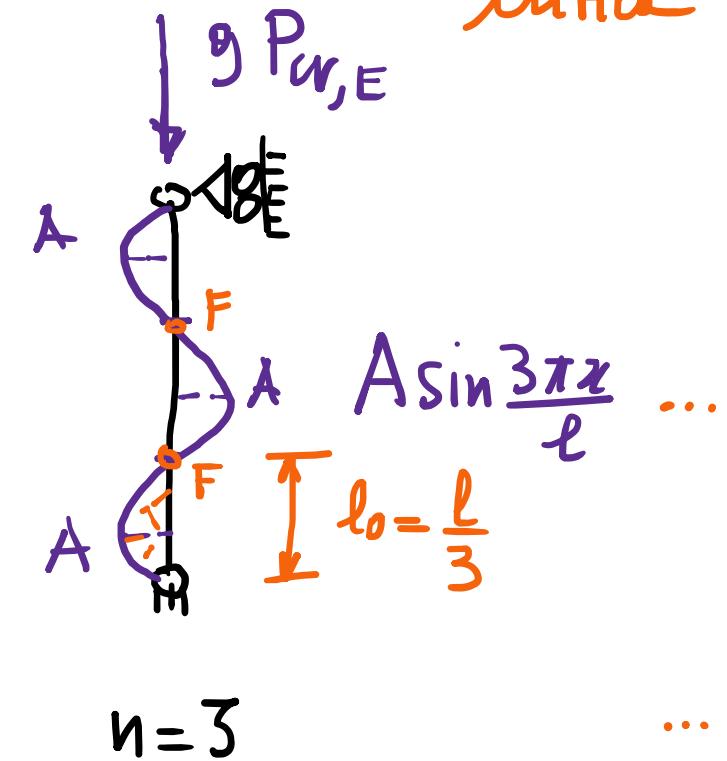
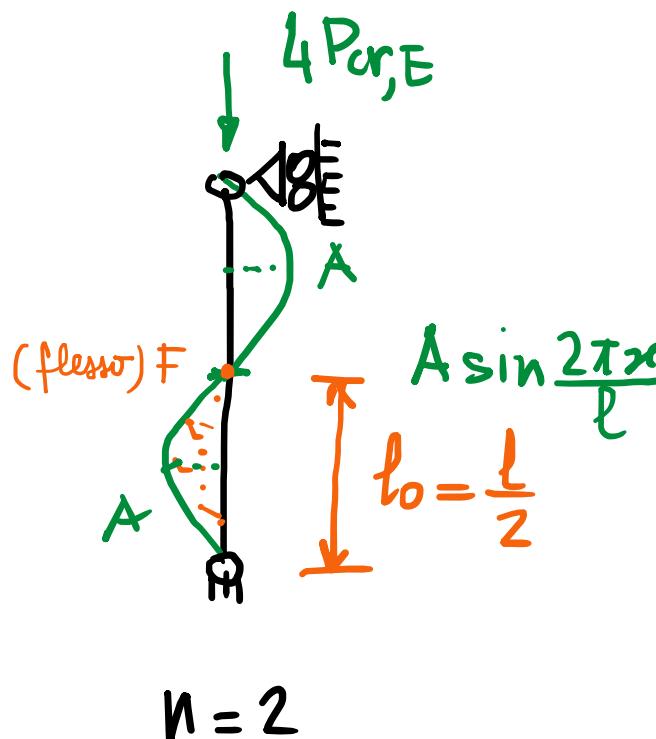
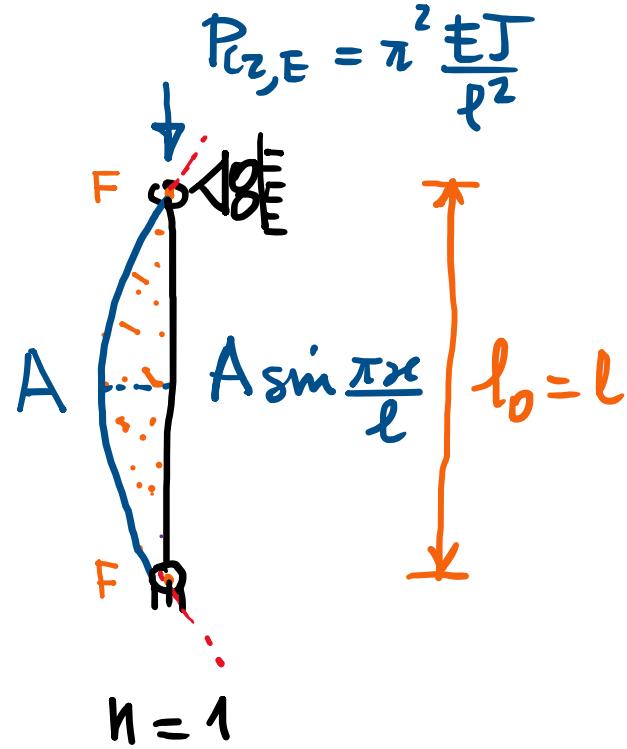
$$\det D = -\sin(\alpha l) = 0$$



carichi critici

$$P_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 E J}{l^2} = \pi^2 \frac{E J}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} = \pi^2 \frac{E J}{l_{0,n}^2}$$

$\approx 10$



- Successive generalizzazioni per altre condizioni di vincolo (el. contorno).

$l_{0,n} = \frac{l}{n}$  lunghezza di libera inflessione  
distanze tra due punti  
di flesso consecutivi  
delle deform. critiche

## Concetti fondamentali :

- Esempio 3-DOF :

- determinazione delle deformate critiche  $\delta q_i^*$

da soluzione del sistema omogeneo

$\mathbf{K} \delta q = \mathbf{0}$ , in presenza di singolarità di  $\mathbf{K}$  per  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i^+$ .

da soluzione del ps. generalizzato agli autovalori

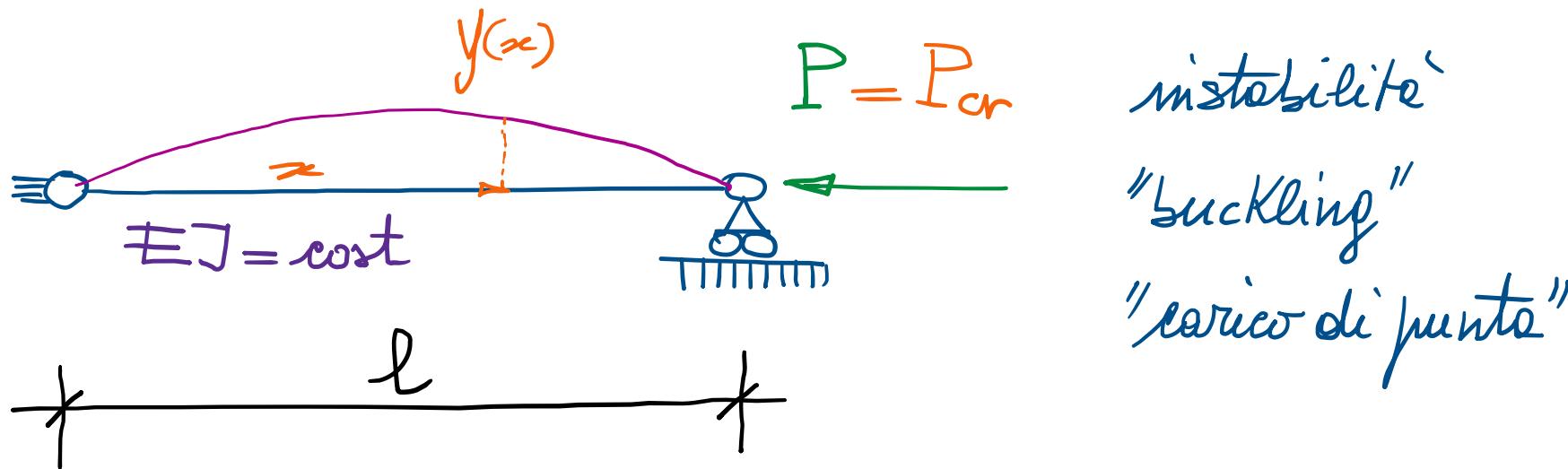
$$\mathbf{K}_E \delta q_i^* = \lambda_i^* \mathbf{K}_G \delta q_i^*.$$

- analisi tramite approccio statico:

scrittura diretta delle equazioni di equilibrio, nello stato di deformazione, con linearizzazione per spostamenti "geometricamente piccoli" (coerentemente con l'analisi al 2° ordine per  $V_1 \approx V_2$ ) e studio delle proprietà algebriche del sistema ottenuto.

- L'approccio statico appare concettualmente il più semplice, e conveniente, anche dal punto di vista metodologico, in quanto contempla la (sola) scrittura delle eq.ni di equilibrio (nella configurazione deformato, in particolare per spostamenti "geometricamente piccoli", tali da indurre ad eq.ni lineari, di immediata analisi dal punto di vista algebrico), individuando i carichi critici quali punti di biforcazione dei percorsi di equilibrio.
- L'esistenza di soluzioni biforzate segnala poi la perdita di stabilità della conf.ne di riferimento, la quale definisce le condizioni di lavoro ordinarie del sistema strutturale, definendo così i livelli tollerabili dei carichi (pre-critici) ai fini pratici.

- Sistemi continui ( $\Rightarrow$  Aste di Euler) :
- sistemi elastici, deformabili flessionalmente, soggetti a carichi di compressione (aste semplicemente compresse).



instabilità  
"buckling"  
"carico di punta"

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$$

$\approx 10$

$P_0^2$  generalizz.

- analisi tramite "approssimazione statica" (equilibrio nelle conf. he deformate).

## SOMMARIO (Lec. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approssimazione statica: scrittura dirette delle eq.ni di equilibrio nella configurazione deformata.
  - non-lineari per spost. finiti.
  - lineari per spost. geometricamente piccoli ( $\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$ ).
  - Eq.ni risultano comb. lineare di quelle de stat. di EPT<sub>2</sub>, con matrice di rigidezze  $\tilde{K}$  con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Asta di Euler (con approssimazione statica) [eq.ni LE nelle conf. ne deform.].
- Carichi critici, deformate critiche, lunghezza oh' libera inflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, come si tesi, formule di Newmark, verifica di stabilità.