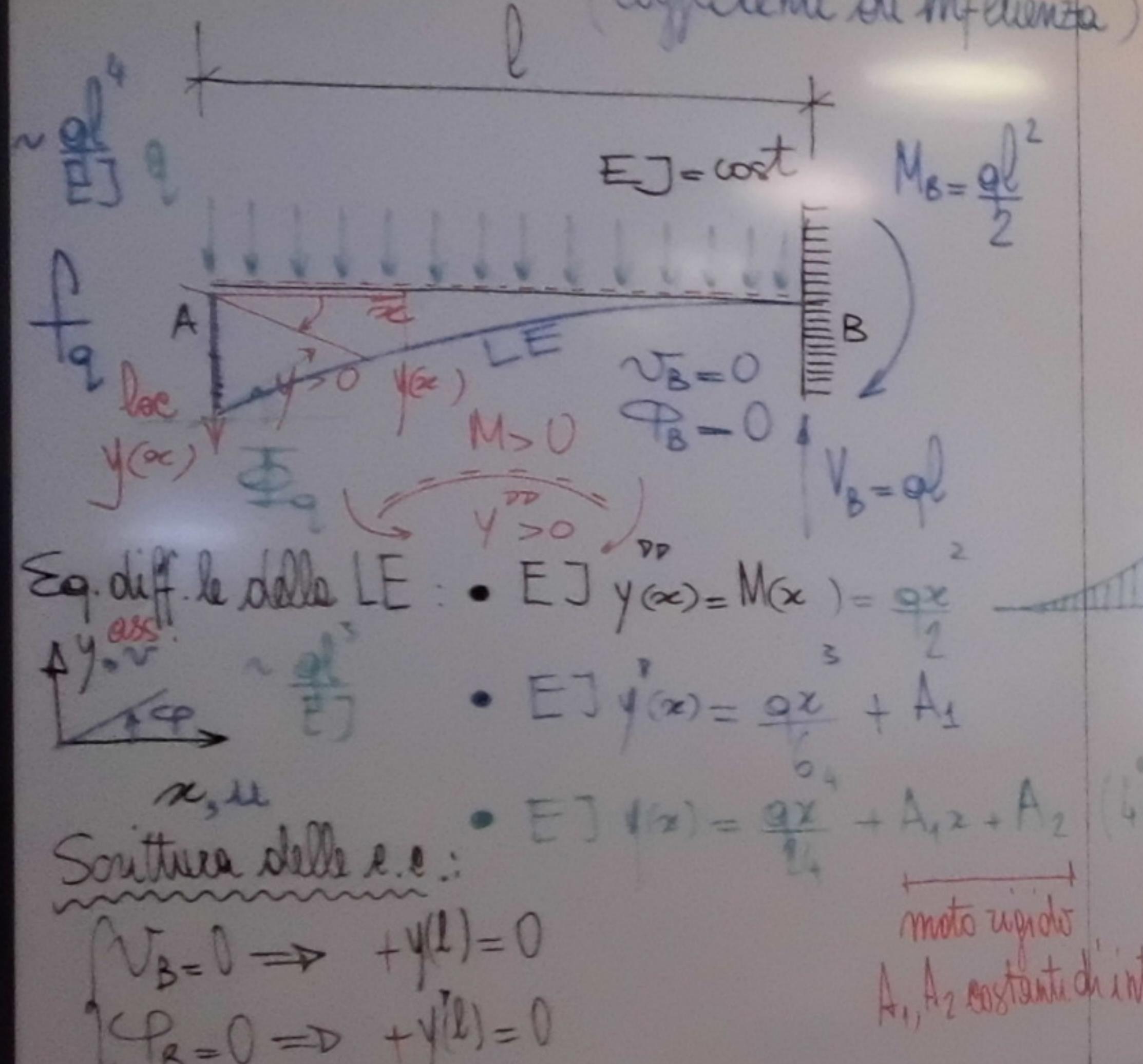


Metodo delle LE - Calcolo di componenti di spostamento

(coefficienti di influenza)



Imposiz. delle e.e.:

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ y(l) = \frac{ql^3}{64} + A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{ql^3}{64} \\ EJ y'(l) = \frac{ql^2}{24} + A_1 l + A_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$A_2 = -\frac{ql^4}{24} + \frac{ql^3}{6} l = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right) ql^4 = \frac{1}{8} ql^4$$

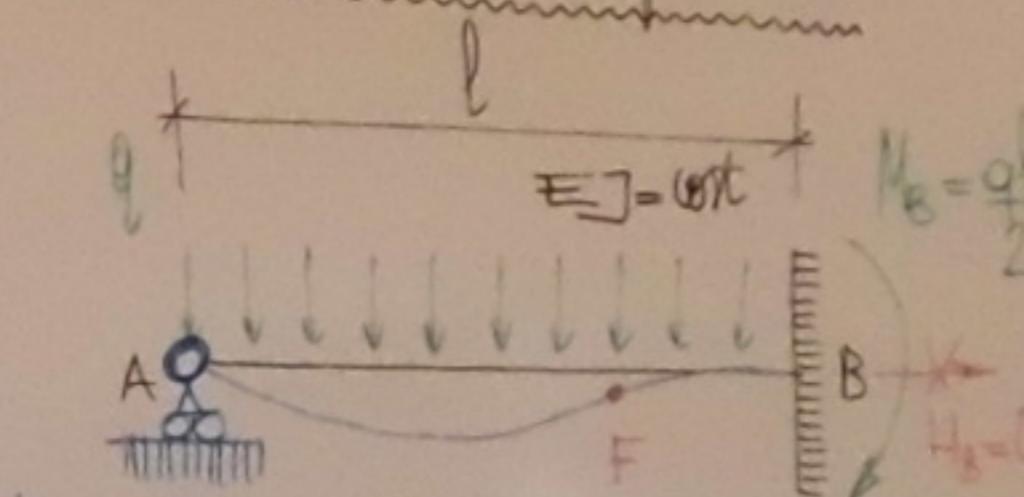
LE finale:

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3}{6} x + \frac{1}{8} ql^4 \right)$$

Coeff. di influenza: significato
fisico delle est. d'int.

$$\begin{cases} f_q = y(0) = -V_A = -\frac{A_2}{EJ} = \frac{1}{8} \frac{ql}{EJ} \\ \Phi_q = -y'(0) = P_A = -\frac{A_1}{EJ} = \frac{1}{6} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$

Risoluzione di strutture ipostatiche



Sommaffazione di effetti

$$\frac{1}{3} \frac{Xl^3}{EJ} = \frac{f_q}{P} X$$

$$= X \cdot \frac{1}{3} \frac{Xl^3}{EJ}$$

$$V_A = X \quad I = 1$$

$$V_B = ql - X = \frac{5}{8} ql$$

$$f_q = \frac{1}{3} \frac{l}{EJ}$$

$$RV = RV(X, q)$$

incognite ipostatiche

(Metodo delle Forze)

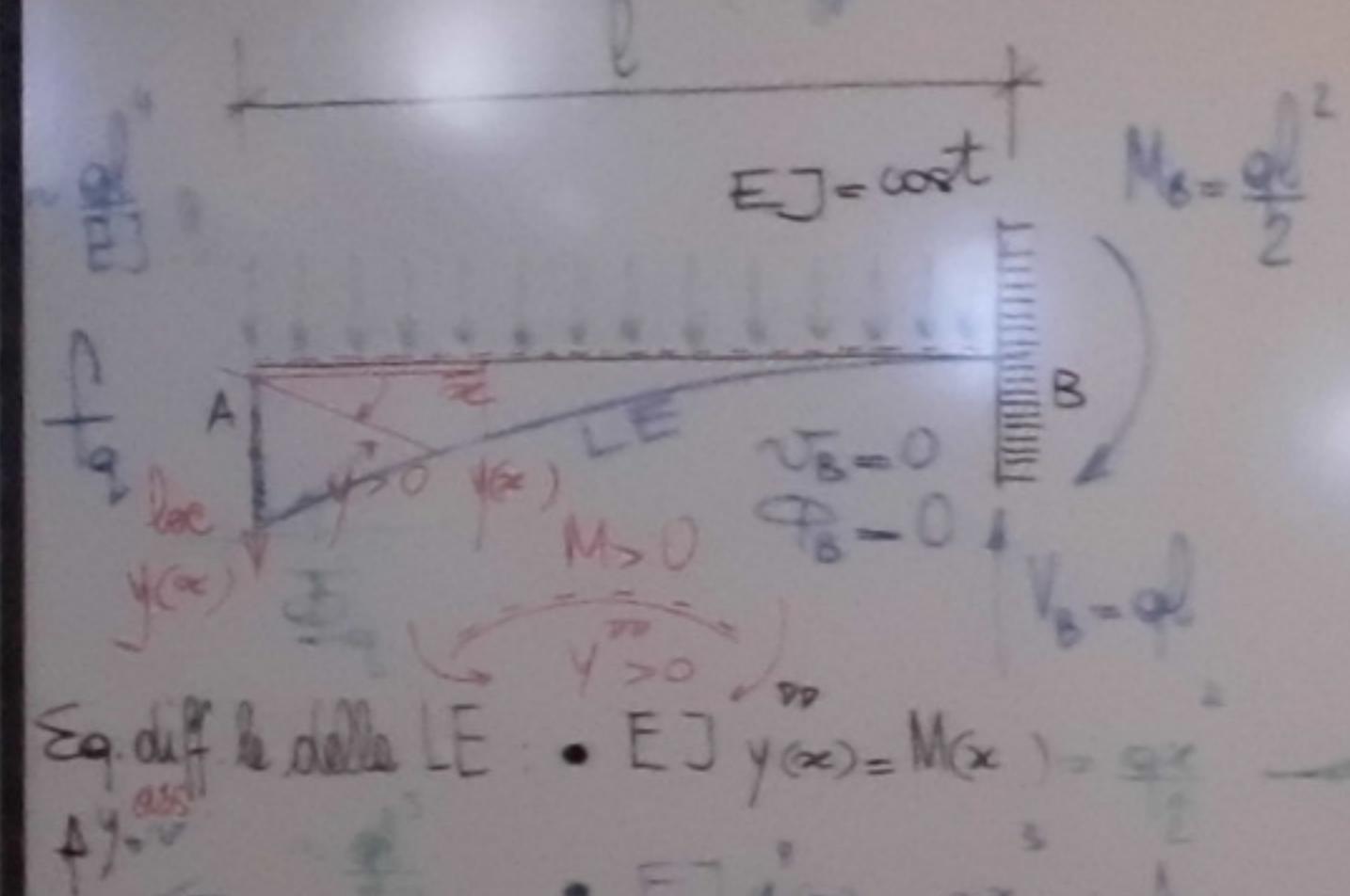
$$\sim V_A = 0 \text{ eq. n. di congruenza} \rightarrow V_A = f_q X - f_q = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{\frac{1}{3} \frac{l}{EJ}} = \frac{3}{5} \frac{f_q}{l}$$

- La risoluzione di strutture ipostatiche necessita di considerare la deformabilità del sistema da parte dei punti rigidamente vincolati, al fine di soddisfare il rispetto delle condizioni di congruenza, non generando soluzioni che non sono vere soluzioni.

- Comunque siamo già usciti dalla teoria degli elementi finiti, quindi non è più possibile utilizzare questo criterio per la scelta dei nodi.

Individuare possibili a scorrere escluse dalla condizione di congruenza

Metodo della LE - Calcolo di componenti di spostamento
coefficiente di influenza:



$$\begin{aligned} \text{Eq. diff. della LE:} \\ \bullet EJ y''(x) = M(x) = \frac{q}{2}x^2 \\ \bullet EJ y'''(x) = \frac{q}{2}x^3 + A_1 \\ \bullet EJ y''(0) = \frac{q}{2}0^3 = A_1 \rightarrow A_1 = 0 \end{aligned}$$

Sostituzione delle e.c.:
 $\begin{cases} V_B = 0 \Rightarrow +y(l) = 0 \\ P_B = 0 \Rightarrow +y'(l) = 0 \end{cases}$

Imposiz. delle e.c.:

$$\begin{cases} EJ y(l) = \frac{q}{64}l^4 + A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{q}{64}l^4 \\ EJ y(l) = \frac{q}{24}l^3 + A_1 l + A_2 = 0 \\ A_2 = -\frac{q}{24}l^4 + \frac{q}{6}l^3 l = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right)q l = \frac{1}{8}q l^4 \end{cases}$$

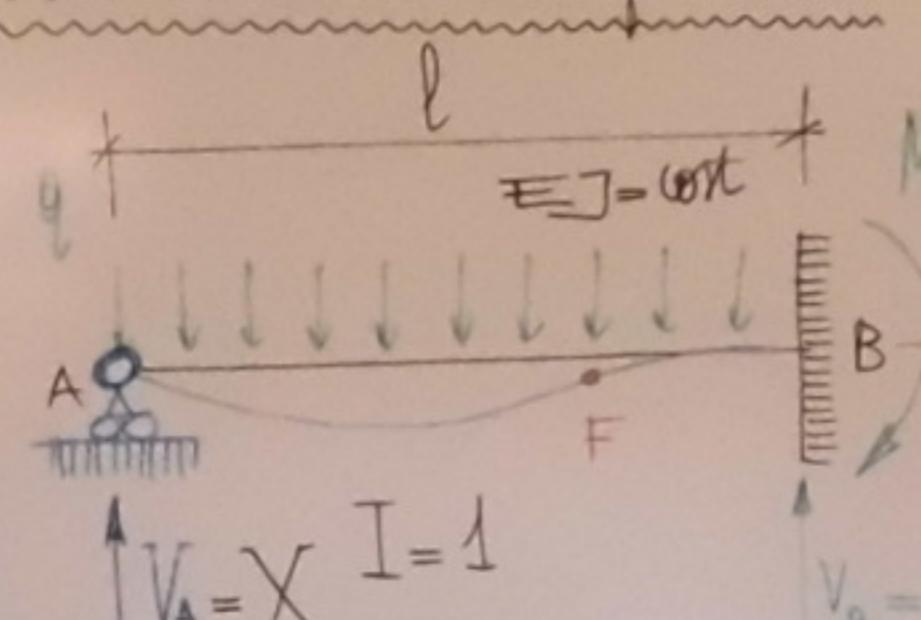
LE finale:

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{q}{24}x^4 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{1}{8}q l^4 \right)$$

Coeff. di influenza:

$$\begin{cases} f_q = y(0) = -V_A = \frac{A_2}{EJ} = \frac{1}{8}q l \\ f_p = -y'(0) = P_A = -\frac{A_1}{EJ} = \frac{1}{6}q l^3 \end{cases}$$

Risoluzione di strutture ipostatiche



$$V_A = X \quad I=1$$

incognita ipostatica
(Metodo delle Forze)

$$V_B = q l \cdot X = \frac{5}{8}q l$$

$$f_1 = \frac{1}{3} \frac{l}{EJ}$$

$$RV = R(X, q)$$

Sorrispondenza di effetti

$$\frac{1}{3} \frac{X l^3}{EJ} = \frac{f_p}{P} X$$

$$= X \cdot$$

$$X \cdot 1$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

$$3$$

Motore della LE

$$EJ = \text{cost}$$

$$M(x) = \frac{q}{6}x^3 + A_1x + A_2$$

$$M(l) = \frac{q}{6}l^3 + A_1l + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{q}{6}l^2$$

$$A_2 = -\frac{q}{6}l^3 + \frac{q}{6}l^3 = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\right)ql^4 = \frac{1}{8}ql^4$$

LE finale:

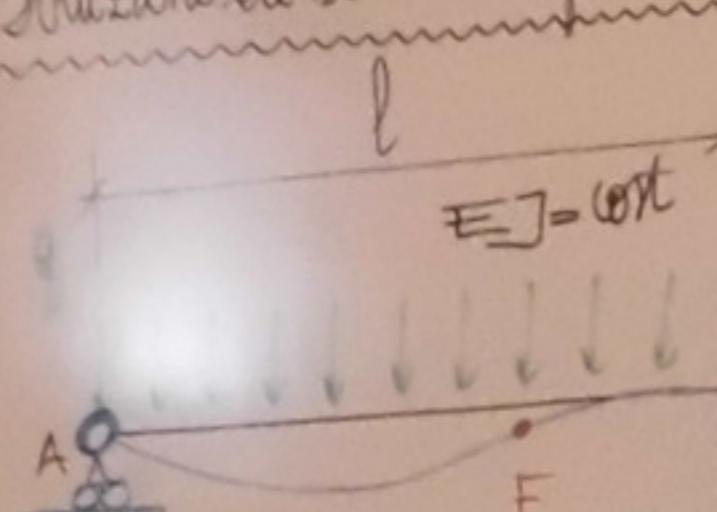
$$\sigma = \frac{1}{EJ} \left(\frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{1}{8}ql^4 \right)$$

eff di influenza:

$$\begin{cases} f_{\text{scorr}} & \text{fisico delle est.} \\ f_{\text{int.}} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_0 = y(l) = -\dot{\gamma}_A = \frac{Ae}{EJ} = \frac{1}{8}ql^4 \\ \ddot{\gamma}_0 = \ddot{y}(l) = \ddot{\gamma}_A = -\frac{Ae}{EJ} = \frac{1}{6}ql^3 \end{cases}$$

Risoluzione di strutture ipostatiche



$$EJ = \text{cost}$$

$$M_B = \frac{q}{2}l^2 - Xl = \frac{ql^2}{8}$$

$$H_B = 0$$

$$X \cdot$$

$$X, 1$$

$$X, 3$$

$$V_B = ql - X = \frac{5}{8}ql$$

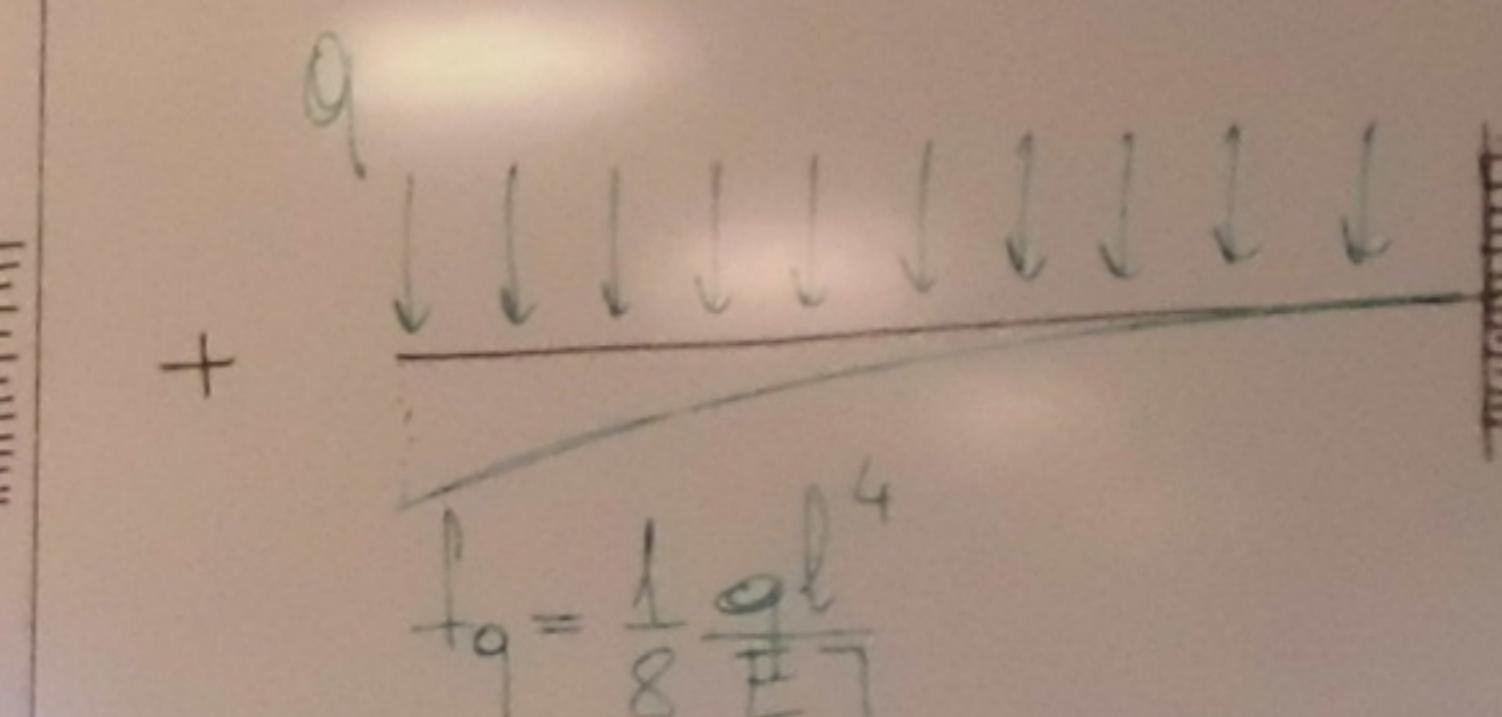
$$f_1 = \frac{1}{3} \frac{l}{EJ}$$

$$RV = RV(X, q)$$

(Metodo delle Forze)

Sovrapposizione di effetti

$$\frac{1}{3} \frac{Xl^3}{EJ} = \frac{f_e}{P} X$$

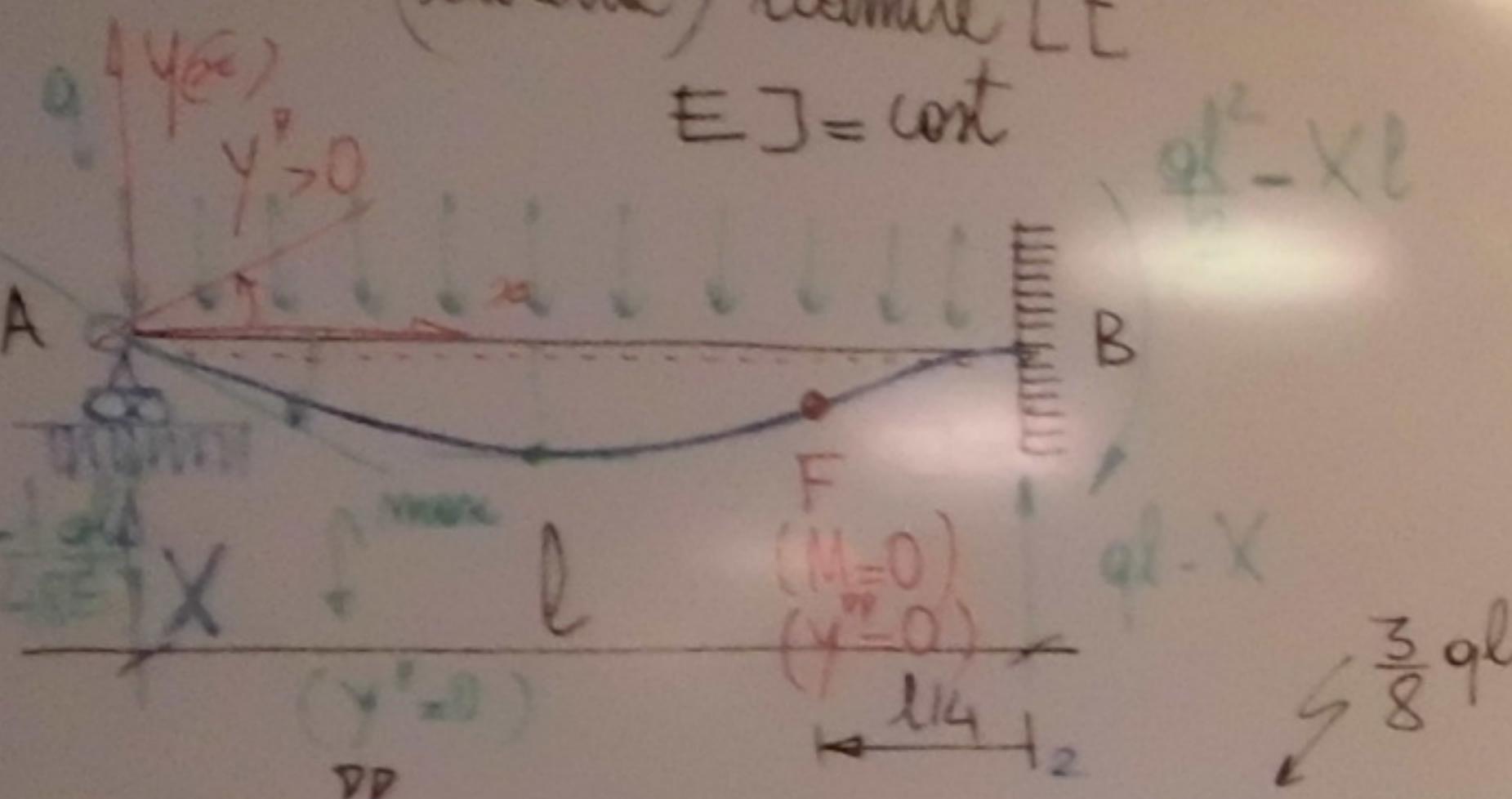


$$f_q = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$X = \frac{f_q}{f_1} = \frac{f_q}{\frac{P}{f_p}} = \frac{\frac{1}{8} \frac{ql}{EJ}}{\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}} = \frac{3}{8} \frac{ql}{l^2} = X$$

- La risoluzione di strutture ipostatiche necessita di considerare la deformabilità (elasticità/lessione) dei sistemi di travi, abbandonando l'ip. di corpo rigido, al fine di scrivere ed imposta il rispetto delle condizioni di congruenza in corrispondenza del grado di vincolo ritenuto ipostatico (sovraffondente).
- Considerando soluzioni differenti di influenza (spazi endoci flessionali caratteristici) è di fatto un metodo che consente di risolvere strutture ipostatiche, fornendo puramente la sortita esplicita delle condizioni di congruenza.

Soluzione (diretta) tramite LE



$$EJ = \text{cost}$$

$$EJ y''(x) = M(x) = -\frac{qx}{2} + X_x$$

$$EJ y'''(x) = -\frac{q}{6}x^3 + \frac{X}{2}x^2 + A_1$$

$$EJ y''''(x) = -\frac{q}{24}x^4 + \frac{X}{6}x^3 + A_2$$

Scrittura delle e.e.

$$\begin{cases} \tau_{FB} = 0 \rightarrow y(l) = 0 \\ \varphi_B = 0 \rightarrow y'(l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_A = 0 \rightarrow y(0) = 0 \\ \text{condiz. di simm.} \end{cases}$$

$2+(I=1)$ incognite

sist. algebrico di tre eqn in tre incognite

- $T(x), M(x)$

Impostazione delle e.e.

$$y(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0$$

$$y'(l) = 0 \rightarrow -\frac{ql^3}{6} + \frac{Xl^2}{2} + A_1 = 0 \quad | \cdot l \rightarrow A_1(X) = \frac{ql^3 - Xl^2}{2}$$

$$y(l) = 0 \rightarrow -\frac{ql^4}{24} + \frac{Xl^3}{6} + A_1 l + A_2 = 0$$

$$-\frac{ql^4}{6} + \frac{ql^4}{24} + \frac{Xl^3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{8}ql^4 + \frac{X}{3}l^3 = 0 \Rightarrow X = \frac{3}{8}ql$$

$$-EJ f_q \quad EJ f_1 \quad \text{Assunzione det.}$$

$$\text{LE finale: } y(x) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{qx^4}{24} + \frac{1}{16}qlx^3 - \frac{1}{48}ql^3x \right)$$

$$M(x) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{qx^3}{6} + \frac{3}{16}qlx^2 - \frac{1}{48}ql^3 \right) \quad \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{24}l$$

Quattro modi del metodo delle LE

- AC

- AS ($I=1, RV=RV(x)$)

- Individuazione difformità di un piano (metodo fondamentale)

$$EJ y''(x) = \pm M(x)$$

$$\begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{①} \quad \text{②} \\ \text{EJ}_1 + \text{EJ}_2 \\ \text{y}_1 + \text{y}_2 \\ \text{EJ}_1 + \text{EJ}_2 \\ \text{N}_1 x_1 + \text{N}_2 x_2 \end{array}$$

- Interpretazione nei vari tali (2n art. disponibili)

- Scrittura delle e.e. ($N = n = 2n + I$)

- Impostazione delle e.e. nella forma matriciale

- Scrittura delle LE finali

- Risoluzione guidata della LE (metodo dei segni, riduzione)

- N.T.M finali

Soluzione LE

- $EJ = \text{cost}$
- $y(0) = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\tau_A = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\varphi_B = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\tau_B = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\tau_A = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\varphi_B = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\tau_B = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\tau_A = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\varphi_B = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$
- $\tau_B = 0 \rightarrow EJ \rightarrow \text{inc. ind.}$

Scrittura delle f.t. della LE

$$EJ = \text{int}$$

$$EJ \cdot y_1 = M_A = -\frac{q}{2}x_1^2 - x_1$$

$$EJ \cdot y_2 = -\frac{q}{2}x_2^2 + A_1 x_2 + A_2$$

Integrazione delle f.t.

$$\begin{aligned} & \text{AC: } \int A_1(x) dx = 0 \\ & \text{AS: } I=1, RV = RV(X) \\ & \text{Individuazione degli esempi di integraz. (nei rifer. locali retti)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_1 = 0 \Rightarrow -\frac{q}{2}x_1^3 + A_1 x_1^2 + A_2 = 0 \quad | \cdot l \Rightarrow A_1(l) = \frac{q}{2}l^3 \\ & y_2 = 0 \Rightarrow -\frac{q}{2}x_2^3 + A_1 l x_2 + A_2 = 0 \quad | \cdot l \Rightarrow A_2 = \frac{q}{2}l^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{A_1}{8} \right) \\ & \frac{q}{2}l^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{A_1}{8} \right) = 0 \quad | : \frac{q}{2}l^3 \\ & \frac{1}{3} - \frac{A_1}{8} = 0 \quad | \cdot 8 \\ & A_1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2}l^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 0 \\ & \frac{q}{2}l^3 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{8}al \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_2 = \frac{q}{2}l^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\frac{8}{3}}{8} \right) = -\frac{1}{48}ql^3 = A_2 \\ & EJ_1 = \frac{q}{2}l^3 \quad EJ_2 = \frac{q}{2}l^3 \end{aligned}$$

$$EJ_{\text{tot}}: y_2 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{q}{2}x_2^4 + \frac{1}{4}q_1x_2^3 - \frac{1}{48}ql^3x_2 \right]$$

- T_{x_1}, M_{x_2}

Quadro generale del metodo delle LE

- AC
- AS ($I=1, RV = RV(X)$)

- Individuazione degli esempi di integraz. (nei rifer. locali retti)

$$EJ_1 y_1 + M_1(x_1) \downarrow$$

$$EJ_2 y_2 + M_2(x_2) \downarrow$$

$$\begin{array}{c|c|c} & ② & \\ \hline ① & y_1 + y_2 & \\ & EJ_1 + EJ_2 & \\ \hline & ① & ② \\ & M_1(x_1) + M_2(x_2) & \end{array}$$

- Integrazione nei vari testi (2n esempi di integraz.)

- Scrittura delle f.t. ($n_{\text{f.t.}} = n_{\text{mc.}} = 2n + I$)

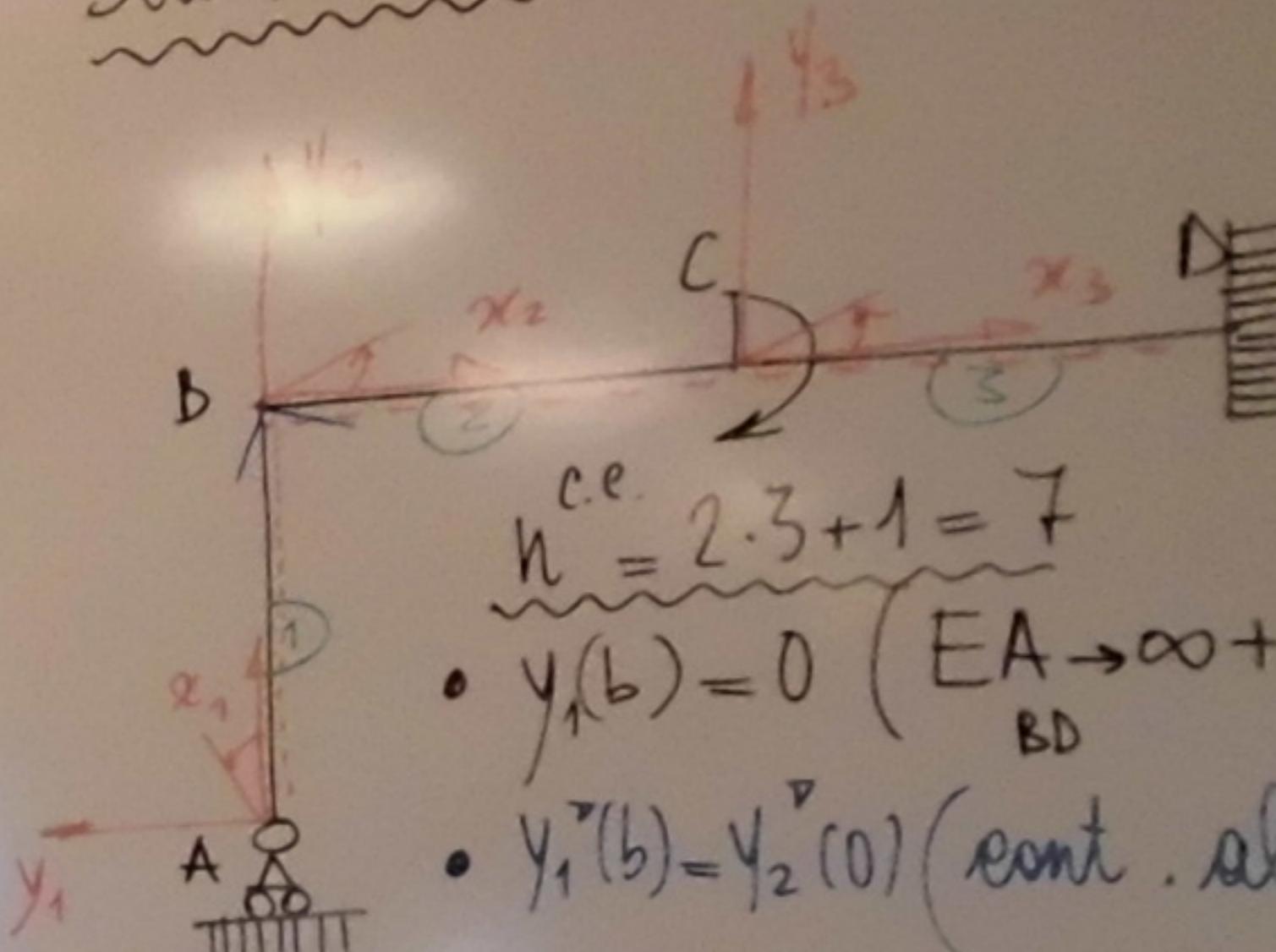
- Impostazione delle n.e. 2x2 relativi di un sistema lineare $n \times n$ c.c. c.c.

- Scrittura delle LE finali

- Rappresentazione qualitativa della LE (con simbolo di spost. e rotat. non fissi)

- N, T, M finali

Scrittura delle f.t.



$$n^{\text{c.c.}} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

• $y_1(b) = 0$ ($EJ_1 \rightarrow \infty$ + inc. m. D) $u_D = 0$

• $y_1'(b) = y_2(0)$ (cont. alle rot. in B)

• $y_2(0) = 0$ ($EJ_2 \rightarrow \infty$ + corr. m. A) $v_A = 0$

• $y_2(b) = y_3(0)$ (cont. alle spost. in C)

• $y_3(b) = y_3'(0)$ (cont. alle rotat. in C)

• $y_3(b) = 0 \quad \} \text{ (incastro in D)}$

• $y_3'(b) = 0 \quad \} \text{ (incastro in D)}$