

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

Risposte a forzante armonica $F_e^{i\omega t}$ (trattazione in variabili complesse) ($u_{st} = \frac{F}{K}$)

$$\ddot{\nu} + 2\zeta\omega_1 \dot{\nu} + \omega_1^2 \nu(t) = \omega_1^2 u_{st} \cos \omega t \leftarrow F(t) = F \cos \omega t; \nu(t) \text{ risposta a } F \cos \omega t$$

$$i(\ddot{u} + 2\zeta\omega_1 \dot{u} + \omega_1^2 u(t)) = \omega_1^2 u_{st} \sin \omega t \leftarrow F(t) = F \sin \omega t; u(t) \text{ " " } F \sin \omega t$$

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_1 \dot{z} + \omega_1^2 z(t) = \omega_1^2 u_{st} e^{i\omega t} \leftarrow F(t) = \underbrace{F e^{i\omega t}}_{\substack{\text{fase} \\ \text{cos}\omega t + i \sin\omega t}}; z(t) = \underbrace{\nu(t)}_{\text{Re}\{z(t)\}} + i \underbrace{u(t)}_{\text{Im}\{z(t)\}}$$

Integrale particolare: $\underbrace{N u_{st}}_{z_p(t)} = \underbrace{Z e^{i\omega t}}_{\substack{\text{fase} \\ \text{cos}\omega t + i \sin\omega t}} = Z^* e^{i(\omega t - \xi)}$ (ritardo della risposta $z_p(t)$ rispetto alla forza $F e^{i\omega t}$)

$$\begin{aligned} z_p(t) &= Z e^{i\omega t} = Z^* e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \xrightarrow{\text{ampliezza } \omega^2 Z} \text{velocità in quadratura in anticipo} \\ \dot{z}_p(t) &= i\omega Z e^{i\omega t} = \omega Z e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \xrightarrow{\text{ampliezza } \omega^2 Z} \text{velocità in quadratura in anticipo} \\ \ddot{z}_p(t) &= -\omega^2 Z e^{i\omega t} \xrightarrow{\text{ampliezza } \omega^2 Z} \text{accelerazione in opposizione di fase} \end{aligned}$$

rispetto alle
risposte $z_p(t)$

Z variabile complessa; Z^* variabile reale ($Z^* = \underbrace{N u_{st}}_{\text{dinamica}}$) fatto di amplificazione dinamica

$$Z = Z^* e^{-i\xi} = Z^* (\cos \xi - i \sin \xi) = \underbrace{Z^* \cos \xi}_{Z_1} - i \underbrace{Z^* \sin \xi}_{Z_2} = Z_1 - i Z_2 \quad \begin{cases} \text{Re}\{Z\} = Z_1 = Z^* \cos \xi \\ \text{Im}\{Z\} = -Z_2 = -Z^* \sin \xi \end{cases}$$

$$\left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 2\zeta \frac{\omega_1}{\omega} \omega i \right) Z e^{i\omega t} = \frac{\omega_1^2}{\omega^2} M_{st} e^{i\omega t}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{f}{f_1}$ rapporto di frequenze ("frequency ratio")

$$(1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta) Z = M_{st} \Rightarrow Z = \frac{1}{1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta} M_{st} \cdot \frac{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta}{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta} \quad i^2 = -1$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Quindi: $\cos \xi = \frac{1 - \beta^2}{D}$; $\sin \xi = \frac{2\zeta \beta}{D}$

$$\frac{Z}{M_{st}} = \frac{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2} = \underbrace{\frac{1 - \beta^2}{D}}_{\text{(denominatore)}} - i \underbrace{\frac{2\zeta \beta}{D}}_{\text{(numeratore)}} = \frac{Z_1}{M_{st}} - i \frac{Z_2}{M_{st}} \quad (*)$$

$$\tan \xi = \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = \frac{2\zeta \beta}{1 - \beta^2} \Rightarrow$$

$$\xi = \arctan \frac{2\zeta \beta}{1 - \beta^2} \quad \text{(denominatore)}$$

$$\frac{1 - \beta^2}{D} = \frac{1}{D} \cos \xi$$

$$\frac{2\zeta \beta}{D} = \frac{1}{D} \sin \xi$$

$$\frac{Z_1}{M_{st}} = \frac{Z^* \cos \xi}{M_{st}} \quad \frac{Z_2}{M_{st}} = \frac{Z^* \sin \xi}{M_{st}}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{D}} \quad N = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

(*) Inoltre:

$$|Z| = Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2}{D}}$$

$$M_{st} = \frac{\sqrt{D}}{D} M_{st} = \frac{1}{\sqrt{D}} M_{st} = N M_{st} \Rightarrow$$

Relazioni come precedentemente determinato per solo $F \sin \omega t$

$$N = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2}}$$

- Pertanto, si ottiene:

$$z_p(t) = Z_e^{i\omega t} = Z^* e^{i(\omega t - \xi)} \rightarrow z_p(t) = (Z_1 - iZ_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$= \underbrace{Z_1 \omega s \omega t + Z_2 \sin \omega t}_{\mathcal{V}_p(t)} + i \underbrace{(Z_1 \sin \omega t - Z_2 \omega s \omega t)}_{\mu_p(t)}$$

Forze:

$$F_e = K \cancel{N} \frac{F}{K} \quad \text{zisp. } \propto F \cos \omega t$$

$$F_d = \omega N \frac{F}{K} \quad \text{zisp. } \propto F \sin \omega t$$

$$F_i = m \omega^2 N \frac{F}{K} \quad (\frac{c}{m} = 2\beta \omega_1)$$

$$= 2\beta m \omega_1 \omega N \frac{F}{K}$$

$$= 2\beta \beta N F$$

$$= \beta^2 N F$$

$$F_e \Rightarrow e F_i \text{ "equilibrano" } F \cos \xi$$

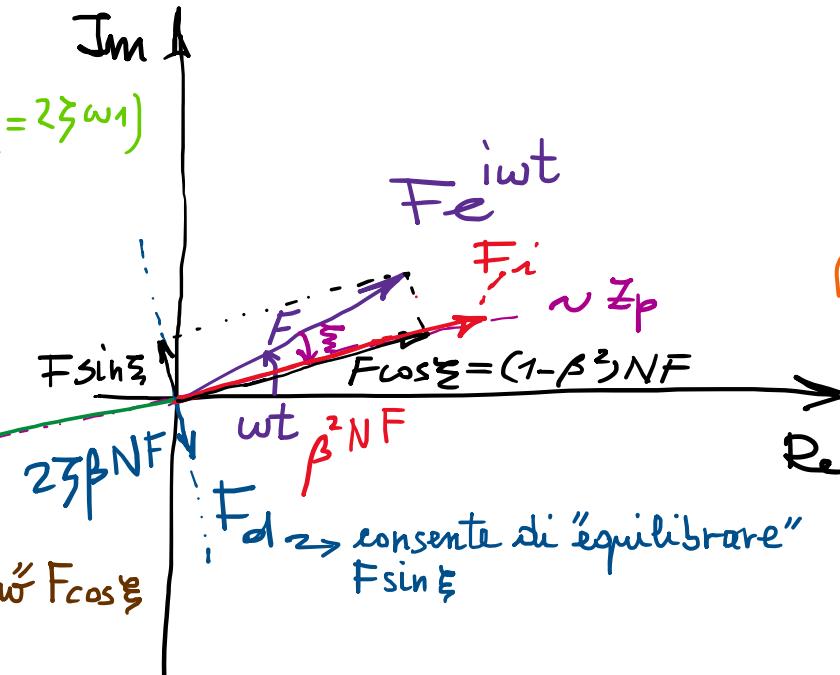


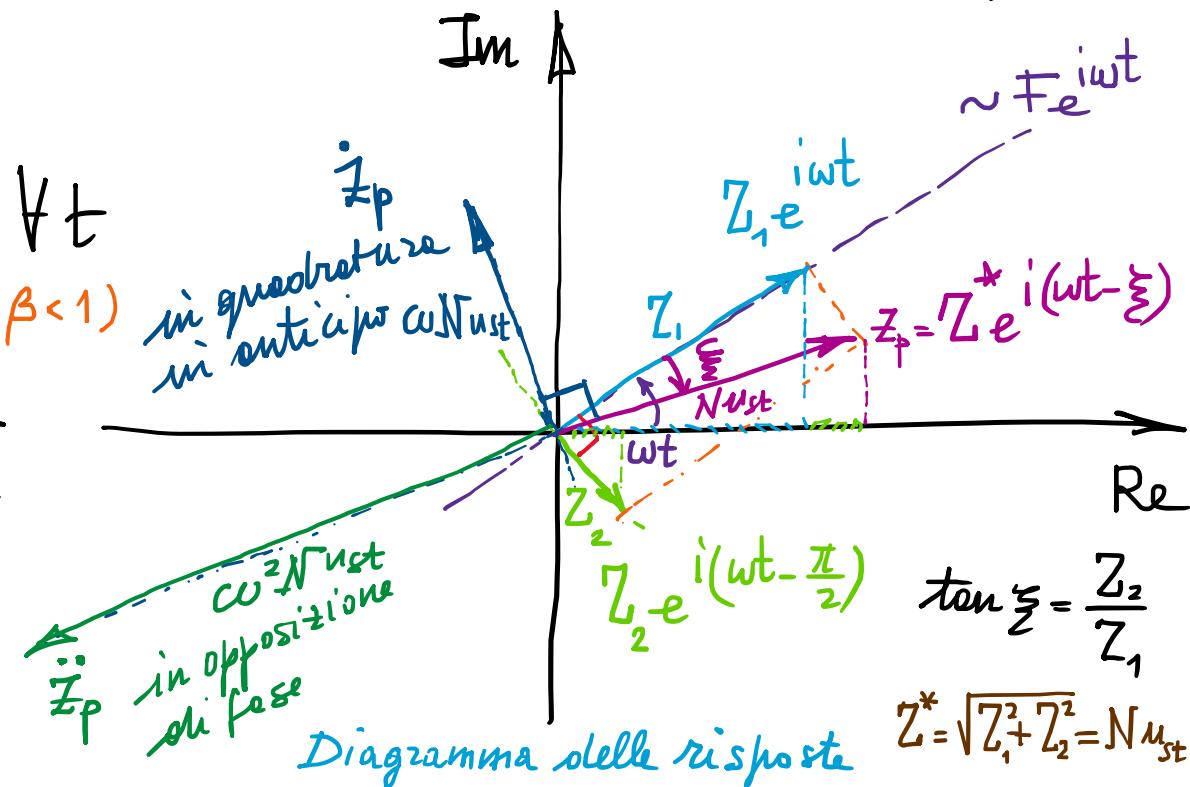
Diagramma delle forze ("equilibrio dinamico")

$$z_p(t) = (Z_1 - iZ_2)e^{i\omega t} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

in fase con la forzante

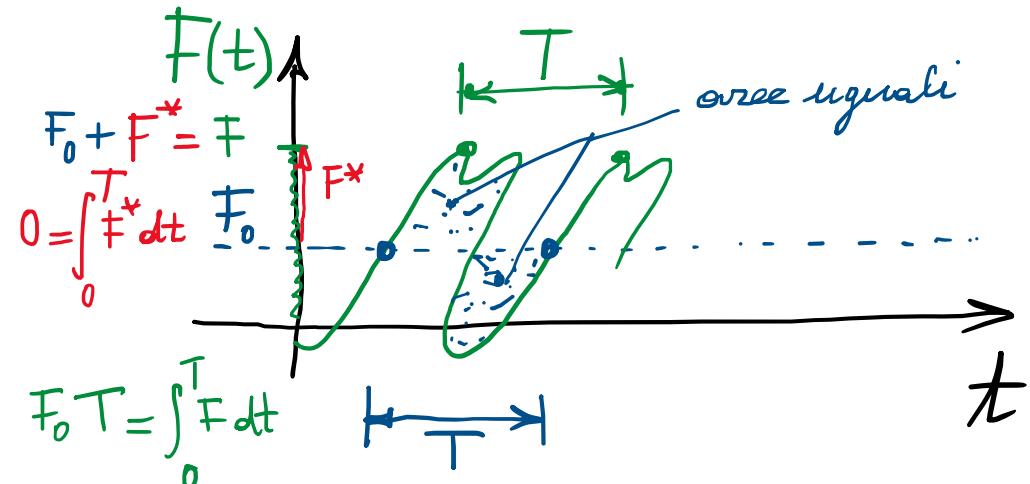
in quadratura in ritardo rispetto alla forzante

Rappresentazioni nel piano di Argand
(vettori rotanti)

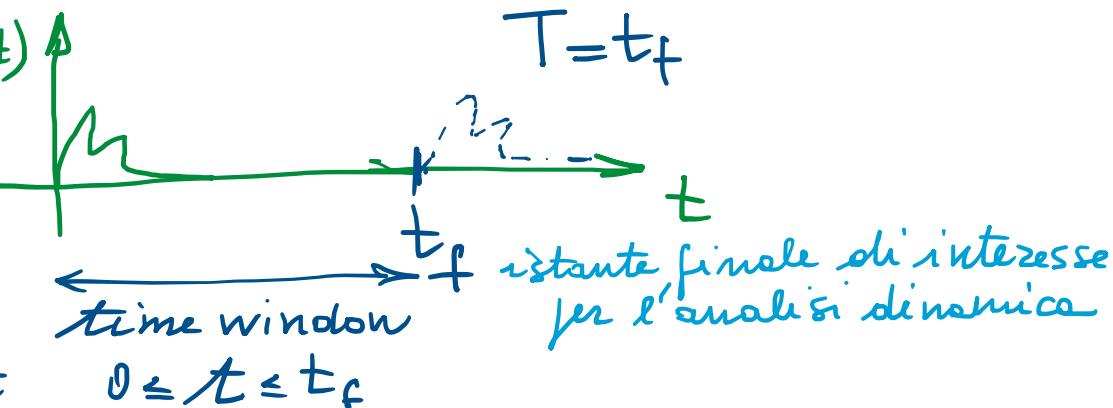


$$Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = N u_s t$$

Risposta a forzante periodica: $F(t+T) = F(t)$ T : periodo della forzante



- così pratici con forzanti periodiche
- forzanti "rese periodiche" ai fini dell'analisi



Sviluppo in serie di Fourier:

$$F(t) \underset{\text{appross.}}{\sim} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t =$$

troncam. (\bar{n})

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \text{ valor medio}$$

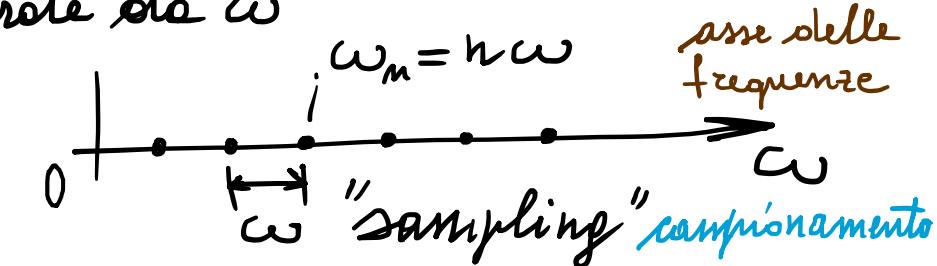
$$\text{coeff. seriedi} \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega_n t dt$$

$$F. \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega_n t dt$$

f.m. generalmente continua

$$\frac{F^+ - F^-}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

con $\omega_n = n\omega$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione fondamentale
"treno" di infinite componenti armatiche di pulsazioni ω_n discrete separate da ω



Risposta: (di periodo T) $M_{st} = \frac{F}{K} \Rightarrow F = K \cdot u_{st}$

$$u_p(t) = \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{Z_{1n}}{F} \cos \omega_n t + \frac{Z_{2n}}{F} \sin \omega_n t \right) + B_n \left(\frac{Z_{1n}}{F} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{F} \cos \omega_n t \right)$$

(per sovrapposizione degli effetti di ogni componente armonica)

$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{K} \left(\frac{Z_{1n}}{M_{st}} \cos \omega_n t + \frac{Z_{2n}}{M_{st}} \sin \omega_n t \right) + \frac{B_n}{K} \left(\frac{Z_{1n}}{M_{st}} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{M_{st}} \cos \omega_n t \right)$$

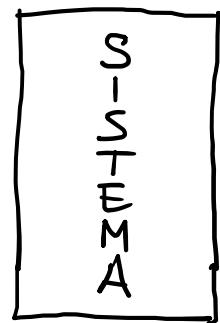
$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{K} \cos \omega_n t + \frac{B'_n}{K} \sin \omega_n t$$

$$A'_n = A_n \frac{Z_{1n}}{M_{st}} - B_n \frac{Z_{2n}}{M_{st}}$$

$$B'_n = A_n \frac{Z_{2n}}{M_{st}} + B_n \frac{Z_{1n}}{M_{st}}$$

INPUT

$f(t)$ →
forzante



ω_1, ζ

OUTPUT

$u_p(t)$
risposta
(spostamento)

contenuto
in frequenza
della forzante

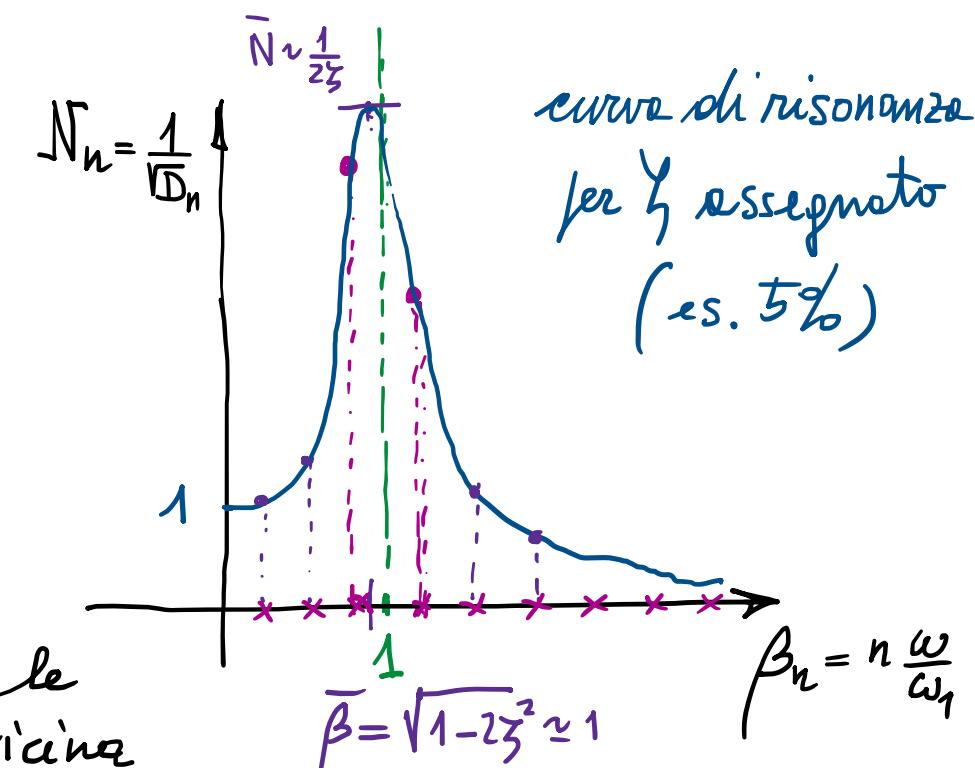
Funge da "filtro" selezionando, esaltandolo, le componenti armoniche con pulsazione più vicina a quelle naturali del sistema. \Rightarrow visione nel dominio delle frequenze

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega_1} = n \frac{\omega}{\omega_1} = n \beta$$

$$\frac{Z_{1n}}{M_{st}} = \frac{1 - \beta_n^2}{D_n}$$

$$\frac{Z_{2n}}{M_{st}} = \frac{2\beta_n}{D_n}$$

$$D_n = (1 - \beta_n)^2 + (2\beta_n)^2$$



$$\beta_n = n \frac{\omega}{\omega_1}$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - 2\gamma^2} \approx 1$$

Concetti fondamentali:

- Forzante armonica in variabili complesse: $F_e^{i\omega t} = F \cos \omega t + i F \sin \omega t$
 (trattazione unificata)

ampiezza
pulsazione

- Risposta del sistema: $\overset{m, \gamma, K}{z_p(t)} = \frac{\sum e^{i\omega t}}{Z_1 - iZ_2} = \frac{\sum^* e^{i(\omega t - \xi)}}{N u_{st}} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$
 (integrale particolare)

$$= \underbrace{Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t}_{v_p(t)} + i \underbrace{(Z_1 \sin \omega t - Z_2 \cos \omega t)}_{u_p(t)}$$

$$u_{st} = \frac{F}{K} ; \quad N(\beta; \gamma) = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}}, \quad \xi = \operatorname{atan} \frac{2\gamma\beta}{1-\beta^2} \quad (\beta = \frac{\omega}{\omega_1} \text{ rapporto di frequenze})$$

spost. statico
(risposta statica)

fattore di amplificazione dinamica
(rispetto a risposta statica)

fase
(sfasamento tra forzante e risposta)

\Rightarrow rappresentazione nel piano di Argand, delle risposte e delle forze.

$z_p, \dot{z}_p, \ddot{z}_p$ F_s, F_e, F_d, F_i

- Generalizzazione \Rightarrow forzante periodica (da singola componente armonica a sovrapposizione di periodo T
di infinite componenti armoniche \Rightarrow Fourier)
 $F(t+T) = F(t)$

Forzante (input)

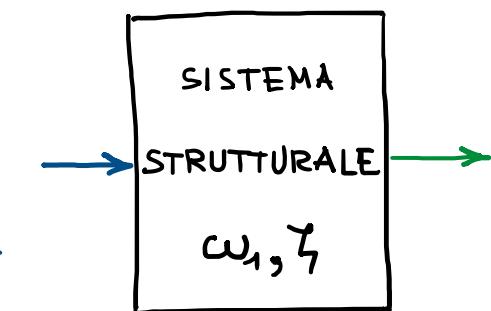
$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

\Rightarrow
per Sovrapposiz.
degli Effetti

$$\omega_n = n\omega \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$



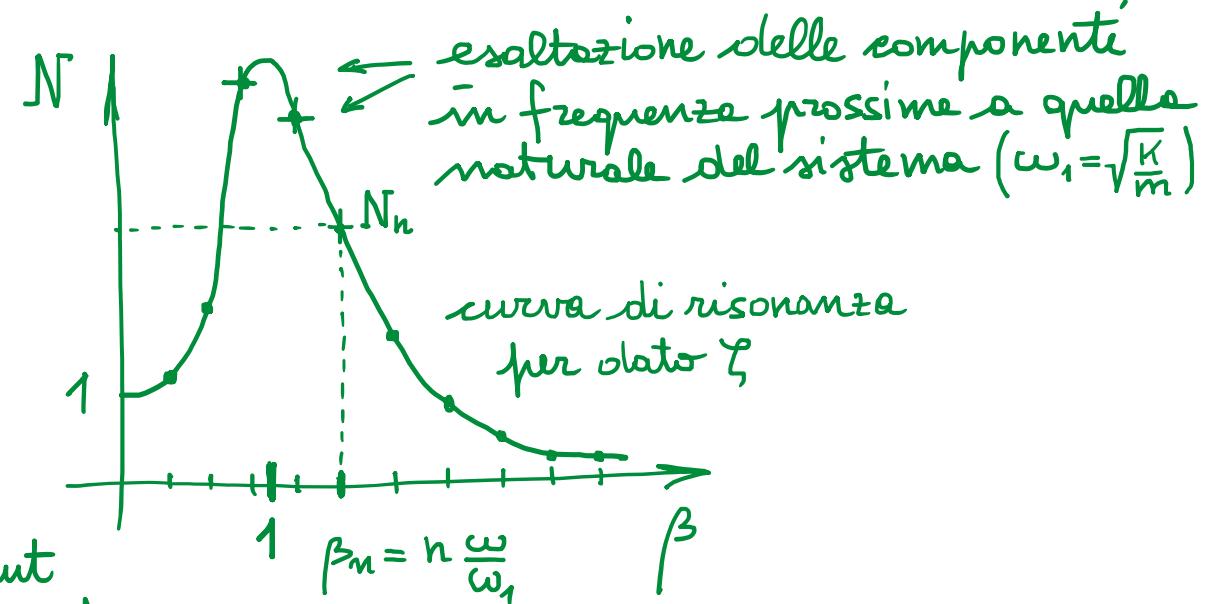
infinte componenti armoniche,
con frequenze a passo $\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}$
(discretizzazione dell'asse
delle frequenze)
e ampiezze ad esse associate



input esogeno DNA del sistema output di risposta

Risposta (output)

$$z_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{K} e^{i\omega_n t}$$



"filtrà" l'input esogeno (contenuto in frequenza) \Rightarrow
in base a caratteristiche endogene

vedi analisi nel dominio delle frequenze

SOMMARIO (Lec. 06)

- Trattazione in variabili complesse $\Rightarrow F_e^{int} = F \cos \omega t + i F \sin \omega t$.
- Derivazione delle relazioni caratteristiche per determinate.
- Risposta simultanea alle comp. ti armoniche $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$.
- Rappresentazione nel piano di Argand
 - diagramma delle risposte.
 - diagramma delle forze.
- Generalizzazione: forzante periodica (trasl. di infinite armoniche).
- Effetto "filtro" del sistema vs. le comp. armoniche della forzante vicine a quelle corrispondenti alla pulsazione naturale del sistema.
- Next step: risposta a forzante generica (a partire da forzante impulsiva)