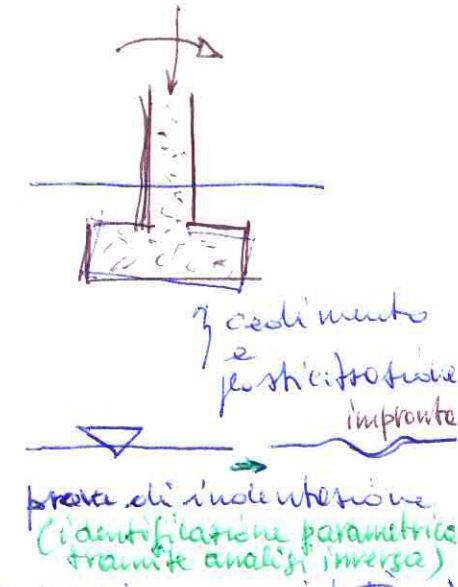
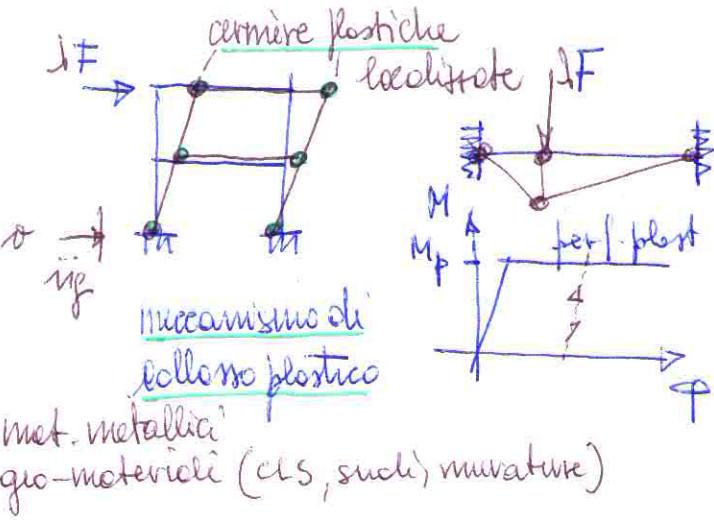
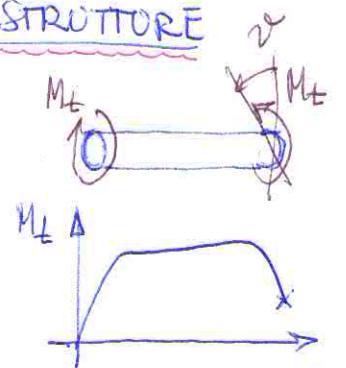
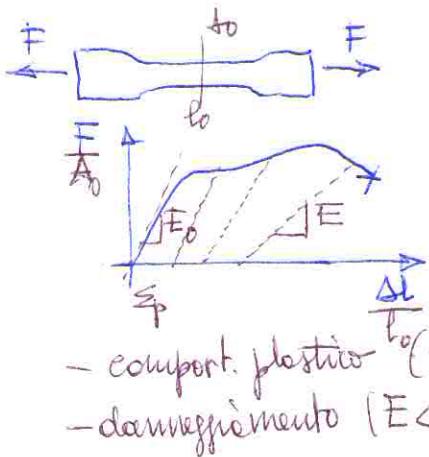


Integrat. I les → Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

ANELASTICITÀ DELLE STRUTTURE



Azioni:

- cost. o lentamente variabili in t. ma di entità tale da produrre fenomeni anelastici (analisi statice e quasistatiche)
- variabili nel tempo (es. esplosioni, sismi) e di elevate intit. - Possono condurre a collasso (plastico) con transizione dinamica e/o da comp. instabile.

Caratteristiche:

- non linearità di comportamento del materiale o delle strutture - comport. dissipativo
- localizzazione dei fenomeni anelastici

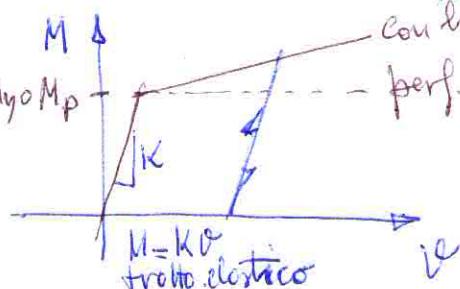
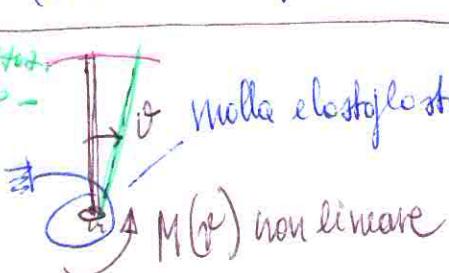
Programma:

- calcolo a rottura di travi e telai (det. del moltiplicatore di collasso)

- Teoremi dell'analisi limite (statico e cinetico)

- elementi di teorie delle plasticità (condiz. di Sneddon, leggi di incremento, legge costitutiva incrementale) - Danneggiamento (damage mechanics)

Generalità:
Esempio:



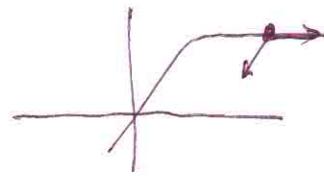
erizzo@unibg.it

DAS - Scalette plastiche

- Elementi fondamentali nel legame allo stato plasticco monociclico
 - spostamento
 - $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$
 - incremento, tipi
 - isotropo — effetto Bauschinger
 - cinematico
 - ciclico
 - lineare / non lineare
 - E_u, E_g, E_c
 - perf. plast.
- comportamento EP delle travi (sez. dopp. simmetriche)
 - legame n/x non lineare
 - esp. di curvatura plastica
 - collasso
- Teoremi dell'Analisi L'inf.
 - statico
 - cinematico
 - misto
 - calcolo del J_2
- Dominio di mikros. N, n
- Ritorno alla plasticità dei continui

erizzi@unibg.it

(b) $E_f = 0$ (plasticità perfetta)

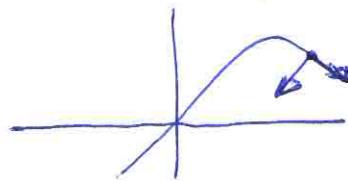


$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} = 0$	$\dot{\sigma} > 0, \dot{\epsilon} = E\dot{\sigma}$	$\dot{\sigma} > 0, \dot{\epsilon} = 0$
$\dot{\epsilon} \leq 0, \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$ ancora univoc. def.	$\dot{\sigma} \leq 0, \dot{\epsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma}$ non univoc. definito	

(c) $0 < E_f < 0$ (incurv. negativo)

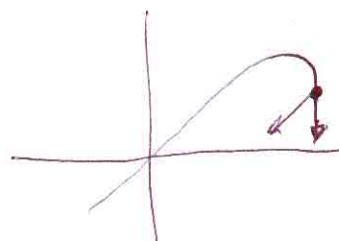
softening

domini (c), ma $\dot{\sigma} \leq 0$



$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} \leq 0$	$\dot{\sigma} > 0, \dot{\epsilon} \leq 0$
$\dot{\epsilon} \leq 0, \dot{\sigma} \leq 0$ ancora univoc. def.	$\dot{\sigma} \leq 0$ $\dot{\epsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} > 0$ $\dot{\epsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} \leq 0$

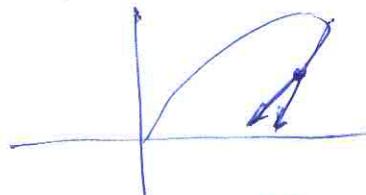
(d) $E_f \rightarrow -\infty$ (softening critico) (con limite e livello costitutivo)



$\dot{\epsilon} > 0$ non amm.	$\dot{\sigma} > 0$ non amm.
$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} \leq 0$ arbitr.	$\dot{\sigma} = 0, \dot{\epsilon} \geq 0$
$\dot{\epsilon} < 0, \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$ non più univoc. def.	$\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon} \geq 0$ $\dot{\epsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} < 0$

(e) $E_f > 0$ (softening subcritico)

$\dot{\epsilon} < 0, \dot{\sigma} \leq 0$



$\dot{\epsilon} > 0$ non amm.	$\dot{\sigma} > 0$ non amm.
$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} = 0$	$\dot{\sigma} = 0, \dot{\epsilon} = 0$

$\dot{\epsilon} < 0$ $\dot{\sigma} = E_f + \dot{\epsilon} < 0$

$\dot{\epsilon} < 0$ $\dot{\sigma} = E_f \dot{\epsilon} < 0$

non univ. def.

$\dot{\sigma} > 0$ non amm.

$\dot{\sigma} = 0, \dot{\epsilon} = 0$

$\dot{\epsilon} < 0$ $\dot{\sigma} = \frac{1}{E_f} \dot{\epsilon}$

$\dot{\epsilon} < 0$ $\dot{\sigma} = \frac{1}{E_f} \dot{\epsilon}$

N.B. $E_f < E \rightarrow$ no. loading



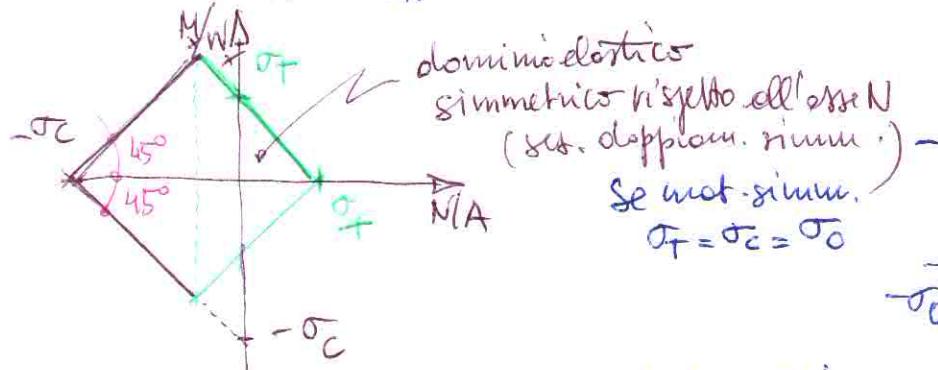
(e. tenuta biologica)

Trave elasto-plastica

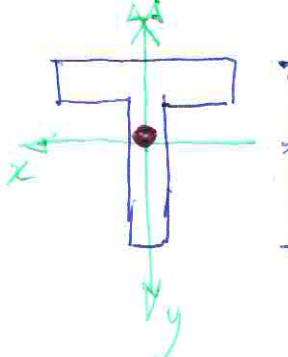
rif. Corradi 2
Cap. 7.4-7.5

Dominio elastico

$$-\sigma_c \leq \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_T$$



sez. avente un unico asse di simmetria



$$\text{es. } y_i > y_e$$

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M_x y_i}{J_x} \quad \Rightarrow \quad -\sigma_c \leq \frac{N}{A} + \frac{M_x y_i}{W_{xi}} \leq \sigma_I \quad \Rightarrow \quad -\sigma_0 \leq \frac{N}{A} + \frac{M_x y_i}{W_{xe}} \leq \sigma_0$$

$$W_{xi} = \min \left[W_{xi} = \frac{J_x}{y_i}, W_{xe} = \frac{J_x}{y_e} \right] = \frac{J_x}{y_i}$$

se $y_i > y_e$

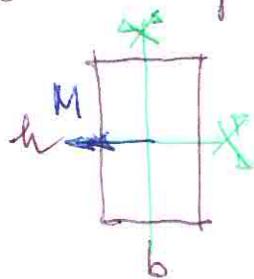
limite elastico per sole

$$N : N_e = \sigma_0 A$$

$$M_x : M_{xe} = \frac{\sigma_0}{W_{xe}} W_x$$

Set. doppiamente simmetrica

(es. rettangolare)



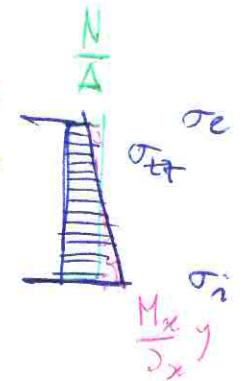
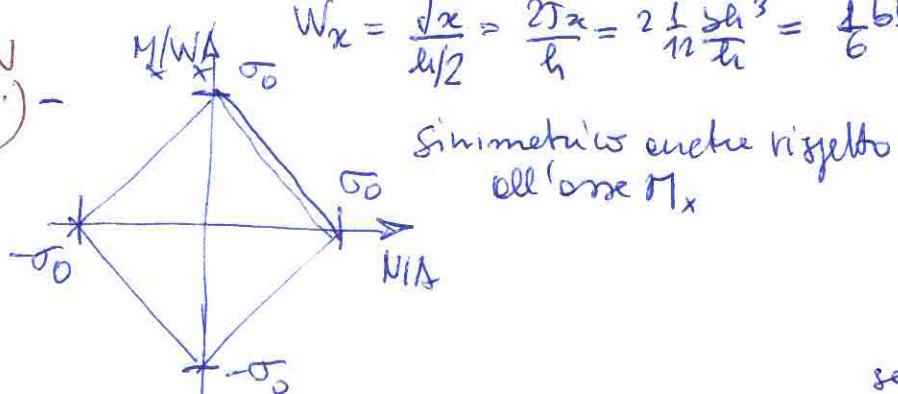
$$\text{In campo elastico: } -\sigma_c \leq \sigma(y) \leq \sigma_T$$

$$\text{e: } \sigma_{22} = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_x} \quad \text{tenso-flessione retta}$$

$$\text{introdossa } \sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x}$$

$$\text{estradossa } \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x}$$

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{2J_x}{h} = 2 \frac{1}{12} \frac{bh^3}{t} = \frac{1}{6} b h^2$$

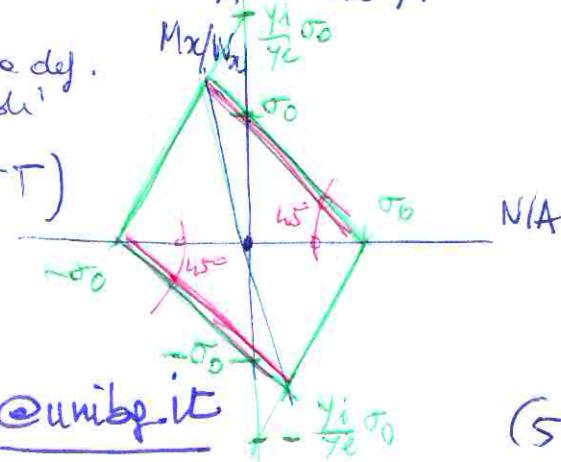


$$\text{se } \sigma_T = \sigma_c = \sigma_0$$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_0$$

$$\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} \frac{y_e}{J_x} \leq \sigma_0$$

NON necessita def.
di criterio di
resistenza
(se non c'è T)



Plasticité élastoplastique

- Matériaux symétriques $\sigma_F = \sigma_C = \sigma_0$ primo s'eu.

- Sess. rett.

- Ip. cinetico: sess. piane e l'asse linea d'asse deformata \Rightarrow deform. linearizz.

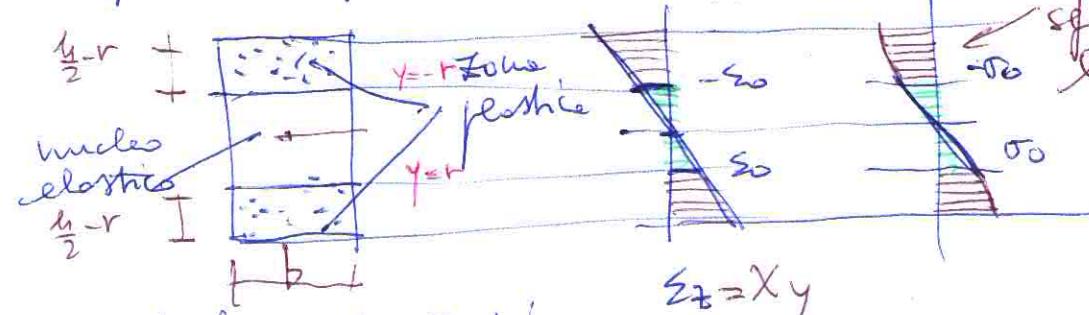
- axe u-n è concave x anche in campo elastico (per la simmetrie rispetto ad u)

$$\varepsilon_{27} = \frac{y \text{ def}}{h^2} = y X \quad \text{curvature} \rightarrow \varepsilon_{\max} = X h/2 \rightarrow \text{oppure } = \frac{\sigma_0}{E} \rightarrow X = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E} \quad X_e = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$$

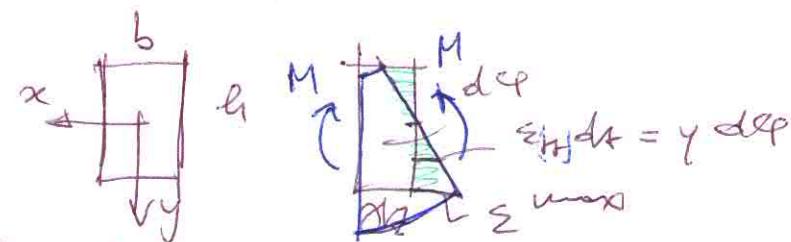
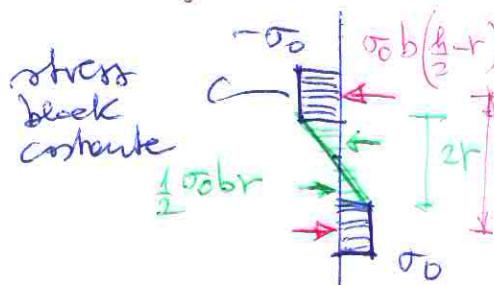
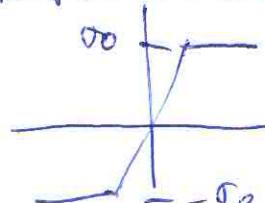
- In campo elastico si ha che $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$, non $\sigma_{27} = E \varepsilon_{17} = E X y = \frac{M}{J} Y$
pertanto, come ben noto dalle leggi di Bernoulli-Coulomb-Navier: $X = \frac{M}{EJ}$ o $M = EJ X$

- Termino delle forze elastiche: $\sigma_{\max} = \frac{M}{J} \frac{h}{2} = \frac{M}{W} = \sigma_0 \Rightarrow M_e = W \sigma_0 = \frac{b h^2}{6} \sigma_0$

- oltre M_e , X_e : pur restando lineare (piane) le sess., le $\frac{h}{2} \times \frac{h}{6}$ deformazioni plastiche si sviluppano nelle fibre esterne:



Conf. per flessione plasticica



$$M = \sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - r \right) \left(\frac{h}{2} + r \right) + \frac{1}{2} \sigma_0 b r \frac{h}{3} = \sigma_0 b \left[\left(\frac{h}{2} - r \right)^2 + \frac{2}{3} r^2 \right] \quad M_e$$

$$= \sigma_0 b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} r^2 \right) = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{2r^2}{h^2} \right) \quad (6)$$

erizzi@unibp.it

$$\text{Sort. } r = \frac{\sigma_0}{E X} \frac{X_e}{X} = \frac{\sigma_0}{E \frac{2}{3} \frac{X_e}{h^2}} \frac{X_e}{X} = \frac{h}{2} \frac{X_e}{X} \rightarrow \frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - 2 \frac{h^2}{4} \frac{X_e^2}{X^2} \frac{1}{h^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{X_e^2}{X^2} \quad \text{per } X > X_e$$

non lineare

Quindi: legame momento-curvatura per le fasi elastico-plastiche:

$$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2 - \text{N.B. per } X \rightarrow \infty$$

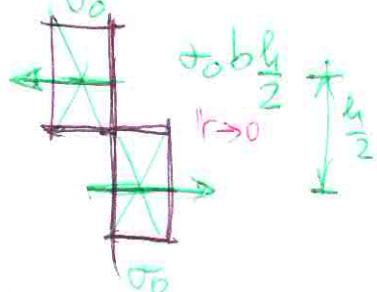
$$\text{oppure } \frac{M}{M_e} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$$

- confermato che per $X = X_e$, $M = M_e$

- con limitazione per M :

$$M_L = M_0 = \lim_{X \rightarrow 0} M(X) = \frac{3}{2} M_e = \frac{3}{2} W \sigma_0$$

momento limite \rightarrow MOMENTO LIMITE



stress block esteso e metà sezione

$$M_L = \frac{100}{3} \frac{b h^2}{2} \sigma_0$$

$$M_e = W \sigma_0$$

$$M_0 = Z \sigma_0$$

$$Z = 2 S_w$$

$$M_0 = \frac{bh^2}{h} \sigma_0$$

$$\Rightarrow \frac{M_0}{M_e} = \frac{2}{3}$$

$$M_0 = \frac{\sigma_0 b h}{2} \frac{h}{2} = \frac{b h^2}{4} \sigma_0 \checkmark$$

raggiunto solo anatomicamente
per $X \rightarrow 0$

\checkmark M_0

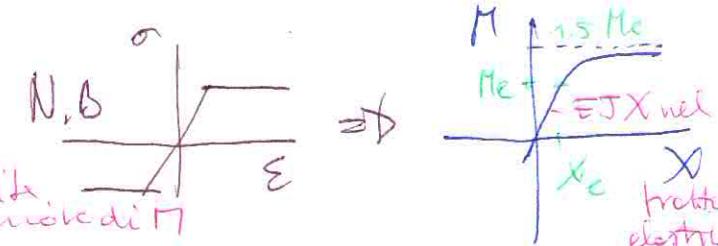
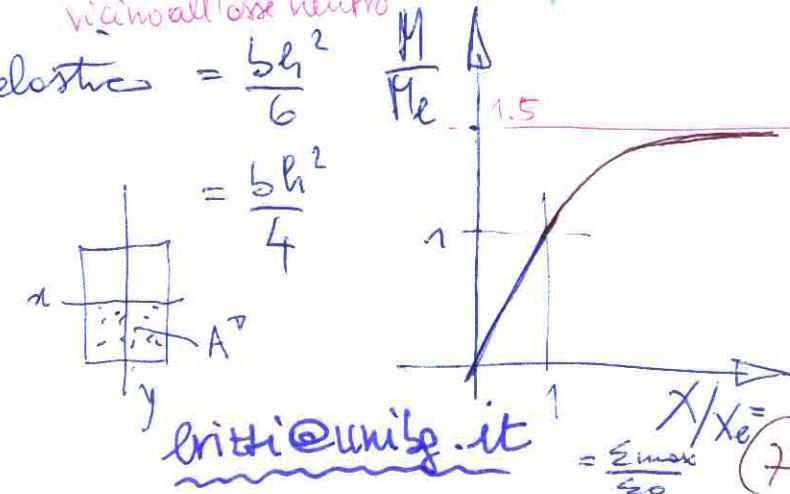
W : modulo di resistenza elastica

$$\alpha = \frac{M_0}{M_e} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$= \frac{2}{3}$$

> per sezioni con materiale addensato vicino all'asse neutro

+50% per M_L
rispetto a M_e !



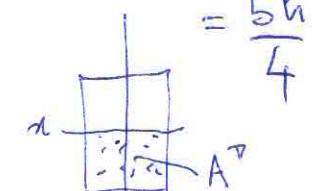
- per $X > X_e$: ridistribut. di sforzi σ_x , consentiti dalla duttilità del materiale, con conseguente aumento di M

"fattore di forma" - shape factor della sezione trasversale

$$\alpha = \frac{M_0}{M_e} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$= \frac{2}{3}$$

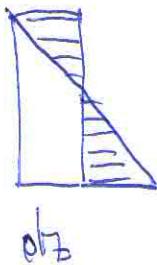
> per sezioni con materiale addensato vicino all'asse neutro



$$S_x = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$$

è momento statico di metà sez. rispetto all'asse neutro (asse x)

- In realtà la curvatura non può essere illimitata (anche se Mo resta stessa effica del M_{max} che la sezione può sopportare in campo elastoplastico).
- Infatti c'è limite di compressione di materiale, nelle parti comprese:



$$\epsilon_{min} = \epsilon \left(y = -\frac{h}{2} \right) = -X \frac{h}{2} = -1 \Rightarrow X \leq X^* = \frac{2}{h}$$

$$\epsilon dz = dz \rightarrow \epsilon = 1$$

Quindi

$$\frac{M}{M_0} \leq 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_e}{X^*} \right)^2 = \frac{M^*}{M_0}$$

$$\sim 1 - \frac{1}{3} 10^{-6} = 1 - \frac{0,000001}{3} = 1 - 0,0000003 = 0,9999997 \approx 1,$$

$$r \geq \frac{\sigma_0}{E X^*} = \frac{h}{2} \frac{\sigma_0}{E} r^* \quad (r \text{ non puo' essere 0})$$

$$\frac{\sigma_0}{E \approx 1000 \sigma_0} = 10^{-3} \frac{h}{2}$$

$$r^* = \frac{h}{2} \frac{X_e}{X^*} \rightarrow \frac{X_e}{X^*} = \frac{2}{h} r^* = \frac{2}{h} \frac{h}{2} \frac{\sigma_0}{E}$$

- limitazione operativa delle def. uie all'estremità:

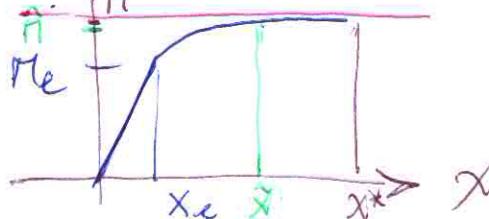
$$\epsilon_{min} > \hat{\epsilon} \Rightarrow -X \frac{h}{2} > -\hat{\epsilon} \Rightarrow X > \hat{X} = \frac{2}{h} \hat{\epsilon}$$

$$\frac{M}{M_0} \leq 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_e}{\hat{X}} \right)^2 = \frac{\hat{M}}{M_0}$$

$$\sim 1 - \frac{1}{3} 10^{-2} = 0,996$$

$$M_e \approx \hat{M} \approx M^*$$

grizzi@unibg.it



$$r \geq \frac{\sigma_0}{E \hat{X}} = \frac{h}{2} \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E} = \hat{r} \quad \frac{\sigma_0}{E} \approx 10^{-3}$$

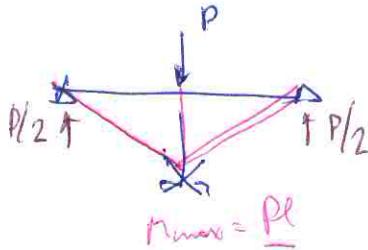
$$\text{es. } \hat{\epsilon} = 1\% = 0,01, \text{ con } \frac{E}{\sigma_0} \approx 10 \rightarrow \hat{r} = 10 \frac{h}{2} = 10^{-2}$$

$$\hat{r} = \frac{h}{2} \frac{X_e}{\hat{X}} \rightarrow \frac{X_e}{\hat{X}} = \frac{2}{h} \hat{r} = \frac{2}{h} \frac{h}{2} \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{E} \approx 10^{-1}$$

- Inoltre, es. per $\epsilon_{max} = 10\%$, $X/X_e = 10$, deform. tollerabile in materiali metallici

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{100} = \frac{299}{300} = 1 - 0,33\% \quad \begin{matrix} M_{superiore} \\ \text{sotto} \\ 0,33\% \end{matrix}$$

Consideriamo trave I80 ISOTRADA



Momento fisso
dal solo equilibrio
(modif. del legame
costitutivo)

Fare elasto plastichità:

- $P \leq \frac{h\pi_e}{e} = \left(\pi_e = \frac{P_e}{h} \leq \pi_e \right)$: tutta la trave è in campo elastico

$$= \frac{8}{3} \frac{\pi_0}{l}$$

diagr.
delle
curvature
 X

- $\frac{8\pi_0}{3l} < P < \frac{h\pi_0}{l}$ \rightarrow trave

posticittata con $\pi > \pi_e$

- $P \rightarrow \frac{h\pi_0}{l}$, curvatura ser. in messeria

sempre più grande e teoricamente illimitata

$P_L = \frac{h\pi_0}{l}$ è il carico di collasso delle trave.

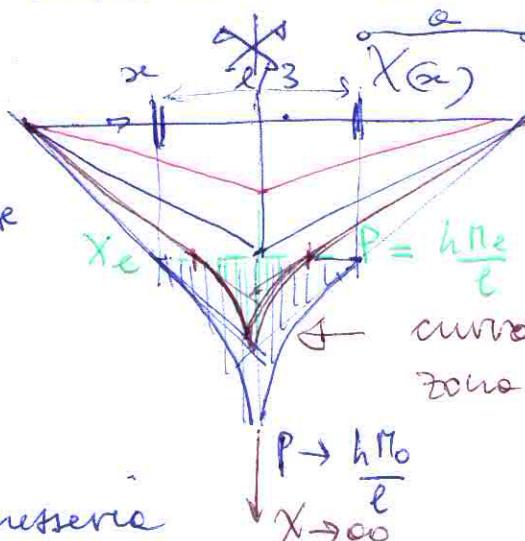
oltre P non può più aumentare
(un aumento di P , richiederebbe un
aumento di π_{max}).

orizi@unibg.it

Curvatura determinabile delle relazioni

$$M(x) = \begin{cases} EIx & x \leq x_e \\ M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_e} \right)^2 \right] & x \geq x_e \\ M_0 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x_e} \right)^2 \right] & \end{cases}$$

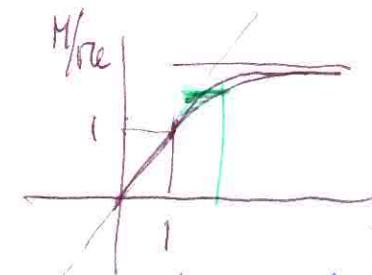
curvature con stesso
andamento di π



curvatura > nelle
zone elasto plastiche

$$\text{Per } P = \frac{4\pi_0}{l}$$

$$\frac{P}{2} a = \frac{4\pi_0}{l} \frac{a}{2} = \pi_e \Rightarrow a = \frac{\pi_e l}{M_0}$$



$$c = \frac{x_e}{l}$$

$$M_e = \frac{M_0 \cdot \pi_e}{c l}$$

$$M_e = \frac{M_0 \cdot \pi_e}{c l}$$

$$= \frac{l}{3}$$

(9)

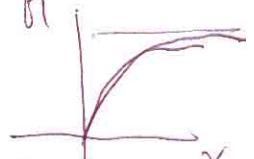
$\frac{l}{3}$ delle trave posticittate
Ampiezza anche notevole ma fatto
piuttosto limitato con scostamenti di
curvatura significativi:

per $\frac{X}{\pi_{ES}} > 2$ $M > \sim 0,963 M_0$
valore che si raggiunge solo in
una parola tale intorno
alla messeria

- Appare quindi deciso, supponendo le travi ormai elastiche, tranne che, nelle tensione limite $\Pi_{max} \rightarrow \Pi_0$, minima perde tutto e crollo delle messerie ove
- $$\int X dx = q \quad \text{può essere interpretata come relazione tra due tratti di trave}$$

- I punti di cerniere plastiche:

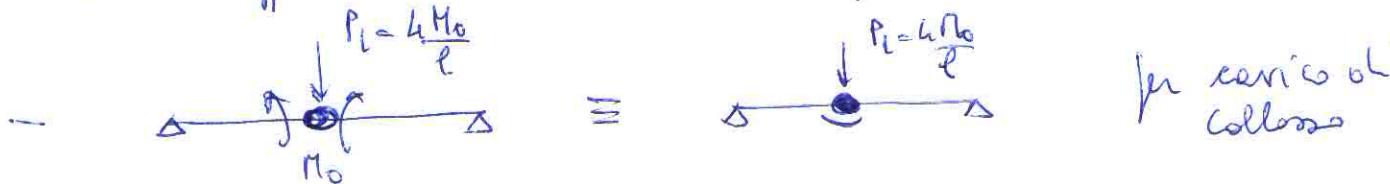
Antidice duegr. Π
non lin.



- trave non flessibile cost = Π_0



- sviluppo rottensione solo nel verso di flessione longitudinale



- Situazione tipica dei sistemi isostatici, con Π definito dal solo equilibrio - Ora $\Pi = \Pi_0$ si forma cerniere plastiche e conseguente meccanismo di collasso -

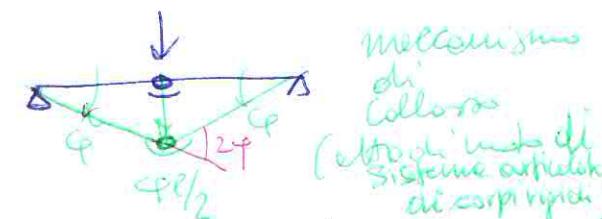
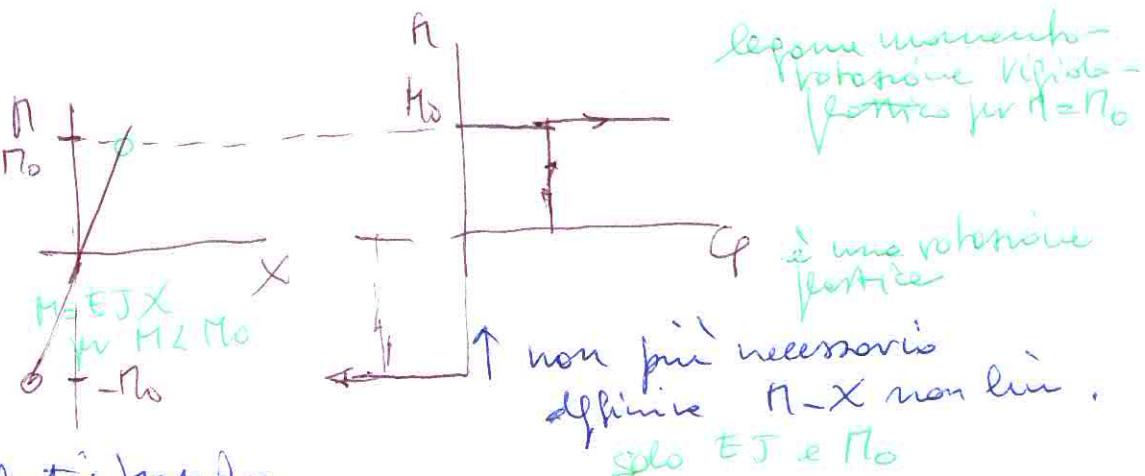
Non c'è possibile ridistribuzione dei momenti perché che avviene solo avvenire nelle strutture ipostatiche -

$$P = \lambda P_0$$

L'indice base
maoltiplicatore dei cernici

e collasso $\lambda = 5$ = fattore di sicurezza

grizzi@unibg.it

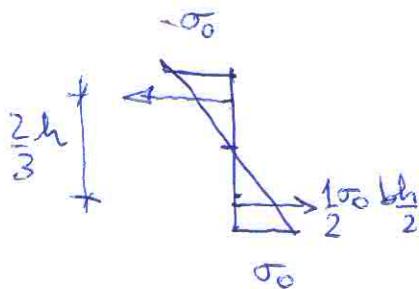


$$L = -M_0 \cdot 2\theta + P_i \frac{\theta l}{2} = 0 \quad \forall \theta$$

$$\Rightarrow P_i = 4 \frac{M_0}{l}$$

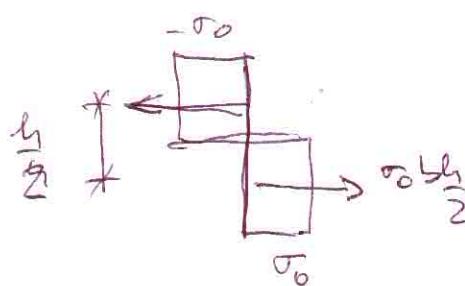
o col-

Riassunto (snflesione EP)



$$M_e = \frac{1}{2} \sigma_0 \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{bh^2}{6} \sigma_0 = W \sigma_0$$

$$W_e = W = \frac{bh^2}{6}$$



$$M_L = \sigma_0 \frac{bh}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_0 = Z \sigma_0$$

$$W_p = Z = \frac{bh^2}{4} = 25^1$$

$$\frac{h}{2} X_e = \frac{\sigma_0}{E} \Rightarrow X_e = \frac{2}{h} \sigma_0 = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$$

Trotto plastico:

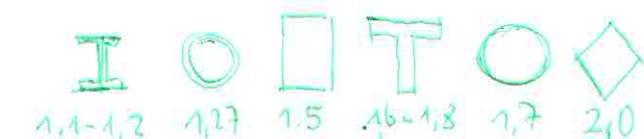
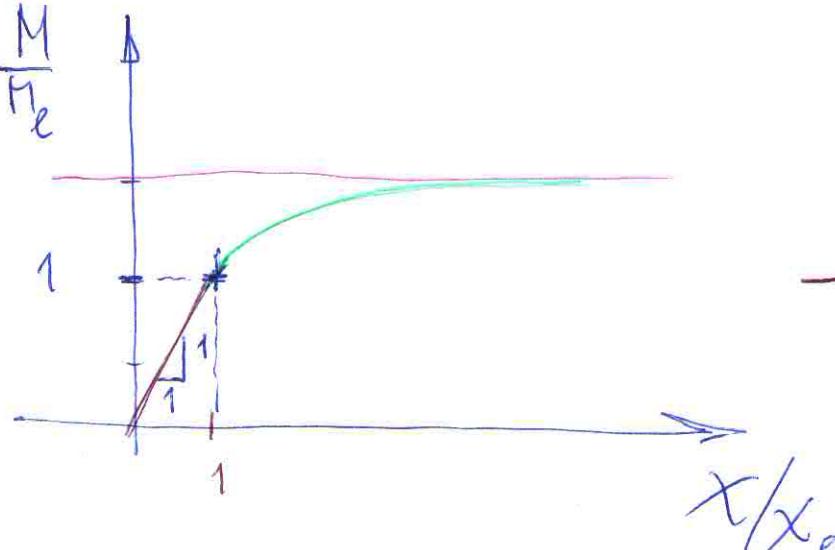
$$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$$

$$\frac{M}{M_e}$$

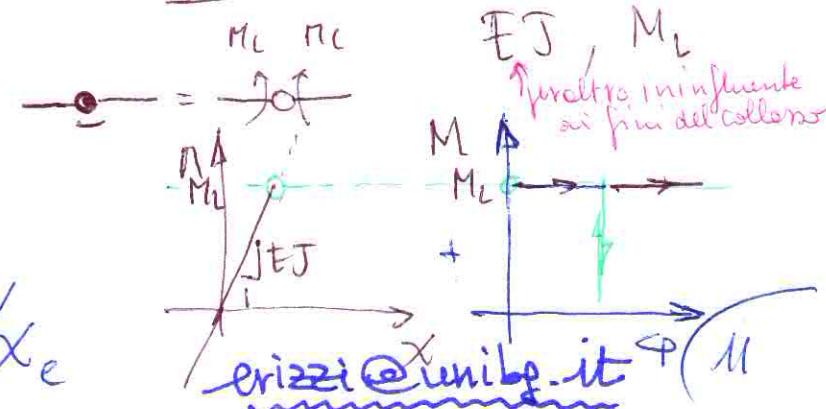
$$\frac{M}{M_L} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$$

Trotto elastico:

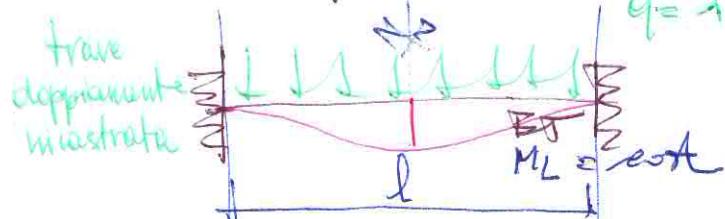
$$\frac{M}{M_e} = \frac{EJ}{Fe} \frac{X}{X_e} \quad X_e = \frac{X}{X_e}$$



Cerniere plastiche

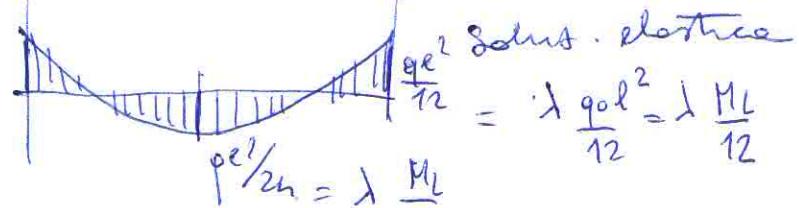


Esempio inferiore -



$$q = \lambda q_0 \text{ or } \lambda = \frac{q}{q_0} = \frac{q l^2}{M_L}$$

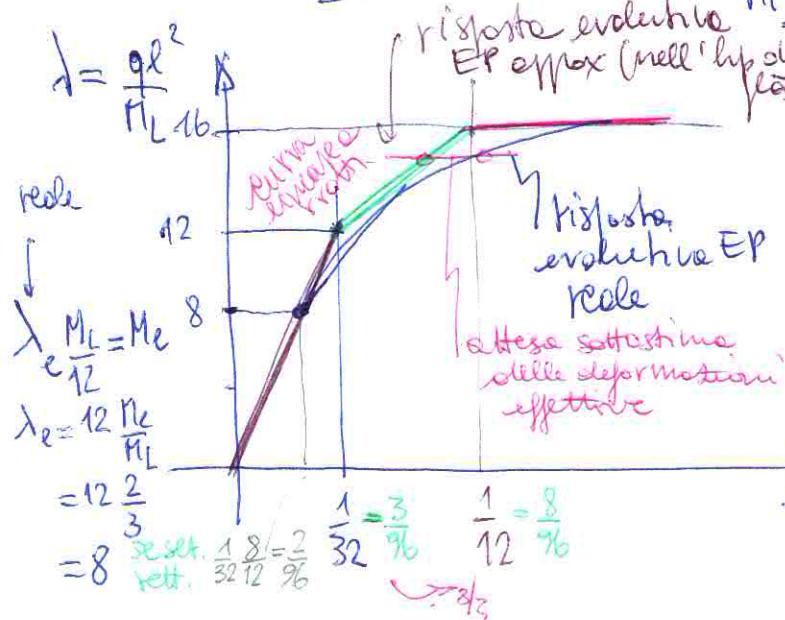
$$L q_0 = \frac{M_L}{l^2}$$



$$\text{frecce elastiche } f = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{E J} = \frac{1}{384} \lambda \frac{q_0 l^4}{E J} = \frac{1}{384} \lambda \frac{M_L l^2}{E J}$$

zone plastiche

$$\bullet \lambda \rightarrow \lambda_E \quad \lambda q_0 \quad \lambda q_0 = \frac{M_L}{\text{L ruote}} + \frac{\lambda_E q_0}{M_L}$$



$$\text{trave doppiamente incastriata}$$

l'ottimizzazione di certe travi
particolari (simmetrie nei due)

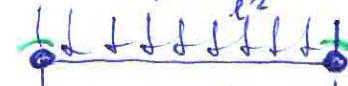
incastri

- A limite elastico, negli incastri:

$$\frac{\lambda M_L}{E I_{12}} = M_L \rightarrow \frac{\lambda}{E} = \frac{I_{12}}{I}$$

(non è vero de)

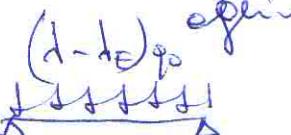
moltiplicatore del limite elastico



$$f_E = \frac{12}{384} \frac{M_L l^2}{E J}$$

$$\frac{32}{12} \frac{1}{64} \frac{32}{384}$$

- Ora $M = M_C$ negli incastri ma sono formule di ridistribuzione di M per le rotazioni plastiche che si sviluppano agli incastri (e momento costante).



$$\Rightarrow M_{\max} = \frac{M_L}{2} + (\lambda - \lambda_E) q_0 l^2 / 8$$



$$A \text{ collasso } \lambda = S \frac{M_L}{M}$$

$$M_L = \frac{M_L}{2} + (S - \lambda_E) \frac{q_0 l^2}{8}$$

$$= \frac{M_L}{2} + (S - \lambda_E) \frac{M_L}{l^2} \frac{P^2}{8}$$

$$\frac{1}{2} M_L = (S - \lambda_E) \frac{M_L}{8} \rightarrow S - \lambda_E = 4$$

$$erizzi@unibg.it$$

$$S = 4 + \lambda_E$$

$$= 4 + 12$$

$$= 16$$

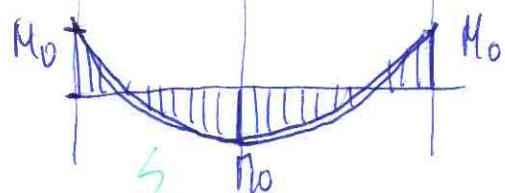
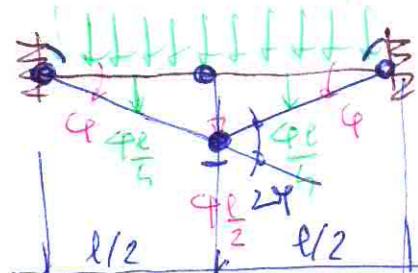
$$Q_L = 16 \frac{M_L}{l^2}$$

$$\text{UB: } \lambda_E, \lambda_L \text{ indip de } \frac{P^2}{E J}, \text{ si }$$

$$+ 330/10 = \frac{16 - 12}{12} = \frac{1}{3} (12)$$

Mecanismo di collasso:

$$\lambda_L q_0 = \lambda_L \frac{M_L}{l^2}$$



non necessario determinare l'andamento di $M(x)$, si finisce determinando λ_L .

ND - si sviluppa un meccanismo congruente di rotazioni plastiche, esistente se

- positiva impiega $M = M_L^+$
- negativa impiega $M = M_L^-$

- per ogni sezione sono rispettati i limiti di resistenza $M_L \leq M \leq M_L^+$

- vige l'equilibrio tra i carichi esterni $q(x)$ permanenti ed azioni interne $M(x)$ ($T(x), N(x)$) e i carichi accidentali $q(x)$ permanenti, distribuiti, concentrami.

- i carichi accidentali ($S + dL$) con $dL > 0$ non instaurano "equilibrio dinamico" ed i carichi in "eccesso" compiono lavoro positivo nel meccanismo di collasso (che diviene energia cinetica del moto).

Equilibrio e collasso incipiente: da PLV ($L \approx \infty$)

o Lectri

$$L_e = -M_L (2q + q + q) + q \left(\lambda_L \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{q l}{4} \right) = 0$$

$$-M_L h q + \lambda_L \frac{M_L}{l^2} \frac{q^2}{h} = 0 \quad \forall q$$

$s = \lambda_L = 16$ moltiplicatore di collasso plastico

$$\text{ove } M = M_0, q > 0 \\ M = -M_0, q < 0$$

Momento a collasso

In forma generale:

$$\int_{\text{Str}} (\lambda_L q_0) y(x) dx = \sum_i M_{bi} \varphi_i = L_p \xrightarrow{\text{dissipato}} \text{lavoro plastico}$$

$$2 \Rightarrow \lambda_L = s = \frac{\sum_i M_{bi} \varphi_i}{\int_{\text{Str}} q_0 y(x) dx}$$

Questa relazione consente il calcolo del moltiplicatore di collasso, una volta noto il meccanismo di collasso

$i > 0$ l'effetto di moto relativo al meccanismo di collasso comporta valore positivo del lavoro esterno da considerare.

erizzi@unibg.it

Teoremi fondamentali del calcolo a rotture (analisi limite)

Definizioni -

- Azioni flettenti $M(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{- staticamente ammissibili} = \text{in equilibrio con i carichi applicati} \\ \text{- posticamente ammissibili} = \text{compatibili con le condizioni di resistenza} \end{array} \right.$

Moltiplicatori $\lambda^+ = \beta$ staticamente ammissibili, tali per cui sono azioni intere lecite

- Mecanismo o cinematismo $\left\{ \begin{array}{l} \text{- cineticamente ammissibile} = \text{miglieante } M = M_L^+ \text{ ove } \dot{\theta} > 0 \\ \text{- INVERTITO} \\ \text{- posticamente ammissibile} \end{array} \right.$

Moltiplicatori $\lambda^+ = \beta$ cinematicamente ammissibili, associati a meccanismo leito mediante il bilancio energetico:

$$\lambda^+ \leq \sum_i P_i \dot{\theta}_i + \int g(x) \dot{\theta}(x) dx + \lambda^+ \int_{sys} q_0(x) \dot{\theta}(x) dx = \underbrace{\sum_i \pi_i \dot{\theta}_i}_{D>0}$$

(λ^+ generato, da mecc. amm., come si dovesse λ)

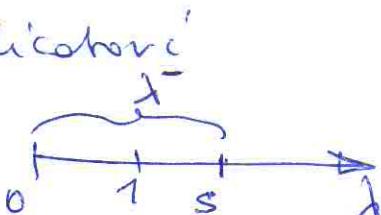
N.B. Il moltiplicatore λ^+ è contemporaneamente statico-amm. e cinematico-amm.

erizzi@unibg.it

Teoreme statics

Il moltiplicatore di coloss $s = \lambda_L$ è il massimo dei moltiplicatori statici. Esempio:

$$s = \lambda_L = \max \{ \lambda^{-} = \psi \} \Rightarrow \lambda^{-} < s = \lambda_L$$



Teorème cinétique

Il moltiplicatore di colpo $s = d_2$ è il minimo dei moltiplicatori
elettricamente attivi:

$$\alpha = \lambda_1 = \min \{ \lambda^+_{\neq \beta} \} \Rightarrow$$

Dim. Th. Shetico:

(1) a colosso effettivo

$$\sum_i \text{Po}_i Y_i = \sum_i M_{1i}^+ \varphi_i + \sum_i N_{2i}^- \varphi_i$$

$$\gamma = \lambda_L \leq \lambda^+$$

delimitazione superiore
(per eccesso) di d_L (non conservativo)

(2) \rightarrow

$$\lambda - \sum_i p_i y_i = \sum_i M_i q_i + \sum_i M_i q_i \quad \text{sempre e' collera}$$

④ stazione → stazione
 ⑤ circuito → circuito
 in (1) e (2) qualcosa
 a mezz'ora
 da mezza ora
 Collage
 Effettivo

$$(s - \lambda^2) = \sum_i (\underbrace{n_{xi} + n_i}_{\geq 0}) q_i + \sum_i (\underbrace{n_{xi} - n_i}_{\leq 0}) q_i \geq 0 \Rightarrow s \geq \lambda^2$$

\sum_i Pois y_i

pochi confronti

Si è ammesso "stetito" ("c'è scena"), oltre

$$\sigma = \max\{\sigma^-\}$$

erizzi@unibg.it

Dini, Th. Cinematics

(1) meccanismo fittizio

(2)

min(λ_L) quantità cinem. de
mecc. amm.

quantità statiche del sistema.

$$\lambda^+ \sum_i p_{oi} y_i = \sum_i \eta_i^+ q_i + \sum_i \eta_i^- q_i$$

quant.
cinem-mecanico
fittizio e allora

$$\lambda^- \sum_i p_{oi} y_i = \sum_i \eta_i^- q_i + \sum_i \eta_i^+ q_i$$

supra cinem-amm.

$$(\lambda^+ - s) \sum_i p_{oi} y_i = \sum_i (\eta_{Li} - \eta_i) q_i + \sum_i (\eta_{Li}^- - \eta_i^-) q_i > 0$$

$$\Rightarrow \lambda^+ - s \geq 0 \Rightarrow s \leq \lambda^+$$

Ma s è omisibile "cinematico" (cioè $s \in \lambda^+$), allora

$$s = \min\{\lambda^+\}$$

Teorema misto

In una struttura (e fissa), soggetta a dati carichi, se si trova una distribuz. amm. di momenti che raggiunge λ_L^+ in un numero di settori tali che rotazioni portiche non sono opposte ed in mecc. amm. (quindi con segno $\eta \equiv \text{segno } \eta_i^+$), allora il dì è il multilaterale limite.

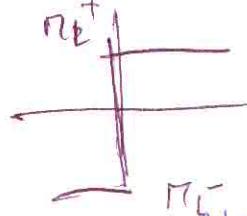
DIM: Un tale fattore è anche λ^+ -chiuso e poiché $\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$ $\left. \begin{array}{l} \lambda_L \in \lambda^+, \lambda_L \notin \lambda^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_L \in \lambda^+$

Corollari

1°. La capacità portante delle strutture è ^{risulta} indip. dalle proprietà elastiche del materiale.

Da th. statico, la delle proprietà di materiale che interviene è η_L^+ (essere so) - e cinem.

Si può sommare legge rigido-plastica:



2°. La capacità portante delle strutture ^{risulta} è indip. da stati di coazione (deform. termiche, sedimenti vincolari, tensioni residuali)

Da th. cinematico estetico

quantità statiche non influenzate da queste coos. vincolanti (coazioni inegual. sotto carichi nulli). Non intervergono nelle def. dei t.

Anche β non influenz., in quanto det. min. del bilancio tra lavoro esterno e potenze disponibili nell'atto di moto del cinemato.

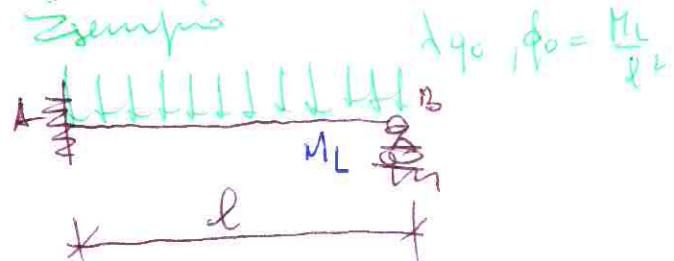
(però modificano il conf EP e le deform. e collasso iniziali)

erizzi@unibg.it

Calcolo del moltiplicatore di collasso -

$\lambda_L = s$ è il solo che risulti staticamente e cinematicamente amm. Per sistemi strutturali non troppo complessi (travi, telai), ciò consente la valutazione di s mediante metodi di calcolo "manuali".

Esempio



- Calcolo i momenti flettenti nel rispetto dell'equilibrio

$$V_B l = \lambda q_0 \frac{l}{2} + M_L = 0$$

$$V_B l = \lambda \frac{M_L}{\frac{l^2}{2}} - M_L = \frac{\lambda-2}{2} M_L$$

$$\boxed{V_B = \frac{\lambda-2}{2} \frac{M_L}{\frac{l^2}{2}}} \quad \rightarrow T=0 \text{ ove } T = V_B - \lambda q_0 x = 0 \quad \forall x \in [0, l]$$

$$M(x) = V_B \cdot x - \lambda q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{\lambda-2}{2} \frac{M_L}{\frac{l^2}{2}} x - \lambda \frac{M_L}{\frac{l^2}{2}} \frac{x^2}{2}$$

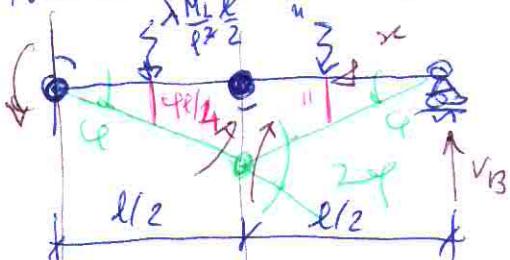
$$= -\frac{M_L}{l} x + \frac{\lambda}{2} \frac{M_L}{l^2} x (l-x) = -\frac{M_L}{l} x + \frac{6 M_L}{l^2} x (l-x)$$

$$\text{in } x = \frac{l}{2} = -\frac{M_L}{l} \frac{l}{2} + \frac{6 M_L}{l^2} \frac{l}{2} \frac{l}{2} = \frac{M_L}{2} \left(\frac{\lambda}{4} - 1 \right) = \frac{M_L}{2} \left(\frac{12}{5} - 1 \right)$$

$$= \frac{M_L}{2} \lambda = M_L \quad \text{v.o.k}$$

frizzi@unibg.it

- Si valuti un moltiplicatore $\lambda^+ = \beta$ nelle forme del meccanismo: (non è quella frizzi)



$$\sum \lambda \frac{M_L}{\frac{l^2}{2}} \alpha K_i = M_L (4 + 2 + 4) \quad \text{H.C.}$$

$$\lambda = \lambda^+ = 12 \text{ è obbligatoria sup. di } s$$

- Verifica delle compatibilità di M .

$$M_{max} M \left(\frac{5}{12} l \right) = -\frac{M_L}{l} \frac{5}{12} l + \frac{6 M_L}{l^2} \frac{5}{12} l \left(l - \frac{5}{12} l \right)$$

$$= M_L \left(-\frac{5}{12} + \frac{5}{2} - \frac{25}{24} \right) = \frac{-10 + 60 - 25}{24} M_L$$

$$= \frac{25}{24} M_L > M_L \quad \text{e conformità violata!}$$

Quindi $\frac{M_{max}}{M_L} = \frac{25}{24} = \rho_m$ λ^+ non anche λ^- quindi non è s

- Riducendo M di $1/\rho_m$ si ottiene il rispetto alle compatibilità, con $\frac{M}{\rho_m}$ in equil. con $\lambda = 12/\rho_m$, cioè $\lambda = \lambda^+/\rho_m$

$$= \frac{12 \cdot 24}{25} = \frac{288}{25} = 11.52$$

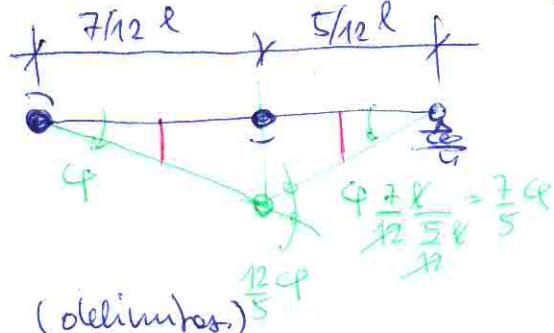
travate delimitatorie (più presto strette)

$\lambda^+ = 12$

$\lambda^- = 11.52$

(18)

- Se delimito. non ritenute suff., si considera nuovo cinemotismo, con e.p. in x_m:



Ora stime più migliorate:

$$11.52 \leq S \leq 11.567142$$

se non suff. si considera movimento $M(x)$ in equil. con λ^+ e senza volute de conformità, riscolando movimento $M_c < \lambda^+$.

$$x_m = \frac{\lambda - 2}{2\lambda} l = 0,4142156 l, 1 - x_m/l = 0,5857844$$

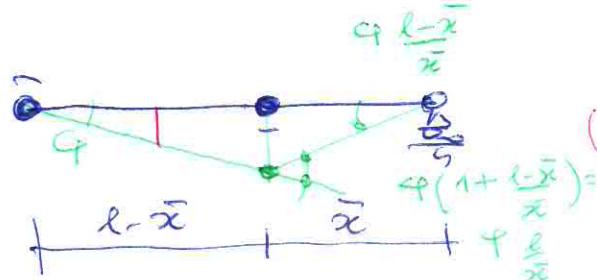
$$M_{max} = \frac{M_L x_m}{l} \left(-1 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{x_m}{l} \right) \right) = M_L \underbrace{1,0000348}_{e_m} = \frac{M_L}{0,9999652} \rightarrow \lambda = \lambda^+ / \frac{e_m}{e_m} = 11,656736$$

Ora, più delimitazione arco stretto:

$$11.656736 \leq S \leq 11.657142 \rightarrow$$

$S = 11.657$ è stima arco regolare

- Per trovare valore esatto, si suppone la cerniere mi compate a \bar{x} incognita.



$$\lambda_L \frac{M_L}{l^2} \left((l - \bar{x}) \frac{F(l - \bar{x})}{2} + \lambda_L \frac{M_L}{l^2} \bar{x} F \frac{\bar{x}}{2} \right) = M_L \left(Q + Q \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}} \right) = M_L Q \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}}$$

$$(l - \bar{x}) \lambda_L \left[(l - \bar{x}) + \bar{x} \right] = 2l^2 \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}} \\ \lambda_L l(l - \bar{x}) = 2l^2 \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}} \Rightarrow$$

$$\lambda_L = 2 \frac{l}{\bar{x}} \frac{l + \bar{x}}{l - \bar{x}} \quad (*)$$

erizzi@unibg.it

$$\text{check: } \bar{x} = \frac{l}{2}, \lambda_L = 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} = 12 \text{ ok} \quad (19)$$

- Si vuole ora che, per \bar{x} , sia anche M_{\max} , cioè $\bar{x} = x_m = \frac{\lambda - 2}{2\lambda} l$

$$\text{e } 2\lambda \bar{x} = \lambda l - 2l$$

$$\lambda(2\bar{x} - l) = -2l \Rightarrow \lambda(l - 2\bar{x}) = 2l$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2l}{l - 2\bar{x}}} \quad (e)$$

Eseguendo i due controlli si ottiene:

$$\frac{2l}{l - 2\bar{x}} = \lambda \frac{l}{\bar{x}} \frac{l + \bar{x}}{l - \bar{x}}$$

$$\bar{x}(l - \bar{x}) = (l + \bar{x})(l - 2\bar{x})$$

$$l^2 - 2l\bar{x} + l\cancel{\bar{x}} - 2\bar{x}^2 - l\cancel{\bar{x}} + \bar{x}^2 = 0$$

$$- \bar{x}^2 - 2l\bar{x} + l^2 = 0$$

$$\bar{x}^2 + 2l\bar{x} - l^2 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{l}\right) - 1 = 0}$$

$$\left(\frac{\bar{x}}{l}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

quindi, e' sollezzo:

$$\frac{\bar{x}}{l} = \sqrt{2}-1 = 0,4142135 \quad e \quad 1 - \frac{\bar{x}}{l} = 0,5857865$$

ore $\lambda_L = \frac{2l}{l - 2(\sqrt{2}-1)l} = \frac{2l}{l - 2\sqrt{2}l + 2l} = \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}}$

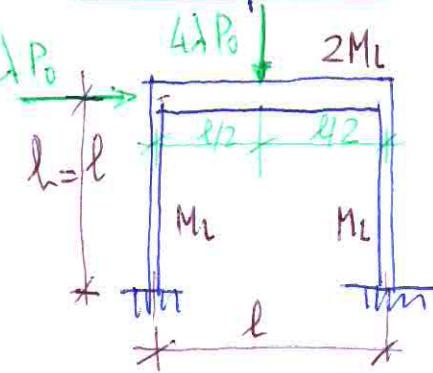
$$= \frac{2(3+2\sqrt{2})}{9-8} = 2(3+2\sqrt{2})$$

$$= \boxed{11,656845 = 5}$$

idem de $\lambda_L = 2 \frac{1}{\sqrt{2}-1} \frac{1+\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2-2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} = \frac{2}{3-\frac{4}{\sqrt{2}}} \quad \text{ok} = \frac{2}{3-2\sqrt{2}}$

erizzi@umb.it

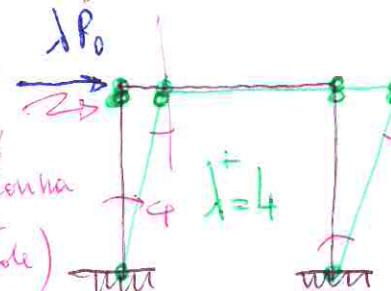
Telcio e portale



$$P_0 = M_L$$

$$P_0 = \frac{M_L}{\lambda}$$

Delimitazioni superiori λ^+ possono essere ottenute considerando alcuni meccanismi potenziali:



Cerniere sui pilastri, del modo trave/colonna (colonna più debole)

meccanismo di portale

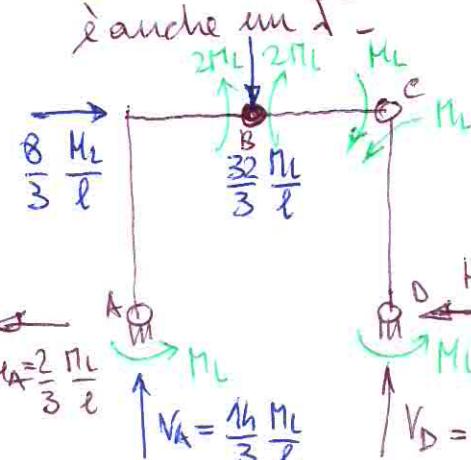
$$\lambda P_0 \cdot \frac{l}{2} = 2M_L \cdot \frac{l}{2} + 2M_L \cdot \frac{l}{2}$$

$$2\lambda P_0 \cdot \frac{l}{2} = 6M_L \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \lambda^+ = 3$$

(comprende solo il piano verticale)

meccanismo di trave (PARZIALE)

- Il moltiplicatore limite è l'unico a risultare contemporaneamente cinematicamente e staticamente amm. - Si verifica quindi se l'ultimo λ^+ trovato è anche un λ^-



Si determina la distribuzione di momenti in equilibrio sui carichi dati (incluse coppie nelle cerniere plastiche).

$$\bullet \sum M_C^{sc} = 0 \Rightarrow H_D = 2M_L/l$$

$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = \frac{2}{3}M_L/l$$

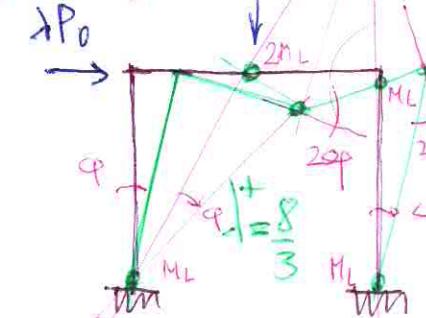
$$\bullet \sum M_B^{sc} = 0 \Rightarrow V_D = \frac{(2-1)M_L + 2M_L}{l/2} = \frac{3M_L}{l/2} = \frac{6M_L}{l} = \frac{18}{3} \frac{M_L}{l}$$

$$\bullet \sum M_B^{sc} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{(2+1)M_L - 2/3 M_L}{l/2} = \frac{7/3 M_L}{l/2} = \frac{14}{3} \frac{M_L}{l}$$

($\sum F_x = 0$)

surre per calcolare M_E

MECC. (COMPLETO)



meccanismo trave/pilastro

$$\lambda P_0 \cdot \frac{l}{2} + \lambda P_0 \cdot \frac{l}{2} =$$

$$= M_L (4 + 4 + 24) + 2M_L \cdot 2P_0$$

$$= 8M_L \cdot \frac{l}{2}$$

$$3\lambda P_0 \cdot \frac{l}{2} = 8M_L \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \lambda^+ = \frac{8}{3}$$

è il minore tra quelli
sivora calcolati cioè
il più vicino a $\lambda_L = 5$:
 $\lambda_L = 5 \leq 2,667$

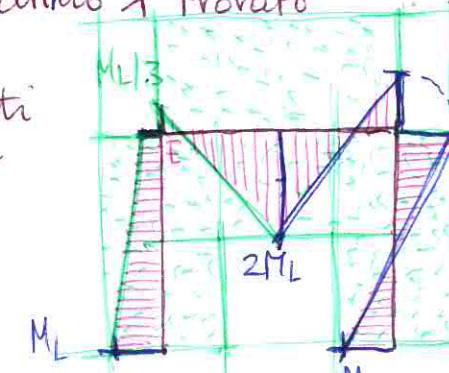
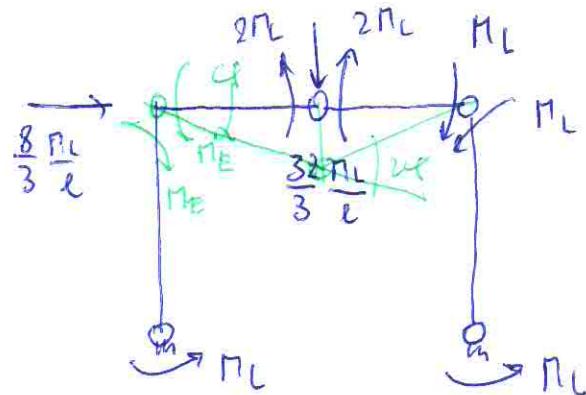


Diagramma ovunque conforme! Quindi λ^+ è anche λ^-
Pertanto

$$\lambda_L = s = \frac{8}{3} = 2,667$$

N.B. Con 4 cerniere plastiche, struttura esattamente a colonna incapiente \rightarrow momento determinato dal solo equilibrio

Momento in E calcolabile senza RV, da PLV ($\Delta = 0$) (Calcolo chirurgico, al fine di verificare il rispetto delle conformità).



Perche' di trova:

$$\Delta = -M_E \frac{q}{2} + 2M_L \frac{2q}{3} - n_L q + \frac{32}{3} \frac{n_L}{e} \frac{q^2}{2} = 0, \quad \text{verg}$$

$$M_E = \left(5 + \frac{16}{3}\right) n_L = \frac{1}{3} M_L \quad (\text{è conforme, cioè } \leq n_L)$$

Osservazioni

grizzi@unibg.it

- Il moltiplicatore di collasso $\lambda_L = s$ può essere calcolato direttamente, evitando la complete analisi evolutiva delle strutture (fornisse le risposte carico/spostamento del sistema).
- Il calcolo di un moltiplicatore cinematico $\lambda^+ \in \mathbb{R}$ è piuttosto agevole, facendo riferimento a cinematici regolari - Il min. tra i valori λ^+ trovati delimita superiormente il λ_L - Si osserva se il λ^+ risulta poi anche un moltiplicatore statico $\lambda^- = \lambda^- = s = \lambda^+$.
- Se il cinematico scelto presenta solo un gdl, il bilancio energetico $\Delta L_0 = D \Rightarrow \lambda^+ = D/L_0$ impone univocamente l'equil. e collasso iniziale - Pur non essendo richiesto di considerare solo meccanismi plastici con un gdl, operando con meccanismi ad un gdl per ogni λ^+ è possibile associare una soluzione equilibrata - Questo rigetta le conformità nelle cerniere plastiche ma non necessariamente altre (cioè un λ^+ non è necessariamente λ^- , altrimenti avremmo già trovato il λ_L).
- A volte il cinematico rende le strutture staticamente determinate (MECCANISMO COMPLETO) - In tal caso è possibile ricostruire univocamente i momenti in equilibrio col λ^+ e quindi verificare se le conformità sono rispettate, cioè se λ^+ è anche λ^- , vale a dire λ_L - In altri casi il meccanismo coinvolge una parte delle strutture (MECCANISMO PARZIALE) e queste più risultano ijerstetica: l'equil. è soddisfatto per λ^+ valore delle ijerstetiche residue; la soluz. è static. cumul. Se è possibile assegnare alle ijerstetiche valori tali da soddisfare ovunque le conformità.
- I metodi di calcolo "manuali" del moltiplicatore limite λ_L o di delimitos. λ^+, λ^- possono essere offinati ma sono scarsamente sistematici e le soluzioni dipende dalle specifiche p.b. nel esame.
- Metodi generali per la valutazione di λ_L si basano su tecniche di Programmazione Matematica (Ricerca Operativa)
che calcolano il \max o il \min di una funzione (obiettivo), all'interno di un dominio noto, definito da vincoli sulle variabili (ottimizzazione vincolata). Il p.b. si dice di Programmazione Lineare quando f. obiettivo e vincoli sono lineari nelle variabili - Soluz. es. mediante (27) metodi del simplex.