

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

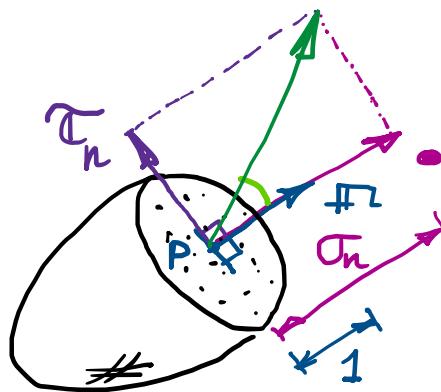
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 13

## Tensioni principali e direzioni principali di sforzo

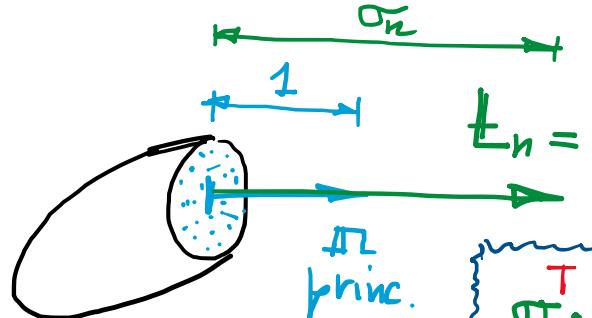


$$\underline{\tau}_n = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^T \cdot \underline{n} = \text{vettore sforzo di Cauchy} = \sigma_n + \tau_n$$

•  $\sigma_n = \sigma_n \underline{n}$  ove  $\sigma_n = \underline{\tau}_n \cdot \underline{n} = \tau_n^{-1} \cdot \cos \theta_n$  vettore sforzo normale  
 $= \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sum_{i,j} n_i \sigma_{ij} n_j$  componente di sforzo normale (scolare)

•  $\tau_n = \underline{\tau}_n - \sigma_n = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \sigma_n \underline{\underline{I}} \cdot \underline{n}$  vettore sforzo tangenziale o tagliente  
 $= (\underline{\sigma} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n}$

Direzione principale di sforzo: (solo sforzo normale, no sforzo tagliente)



$$\underline{\tau}_n = \sigma_n \underline{n} \quad (\underline{\tau}_n = 0)$$

$$(\underline{\sigma} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n} = 0$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_n \underline{n} \quad = \sigma_n \underline{\underline{I}} \cdot \underline{n}$$

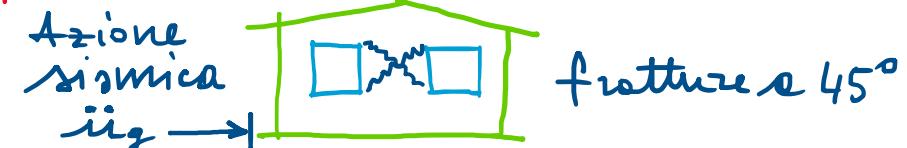
Problema agli autovettori associato al tensore sforzo  $\underline{\sigma}$

matrice  $A \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$   
 Autovettore  $\Rightarrow$  direzioni principali  
 Autovettore  $\Rightarrow$  tensioni principali

$$[\underline{\underline{I}}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Simbolo di Kronecker

Valevole  
pratiche: implicazioni  
sulla resistenza dei materiali sul  
comportamento strutturale (es. materiali  
lastrici, non resistenti a trazione)



Il pb. agli autovalori associati al tensore sforzo di Cauchy ammette soluzioni non banali ( $m \neq 0$ ) se:

$$\tau_n = (\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \circ \pi = 0 \Rightarrow -\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = 0$$

Coefficienti del polinomio caratteristico  $I_i$ :

Invarianti di sforzo (al variare del

sistema di riferimento): [poiché  $\sigma_n$  devono esserlo]  
[radici dell'eq. ne]

- primo (lineare)  $I_1 = \text{tr } \sigma \sim \sigma^1$

$$= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sum \sigma_{ii} = \mathbb{I} : \sigma = \delta_{ij} \sigma_{ij}$$

- secondo (quadratico)  $I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\sigma^2) - (\text{tr} \sigma)^2) \sim \sigma^2$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2)$$

$$= - \left( \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \right) = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})$$

- terzo (cubico)  $I_3 = \det \sigma \sim \sigma^3$

$$= \frac{1}{3} \text{tr} \sigma^3 - \frac{\text{tr} \sigma}{2} \left( \text{tr} \sigma^2 - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma^2 \mathbb{I} \right)$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}$$

$$-\left| \begin{array}{ccc} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{array} \right| = \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n^1 - I_3 \sigma_n^0 = 0$$

eq. ne caratteristica  
(di 3° grado)

$\downarrow$  3 radici:  
autovalori  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$   
caratteristico tensioni principali

$\uparrow$   
autovettori  $\pi_I, \pi_{II}, \pi_{III}$   
direzioni principali  
di sforzo

- Poiché  $\sigma$  è reale ( $\sigma \in \mathbb{R}$ ) e simmetrico ( $\sigma^T = \sigma$ ), gli autovalori sono reali:  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \in \mathbb{R}$
- A due autovalori distinti corrispondono due autovettori mutuamente ortogonali:

$$\sigma_I \neq \sigma_{II} \Rightarrow \begin{aligned} \Pi_I \cdot (\sigma \cdot \Pi_I = \sigma_I \Pi_I) \\ \Pi_I \cdot (\sigma \cdot \Pi_{II} = \sigma_{II} \Pi_{II}) \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} \Pi_{II} \cdot \sigma \cdot \Pi_I - \Pi_I \cdot \sigma \cdot \Pi_{II} &= \sigma_I \Pi_{II} \cdot \Pi_I - \sigma_{II} \Pi_I \cdot \Pi_{II} \\ 0 \neq \Pi_I \cdot \sigma \cdot \Pi_{II} - \Pi_I \cdot \sigma \cdot \Pi_{II} &= (\sigma_I - \sigma_{II}) \Pi_I \cdot \Pi_{II} = 0 \end{aligned}$$



- Moltiplicità delle radici

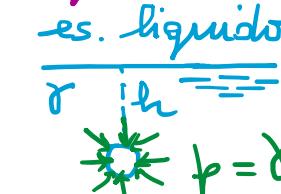
+ 3 radici distinte  $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \Rightarrow 3$  dir. princ. mutuam.  $\perp$

+ 2 radici distinte, es.  $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \Rightarrow$  ogni direz.  $\perp$  a  $\Pi_{III}$   
(" " coincidenti)

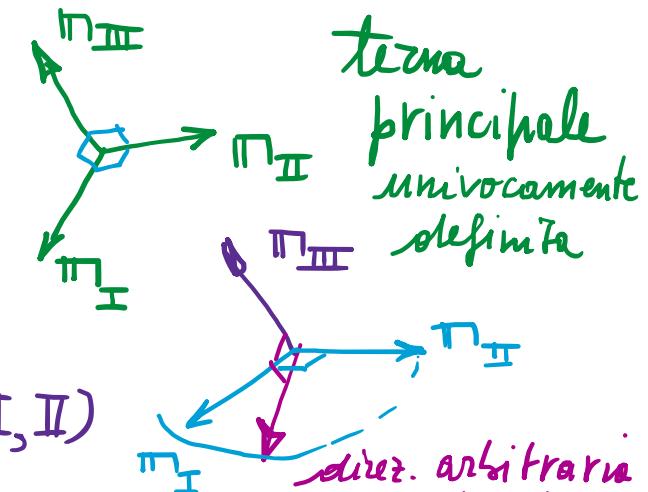
è principale nel piano (I, II)

+ 3 radici coincidenti  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} \Rightarrow$  ogni direz. è principale  
(stato di sforzo sferico o idrostatico)

"uguale in tutte le direzioni"  
(solo sforzo normale)



terza  
principale  
univocamente  
definita



direz. arbitraria  
nel piano  $\perp \Pi_{III}$

terza  
arbitraria

- Diagonalizzazione di  $[\sigma]$  nelle direzioni principali

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

elementi in terne principale

$$[\sigma] \underset{\substack{\text{rif.} \\ \text{princ.}}}{=} \begin{bmatrix} \sigma_I & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_{II} & \\ & & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

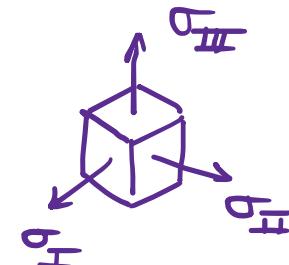
matrice diagonale

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = -(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \\ I_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{array} \right.$$

Invarianti espressi nel riferimento principale

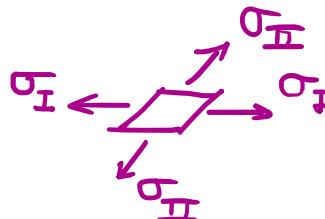
- Classificazione dello stato di sforzo:

+ triassiale (3D):  $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0, \sigma_{III} \neq 0$



sforzo tridimensionale  
(es. solido)

+ biaxiale (2D): " " ,  $\sigma_{III} = 0$



sforzo piano  
(es. lastra, trave)

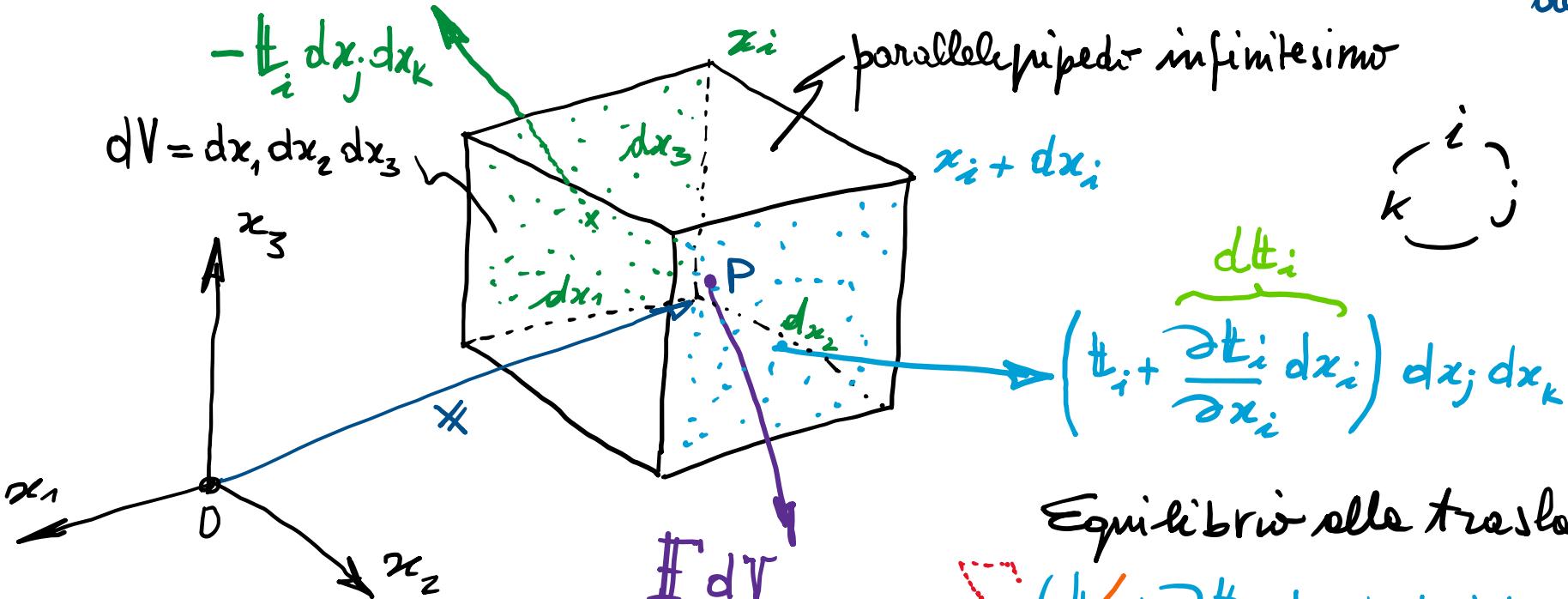
+ monassiale (1D): " ,  $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$



sforzo monodimensionale  
(es. filo teso)

(vedi es. stato di sforzo nelle prove monassiali di trazione)

Equazioni indefinite di equilibrio dei continui:  $\forall \mathbf{x}, dV$



sulla variazione spaziale  
del campo di sforzo

$$\sigma(\mathbf{x}), t_n(\mathbf{x})$$

es. nelle travi

$$N^T(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})$$

$$T^T(\mathbf{x}) = -q(\mathbf{x})$$

Equilibrio alle traslazione:

$$\sum_i \left( t_i + \frac{\partial t_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_j dx_k - t_i dx_j dx_k + F dV = 0$$

$\frac{\partial}{\partial x}$  gradiente

eq. ne vettoriale  $\sum_i \frac{\partial t_i}{\partial x_i} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ in } V$

3 eq.m. scalari,  $j=1,2,3 \Rightarrow \sigma_{ij} + F_j = \frac{\partial t_i}{\partial x_i} + F_j = 0_j \Leftrightarrow$

$\frac{\partial(\ )}{\partial x_i} = (\ )_{,i} \quad [\text{Equil. alle rotz.} \Rightarrow \sigma^T = \sigma]$

$\text{div} = \nabla \cdot (\ )$   
operatore divergenza

$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ in } V$

$\text{div } \sigma = -\mathbf{F}$