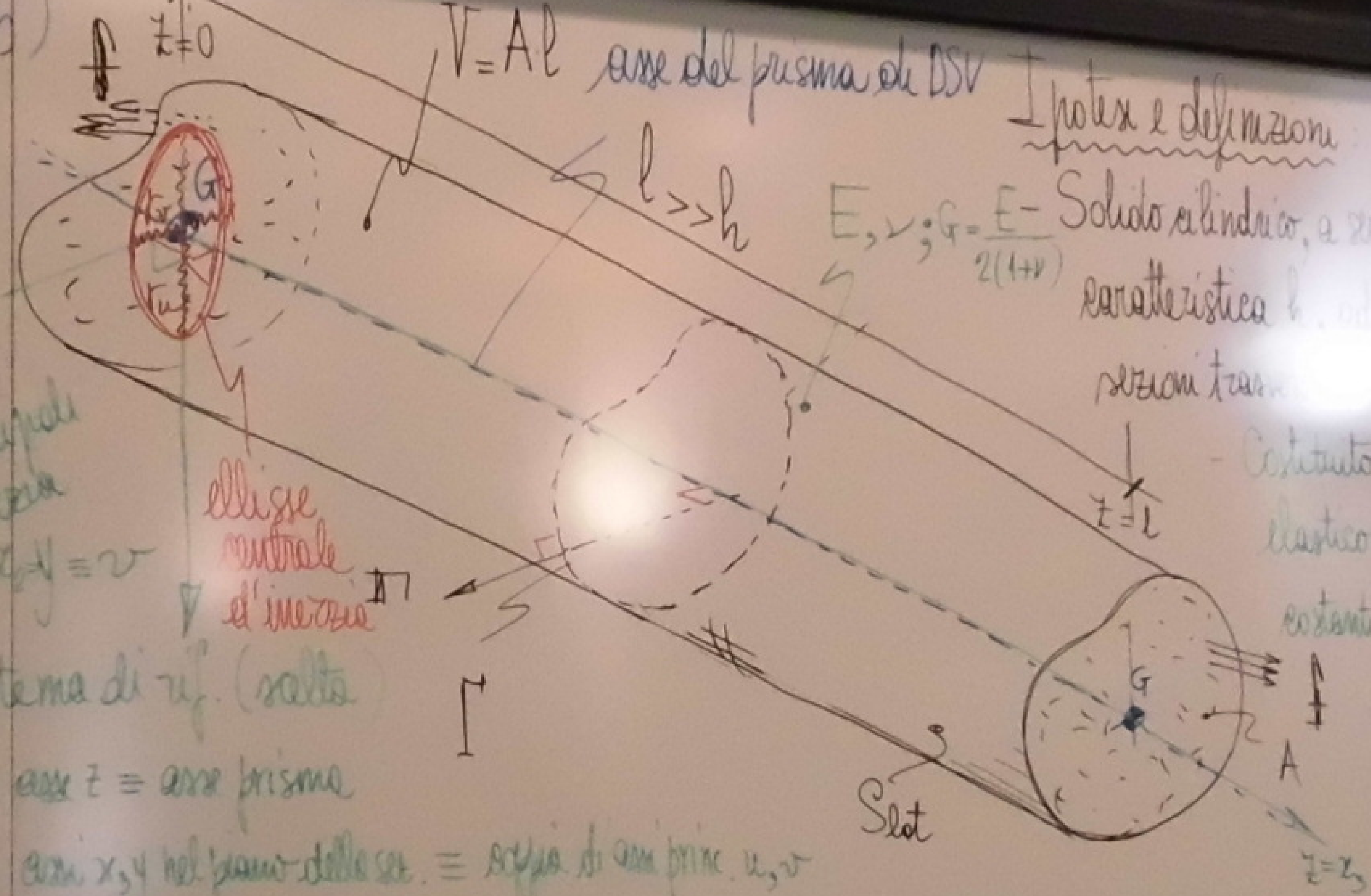
Problema di de Saint Venant (~1855)

- Si tratta di un problema elastico lineare accademico particolare che riguarda un solido di morfologia particolare, tale da riprodurre il solido tipo trave, soggetto ad azioni note e del quale si intende ricostruire la risposta tenso-deformativa, utile in senso pratico alla verifica e al dimensionamento della trave
- Si presta a trattazioni analitiche, ove possibile in forma chiusa o tramite soluzioni approssimate od ottenute con metodi numerici e strategie computazionali



assi principali d'inerzia
$x \equiv u$
$y \equiv v$

Sistema di rif. (scelta)

- asse $z \equiv$ asse prisma
- assi x, y nel piano della sez. $\equiv$ coppia di assi princ. u, v

Assi principali d'inerzia

- baricentrici : $G \in u, v$ $\left(S_u = \int_A v\, dA = 0\right)$
- mutuamente ortogonali : $u \perp v$
- coniugati : $J_{uv} = \int_A uv\, dA = 0$ (CNS)

Ipotesi e definizioni

- Solido cilindrico, a sezione costante di area A e dimensione caratteristica h, ad asse rettilineo (luogo dei baricentri delle sezioni trasversali ... asse stesso) di forma allungata
- Costituito da un mezzo continuo, con materiale elastico lineare isotropo, omogeneo, con ... costante in V.
- Privo di vincoli esterni ($S_u = \emptyset$);
- Privo di forze di volume
- Soggetto a forze di superficie f agenti solo sulle basi del prisma (superficie laterale S_{lat} scarica), note solo in termini di risultanti, ... formano un sistema di forze autoequilibrato.

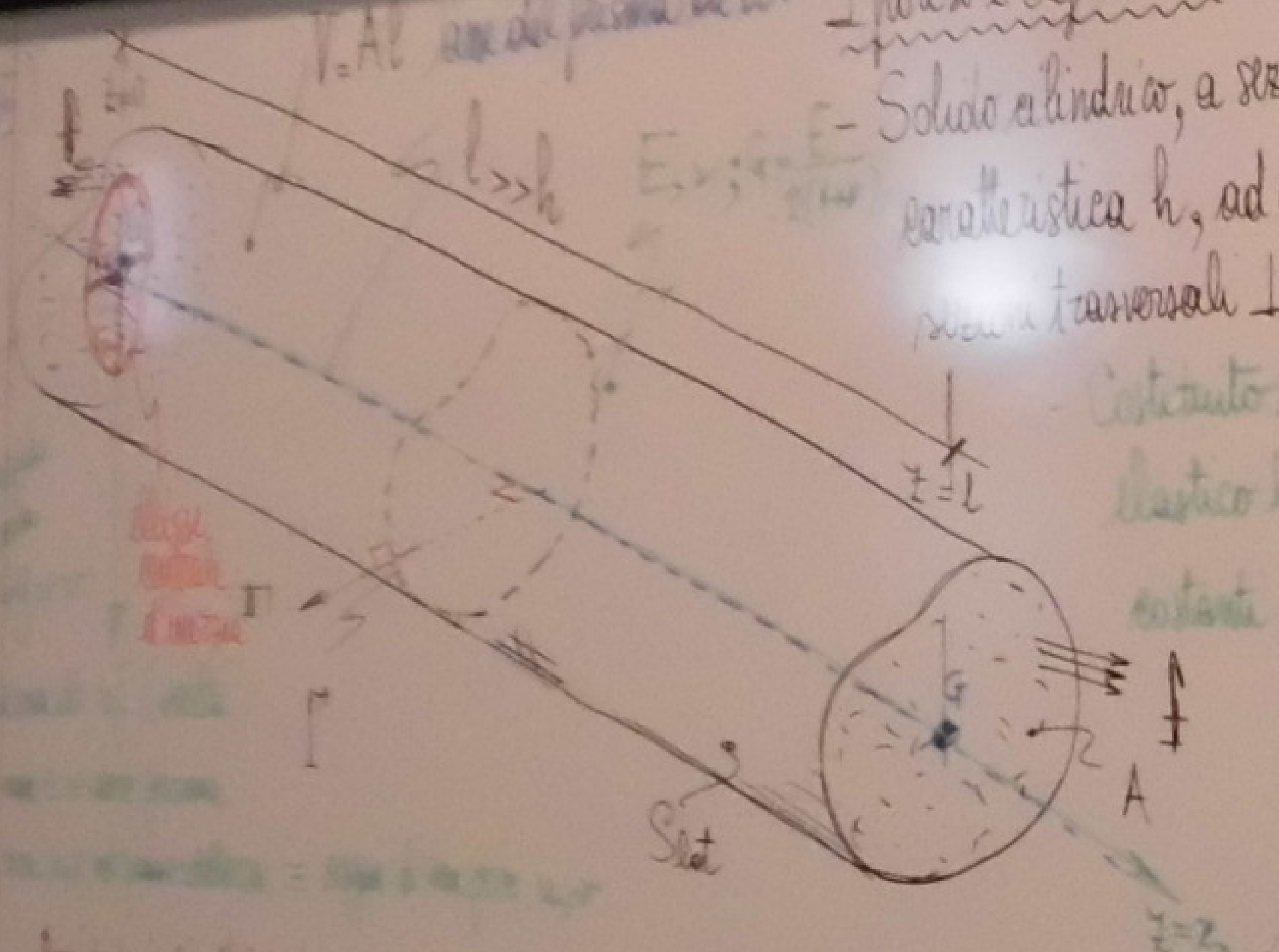
Casi di DSV

- Azione assiale N
- Azione flettente M
- Azione tagliante T
- Azione torcente M_t

Postulato di DSV

Problema di de Saint Venant
- Si tratta di un problema elastico lineare particolare che riguarda un solido di morfologia particolare, tale da riprodurre il solido tipo trave, soggetto ad azioni note e del quale si intende ricostruire la risposta tenso-deformativa
V = Al
asse del prisma di DSV
l >> h
ellisse centrale d'inerzia
Slat
G
A
f
Assi principali d'inerzia
- baricentrici : G ∈ u, v
- mutuamente ortogonali : u ⊥ v
(CNS)
Casi di DSV
- Azione assiale N
- Azione flettente M
- Azione tagliante T
- Azione torcente Mt
Ipotesi e definizioni:
- Solido cilindrico, a sezione costante di area A e dimensione caratteristica h, ad asse rettilineo (luogo dei baricentri delle sezioni trasversali ⊥ all'asse stesso) di forma allungata
- Costituito da un mezzo continuo, con materiale elastico lineare isotropo, omogeneo, con param. costanti in V
- Privo di vincoli esterni (S_s ≡ ∅);
- Privo di forze di volume (F = 0 in V)
- Soggetto a forze di superficie f agenti solo sulle basi del prisma (superficie laterale Slat è scarica), note solo in termini di risultanti, quindi con distribuzione arbitraria e tali da formare un sistema di forze autoequilibrato.
- Postulato di DSV
- La soluzione del pb di DSV risulta indipendente dalla reale distribuzione delle forze di superficie agenti sulle basi (z=0, z=l), a parità di risultanti
l >> h
~h
Zone con alterazione locale dello stato tenso-deformativo (effetti di bordo)
- Dimostrazione su basi matematiche

Problema di de Saint Venant



Ipotesi e definizioni:

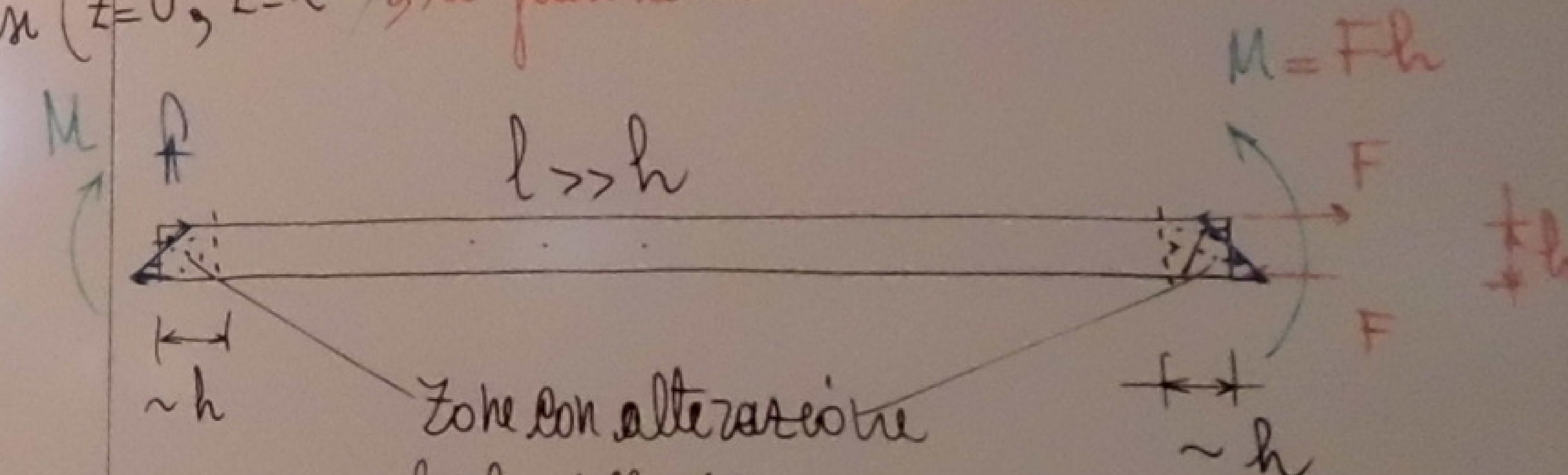
- Solido cilindrico, a sezione costante di area A e dimensione caratteristica h, ad asse rettilineo (luogo dei baricentri delle sezioni trasversali ⊥ all'asse stesso) di forma allungata
- Costituito da un mezzo continuo, con materiale elastico lineare isotropo, omogeneo, con param. costanti in V.
- Privo di vincoli esterni ($S_s \equiv \emptyset$);
  la soluz. in termini di spost. risulterà nota a meno di moti rigidi (che restano possibili)
- Privo di forze di volume ($\mathbb{F} = 0$ in V)
- Soggetto a forze di superficie f agenti solo sulle basi del prisma (superficie laterale S_{lat} è scarica), note solo in termini di risultanti, quindi con distribuzione arbitraria e tali da formare un sistema di forze autoequilibrato.

Casi di DSV

- Azione assiale N
- Flessione retta M
- Azione tagliante T
- Azione torcente M_t

- Postulato di DSV:

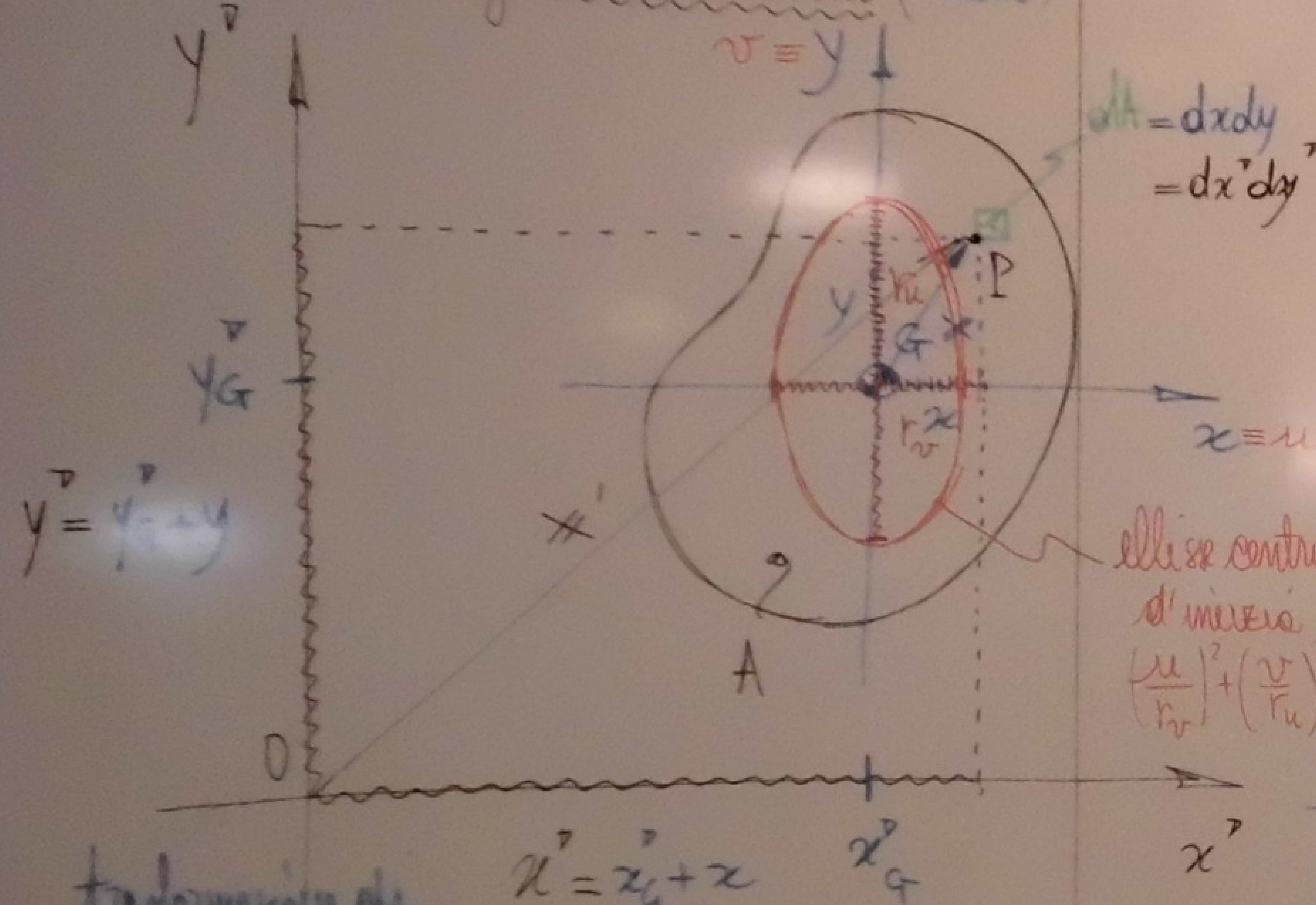
- La soluzione del pb. di DSV risulta indipendente dalla reale distribuzione delle forze di superficie agenti sulle basi ($z = 0$, $z = l$), a parità di risultanti



Zone con alterazione locale dello stato tenso-deformativo (effetti di bordo)

- Si potrebbe ipotizzare, per le forze f sulle basi, una distribuzione coerente con quella di sforzo, incognita, da determinarsi mediante la soluzione del pb. stesso
- Dimostrazione su basi matematiche e numeriche (Metodo degli Elementi Finiti FEM)

Richiami di Geometria delle Aree (Masse)



$$\left(\frac{u}{r_v}\right)^2 + \left(\frac{v}{r_u}\right)^2 = 1$$

$$x' = x'_G + x$$

trasformazione di coordinate per traslaz. degli assi.

Proprietà d'inerzia (geometriche della sez. trasv.)

$$[L]^2 \quad A = \int_A \underbrace{(x,y)^0}_{1}\, dA > 0$$

Area (momento d'inerzia di ordine 0) della sezione

(es. $\sum_i$ aree elementari)

$$[L]^3 \quad S_{x'} = \int_A y'\, dA \; ; \; S_{y'} = \int_A x'\, dA \gtreqless 0$$

Momento statico rispetto agli assi x' e y', rispettiv. 1)

$$[L]^4 \quad J_{x'} = \int_A y'^2\, dA \; , \; J_{y'} = \int_A x'^2\, dA > 0$$

Momento d'inerzia (2)

$$J_{x'y'} = \int_A x'y'\, dA \gtreqless 0$$

" centrifugo rispetto agli assi x', y'

(nullo per assi principali u, v) $\Rightarrow J_{x,y}$ max e min

raggi giratori d'inerzia $[L]$

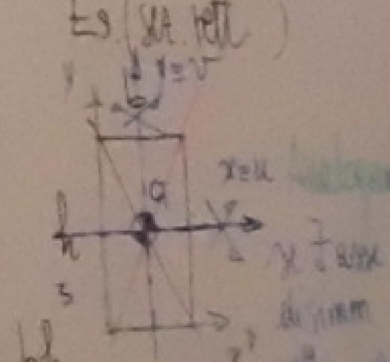
$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \; ; \; \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \Rightarrow \text{ellisse centrale d'inerzia}$$

$$\begin{cases} S_{x'} = A\, y'_G \\ S_{y'} = A\, x'_G \end{cases}$$

Calcolo di G

$$\Rightarrow \quad x'_G = \frac{S_{y'}}{A}, \quad y'_G = \frac{S_{x'}}{A}$$

Es. (sez. rett.)



$$\begin{cases} J_u = \frac{1}{12} b h^3 \\ J_v = \frac{1}{12} b^3 h \end{cases}$$

$$J_{x'} = \frac{1}{3} b h^3$$

Teorema di Trasposizione

$$J_{x'y'} = \int_A x'y'\, dA = \int_A (x'_G + x)(y'_G + y)\, dA$$

$$= \int_A x y\, dA + \int_A x'_G y'_G\, dA + \dots$$

$$J_{x'y'} = J_{xy} + A\, x'_G y'_G$$

Richiami di geometria delle Aree
ellisse centrale d'inerzia
$\left(\frac{u}{r_v}\right)^2+\left(\frac{v}{r_u}\right)^2=1$
$y' = y'_G + y$
$x' = x'_G + x$
$x \equiv u$
$= dx\,dy = dx'\,dy'$
Proprietà d'inerzia (geometriche della sez. trasv.)
della sezione
$[L]^2 \; A = \int_A dA$
Area (momento d'inerzia di ordine 0)
$[L]^3 \; S_{x'} = \int_A y' \, dA \; ; \; S_{y'} = \int_A x' \, dA$
Momento statico (rispetto agli assi x' e y', rispettiv.) 1)
$[L]^4 \; J_{x'} = \int_A y'^2 \, dA \; , \; J_{y'} = \int_A x'^2 \, dA > 0$
Momento d'inerzia (2)
$J_{x'y'} = \int_A x' y' \, dA$
centrifugo rispetto agli assi x', y'
(nullo per assi principali u, v) ⇒ $J_{x,y}$ max e min
raggi giratori d'inerzia [L]
$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \; ; \; \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$ ⇒ ellisse centrale d'inerzia
$S_{x'} = A \, y'_G$
$S_{y'} = A \, x'_G$
Calcolo di G
$x'_G = \frac{S_{y'}}{A}$
$y'_G = \frac{S_{x'}}{A}$
Es. (sez. rett.)
$x \equiv u$
$y \equiv v$
x asse di simm
$J_u = \frac{1}{12} b h^3$
$J_v = \frac{1}{12} b^3 h$
Teorema di trasposizione
$J_{x'y'} = \int_A x' y' \, dA = \int_A (x'_G + x)(y'_G + y) \, dA$
$= \int_A x y \, dA + \int_A x'_G y'_G \, dA + \int_A x \, y'_G \, dA + \int_A y \, x'_G \, dA$
$J_{x'y'} = J_{xy} + A \, x'_G \, y'_G$
$J_{x'} = J_x + A \, y'^2_G$
$J_{y'} = J_y + A \, x'^2_G$
assi baricentrici

Proprietà d'inerzia (geometriche della sezione)

Area (momento d'inerzia di ordine 0) della sezione

$A = \int_A dA$

1) Momento statico (rispetto agli assi x' e y', rispettiv.)

$S_{x'} = \int_A y' \, dA \; ; \; S_{y'} = \int_A x' \, dA$

2) Momento d'inerzia (

$J_{x'} = \int_A y'^2 \, dA \; , \; J_{y'} = \int_A x'^2 \, dA > 0$

$J_{x'y'} = \int_A x' y' \, dA \gtreqless 0$ centrifugo rispetto agli assi x', y'

(nullo per assi principali u, v) $\Rightarrow J_{x,y}$ max e min

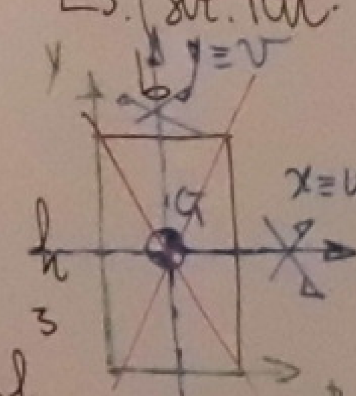
$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \; ; \; \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \Rightarrow$ ellisse centrale d'inerzia

$$\begin{cases} S_{x'} = A \, y'_G \\ S_{y'} = A \, x'_G \end{cases}$$

Calcolo di G (luogo assi con $S = 0$)

$$\Rightarrow \quad x'_G = \frac{S_{y'}}{A} \qquad y'_G = \frac{S_{x'}}{A}$$

Es. (sez. rett.)



$$\begin{cases} J_u = \frac{1}{12} b h^3 \\ J_v = \frac{1}{12} b^3 h \end{cases}$$

Analogam. se ∃ asse di simm. retta → asse princ.

Teorema di trasposizione (da assi baricentrici ad assi non baricentrici, o viceversa)

$$J_{x'y'} = \int_A x' y' \, dA =$$

$$= \int_A (x'_G + x)(y'_G + y) \, dA$$

$$= \underbrace{\int_A x y \, dA}_{} + \int_A x'_G y'_G \, dA + \underbrace{\int_A x \, y'_G \, dA}_{S_y \cdot y'_G} + \underbrace{\int_A y \, x'_G \, dA}_{S_x \cdot x'_G}$$

$S_y = 0$, $S_x = 0$ per assi baric.

$$\begin{cases} J_{x'y'} = J_{xy} + A \, x'_G \, y'_G \\ J_{x'} = J_x + A \, y'^2_G \\ J_{y'} = J_y + A \, x'^2_G \end{cases}$$

assi baricentrici

assi baric $\xrightarrow{\oplus}$ assi non bar.

$\xleftarrow{\ominus}$