

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

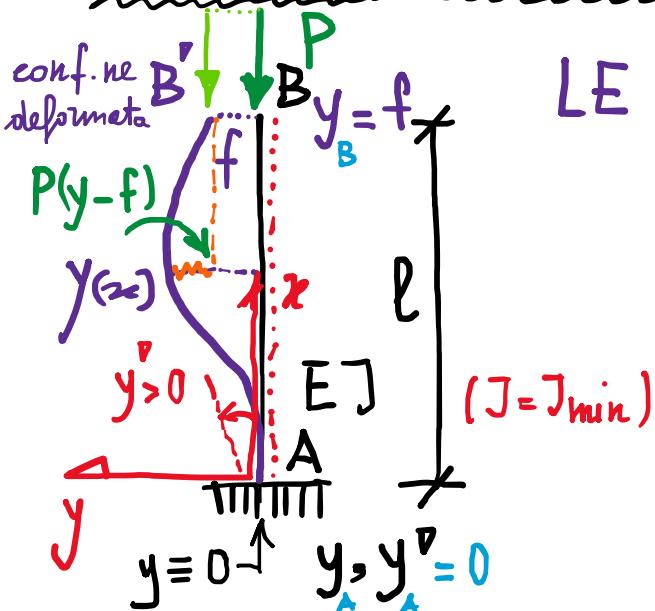
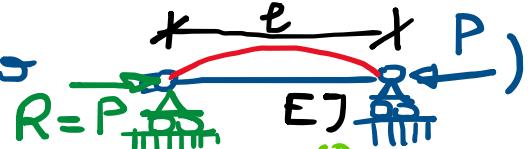
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 21

# Altre condizioni di vincolo (generalizzazione dell'asta di Euler)



$$\text{LE: } \int_0^l y'' dx = + M(x) \quad (\text{nella configuzz. deform.})$$

$$= - P(y-f)$$

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = \frac{P}{EJ} f \Rightarrow y(x) = \underbrace{A \sin \alpha x + B \cos \alpha x}_\text{integ. gen. omog.} + \underbrace{f}_\text{integ. part.}$$

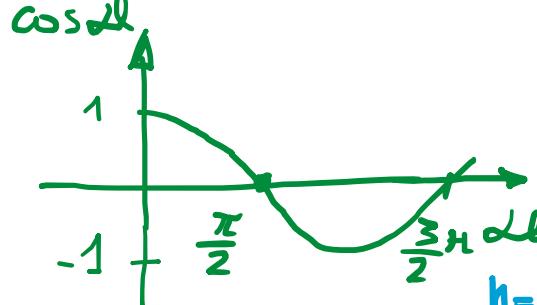
$$\alpha^2 > 0 \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$P = \alpha^2 \frac{EJ}{l^2} = (\alpha l)^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Soluzioni non banali:  
 $y \neq 0$  se

$$\alpha l \neq 0 \quad \text{dispari} \leftarrow$$

$$\alpha l = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$



$$(\alpha l)^2 = n^2 \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow P_{cr,n} = n^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$$

$$n=1 \quad P_{cr}^E = \frac{1}{4} \pi^2 EJ = \frac{1}{4} P_{W,A,E} = \pi^2 \frac{EJ}{l_{0,n}^2}$$

$$l_{0,n} = \frac{2}{n} l \quad \text{lungh. di libera inflessione}$$

$(*) = 0$   
soluz.  
"banale")

Scritture e impostazione delle c.e.:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow B + f = 0 \Rightarrow B = -f \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha l A = 0 \\ y(l) = f \Rightarrow \sin \alpha l A + \cos \alpha l B + f = f \end{cases}$$

Sistema  
delle  
condizioni  
al contorno

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha l & 0 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ f \end{bmatrix} = 0$$

- Soluzione e deformate critiche ( $\mu \propto l = n \frac{\pi}{2}$ )

$$\begin{cases} B = -f \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{cr,n} = f \left( 1 - \cos \frac{n\pi x}{2l} \right)$$

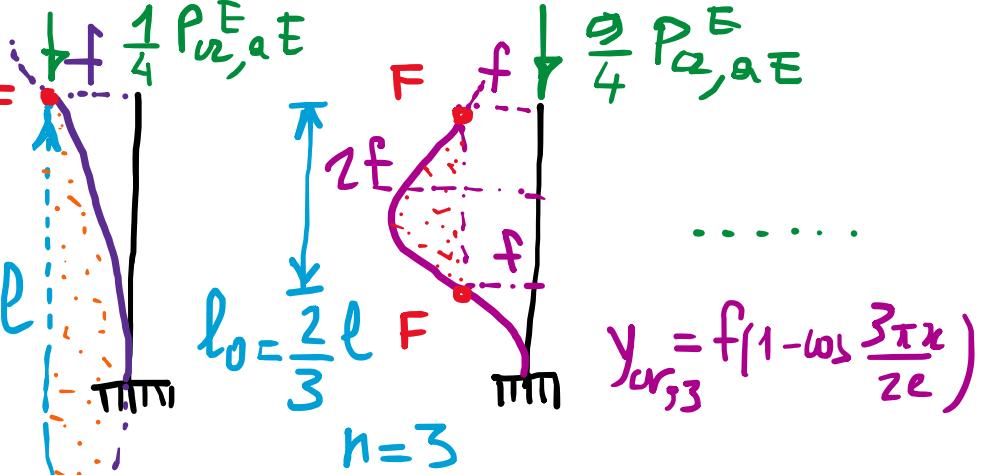
arbitr.

$$l_{0,n} = \frac{2}{n} l$$

$$y_{cr} = f \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

$$l_0 = 2l$$

$$n=1$$



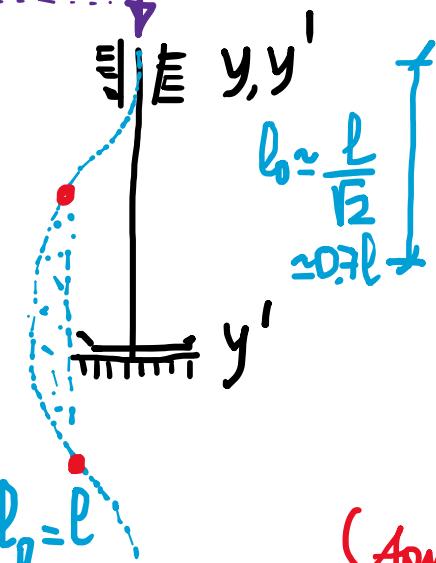
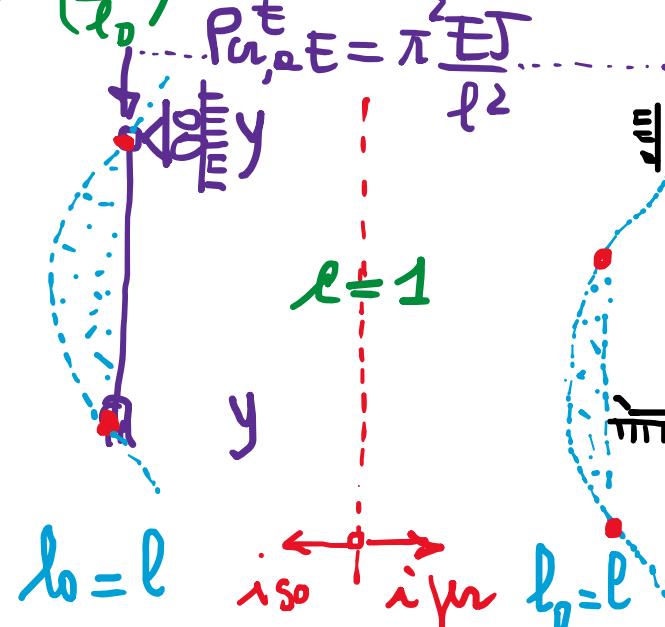
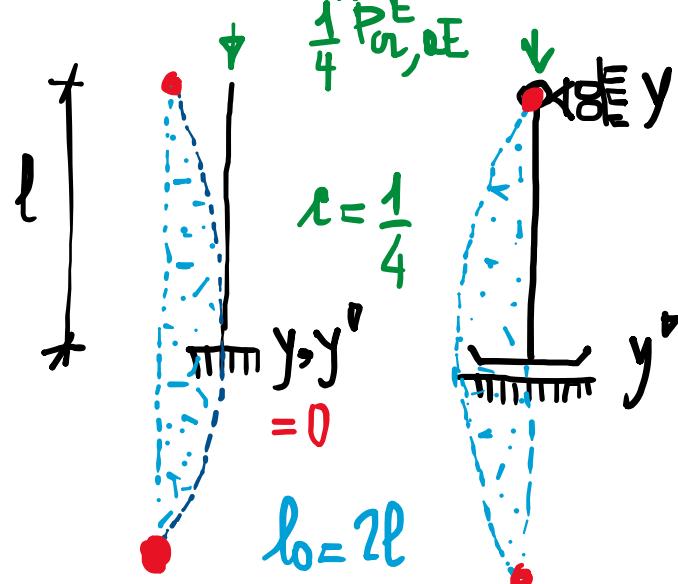
$$y_{cr,3} = f \left( 1 - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right)$$

$\rightarrow$  note le lunghezze di libere inflessione delle deformate critiche è noto il carico crit.

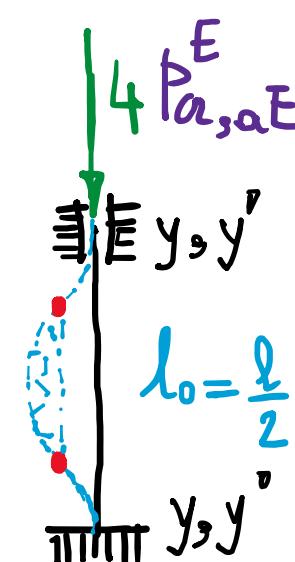
$$P_{cr}^E = n \frac{\pi}{4} E J = \pi^2 \frac{E J}{l_{0,n}^2}$$

- Altre condizioni di vincolo:  $P_{cr}^E = c \pi^2 E J = \pi^2 E J \frac{l^2}{l_0^2} \Rightarrow l_0 = \frac{l}{\sqrt{c}}$

$$\text{coeff. di vincolo } c = \left( \frac{l}{l_0} \right)^2$$

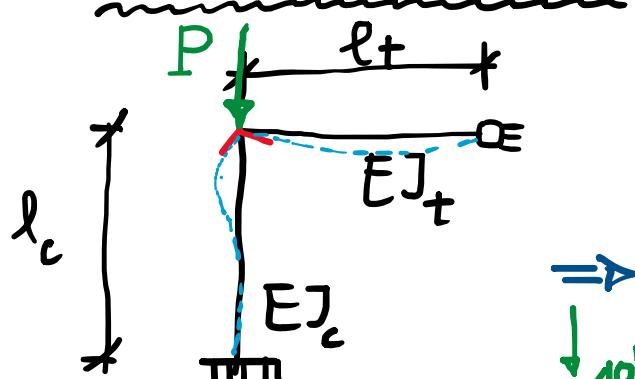


$$c = 2 \quad (\text{con } l = d l)$$



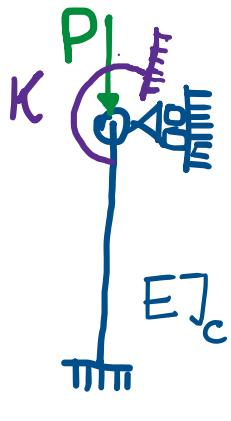
$$c = 4$$

- Teleri e nodi fissi (solo rotazioni)



$$l = 2$$

$$K=0, \mu \rightarrow \infty$$

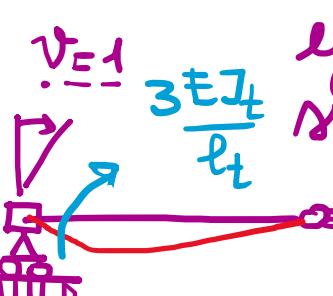


$$l \leq l_c$$

$$l = 4$$

$$K \rightarrow \infty, \mu = 0$$

$$K = \frac{1}{\mu} \frac{EJ_c}{l_c}$$



$v = 1$  effetto flessionale delle trave  
sulla colonna

$$\frac{1}{\mu} \dots \text{coeff. di riedistribuzione}$$

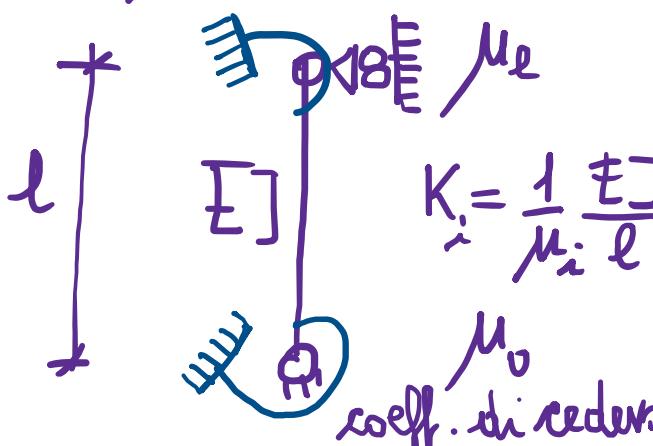
$$K = \frac{M}{v} = 3 \frac{EJ_t}{l_t} \cdot \frac{l_c}{EJ_c} = \frac{1}{\frac{1}{3} \frac{EJ_c}{l_c} \frac{l_t}{l_c}} \frac{EJ_c}{l_c}$$

$$\text{Es. } \mu_0 \rightarrow 0, \mu_e = \mu$$

$$c_N = 2 \frac{0.4 + \mu}{0.2 + \mu}; \frac{EJ_t}{l_t} = \frac{EJ_c}{l_c} \quad \mu = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{11}{4} = 2.75$$

- Formule di Newmark:



$$K_i = \frac{1}{\mu_i} \frac{EJ}{l}$$

$$\mu_0 \quad \text{coeff. di riedistribuzione}$$

$$P_{02} \approx c_N \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (\text{valori approx., irr. < 4\%})$$

$$c_N = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_e)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_e)}$$

$$-\mu_i \rightarrow 0 \quad c_N = 4 \quad (\text{valori esatti in casi particolari})$$

$$-\mu_i \rightarrow \infty \quad c_N = 1$$

Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza:  $N = P$ ;  $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} < \sigma_0$ )

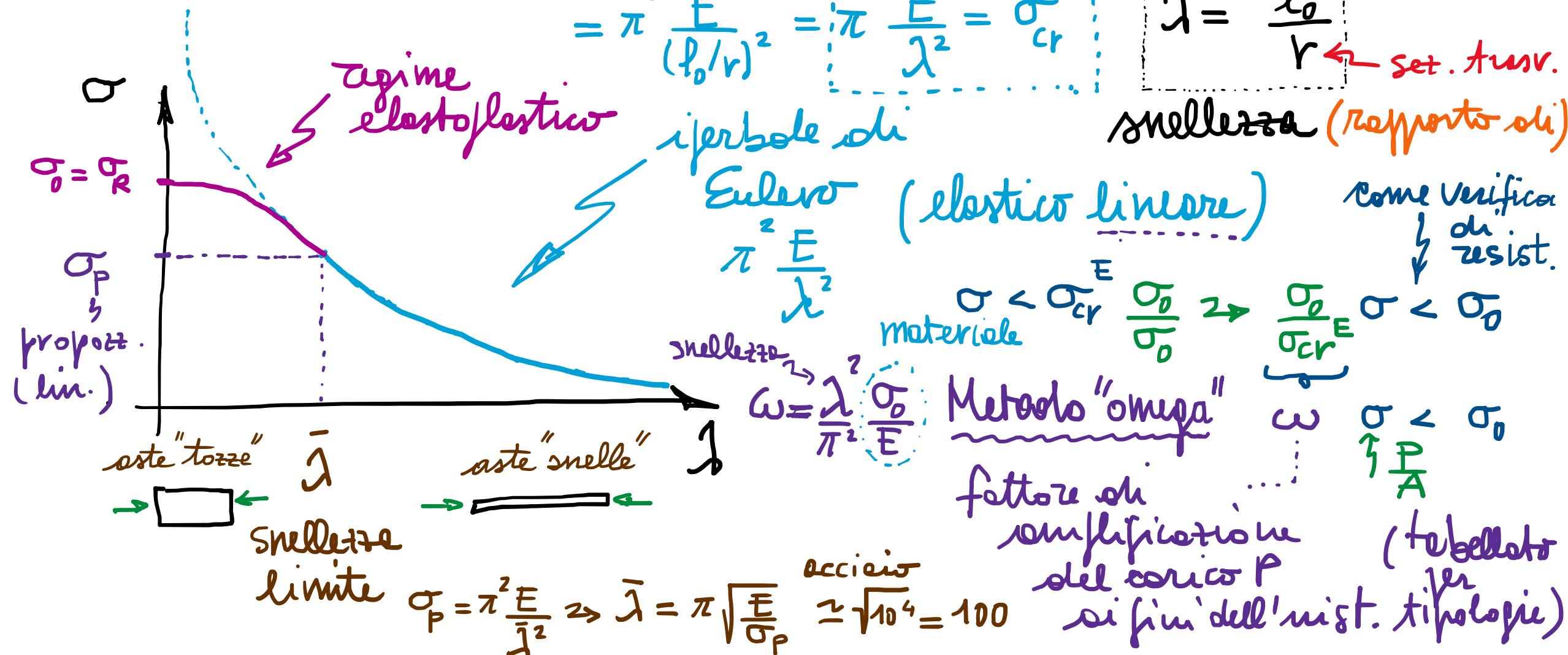
$$\sigma = \frac{P}{A} < \frac{P_{cr}^E}{A} = \sigma_{cr}^E \Rightarrow \sigma_{cr}^E = \pi^2 \frac{E J}{l_0^2 A} r^2 \quad r_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

oppure  
e' Raggio giretore d'inerzia  
e lunghezza e.c.

$$= \pi^2 \frac{E}{(l_0/r)^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \sigma_{cr}^E$$

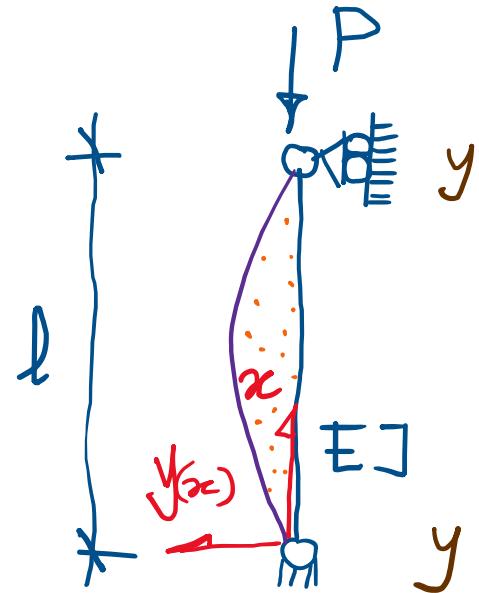
$$\lambda = \frac{l_0}{r}$$

set. taur.



## Concetti fondamentali :

- Generalizzazione dell'analisi dell'asta di Euler per altre condizioni al contorno (c.c.), cioè di vincolo :



$$Par_{s,E} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} \quad \Rightarrow \quad l_0 = 2l$$

$$P_{cr,E} = \frac{1}{4} Par_{s,E}$$

$$P_{cr,E} = \frac{\pi^2 E J}{l_0^2}$$

$y > y'$   $l_0$ : lunghezza di libera inflessione

$$\frac{1}{4} \leq c \leq 4$$

$$c = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2$$

coeff. di vincolo

$$= c \pi^2 \frac{E J}{l^2}$$

- Estensione per telai (a nodi fissi)
- Formule di Newmark (vincoli cedevoli elasticamente  $\Rightarrow$  molle rotazionali)
- Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza)

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_0$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \sigma_0$$

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}} \sigma \leq \sigma_0 \quad (\text{Metodo "omega"}) \Rightarrow \omega \frac{P}{A} \leq \sigma_0$$

$\omega$  coeff. amplificatore di P (ai fini dell'instabilità)

Aste di Eulero  
generalizzata

## SOMMARIO (Lec. 21)

- Aste incastrate e generalizzazione ad altre condizioni di vincolo.
- Coefficiente di vincolo, lunghezza di libera inflessione.
- Telei e nodi fissi: effetto flessionale delle travi considerato in molte rotazioni (elementi a deform. elastico concentrato).
- Formule di Newmark per travi appoggiate (errori contenuti).
- Verifica di stabilità (può essere interpretata come verifica di resistenza con esercizio amplificato di fattore  $\omega \rightarrow$  "Metodo omega").
- Fine Instabilità delle Strutture - (2<sup>a</sup> parte).

Next step: Anelasticità (flessibilità) delle Strutture (3<sup>a</sup> parte).  
Comportamento elastoflessivo del materiale.