Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

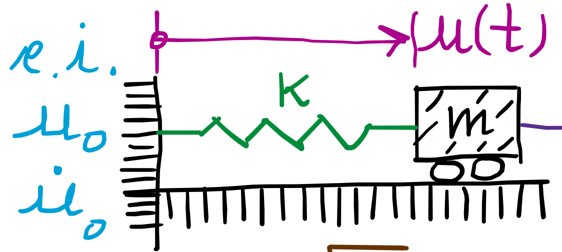
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 04

Risposta a forzante armonica

$F(t) = \begin{matrix} F\sin\omega t \\ F\cos\omega t \end{matrix} \Rightarrow F\underbrace{e^{i\omega t}}_{\cos\omega t + i\sin\omega t}$ (non smorzato; $c=0$)



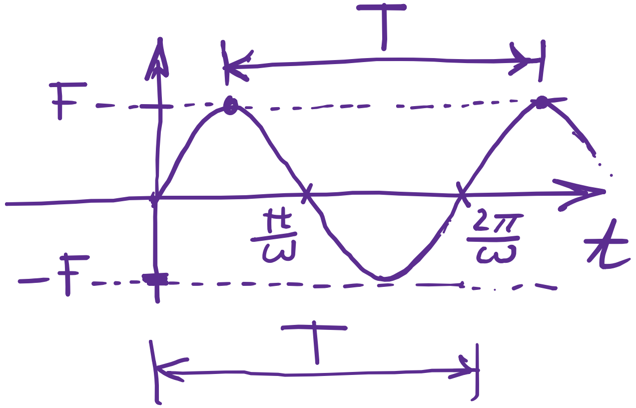
$F(t) = F\underbrace{\sin\omega t}_{f(t)}$

F intensità o ampiezza

ω pulsazione della forzante

$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

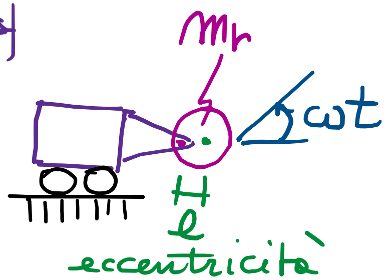
pulsazione naturale del sistema non smorzato



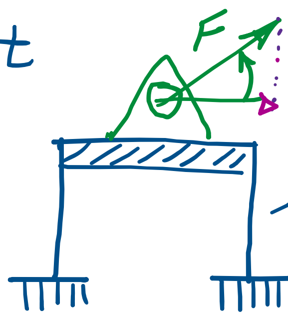
f.ne periodica, di periodo

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $\qquad \omega = 2\pi f$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$



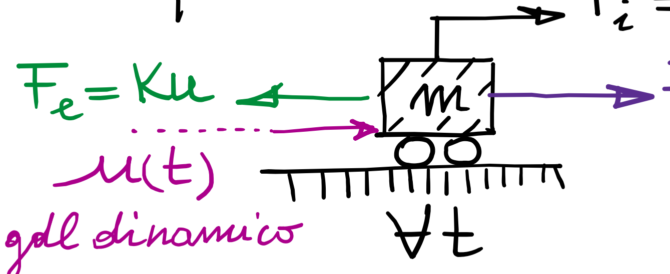
$F = m_r e \omega^2$



Interesse:

- casi pratici, ad es. in presenza di masse rotanti eccentriche
- "madre" di tutte le forzanti periodiche $\Rightarrow$ sviluppo in serie di Fourier
- primo passo fondamentale di forzante dinamica $F(t) = \underbrace{F}_{[N]}\,\underbrace{f(t)}_{\text{f.ne adimensionale}}$
- consente di introdurre concetti fondamentali sulla risposta dinamica dei sistemi forzati (amplificazione e sfasamento della risposta)
- possibile di trattazione analitica

– Eq. del moto: $F_i = -m\ddot{u}$



$$\cancel{m}\ddot{u} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2} u = \frac{K}{K}\,\frac{\overbrace{F}^{u_{st}}}{m}\sin\omega t \qquad \left(\frac{K}{m} = \omega_1^2\right)$$

$u_{st} = \dfrac{F}{K}$ spostamento "statico"

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_1^2 u(t) = \omega_1^2 u_{st} \sin\omega t}$$

ω_1; ω; u_{st} ↳ dirett. propor.

– Integrale "particolare"

(risposta del sistema a termine noto non nullo):

$u_p(t) = V\sin\omega t$ moto armonico di pulsazione ω (della forzante) di ampiezza V da determinare

$\dot{u}_p(t) = \omega V\cos\omega t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 \underbrace{V\sin\omega t}_{u_p} = -\omega^2 u_p$

rapporto di frequenze

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1} = \dfrac{f}{f_1}$ "frequency ratio"

$\beta \neq 1$

$$V = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2}\, u_{st} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\, u_{st} = \frac{1}{1-\beta^2}\, u_{st}$$

– Sostituendo nell'eq.ne del moto:

$$-\omega^2 V\cancel{\sin\omega t} + \omega_1^2 V\cancel{\sin\omega t} \overset{\forall t}{=} \omega_1^2 u_{st} \cancel{\sin\omega t} \Rightarrow (\cancel{\omega_1^2} - \underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}_{\beta^2})V = \cancel{\omega_1^2} u_{st}$$

$u_p(t) = U \sin\omega t$

$= \pm N u_{st} \sin\omega t$ ($\beta < 1$ / $\beta > 1$)

f.ne pari = in $\pm\beta$

$\rightarrow 0^-$ per $\beta \rightarrow \infty$

$\rightarrow \pm\infty$ " $\beta \rightarrow 1$

$\beta \neq 1$

curva di risonanza

$$\frac{|U|}{u_{st}} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

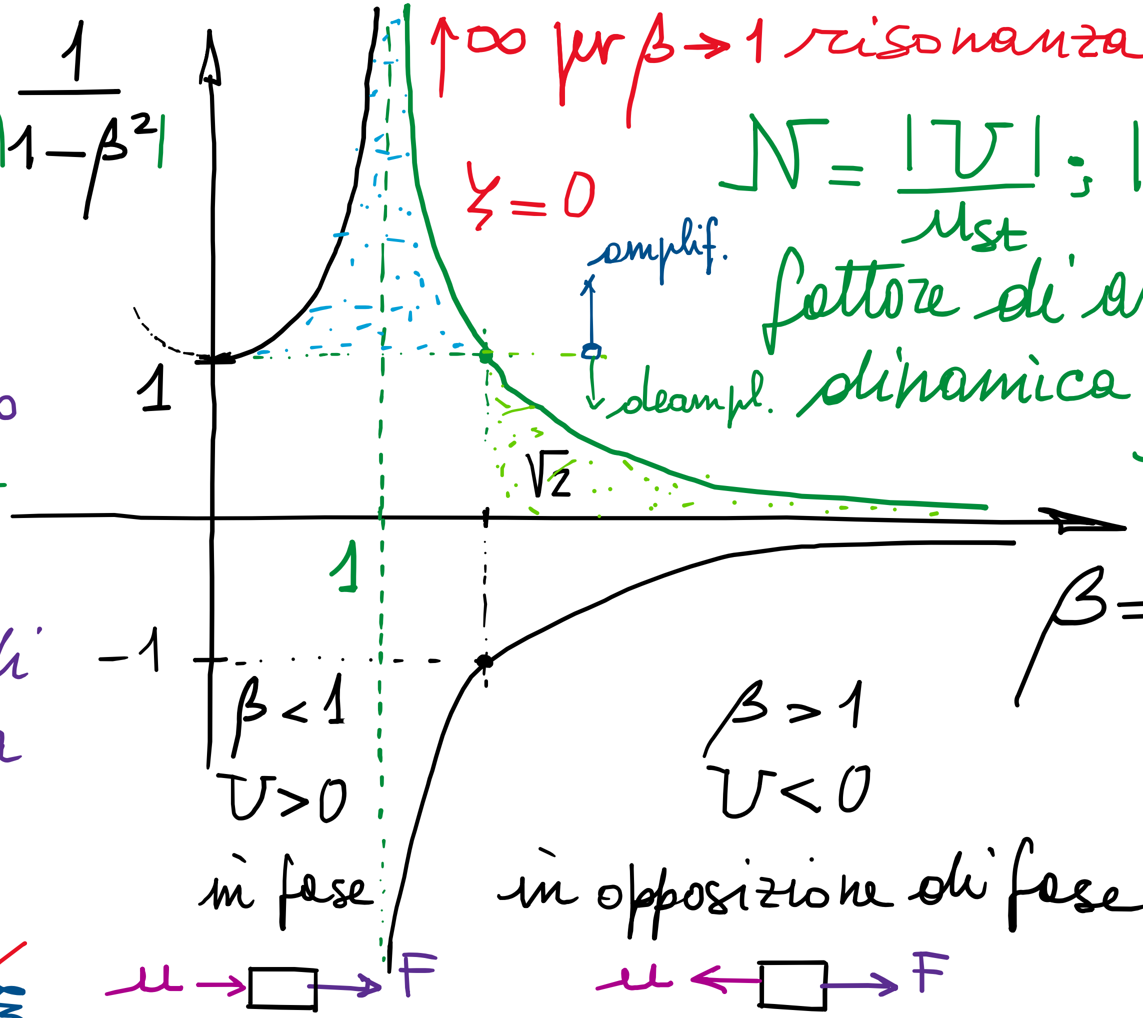
$\uparrow\infty$ per $\beta \rightarrow 1$ risonanza (ampiezza illimitata per $\omega \rightarrow \omega_1$)

$\zeta = 0$

$$N = \frac{|U|}{u_{st}}\ ; \quad |U| = N u_{st}$$

fattore di amplificazione dinamica

$$N = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$$



$N \geq 1, \quad 0 \leq \beta \leq \sqrt{2}$

$N \leq 1, \quad \beta \geq \sqrt{2}$

$u_p(t) = N u_{st} \underbrace{\sin(\omega t - \xi)}$

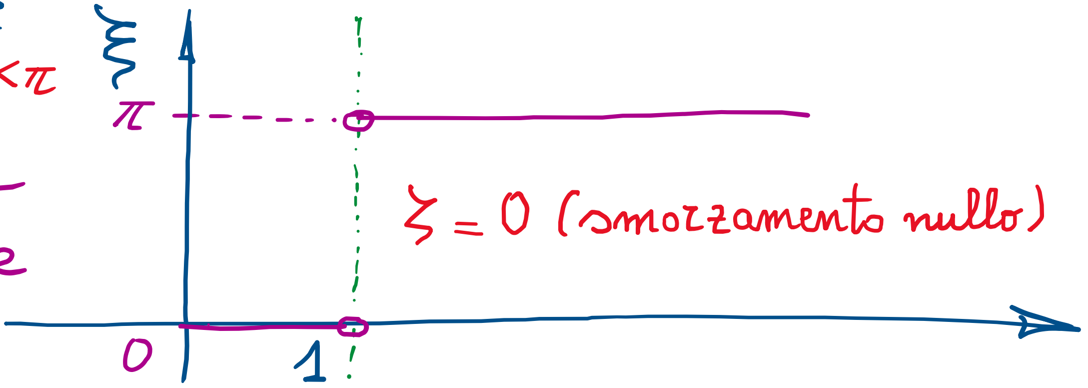
$\boxed{\sin\omega t} \cos\xi - \cos\omega t \cancel{\sin\xi}$

$\cos\xi$: $1 \Rightarrow \xi = 0$; $-1 \Rightarrow \xi = \pi$

$\xi = 0 + K\pi$

ξ angolo di fase o fase

curva di fase



$\zeta = 0$ (smorzamento nullo)

– Risposta complessiva del sistema: $\left.\begin{matrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{matrix}\right\}$ c.i.

$$u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$$

integrale generale

$F=0$ int. gen. omogen. ass.

$F\neq 0$ int. part.

$$= A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

$$\dot{u}(t) = \omega_1 A\cos\omega_1 t + \\ -\omega_1 B\sin\omega_1 t + \\ + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\omega\cos\omega t$$

N.B.: composizione di due moti armonici di pulsazioni differenti (ω_1 e ω) $\Rightarrow$ non un moto armonico

– Imponendo le c.i.:

$$\begin{cases} u(0) = \boxed{B = u_0} \\ \dot{u}(0) = \omega_1 A + \frac{\omega}{1-\beta^2}u_{st} = \dot{u}_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}}$$

– Integrale generale finale:

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}\right)\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

comp. di moto armonico di puls. ω_1 (risposta "transiente", per $\xi\neq 0$)

comp. di moto armonico di puls. ω (risposta a "regime", "steady-state") per $\xi\neq 0$

$$= \frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}(\sin\omega t - \beta\sin\omega_1 t)$$

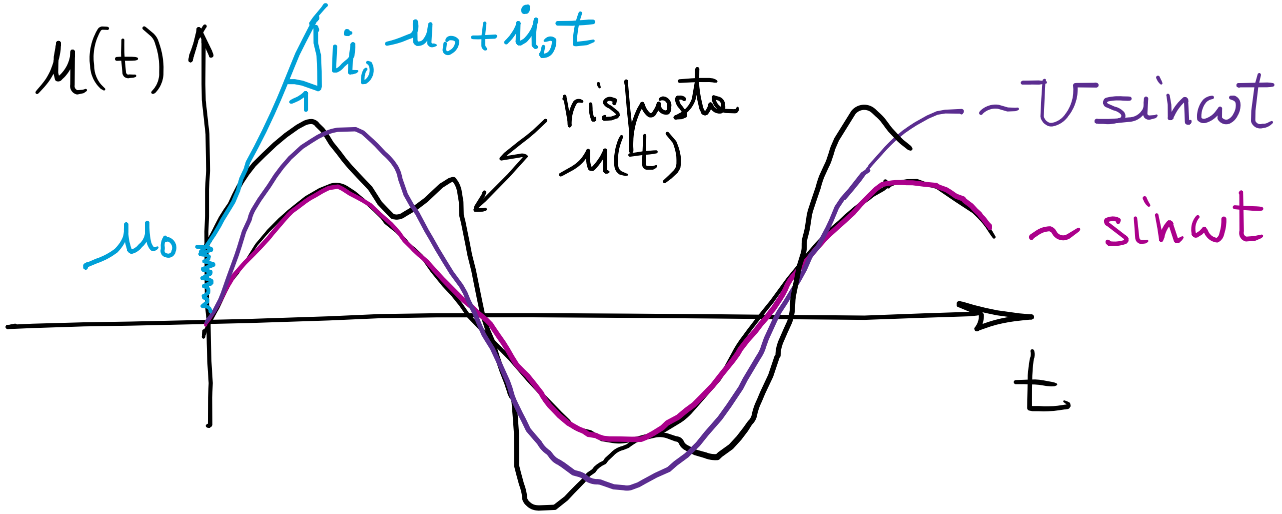
termine spesso mancante $\Leftarrow$ risposta armonica alle sole c.i. e $F=0$

risposta a F armonica per c.i. omogenee ($u_0=0$, $\dot{u}_0=0$)

- Risposta dinamica

$\beta < 1$

$(\omega < \omega_1)$



- Attenzione ai "battimenti" $\Rightarrow$ preludio alla risonanza

effetto di composizione di moti armonici di pulsazioni simili

per $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} \simeq 1 \quad (\omega \simeq \omega_1)$

$(\sin \omega t - \beta \sin \omega_1 t)$

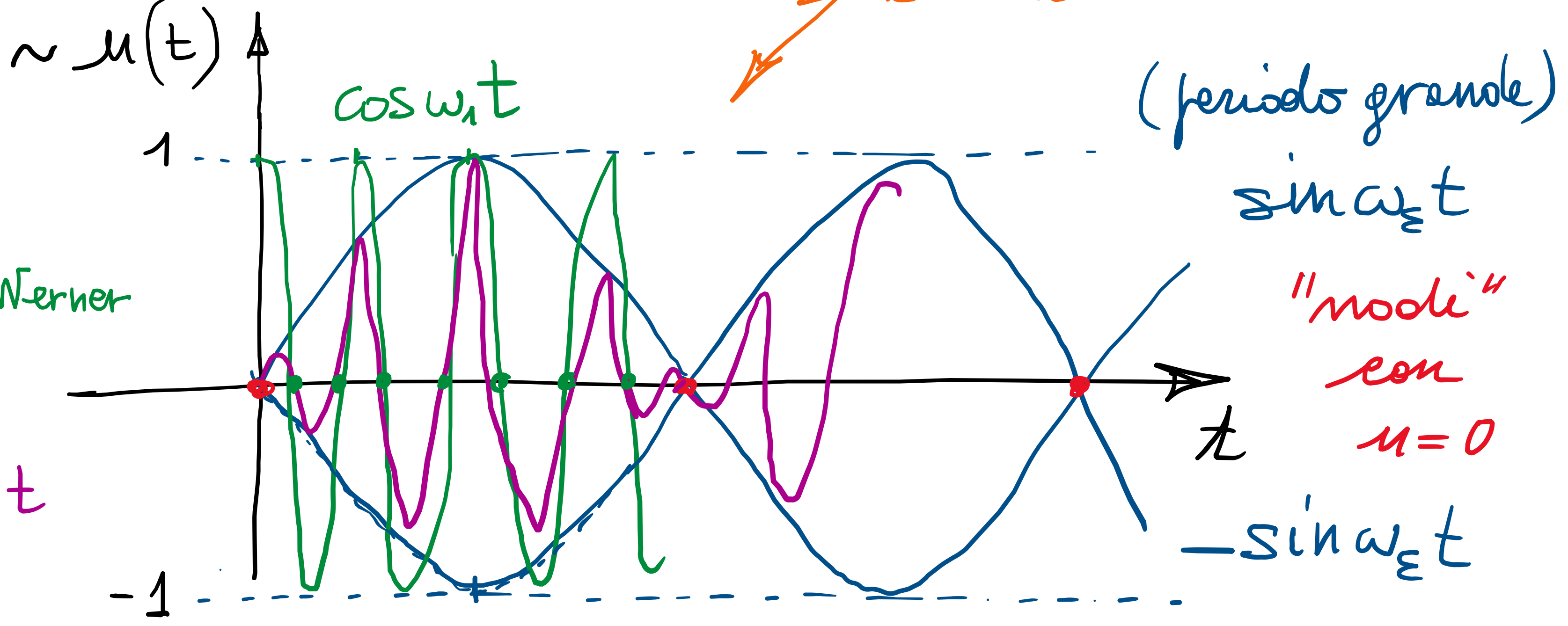
$\simeq \sin \omega t - \sin \omega_1 t$

formule di prostaferesi o di Werner

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\simeq 2 \sin \underbrace{\frac{\omega - \omega_1}{2}}_{\sim \omega_\varepsilon} t \cdot \cos \underbrace{\frac{\omega + \omega_1}{2}}_{\sim \omega_1} t$

piccola



– Condizioni di risonanza $(\beta=1) \Rightarrow \omega=\omega_1$. Nuovo integrale particolare:

$$u_p(t) = U\,t\cos\omega_1 t \dashrightarrow u_p(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}\,t\cos\omega_1 t$$

$$\dot{u}_p(t) = U\cos\omega_1 t + U t\,\omega_1(-\sin\omega_1 t)$$

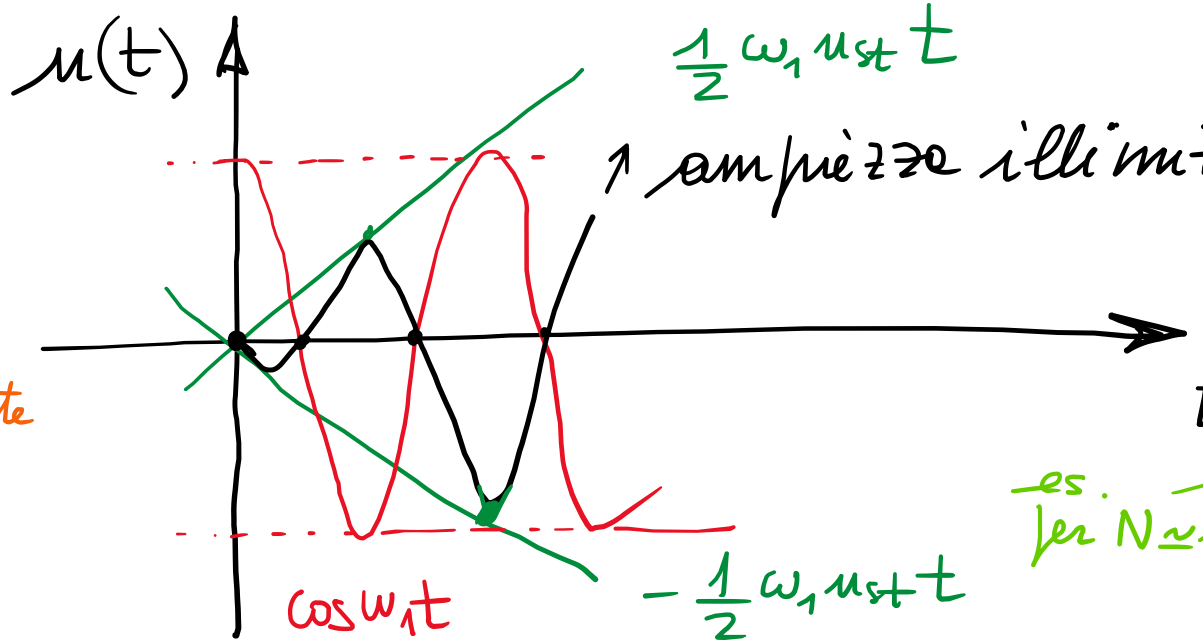
$$\ddot{u}_p(t) = \underbrace{-\omega_1 U\sin\omega_1 t - U\omega_1\sin\omega_1 t}\; - U t\,\omega_1^2\cos\omega_1 t$$

ampiezza lineare (divergente) in t

$\Rightarrow$ eq. del moto

$$-2\omega_1 U\sin\omega_1 t - \cancel{U t\,\omega_1^2\cos\omega_1 t} + \cancel{\omega_1^2 U t\cos\omega_1 t} = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega_1 t$$

$$-2\cancel{\omega_1} U = \omega_1^{\cancel{2}} u_{st} \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}$$



come se fosse moto armonico di pulsaz. $\omega=\omega_1$ ma con ampiezza linearmente divergente in t

↑ ampiezza illimitata per $t\to\infty$

(può portare alla uscita dal campo elastico, e al collasso)

es. per $N\simeq 10$

Concetti fondamentali:

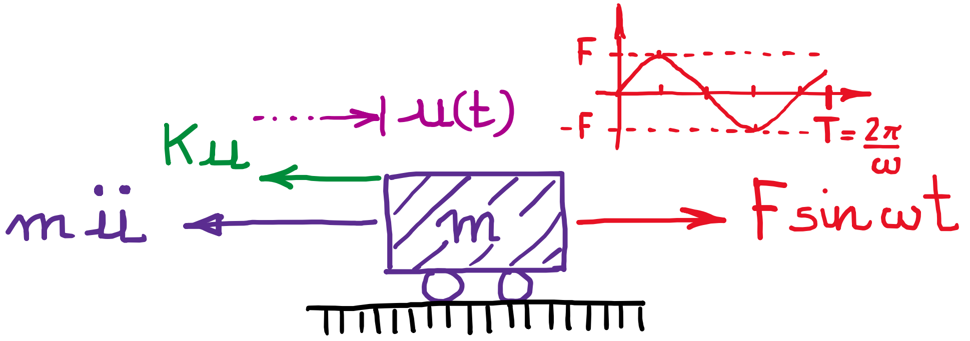
- Risposta non smorzata a forzante armonica $(F(t) = F\sin\omega t)$

$(c=0, \zeta=0)$

$m, K = \text{cost}$

sistema tempo-invariante

con c.i. $\begin{cases} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{cases}$ @ $t = t_0$



$$m\ddot{u}(t) + Ku(t) = F\sin\omega t$$

$$\Downarrow$$

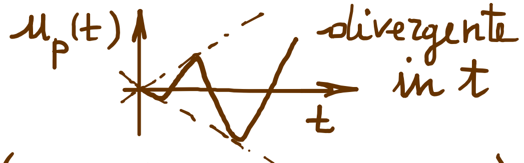
$$\ddot{u}(t) + \underbrace{\omega_1^2}_{\frac{K}{m}} u(t) = \omega_1^2 \underbrace{u_{st}}_{\frac{F}{K}} \sin\omega t \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Integrale particolare $(\beta \neq 1)$:

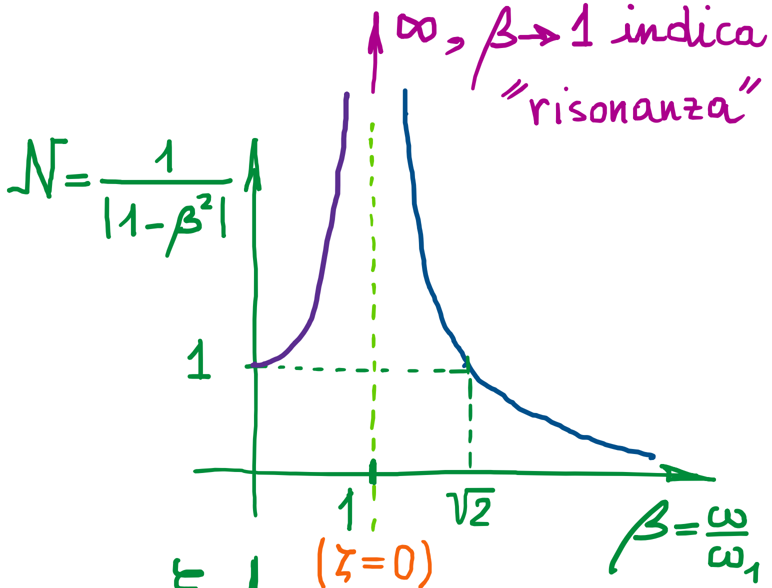
$$u_p(t) = N\, u_{st} \sin(\omega t - \xi)$$

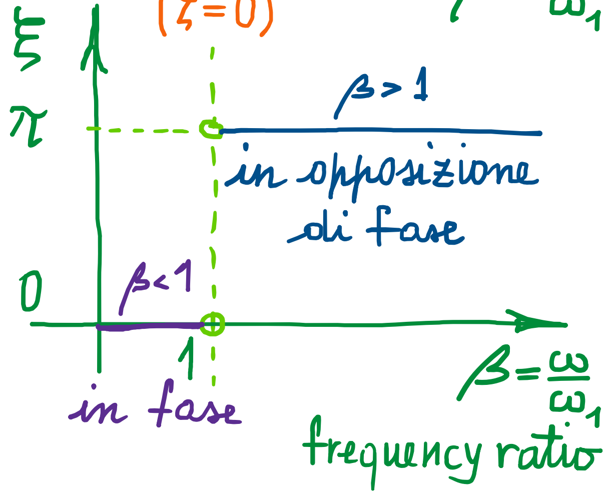
ξ — fase (sfasamento in ritardo tra risposta e forzante)

N — fattore di amplificazione dinamica (rispetto a $u_{st} = F/K$)



(In risonanza $[\beta = 1]$:
$u_p(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}\, t\cos\omega t$)





SOMMARIO (Lez. 04)

- Risposta forzata (forzante armonica $F(t) = F \sin \omega t$).
- Amplificazione dinamica $N(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$ $(U \simeq N u_{st})$.
- Sfasamento della risposta
  - in fase $(\xi = 0)$, $\beta < 1$;
  - in opposiz. di fase $(\xi = \pi)$, $\beta > 1$.

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$ frequency ratio

pulsaz. forzante (ω)

pulsazione sistema (ω_1)

- Integrale generale: $u(t) = u_{g0}(t) + u_p(t)$.
- Risonanza $(\beta = 1; \omega = \omega_1)$: risposta divergente in t (ampiezza illimitata, $u \to \infty$).
- Next step: caso smorzato (risposta "steady-state"), con picco di risonanza di entità limitata, dipendente dal fattore di smorzamento ζ. ⇐ pur elevata, per ζ piccoli $(\zeta \ll 1)$