Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

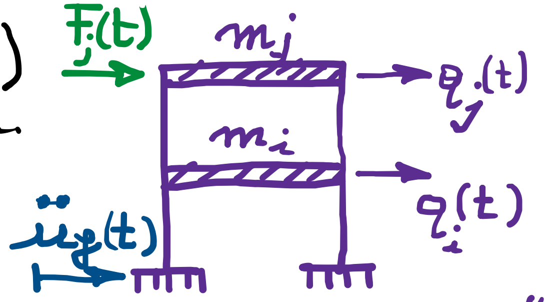
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

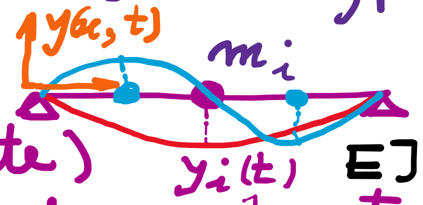
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 11

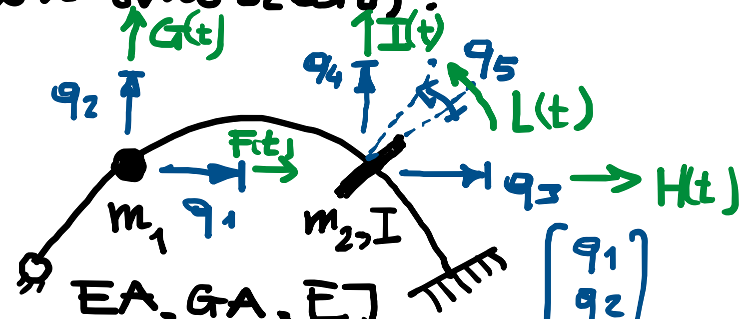
Sistemi dinamici discreti a più gradi di libertà (MDOF)



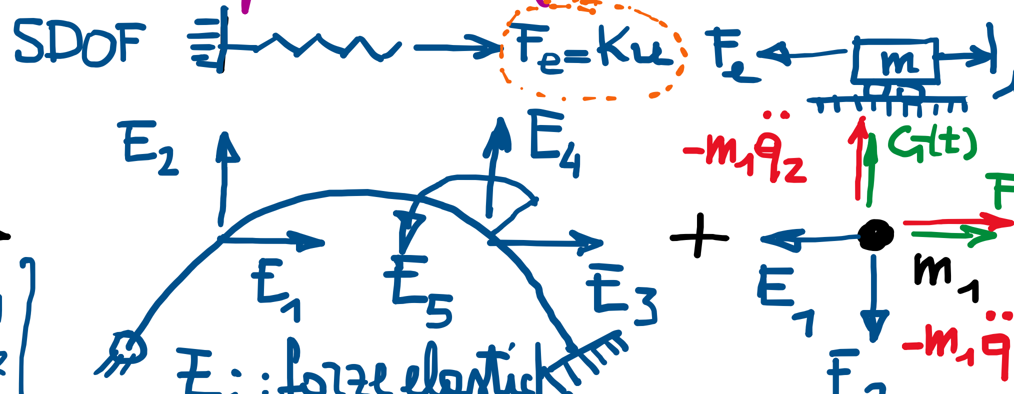
- Generalizzazione dei sistemi SDOF
- Rappresentativi di sistemi reali
  - intrinsecamente discreti
  - sistemi continui "discretizzati": ∞ gdl $\to$ N gdl
    lumped mass (masse concentrate)



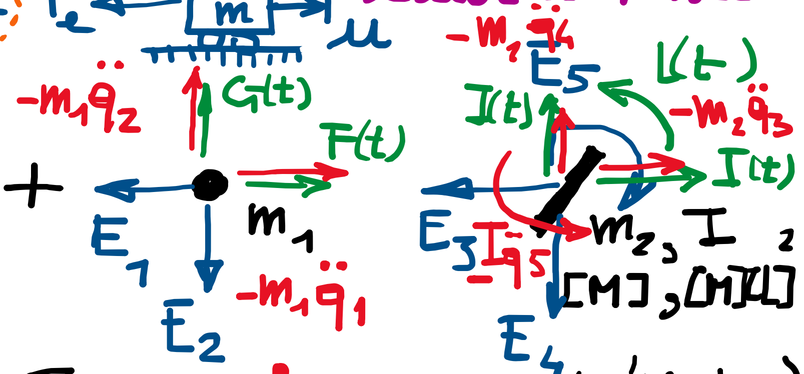
+ Impostazione generale per un sistema strutturale elastico lineare (non smorzato):



$\Rightarrow$



+



$[M], [M][L]$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix}$$

vettore dei gdl dinamici del sist

vettore delle forze elastiche $E_i(q_j)$

E_i: forze elastiche applicate staticamente alla struttura producono spostamenti elastici q_i

Generalizzazione (Legge di Hooke):

$$\mathbf{E} = \mathbb{K}\mathbf{q} \Leftrightarrow E_i = \sum_j K_{ij}\, q_j$$

matrice di rigidezza

coefficienti di rigidezza

K_{ij} = Forza elastica in i per spostamento unitario in j

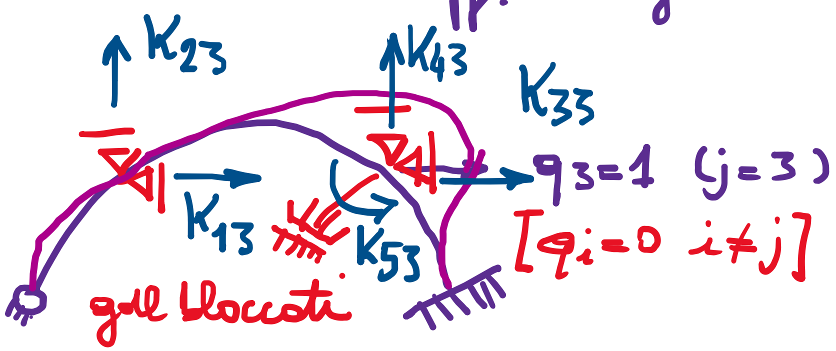
Equazioni del moto (d'Alembert)

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + E_1 = F(t) \\ m_1\ddot{q}_2 + E_2 = G(t) \\ m_2\ddot{q}_3 + E_3 = H(t) \\ m_2\ddot{q}_4 + E_4 = I(t) \\ I\,\ddot{q}_5 + E_5 = L(t) \end{cases}$$

$n = 5$ n° dei gdl

"equilibrio dinamico" del sist.

Illustrazione dei coeff. di rigidezza (vedi metodo degli spostamenti)



$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nj} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \iff \mathbb{E} = \mathbb{K}\, q \quad (q = \mathbb{K}^{-1}\mathbb{E})$$

$q_j = 1$

$n \times 1$ $\quad$ $n \times n$ $\quad$ $n \times 1$

matrice di rigidezza

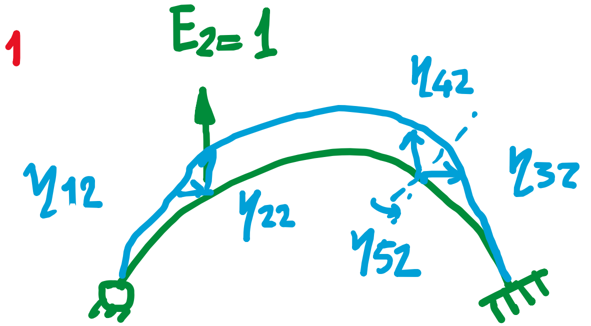
Visione duale (metodo delle forze)

Metrice di cedevolezza:

$q = \eta\, \mathbb{E} \Rightarrow \eta = \mathbb{K}^{-1}$; $\mathbb{K} = \eta^{-1}$

$q_i = \sum_j \eta_{ij} E_j$

coeff. di influenza: spostamenti in i per effetto di forza unitaria in j



Energia elastica def. positiva

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathbb{E}^T q = \frac{1}{2} q^T \mathbb{E} = \frac{1}{2} E_i q_i$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}^T \eta\, \mathbb{E} = \frac{1}{2} q^T \mathbb{K}\, q > 0 \quad \forall q \neq 0, \ \mathbb{E} \neq 0$$

forme quadratiche def. pos.

(reciprocità) Th. di Maxwell (PLV) $\boxed{\eta_{ji} = \eta_{ij}}$; $K_{ji} = K_{ij}$

matrici simmetriche e def. pos.

- Forze di inerzia

$-\mathbb{F}_I = \mathbb{M}\ddot{q} \iff -F_{I_i} = M_{ij}\ddot{q}_j$

matrice di massa (d'inerzia)

– forza in i per eff. di accelerat. unitaria in j

Energia cinetica

$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbb{M}\dot{q} > 0 \quad \forall \dot{q} \neq 0$

$\left(P = \frac{dT(\dot{q})}{dt}\right)$

$M_{ji} = M_{ij}$ (in generale non diagonale)

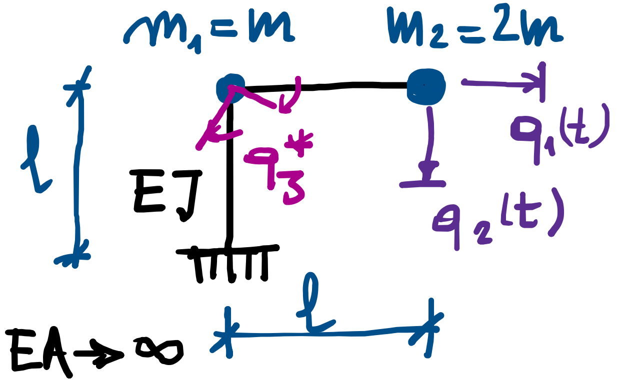
- Eq.ni del moto (matriciali)

$$\boxed{\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q(t) = Q(t)}$$

c.i. + $q_0, \dot{q}_0$

(vedi eq.ni di Lagrange)

Esempio di struttura con due gdl dinamici (e un gdl "statico")



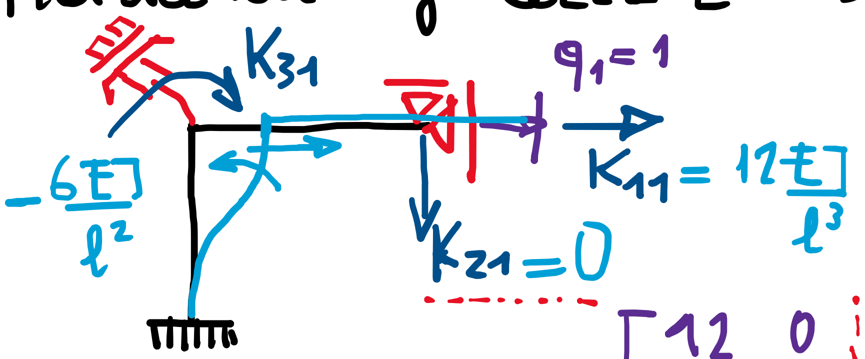
- gdl dinamici: individuano la posizione delle masse del sistema (utili a definire la matrice di massa)
- gdl "statici": eventualmente utili ad esprimere la risposta elastica (matrice di rigidezza/cedevolezza).

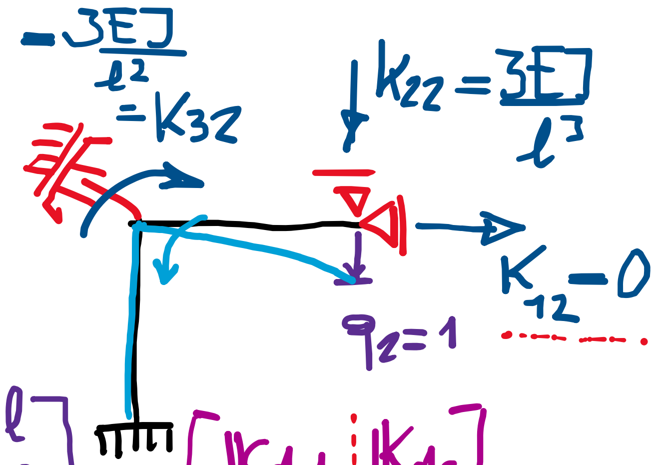
Energia cinetica:

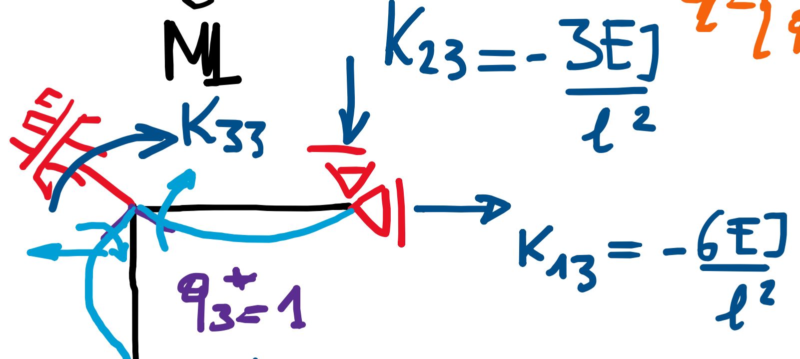
$$T = \frac{1}{2}\left[3m\dot{q}_1^2 + 2m\dot{q}_2^2\right] = \frac{1}{2}m\left[3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2\right] = \frac{1}{2}\{\dot{q}_1\ \dot{q}_2\}\underbrace{m\overbrace{\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}^{2\times 2}}_{\mathbb{M}}\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\dot{q}^T\mathbb{M}\dot{q}$$

$$q = \begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix}$$

Matrice di rigidezza [3×3]







$$K_{33} = \frac{4EJ}{\ell} + \frac{3EJ}{\ell} = 7\frac{EJ}{\ell}$$

$$\underset{3\times 3}{\mathbb{K}} = \frac{EJ}{\ell^3}\left[\begin{array}{cc|c}12 & 0 & -6\ell\\ 0 & 3 & -3\ell\\ \hline -6\ell & -3\ell & 7\ell^2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\underset{2\times 2}{\mathbb{K}_{dd}} & \underset{2\times 1}{\mathbb{K}_{ds}}\\ \hline \underset{1\times 2}{\mathbb{K}_{sd}} & \underset{1\times 1}{\mathbb{K}_{ss}}\end{array}\right] \Rightarrow \underset{(2\times 2)}{\mathbb{K}_{dd}^*} = \frac{6}{7}\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \mathbb{K}$$

Condensazione "statica" (dei gdl "statici").

$$\mathbb{E} = \begin{Bmatrix} \mathbb{E}_d \\ \mathbb{E}_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} \mathbb{K}_{dd} & \mathbb{K}_{ds} \\ \hdashline \mathbb{K}_{sd} & \mathbb{K}_{ss} \end{array}\right]}_{\mathbb{K}} \begin{Bmatrix} q_d \\ q_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}_d = \mathbb{K}_{dd}\, q_d + \mathbb{K}_{ds}\, q_s \\ \mathbb{E}_s = \mathbb{K}_{sd}\, q_d + \mathbb{K}_{ss}\, q_s \end{cases}$$

$$q_s^{(t)} = -\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\, q_d^{(t)} + \mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s$$

inversione da eseguire

$$\mathbb{E}_d = \underbrace{\left(\mathbb{K}_{dd} - \mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\right)}_{\mathbb{K}_{dd}^{*}} q_d + \mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}_d - \mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s}_{\mathbb{E}_d^{*}} = \mathbb{K}_{dd}^{*}\, q_d$$

$\mathbb{K}_{dd}^{*}$ matrice di rigidezza condensata (o efficace)

$\mathbb{E}_d^{*}$ forze elastiche condensate (o efficaci)

- Visione duale tramite matrice di cedevolezza (2×2 o 3×3).

Determinazione di $\underset{3\times3}{\mathbb{K}} = \underset{3\times3}{\eta}^{-1}$; $\underset{2\times2}{\mathbb{K}} = \mathbb{K}_{dd}^{*} = \underset{2\times2}{\eta}^{-1}$

Imposizione di forze unitarie $E_j = 1 \Rightarrow \eta_{ij}$ spost. in corrisp. dei q_i.

$$\eta = \frac{1}{6}\frac{\ell^3}{EJ}\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & \frac{3}{\ell} \\ 3 & 8 & \frac{6}{\ell} \\ \hdashline \frac{3}{\ell} & \frac{6}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} \end{array}\right] \quad (2\times2) \quad \left(\underset{2\times2}{\eta_{dd}}\right)^{-1} = \underset{2\times2}{\mathbb{K}_{dd}^{*}} = \mathbb{K} \; ; \; \underset{3\times3}{\eta}^{-1} = \underset{3\times3}{\mathbb{K}}$$

come preced. determinato

SOMMARIO (Lez. 11)

- Sistemi dinamici a più gradi di libertà (MDOF).
- Matrice di rigidezza/cedevolezza; energia elastica (def. pos.). $\mathcal{E} \overset{?}{=} V$ en. potenz.
- Matrice di massa (inerzia); energia cinetica (def. pos.) T. $\mathcal{L} = T - \mathcal{E}$
- Equazioni del moto (princ. di d'Alembert – "eq. dinamico"; eq.ni di Lagrange).

— o —

- Esempio di telaio con due gdl dinamici e un gdl "statico".
- Condensazione statica, a definire la matrice di rigidezza associata ai soli gdl dinamici.
- Scrittura della matrice di rigidezza/di cedevolezza (m. spost./forze)

Next step: Modi principali di vibrare (oscillazioni libere del sistema MDOF).