

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

SCUOLA DI INGEGNERIA (DALMINE)

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

INSEGNAMENTO: DINAMICA, INSTABILITÀ E ANELASTICITÀ DELLE STRUTTURE (6 CFU, ICAR/08)

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE: INGEGNERIA DELLE COSTRUZIONI EDILI

DOCENTE: PROF. EGIDIO RIZZI

PROGRAMMA DETTAGLIATO DEL CORSO

DATA	N. ORE	ARGOMENTO	N. ORE PROGR.
24/02/25 Lez. 01	1	Introduzione al corso. Le tematiche della Dinamica, della (In)Stabilità e della Anelasticità delle Strutture. Esempi di sistemi meccanici inerenti. Concetti e caratteristiche fondamentali. Parti e programma indicativo del corso.	01
	1	PARTE I – DINAMICA. Dinamica dei sistemi ad 1 gdl. Oscillatore semplice. Molla elastica lineare: costante di rigidezza, energia elastica. Smorzatore viscoso lineare: coefficiente di smorzamento, funzione di dissipazione. Scrittura dell'equazione del moto tramite equazione di equilibrio dinamico (principio di d'Alembert). Scrittura dell'equazione del moto tramite equazioni di Lagrange. Condizioni iniziali. Esempi di sistemi strutturali reali associabili all'oscillatore semplice. Determinazione della costante elastica k. Telaio shear-type. Fattore di rigidezza trave/colonna. Portale ad 1 gdl con travi flessibili e delimitazioni sulla costante elastica.	02
26/02/25 Lez. 02	1	Oscillazioni libere non smorzate. Equazione dei moti armonici. Pulsazione propria. Derivazione dell'integrale generale in forma esponenziale e in termini di seno e coseno. Imposizione delle condizioni iniziali.	03
"	1	Rappresentazione grafica della risposta armonica. Periodo proprio e frequenza propria. Espressione e rappresentazione in termini di ampiezza e fase dell'oscillazione. Sfasamento in ritardo o in anticipo. Interpretazione del moto armonico secondo il moto di vettori rotanti nel piano di Argand. Ampiezza di spostamento, velocità ed accelerazione.	04
28/02/25 Lez. 03	1	Oscillazioni libere smorzate. Coefficiente di smorzamento e fattore di smorzamento (relativo al critico). Soluzione dell'equazione caratteristica. Casistica delle radici per smorzamento subcritico, critico e supercritico. Caso subcritico. Integrale generale. Moto armonico periodico di ampiezza smorzata esponenzialmente e moto oscillatorio aperiodico risultante.	05
"	1	Imposizione delle condizioni iniziali. Rappresentazione grafica del moto oscillatorio. Decremento logaritmico e stima del fattore di smorzamento. Casi critico e supercritico: integrale generale, risposta non oscillatoria aperiodica.	06

03/03/25 Lez. 04	1	Risposta (non smorzata) a forzante armonica. Rilevanza pratica e concettuale. Integrale particolare. Rapporto di frequenze. Fattore di amplificazione dinamica e angolo di fase. Risposta in fase o in opposizione di fase. Condizione di risonanza.	07
"	1	Integrale generale e imposizione delle c.i. Rappresentazione grafica della risposta. Componenti di risposta alle sole c.i. e alla forzante per c.i. omogenee. Battimenti. Integrale particolare in condizioni di risonanza con risposta divergente in t e ampiezza crescente linearmente.	08
05/03/25 Lez. 05	1	Risposta smorzata a forzante armonica $F \sin(\omega t)$. Derivazione dell'integrale particolare nella forma $u_p = N u_{st} \sin(\omega t - \xi)$. Fattore di amplificazione dinamica N e fase ξ .	09
"	1	Curve di risonanza e curve di fase. Analisi delle condizioni di stazionarietà delle curve di risonanza. Stima del fattore di amplificazione massimo. Curva traccia dei massimi relativi. Rappresentazione dell'integrale particolare $u_p = Z_1 \sin \omega t - Z_2 \cos \omega t$. Integrale generale. Risposta transiente e risposta a regime.	10
07/03/25 Lez. 06	1	Risposte a $F \sin \omega t$ e $F \cos \omega t$ mediante trattazione in variabili complesse. Integrale particolare in forma esponenziale. Componenti sfasate, in opposizione di fase e in quadratura. Diagramma di Argand delle risposte e delle forze in gioco, con illustrazione dell'equilibrio dinamico.	11
"	1	Risposta a forzante periodica tramite sviluppo in serie di Fourier. Rilevanza pratica e concettuale. Definizione delle componenti armoniche. Risposta tramite sovrapposizione degli effetti (PSE). Effetto filtro sulle armoniche con pulsazioni più vicine a quella naturale del sistema.	12
10/03/25 Ese. 01	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad un grado di libertà. Illustrazione di vari esempi di determinazione della rigidità elastica. Introduzione a MATLAB.	02
12/03/25 Lez. 07	1	Risposta a forzante a gradino. Integrale generale con termine transiente e termine a regime. Risposta completa e per c.i. nulle. Risposta tramite Principio di Sovrapposizione degli Effetti ad impulso $I = F \Delta \tau$ di breve durata $\Delta \tau$. Passaggio al limite per $\Delta \tau \rightarrow 0$. Funzione risposta ad impulso unitario.	13
"	1	Teorema dell'impulso. Condizione iniziale in termini di velocità corrispondente all'impulso. Risposta conseguente per oscillazioni libere da tale c.i. Distribuzione Delta di Dirac rappresentativa di forzante impulso unitario e sue proprietà.	14
14/03/25 Lez. 08	1	Rappresentazione di forzante generica per sovrapposizione di impulsi. Integrale di convoluzione (integrale di Duhamel) in forma analitica. Interpretazione alternativa per sovrapposizione di forzanti a gradino e conseguente derivazione dell'integrale di Duhamel tramite integrazione per parti. Cenno alle scritture alternative interpretative dell'integrale di Duhamel: fattore di amplificazione dinamica dipendente dal tempo; pseudo-velocità; risposta pseudo-armonica. Valutazione numerica dell'integrale di Duhamel: regola dei rettangoli, regola dei trapezi, regola di Simpson.	15
"	1	Risposta al moto del riferimento. Rilevanza pratica. Forzante indotta per effetto d'inerzia (trascinamento). Risposta da integrale di Duhamel in termini di pseudo-velocità. Azione sismica. Accelerogramma sismico. Spettri di risposta. Pseudo-spettri, assunzioni e motivazioni. Spettri di progetto. Effetto di periodi propri brevi (struttura rigida) e lunghi (struttura flessibile).	16

17/03/25 Ese. 02	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad un gdl. Illustrazione di esempi di determinazione delle oscillazioni libere.	04
19/03/25 Lez. 09	1	Integrazione diretta nel tempo dell'equazione del moto. Metodo dell'accelerazione lineare. Derivazione delle relazioni incrementali da sviluppo in serie di Taylor. Generalizzazione secondo il Metodo di Newmark. Rigidezza efficace, forza efficace e soluzione per l'incremento di spostamento.	17
"	1	Schema di algoritmo di integrazione. Proprietà del Metodo di Newmark: implicito vs. esplicito; accuratezza; stabilità numerica, Δt critico. Casi particolari: metodo dell'accelerazione media, metodo dell'accelerazione lineare, metodo delle differenze centrali.	18
21/03/25 Lez. 10	1	Analisi nel dominio delle frequenze. Concetto e derivazione, tramite processo al limite, della trasformata di Fourier per rappresentazione di forzante aperiodica nel dominio delle frequenze. Proprietà di differenziazione della trasformata di Fourier. Risposta nel dominio delle frequenze. Trasformazione dell'integrale di convoluzione (Duhamel) nel dominio delle frequenze: risposta in forma di prodotto algebrico di funzioni trasformate.	19
"	1	Funzione risposta in frequenza, da trasformata di Fourier della funzione risposta ad impulso unitario ed interpretazione da risposta a forzante armonica di ampiezza unitaria, tramite trasformata delta di Dirac di forzante armonica. Schema riassuntivo sull'analisi nei domini del tempo e delle frequenze.	20
24/03/25 Ese. 03	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad un gdl. Illustrazione di esempi di risposta a forzante armonica.	06
26/03/25 Lez. 11	1	Sistemi dinamici ad n gradi di libertà. Introduzione. Schemi strutturali. Strutture a masse concentrate. Discretizzazione di sistemi continui. Equazioni del moto (non smorzate) per equilibrio dinamico. Scrittura in forma matriciale. Matrice di rigidezza elastica. Matrice di cedevolezza elastica. Significato dei coefficienti di rigidezza e di cedevolezza. Energia elastica. Simmetria e definizione positiva delle matrici. Forze d'inerzia. Energia cinetica. Matrice di massa o d'inerzia. Simmetria e definizione positiva della matrice di massa. Derivazione delle equazioni del moto secondo le equazioni di Lagrange.	21
"	1	Esempio di sistema a 2 gdl dinamici (e 1 gdl statico). Calcolo della matrice di massa da scrittura dell'energia cinetica. Procedimento di condensazione statica. Scrittura della matrice di rigidezza 3x3 (con termini inerenti anche il gdl statico rotazionale). Condensazione statica con calcolo della matrice di rigidezza efficace finale 2x2. Scrittura della matrice di cedevolezza e calcolo della matrice di rigidezza come sua inversa (3x3 e 2x2). Scrittura delle equazioni finali del moto.	22
31/03/25 Ese. 04	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad un gdl. Illustrazione di esempi di risposta a forzante armonica nel piano di Argand.	08
02/04/25 Lez. 12	1	Oscillazioni libere. Modi principali di vibrazione. Problema agli autovalori generalizzato associato alle matrici K e M. Forme standard. Autosoluzioni. Proprietà di mutua ortogonalità degli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti. Pulsazioni proprie e modi propri. Rapporto di Rayleigh. Stima degli autovalori. Normalizzazione degli autovettori.	23

"	1	Matrici degli autovettori e degli autovalori. Forma diagonale con matrici di massa e di rigidezza trasformate diagonali. Trasformazione in coordinate principali. Significato. Disaccoppiamento delle equazioni del moto: diagonalizzazione ed equazioni del moto in coordinate principali. Sunto sull'analisi in coordinate principali. Trasformazione inversa e espressione esplicita della singola coordinata principale. Oscillazioni libere non smorzate in risposta alle condizioni iniziali.	24
04/04/25 Lez. 13	1	Analisi dinamica modale. Esempio a 2 gdl. Calcolo degli autovalori in forma analitica. Calcolo analitico degli autovettori. Rappresentazione dei modi principali di vibrare. Normalizzazione degli autovettori.	25
"	1	Trasformazione diretta e inversa in coordinate principali. Matrice trasformate e equazioni del moto disaccoppiate in coordinate principali. Calcolo iterativo di autovettori e autovalori mediante il metodo dell'iterazione vettoriale inversa. Passi del calcolo iterativo. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.	26
07/04/25 Ese. 05	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad un gdl. Illustrazione di esempi di risposta a forzante periodica tramite sviluppo in serie di Fourier.	10
09/04/25 Lez. 14	1	Sistemi smorzati. Smorzamento intrinseco e smorzamento aggiunto tramite dispositivi esterni. Ruolo dei singoli smorzatori, con trasformazione di coordinate $z(q)$. Funzione di dissipazione o di Rayleigh. Matrice di smorzamento. Smorzamento classico o alla Rayleigh. Ipotesi di disaccoppiamento. Fattori di smorzamento modali. Esempio a 2 gdl con smorzatore inclinato.	27
"	1	Calcolo delle azioni interne. Sovrapposizione di effetti A_i per coordinate lagrangiane unitarie $q_i=1$ e di effetti \tilde{A}_i per coordinate principali unitarie $p_i=1$ (azioni interne modali). Calcolo delle forze d'inerzia modali.	28
11/04/25 Lez. 15	1	Azione sismica per strutture ad n gdl. Telaio multipiano "shear-type". Equazioni del moto in coordinate lagrangiane. Sunto su analisi modale e disaccoppiamento delle equazioni del moto in coordinate principali. Masse partecipanti modali e fattori di partecipazione modale all'azione sismica.	29
"	1	Analisi tramite spettro di risposta. Stima degli spostamenti massimi via SRSS. Azione interne modali e stima dei valori max (SRSS). Taglio modale e max alla base. Masse modali efficaci e loro proprietà.	30
14/04/25 Ese. 06	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad un gdl. Valutazione numerica dell'integrale di Duhamel; integrazione nel tempo dell'equazione del moto con metodo di Newmark; risposta ad azione sismica.	12
16/04/25 Lez. 16	1	PARTE II – INSTABILITÀ. Dalla Dinamica alla Instabilità delle Strutture, con riferimento ad esempio esplicativo di sistema discreto ad 1 gdl con deformabilità elastica concentrata: scrittura dell'equazione del moto, criterio di stabilità dinamica secondo Liapunov, nozione di carico critico P^{cr} , risposta armonica per $P < P^{cr}$, risposte divergenti per $P \geq P^{cr}$.	31
"	1	Instabilità dell'equilibrio. Concetti e caratteristiche generali. L'equilibrio scritto nella configurazione deformata. "Grandi spostamenti" e "spostamenti geometricamente piccoli". Non-linearità geometrica. Approccio statico completo per l'esempio ad 1gdl di cui sopra.	32

		Equazione non lineare di equilibrio. Studio delle soluzioni e casistica. Carico critico. Punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio. Risposta non lineare carico/spostamento (rotazione). Comportamento biforcuto in regime di spostamenti geometricamente piccoli, con analogia determinazione di P^{cr} .	
23/04/25 Ese. 07	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad n gdl. Esempio di trave incastrata a due gradi di libertà dinamici. Determinazione numerica dei modi principali di vibrare. Risposta ad azione sismica.	14
28/04/25 Ese. 08	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad n gdl. Esempio di telaio shear-type a due piani (due gradi di libertà dinamici). Risposta ad azione sismica, calcolo delle azioni interne.	16
30/04/25 Lez. 17	1	Approccio energetico. Nozione di stabilità dell'equilibrio per problema puramente posizionale: equilibrio stabile, indifferente, instabile. Teorema di Dirichlet di minimo dell'Energia Potenziale Totale (CS di stabilità). Stazionarietà dell'EPT (CN di equilibrio). Formalizzazione della teoria del II ordine (spostamenti geometricamente piccoli). Equazioni di equilibrio (lineari) da stazionarietà dell'EPT. Analisi di stabilità.	33
"	1	Applicazione del metodo energetico nell'esempio sdof di riferimento. Mappa delle configurazioni di equilibrio stabili/instabili. Analisi dell'esempio sdof in spostamenti geometricamente piccoli.	34
05/05/25 Ese. 09	2	Esercitazione sui sistemi dinamici ad n gdl. Esempio di telaio shear-type a due piani (due gradi di libertà dinamici). Determinazione dei modi principali di vibrare tramite metodo dell'iterazione vettoriale inversa. Risposta ad azione sismica, calcolo delle azioni interne.	18
07/05/25 Lez. 18	1	Ruolo delle imperfezioni nei sistemi reali. Effetto di curvatura iniziale in asta tesa o compressa. Illustrazione estesa per l'esempio in esame, con imperfezione (eccentricità), mediante il metodo statico. Mappa dei percorsi di equilibrio, con rami primario e secondario non biforcuto. Rilevanza pratica. Analisi dell'esempio con imperfezione per spostamenti "geometricamente piccoli" tramite approccio statico.	35
"	1	Analisi di sistemi con imperfezioni tramite il metodo energetico. Mappa delle configurazioni stabili/instabili. Analisi con approccio energetico per spostamenti "geometricamente piccoli".	36
09/05/25 Lez. 19	1	Problemi euleriani di stabilità. Variazione seconda dell'EPT lineare col moltiplicatore dei carichi p. Matrice di rigidezza elastica K_E , matrice di rigidezza geometrica K_G e problema agli autovalori generalizzato ad esse associato. Carico critico euleriano. Rapporto di Rayleigh (in instabilità delle strutture). Sintesi sul metodo energetico e sul metodo statico.	37
"	1	Esempio di sistema discreto a 3 gdl. Definizione dei gradi di libertà. Analisi mediante metodo energetico in grandi spostamenti. Scrittura dell'EPT. Derivazione delle equazioni di equilibrio tramite condizione di stazionarietà. Calcolo della matrice di rigidezza tramite derivate seconde. Analisi energetica in spostamenti geometricamente piccoli tramite teoria del 2° ordine. Matrici di rigidezza K , K_E e K_G . Calcolo dei carichi critici da condizione di annullamento del determinante di K .	38
12/05/25 Ese. 10	2	Esercitazione sullo svolgimento di esercizi e sull'utilizzo di routine di calcolo simbolico e numerico in problemi di instabilità delle strutture: instabilità di sistemi discreti sdof e mdof.	20
14/05/25 Lez. 20	1	Calcolo e rappresentazione delle deformate critiche. Soluzione da problema agli autovalori generalizzato associato alle matrici di rigidezza K_E e K_G .	39

		Soluzione tramite metodo statico. Scrittura diretta delle equazioni di equilibrio variato. Equazioni di equilibrio linearizzate per spostamenti geometricamente piccoli. Matrice di rigidezza di equilibrio e sua relazione (combinazione lineare di righe) con K da metodo energetico. Soluzione dei medesimi carichi critici da condizione di singolarità.	
"	1	Instabilità di sistemi continui. Asta di Eulero: analisi di biforcazione secondo metodo statico. Equazione differenziale della linea elastica con effetti del II ordine (equilibrio nella configurazione deformata). Determinazione degli infiniti carichi critici. Deformate critiche ad essi corrispondenti. Lunghezza di libera inflessione. Formula unificante per l'espressione dei carichi critici.	40
16/05/25 Lez. 21	1	Analisi di altre condizioni di vincolo. Asta compressa semplicemente incastrata. Formula generale per la determinazione del carico critico tramite coefficiente di vincolo c e lunghezza di libera inflessione l_0 . Asta compressa incastro-carrello.	41
"	1	Instabilità di telai piani a nodi fissi. Effetto della rigidezza elastica trave/colonna. Molla elastica equivalente. Delimitazioni del carico critico. Formula di Newmark. Verifica di stabilità vs. verifica di resistenza. Snellezza. Curva di stabilità (iperbole di Eulero). Metodo "omega".	42
19/05/25 Ese. 11	2	Esercitazione sullo svolgimento di esercizi e sull'utilizzo di routines di calcolo simbolico e numerico in problemi di instabilità delle strutture: instabilità di sistemi continui.	22
21/05/25 Lez. 22	1	PARTE III – ANELASTICITÀ (Strutture). Anelasticità dei materiali e delle strutture. Concetti fondamentali inerenti questa parte terza del corso. Introduzione al comportamento elastoplastico del materiale, con riferimento alla risposta sforzo-deformazione monoassiale. Limite elastico. Deformazioni plastiche. Dipendenza dalla storia. Legame anolonomo in forma incrementale. Modulo di rigidezza tangente. Legame diretto e inverso. Materiale perfettamente elasto-plastico. Incrudimento isotropo, cinematico, misto e effetto Bauschinger.	43
"	1	Univocità nel caso di incrudimento positivo, nullo e negativo. Modello con incrudimento lineare. Modulo di incrudimento. Derivazione del modulo tangente. Cenno alla generalizzazione in ambito 3D (condizione di plasticità, legge di scorrimento plastico, tensore di rigidezza tangente del 4° ordine).	44
23/05/25 Lez. 23	1	Flessione elastoplastica (retta) nell'ambito del calcolo a rottura dei telai. Caso di riferimento: sezione rettangolare (doppiamente simmetrica), materiale a comportamento simmetrico a trazione/compressione, perfettamente elastoplastico. Ipotesi cinematica sul campo lineare di deformazione per conservazione delle sezioni piane. Campo di sforzo conseguente da legame costitutivo in campo elastico. Momento e curvatura a limite elastico. Modulo di resistenza elastico. Risposta in regime elastico.	45
"	1	Risposta in campo elastoplastico della sezione trasversale. Momento flettente da equivalenza statica. Legame momento/curvatura non-lineare risultante, con incrudimento a tendenza asintotica per curvatura infinita. Momento limite o momento plastico. Modulo di resistenza plastico. Fattore di forma della sezione trasversale. Limiti alla curvatura massima e significato pratico del momento limite.	46

26/05/25 Lez. 24	1	Risposta elastoplastica della trave. Collasso strutturale plastico. Trave isostatica appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzzeria. Carico a limite elastico, carico di collasso. Diagramma delle curvature. Ipotesi di cerniera plastica.	47
"	1	Meccanismo di collasso di trave. Carico di collasso tramite applicazione del PLV, a partire dal meccanismo noto. Analisi evolutiva elastoplastica nell'ipotesi di cerniera plastica. Curva evolutiva carico/spostamento (moltiplicatore/freccia) lineare a tratti. Moltiplicatore a limite elastico, moltiplicatore limite e frecce ad essi corrispondenti.	48
28/05/25 Lez. 25	1	Trave isostatica appoggio-appoggio con carico uniformemente distribuito. Analisi evolutiva elastoplastica nell'ipotesi di cerniera plastica. Curva evolutiva carico/spostamento (moltiplicatore/freccia) bilineare. Meccanismo di collasso e calcolo del moltiplicatore di collasso tramite PLV.	49
"	1	Trave iperstatica incastro-incastro con carico uniformemente distribuito. Analisi evolutiva elastoplastica. Ridistribuzione dei momenti oltre il limite elastico. Curva evolutiva trilineare. Meccanismo e moltiplicatore di collasso. Confronto della risposta elastoplastica delle due strutture: rigidità elastica; risorse verso il collasso plastico.	50
30/05/25 Lez. 26	1	Teoremi fondamentali dell'analisi limite. Definizioni: azioni staticamente e plasticamente ammissibili, moltiplicatori staticamente ammissibili λ^- , meccanismi cinematicamente e plasticamente ammissibili, moltiplicatori cinematicamente ammissibili λ^+ . Teorema statico: delimitazione inferiore del moltiplicatore di collasso λ_L . Teorema Cinematico: delimitazione superiore del moltiplicatore di collasso λ_L . Teorema misto.	51
"	1	Dimostrazione del Teorema Statico. Dimostrazione del Teorema Cinematico. Corollari: indipendenza del moltiplicatore di collasso dalle proprietà elastiche e da stati pregressi di coazione. Approcci risolutivi: metodi di calcolo "manuali" per casi specifici; metodi computazionali sistematici e generali tramite Programmazione Matematica.	52
04/06/25 Lez. 27	1	Esempio incastro-appoggio con carico uniformemente distribuito. Approccio statico completo, con massimizzazione dei λ^- e determinazione della distribuzione dei momenti a collasso.	53
"	1	Approccio cinematico completo, con minimizzazione dei λ^+ e determinazione esatta del moltiplicatore di collasso λ_L e della posizione della cerniera in campata.	54
06/06/25 Lez. 28	1	Esempio di telaio a portale semplice soggetto a carichi concentrati. Meccanismo completo di parete. Stima competente di λ^+ , e di λ^- , utile a fornire delimitazione bilaterale del moltiplicatore di collasso λ_L .	55
"	1	Meccanismo parziale di trave. Stime successive di λ^+ e λ^- , con delimitazione bilaterale del moltiplicatore limite λ_L . Meccanismo completo di trave/parete. Verifica della conformità plastica ed individuazione del moltiplicatore limite λ_L . Conclusioni generali sul corso e inquadramento.	56
13/06/25 Ese. 12	2	Esercitazione sullo svolgimento di esercizi sul calcolo a rottura di travi e telai.	24