Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

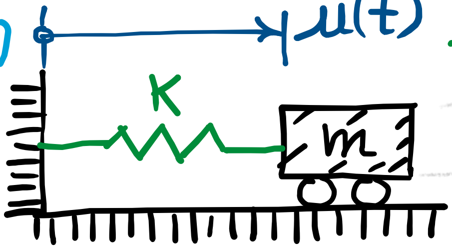
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

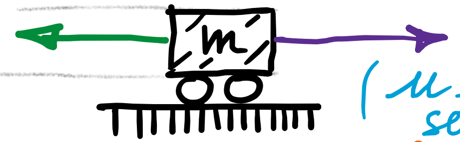
LEZIONE 02

Sistemi SDOF – Oscillazioni libere (non smorzate) $F=0$ $(c=0)$

[Notazione: $\frac{d}{dt}(\,) = (\dot{\ })$]



u_0, $\dot{u}_0$ c.i. m, K cost >0



$F_e = Ku$ $F_i = -m\ddot{u}$ (u e $\ddot{u}$ di segno opposto)

t "equil. dinamico"

$$\cancel{m}\ddot{u} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2}u \overset{\forall t}{=} \frac{0}{m} \quad (1)$$

$[\omega_1] = \frac{1}{[t]}$ $\frac{rad}{s}$

$\omega_1^2 = \frac{K}{m}$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsazione naturale o propria (frequenza angolare)

Si cercano soluzioni nella forma: $[\ddot{u} + \omega_1^2 u = 0]$

$\omega_1 \uparrow$ $K\uparrow$ $m\downarrow$; $\omega_1\downarrow$ $K\downarrow$ $m\uparrow$

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad (\lambda \text{ complesso})$$

$$\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda u$$

$$\ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 u$$

$e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t$

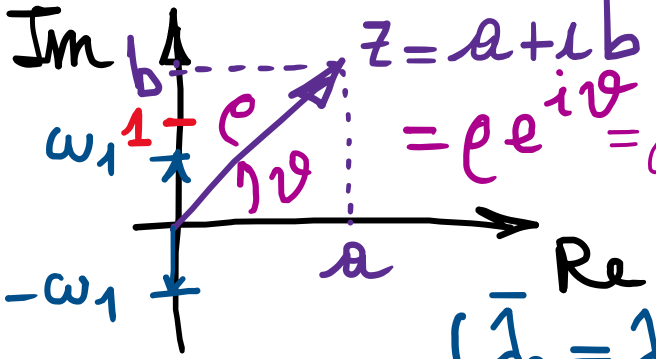
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

i: unità immaginaria

$i^2 = -1$

Sostituendo in (1): $\lambda^2 u + \omega_1^2 u = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + \omega_1^2)u = 0$

piano complesso o di Argand



$z = a + ib = \rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$\lambda^2 + \omega_1^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega_1^2 = i^2\omega_1^2 = (i\omega_1)^2$

eq. caratteristica

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$

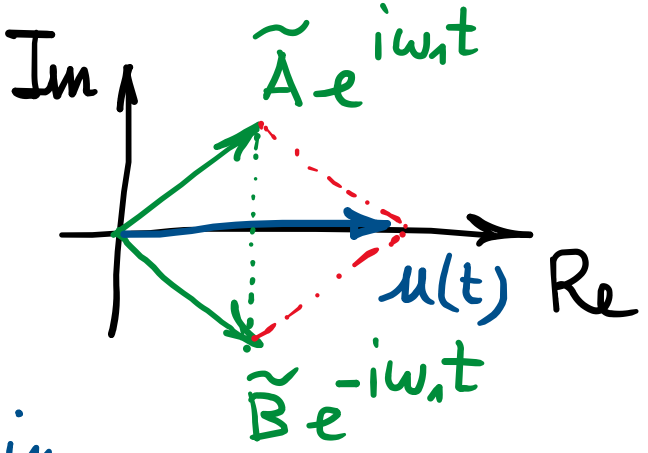
$(\bar{\lambda}_2 = \lambda_1)$ due radici puram. immaginarie (comples. coniug.)

Integrale generale: $u = e^{\lambda_{1,2} t}$ $\quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$

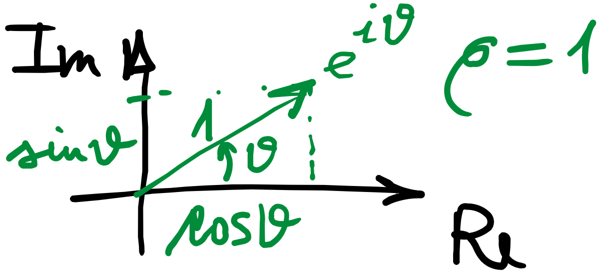
$$u(t) = \tilde{A}\, e^{\lambda_1 t} + \tilde{B}\, e^{\lambda_2 t}$$

combinaz. lineare di $e^{\lambda_1 t}$ ed $e^{\lambda_2 t}$

$\tilde{B} = \overline{\tilde{A}}$ complesso coniugato $\overline{e^{i\omega_1 t}} = e^{-i\omega_1 t}$



Peraltro, dati $e^{\lambda_{1,2} t}$, anche una loro combinazione lin. è integrale, utile a formare l'integrale generale.



Formula di Eulero: $\rho\, e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2\cos\vartheta \rightarrow \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i\sin\vartheta \rightarrow \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

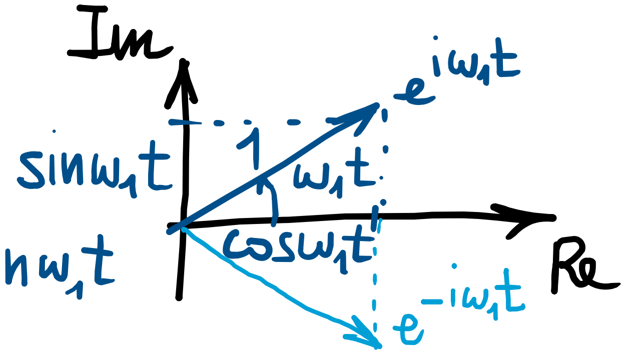
sin e cos sono combinaz. lineare di $e^{i\vartheta}$ ed $e^{-i\vartheta}$

Quindi, anche $\sin\omega_1 t$ e $\cos\omega_1 t$ sono integrali utili a generare l'integrale generale cercato.

Integrale generale in sen e cos:

$$\boxed{u(t) = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t}$$

$$e^{\lambda_{1,2}t} = e^{\pm i\omega_1 t} = \cos\omega_1 t \pm i\sin\omega_1 t$$



$$\dot u(t) = \omega_1 (A\cos\omega_1 t - B\sin\omega_1 t)$$

$$\ddot u(t) = -\omega_1^2 \underbrace{(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t)}_{u} = -\omega_1^2 u \Leftarrow \ddot u + \omega_1^2 u = 0 \ \checkmark$$

equazione dei moti armonici

Costanti A e B da determinare imponendo le c.i.:

$$u(0) = u_0 \rightarrow u(0) = \boxed{B = u_0}$$

$$\dot u(0) = \dot u_0 \rightarrow \dot u(0) = \omega_1 A = \dot u_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot u_0}{\omega_1}}$$

Integrale finale: u_0 e $\dot u_0$ definiscono l'ampiezza (cost) del moto armonico

$$\boxed{u(t) = \frac{\dot u_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t}$$

moto armonico di pulsazione ω_1 e periodo proprio $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{f_1}$

ampiezza costante

Infatti: $\sin \omega_1 (t+T_1) = \sin \omega_1 t \Rightarrow \omega_1 T_1 = 2\pi$

$\cos$ — periodo

funzioni periodiche di periodo 2π

$u(t+T) = u(t)$
f.ne periodica di periodo T

$[s]\ T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{1}{f_1}$

$f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}; \quad \omega_1 = 2\pi f_1$ — frequenza ciclica $[s^{-1}] = [Hz]$ (cicli al secondo) Hertz

Altre rappresentazioni:

$u(t) = R\cos(\omega_1 t - \varphi)$

$u(t) = R\sin(\omega_1 t + \psi)$

R: ampiezza; φ e ψ: fasi o angoli di fase

— sfasamento in ritardo rispetto a $\cos\omega_1 t$

in anticipo $\sin \omega_1 t$

$u(t) = R(\cos\omega_1 t \cos\varphi + \sin\omega_1 t \sin\varphi)$

$= \underbrace{R\sin\varphi}_{A} \sin\omega_1 t + \underbrace{R\cos\varphi}_{B} \cos\omega_1 t$

$u(t) = R(\sin\omega_1 t \cos\psi + \cos\omega_1 t \sin\psi)$

$= \underbrace{R\cos\psi}_{A} \sin\omega_1 t + \underbrace{R\sin\psi}_{B} \cos\omega_1 t$

$$\begin{cases} A = R\sin\varphi = R\cos\psi \\ B = R\cos\varphi = R\sin\psi \end{cases}$$

$\dfrac{A}{B} = \tan\varphi = \dfrac{1}{\tan\psi} \quad \left(\varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}\right)$

relaz. $R;\ \varphi,\psi \Rightarrow A,B$

$$\begin{cases} A = R\sin\varphi = R\cos\psi \\ B = R\cos\varphi = R\sin\psi \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^2+B^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\right)^2 + u_0^2}$$

ampiezza dipendente dalle c.i.

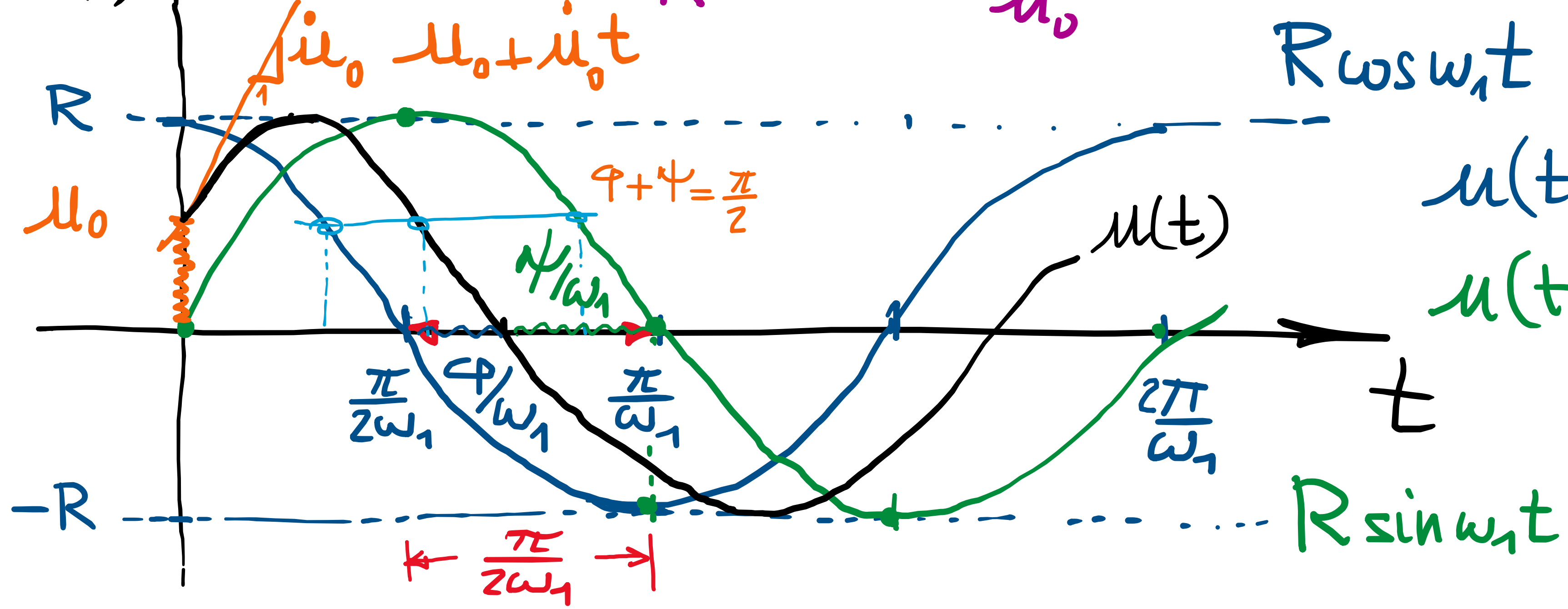
e da ω_1 (caratteristica del sistema)

$$\frac{A}{B} = \tan\varphi = \frac{1}{\tan\psi} \quad \left(\varphi+\psi = \frac{\pi}{2}\right)$$ angoli complementari

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{atan}\frac{A}{B} = \operatorname{atan}\frac{\dot{u}_0}{\omega_1 u_0}$$

$$\psi = \operatorname{atan}\frac{B}{A} = \operatorname{atan}\frac{\omega_1 u_0}{\dot{u}_0}$$

relazioni $A,B \Rightarrow R;\ \varphi,\psi$



$$u(t) = R\cos(\omega_1 t - \varphi)$$

$$u(t) = R\sin(\omega_1 t + \psi)$$

Interpretazione (del moto armonico) mediante vettori rotanti nel piano di Argand:

(con velocità angolare ω_1 antioraria)

velocità sfasata in quadratura in anticipo rispetto alla risposta

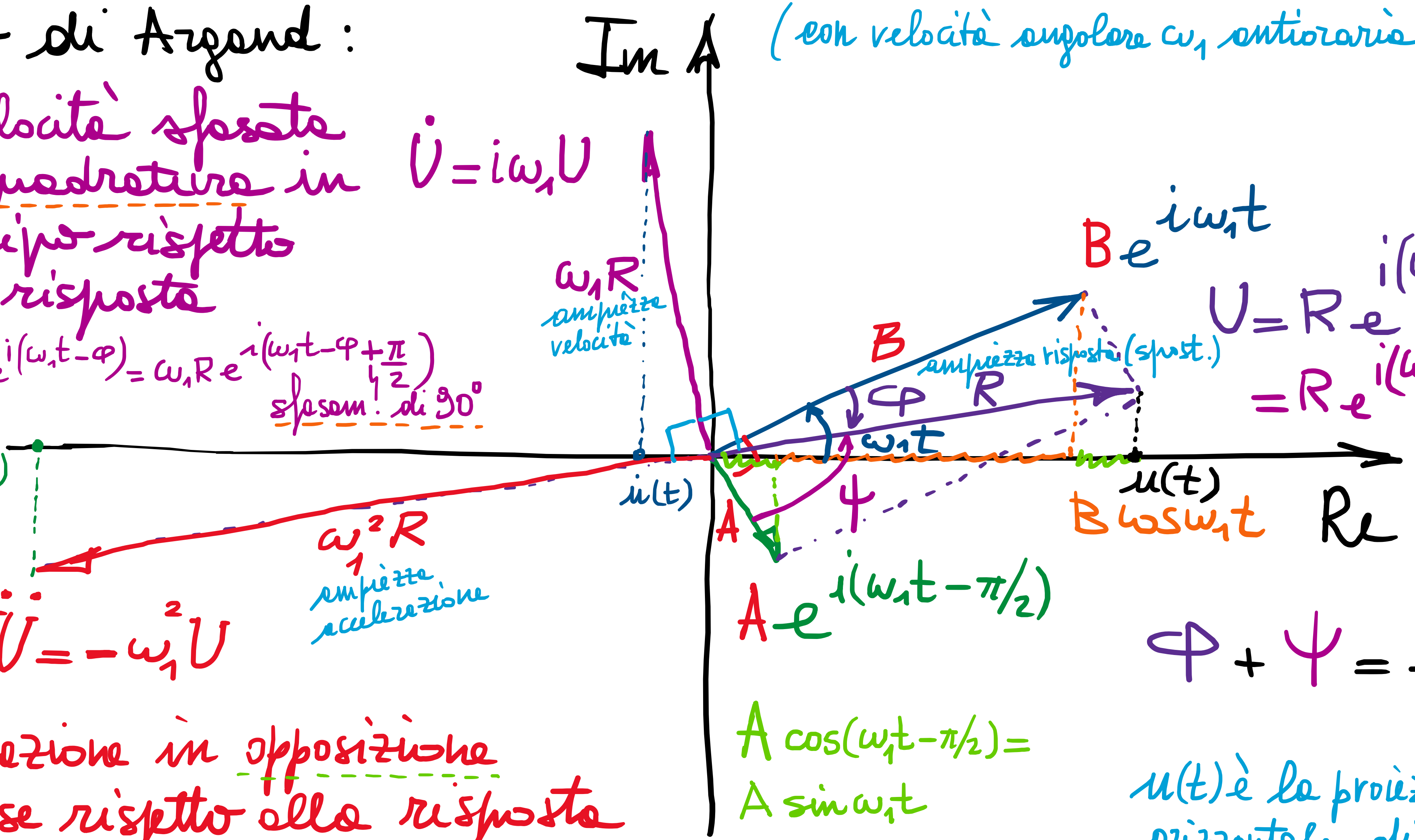
$\dot{U} = i\omega_1 U$

$\dot{U} = \underbrace{i}_{e^{i\pi/2}}\omega_1 R e^{i(\omega_1 t - \varphi)} = \omega_1 R e^{i(\omega_1 t - \varphi + \frac{\pi}{2})}$

sfasam. di 90°

$B e^{i\omega_1 t}$

$U = R e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$
$= R e^{i(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} + \psi)}$



$\ddot{U} = -\omega_1^2 U$

$A e^{i(\omega_1 t - \pi/2)}$

$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$

accelerazione in opposizione di fase rispetto alla risposta

sfasamento di 180°

$(\ddot{u} = -\omega_1^2 u)$ ove u è positivo, $\ddot{u}$ è negativo

$A\cos(\omega_1 t - \pi/2) =$
$A\sin\omega_1 t$

$u(t)$ è la proiezione orizzontale di $U(t)$ (ombra sull'asse x)

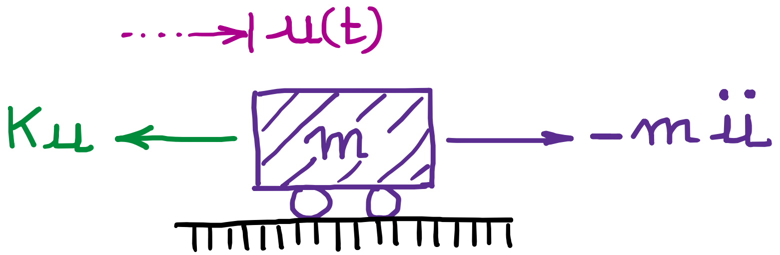
Concetti fondamentali :

- Oscillazioni libere non smorzate ⇒ eq.ne dei moti armonici :

$m, K = \text{cost}$

sistema tempo-invariante

con c.i. $\begin{cases} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{cases}$ @ $t = t_0$



$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsazione naturale del sistema

$$m\,\ddot{u}(t) + K\,u(t) = 0 \Rightarrow \ddot{u}(t) + \omega_1^2\,u(t) = 0$$

- Integrale generale (soluzione) ⇒ moto armonico di pulsazione ω_1 e ampiezza (R) costante :

$$u(t) = \underbrace{A}_{\frac{\dot{u}_0}{\omega_1}} \sin\omega_1 t + \underbrace{B}_{u_0} \cos\omega_1 t = R\cos(\omega_1 t - \varphi) = R\sin(\omega_1 t + \psi)$$

$$= \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} \sin\omega_1 t + u_0 \cos\omega_1 t$$

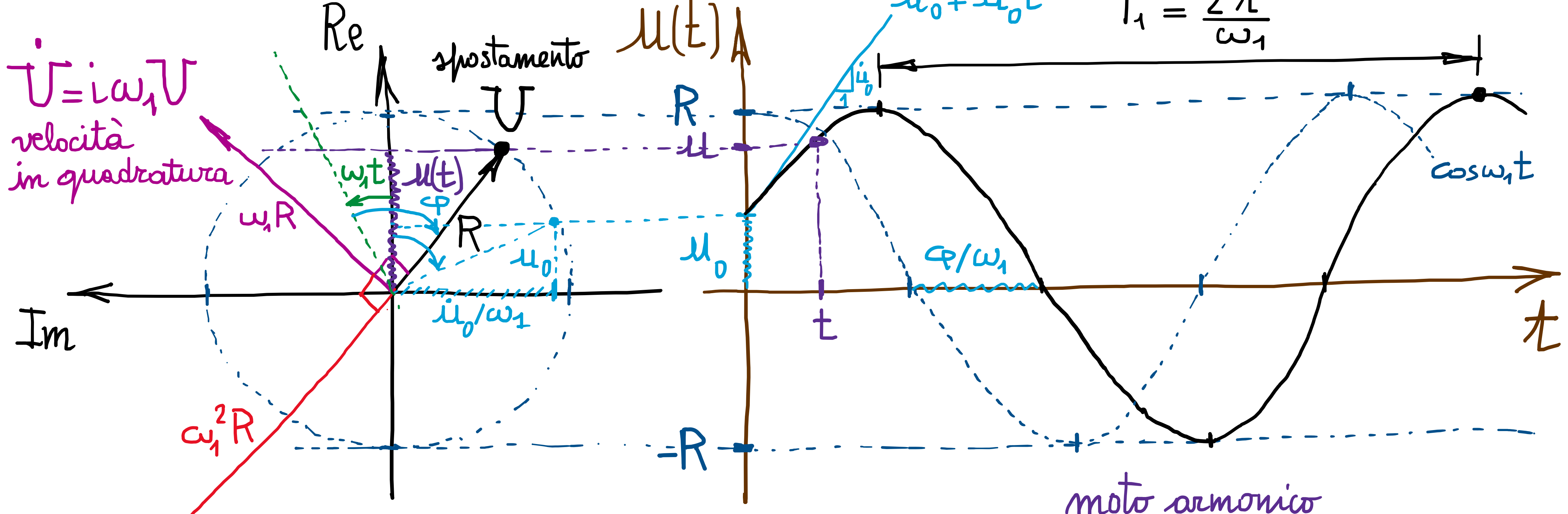
$R = \sqrt{A^2 + B^2}$

fasi : $\varphi = \text{atan}\,\frac{A}{B}$, $\psi = \text{atan}\,\frac{B}{A}$

– Rappresentazione con vettori rotanti nel piano di Argand e grafico in funzione di t:

$$U = R e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$



$$\ddot{U} = -\omega_1^2 U$$

accelerazione
in opposizione di fase

$$R = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\right)^2 + u_0^2}$$

$$\varphi = \operatorname{atan} \frac{\dot{u}_0/\omega_1}{u_0}$$

moto armonico
di pulsazione ω_1 (periodo T_1)
e ampiezza R costante
sfasato in ritardo di φ
rispetto a $\cos\omega_1 t$

SOMMARIO (Lez. 02)

- Oscillazioni libere non smorzate (in risposta alle sole c.i.).
- Eq.ne dei moti armonici.
- Pulsazione naturale del sistema $\omega_1 = \sqrt{K/m}$.
- Moto armonico di periodo naturale $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (e ampiezza costante).
- Ampiezza e sfasamento, rispetto a puro cos o sin.
- Rappresentazione del moto mediante vettori rotanti nel piano di Argand: U sfasata; $\dot{U} \sim \omega_1 U$ in quadratura in anticipo; $\ddot{U} \sim -\omega_1^2 U$ in opposizione di fase.

- Next step: generalizzazione al caso smorzato, con ampiezza decadente nel tempo.