Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

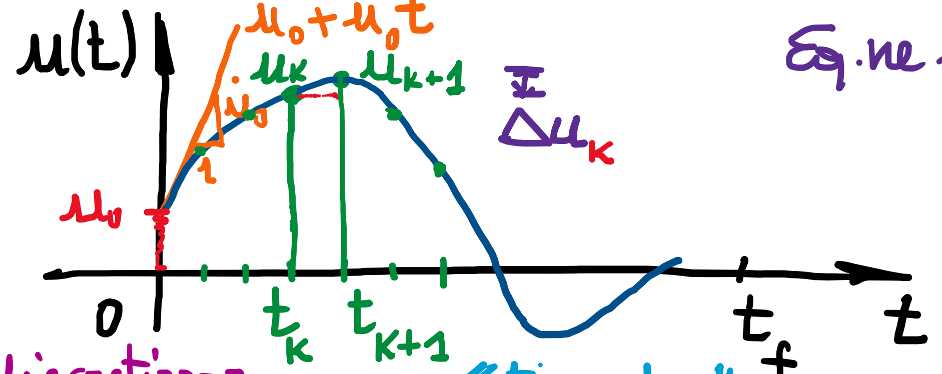
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 09

Integrazione diretta nel tempo dell'equazione del moto (integrazione passo-passo)

"step-by-step"



discretizzaz. dell'asse dei tempi

"time step"

Δt_k passo temporale

$\Delta t_k = \Delta t = \dfrac{t_f - t_0}{n}$ ... n° dei passi

Eq.ne del moto in forma incrementale:

$$m\,\Delta\ddot u_k + c\,\Delta\dot u_k + K\,\Delta u_k = \Delta F_k \Rightarrow \Delta u,\ \Delta\dot u,\ \Delta\ddot u$$

(esatto o approx.)

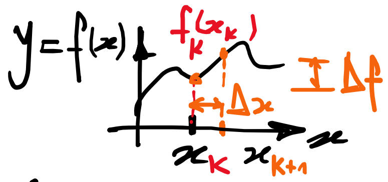
"Avanzamento" $t_k \to t_{k+1}$

$$\ddot u_{k+1} = \ddot u_k + \Delta\ddot u_k \qquad [\Delta\ddot u_k = \ddot u_{k+1} - \ddot u_k]$$

aggiornamento della soluzione

soluz. all'inizio del passo

incremento della soluzione nel passo

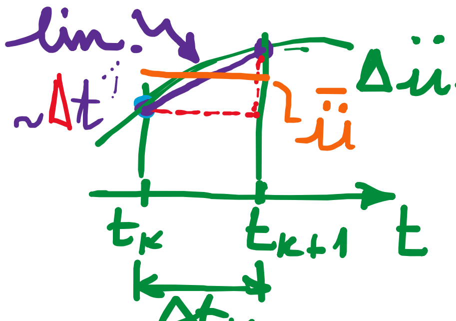


"Metodo delle differenze finite" ⇒ rappresentaz. di derivate tramite rapporti incrementali

Sviluppo in serie di Taylor: $\Delta f_k = f(x_k+\Delta x_k) - f(x_k) = f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x)\,\Delta x^3 + \dots$ termini di ordine superiore

troncamento

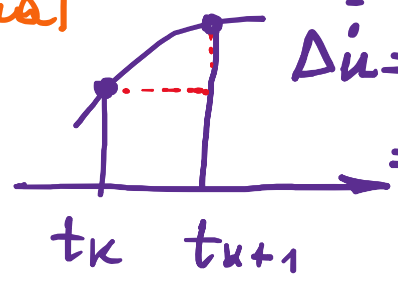
- **Metodo dell'accelerazione lineare** (media)



$\Delta\ddot u = \dddot u\,\Delta t$ 1° ord. $\quad f_1 \Rightarrow \ddot u$

$\Rightarrow \dddot u = \dfrac{\Delta\ddot u}{\Delta t}$

⇒

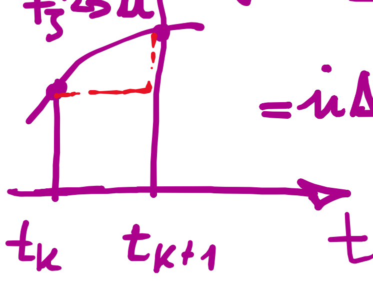


$\sim\Delta t^2 \qquad f_2 \Rightarrow \dot u$

$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\dddot u\,\Delta t^2$ 2° ord.

$= \Delta t\left(\ddot u + \frac{1}{2}\Delta\ddot u\right)$

⇒



$\sim\Delta t^3 \qquad f_3 \Rightarrow u$

$\Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot u\,\Delta t^3$ 3° ord.

$= \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\ddot u + \frac{1}{3}\Delta\ddot u\right)$

sostituzione

Metodo di Newmark (1959) $\Rightarrow$ Generalizzazione (famiglia di metodi di integrazione)

β, γ costanti del metodo di N.

$$(1)\ \Delta u = \dot{u}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2(\underbrace{\ddot{u} + 2\beta\Delta\ddot{u}}_{(1-2\beta)\ddot{u}_K + 2\beta\ddot{u}_{K+1}}) = \dot{u}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}\Delta t^2 + \beta\Delta\ddot{u}\Delta t^2 \qquad \Delta\ddot{u} = \ddot{u}_{K+1} - \ddot{u}_K$$

$$(2)\ \Delta\dot{u} = \Delta t(\underbrace{\ddot{u} + \gamma\Delta\ddot{u}}_{(1-\gamma)\ddot{u}_K + \gamma\ddot{u}_{K+1}})$$

medie pesate di $\ddot{u}_K$ e $\ddot{u}_{K+1}$

- Acc. lin. $2\beta = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{6}$; $\gamma = \frac{1}{2}$
- " media $2\beta = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{4}$; $\gamma = \frac{1}{2}$

- Dalla (1): $\Delta\ddot{u} = \frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot{u}\cancel{\Delta t}}{\beta\Delta t^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\ddot{u}\cancel{\Delta t^2}}{\beta\cancel{\Delta t^2}} = \boxed{\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot{u}}{\beta\Delta t} - \frac{\ddot{u}}{2\beta} = \Delta\ddot{u}}$ (3)

$\Delta\ddot{u}$ f.ne di Δu

- Sost. la (3) nella (2):

$$\Delta\dot{u} = \ddot{u}\Delta t + \gamma\cancel{\Delta t}\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^{\cancel{2}}} - \gamma\cancel{\Delta t}\frac{\dot{u}}{\beta\cancel{\Delta t}} - \gamma\Delta t\frac{\ddot{u}}{2\beta} = \boxed{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u} + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta}\ddot{u}\Delta t = \Delta\dot{u}} \quad (4)$$

$\Delta\dot{u}$ f.ne di Δu

- Sost. la (3) e la (4) nell'eq.ne del moto in forma incrementale: $m\Delta\ddot{u} + c\Delta\dot{u} + K\Delta u = \Delta F$

$$\underbrace{\left(\frac{m}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta\Delta t} + K\right)}_{\tilde{K}\ \text{rigidezza efficace}}\Delta u = \underbrace{\Delta F_K + \frac{m}{\beta}\left(\frac{\dot{u}}{\Delta t} + \frac{\ddot{u}}{2}\right) + \frac{c}{\beta}\left(\gamma\dot{u} - \frac{2\beta - \gamma}{2}\ddot{u}\Delta t\right)}_{\Delta\tilde{F}_K\ \text{forza incrementale efficace}} \Rightarrow \boxed{\tilde{K}\Delta u = \Delta\tilde{F}}$$

$$\Delta u = \tilde{K}^{-1}\Delta\tilde{F}$$

- Noto Δu, sost. nelle (4) e (3), si ottengono gli incrementi $\Delta\dot{u}$ e $\Delta\ddot{u}$, a consentire l'avanzamento della soluzione all'istante temporale successivo.

Implementazione ("pseudo-code") $\Rightarrow$ Algoritmo di integrazione

- Partendo da c.i. $u_0, \dot{u}_0$

CICLO su tutti i time step

- $t_k : u_k, \dot{u}_k, \ddot{u}_k \; ; \; \Delta F_k$
- calcolo di $\tilde{K}, \Delta \tilde{F}_k$
- soluzione $\Delta u_k = \tilde{K}^{-1} \Delta \tilde{F}_k$
- determinaz. di $\Delta \dot{u}_k, \Delta \ddot{u}_k$
- aggiornamento variabili $u_{k+1}, \dot{u}_{k+1}, \ddot{u}_{k+1}$

cf. $\Rightarrow$ accuratezza del metodo (bontà della soluz.) approssimata rispetto alla reale

indicazione tipica per suff. accurat.

$$\Delta t \simeq \frac{T_1}{10}$$

metodo	β	γ	tipo	Δt_{cr}
acc. media	1/4	$\frac{1}{2}$	implicito	incond. stab. (∞)
" lineare	1/6			$\sqrt{3}\,\frac{T_1}{\pi}$
differenze centrali	0		esplicito	$\frac{T_1}{\pi}$ valore di riferim. per stabilità

$$\Omega_{cr} = \frac{\xi(\gamma - 1/2) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2(\gamma - 1/2)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}$$

Stima Δt_{cr}

stima conservat. $\xi = 0$ e $\gamma = 1/2$

$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} ; \quad \Delta t_{cr} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} T_1$$

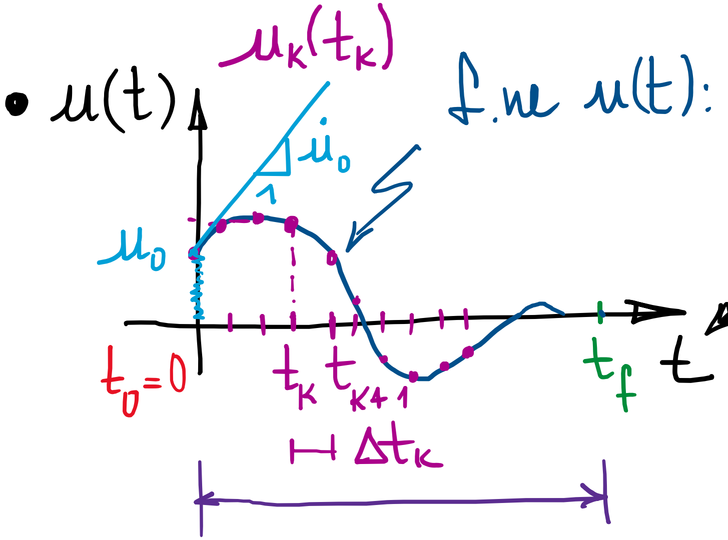
Caratteristiche

- esplicito sse $\beta = 0$
- accuratezza del 2° ordine sse $\gamma = 1/2$ $\quad \varepsilon \sim \Delta t^2$ (errore)
- stabilità (numerica): u limitata $\forall \Delta t$
- incondizionatamente stabile ($\forall \Delta t$): $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$
- condizionatamente stabile: $2\beta < \gamma ; \gamma \geq 1/2$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_1} = \frac{\Omega_{cr}}{2\pi} T_1$$

Concetti fondamentali :

• $u(t)$



finestra temporale di interesse

f.ne $u(t)$: risposta temporale

asse dei tempi (tempo "continuo" $\Leftrightarrow$ "continuous time")

$t_0 \le t_k \le t_f$

asse campionato (tempo "discreto" $\leftrightarrow$ "discrete time") dei tempi -

n° discreto di istanti temporali, campionati ad intervallo di tempo Δt_k - Spesso $\Delta t_k = \Delta t = \frac{t_f - t_0}{n} = cost$

"passo temporale o di tempo"

n°. dei passi temporali ("time steps")

Soluzione continua esatta $u(t)$

" discreta esatta $u_k(t_k)$ (campionamento di $u(t)$)

" " approssimata $\tilde{u}_k(t_k)$ (sufficientemente accurata, nella rappresentazione della risposta reale)

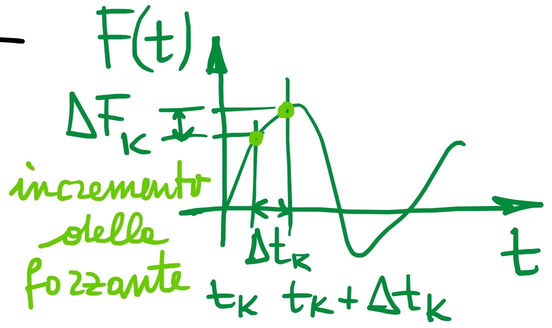
- Eq.ne del moto in forma incrementale:

$m, c, K = \text{cost}$ (sist. dinamico tempo-invariante)

all'inizio del passo t_K: $\quad m\,\ddot{u}_K + c\,\dot{u}_K + K\,u_K = F_K(t_K) \quad \ominus$

alla fine del passo $t_{K+1} = t_K + \Delta t_K$: $\quad m\,\ddot{u}_{K+1} + c\,\dot{u}_{K+1} + K\,u_{K+1} = F_{K+1}(t_{K+1}) \quad \oplus$

$$m\,\Delta\ddot{u}_K + c\,\Delta\dot{u}_K + K\,\Delta u_K = \Delta F_K$$



"avanzamento" della soluzione nel passo temporale $\Rightarrow$

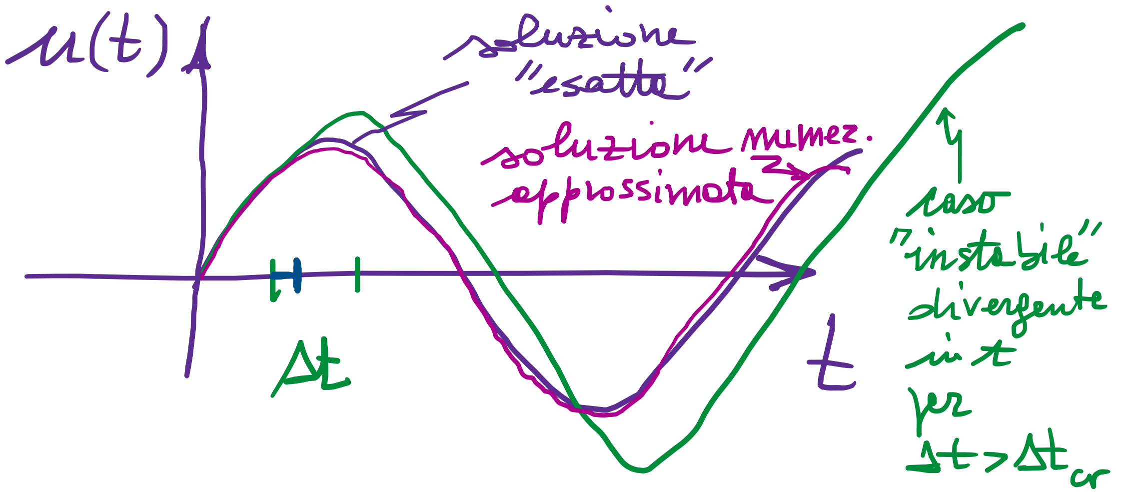
$$\ddot{u}_{K+1} = \ddot{u}_K + \Delta\ddot{u}_K$$

valori alla fine del passo — valori all'inizio del passo — incremento della risposta nel passo

- Metodo di integrazione: due aspetti fondamentali

  – stabilità del metodo (risposta non divergente o limitata in t al variare, crescere, di Δt)

  $\tilde{u}(t)$ di significato numerico e fisico (non esplode, diverge)



  – accuratezza del metodo (stima della vicinanza della soluzione approssimata, rispetto a quella reale)

- Inoltre, caratteristica del metodo:
  - implicito (necessita della soluzione all'interno del passo) non avanza automaticamente
  - esplicito ("in avanti" – "forward") può richiedere passi molto piccoli (es. in dinamica veloce)

SOMMARIO (Lez. 09)

- Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (nel dominio del tempo).
- Da sviluppo in serie di Taylor => differenze finite (approx. nel passo).
- Metodo dell'accelerazione lineare/media.
- Generalizzazione => Metodo di Newmark (famiglia di metodi).
- Implementazione in algoritmo numerico passo-passo.
- Caratteristiche (implicito/esplicito; accuratezza; stabilità numerica).

Next step: Introduzione (cenno) all'analisi nel dominio delle frequenze.
Sistemi MDOF (Multi Degree of Freedom Systems) => alias sistemi discreti a più gradi di libertà.