13a Lez. FDIS – Modi principali di vibrare e oscillazioni libere (dei sistemi non smorzati) ad n gradi di libertà

erizzi@unibg.it

- $\mathbb{M}\ddot{q}+\mathbb{K}q=0$ – Cerco soluz. $q=\phi\sin(\omega t+\psi) \overset{o}{=} \phi\cos(\omega t-\varphi) \overset{o}{=} \phi(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$ con ϕ vettore di ampiezze, ω pulsazione (parametri incogniti da determ.)

risposta non forzata

$\dot{q}=\omega\phi\cos(\omega t+\psi)$; $\ddot{q}=-\omega^2\phi\sin(\omega t+\psi)=-\omega^2 q$ $\quad A x=\lambda B x$ $\quad$ n autosoluzioni $\quad T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}$ periodi propri

Sostituendo:

$\mathbb{M},\mathbb{K}$ simm. e def. pos. $(\mathbb{K}-\omega^2\mathbb{M})\phi\,\sin(\omega t+\psi)=0\ \forall t \Rightarrow (\mathbb{K}-\omega_i^2\mathbb{M})\phi_i=0$ o $\boxed{\mathbb{K}\phi_i=\omega_i^2\mathbb{M}\phi_i}$ – Problema agli autovalori (generalizzato) associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ $(n\times n)$ $\left\{\begin{array}{l}\omega_i^2 \text{ autovalori ; } \omega_i \text{ pulsazioni proprie}\\ \phi_i \text{ autovettori} \rightarrow \text{modi propri o naturali}\end{array}\right.$

- Proprietà del pb. agli autovalori (in forma generalizzata o standard): $\mathbb{K},\mathbb{M}$ reali e simm. e def. pos. $\quad$ matrici def. pos. (non simm.)

- $\det(\mathbb{K}-\omega^2\mathbb{M})=0$ eq.ne caratteristica (di ordine n) $\Rightarrow$ n autovalori ω_i^2 reali e positivi; – Possibile porlo nella forma standard ($\mathbb{B}=\mathbb{I} \Rightarrow Ax=\lambda x$):
  enumerati in modo crescente: $\omega_1\le\omega_2\le\cdots\le\omega_i\le\cdots\le\omega_n$ – ω_1 pulsazione fondamentale (I modo)
  n pulsazioni naturali del sist. (ω_1: 1° modo, ω_i: modo i, ω_n: ultimo modo)
  $\mathbb{K}^{-1}\cdot \Rightarrow \phi=\omega^2(\mathbb{K}^{-1}\mathbb{M})\phi=\omega^2\mathbb{G}\phi \Rightarrow \boxed{\mathbb{G}\phi=\frac{1}{\omega^2}\phi \text{ con } \mathbb{G}=\mathbb{K}^{-1}\mathbb{M}=\mathbb{H}^{-1}}$
  $\mathbb{M}^{-1}\cdot \Rightarrow (\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K})\phi=\mathbb{H}\phi=\omega^2\phi \Rightarrow \boxed{\mathbb{H}\phi=\omega^2\phi \text{ con } \mathbb{H}=\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}=\mathbb{G}^{-1}}$
- in generale non tutti distinti (in genere sì in ambito strutturale).
- solitamente calcolati in forma numerica per $n>4$ (ad es. mediante algoritmi iterativi).
- autovettori ϕ_i da soluz. del sistema omogeneo (con matrice dei coefficienti singolare) $(\mathbb{K}-\omega_i^2\mathbb{M})\phi_i=0$ $\quad$ – Sia $\omega_r \overset{hp.}{\neq} \omega_s$ (pulsazioni distinte) tali che: $\phi_s^T\cdot(\mathbb{K}\phi_r=\omega_r^2\mathbb{M}\phi_r)$ – $\phi_r^T\cdot(\mathbb{K}\phi_s=\omega_s^2\mathbb{M}\phi_s)$
- si dimostra agevolmente che a due autovalori distinti corrispondono due autovettori mutuamente perpendicolari (rispetto alle matrici $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$): $\omega_r\neq\omega_s \Rightarrow \phi_r^T\mathbb{K}\phi_s=0$, $\phi_r^T\mathbb{M}\phi_s=0$. $\Rightarrow$ DIM:
  $\phi_s^T\mathbb{K}\phi_r-\underbrace{\phi_r^T\mathbb{K}\phi_s}_{\phi_s^T\mathbb{K}^T\phi_r}=\omega_r^2\phi_s^T\mathbb{M}\phi_r-\omega_s^2\underbrace{\phi_r^T\mathbb{M}\phi_s}_{\phi_s^T\mathbb{M}^T\phi_r}$
  $\mathbb{M}$ simm. $\rightarrow \mathbb{M}^T=\mathbb{M}$; $\mathbb{K}$ simm. $\rightarrow \mathbb{K}^T=\mathbb{K}$ $\quad \phi_s^T\underbrace{(\mathbb{K}-\mathbb{K}^T)}_{0}\phi_r=\underbrace{(\omega_r^2-\omega_s^2)}_{\neq 0 \text{ per hp.}}\phi_s^T\mathbb{M}\phi_r=0 \Rightarrow \boxed{\phi_s^T\mathbb{M}\phi_r=0}$
  Conseguentemente, anche (es. dalla 1a relaz.) $\Rightarrow \boxed{\phi_s^T\mathbb{K}\phi_r=0}$ $\quad \phi_r\perp\phi_s$ risp. a $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$
- ω_i, ϕ_i rappresentano le caratteristiche intrinseche vibrazionali del sistema ad n gdl e definiscono compiutamente i modi principali di vibrazione $q_i(t)=\phi_i\sin(\omega_i t+\psi_i)$, $T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}$ periodi propri
- gli autovettori ϕ_i rappresentano le forme modali, in particolare le ampiezze relative tra i vari gdl. Infatti, i ϕ_i sono definiti a meno di una costante arbitraria $\Rightarrow \lambda\phi_i$ è autovettore. Risulta: $\phi_{ij}/\phi_{ik}=\lambda\phi_{ij}/\lambda\phi_{ik}=$ cost. indip. dall'ampiezza assoluta di ϕ_i
- dalla proprietà di ortogonalità risulta: $\quad \phi_r^T\mathbb{M}\phi_s=M_r\delta_{rs}=\left\langle\begin{array}{l}0 \text{ se } r\neq s\\ M_r=\phi_r^T\mathbb{M}\phi_r>0 \text{ se } r=s\end{array}\right.$ (simb. di Kronecker; massa associata al modo r; simm. e D.P.) ; $\phi_r^T\mathbb{K}\phi_s=K_r\delta_{rs}=\left\langle\begin{array}{l}0 \text{ se } r\neq s\\ K_r=\phi_r^T\mathbb{K}\phi_r>0 \text{ se } r=s\end{array}\right.$ (rigidezza associata al modo r; simm. e D.P.)
- premolt. il pb. $\mathbb{K}\phi_i=\mathbb{M}\phi_i\omega_i^2$ per ϕ_i^T:
  $\underbrace{\phi_i^T\mathbb{K}\phi_i}_{K_i}=\underbrace{\phi_i^T\mathbb{M}\phi_i}_{M_i}\omega_i^2 \Rightarrow \omega_i^2=\dfrac{\frac{1}{2}\phi_i^T\mathbb{K}\phi_i}{\frac{1}{2}\phi_i^T\mathbb{M}\phi_i}=\dfrac{K_i}{M_i}=\dfrac{\mathcal{E}_i^*}{T_i^*}>0$ RAPPORTO DI RAYLEIGH $\rightarrow$ Rapporto tra energia elastica e cinetica corrisp. al modo ϕ_i. Utile a stimare $\tilde{\omega}_i^2=\dfrac{\tilde{\phi}_i^T\mathbb{K}\tilde{\phi}_i}{\tilde{\phi}_i^T\mathbb{M}\tilde{\phi}_i}$ (STIMA) da stima $\tilde{\phi}_i$ dell'autovettore (in genere molto accurata anche per $\tilde{\phi}_i$ ancora approssim.)
  L v. analogia con $\omega_1^2=\frac{k}{m}$ per sistemi ad un gdl
- Normalizzazione degli autovettori (operata in genere per ef. tra i vari modi, visto che gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa):
  - norma unitaria: $\|\phi_i\|=\sqrt{\phi_i^T\phi_i}=\sqrt{\phi_i^T\mathbb{I}\,\phi_i}=\sqrt{\sum_j\phi_{ij}^2}=1$. In pratica, da ϕ_i si ottiene versore $\frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}$. Infatti $\phi_i \Rightarrow \lambda\phi_i$: $\lambda^2\phi_i^T\phi_i=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{\sqrt{\phi_i^T\phi_i}}$
  - componente particolare posta uguale ad 1 (es. spostamento dell'ultimo piano di telaio, oppure primo o ultimo gdl, ecc.): $\phi_{ik}=1$. $\phi_i \Rightarrow \frac{\phi_i}{\phi_{ik}}$ riscalato dividendo per ϕ_{ik}
  - massa modale unitaria: $M_i=\phi_i^T\mathbb{M}\phi_i=1$. Oppure: – rigidezza modale unitaria: $K_i=\phi_i^T\mathbb{K}\phi_i=1$.
- Scrittura matriciale compatta per tutti i modi: (Φ maiuscola, ϕ minuscola)
  - Matrice degli autovettori: $\Phi=[\phi_1 \mid \phi_2 \mid \cdots \mid \phi_i \mid \cdots \mid \phi_n]$ con gli autovettori ϕ_i per colonne, di componenti $\Phi_{ij}=\phi_{ji}$. Invertibile ($\exists\,\Phi^{-1}$) se i ϕ_i sono linearmente indipendenti (garantito da autovett. mutuam. $\perp$ se autovalori distinti)
  - Matrice (diagonale) degli autovalori: $\Omega^2=\mathrm{diag}[\omega_i^2]$ (Def. pos.)
  - Si ottiene: $\boxed{\mathbb{K}\Phi=\mathbb{M}\Phi\Omega^2}$ e, premoltiplicando per Φ^T: $\underset{=\mathrm{diag}[K_i]}{\mathcal{K}}=\Phi^T\mathbb{K}\Phi=\underbrace{(\Phi^T\mathbb{M}\Phi)}_{\mathcal{M}=\mathrm{diag}[M_i]}\Omega^2=\mathcal{M}\Omega^2 \Rightarrow \boxed{\Omega^2=\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}}$ (v. $\omega_1^2=m^{-1}k$ per sistemi ad un gdl.) $=\mathrm{diag}[\omega_i^2=K_i/M_i]$ – Matrici diag. e def. pos.
- Coordinate principali e disaccoppiamento delle eq.ni del moto:
  - Trasformazione di coordinate: $q=\sum_i\phi_i p_i=\phi_1p_1+\phi_2p_2+\cdots+\phi_ip_i+\cdots+\phi_np_n=\underbrace{[\phi_1 \mid \phi_2 \mid \cdots \mid \phi_i \mid \cdots \mid \phi_n]}_{\text{matrice degli autovett.}}\underbrace{\begin{Bmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_n\end{Bmatrix}}_{\text{vettore delle coord. principali}}=\Phi p$ $\quad$ q: coordinate lagrangiane (di senso fisico) $\quad$ p: coordinate principali (non di senso fisico) – bensì matematico
  Le coordinate principali p_i esprimono le coordinate lagrangiane $q_k=\sum_i\phi_{ik}p_i=\sum_i\Phi_{ki}p_i \Leftrightarrow \boxed{q=\Phi p}$ q_k come combinazione lineare degli autovettori ϕ_i: le p_i sono i coefficienti di tale combinazione lineare nello spazio vettoriale dei ϕ_i.
  - Trasformazione inversa. Se ϕ_i linearm. indipendenti (garantito se ω_i distinti), Φ risulta invertibile, quindi $p=\Phi^{-1}q$.
  - Altrettanto, la generica coordinata p_r può essere espressa a partire dal vettore q: $\phi_r^T\mathbb{M}\cdot(q=\sum_i\phi_ip_i) \rightarrow p_r=\dfrac{\phi_r^T\mathbb{M}q}{\underbrace{\phi_r^T\mathbb{M}\phi_r}_{M_r}} \overset{idem}{=} \dfrac{\phi_r^T\mathbb{K}q}{\underbrace{\phi_r^T\mathbb{K}\phi_r}_{K_r}}$ $\quad$ N.B.: p_r dipende dalla normalizzazione dei ϕ_r (vettori dei modi)
  Infatti, premoltiplicando $q=\Phi p$ per $\Phi^T\mathbb{M}$ o $\Phi^T\mathbb{K}$: $\Phi^T\mathbb{M}q=(\Phi^T\mathbb{M}\Phi)p=\mathcal{M}p \Rightarrow p=\mathcal{M}^{-1}\Phi^T\mathbb{M}q=\mathcal{K}^{-1}\Phi^T\mathbb{K}q$.
  - Sostituendo $q=\Phi p$ nelle eq.ni del moto $\mathbb{M}\ddot{q}+\mathbb{K}q=\mathbb{Q}$ e premoltiplicando per Φ^T si ottiene:
  $\Phi^T\cdot(\mathbb{M}\Phi\ddot{p}+\mathbb{K}\Phi p=\mathbb{Q}) \Rightarrow (\Phi^T\mathbb{M}\Phi)\ddot{p}+(\Phi^T\mathbb{K}\Phi)p=\Phi^T\mathbb{Q}=\mathbb{P} \Rightarrow \mathcal{M}\ddot{p}+\mathcal{K}p=\mathbb{P} \Rightarrow$ n eq.ni del moto disaccopp.: $M_i\ddot{p}_i+K_ip_i=P_i=\phi_i^T\mathbb{Q}$; $\ddot{p}_i+\omega_i^2p_i=\frac{P_i}{M_i}=\frac{\phi_i^T\mathbb{Q}}{M_i}$ tipo quella di un sistema ad un gdl
  - Similmente: $\underset{\text{energia elastica}}{\mathcal{E}=\frac{1}{2}q^T\mathbb{K}q}=\frac{1}{2}p^T\mathcal{K}p$; $\underset{\text{energia cinetica}}{T=\frac{1}{2}\dot{q}^T\mathbb{M}\dot{q}}=\frac{1}{2}\dot{p}^T\mathcal{M}\dot{p}$ con $\mathcal{M}=\mathrm{diag}[M_i]$, $\mathcal{K}=\mathrm{diag}[K_i]$

OSCILLAZIONI LIBERE

(per $q_0=\phi_i$, $\dot{q}_0=0 \rightarrow B_i=1, B_{j\neq i}=0$ oscillaz. armonica)

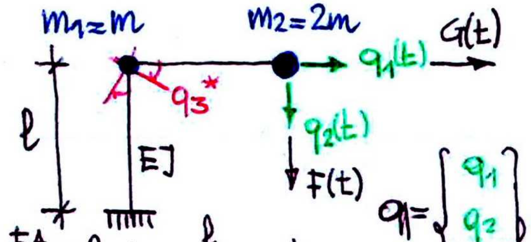
$\mathbb{M}\ddot{q}+\mathbb{K}q=0 \Rightarrow q=\sum\phi_i(A_i\sin\omega_it+B_i\cos\omega_it) \Rightarrow q_0=\sum\phi_iB_i=\Phi B$

$\dot{q}=\sum\omega_i\phi_i(A_i\cos\omega_it-B_i\sin\omega_it) \Rightarrow \dot{q}_0=\sum\omega_i\phi_iA_i=\Phi\Omega A$

c.i. $\begin{cases}q(0)=q_0\\ \dot{q}(0)=\dot{q}_0\end{cases}$ condiz. iniziali $\quad$ composizione di moti armonici (non un moto armonico) $\quad \boxed{B=\Phi^{-1}q_0} \quad \boxed{A=(\Phi\Omega)^{-1}\dot{q}_0=\Omega^{-1}\Phi^{-1}\dot{q}_0}$

14a Lez. FDIS – Esempio di struttura a 2 gdl dinamici (con condensazione statica)

egidio.rizzi@unibg.it



$\frac{EA}{\ell}\to 0$ aste inestensibili

Gradi di libertà dinamici: q_1 (comune a m_1 e m_2, per l'inestens. assiale dell'asta orizzontale) e q_2
⇒ utili a definire la conf.ne dinamica del sistema, in specie la distribuzione delle forze d'inerzia

Grado di libertà statico: q_3^* – rotazione del nodo – Ad esso non vi è associata inerzia rotazionale –
⇒ utile a rappresentare la conf.ne deformata al generico istante t e ad esprimere le matrici di rigidezza o di cedevolezza elastiche della struttura – Eliminabile ai fini della analisi dinamica in senso stretto.

$$\mathbf{q}=\begin{Bmatrix} q_1\\ q_2\\ \hdashline q_3^*\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{q}_d\\ \hdashline \mathbf{q}_s\end{Bmatrix}$$

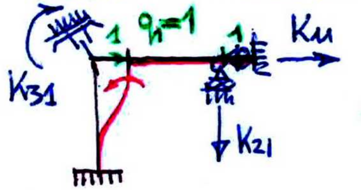
partizione event. tra gdl dinamici e statici $\mathbf{q}_d(2\times1)$, $\mathbf{q}_s(1\times1)$ — dipendente solo dai gdl dinamici

- **Scrittura dell'Energia cinetica** (con determinazione della matrice di massa), $T=T(\dot q_1,\dot q_2)$:

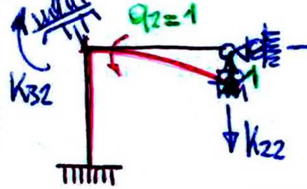
$$T=\frac12\Big[\underbrace{(m_1+m_2)}_{3m}\dot q_1^2+\underbrace{m_2}_{2m}\dot q_2^2\Big]=\frac12 m\left(3\dot q_1^2+2\dot q_2^2\right)=\frac12\{\dot q_1\ \dot q_2\}\,m\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\end{Bmatrix}=\frac12\dot{\mathbf{q}}_d^T\mathbb{M}\,\dot{\mathbf{q}}_d \Rightarrow \boxed{\mathbb{M}=m\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}}$$

forma quadr. assoc. a $\mathbb{M}$ — Matrice delle masse (diagonale) — v. anche eq.ni di Lagrange $M_{ij}=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}$

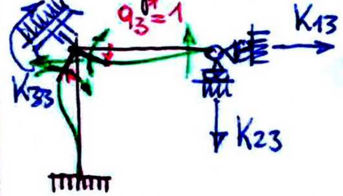
- **Determinazione della matrice di rigidezza elastica** (ad es. coi coefficienti di rigidezza da metodo degli spostamenti):



$$\begin{cases}K_{11}=12\frac{EJ}{\ell^3}\\ K_{21}=0\\ K_{31}=-6\frac{EJ}{\ell^2}\end{cases}$$



$$\begin{cases}K_{12}=0\\ K_{22}=3\frac{EJ}{\ell^3}\\ K_{32}=-3\frac{EJ}{\ell^2}\end{cases}$$



$$K_{13}=-\frac{6EJ}{\ell^2}\qquad K_{23}=-\frac{3EJ}{\ell^2}\qquad K_{33}=4\frac{EJ}{\ell}+3\frac{EJ}{\ell}=7\frac{EJ}{\ell}$$

N.B.: coeff. di rigidezza semplici, tabellati, pronti da utilizzare (grazie all'utilizzo del gdl statico q_3^*)

Compilando la matrice $\mathbb{K}$ per colonne: (•)

$$\mathbb{K}=\frac{EJ}{\ell^3}\left[\begin{array}{cc:c}12&0&-6\ell\\0&3&-3\ell\\ \hdashline -6\ell&-3\ell&7\ell^2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}\underset{(2\times2)}{\mathbb{K}_{dd}}&\underset{(2\times1)}{\mathbb{K}_{ds}}\\ \hdashline \underset{(1\times2)}{\mathbb{K}_{sd}}&\underset{(1\times1)}{\mathbb{K}_{ss}}\end{array}\right]$$

$K_{ij}=\frac{\partial^2 E}{\partial q_i\partial q_j}$

N.B.:
- $\mathbb{K}$ simmetrica ($\mathbb{K}^T=\mathbb{K}$) – ⇒ $\mathbb{K}_{dd}$ e $\mathbb{K}_{ss}$ simm.
- $\mathbb{K}_{sd}=\mathbb{K}_{ds}^T$

– **Partizione di $\mathbb{E}=\mathbb{K}\mathbf{q}$**:

$$\mathbb{E}=\begin{Bmatrix}\mathbb{E}_d\\ \hdashline \mathbb{E}_s\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbb{K}_{dd}&\mathbb{K}_{ds}\\ \hdashline \mathbb{K}_{sd}&\mathbb{K}_{ss}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{q}_d\\ \hdashline \mathbf{q}_s\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\mathbb{E}_d=\mathbb{K}_{dd}\mathbf{q}_d+\mathbb{K}_{ds}\mathbf{q}_s\\ \mathbb{E}_s=\mathbb{K}_{sd}\mathbf{q}_d+\mathbb{K}_{ss}\mathbf{q}_s\end{cases}$$

– **Condensazione statica dei gdl $\mathbf{q}_s$**: dalla 2ª eq.ne (gruppo di eq.ni):

$$\boxed{\mathbf{q}_s\overset{(*)}{=}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s-\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\mathbf{q}_d}\Rightarrow \mathbf{q}_s=\mathbf{q}_s(\mathbf{q}_d)$$

∃ per def. pos. di $\mathbb{K}$ — esprime i gdl statici in fun.ne di quelli dinamici

Sostituendo la (*) nella 1ª eq.ne (gruppo di eq.ni):

$$\mathbb{E}_d=\mathbb{K}_{dd}\mathbf{q}_d+\mathbb{K}_{ds}\left(\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s-\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\mathbf{q}_d\right)\Rightarrow\underbrace{\Big(\mathbb{K}_{dd}-\mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\overset{\mathbb{K}_{ds}^T}{\mathbb{K}_{sd}}\Big)}_{\mathbb{K}'_{dd}\ \text{è simm.}}\mathbf{q}_d=\underbrace{\mathbb{E}_d-\mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s}_{\mathbb{E}'_d}\Rightarrow\mathbb{K}'_{dd}\mathbf{q}_d=\mathbb{E}'_d$$

matrice di rigidezza condensata o efficace, associata ai soli gdl dinamici — $\mathbb{E}'_d$ forze elastiche condensate o efficaci

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{K}'_{dd}&=\mathbb{K}_{dd}-\mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sd}\\ \mathbb{E}'_d&=\mathbb{E}_d-\mathbb{K}_{ds}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{E}_s\end{aligned}}$$

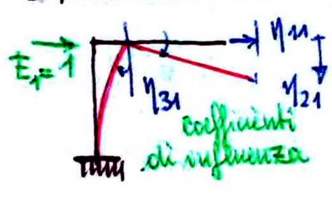
– **Operando per l'esempio si ottiene**:

$$\mathbb{K}'_{dd}=\frac{EJ}{\ell^3}\left(\begin{bmatrix}12&0\\0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-6\ell\\-3\ell\end{bmatrix}\frac{1}{7\ell^2}\left[-6\ell\ \ -3\ell\right]\right)=\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}12-\frac{36}{7}&-\frac{18}{7}\\-\frac{18}{7}&3-\frac{9}{7}\end{bmatrix}=\frac37\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}\overset{16}{4\cdot7-12}&-6\\-6&\underset{4}{7-3}\end{bmatrix}=\boxed{\frac67\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}8&-3\\-3&2\end{bmatrix}}=\mathbb{K}'_{dd}$$

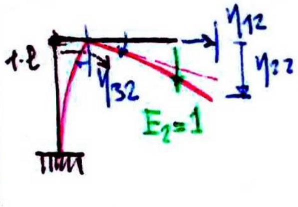
simm. — è la $\mathbb{K}$ finale che ci occorre nei soli gdl dinamici, per esprimere le eq.ni del moto:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}_d+\mathbb{K}'_{dd}\mathbf{q}_d=\begin{Bmatrix}G(t)\\F(t)\end{Bmatrix}$$

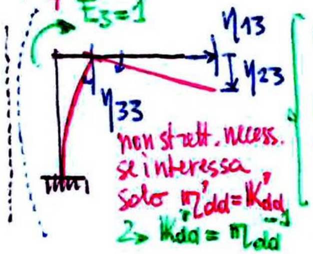
– **Alternativa**: calcolo della matrice di cedevolezza (o flessibilità):



$$\begin{cases}\eta_{11}=\frac13\frac{\ell^3}{EJ}\\ \eta_{21}=\eta_{31}\cdot\ell=\frac12\frac{\ell^3}{EJ}\\ \hdashline \eta_{31}=\frac12\frac{\ell^2}{EJ}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\eta_{12}=1\cdot\ell\cdot\frac12\frac{\ell^2}{EJ}=\frac12\frac{\ell^3}{EJ}\\ \eta_{22}=\eta_{32}\cdot\ell+\frac13\frac{\ell^3}{EJ}=\frac43\frac{\ell^3}{EJ}\\ \hdashline \eta_{32}=1\cdot\ell\cdot\frac{\ell}{EJ}=\frac{\ell^2}{EJ}\end{cases}$$



non strett. necess. se interessa solo $\eta'_{dd}=\mathbb{K}'^{-1}_{dd}$ ⇒ $\mathbb{K}'_{dd}=\eta'^{-1}_{dd}$

$$\begin{cases}\eta_{13}=\frac12\frac{\ell^2}{EJ}\\ \eta_{23}=\eta_{33}\ell=\frac{\ell^2}{EJ}\\ \eta_{33}=\frac{\ell}{EJ}\end{cases}$$

matrice di cedevol.

$$\eta=\frac16\frac{\ell^3}{EJ}\left[\begin{array}{cc:c}2&3&\frac{3}{\ell}\\3&8&\frac{6}{\ell}\\ \hdashline\frac{3}{\ell}&\frac{6}{\ell}&\frac{6}{\ell^2}\end{array}\right]\Rightarrow\mathbb{K}=\eta^{-1}\to(\bullet)\ \text{vok}$$

$$\eta'_{dd}=\frac16\frac{\ell^3}{EJ}\begin{bmatrix}2&3\\3&8\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbb{K}'_{dd}=\eta'^{-1}_{dd}\qquad \text{vok}=\frac{6EJ}{\ell^3}\frac{1}{\underset{7}{16-9}}\begin{bmatrix}8&-3\\-3&2\end{bmatrix}$$

 egidio.rizzi@unibg.it

- Pb. agli autovalori (generalizzato): $\boxed{\mathbb{K}\,\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\phi_i}$ $i=1,2 \rightarrow (\mathbb{K}-\omega_i^2\mathbb{M})\,\phi_i = 0 \rightarrow \det(\mathbb{K}-\omega_i^2\mathbb{M}) = \det\left(\frac{6}{7}\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \omega_i^2\, m \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = 0$ _ Sia $\boxed{\lambda_i = \omega_i^2 \frac{ml^3}{EJ}}$ parametro puramente numerico

- Si ottiene l'eq.ne caratteristica: $\det\left(\frac{6}{7}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\frac{48}{7}-3\lambda_i & -\frac{18}{7}\\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7}-2\lambda_i\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{48}{7}-3\lambda_i\right)\left(\frac{12}{7}-2\lambda_i\right) - \frac{18^2}{7^2} = 0 \rightarrow (48-21\lambda_i)(12-14\lambda_i) - 18^2 = 0$

$(16-7\lambda_i)(6-7\lambda_i) - 18\cdot 3 = 0$

eq.ne caratteristica finale: $\boxed{7\lambda_i^2 - 22\lambda_i + 6 = 0}$ di 2° grado, nelle inc. λ_i $\Leftarrow \cancel{7}\cdot 7\lambda_i^2 - \cancel{7}\cdot 22\lambda_i + \underbrace{16\cdot 6 - 18\cdot 3}_{\cancel{7}\cdot 6} = 0$ $\left[\frac{EJ}{ml^3}\right] = \frac{1}{[t]^2}$

- Autovalori: $\lambda_{1,2} = \frac{11 \mp \sqrt{121-42}}{7} = \frac{11\mp\sqrt{79}}{7} = \left\langle \begin{matrix}\lambda_1 = 0.3017\\ \lambda_2 = 2.841\end{matrix}\right.$ (in generale soluz. numerica) (4 cifre significative)

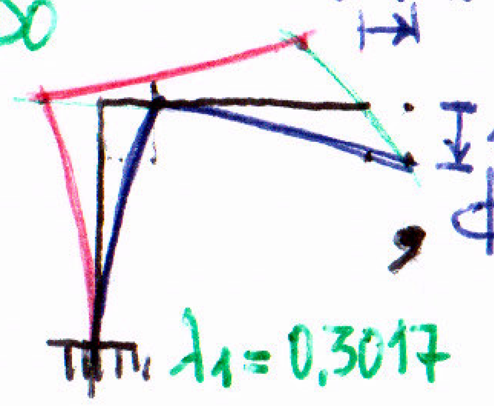
$\rightarrow \begin{cases}\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 0.5493\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} & \text{I MODO}\\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} = 1.686\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} & \text{II MODO}\end{cases}$

PULSAZIONI PROPRIE (ordinati con ω_i crescenti)

- Calcolo degli autovettori ϕ_i: (noti a meno di una costante)

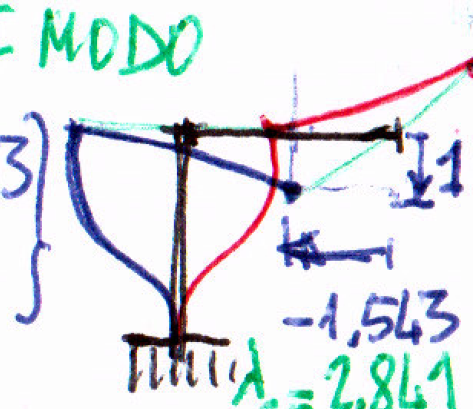
$$\begin{bmatrix}\frac{48}{7}-3\lambda_i & -\frac{18}{7}\\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7}-2\lambda_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{i1}\\ \phi_{i2}\end{Bmatrix} = \mathbb{0} \rightarrow \frac{\phi_{i1}}{\phi_{i2}} = \frac{18}{48-21\lambda_i} = \frac{6}{16-7\lambda_i} \rightarrow \lambda_1: \frac{\phi_{11}}{\phi_{12}} = 0.4320;\ \lambda_2: \frac{\phi_{21}}{\phi_{22}} = -1.543 \rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix}0.4320\\ 1\end{Bmatrix},\ \phi_2 = \begin{Bmatrix}-1.543\\ 1\end{Bmatrix}$$

I MODO



$\lambda_1 = 0{,}3017$

II MODO



$\lambda_2 = 2{,}841$

- Altre possibili normalizzazioni:

- $\|\phi_i\| = 1 \rightarrow \phi_1 = \alpha_1\begin{Bmatrix}0{,}4320\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \alpha_1^2(0{,}4320^2 + 1) = 1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}4320^2}} = 0{,}9180$; idem: $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+1{,}543^2}} = 0{,}5439 \rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix}0{,}3966\\ 0{,}9180\end{Bmatrix}$, $\phi_2 = \begin{Bmatrix}-0{,}8392\\ 0{,}5439\end{Bmatrix}$

- $\phi_i^T\mathbb{M}\,\phi_i = \left\langle\begin{matrix}1\\ 1\cdot m\end{matrix}\right. \rightarrow \beta_1\{0{,}4320\ \ 1\}\, m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\beta_1\begin{Bmatrix}0{,}4320\\ 1\end{Bmatrix} = \beta_1^2 m \{0{,}4320\ \ 1\}\begin{Bmatrix}1{,}296\\ 2\end{Bmatrix} = \beta_1^2 m\, 2{,}560 = \left\langle\begin{matrix}1 \rightarrow \beta_1 = \frac{0{,}6250}{\sqrt{m}}\\ 1\cdot m \rightarrow \beta_1 = 0{,}6250\end{matrix}\right. \rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix}0{,}2700\\ 0{,}6250\end{Bmatrix}$, idem: $\phi_2 = \begin{Bmatrix}-0{,}5103\\ 0{,}3307\end{Bmatrix}$

- Coordinate principali: $\mathbb{q} = \Phi\,\mathbb{p}$, $\mathbb{p} = \Phi^{-1}\mathbb{q}$ $(\mathbb{q} = \sum_i \phi_i\, p_i)$ check: $\Phi\Phi^{-1} \simeq \mathbb{I}$

ad es.: $\Phi = \begin{bmatrix}0{,}2700 & -0{,}5103\\ 0{,}6250 & 0{,}3307\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}q_1 = 0{,}2700\, p_1 - 0{,}5103\, p_2\\ q_2 = 0{,}6250\, p_1 + 0{,}3307\, p_2\end{cases}$; $\Phi^{-1} = \begin{bmatrix}0{,}8101 & 1{,}250\\ -1{,}531 & 0{,}6614\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}p_1 = 0{,}8101\, q_1 + 1{,}250\, q_2\\ p_2 = -1{,}531\, q_1 + 0{,}6614\, q_2\end{cases}$ $\longleftrightarrow$ check $p_r = \frac{\phi_r^T\mathbb{M}\,\mathbb{q}}{\underbrace{\phi_r^T\mathbb{M}\,\phi_r}_{m}} = \frac{m}{m}\phi_r^T\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix} = \phi_r^T\begin{Bmatrix}3q_1\\ 2q_2\end{Bmatrix}$

- Eq.ni del moto disaccoppiate:

$\mathcal{M} = \Phi^T\mathbb{M}\,\Phi = m\,\mathbb{I}$; $\mathcal{K} = \Phi^T\mathbb{K}\,\Phi = \frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}0{,}3017 & 0\\ 0 & 2{,}841\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}m\,\ddot{p}_1 + \frac{EJ}{l^3}\,0{,}3017\, p_1 = 0{,}2700\, F(t) + 0{,}6250\, G(t)\\ m\,\ddot{p}_2 + \frac{EJ}{l^3}\,2{,}841\, p_2 = -0{,}5103\, F(t) + 0{,}3307\, G(t)\end{cases}$ ($\uparrow \lambda_i$) - Note le $\mathbb{p}(t) \rightarrow \mathbb{q}(t) = \Phi\,\mathbb{p}(t)$

- Calcolo numerico degli autovettori (e autovalori) $\Rightarrow$ Iterazione vettoriale inversa

a) $\mathbb{G} = \mathbb{K}^{-1}\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G}\,\phi_i = \frac{1}{\omega_i^2}\phi_i \rightarrow$ stima iterativa dell'autovett. corrisp. all'autov. minimo (1° modo, fondamentale)

b) $\mathbb{H} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{H}\,\phi_i = \omega_i^2\,\phi_i \rightarrow$ " " " " " " " massimo (n° modo)
forma standard

Steps: Algoritmo iterativo
- $\phi^{(0)}$ autovettore di tentativo
ciclo (i) $\rightarrow$ - $\hat{\phi}^{(1)} = \mathbb{G}\,\phi^{(0)}$ o $\mathbb{H}\,\phi^{(0)}$ (necessaria, altrim. $\|\phi^{(i)}\|$ continuerebbe a crescere)
$i>1$ - $\hat{\phi}^{(1)} \rightarrow \phi^{(1)}$ con normalizzazione
- $\omega_{(1)}^2 = \frac{\phi^{(1)T}\mathbb{K}\,\phi^{(1)}}{\phi^{(1)T}\mathbb{M}\,\phi^{(1)}}$ stima dell'autovalore da rapporto di Rayleigh
- $\frac{|\omega_{(1)}^2 - \omega_{(0)}^2|}{\omega_{(0)}^2} \lessgtr$ tol $= 10^{-4} \div 10^{-6}$ controllo di convergenza $\rightarrow$ uscita dal ciclo

- Ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT (opportuno farla ad ogni iterazione per non convergere a ϕ_i preced. determ.)

$\hat{\phi}_{l+1} = \phi^* - \sum_{k=1}^{l}\alpha_k\,\phi_k$ combinaz. lineare dei ϕ_k con α_k da determ.: $\hat{\phi}_{l+1} \perp \phi_k$, $k=1,l$ risp. a $\mathbb{M}$, $\mathbb{K}$; premoltipl. per $\phi_r^T\mathbb{M}$ $\rightarrow \alpha_r = \frac{\phi_r^T\mathbb{M}\,\phi^*}{\phi_r^T\mathbb{M}\,\phi_r} = \frac{\phi_r^T\mathbb{M}\,\phi^*}{M_r}$

ϕ^*: autovettore di tentativo; base degli l autovettori preced. determ. $\Rightarrow$ matrice Φ_l

$= \phi^* - \Phi_l\,\alpha$ (α: vettore dei coeff. incogniti)

Si impone così l'ortogonalità rispetto a tutti gli autovett. già determ.

$\mathbb{0} = \Phi_l^T\mathbb{M}\,\hat{\phi}_{l+1} = \Phi_l^T\mathbb{M}\,\phi^* - \Phi_l^T\mathbb{M}\,\Phi_l\,\alpha \rightarrow \alpha = (\Phi_l^T\mathbb{M}\,\Phi_l)^{-1}\,\Phi_l^T\mathbb{M}\,\phi^*$

da b) $\omega_i^2 = \frac{\phi_i^T\mathbb{H}\,\overbrace{\phi_i}^{\hat{\phi}_i}}{\phi_i^T\phi_i} = \frac{1}{7}\frac{EJ}{ml^3}\frac{\phi_i^T\hat{\phi}_i}{\phi_i^T\phi_i} \rightarrow \lambda_i^{(k)} = \frac{1}{7}\frac{\phi_i^{(k)T}\hat{\phi}_i^{(k+1)}}{\phi_i^{(k)T}\phi_i^{(k)}}$ iteraz. k

- Nell'esempio:

$\mathbb{H} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} = \frac{1}{\cancel{6}m}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\frac{\cancel{6}}{7}\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\frac{EJ}{ml^3}\overbrace{\begin{bmatrix}16 & -6\\ -9 & 6\end{bmatrix}}^{\tilde{\mathbb{H}}}$ N.B. non simm. $\tilde{\mathbb{H}}$. (n=2) $\Rightarrow$ 2° modo

Stima di ϕ_2: $\phi^{(0)} = \begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(1)} = \tilde{\mathbb{H}}\,\phi^{(0)} = \begin{Bmatrix}10\\ -3\end{Bmatrix} \rightarrow \phi^{(1)} = \begin{Bmatrix}-3{,}333\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(2)} = \tilde{\mathbb{H}}\,\phi^{(1)} = \begin{Bmatrix}-59{,}33\\ 36{,}00\end{Bmatrix} \rightarrow \lambda_2^{(1)} = 2{,}757$ vs. 2,841 stima già buona anche con $\phi^{(1)}$ non proprio uguale a ϕ_2; bastano poche iteraz.

$\phi^{(2)} = \begin{Bmatrix}-1{,}648\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(3)} = \tilde{\mathbb{H}}\,\phi^{(2)} = \begin{Bmatrix}-32{,}37\\ 20{,}83\end{Bmatrix} \rightarrow \lambda_2^{(2)} = 2{,}852 \rightarrow \phi^{(3)} = \begin{Bmatrix}-1{,}554\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(4)} = \begin{Bmatrix}-30{,}86\\ 19{,}99\end{Bmatrix} \rightarrow \lambda_2^{(3)} = 2{,}842 \rightarrow \phi_2^{(4)} = \begin{Bmatrix}-1{,}544\\ 1\end{Bmatrix}$

$\mathbb{G} = \mathbb{K}^{-1}\mathbb{M} = \frac{\cancel{7}}{6}\frac{l^3}{EJ}\frac{1}{\cancel{16-9}}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix} m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\frac{ml^3}{EJ}\underbrace{\begin{bmatrix}6 & 6\\ 9 & 16\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbb{G}}} = \mathbb{H}^{-1}$.

Stima di ϕ_1 (1° modo): $\phi^{(0)} = \begin{Bmatrix}0{,}5\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(1)} = \tilde{\mathbb{G}}\,\phi^{(0)} = \begin{Bmatrix}9\\ 20{,}50\end{Bmatrix} \rightarrow \phi^{(1)} = \begin{Bmatrix}0{,}4390\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(2)} = \begin{Bmatrix}8{,}634\\ 19{,}95\end{Bmatrix} \rightarrow \lambda_1^{(1)} = 0{,}3015 \rightarrow \phi^{(2)} = \begin{Bmatrix}0{,}4329\\ 1\end{Bmatrix} \rightarrow \hat{\phi}^{(3)} = \begin{Bmatrix}8{,}597\\ 19{,}90\end{Bmatrix} \rightarrow \lambda_1^{(2)} = {,}301\ldots$

poche iteraz. con buona stima $\phi^{(0)}$ $\qquad \phi_1^{(3)} = \begin{Bmatrix}0{,}4320\\ 1\end{Bmatrix}$

Check: $\phi_2^T\mathbb{M}\,\phi_1 = 0$ (imponendola si potrebbe trovare ϕ_2, dato ϕ_1 o viceversa)