

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

"Cerchio" di (Culmann) - Mohr (circolo o circonferenza es. $\sigma_{III} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = 0$) [1866] [1882] di Mohr) $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \cdot \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

Rappresentazione analitico-grafica delle componenti di sforzo (piano), normale σ e tangenziale τ , al variazione delle giacitura nel piano (α)

[es. stato di sforzo nelle travi alla DSV]

(vedi relazione di Cauchy; caso particolare)

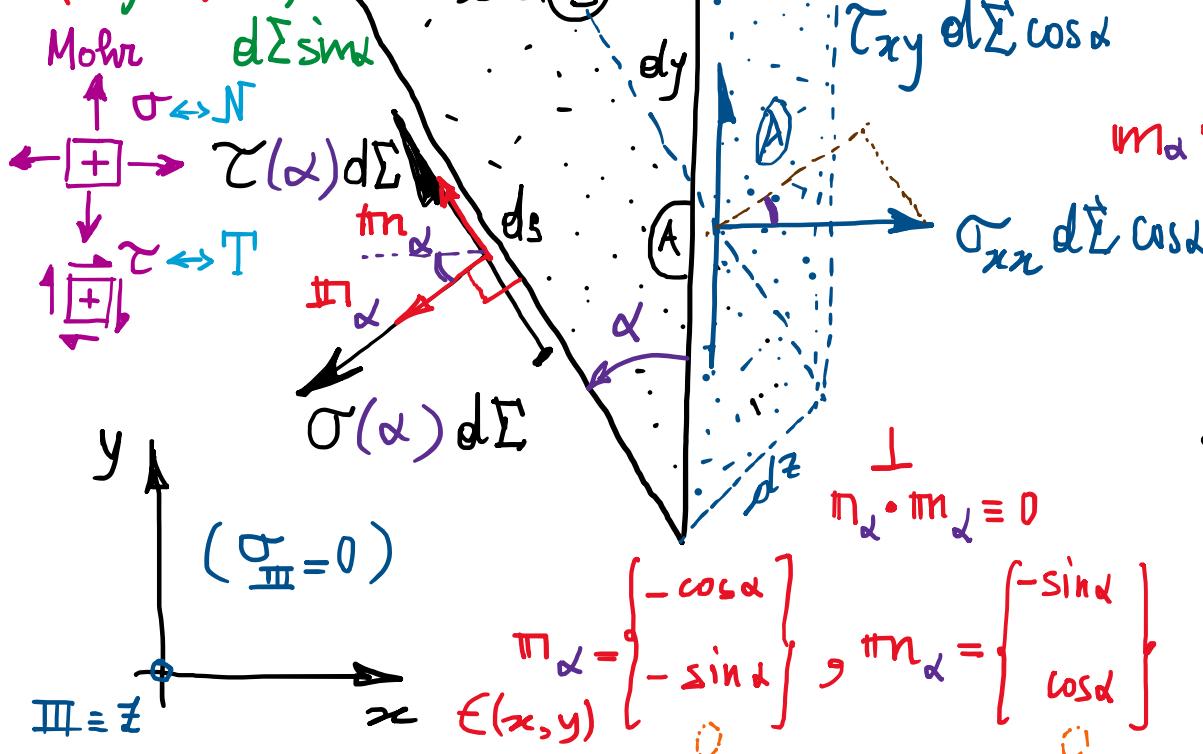
$$d\Sigma = dx dz = d\sin \alpha dz$$

$$\frac{d\Sigma}{\sin \alpha} = d\alpha dz$$

$$d\Sigma = ds dz$$

$$(\tau_{yx} =) \tau_{xy} \quad \sigma_{yy} d\Sigma \sin \alpha$$

$$d\Sigma_A = dy dz = d\cos \alpha dz = \cos \alpha d\Sigma$$



Equilibrio sulle trazioni: $(\cancel{\tau d\Sigma})$ [tra fesse]

$$\Pi_\alpha: \cancel{\sigma d\Sigma} = \sigma_{xx} \cancel{d\Sigma} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cancel{d\Sigma} \sin \alpha$$

$$+ \tau_{xy} \cancel{d\Sigma} \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} \cancel{d\Sigma} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$M_d: \cancel{\tau d\Sigma} = \sigma_{xx} \cancel{d\Sigma} \sin \alpha - \sigma_{yy} \cancel{d\Sigma} \cos \alpha$$

$$- \tau_{xy} \cancel{d\Sigma} \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cancel{d\Sigma} \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(2\alpha) = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \cancel{\sin \alpha \cos \alpha} \sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\cancel{2 \sin \alpha \cos \alpha}}{\sin^2 \alpha} - \tau_{xy} (\cancel{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}) \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Relazioni finali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = \square \quad \therefore \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

Si sono ottenute le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano di Mohr (σ, τ) di:
 (2 α) ↑ piano delle componenti di
spazio normale e tangenziale
su facce di giacitura \perp

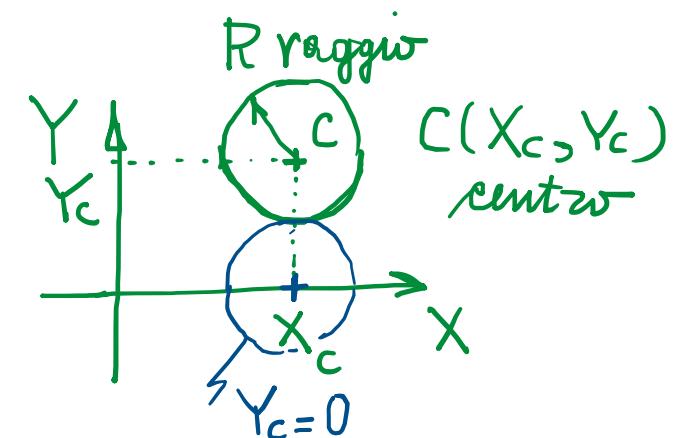
centro $C(\sigma_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0)$, raggio $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Infatti:

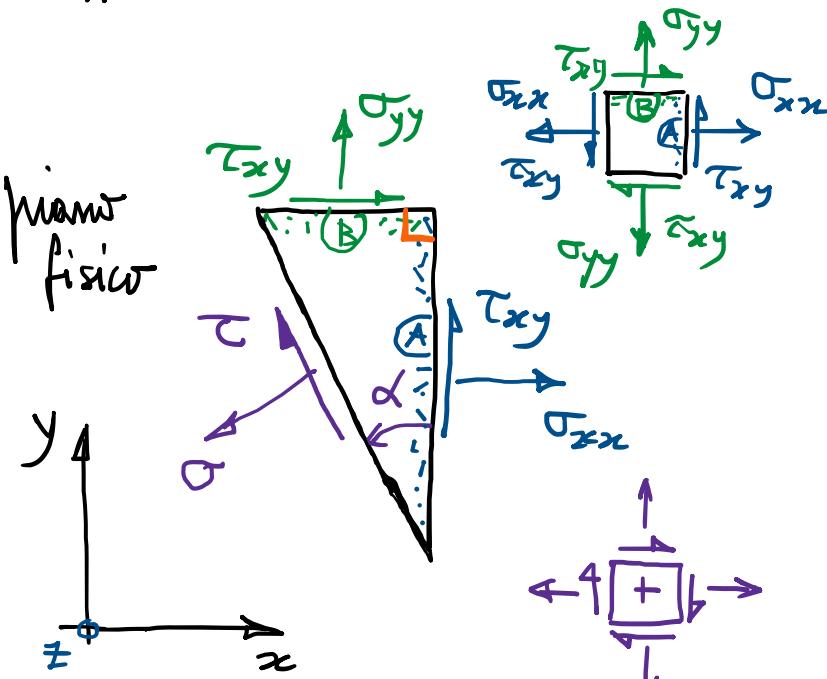
$$\begin{aligned} \left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau^2 &= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \overset{1}{\cos^2 2\alpha} + \overset{1}{\tau_{xy}^2 \sin^2 2\alpha} + 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \overset{1}{\sin^2 2\alpha} + \overset{1}{\tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha} - 2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \tau_{xy} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \end{aligned}$$

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + (\tau - \tau_c)^2 = R^2 \iff (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2$$

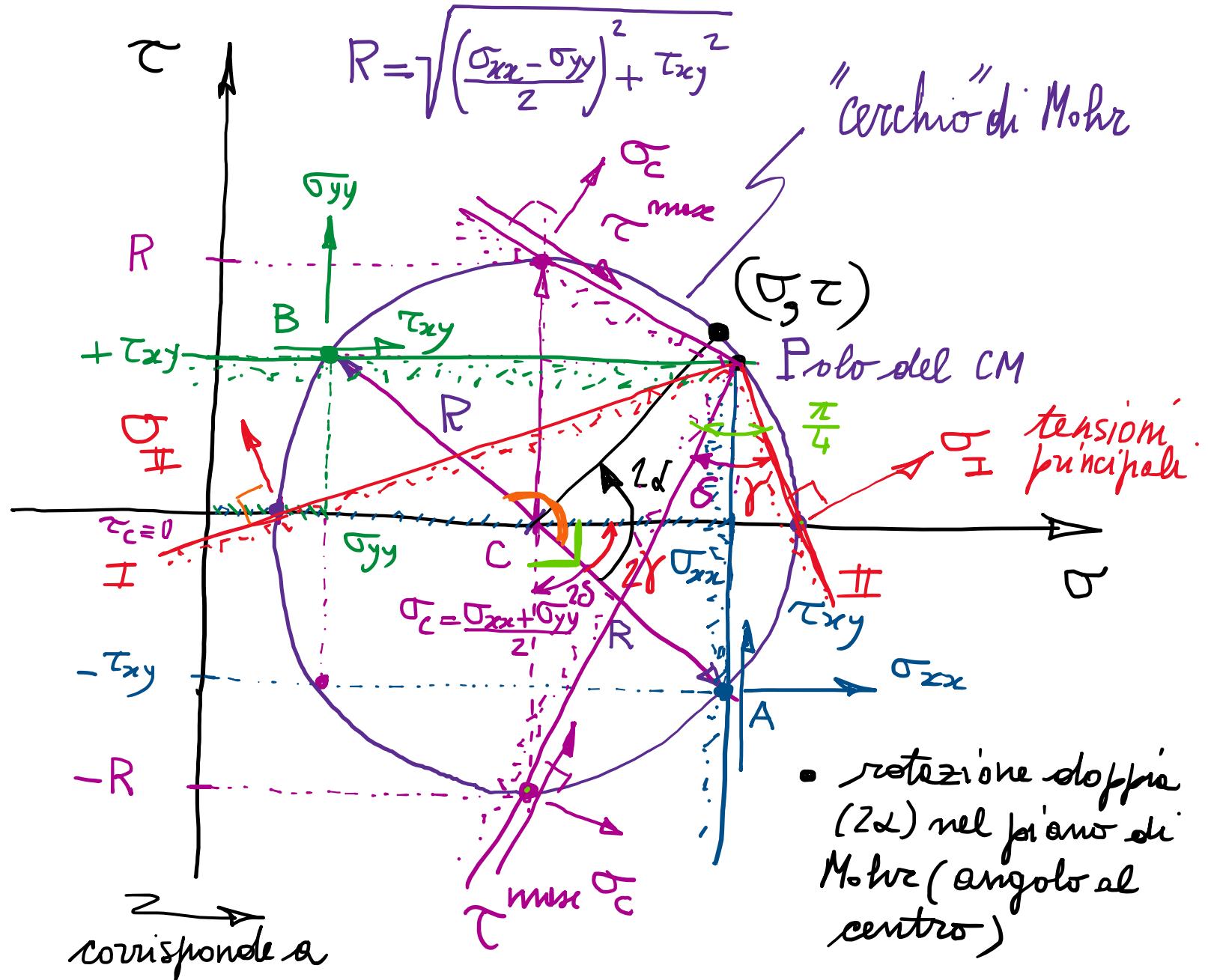
Equazione di circonferenza
nel piano X, Y



Rappresentazione grafica nel piano di Mohr (σ, τ):



- giaciture con rotazione d
nel piano fisico
(nel sovrapporre le facce
verticale e quelle inclinate)



Commenti:

- Rotazioni α nel piano fisico corrispondono a rotazioni doppie (2α) nel piano di Mohr (piano delle componenti σ, τ).
- I punti A e B del Cerchio di Mohr (CM) corrispondenti a componenti σ, τ su facce ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) mutuamente \perp , risultano diametralmente opposti sul CM ($2\alpha = \pi$).
- Le tensioni principali nel piano $\sigma_{I,II}$ sono agevolmente individuate dalle intersezioni del CM con l'asse σ ($\tau=0$) e rappresentano i valori max e min dello sforzo normale al variare di tutte le sezioni nel piano:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{solt. eq. ne caratteristiche} \\ \sigma_{III}=0 \rightarrow I_3=0 \rightarrow \text{eq. di} \\ \text{2° grado} \end{array}$$

- La tensione tangenziale max in valore assoluto è individuata in corrispondenza di σ_c ed è rappresentata dal raggio del CM:

$$\tau^{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

[N.B.: (τ^{max})
essa si accompagna
a $\sigma = \sigma_c$; i punti del
CM ($\sigma_c, \pm \tau^{max}$)]

- Polo del CM, avente le seguenti proprietà: la retta per esso (P) e il generico p. to (σ, τ) del CM rappresenta la giacitura delle facce su cui insistono tali componenti σ, τ .
[possibilità di rappresentare il piano "fisico" sovrapposto al piano di Mohr] \Rightarrow violi
costruzione
in CM
- Tramite P sono ferentate individuabili specifiche direzioni caratteristiche del piano, es.:

- direzioni principali I, II , inclinate di γ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

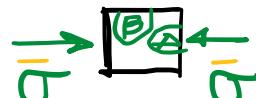
- direzioni secondo cui agisce la τ^{\max} (insieme a σ_c), inclinate di angolo δ tale che:

$$2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta + \gamma = \frac{\pi}{4} \rightarrow \delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$$

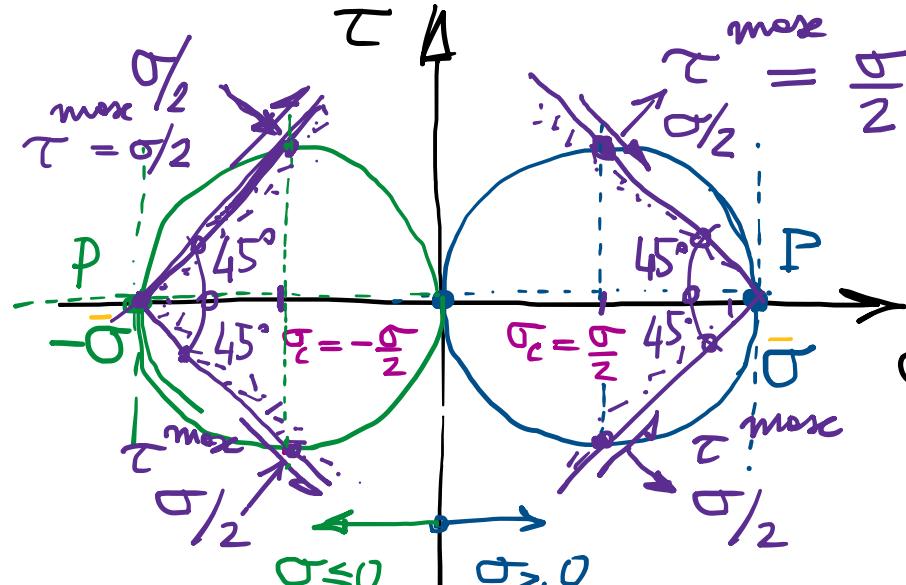
- pertanto, le direzioni secondo cui agisce la τ^{\max} risultano sempre inclinate a 45° rispetto alle direzioni principali.

Esempi tipici:

- Stato di spazio monodimensionale di trazione σ e compressione



CM tangente all'asse τ , tutto nel semipiano $\sigma \leq 0$

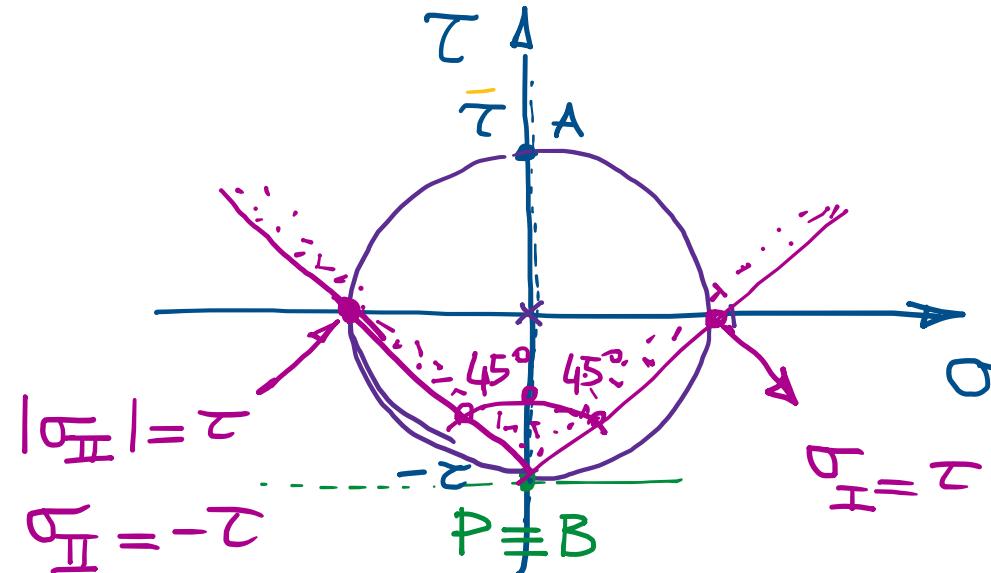
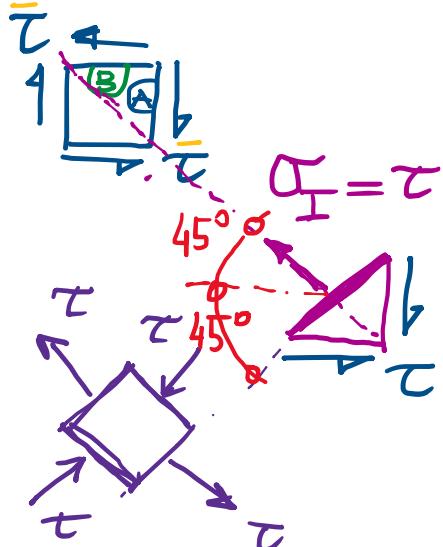


σ

τ

CM tangente all'asse τ , tutto nel semipiano $\sigma \geq 0$ nell'origine

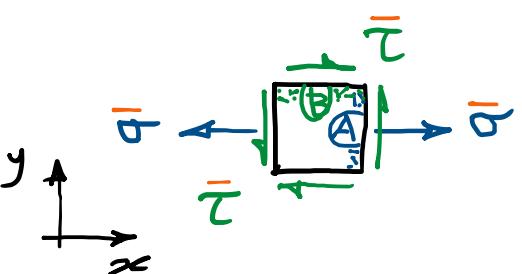
- Stato di spazio di taglio puro



CM centrato sull'origine degli assi del piano di Mohr

tensioni principali uguali e di segno opposto:
 $\sigma_I = -\sigma_{II}$ ($\sigma_I = -\sigma_{II}$)

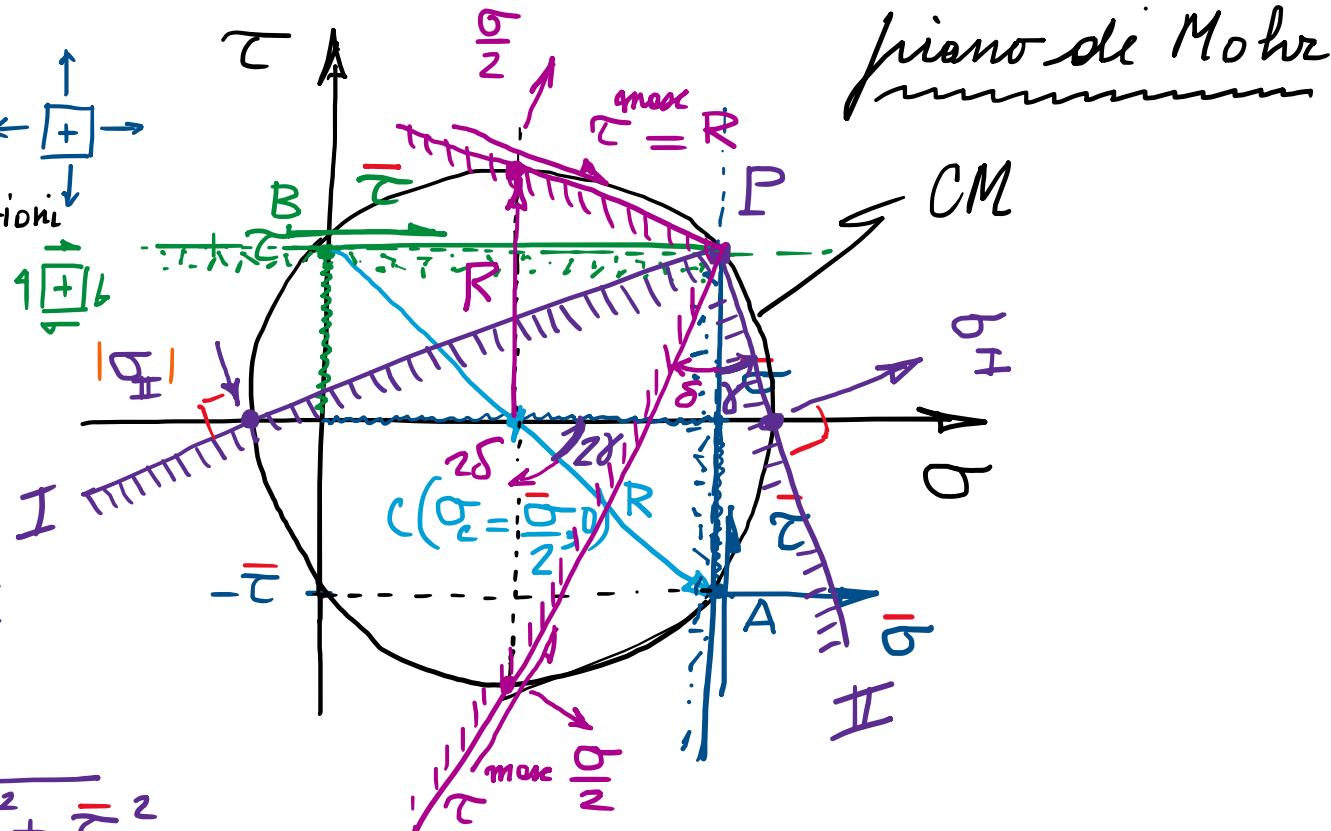
- CM per stato di sforzo piano alle de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \bar{\sigma} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = \bar{\tau} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{valori} \\ \text{assegnati} \end{array}$$

convenzioni
CM
 ≈ 1

$$\sigma \leftarrow \boxed{+}$$



tensioni principali

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$= \bar{\tau}_{\max}$$

$$\sigma_I \cdot \sigma_{II} = (\sigma_c + R)(\sigma_c - R) \\ = \sigma_c^2 - R^2$$

$$= \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \bar{\tau}^2 \leq 0$$

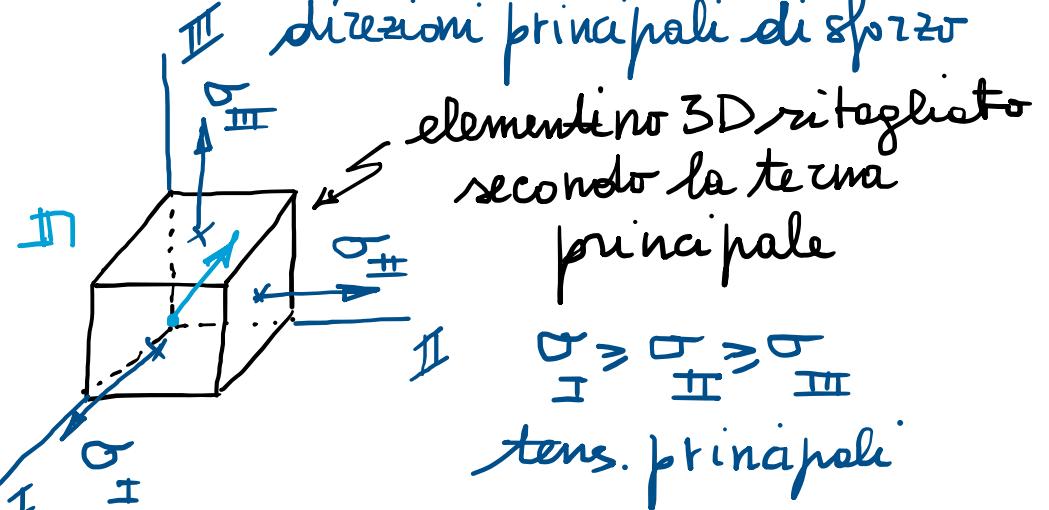
$\bar{\tau}_{\max}$ nel piano \leftrightarrow tensioni principali di segno opposto cui agisce la $\bar{\tau}_{\max}$

$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}$$

inclinaz.
dirz. princ. $\gamma = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}\right)$

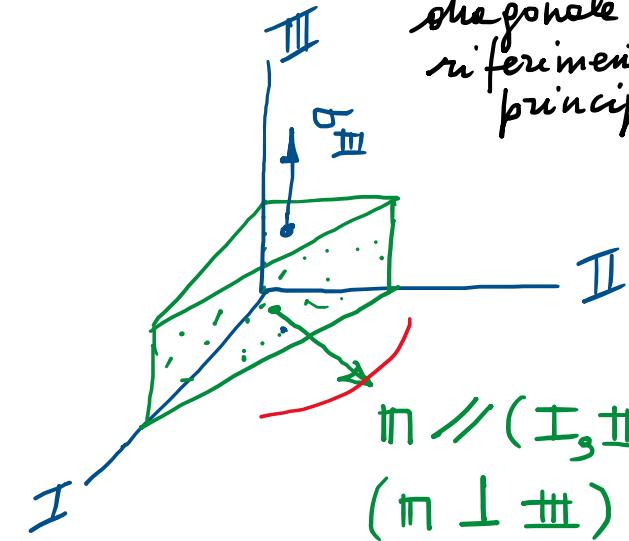
inclinaz. $\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$ $(2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2})$
dirz. seconolo $\delta = \frac{\pi}{4}$
 $\delta + \gamma = \frac{\pi}{4}$

Cerchi e Arbèlo di Mohr (sforzo triassiale)

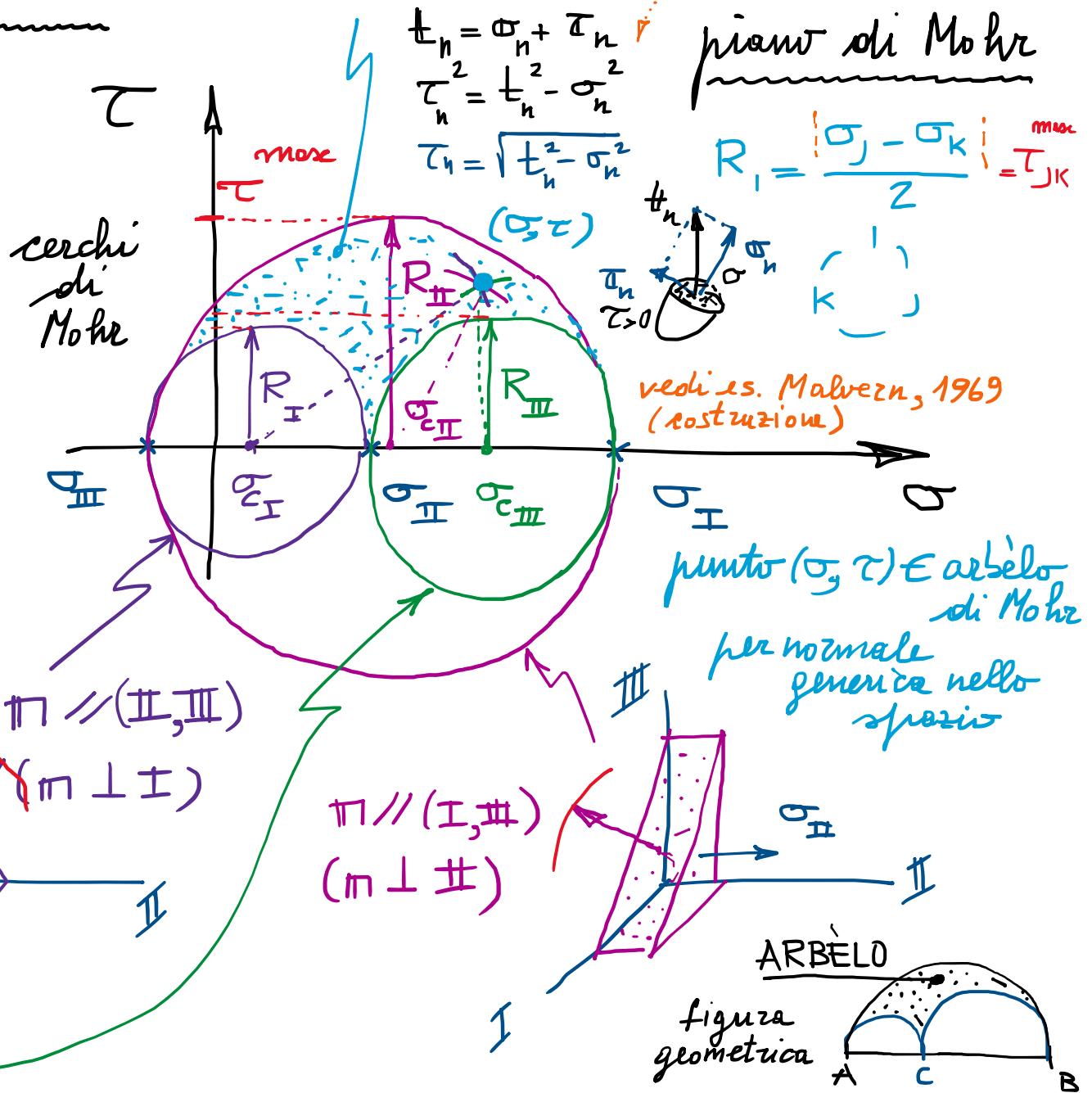


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

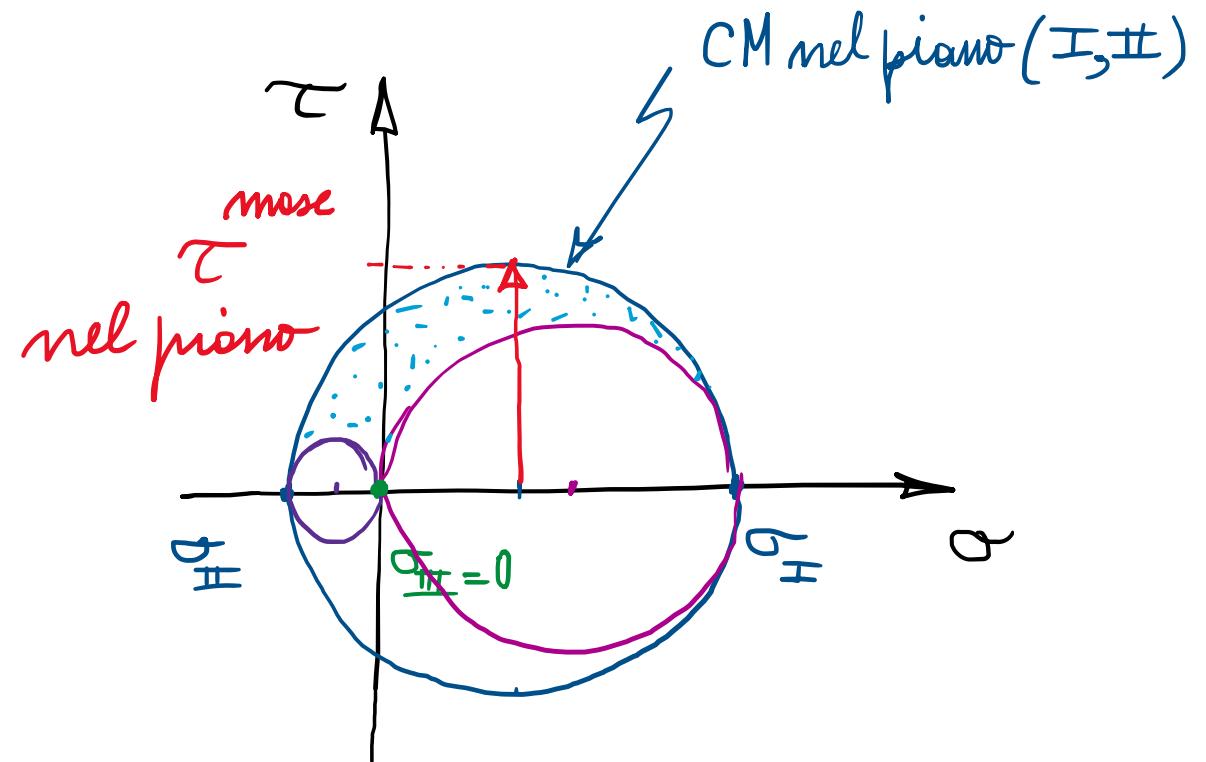
matrice sforzo diagonale nel riferimento principale



arbèlo di Mohr



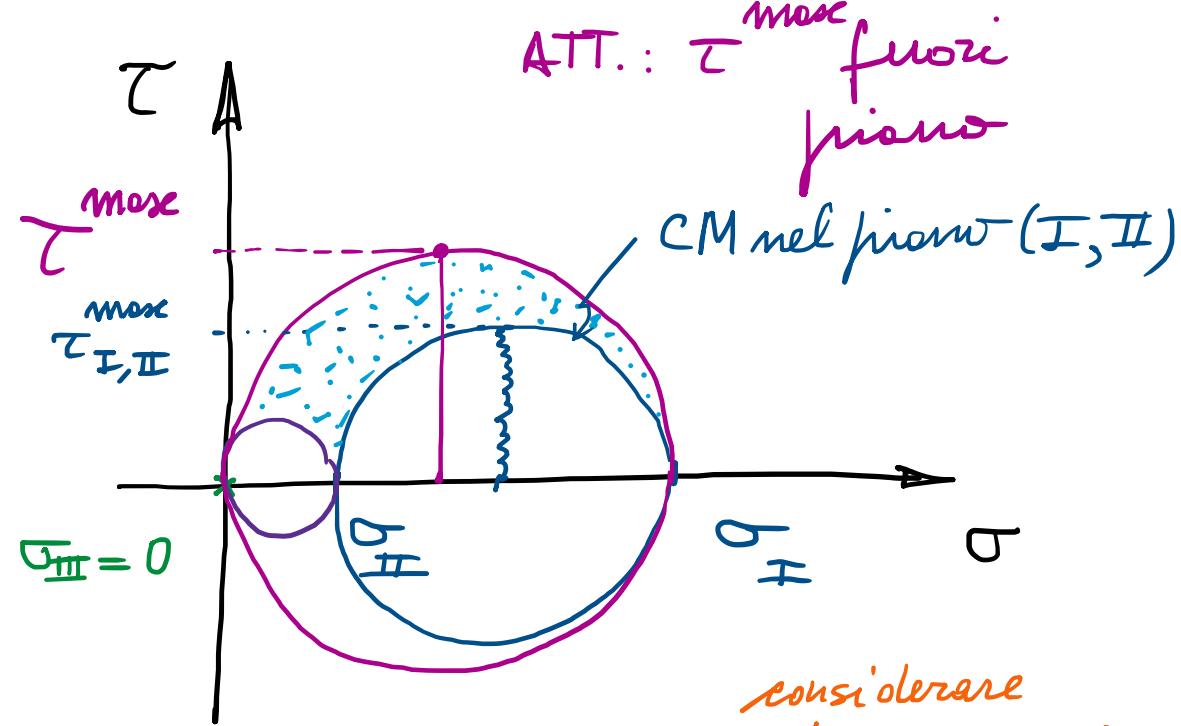
Rilevanza dell'Albero di Mohr per stato di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$) [ai fini della verifica di resistenza]



$$\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$$

tensioni principali
di segno opposto

il CM nel piano è il CM più "grande" (R^{max})
 $\Rightarrow \tau^{max}$ colte nel piano



$$\sigma_I \cdot \sigma_{II} \geq 0$$

tensioni principali
di segno uguale

il CM nel piano non è il più "grande"
 $\Rightarrow \tau^{max}$ avviene fuori piano

considerare
l'Albero di Mohr
diviene rilevante
qui.