

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

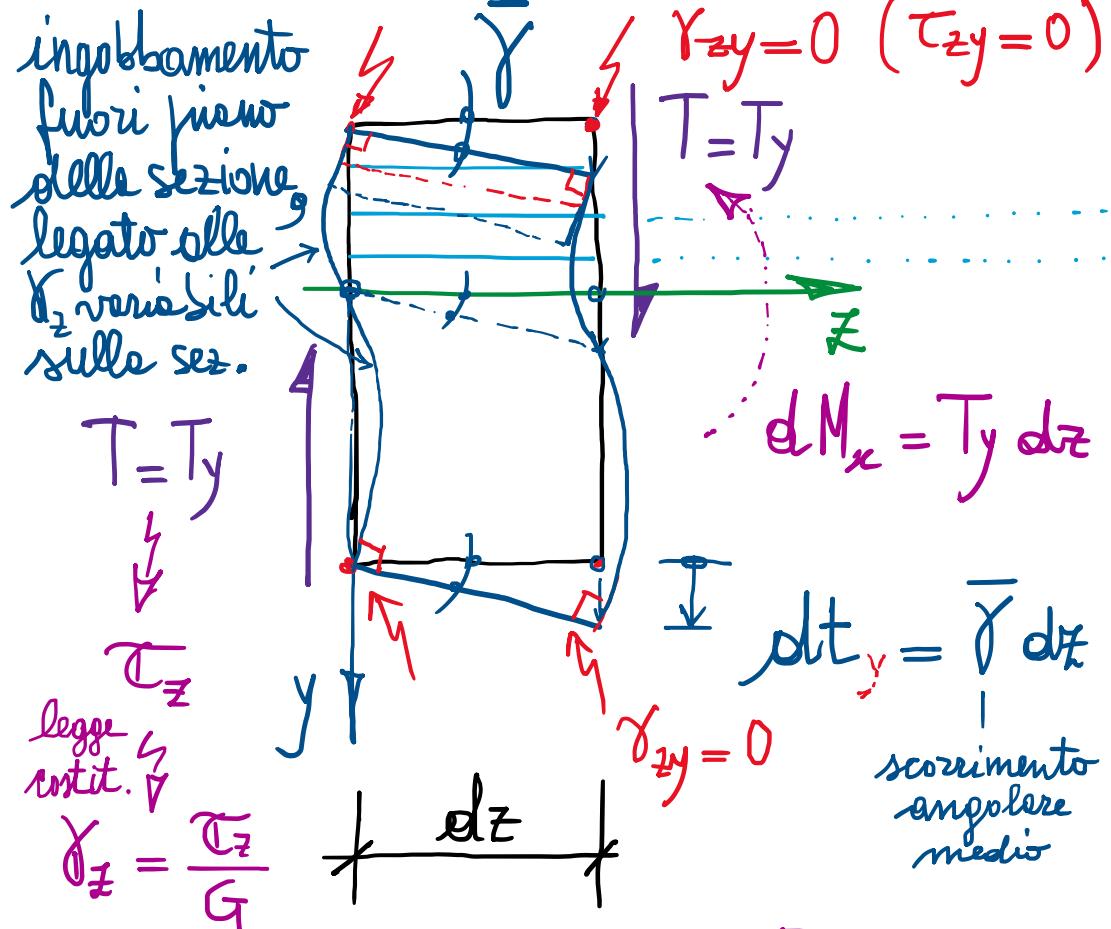
~~~~~  
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 23

- Deformazione del concio di trave dovuta al taglio



G: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

materiale:  
- elastico  
- lineare  
- isotropo  $\rightarrow$  2 parametri es. E,  $\nu$

variazione di angolo retto tra fibre iniziali. 1

$$\gamma_{zy}(y) \downarrow$$

scorrimento angolare ( $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ;  
 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ )

$$= \frac{\pi}{2} - \beta_{zy}$$

- Se  $\gamma_{zy}$  fosse costante in y, la deformazione del concio sarebbe "autosomigliante" a quelle, costante, di ogni "striscioline" ideale, e si verrebbe a produrre solo uno scorrimento relativo dt delle facce di destra rispetto a quelle di sinistra.

- Poiché  $\gamma_{zy} = \gamma_{zy}(y)$  risulta variabile lungo la sezione, da  $\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \rightarrow$  con  $\tau_{zy}(y)$ , secondo ad es., le formule di Jourawsky, si valuta  $\bar{\gamma}_{zy}$



• Valutazione dello scorrimento medio via PLV: [effetti taglienti]

$$\frac{d\bar{v}_e}{dz} = T_y \frac{dt}{dz} = \int_A \underbrace{\tau_z \cdot \gamma_z}_{\tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}} dA \cancel{=} \frac{d\bar{v}_i}{dz} \quad \tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}; \gamma_z = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \frac{\tau_{zy}}{G} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{v} = \frac{T_y}{GA^*} = \frac{dt}{dz}$$

$$\tau_z = \frac{\tau_{zx}}{G} + \frac{\tau_{zy}}{G}$$

$$\frac{1}{G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \frac{\tau_z^2}{G}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

Solu. di Jourawsky

$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \tau_{zy}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} \right)^2 \right] dA$$

$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \frac{T_y}{A} \int_x A \frac{S_{xz}^2(y)}{b^2(y)} \left( 1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b^2(y)} x^2 \right) dA$$

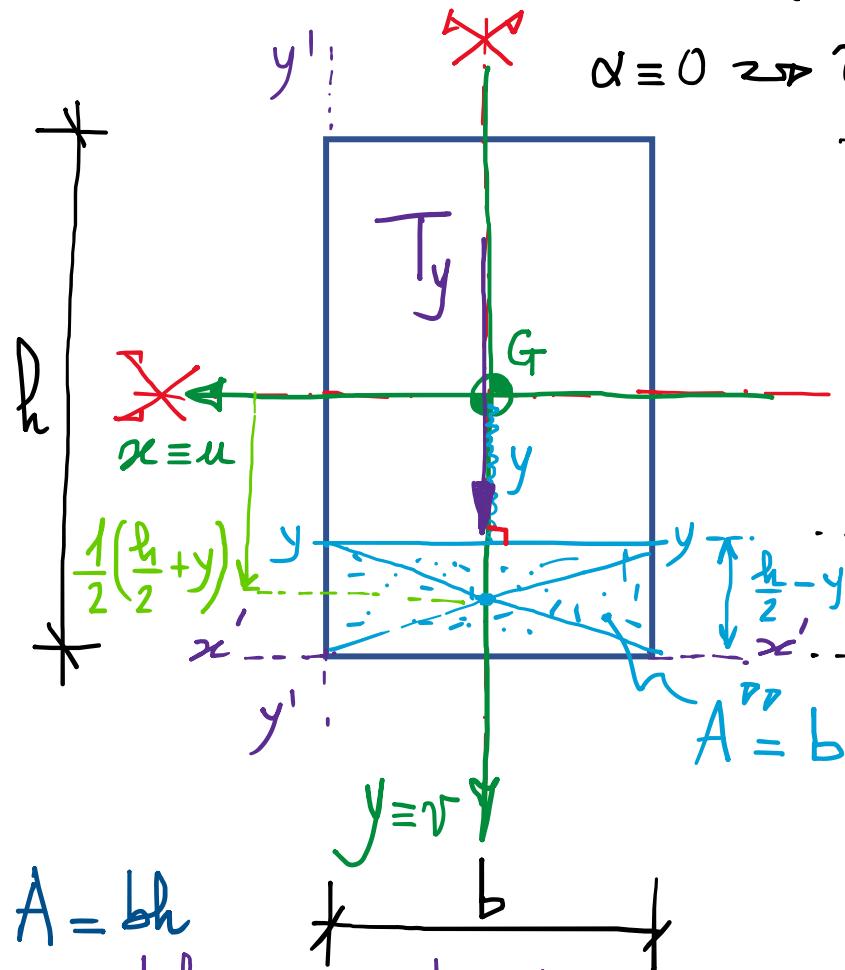
$$\bar{v} = \mu \frac{T_y}{GA} \quad \mu: \text{fattore di taglio delle sez. trasv.} \geq 1$$

$$\text{rigidezza tagliente} \rightarrow A^* = \frac{A}{\mu} \quad \text{area ridotta} \Rightarrow dt = \frac{T_y}{G A^*} dz$$

$$\begin{cases} \tau_{zy}(y) = \frac{T_y S_{xz}(y)}{J_x b(y)} & \text{formula di Jourawsky} \\ \tau_{zx}(x; y) = -\frac{2 \tan \alpha(y)}{b(y)} \cdot x \end{cases}$$

intero  
primo  $\frac{T_y}{G A^*} dz$

- Caso delle sezioni rettangolari: (sez. doppialmente simmetrica)



$$J_x = \iiint y^2 dz dx dy$$

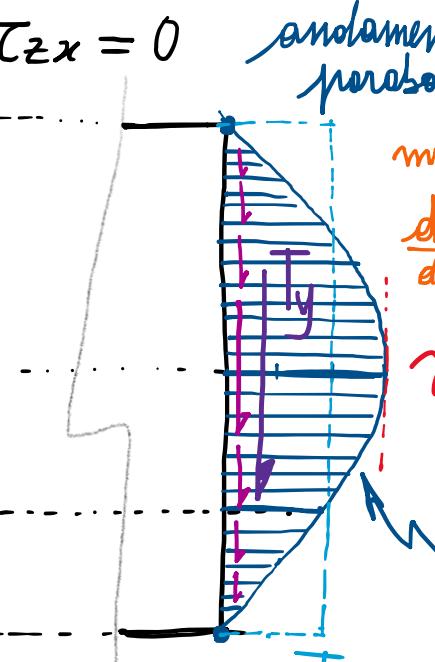
$$= \frac{1}{3} bh^3$$

$$J_x = J_x - Ad_{\zeta}^2 = \frac{1}{3}bh - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)bh^3 = \frac{4-3}{12}bh^3$$

$$J_x' = \iint_D y^2 dA = \int_0^3 \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 dx, J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$M = \frac{6}{5} = 1.2$$

fattore di taglio



$$\left( \frac{h}{2} - y \right) \frac{\frac{y}{A}}{\frac{h}{2}} = \bar{\tau}_{zy}$$

! valor media

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{1}{Bh} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} \cancel{Bh} dy$$

$$T_{xy}^J(y) = \frac{T_y S_x''(y)}{J_x b} = \frac{T_y}{J_x b} S_x''(y)$$

$$S_x(y) = A \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)$$

$$= \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \text{ parabólico}$$

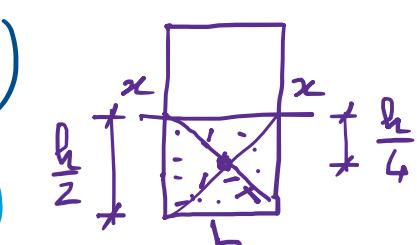
$$(0 \text{ per } y = \pm \frac{h}{2}, \\ \text{f. ne peri in } y, \\ \text{max. per } y = 0: \\ \text{rel. } \frac{bh^2}{2})$$

$$= \frac{\frac{T_y}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{b^2}{12} \right)}{bh^3}$$

$$= \frac{6Ty}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

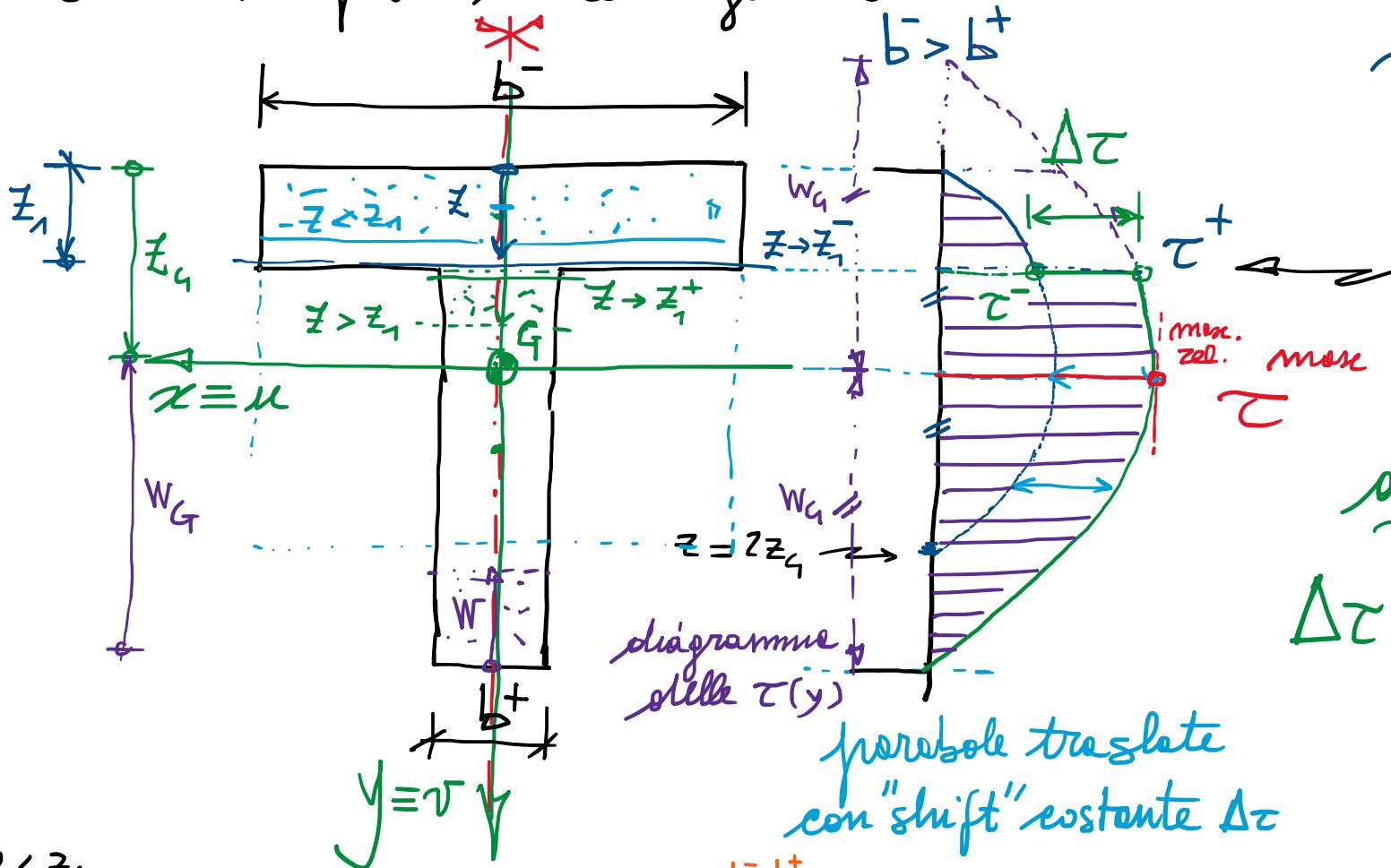
$$= \frac{3}{6} Ty \quad \cancel{\frac{1}{4}^2} (1 - 4)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{Iy}{1-p} \left(1 - \frac{4y}{p^2}\right)$$



$$A \frac{d}{dy} = -4 \cdot \frac{2y}{D^2} \text{ lin. } S_2'' = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

- Sezioni composte da rettangoli elementari:



$$\tau^- = \frac{T S_1}{J b^-} \quad ; \quad \tau^+ = \frac{T S_1}{J b^+}$$

discontinuità delle lunghezze  
delle corde  $\Delta b = b^- - b^+$

discontinuità "salto" delle  $\tau$

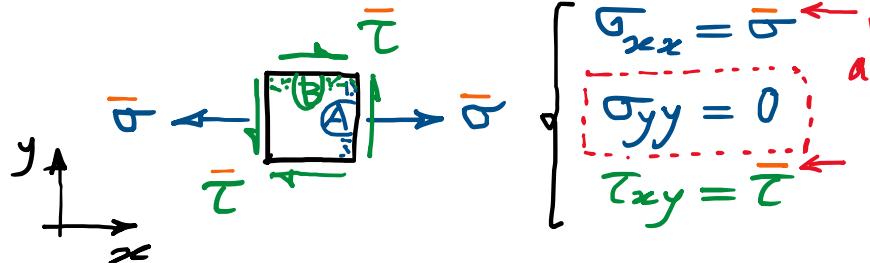
$$\Delta\tau = \tau^+ - \tau^- = \frac{T S_1}{J} \left( \frac{1}{b^+} - \frac{1}{b^-} \right)$$

$$= \frac{T S_1}{J} \frac{b^- - b^+}{b^+ b^-} = \frac{T S_1}{J} \frac{\Delta b}{b^+ b^-}$$

$$= \tau^- \frac{\Delta b}{b^+} = \tau^+ \frac{\Delta b}{b^-}$$

$$\tau^- = \tau^+ \frac{b^+}{b^-} ; \quad \frac{\tau^+}{\tau^-} = \frac{b^-}{b^+}$$

- CM per stato di sforzo piano alle de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)



particolare stato di sforzo  
fisico con una componente  
di sforzo normale nulle

$$\sigma_c = \frac{|b|}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

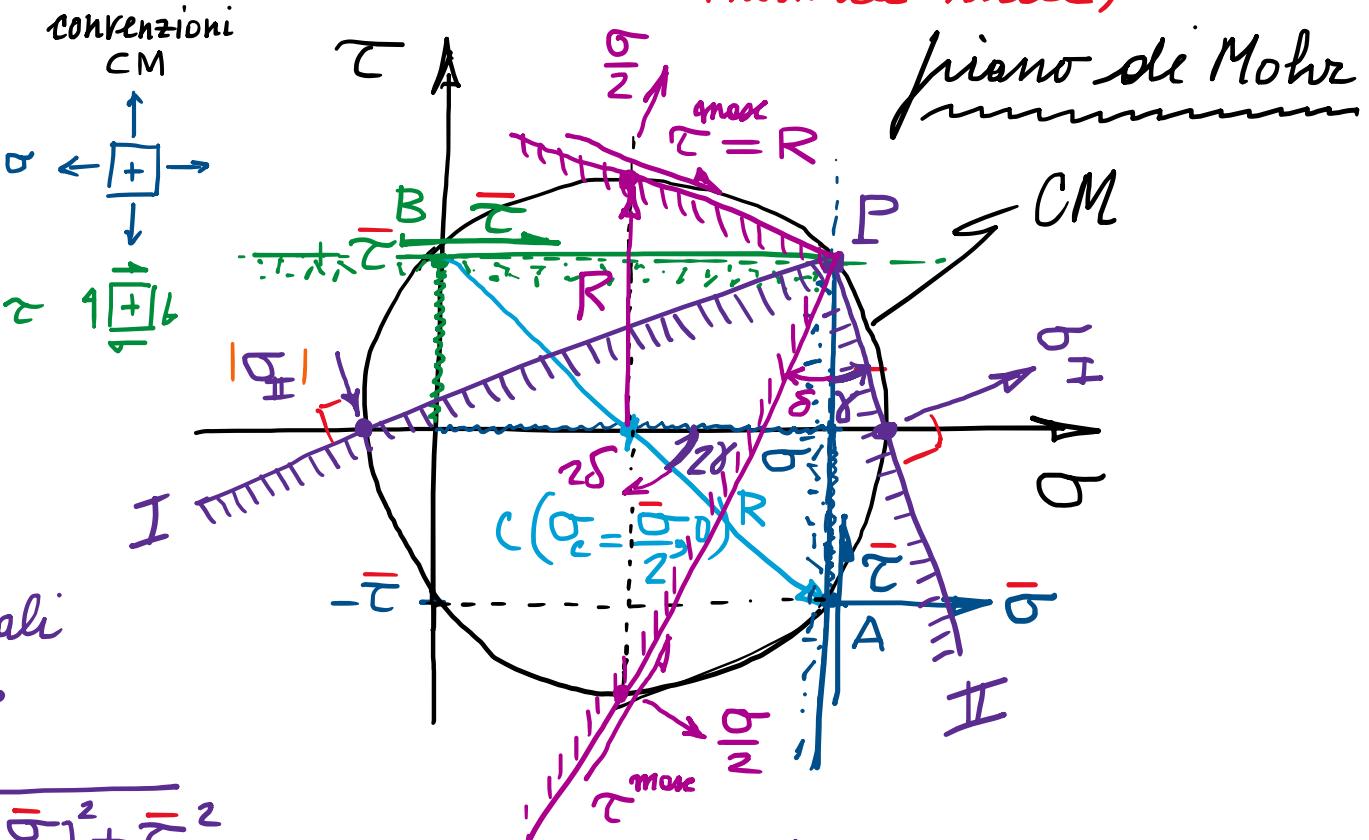
$$\delta_c^{\max}$$

$$b_H \cdot b_H = (\sigma_c + R)(\sigma_c - R) \\ = \sigma_c^2 - R^2$$

$$= a_c^2 - R^2$$

$$= \left(\frac{\bar{v}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{v}}{2}\right)^2 - \bar{\tau}^2 \leq 0$$

$\tau$  <sup>masse</sup> nel piano  $\leftrightarrow$  tensioni principali di segno opposto



$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar{c}}{\bar{s}}$$

$$\text{inclined. dist. princ.} \quad r = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi z}{\bar{z}} \right)$$

inclinaz. ....  $\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$  ( $2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2}$ )  
 direz. secondo  $\downarrow$   
 cui agisce le  $\tau$  mose  $\delta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ )

- Formule di verifica per stati di sforzo alle DSV

- Criterio di Tresca :  $\tau^{\max} \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 0.5 \sigma_0$   
(è il più conservativo)  $2\tau^{\max} \leq \sigma_0$



$$\sigma_{eq}^T = 2R = |\sigma_I - \sigma_{II}| = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\bar{\tau}^2} \leq \sigma_0$$

infatti:  $\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_c + R - (\sigma_c - R) = 2R = 2\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\bar{\tau}^2}$

$$\sigma_{eq}^T = \bar{\sigma} \sqrt{1 + 4\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}\right)^2} = \bar{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{2\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}\right)^2} \leq \sigma_0$$

- Criterio di von Mises:

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 3\bar{\tau}^2} \leq \sigma_0$$

infatti:  $\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = (\sigma_c + R)^2 + (\sigma_c - R)^2 - (\sigma_c + R)(\sigma_c - R)$   
 $= \sigma_c^2 + R^2 + 2\sigma_c R + \sigma_c^2 + R^2 - 2\sigma_c R - \sigma_c^2 + R^2 = \sigma_c^2 + 3R^2$   
 $= \frac{\bar{\sigma}^2}{4} + 3\left(\frac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2\right) = \bar{\sigma}^2 + 3\bar{\tau}^2$

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0 \approx 0.577 \sigma_0$$

resist.  $\begin{cases} \tau_0^T = 0.5 \sigma_0 \\ \tau_0^{vM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 \\ \tau_0^{DSV} = \frac{1}{1+\nu} \sigma_0 \end{cases}$

- Criterio di de Saint Venant:

$$\sigma_{eq}^{DSV} = \max \left\{ \left| \sigma_I - \nu \sigma_{II} \right|, \left| \sigma_{II} - \nu \sigma_I \right| \right\} \leq \sigma_0$$

$\nu < 0$  ATT!

- Ordine di conservatività:  $\sigma_{eq}^T \geq \sigma_{eq}^{vM} \geq \sigma_{eq}^{DSV}$  (DSV è il meno conservativo)

