Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Risposta a forzante impulsiva (da forzante a gradino; per forzante generica)

verso prospettiva

$F(t) = F\,H(t)$ ⇒ forzante a gradino, ampiezza F

• $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t>0 \end{cases}$ Heaviside function [unit step] (gradino unitario)

$\zeta \sim 1\%$ fattore di smorzamento

pulsaz. naturale sistema non smorz.

pulsaz. naturale sistema smorz.

Integrale generale:

$$u(t) = u_{g0}(t) + u_p(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right) + \underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}$$

$t > t_0 = 0$

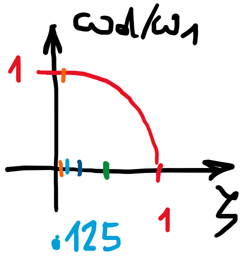
risposta transiente per sistema (smorzato) non forzato

risposta a regime

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \leq \omega_1$ ($\simeq \omega_1$)

$\frac{\omega_d^2}{\omega_1^2} = 1-\zeta^2$

$\left(\frac{\omega_d}{\omega_1}\right)^2 + \zeta^2 = 1$



$\zeta \sim 5\%$ .05

Imposizione delle c.i. (N.B.: sull'integrale generale, risposta totale):

$$\begin{cases} u_0 = B + \frac{F}{K} \Rightarrow \boxed{B = u_0 - \frac{F}{K}} \\ \dot{u}_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 B}{\omega_d} = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\underbrace{\frac{\omega_1}{\omega_d}}_{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 1,\ \geq 1}\underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}} \end{cases}$$

N.B.: costanti A, B dipendenti da c.i. u_0, $\dot{u}_0$ e da F.

Pertanto si ottiene:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\frac{F}{K}\right)\sin\omega_d t + \left(u_0 - \frac{F}{K}\right)\cos\omega_d t\right) + \frac{F}{K} \qquad F = K u_{st}$$

$u_0=0,\ \dot u_0=0$

$$= e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right) + \overbrace{\underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]}^{u_0(t)}$$

(*) risposta per e.i. non omogenee, con $F=0$

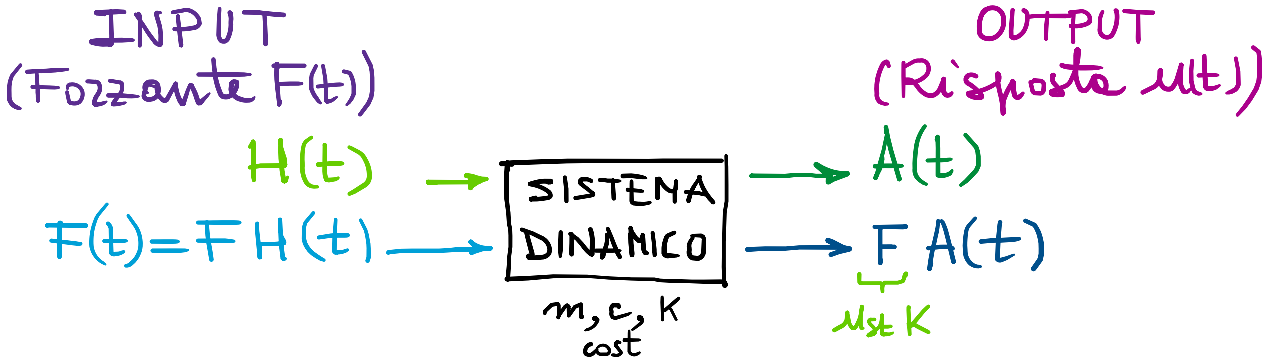
risposta per e.i. nulle a $F\neq 0$

$\Rightarrow$ funzione risposta a gradino F

$$\underbrace{F}_{K u_{st}}\cdot\underbrace{\frac{1}{K}\left[1-e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

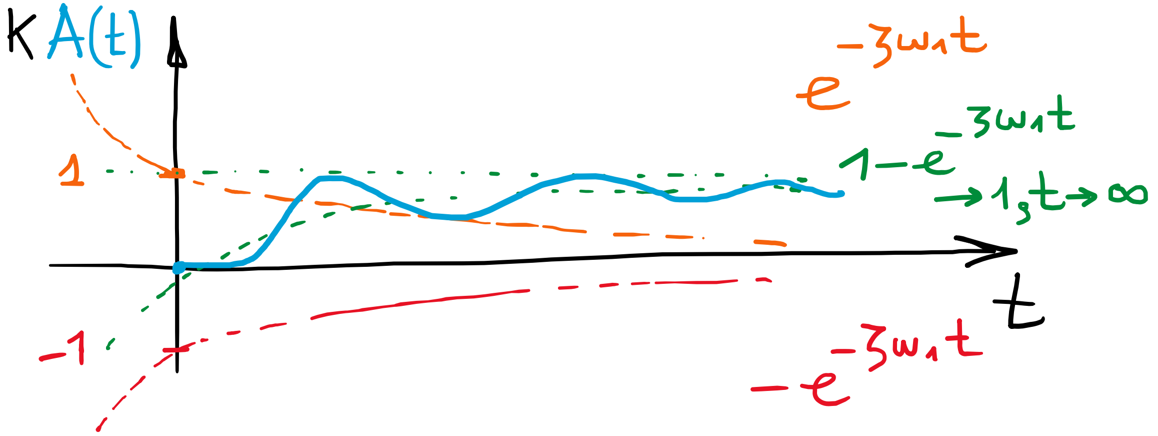
funzione risposta a gradino unitario ($H(t)$)

$u_{st} K A(t)$

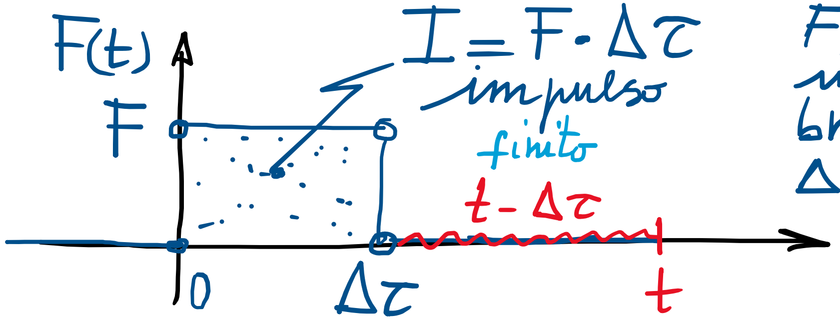


F.ne $A(t)$, risposta a gradino unitario, utile ora a rappresentare la risposta del sistema a forzante impulsiva, tramite Principio di Sovrapponibilità degli Effetti (o Sovrapposizione)

(valido per sistema lineare, tempo invariante).



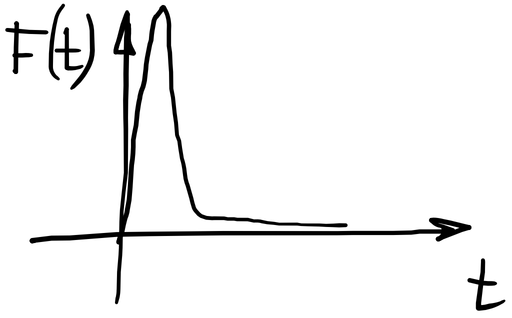
Risposta a forzante impulsiva:

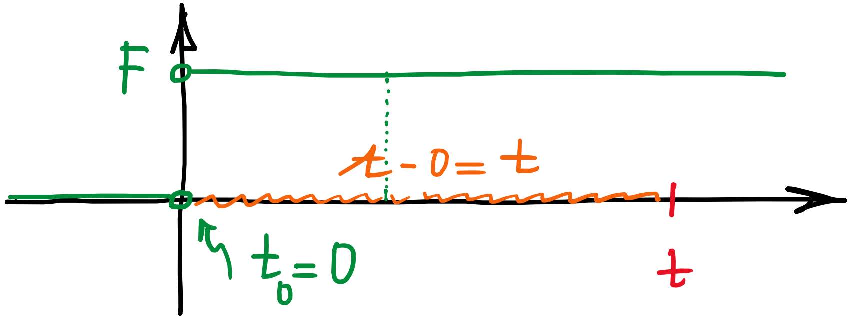


F cost in intervallo breve (finito) $\Delta\tau$

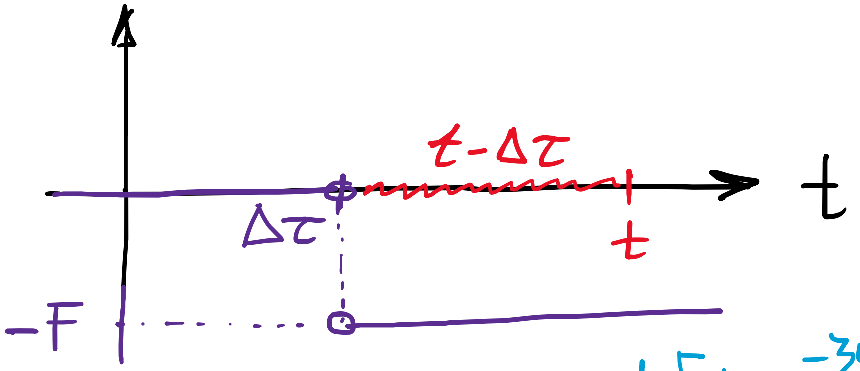
=

es. urti, impatti, esplosioni
(agisce con entità elevata per un tempo breve, inducendo una risposta dinamica del sistema)





+



$$u(t) = F\,A(t-0) - F\,A(t-\Delta\tau) \quad \text{con} \quad \underbrace{\frac{1}{K}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

$$= \underbrace{F\,\Delta\tau}_{I}\ \frac{A(t) - A(t-\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

$$\dot{A}(t) = h(t)$$

$$= I \cdot \frac{\Delta A}{\Delta\tau} \leftarrow \text{rapporto incrementale } \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) \underset{\Delta\tau\to 0}{\overset{\lim}{=}} I \cdot \overbrace{\frac{dA(t)}{dt}}^{\dot{A}(t)}$$

funzione risposta ad impulso unitario

$$= I \cdot h(t)$$

processo al limite, per $\Delta\tau \to 0$ (per I finito, $F \to \infty$)
durata infinitesima

- Quindi, si ottiene, per la funzione risposta ad impulso unitario:

$$h(t) = \dot{A}(t) \qquad \frac{d}{dt}$$

$$= \frac{1}{K}\left[0 + \zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cancel{\cos\omega_d t}\right) - e^{-\zeta\omega_1 t}\,\omega_d\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\cancel{\cos\omega_d t} - \sin\omega_d t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{K}\, e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t\left(\frac{\zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2}{\omega_d}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\,\frac{\overset{K/m}{\omega_1^2}}{\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t}$$

funzione risposta ad impulso unitario

$$\underbrace{\frac{1}{K}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

$$\begin{cases} \omega_d^2 = \omega_1^2(1-\zeta^2) = \omega_1^2 - \zeta^2\omega_1^2 \\ \zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2 = \omega_1^2 = \frac{K}{m} \end{cases}$$

oscillazioni libere smorzate per $F=0$

N.B.: coerente con la risposta (*) per $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0^+ = \frac{1}{m}$

Impulso unitario (I = 1)

Delta di Dirac

- Interpretazione fisica tramite Teorema dell'impulso: $\Rightarrow$ la variazione della quantità di moto eguaglia l'impulso

$$F_{tot} = m a = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dI = F\,dt = m\,dv \underset{m=cost}{=} d(\underbrace{mv}_{q}) = dq$$

q quantità di moto

Su intervallo $\Delta\tau$: $dq = dI = F\,dt$

$$\Delta q = q(\Delta\tau) - q(0) = \int_0^{\Delta\tau} \Big(F - (F_e + F_d)\Big)\,dt = \int_0^{\Delta\tau} F\,dt - \int_0^{\Delta\tau \to 0} \underbrace{(F_e + F_d)}\,dt$$

$\dot{u}_0 = 0$ (nel termine $q(0)$)

variazione della quantità di moto

F: forzante; F_e: elastica ku; F_d: viscosa $c\dot{u}$

forze di ampiezza limitata $(ku, c\dot{u})$

con processo al limite per $\Delta\tau \to 0$:

$$m\,\dot{u}_0^+ = I - 0 \Rightarrow \boxed{\dot{u}_0^+ = \frac{I}{m}} \Rightarrow \text{valutazione sperimentale}$$

0: integrale su intervallo infinitesimo di funzione limitata

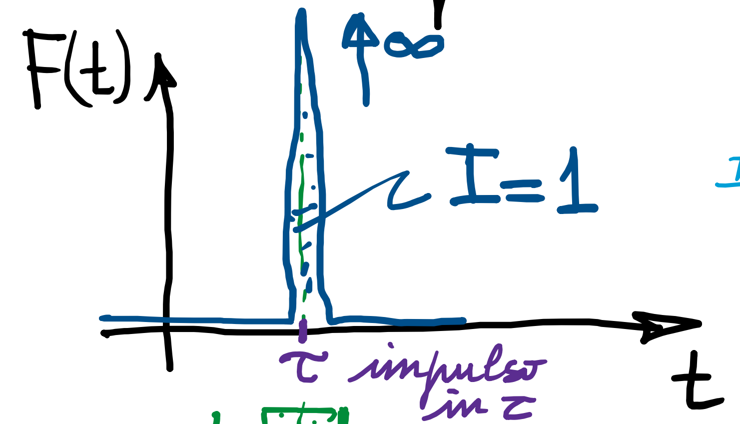
stima dell'entità dell'impulso ricevuto $I = m\,\dot{u}_0^+$

velocità subito dopo la ricezione dell'impulso (misurabile)

- Pertanto, il sistema risponde, a forzante impulsiva, come per delle oscillazioni libere indotte da spostamento iniziale nullo e velocità iniziale pari all'impulso ricevuto diviso la massa.
- Se $I = 1$, $\dot{u}_0^+ = 1/m \Rightarrow h(t)$.

Codificazione matematica di "funzione" (⇒ è una "distribuzione")

Forzante impulsiva: (tale da produrre un impulso unitario)



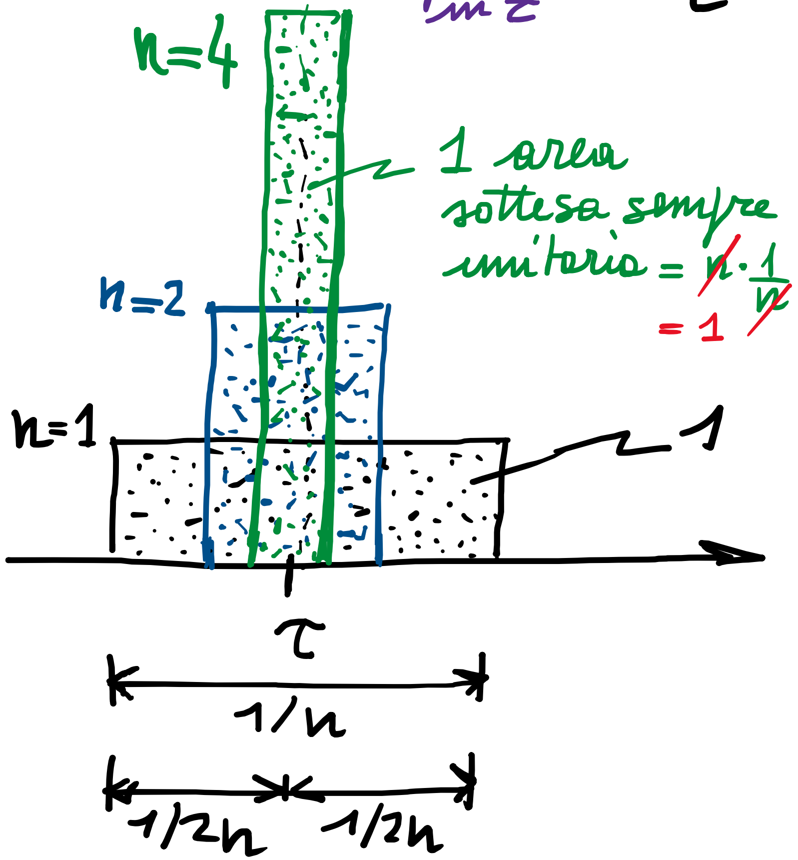
$$F(t) \begin{cases} = 0 & \forall t \neq \tau \\ \to \infty & t = \tau \end{cases} = \delta(t)$$

Delta di Dirac "distribuzione"

Dinamica: agisce con ampiezza finita, per durata infinitesima (con impulso finito unitario)

Essa è il limite, per $n \to \infty$, della successione

$$\delta_n(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t-\tau| > \frac{1}{2n} \\ n & \text{se } |t-\tau| < \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad n \to \infty \quad \delta(t,\tau)$$



$\delta(t,\tau) \to$ Sist. $\to h(t)$

Delta di Dirac

f.ne risposta ad impulso 1

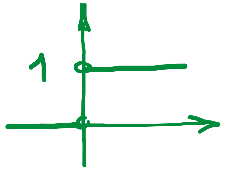
Proprietà: (della Delta di Dirac)

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,\tau)\, d\tau = 1$ impulso unitario
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\, \delta(t,\tau)\, d\tau = F(t)$ ⇒ Interpretazione della forzante come una sequenza di impulsi $dI = F(\tau)\, d\tau$

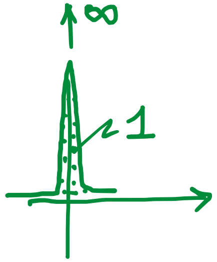
collocazione in t

Concetti fondamentali:

INPUT
(forzante)

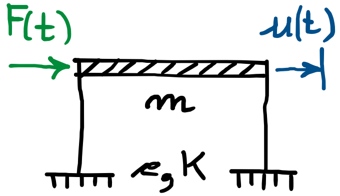


Gradino unitario $H(t)$
Heaviside



Impulso unitario $\delta(t)$
Dirac

SISTEMA



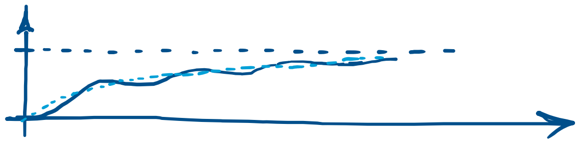
$\zeta 2\sqrt{Km}$; $\omega_1=\sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega_d=\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

OUTPUT
(risposta) [spost., velocità, acceler.]

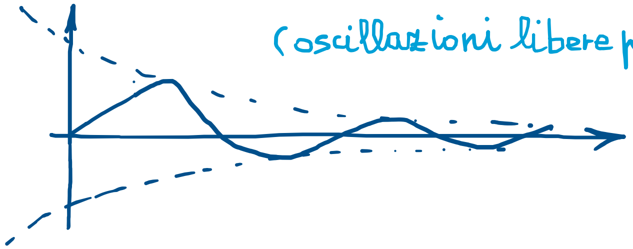
$$A(t)=\frac{1}{K}\left[1-e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]$$

funzione risposta a gradino unitario



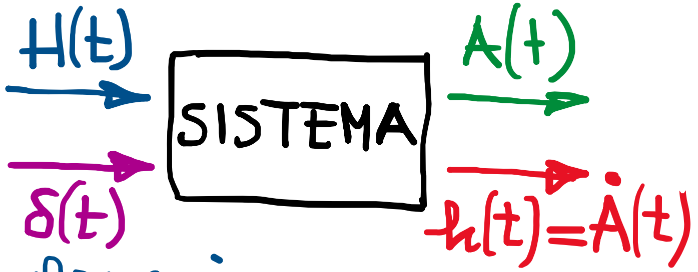
$$h(t)=\dot{A}(t)=\frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

funzione risposta a impulso unitario



(oscillazioni libere per $u_0=0$, $\dot{u}_0^+=\frac{1}{m}$)

SOMMARIO (Lez. 07)



- Verso la determinazione della risposta a forzante generica.
- Funzione risposta a gradino unitario: $A(t)$.
- " " " impulso " : $h(t) = \dot{A}(t)$.
- Da th. dell'impulso, come per oscillazioni libere smorzate da velocità iniziale al tempo 0^+ pari a $\frac{I=1}{m}$.
- Rappresentazione ideale (matematica) di forzante impulsiva unitaria: Delta di Dirac $\delta(t,\tau)$.
- Next step: forzante generica per sovrapposizione di impulsi e conseguente risposta per sovrapposizione di risposte impulsive (integrale di convoluzione o di Duhamel).