

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

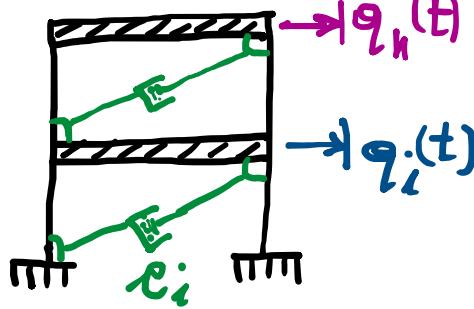
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 14

Sistemi MDOF smorzati



- Smorzamento indotto mediante l'inserzione di dispositivi opportuni (smorzatori viscosi lineari).
Es.: controventi dissipativi (\rightarrow sismica).
- Smorzamento intrinseco "spontaneo" all'interno del sistema strutturale (oltre entità limitata per strutture civili).

visco lin.
 "dissipatore"
 smorzatore
 i-esimo
 (di n_d)
 \ddot{x}_i
 coeff. di
 smorzamento
 f. ne di dissipazione (Rayleigh)

$$F_{d,i}^z = c_i \dot{x}_i$$

$$D_i = \frac{1}{2} \dot{x}_i^T F_{d,i}^z = \frac{1}{2} \dot{x}_i \cdot c_i \dot{x}_i$$

Relazione tra \dot{x}_i e q_K : "chain rule" (derivate di f. ne composta)

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \Rightarrow \dot{x} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}$$

$$\rightarrow F_d^z = C \dot{x}; F_d = \{F_{d,i}^z\}_{i=1}^{n_d}, C = \text{diag}[c_i]_{i=1}^{n_d}, \dot{x} = \{x_i\}_{i=1}^{n_d}$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{2} \dot{x}^T F_d^z = \frac{1}{2} \dot{x}^T C \dot{x} = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n_d} d_i \quad \text{forme quadri.}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\sum_i C_i \frac{\partial x}{\partial q_i}}_{F_d^z} \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q}$$

$$D = \sum_i D_i = \frac{1}{2} \sum_i \dot{x}_i \cdot c_i \dot{x}_i = \sum_{i,j,k} C_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} c_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot c_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \dot{q}_j \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} c_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

C: matrice di smorzam.
 $n \times n$ simm. e semidef. pos.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial q_i \partial q_j} \Leftrightarrow C = \frac{\partial^2 D}{\partial q_i \partial q_j}$$

- Eq. di moto: sulla struttura → sugli smorzatori

$$M\ddot{q} + Kq = Q(t) + Q_d(t) \text{ con } Q_d(t) = -F_d(t) = -\frac{\partial D}{\partial q} = -C\dot{q} \quad (\text{v. eq. di Lagrange})$$

matrice degli autovettori

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q(t)$$

$$\text{autorett. } (M, K) \rightsquigarrow \Phi = [\phi_i]$$

coordinate principali $q = \sum_i p_i \phi_i$

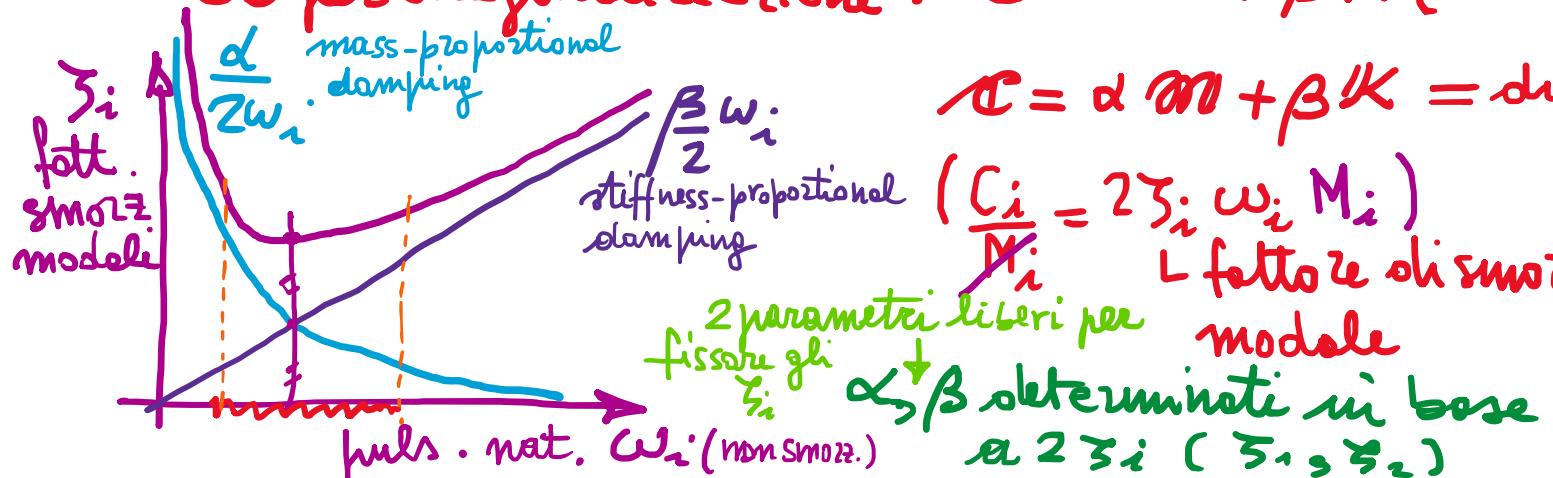
- Traf. in coord. principali: $q = \sum_i \phi_i p_i = \Phi P$ coordinate legrangiane

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \ddot{P} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C} \dot{P} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K} P = \Phi^T Q = P(t) \quad \text{ove } m = \text{diag}[M_i = \phi_i^T M \phi_i] \quad \text{e } C \neq \text{diag}[C_i = \phi_i^T C \phi_i] \text{ in genere}$$

$$K = \text{diag}[K_i = \phi_i^T K \phi_i]$$

- In generale C non diagonale: coeff. delle equaz. lin.

- CS per diagonalizzazione: $C = \alpha M + \beta K$ (Smorzamento "classico" o alle Rayleigh)



$$C = \alpha M + \beta K = \text{diag}[C_i = \alpha M_i + \beta K_i]$$

$$\left(\frac{C_i}{M_i} = 2\zeta_i w_i M_i \right)$$

L fattore di smorz.

$$2\zeta_i w_i M_i = \alpha M_i + \beta \frac{K_i}{M_i}$$

$$\boxed{\zeta_i = \frac{\alpha}{2w_i} + \frac{\beta}{2} \frac{w_i^2}{\omega_i^2}}$$

descrizione fattori di smorzamento modelli

2 parametri liberi per modale
fissare gli $\zeta_i \propto \beta$ determinati in base a $2\zeta_i$ (ζ_1, ζ_2)

- Assumere $\mathcal{R} = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}] \Rightarrow C = \Phi^{-1} \mathcal{R} \Psi$ $\Leftrightarrow \mathcal{R} = \Psi^T C \Psi$
 (si ipotizzano gli ζ_i , uguali o diversi per i vari modi, e si risole alle matrice di smorzamento C in coord. legrangiane) $\zeta_i \approx 1\%, 2-7\%$ 5% tipic.
- Valide per smorzamento intrinseco al sistema strutturale
- Nel caso di dispositivi aggiuntivi C non diag. - in generale.

• Esempio:

$\ddot{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$, $\ddot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\bar{q}}_1 - \dot{\bar{q}}_2)$ [N.B. $\Rightarrow q_1 = q_2 \Rightarrow \ddot{x} = 0$]

$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

$C = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_1} C \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_1}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}$

$= \frac{1}{2} c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial q_i \partial q_j}$

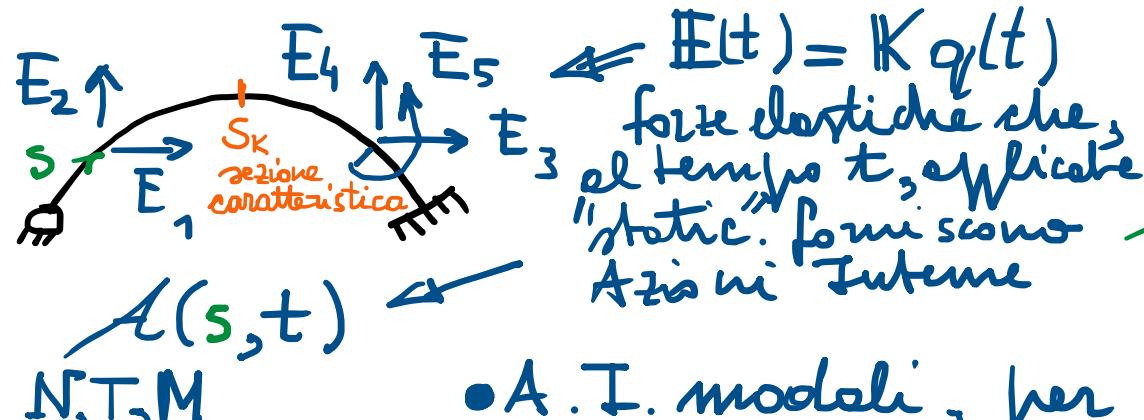
$\Psi^T C \Psi$ non diag.

\Leftrightarrow è singolare (det $C = 0$) (semidef. pos.)

Idem da scritt. di $D = \frac{1}{2} c \dot{z}^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2)$

Azioni interne

At



- A.I. $\mu q_j = 1 \Rightarrow E_i = K_{ij} \Rightarrow A_j(s)$
 $(q_i = 0, i \neq j)$

- A.I. modelli, per $\mu_k = 1 \Rightarrow q = \phi_k$ (autovettori)

indotte da forte modello [forze d'iniziazione] modelli

$$\bar{\mathbf{E}}_k = K \phi_k = \omega_k^2 M \phi_k = F_{IK} \rightarrow \alpha_k(s) : \text{indice del modo}$$

forze elastiche
modelli

pesi autoveloci

$$\alpha(s, t) = \sum \bar{\alpha}_k(s) p_k(t) = \bar{\alpha}(s)$$

$$A(s, t) = A(s) \underbrace{\Phi}_{q(t)} p(t) = (\Phi^T A(s))^T p(t) \Rightarrow \boxed{\bar{A}(s) = \Phi^T A(s)} \quad (A(s) = \Phi^{-T} \bar{A}(s))$$

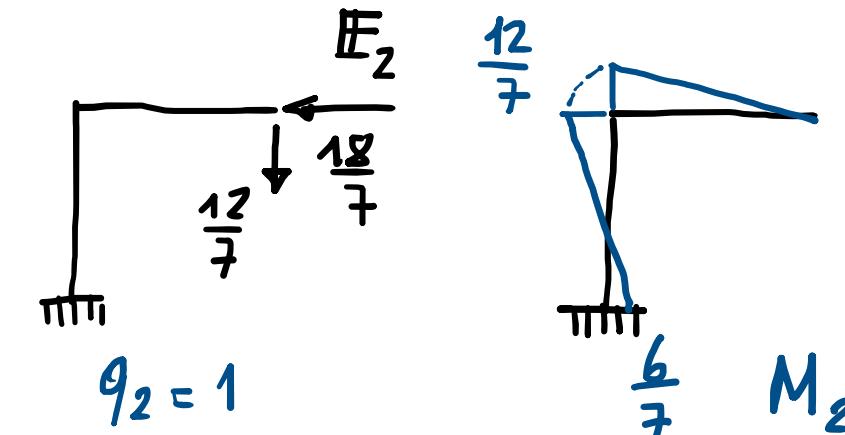
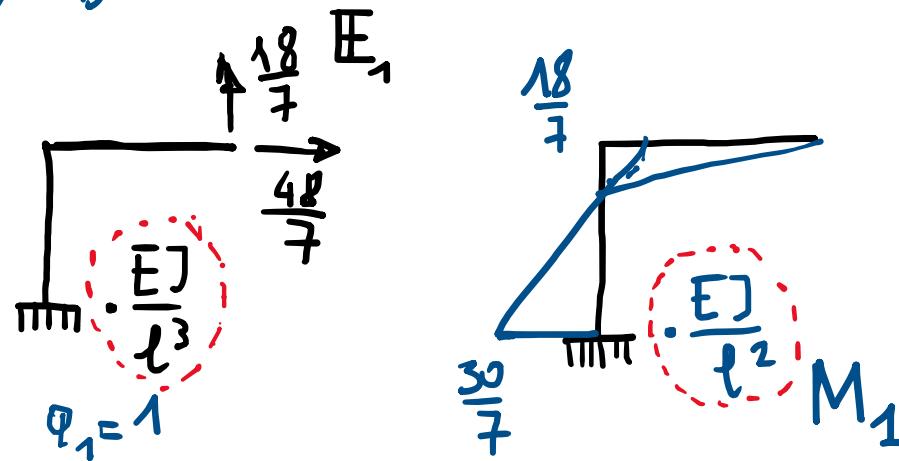
= Stima valore $\max_{\pi \in \Pi} A(\pi)$

$$\text{SRSS } A_{(s)}^{\max} = \sqrt{\sum_k (\bar{A}_k(s) p_k^{\max})^2} = \sqrt{\sum_j (\bar{A}_j(s) g_j^{\max})^2} \quad j \text{ (Square Root of Sum of Squares)}$$

Esempio 2 DOF :

$$K = \frac{6}{7} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

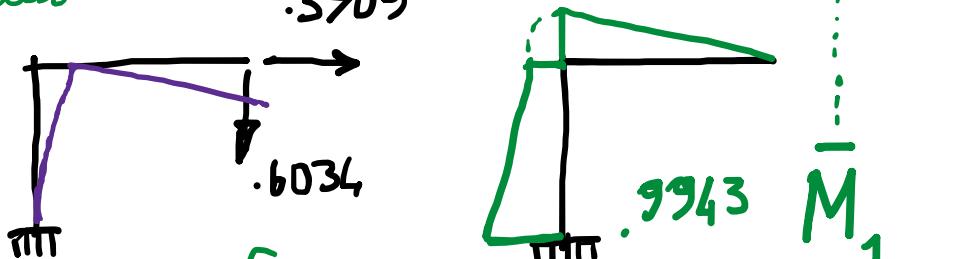
$A_j (q_j = 1)$



$\bar{A}_K (p_k=1)$
azioni interne
modali

$$\bar{E}_1 \rightarrow \bar{M}_1 = M_1 \phi_{11} + M_2 \phi_{12}$$

$$\cdot .6034$$



$$\Phi_1^T = \left\{ .4320 \quad 1 \right\}$$

1° autovettore

$$\begin{cases} .3909 = \frac{48}{7} \cdot .4320 - \frac{18}{7} \cdot 1 = \frac{2.736}{7} \\ .6034 = -\frac{18}{7} \cdot .4320 + \frac{12}{7} \cdot 1 = \frac{4.724}{7} \end{cases}$$

$\bar{E}_2 \rightarrow \bar{M}_2 = M_1 \phi_{21} + M_2 \phi_{22}$

$$\Phi_2^T = \left\{ 1 \quad -6481 \right\}$$

2° autovettore

$$\begin{cases} 8.524 = \frac{48}{7} \cdot 1 - \frac{18}{7} \cdot (-.6481) = \frac{59.67}{7} \\ -3.682 = -\frac{18}{7} \cdot 1 + \frac{12}{7} \cdot (-.6481) = -\frac{25.71}{7} \end{cases}$$

Concetti fondamentali :

- smorzamento strutturale (con riferimento specifico ai sistemi dinamici in ingegneria civile):
 - intrinseco, spalmato all'interno delle strutture; endemico nella presenza di effetti dissipativi in sistemi reali.
 - predisposto, tramite l'inserzione di dispositivi appositi (smorzatori), atti ad incrementare lo smorzamento globale, in particolare in relazione a gol specifici (es. controventi dissipativi).
- generalizzazione da SDOF a MDOF: $F_d = c \ddot{q} \Leftrightarrow F_d = C \dot{\vec{q}}_L$ -
Viene ad introdurre la matrice di smorzamento C , in generale del tutto scorrelata dalle matrici M e K sulle quali è incentrato il pb. (generalizzato) agli autoveloci $K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i$, che consente, in dinamica molecola, di disaccoppiare le eq. di moto del moto di sistema non smorzato.

- Si può assumere di preservare le proprietà di diagonalizzazione (disaccoppiamento) del sistema delle eq. m. del moto, supponendo, tipicamente per smorzamento intrinseco strutturale, che la matrice di smorzamento C possa risultare diagonale in coord. principali ($C = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{k_i M_i}]$) - ciò può risultare ragionevole alla luce delle incertezze insite nella definizione dello smorzamento strutturale, e fronte delle complessità del modello strutturale che mira a rappresentarlo.

-
- Determinazione delle Azioni Interne $A(s, t) \xrightarrow{\text{tempo}} A(s_k) \xrightarrow{\text{mese}} \text{stime}$
L sezioni caratteristiche es., SR55

(N, T, M) spazio $\xrightarrow{\text{tempo}}$ nel tempo
 - per sovrapposizione di A.I. per galli unitari $q_j = 1 \Rightarrow A_j(s) \dots \text{gall j}$
 - per sovrapposizione di A.I. modali $p_k = 1 \Rightarrow \bar{A}_k(s) \dots \text{modo k}$
 (cioè per coord. princ. unitarie)

SOMMARIO (Lec. 14)

- Smorzamento strutturale di sistemi MDOF
 - intrinsico (sistemi reali).
 - aggiuntivo (dispositivi).
- Funzione di dissipazione e matrice smorzamento.
- Diagonaizzazione in coordinate principali
 - smoz. alle Rayleigh .
 - " " modelli .
- Esempio 2DOF con dissipatore aggiunto.
- —
- Azioni interne
 - per coord. leggeugione unitarie.
 - per coord. principali unitarie (AI modelli).
- Stime dei valori max (in t) [SRSS].
- Esempio 2DOF: azioni interne modelli.

Next step: Risposta sismica di sistemi MDOF (teler shere-type)-END.