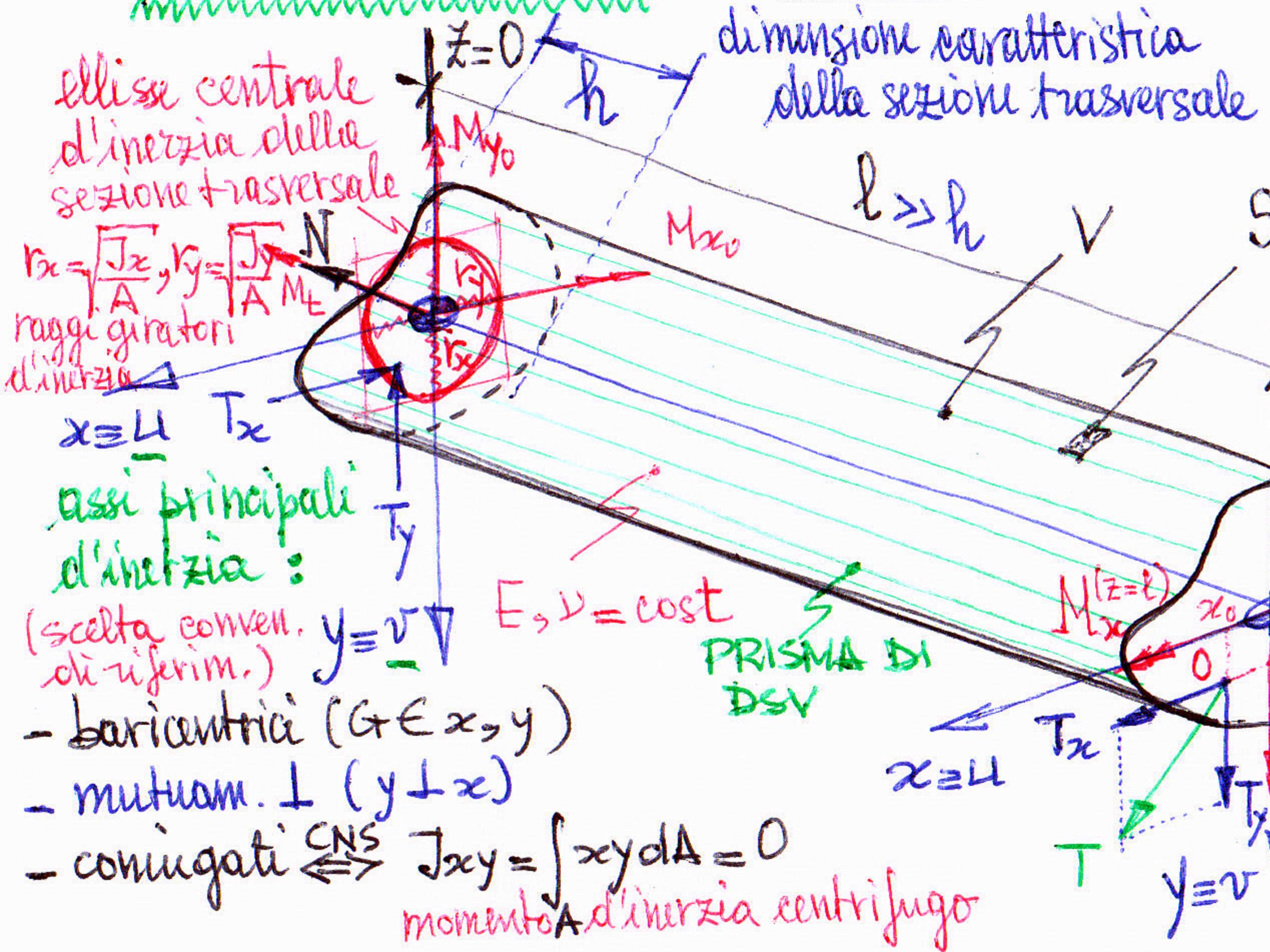


17a Lez. CdSdC - Problema di Saint Venant (~1855) egidio.rizzi@unibg.it



Azioni presenti erisultanti agenti su ogni sezione (a quota \pm)

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = \text{cost}$$

$$T_x = \int_A T_{zx} dA = \text{cost}$$

$$T_y = \int_A T_{zy} dA = \text{cost}$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = M_{x0} + T_y \cdot z$$

$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = M_{y0} - T_x \cdot z$$

$$M_t + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (T_{zy} \cdot x - T_{zx} \cdot y) dA = \text{cost} \quad M_t \text{ azione torante}$$

Legame costitutivo elastico lineare isotropo: $\epsilon = -\nu \frac{T}{E} I + \frac{1+\nu}{E} \sigma$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \epsilon_{ij} \rightarrow \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} \quad i \neq j : \delta_z = \frac{1}{G} \frac{\pi}{z} \text{ non dipend.}$$

$$\text{modulo di taglio } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E \text{ modulo di Young} \quad \nu \text{ coefficiente di Poisson}$$

- Solido cilindrico di forma allungata ($l \gg h$, es. $l \approx 10h$), a sezione costante di area A ed asse rettilineo (luogo dei baricentri G delle sezioni trasversali).
- Composto da materiale omogeneo, elastico lineare isotropo ($E, \nu = \text{cost}$).
- Privo di vincoli esterni ($S_s = \emptyset$) \Rightarrow soluz. in nota a meno di moti rigidi.
- Privo di forze di volume ($F = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ($f = 0$ su S_{lat}).
- Sollecitato solamente da forze di superficie agenti sulle basi $z=0$ e $z=l$, note solo in termini di risultanti (distribuzione non specificata) e tali da formare un sistema di forze autoequilibrato.

POSTULATO DI DSV: la reale distribuzione delle forze agenti, a parità di risultanti, non altera la soluzione, se non per effetti di bordo in prossimità delle basi (valido per sezioni piene, compatte). Si può ipotizzare che le risultanti siano distribuite con la distribuzione di sforzo che corrisponde alla soluzione (incognita).

Soluzione con approccio semi-inverso: (ricorda l'unicità della soluzione del pb. elastico)

- **Hyp. fondamentale di DSV:**

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0, \text{ cioè incognite } \sigma_{ij} \text{ residue:}$$

$$\sigma_{zz} \text{ e } \tau_{xz} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{array} \right\}$$

$$\text{div } \Phi + F = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ij,i} + f_j = 0 :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{zy,z} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \tau_z \text{ indip. da } z : \left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y) \\ \tau_{zy} = \tau_{zy}(x, y) \end{array} \right.$$

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \rightarrow \text{div } \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z}$$

Condizioni al contorno:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial}{\partial z} : 0 = \sigma_{zz,z,z} \rightarrow \sigma_{zz} \text{ lineare in } z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{zx} = 0 \\ n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{zy} = 0 \end{array} \right. \quad \checkmark$$

$$n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \sigma_{zz} = 0 \quad \checkmark \rightarrow \tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$$

$$n \in \text{ piano delle sez. } \perp \text{ a } z \rightarrow n = \left\{ \begin{array}{l} n_x \\ n_y \\ 0 \end{array} \right\} n_z = 0$$

rettore τ_z tangente al confine I della sezione

17a (1)

- Equazioni di congruenza interna: $\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kj,i} = \varepsilon_{ik,j} + \varepsilon_{il,jk}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy} \\ \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\varepsilon_{yz,yz} \\ \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} = 2\varepsilon_{zx,zx} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{automaticamente verificata} \\ \Rightarrow \varepsilon_{zz} \text{ lineare in } y \\ \rightarrow \varepsilon_{zz} \text{ lineare in } x \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} \\ \varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{xy,yz} \end{array} \right\} (*)$$

$$\varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} = \varepsilon_{zx,yz} + \varepsilon_{yz,zx} \rightarrow \varepsilon_{zz} \text{ non dipendente da } x \cdot y, \text{ idem per } \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy} \text{ e } \sigma_{zz}$$

- Dalle rimanenti (*):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zx,xy} - \varepsilon_{zy,xx} = \varepsilon_{xx,zy} \\ \varepsilon_{zx,yy} - \varepsilon_{zy,yx} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_{zx,y} - \varepsilon_{zy,x})_{,x} = \varepsilon_{xx,zy} \\ (\varepsilon_{zx,y} - \varepsilon_{zy,x})_{,y} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\nu}{E} (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})_{,x} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz,zy} = +\frac{\nu}{E} b_2 \\ \frac{1+\nu}{E} (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})_{,y} = +\frac{\nu}{E} \sigma_{zz,zx} = -\frac{\nu}{E} b_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})_{,x} = \bar{\nu} b_2 \\ (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})_{,y} = -\bar{\nu} b_1 \end{array} \right. \text{ con } \bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad \text{Integrando : } \int f dx + f dy$$

$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu} (b_2 x - b_1 y) - c$ con c costante di integrazione
eq. ne di congruenza nelle $\tau_{zx}(x,y)$, $\tau_{zy}(x,y)$ in A (da potrebbe evidentemente in relazione a M_z)

- Tornando a σ_{zz} , dall'equivalenza statica : assi baricentri \Rightarrow momento statico nullo

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)S_y + (a_2 - b_2 z)S_x = aA - bA z = \text{cost in } z \Rightarrow b=0, a=\frac{N}{A}$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = (a - bz)S_x + (a_1 - b_1 z)J_{xy} + (a_2 - b_2 z)J_{xz} = M_{x0} + T_y z \Rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x}$$

$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = -(a - bz)S_y - (a_1 - b_1 z)J_y - (a_2 - b_2 z)J_{xy} = M_{y0} - T_x z \Rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$$

Infatti $\text{div } \tau_z = -\sigma_{zz,z}$

$$\int_A \text{div } \tau_z dA = \int_A \frac{m \cdot \tau_z}{\text{Th. div. } \Gamma} d\Gamma = 0$$

$$\int_A -(\sigma_{zz,z}) dA = bA = 0 \Rightarrow b=0$$

- Concludendo : CAMPO DI SFORZO NORMALE (analiticamente noto)

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_{x0}(z)}{J_x} y - \frac{M_{y0}(z)}{J_y} x \quad (\text{r. flesso-flessione deviata, derivata per PSE di } N, M_x, M_y)$$

+ Problema nelle $\tau_z(x, y)$: $\text{div } \tau_z = -\sigma_{zz,z} = b + b_1 x + b_2 y = -\frac{T_x}{J_x} x - \frac{T_y}{J_y} y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\left(\frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y\right) \dots \dots \text{eq. ne di equilibrio} \\ \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu} \left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{T_x}{J_y} y\right) - c \dots \dots \text{eq. ne di congruenza} \end{array} \right.$$

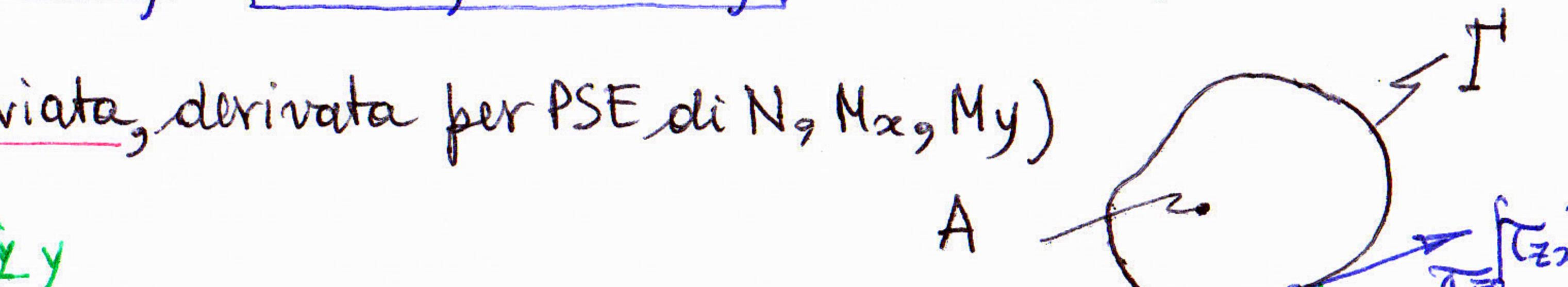
Problema differenziale del 1° ordine che resta da essere risolto in A.
(in generale non di facile soluzione in forma chiusa)

CAMPO $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y, z)$

Quindi σ_{zz} lineare in x, y, z e indip. da xy :

$$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y) \\ = (a - bz) + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$$

con cost. a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 da determin. in base alle risultanti presenti.

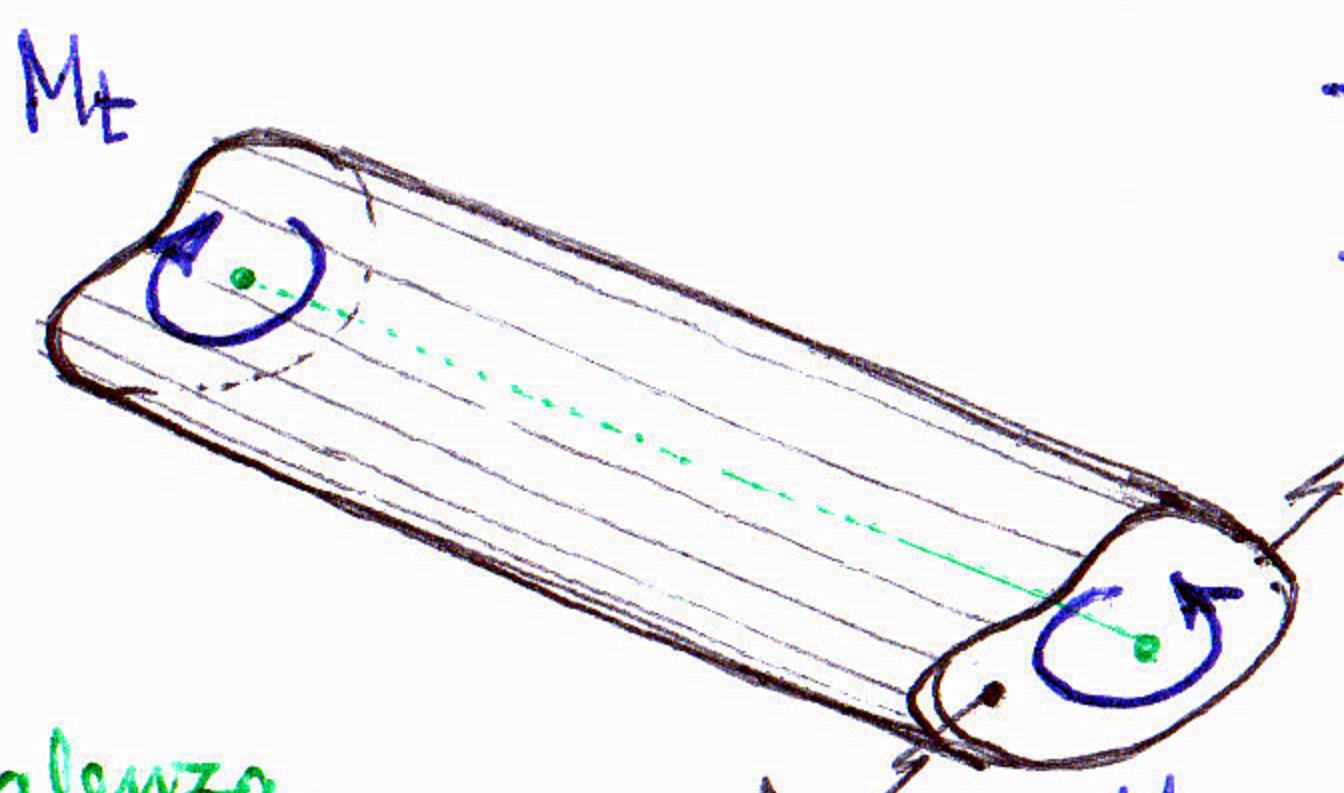


$$\text{con R.L. } \tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

egidio.rizzi@unibg.it

τ_z tangente al contorno lungo Γ .

18a Lez. CdS dC - Caso di DSV della TORSIONE - Prisma soggetto a sole coppie torcenti M_t ($N=T_x=T_y=0; M_x=M_y=0$)



- Dalla soluzione generale per σ_{zz} evidentemente sia ha $\sigma_{zz} = 0$ -
- Si ottengono quindi le seguenti eq. in nelle τ_z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad \tau_{zx,y} + \tau_{zy,y} = 0 \quad \text{equilibrio} \\ \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \quad \text{congruenza} \end{array} \right.$$

\rightarrow in A e con l.e. $\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ

Equivalezza statica fra τ_z e M_t :

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

A M_t

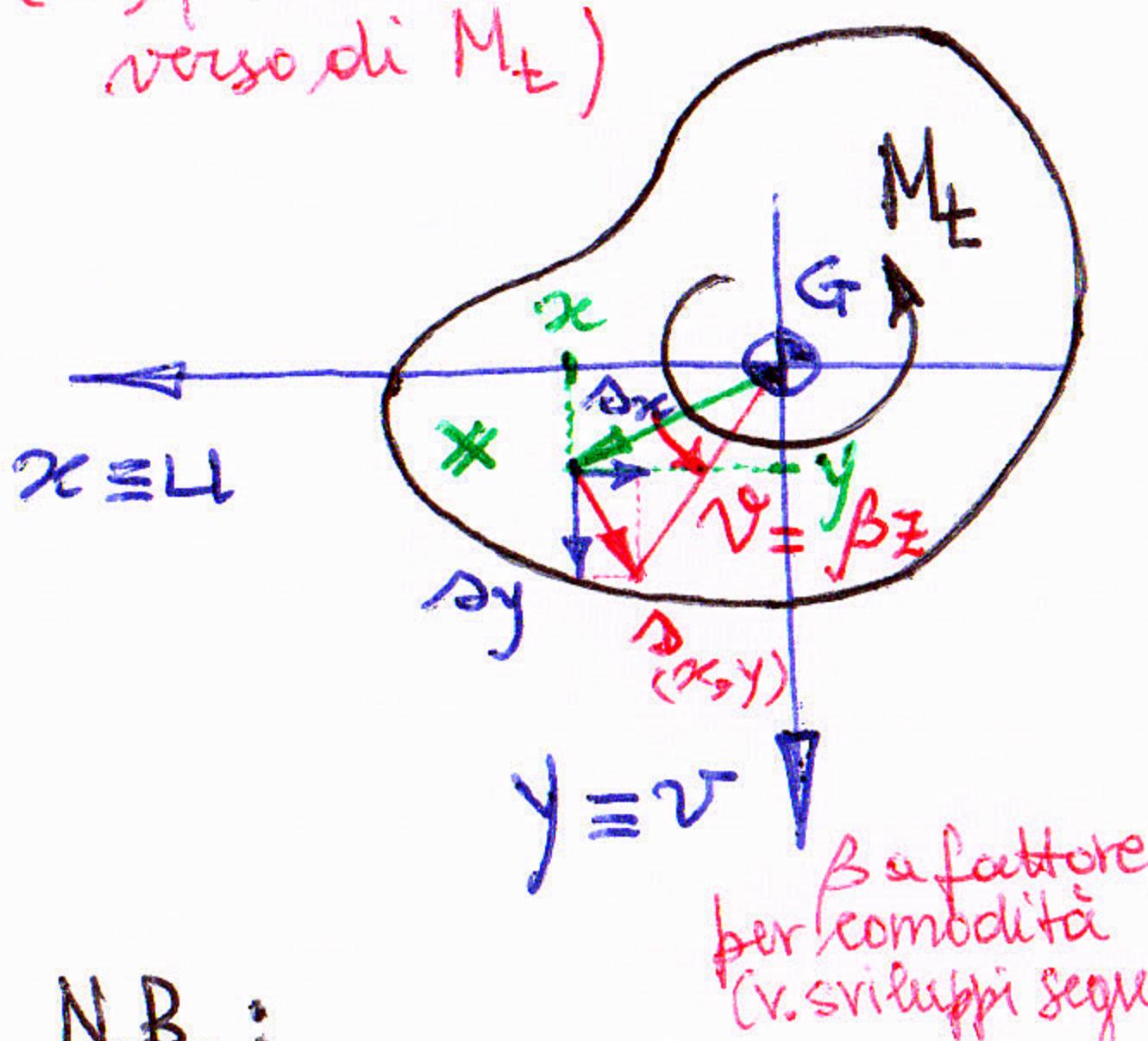
- Anche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \tau_z = 0 \\ (\operatorname{rot} \tau_z)_z = c \end{array} \right.$$

$$\text{Infatti } \operatorname{rot} \tau_z = \nabla \wedge \tau_z = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = (\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}) K$$

Approccio agli spostamenti (pago a priori la congruenza, impongo l'equilibrio).

(ϑ, β attese nel verso di M_t)



N.B.:

- sezione inoformabile nel suo piano - Infatti, verifica immediata: $\epsilon_{zz} = \epsilon_{z,z} = 0$ (coerentemente con $\sigma_{zz} = 0$), avendo
- inoltre $\epsilon_{zz} = \epsilon_{z,z} = 0$ (coerentemente con $\sigma_{zz} = 0$), avendo assunto ψ_g indipendente da z .

- Campo di deformazioni conseguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = \epsilon_{z,x} + \epsilon_{x,z} = \beta(\psi_{g,x} - y) \\ \gamma_{zy} = 2\epsilon_{zy} = \epsilon_{z,y} + \epsilon_{y,z} = \beta(\psi_{g,y} + x) \end{array} \right.$$

Ipotesi sul campo di spostamenti (suffragata ad es. da osservazioni sperimentali); rotazione rigida (infinitesima) della sezione nel suo piano: $\vartheta = \vartheta(z) = \beta z$, con $\beta = \frac{\operatorname{div} \vartheta}{\operatorname{rot} \vartheta} = \text{cost}$ "torsione" o angolo unitario + spostamento fuori piano della sezione (ingombramento), indip. da z -

Campo di spostamenti (rappresentazione analitica):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x = \Delta_x(y, z) = -\beta z y \\ \Delta_y = \Delta_y(x, z) = \beta z x \\ \Delta_z = \Delta_z(x, y) = \beta \psi_g(x, y) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \Delta = \omega \wedge \times = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & K \\ 0 & 0 & v \\ x & y & 0 \end{pmatrix} = -v y i + v x j \\ \text{spost. nel piano} \end{array} \right.$$

Funzione di ingombramento (riferita a G) - Definita a meno di una costante (che rappresenterebbe una traslazione rigida in direzione z) -

$\beta \rightarrow \psi_g(x, y)$ incognite da determ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \epsilon_{x,x} = 0 \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_{y,y} = 0 \\ 2\epsilon_{xy} = \epsilon_{x,y} + \epsilon_{y,x} = -\beta z + \beta z = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{pone } \psi_g = \frac{1}{A} \int_A \psi_g dA = 0 \quad \text{Infatti si tratta di} \\ \text{un moto rigido della} \\ \text{sezione nel suo piano} \end{array} \right.$$

- Campo di tensioni tangenziali (da legame costitutivo $\tau_{ij} = \frac{T_{ij}}{G}$; $T_{ij} = G \epsilon_{ij}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = G \beta (\psi_{g,x} - y) \\ \tau_{zy} = G \beta (\psi_{g,y} + x) \end{array} \right. \quad \text{Dato in termini di } \psi_g(x, y); \text{ nota una volta nota } \psi_g$$

M_t/J (esprimiamo) \rightarrow Quindi τ_z legate a M_t tramite β

- Equazione di congruenza: attesa identicamente verificata -

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \rightarrow G \beta (\psi_{g,xy} - 1 - \psi_{gyx} - 1) = -2G \beta = -c \rightarrow \boxed{c = 2G \beta}$$

Significato fisico di c : proporz. $a \beta = \frac{c}{2G}$

Th. Schwarz

- Equazione di equilibrio:

$$\tau_{zx,xx} + \tau_{zy,yy} = 0 \rightarrow G\beta (\psi_{G,xx} + \psi_{G,yy}) = 0 \rightarrow \nabla^2 \psi_G = \psi_{G,xx} + \psi_{G,yy} = 0$$

Eduardo@unibg.it

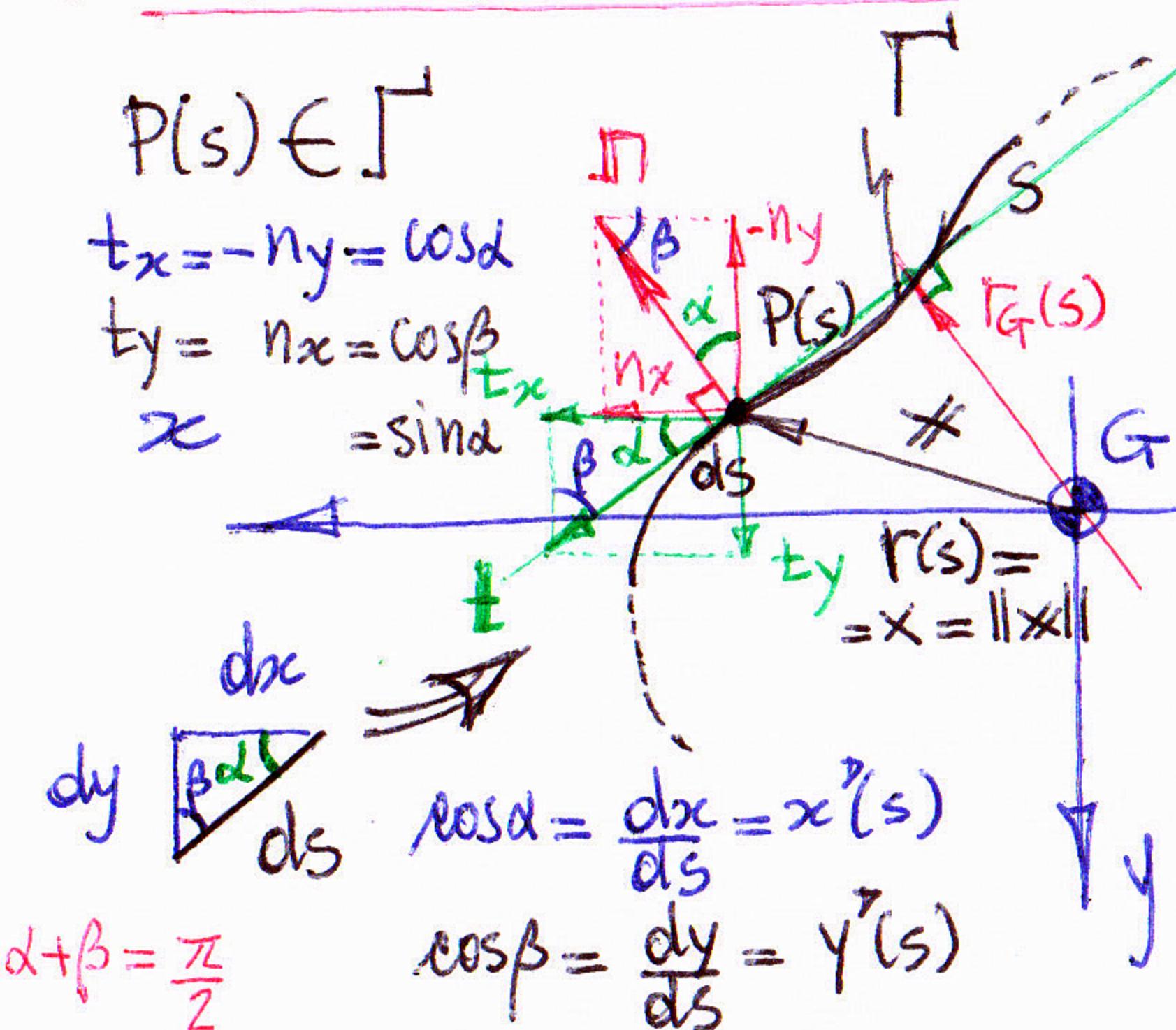
P.L.: $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su $\Gamma \rightarrow G\beta (\psi_{G,xz} n_x - \psi_{G,yz} n_y + \psi_{G,xy} n_y + \psi_{G,yy} n_y) = 0$

derivata direzionale
nella direzione n^2

Si ottiene quindi un
problema di Neumann-Dini per
l'equazione di Laplace

(torsione - approccio agli spostamenti) pb. differenziale del 2° ordine alle
derivate parziali

- Riscrittura della e.e.



$$x \in \Gamma: \\ x = P(s) - 0 = P(s) - G = \begin{cases} x(s) \\ y(s) \end{cases}$$

$$\text{versore tangente:} \\ t = \frac{dx}{ds} = \begin{cases} x'(s) \\ y'(s) \end{cases} = \begin{cases} t_x \\ t_y \end{cases}$$

$$\text{versore normale:} \\ n = \begin{cases} n_x \\ n_y \end{cases} = \begin{cases} t_y \\ -t_x \end{cases} = \begin{cases} y'(s) \\ -x'(s) \end{cases}$$

$$\text{N.B. } n \cdot t = x''y' - x'y'' \equiv 0 \checkmark$$

- Equivalenza statica del campo τ_z a M_t :

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = G\beta \int_A (\psi_{G,y} \cdot x + x^2 - \psi_{G,x} \cdot y + y^2) dA$$

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \int_A (x^2 + y^2) dA - \int_A (\psi_{G,x} \cdot y - \psi_{G,y} \cdot x) dA = J_G - J^*$$

momento d'inerzia polare rispetto a G

momento d'inerzia torsionale

Si pone $J = J_G \leq J^*$ con $\eta \geq 1$ fattore di torsione

$$\eta = \frac{J_G}{J} \text{ pura proprietà geometrica della sezione trasversale} = \frac{1}{1 - J^*/J_G}$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \psi_G = \psi_{G,xx} + \psi_{G,yy} = 0$$

Eq.ne di Laplace in A

Condizione al contorno
di Neumann-Dini

(flusso assegnato - p.e.
sulla derivata della
f.n. incognita)

$$\begin{aligned} \psi_{G,n} &= \psi_{G,xz} n_x + \psi_{G,yz} n_y = n_x y - n_y x \text{ su } \Gamma \\ \text{flusso uscente} \\ \text{della f.n. } \psi_G(x, y) \\ \text{assegnato} \end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \psi_{G,n} &= t_y y + t_x x = x \cdot t \\ &= y' y + x' x \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \frac{dr^2(s)}{ds} = r(s) r'(s) \end{aligned}$$

N.B. Sezione circolare

$$r(s) = R = \text{cost} \Rightarrow r'(s) = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{G,n} = 0$$

$$\text{Soluzione di } \begin{cases} \nabla^2 \psi_G = 0 \text{ in } A \\ \psi_{G,n} = 0 \text{ su } \Gamma \end{cases} \Rightarrow \psi_G = 0$$

$$r(s) = \sqrt{x(s)^2 + y(s)^2}$$

$$r^2(s) \quad r: \text{distanza di } P(s) \text{ da } \Gamma$$

$$r_0: \text{distanza della tangente a } \Gamma \\ \text{in } P(s) \text{ da } \Gamma$$

ingombramento NULLO
per la sezione circolare

Si può dimostrare (tramite doppia applicazione di Th. Div.) che:

$$+ J^* \geq 0 \quad (\text{v. Corradi o pag. successiva})$$

Momento d'inerzia torsionale
da ingombramento (si sottrae
a J_G) noto una volta
nota ψ_G .

$$J = J_G \left(1 - \frac{J^*}{J_G}\right)$$

Quindi: GJ : rigidità torsionale

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \eta \frac{M_t}{GJ_G}$$

$$d\beta = \beta dz = \frac{M_t dz}{GJ} = \eta \frac{M_t dz}{GJ_G}$$

Relaz. dimostrabile: A non $\nabla^2 \psi_G = 0$ in A

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \frac{1}{G\beta} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA = \frac{2}{c} \int_A \tau_z^2 dA > 0$$

$$\tau_z^2 = \|\tau_z\|^2$$

$$18a/2$$

• Dimostrazione "spuria" (ma sente Th. Div.) su J (tramite una sola applicazione di Th. Div.) Altamente, vedi ad es. Corradi -

$\beta = \frac{M t}{G J}$; $G J \beta = M t = \int_A (\tau_{2y} x - \tau_{2x} y) dA$
angolo unitario di torsione rigidità torsionale

equivalenza statica

$$= \int_A \left[\tau_{2y} \left(\frac{\tau_{2y}}{G \beta} - \psi_{\alpha, y} \right) - \tau_{2x} \left(-\frac{\tau_{2x}}{G \beta} + \psi_{\alpha, x} \right) \right] dA$$

$$= \frac{1}{G \beta} \int_A (\tau_{2x}^2 + \tau_{2y}^2) dA - \underbrace{\int_A (\tau_{2x} \psi_{\alpha, x} + \tau_{2y} \psi_{\alpha, y}) dA}_{0 \text{ si può dim.}}$$

$$= \frac{1}{G \beta} \int_A (\tau_{2x}^2 + \tau_{2y}^2) dA$$

- Infatti:

$$\int_A (\tau_{2x} \psi_{\alpha, x} + \tau_{2y} \psi_{\alpha, y}) dA = \int_A [(\tau_{2x} \psi_{\alpha})_{, x} + (\tau_{2y} \psi_{\alpha})_{, y}] dA - \int_A [(\tau_{2x, x} + \tau_{2y, y}) \psi_{\alpha}] dA$$

Th. Div.

$$= \int_{\Gamma} (\tau_{2x} \psi_{\alpha} n_x + \tau_{2y} \psi_{\alpha} n_y) d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi_{\alpha} (\tau_{2x} n_x + \tau_{2y} n_y) d\Gamma = 0$$

$$\int_A \text{dirig}_i dA = \int_{\Gamma} \text{nn}_i d\Gamma$$

$$g_i = \begin{cases} 0 & i \in \text{no sum} \\ g_i & i \in \text{ori} \end{cases} \rightarrow \int_A g_{(i)} \psi_{\alpha, (i)} dA = \int_{\Gamma} n_{(i)} g_{(i)} d\Gamma$$

caso particolare

- Quindi: $(G \beta)^2 J = \int_A (\tau_{2x}^2 + \tau_{2y}^2) dA > 0$. Risost. il campo di spira:

$$= (G \beta)^2 \int_A (\psi_{\alpha, x}^2 + \psi_{\alpha, y}^2 - 2\psi_{\alpha, x} y + \psi_{\alpha, y}^2 + x^2 + 2\psi_{\alpha, y} x) dA$$

- Si ottiene:

$$J = J_G - \int_A (\psi_{\alpha, x} y - \psi_{\alpha, y} x) dA$$

quindi: $J = J_G - J^*$ e $J \leq J_G$

$J^* > 0$

Da appross. agli spostamenti

$$\begin{cases} \tau_{2x} = G \beta (\psi_{\alpha, x} - y) \\ \tau_{2y} = G \beta (\psi_{\alpha, y} + x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{\tau_{2x}}{G \beta} + \psi_{\alpha, x} \\ x = \frac{\tau_{2y}}{G \beta} - \psi_{\alpha, y} \end{cases}$$

eritti@unibg.it

0 mi soluz. nel rispetto delle eq. di equilibrio

0 mi soluz. nel rispetto delle c.c. su Γ

Inoltre:

$$J^* = \int_A [\psi_{\alpha, x} (\psi_{\alpha, x} - \frac{\tau_{2x}}{G \beta}) - \psi_{\alpha, y} (\psi_{\alpha, y} + \frac{\tau_{2y}}{G \beta})] dA$$

$$= \int_A (\psi_{\alpha, x}^2 + \psi_{\alpha, y}^2) dA > 0$$

$$= \int_A \frac{\tau_{2x} \psi_{\alpha, x} + \tau_{2y} \psi_{\alpha, y}}{G \beta} dA$$

0 (v. sopra)

$$+ \int_A (\psi_{\alpha, x}^2 + \psi_{\alpha, y}^2 - \psi_{\alpha, x} y + \psi_{\alpha, y} x) dA$$

$$\int_A [\psi_{\alpha, x} (\psi_{\alpha, x} - y) + \psi_{\alpha, y} (\psi_{\alpha, y} + x)] dA = 0 \text{ come dimostrato sopra}$$