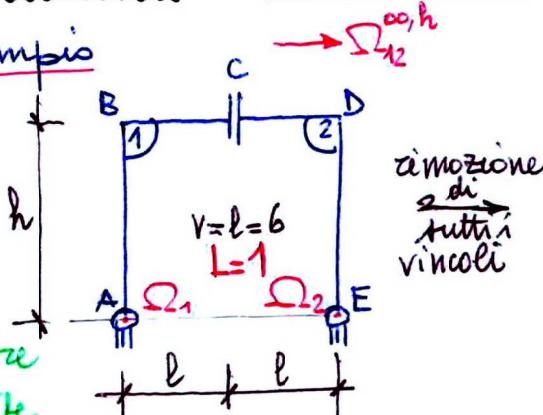


# 5a Lec. CdSdC - AC analitica

[erizzi@unibe.it](mailto:erizzi@unibe.it)

## Esempio



area a tre  
termine  
allineate  
labile

$\Sigma_{k=2}^{n_k}$

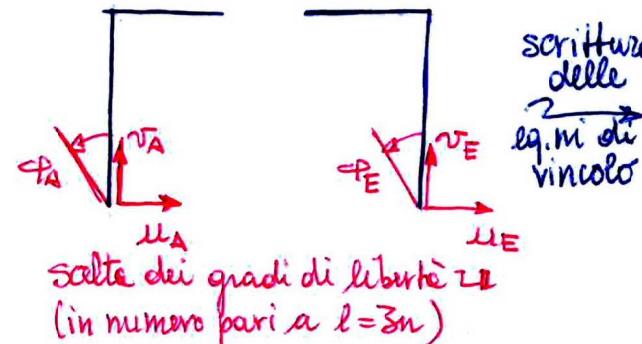
rimozione  
di  
tutti i  
vincoli

$$r = l = 6$$

$$L = 1$$

$$\Omega_1$$

$$\Omega_2$$



## - Scrittura matriciale del sistema di congruenza

$$\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta u_C \\ \Delta \varphi_C \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{bmatrix} = \bar{v} = \emptyset \Rightarrow \bar{v} = C \cdot \bar{u} = \bar{v} = \emptyset$$

C compilata per colonne, ponendo  $u_j = 1$ ,  $u_k = 0$  per  $k \neq j$

## - Proprietà algebriche di C

grado di z.L =  $N[C] = l - r[C] \geq 0$   
labilità (o  
di indeterminat.  
cinematica)  
dimensione  
del nucleo di C:  
n. di vettori linearm.  
indipendenti lib;  
soluzioni  
non banali del sistema

- Qui  $r[C] = 5$  (3<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> colonna lin. dip.)

$$L = 6 - 5 = 1$$

infatti  $\det[C] = h - h = 0$  (C singolare)

$6 \times 6$   
quadrata  
( $v=l=6$ )

SISTEMA LABILE

In numero pari a v:

$$u_A = 0$$

$$v_A = 0$$

$$\Delta u_C = u_C^{\oplus} - u_C^{\ominus} = (u_E - \varphi_E h) - (u_A - \varphi_A h) = 0$$

$$\Delta \varphi_C = \varphi_C^{\oplus} - \varphi_C^{\ominus} = \varphi_E - \varphi_A = 0$$

$$u_E = 0$$

$$v_E = 0$$

SISTEMA DI CONGRUENZA  
(completo)

MATRICE  
DI  
CONGRUENZA

Sistema lineare omogeneo (per vincoli non  
nelle incognite liberevoli)

Ci si chiede se esistono soluzioni  
non banali ( $\bar{u} \neq \emptyset$ )

vettore degli  
spostamenti in  
corrispondenza dei  
vincoli rimossi

## NOTE

• Per avere  $L=0$  occorre  $r=l$ , quindi  $v \geq l$ , infatti

- Se  $v < l$ :  $r[C] \leq v < l \Rightarrow L > 0$        $L = l - r + v - v = (l-v) + (v-r)$   
matr. rettang. v  $\frac{C}{l}$        $-r[C] \geq -v \Rightarrow L = l - r \geq l - v$ : L almeno pari  
basse

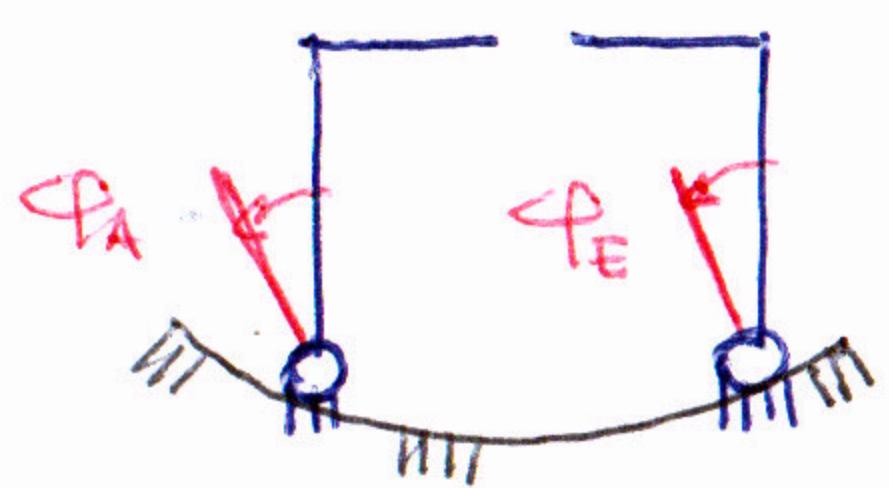
Struttura cinematicamente indeterminata, allo sbilanciamento  
labile (spesso detta ipodeterminata)       $l-v$  es.:  $\frac{C}{l}$

• Se  $v = l$ : sistema potenzialmente isodeterminato -  $L=2$   
quadrato v  $\frac{C}{l}$       - Se C di range pieno,  $r=l=v \Rightarrow L=0$   
(sistema cinematicamente isodeterminato)

È possibile analizzare  $\det[C]$ . Se  $\neq 0 \Rightarrow L=0$

• Se  $v > l$ : sistema potenzialmente iperdeterminato  
rettang. v  $\frac{C}{l}$       - Se C di range pieno,  $r=l < v \Rightarrow L=0$   
(sistema cinematicamente iperdeterminato)

• Sistema di congruenza ridotto tramite schema ad albero: si rimuovono i soli g.d.v. in numero minore possibile, tali da aprire tutte le maglie chiuse (incluso quelle event. formate dalla struttura con la terra).



$$\begin{cases} \Delta u_C \\ \Delta v_C \end{cases} = \begin{bmatrix} h & -h \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} P_A \\ P_E \end{cases} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u_C \\ \Delta v_C \end{cases} = 0$$

Qui  $\Delta u^*$  e  $\Delta v^*$  sono sottovettori di  $u_1$  e  $v_2$ , quindi  $C^*$  sottomatrice di  $C$ .

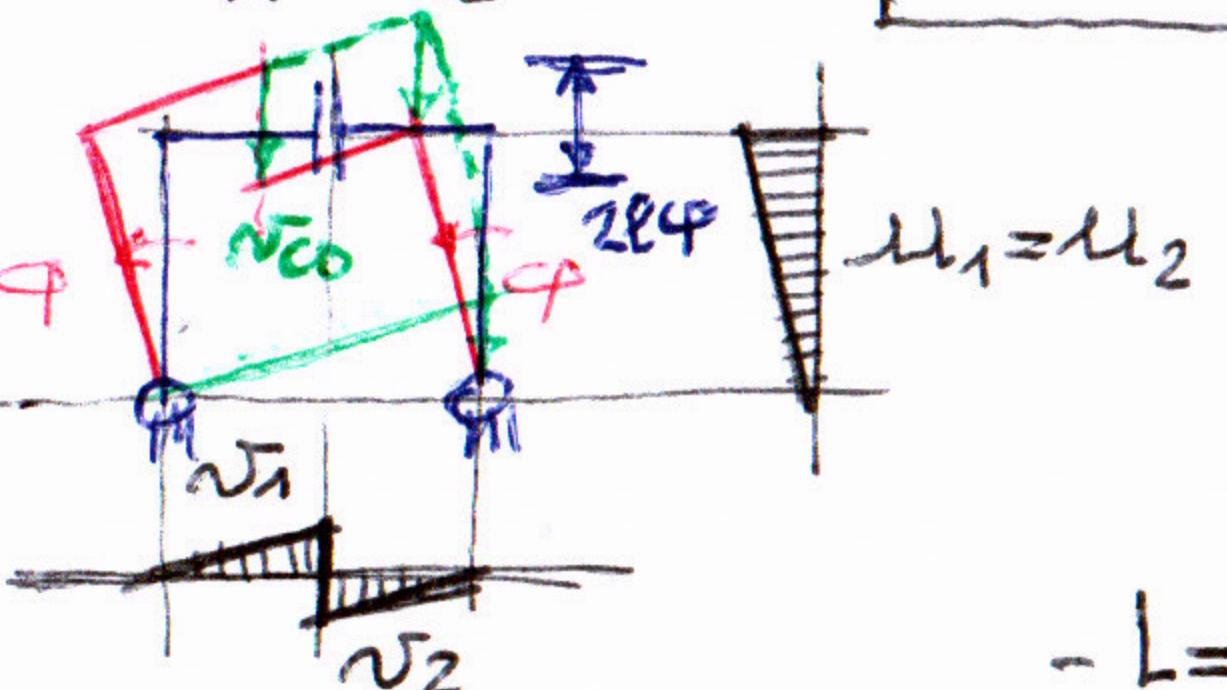
- Soluzione del sistema (soluzioni non banali)
- Spostata del sistema labile, con mappe:

• Altro schema ad albero (più generalmente tipico, con un piede solo a terra):



$$\begin{cases} u_E \\ v_E \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2l & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} P_A \\ v_{CD} \end{cases} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_E \\ v_E \end{cases} = 0$$

N.B.: qui  $C^*$  non sottomatrice di  $C$  (poiché  $u^*$  non sottovettore di  $u$ )



### • Procedure generale di AC analitica

- Computazione di  $V$  e  $l=3n$
- Analisi di schema completo o di schema ad albero, con scelta di g.d.v.  $\Delta u$  e  $\Delta v$
- Espressione degli spostamenti in corrispondenza dei vincoli rimossi, infine dei g.d.v. scelti:  
 $V = V(\tau)$  oppure  $V = V(\tau^*)$
- Ciò compila  $C$  o  $C^*$
- Percedimenti nulli ( $\bar{v}_i = 0$  e  $\bar{v}_i^* = 0$ ) il sistema omogeneo ottenuto ammette soluzioni non banali in dipendenza de  $L = N[C] = l - r[C] > 0$  LABILE  
 $L = N[C^*] = l - r[C^*] = 0$  NON LABILE
- Se labile, soluzioni (non banali) del sistema.
- Rappresentazione della spostata (con eventuali mappe di componenti di spostamento).

N.B.: come nell'approccio geometrico, eventuali bielle possono essere inizialmente condensate in carrelli, al fine di dedurre la condizione di labilità.

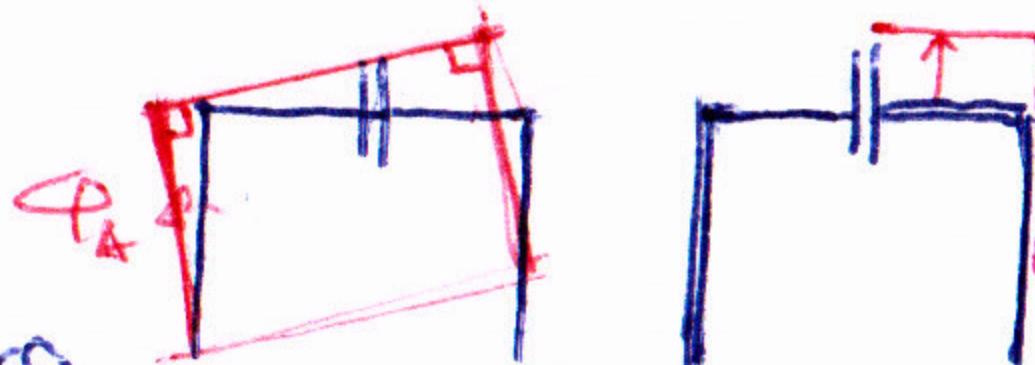
$$Si ha L = N[C^*] = l - r[C^*]$$

$$= 2 - 1 = 1$$

Sistema  
LABILE  
1 colonna  
lin. dip.

$$\det[C^*] = 0$$

$C^*$  singolare  $\Rightarrow$  denuncia la labilità del sistema potenzialmente incodeterminato -  $v_{CD} > 0$



-  $L=1$  come sopra,  $C^*$  singolare

- Soluzione:  $2lP_A + v_{CD} = 0 \Rightarrow v_{CD} = -2lP_A$
- Spostata come sopra, con  $v_{CD}$  applicato più seguito a  $P_A$  (rotaz. di  $\Theta_1 + \Theta_2$ ). rispetto a quello di su.)

scorrimento relativo negativo (piatto di ds. vs. il basso, rispetto a quello di su.)

• Rendiamo non labile il sistema, modificando il vincolo relativo in  $C$ :

$$\begin{array}{c} \text{arco a} \\ \text{tre} \\ \text{cerchiere} \\ \text{non} \\ \text{allineate} \\ \text{qui: } \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Omega_{12} \\ (1) \quad (2) \\ l=0 \\ \Delta u_C \\ \Delta v_C \\ M_E \\ V_E \end{array} = \begin{bmatrix} M_A & & & & & \\ V_A & & & & & \\ \Delta u_C & & & & & \\ \Delta v_C & & & & & \\ M_E & & & & & \\ V_E & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ P_A \\ U_E \\ V_E \\ P_E \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta v_C = v_C^{(2)} - v_C^{(1)} = (V_E - P_E l) - (V_A + P_A l)$$

unica riga modificata ora  $\det[C] = -hl - hl = -2hl \neq 0$

$$L = l - r[C] = 6 - 6 = 0$$

rotat. relativa di  $\Theta_2$  rispetto ad  $\Theta_1$

$$\begin{array}{c} \text{fondo} \\ \text{rotat. relativa} \\ \text{di } \Theta_2 \text{ rispetto ad } \Theta_1 \\ \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta u_C = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{array}$$

$$V = \begin{bmatrix} h & -h \\ -l & -l \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} P_A \\ P_E \end{cases} = 0$$

$\Rightarrow$  sottomatrice di  $C$

$$\det[C^*] = -2hl \neq 0$$

$$L=0$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & h \\ 2l & l \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} P_A \\ P_E \end{cases} = 0$$

$\Rightarrow$  non sottom.

$$\det[C^*] = -2hl \neq 0$$

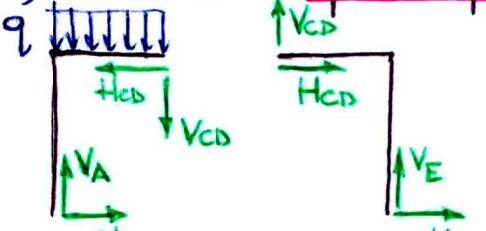
erizzi@unibg.it

## 6a Lezione CdSdC - Statica e dualità statica/cinematica

Esempio (arco a tre armi e non allineate) - Analisi con esplosivo completo.

[v.let.'prec.]

The diagram shows a horizontal beam supported by five vertical lines labeled A through E from left to right. A vertical line labeled 'h' extends from support A upwards to support B. A horizontal line labeled 'l' extends from support B to support C. Another horizontal line labeled 'l' extends from support C to support D. A final horizontal line labeled 'l' extends from support D to support E. At support B, there is a small circle with a vertical line extending downwards, and the label 'q' is written above it. The label '1' is placed inside the circle at support B, and the label '2' is placed inside the circle at support D.



Reazioni vincolari di tutti i vincoli rimossi, assoluti e relativi.

- Sistema di equilibrio (in forma matriciale) - Curando l'analogia  $\nabla \leftrightarrow \mathbf{r}$ , nel vettore  $\mathbf{r}$  delle reazioni in vincolari incognite:

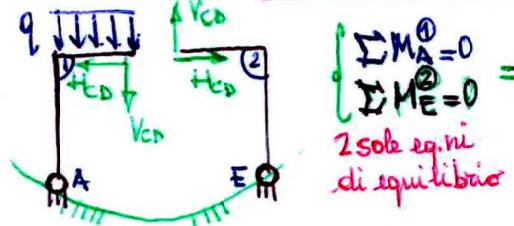
$$\$ = \begin{bmatrix} H_A & V_A & H_{CD} & V_{CD} & H_E & V_E \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -h & -l & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \$ = E \cdot I_r + f = 0$$

vettore risultante delle forze  
matrice di rigidezza  
vettore delle reazioni  
 $E \cdot I_r = -f$

Equiv.:  $E \cdot I_r = -f$

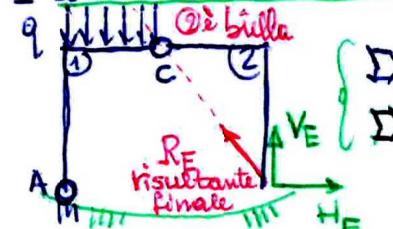
vettore delle RV inconosciute

- Analisi con schema ad albero:



$$\text{Svolgimento:} \quad \begin{cases} -2\ell V_{CD} - \frac{q\ell^2}{4h} = 0 \Rightarrow V_{CD} = -\frac{q\ell}{4h^2} \\ 2h H_{CD} - \frac{q\ell^2}{4h} = 0 \Rightarrow H_{CD} = \frac{q\ell}{4h} \end{cases}$$

### Schema ad albero alternativo:



$$\begin{aligned} \text{N.B.} & - \text{qui } E'' \text{ non sottomatrice di } E \\ & - E'' = C'' T \\ & - \det[E''] = \det[C''] = -2hl \neq 0 \end{aligned}$$

- Scrittura delle eq.ni di equilibrio (in numero pari a  $l=3n$ )  
(curando l'analogia / dualità con la scelta operata in AC per Z)

$$\left\{ \begin{array}{l} M_A \\ V_A \\ P_A \\ M_E \\ V_E \\ P_E \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x^0 = 0 \Rightarrow H_A - H_{CD} = 0 \\ \sum F_y^0 = 0 \Rightarrow V_A - V_{CD} - ql = 0 \\ \sum M_A^0 = 0 \Rightarrow H_{CD} h - V_{CD} l - \frac{ql^2}{2} = 0 \\ \sum F_x^0 = 0 \Rightarrow H_E + H_{CD} = 0 \\ \sum F_y^0 = 0 \Rightarrow V_E + V_{CD} = 0 \\ \sum M_E^0 = 0 \Rightarrow -H_{CD} h - V_{CD} l = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{asta ①} \\ \text{asta ②} \end{array}$$

(l=3m x 1)

te eq. ni di equil. nel piano  
e corpo rigido

vettore risultante delle forze  
 |  
 | matrice di equilibrio  
 |  
 | vettore delle forze attive  
 |  
 | vettore delle forze reattive  
 )  $\Rightarrow \boxed{\$ = E \cdot r + f = 0}$   
 (l=3nx1)(l=3nx1)(1x1)  
 Equir.:  $E \cdot r = -f$   
 vettore delle RV incognite  
 sistema di equilibrio lineare non omogeneo

Per ispezione, avendo  
 verificato le  
 corrispondenze  
 $\Leftrightarrow$   
 $\begin{cases} H_A \\ V_A \\ H_C D \\ V_C D \\ H_E \\ V_E \end{cases}$   
 $\begin{cases} M \Leftrightarrow \$, f \\ V \Leftrightarrow I \end{cases}$   
 Risulta: Tasto

$$\bullet \text{Qui: } -\det[\mathbb{E}] = \det[C] = -2hl \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} = -\mathbb{E}^{-1} \cdot \frac{F}{l^2}$$

- Soluzione:

$$H_A = H_{CD} \left\{ \begin{array}{l} \frac{ql^2}{4h} \\ \frac{3ql}{4} \\ \frac{q l^2}{4h} \\ \frac{9l^2}{4} \\ -\frac{9l}{4} \\ -\frac{ql}{4h} \\ \frac{9l}{4} \end{array} \right\}$$

$$V_A = V_{CD} + ql$$

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \text{vettore delle RV} \\ \frac{ql^2}{4h} \\ -\frac{3ql}{4} \\ \frac{ql}{4} \\ \frac{9l^2}{4} \\ -\frac{9l}{4} \\ -\frac{ql}{4h} \\ \frac{9l}{4} \end{array} \right\}$$

$$R_E = \frac{ql}{4} \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}$$

$$T(x) = -M'(x) = -\frac{q^2}{4} + qx = q\left(x - \frac{l}{4}\right)$$

$$M(x) = \frac{q^2}{4} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{4}(l - 2x)$$

Proprietà del sistema di equilibrio:  $E \cdot r = -f$  -  $L=3n$  eq. ni in  $v$  incognite

- Sistema coerente ("consistent") se ammette almeno una soluzione (sistema equilibrabile)

- Sistema coerente sse  $r[E] = r[E, -f]$  (Th. di Rouché-Capelli)  
CNS  $\rightarrow$  rango  $\rightarrow$  matrice orlata dal termine noto

- Sistema non coerente (non ammette alcuna soluzione) sse  $r[E] < r[E, -f]$

- Sistema ammette una ed un'unica soluzione sse  $r[E] = r[E, -f] = v$  ( $I=0$ )  
sistema staticamente determinato

- Sistema ammette  $\infty$  soluzioni sse  $r[E] = r[E, -f] < v$  ( $I>0$ )  
sistema staticamente indeterminato

Soluzione somma di soluzioni particolare di  $E \cdot r = -f$  e

+ delle  $\infty$  soluzioni del sistema omogeneo  $E \cdot r = 0$  (det. da  $I$  vettori lin. indip., costituenti il nucleo di  $E$ ).  
(sistemi autoequilibrati di RV)

- Due punti fondamentali: - esistenza delle soluzioni (sistema equilibrabile)  
- soluzione unica o meno (determinaz. vs. indet. statica)

### Classificazione cinematica/statica

AC: sistema di congruenza  $\rightarrow v = C \cdot u = \bar{v} = 0$ ,

AS: sistema di equilibrio  $\rightarrow s = E \cdot r + f = 0$ ,

Quindi  $\begin{cases} L = l - r \\ I = v - r \end{cases}$   $\rightarrow I - L = v - r - l + r \stackrel{l=3n}{=} 3n$

grado di labilità, o di indet. stat.

$L = l - r[C]$  Con corrisp. ( $U \leftrightarrow S, f; V \leftrightarrow R$ ):  $E = C^T, C = E \rightarrow r[C] = r[E] = r$  indet.

grado di ipostaticità, o di indet. stat.

- i gradi di labilità  $L$  aggiungono a  $v-3n$  dei gradi di indet. stat.

- così come  $v < 3n$  è CS di indet. cinem. (labilità) (Indem per IsUL)

$v > 3n$  è CS di indet. stat. (ipostaticità)

- se  $v = 3n$ ,  $I = L \geq 0$ :  $= 0$  sistema isodeterminato (isostatico)

$> 0$  sistema indeterminato

4)  $L > 0, I > 0$  (sistema indet.,  $C, E$  defici. di rango, cin. e stat.)

$r < l = 3n, r < v \Rightarrow v \geq l = 3n$

$C, E$  contutte forme precedenti possibili

Strutture labili e staticamente indet.

### Casiistica

1)  $L=0, I=0$  (sistema determ., staticam. e cinem.)

$r = 3n = v$  (so determin.)

$\begin{cases} C \\ E \end{cases}$  quadrate rango pieno

Strutture isostatiche

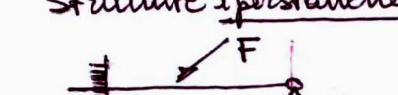


2)  $L=0, I>0$  (sistema cinem. det. =  $v-3n$  e staticam. indet.)

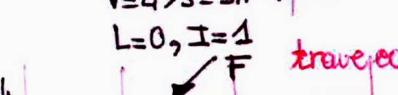
$r = 3n < v$  ( $I = v - 3n$ )

$\begin{cases} C \\ E \end{cases}$  rett. alta bassa rango pieno

Strutture ipostatiche



trave continua



erini@unibg.it

3)  $L>0, I=0$  (sistema cinem. indet. e staticam. det.)

$r = v < l = 3n \rightarrow$  CS di labilità

$\begin{cases} C \\ E \end{cases}$  rett. bassa alta rango pieno

Strutture ipostatiche (se equilibrabili)

ipostat.  $F$  non equilibrabile (produce lavoro per le potenze spostata consegu. a  $L>0$ )

$V = 2 < 3 = 3n$   
 $L = 1, I = 0$

$F$  non equil.

$V = 5 < 6 = 3n$   
 $L = 1, I = 0$

$L = I = 3$

4)  $L>0, I>0$  (sistema indet.,  $C, E$  defici. di rango, cin. e stat.)

$r < l = 3n, r < v \Rightarrow v \geq l = 3n$

$C, E$  contutte forme precedenti possibili

Strutture labili e staticamente indet.

$F$  non equil.

$V = 3 = 3 = 3n$   
 $L = 1, I = 1$

$F$  non equil.

$V = 5 > 6 = 3n$   
 $L = 2, I = 1$  (ipostat. assiale)

$L = I = 3$

$V = 3 = 3 = 3n$

2