

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problemi euleriani di stabilità (Teorie del 2°ordine - Sistemi discreti MDOF)

n gall

- Hyp. • Esistono soluzioni di equilibrio dipendenti linearmente dai carichi:

$$\bar{P} = p \bar{P}_0 \quad \text{vettore dei carichi base}$$

... moltiplicatore dei carichi (adimensionale, ≥ 0)

- Linearità pre-critica:

$\dot{q}_L = p \dot{q}_L^0$... conf. ne equilibrio corrispondente ai carichi base (q : coordinate lagrangiane)

- Si assume una forma lineare in p per le variazioni 2^a dell'EPT:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \delta q_L^T K \delta q_L = \underbrace{\omega(\delta q_L)}_{\omega = \frac{1}{2} \delta q_L^T K \delta q_L} - p \underbrace{w(\delta q_L)}_{\text{energia potenz. elastica} > 0}$$

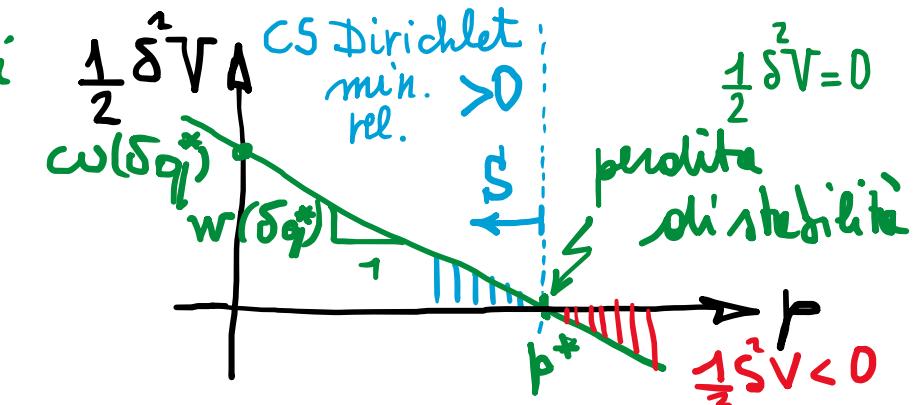
$w = \frac{1}{2} \delta q_L^T K_G \delta q_L$ \leftrightarrow lavoro del 2^o ordine dei carichi esterni conservativi $> 0 \nabla \delta q \neq 0$
 matrice di rigidezza geometrica

Matrice di rigidezza
 rigidezza elastica

$$K = K_E - p K_G \quad (\text{cost. in } q_L, \text{lin. in } p)$$

coerentemente figlie gli due contributi, con p che, per livelli crescenti, porta a "negativizzare" K

p_i^* : moltiplicatori critici
 δq_i^* : deformate critiche



- Condizione di perdita di stabilità \Rightarrow valori critici:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \omega(\delta q_L^*) - p^* w(\delta q_l^*) = 0 \Rightarrow p_i^*(\delta q_l^*) = \frac{\omega(\delta q_l^*)}{w(\delta q_l^*)} = \frac{\frac{1}{2} \delta q_l^{*T} K_E \delta q_l^*}{\frac{1}{2} \delta q_l^{*T} K_G \delta q_l^*} = R(\delta q_l^*)$$

- Il minimo valore dei moltiplicatori critici si dice moltip. critico eulero:

$$p_{cr}^E = \min \{ p_i^* \} \Rightarrow P_{cr}^E = p_{cr}^E P_0$$

(prime condiz. di perdita di stabilità al crescere di p).

- Per $p = p_{cr}^E$, K diviene semidef. pos. (l'ude per la prima volta le sue def. pos.)

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \omega(\delta q_l) - p_{cr}^E w(\delta q_l) = \frac{1}{2} \delta q_l^T (K_E - p_{cr}^E K_G) \delta q_l \geq 0 \quad \forall \delta q_l \neq 0$$

- Det. dei mott. critici (p_i^*):

- Studio propr. algebriche di $K = K_E - p K_G$

+ min. princ.

+ singolarità, det $|K| = 0 \Rightarrow p_i^*$

- Studio pb. egli autovalori associati a $|K_E|, |K_G|$ generalizzato

$$K \delta q = (K_E - p K_G) \delta q = 0 \Rightarrow K_E \delta q = p K_G \delta q \Rightarrow$$

$$p_{cr}^E \leq \frac{\omega(\delta q_l)}{w(\delta q_l)} = R(\delta q_l)$$

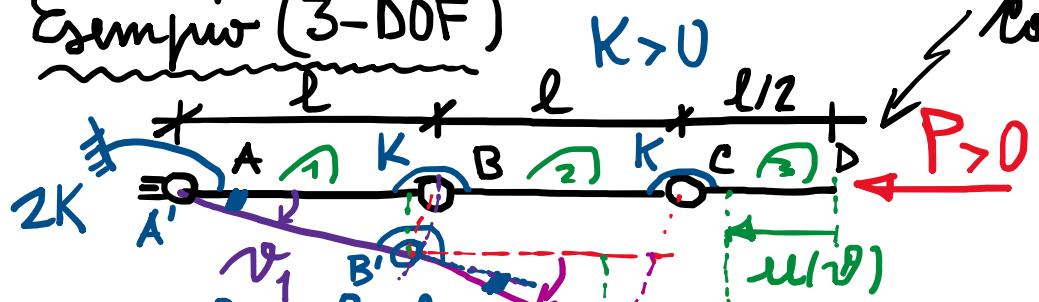
\hat{p}_i^* $\xrightarrow{\text{vedi analoga con Dinamica}}$ δq_l^*

- Rapporto di Rayleigh fornisce stime per eccesso del moltip. cr.

- R è stazionario nelle conf. n.equilibrata

$\left\{ \begin{array}{l} p_i^* \text{ autov. e minimo per } p_{cr}^E \text{ (dim)} \\ \delta q_l^* \text{ autovett. (deform. critica)} \end{array} \right.$

Esempio (3-DOF) Conf. ne di riferimento $\vartheta_i = 0$ ($\bar{\vartheta}_0 = 0$ s.l.equit.)



$$\boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \vartheta \quad \begin{aligned} \vartheta_{1\text{rel}} &= \vartheta_2 - \vartheta_1 \\ \vartheta_{3\text{rel}} &= \vartheta_3 - \vartheta_2 \end{aligned} \quad \mu(\vartheta_i) = \frac{5}{2}l - l\cos\vartheta_1 - l\omega_s\vartheta_2 - \frac{l}{2}\cos\vartheta_3 \quad P = pP_0$$

Conf. ne variate
(discosta dalle conf. ne di rif.)

Approssim. energetico

$$\text{EPT: } \tilde{V}(q_i) = \frac{1}{2}K \left[2\dot{\vartheta}_1^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1)^2 + (\dot{\vartheta}_3 - \dot{\vartheta}_2)^2 \right] - P\mu$$

energie potenziale elastica

$$\tilde{V}_f = EP$$

cerchi esterni conservat.

-Lef

$$p = \frac{Pl}{K} = \frac{P}{K/l} \Rightarrow P = p \frac{K}{l} = p P_0$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}(q_i) = K \left[\frac{1}{2} (3\dot{\vartheta}_1^2 + 2\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\vartheta}_3^2 - 2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - 2\dot{\vartheta}_2\dot{\vartheta}_3) - p \left(\frac{5}{2} - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_3 \right) \right]$$

- equat. di equil. (de stat.) $\frac{\partial}{\partial \vartheta_i} = \ddot{\vartheta}_i$ deriv. parziali

$$\cos\vartheta_i = \left(1 - \frac{\dot{\vartheta}_i^2}{\omega^2}\right) \Rightarrow \tilde{V}_2(q)$$

$$\tilde{V}_2(q) = \frac{\omega}{K} - p \frac{1}{2} (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}_3^2) \quad \tilde{V}_{2,3,\vartheta_i}$$

$$\tilde{V}_{2,\vartheta_1} = 3\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 \quad 0 - p \sin\vartheta_1 = 0$$

$$(3-p)\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 \quad 0 = 0$$

$$\tilde{V}_{2,\vartheta_2} = -\dot{\vartheta}_1 + 2\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3 \quad -p \sin\vartheta_2 = 0 \quad -\dot{\vartheta}_1 + (2-p)\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3 = 0$$

$$K = K_E - p K_G$$

$$\tilde{V}_{2,\vartheta_3} = -\dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_3 - p \frac{1}{2} \sin\vartheta_3 = 0 \quad -\dot{\vartheta}_2 + (1-\frac{p}{2})\dot{\vartheta}_3 = 0$$

$$\text{già si delineano } K_E \text{ e } K_G$$

Derivate prime \Rightarrow vett. gradiente. eq. di equil. non lineari $\sin\vartheta_i \approx \dot{\vartheta}_i$

eq. di equil. linearizz., de stat. di \tilde{V}_2

- Derivate seconde (matrice hessiana):

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_{2, v_i v_j} \\ = \tilde{V}_{2, v_j v_i} \\ [\text{Th. Schwarz}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - p \cos \vartheta_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - p \cos \vartheta_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{p}{2} \cos \vartheta_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{|v_i| \ll 1} \begin{bmatrix} 3 - p & -1 & 0 \\ -1 & 2 - p & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{p}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}$$

$$\tilde{K}_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{K}_G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrice di rigidità elast.

matrice di rigid. geom.

$$\Rightarrow \tilde{K} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

matrice di rigidità di V_2
(cost. in ϑ_i , lineare in p)

- Carichi critici (de singolarità di \tilde{K}):

$$\det(\tilde{K}) = 0 \xrightarrow{*} p_i^*$$

$$p^3 - 7p^2 + 13p - 4 = 0 \xrightarrow{*} (p-4)(p^2 - 3p + 1) = 0$$

eq. ne caratteristiche
(3° grado \rightarrow 3 radici)

$p=4$ è soluz.

$$16 \cdot 1/4 - 28 \cdot 1/4 + 13 \cdot 1/4 - 1 \cdot 1/4 = 0$$

radici:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1,2}^* = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ p_3^* = 4 \end{array} \right.$$

moltiplicatori critici

$$P_{cr}^E = .3820 \frac{K}{l}$$

$\tilde{V}_{2, v_i v_j}$

$$\begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}$$

Concetti fondamentali :

- Problemi euleriani di stabilità per sistemi a più gradi (MDOF):
 - Analisi al 2° ordine \Rightarrow EPT $V(q) \approx V_z(q)$ (quadratica)
Utile ad indagare il segno della variazione seconda $\frac{1}{2} \delta^2 V$:
(ove $\frac{1}{2} \delta^2 V > 0$, conf. equil. con $\delta V = 0$ è min. rel. \Rightarrow stabile)
 - (ove $\frac{1}{2} \delta^2 V = 0$, " " no min. rel. \Rightarrow cessa di essere stabile)
 \hookrightarrow condizioni "critiche"
(no CS Dirichlet)
- Corichi variabili proporzionalmente tramite comune moltiplicatore dei carichi p , ad amplificare i carichi base.
- Si considera una dipendenza lineare della variazione seconda $\frac{1}{2} \delta^2 V$ col moltiplicatore dei carichi p : la condizione di annullamento di $\frac{1}{2} \delta^2 V$ conduce ad un'equazione lineare in $p \Rightarrow$ carichi critici -

- "Modi di instabilità": p_i^* carichi critici \Rightarrow di cui il min. è p_{cr}^E
 δq_i^* deformate critiche

configurazioni critiche in corrispondenza delle quali il sistema cessa di essere stabile (e le prime che si incontrano, al crescere di p , è quello corrispondente al carico critico euleriano del sistema).

- Perdita di stabilità $\frac{1}{2} \dot{\delta}^T V = 0 \Rightarrow K \delta q = 0$

matrice di rigidezza

$$K = (K_E - p K_G)$$

L geometrica
elastica

condiz. di singolarità

DINAMICA

$$K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i$$

\leftrightarrow
analogia

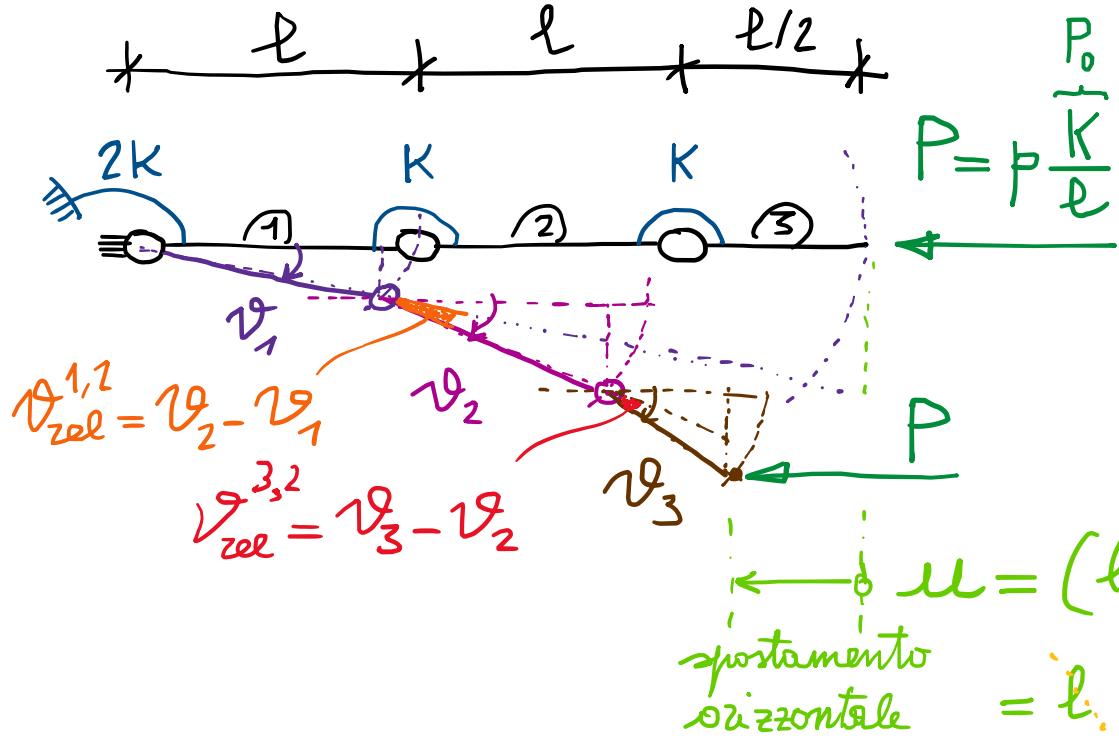
modi principali
di vibrare

$$(K_E - p K_G) \delta q_i^* = \omega_i^2 K_G \delta q_i^* \Rightarrow \omega_i^2 \text{ autovolti}$$

problema agli autovolti
generalizzato associato alle
matrici K_E e K_G

δq_i^* autovettori

Esempio MDOF (3-DOF):



coordinate lagrangiane

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{bmatrix}; \bar{q}_0 = 0$$

rotazioni assolute

$$U = \frac{1}{2} K \left(2 \dot{\vartheta}_1^2 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + (\vartheta_3 - \vartheta_2)^2 \right) - P u$$

E.P.T.: $\tilde{T} = \frac{\nabla(\vartheta)}{K} = \frac{1}{2} K \left(2 \dot{\vartheta}_1^2 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + (\vartheta_3 - \vartheta_2)^2 \right) - P u$

$- L_{ef}$

SOMMARIO (Lec. 19)

- Pb. euleriani di stabilità secondo teoria del 2° ordine, sistemi discreti MDOF.
- Condizione di perdita di stabilità ($\frac{1}{2} \delta^2 \nabla = 0$) \Rightarrow carichi critici.
- Matrice di rigidezza elastica e geometrica: $K = K_E - p K_G$ (lin. int. p, cost. in q).
- Rapporto di Rayleigh e pb. agli autovariori generalizzati \leftrightarrow analogie con Dinamica.
- Esempio 3-DOF:
 - Scrittura dell'EPT (per spost. "geometricamente grandi").
 - Volutazione derivate prime e seconde.
 - Scrittura dell'EPT al 1° ord. ("... " " " " " piccoli") $\sim q_i^2$.
 - Conseguenti volutat. derivate prime ($\sim q_i^1$ lin.) e seconde ($\sim q_i^0 = 1$ cost.).
 - Calcolo dei carichi critici che condit. di singolarità di K (det K=0).

Next step: Deformate critiche; approssimazione statico (equil. nelle conf. ne deformate).
Sistemi continui (resta di Euler).