

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

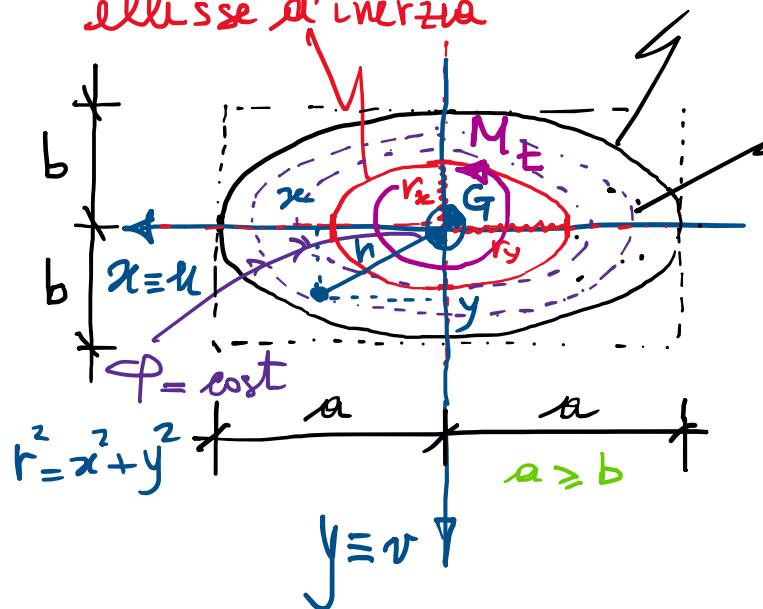
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

Soluzioni analitiche del pb. della torsione $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ $\Rightarrow \Phi_\eta = 0; \eta = 1, J = J_G$

- Sezione ellittica
ellisse d'inerzia



$$\Gamma: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$A = \int_A dA = \pi ab$$

$$J_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi}{4} a b^3 = \pi a b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = A r_x^2 \Rightarrow r_x = \frac{b}{2}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{4} a^3 b = \pi a b \left(\frac{a}{2}\right)^2 = A r_y^2 \Rightarrow r_y = \frac{a}{2}$$

$$J_G = \int_A r^2 dA = J_x + J_y = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) = A r_G^2 \Rightarrow r_G = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

- Funzione potenziale di sforzo di Airy: $(\beta = \frac{M_t}{GJ} \Rightarrow c = 2G\beta = 2 \frac{M_t}{J})$

$$\Phi = \Phi(x, y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = K \left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) = -2K \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -c$$

- $\Phi = 0$ su Γ c.c. ✓ (Dirichlet)

- $\Phi = \text{cost} \Rightarrow$ traiettorie ellittiche

- $\Phi \sim x^2, y^2 \Rightarrow$ derivate seconde costanti

Sez. circolare (caso particolare): $a = b = R$

$$A = \pi R^2$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$J_G = 2J_x = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$r_x = r_y = \frac{R}{2}; r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$r_G = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

eq. di Poisson con termine noto cost.

$$K = \frac{c}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$G\beta = \frac{M_t}{J}$$

• Equivalenze statiche:

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_A K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dA = 2K \left(A - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x\right) = 2KA \left(1 - \frac{r_y^2}{a^2} - \frac{r_x^2}{b^2}\right)$$

$$= 2KA \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \cancel{2KA} \frac{1}{\cancel{z}} \Rightarrow K = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{\pi ab} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow J = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

• Momento d'inerzia torsionale (DSV):

$$J = \frac{\pi}{4} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{\pi a b}{\pi^3 a b} = \frac{A^4}{4\pi^2 J_G} = J$$

$$J = \frac{J_G}{\gamma} \quad \begin{matrix} \pi^2 \approx 10 \\ 4\pi^2 \approx 40 \end{matrix}$$

$$J_G = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2); A = \pi a b$$

$$\begin{matrix} a=b=R, J = \pi \frac{R^6}{2R^2} = \frac{\pi R^4}{2} \\ \downarrow \\ = J_G (\gamma=1) \end{matrix}$$

formule utili a stimare il momento d'inerzia
di sezioni complesse quali sez. ellittiche
equivalenti di fuori A e J_G.

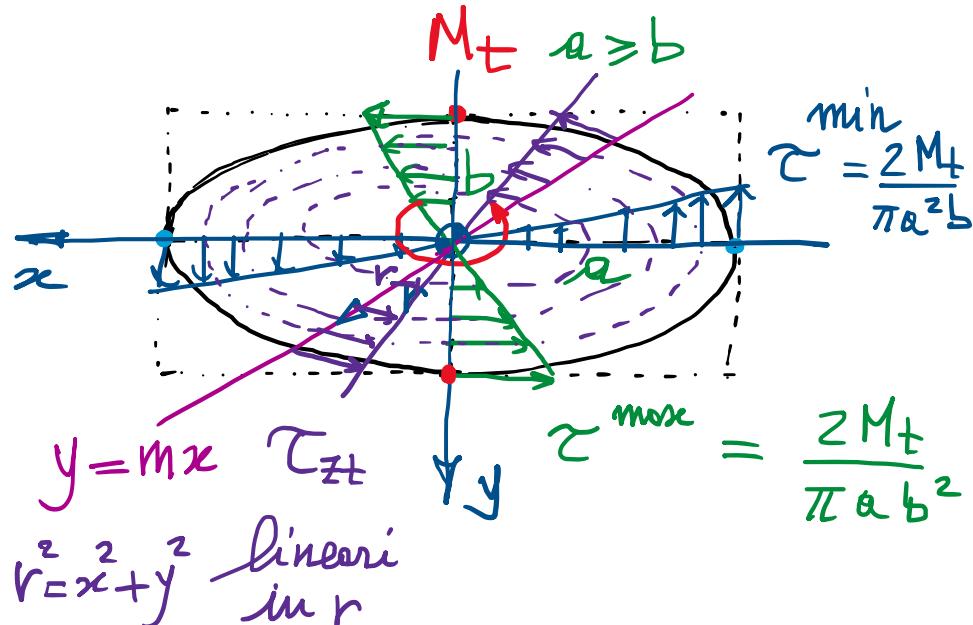
• Fattore di torsione

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{J_G}{J} = \frac{a^2 + b^2}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab + 2ab)^2}{4a^2 b^2} \quad \gamma = \frac{J_G}{J} \approx \frac{J_G}{\frac{A^4}{40 J_G}} = 40 \frac{J_G^2}{A^4} = 40 \left(\frac{J_G}{A^2}\right)^2 \\ &= \frac{[2ab + (a-b)^2]^2}{(2ab)^2} = \left[1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}\right]^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \text{sez. cir.: } \gamma = 1 \quad (J = J_G) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

• Campo delle tensioni tangenziali:

$$\varphi = \frac{M_t}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \Rightarrow$$

f. n. di AIRY



Tangenti alle traiettorie ellittiche e parallele
di distanze radiali r
(con modulo crescente
linearmente con r)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{zx} = \varphi, y = - \frac{2 M_t}{\pi a b^3} y = - \frac{2 M_t}{\pi a b} \frac{y}{b^2} \\ T_{zy} = -\varphi_x = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b} x = \frac{2 M_t}{\pi a b} \frac{x}{a^2} \end{array} \right.$$

$\frac{T_{zy}}{T_{zx}} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$ linear in x, y

$= - \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{m} = \text{const, lungo diametro } y = m x$

$$\tau_z = \|T_z\| = \sqrt{T_{zz}^2 + T_{zy}^2} = \frac{2 M_t}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

su $y = mx$ $= \frac{2 M_t}{\pi a b} x \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{m^2}{b^2}}$ lineare in x in y

$r^2 = x^2 + y^2 = (1+m^2)x^2$

$r = \sqrt{1+m^2} x$

Sez. circolare $a=b=R$ in r

$T_{zt} = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r, \quad \tau_{zt}^{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}$

$= \frac{M_t}{J_g} r$

- Funzione di ingolosimento (ψ_G):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{q,x} = \frac{1}{4\beta} \varphi_{s,y} + y = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y \\ \Psi_{q,y} = - \frac{1}{4\beta} \varphi_{s,x} - x = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x \end{array} \right.$$

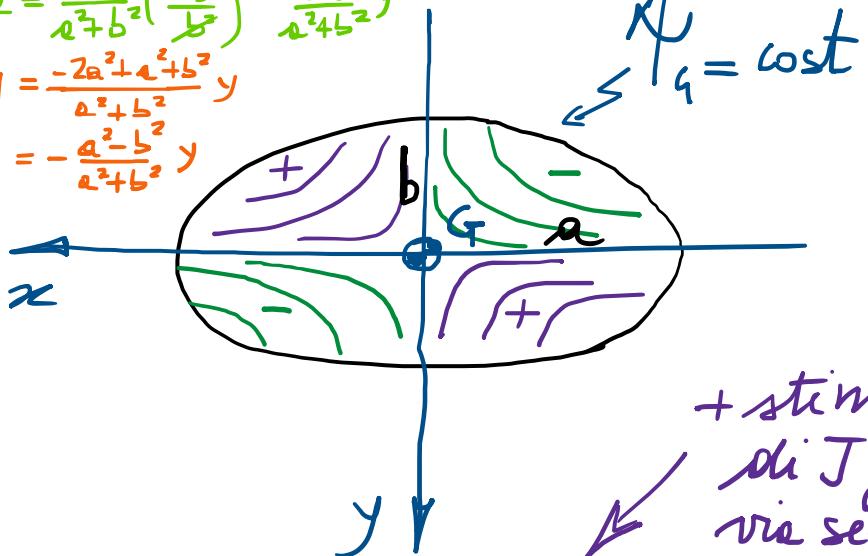
$$\frac{P}{Q\beta} = \frac{ab}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

es.

$$\frac{P_{xy}}{Q\beta} = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \left(\frac{-2y}{b^2} \right) = \frac{-2a^2}{a^2+b^2} y$$

$$+ y = \frac{-2a^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2} y$$

$$= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y$$



Quindi: sez. ellittica costituisce caso rilevante con soluzione analitica uniforme chiusa esatta (contenente il zero delle sez. circolare come per

differenziabile delle f. ne $\psi_a(x, y)$

$$\begin{aligned} d\psi_1 &= \psi_{x,y} dx + \psi_{y,y} dy \\ &= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (y dx + x dy) \end{aligned}$$

integrandolo:

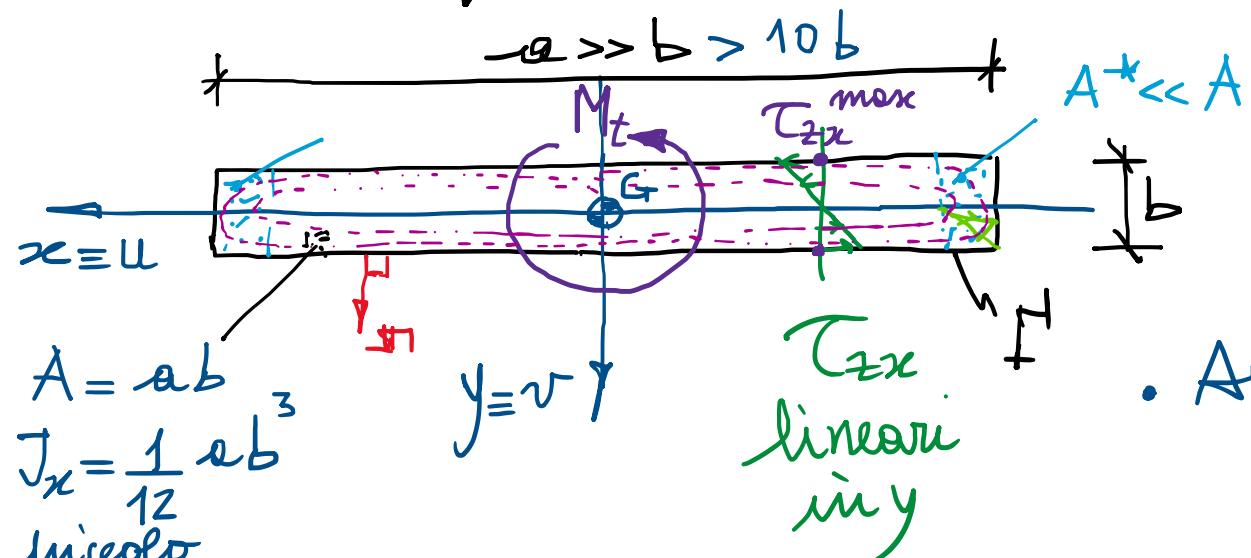
$$\nabla_u(x, y) = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \cancel{\text{rest}} \quad \boxed{\nabla_u = 0}$$

N.B. Sez. circolare ($a=b=R$)

$\Psi_q \equiv 0$, non c'è ingolosimento.

$$\eta = 1, \quad J = \frac{\pi R^4}{2}$$

• Profilo rettangolare sottile (soluzione analitica approssimata)



Eq. governanti (torsione):

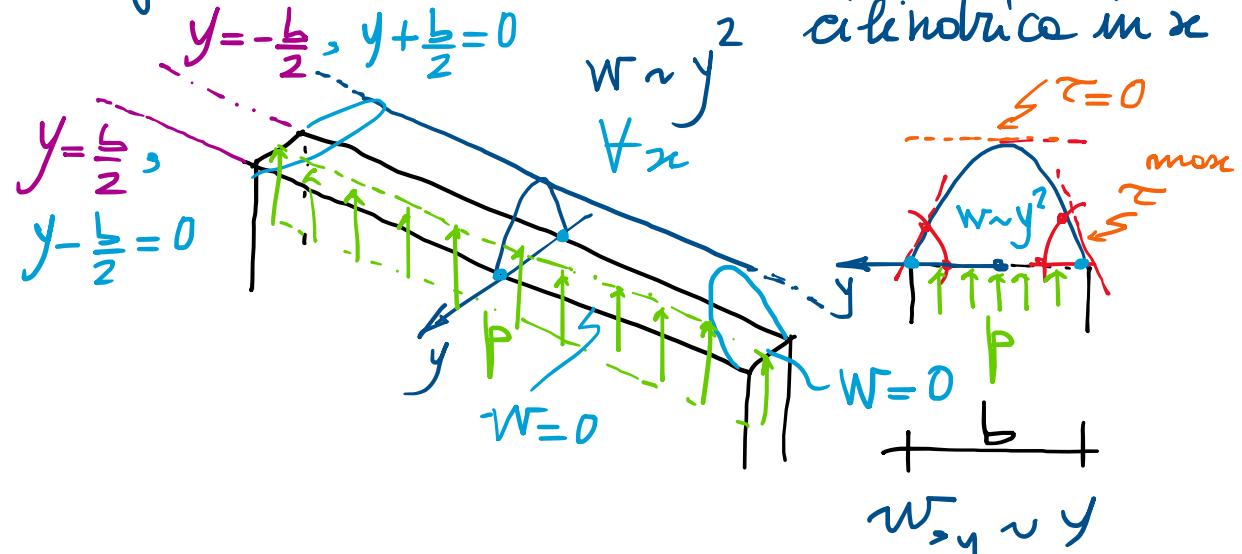
equil. $\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$ in A ✓

congrz. $\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c$ in A ✓

c.c. $\tau_{zx} h_x + \tau_{zy} h_y = 0$ su M ✓

- Analogie idrodinamica: $(\frac{b}{a} \rightarrow 0; \frac{a}{b} \rightarrow \infty)$
 $\tau_{zx} = -cy$; $\tau_{zy} = 0$ in $A - A^*$
 lineari sullo spessore

Analogie delle membrane: sostanzialmente cilindrica in x



- Campo delle tensioni tangenziali valvole in quasi tutto il profilo rettangolare sottile, salvo nelle zone in corrispondenza delle estremità, di piccola estensione A^* (con τ_z stesse dello stesso ordine di grandezza) \Rightarrow soluzione appross.

- Funzione di sforzo: *eq. m rette lati lunghi*

$$\text{f. di Airy } \varphi = \varphi(y) = K \left(\frac{b}{2} + y \right) \left(\frac{b}{2} - y \right) = K \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ su } \Gamma - \Gamma^*$$

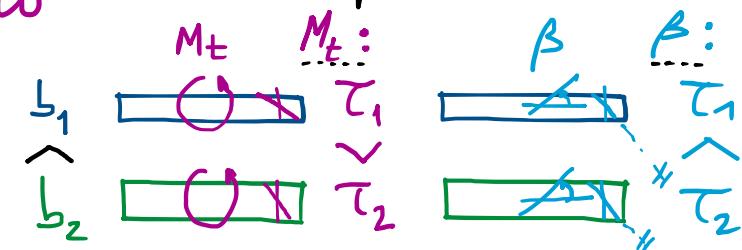
$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{yy} = -2K = -c \Rightarrow K = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J} \Rightarrow J = \frac{M_t}{K}; M_t = KJ$$

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2K \int_A \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) dA = 2K \left(\frac{b^2}{4} A - J_x \right) = 2K \left(\frac{3}{3} \frac{ab^3}{4} - \frac{ab^3}{12} \right) = \cancel{2K} \frac{ab^3}{\cancel{6}3}$$

$$= K \frac{1}{3} ab^3 = KJ \quad | \quad J = \frac{1}{3} ab^3 = 4 J_x \quad \sim b^3 \text{ piccolo}$$

momento d'inerzia torsionale
di sezione rettangolare sottile

cf. a parità di:



- Campo delle τ_z :

$$\varphi = \frac{3M_t}{ab^3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{xy} = -\frac{6M_t}{ab^3} y = -2M_t \frac{y}{J} \\ \tau_{zy} = -\varphi_{xz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \tau_{zx} = \left| -\frac{6M_t}{ab^3} \left(\pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{3M_t}{ab^2} = \frac{M_t}{J} b = G\beta b$$

- Equivalenze statica delle τ_{zx} :

$$\int_A -\tau_{zx} y \, dA = \int_A 2 \frac{M_t}{J} y^2 \, dA = \frac{2 M_t}{J} \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{4 J_x} = \frac{M_t}{2}$$

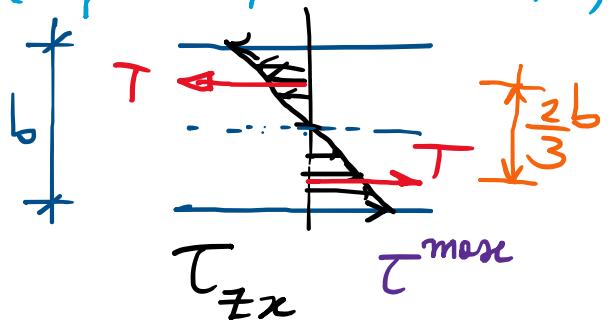
$A^* \ll A$

τ_{zx}

$\sim a$

$\tau_{zx} \rightarrow \frac{M_t}{2}$ (v. L. Corradi)

Derivezione "diretta" di τ_{max}
(sappone l'equiv. di τ_{zx} a $M_t/2$)



$$T = \frac{1}{2} \frac{b}{2} \tau^{max} a = \frac{ab}{4} \tau^{max}$$

$$\frac{M_t}{2} = T \cdot \frac{2}{3} b = \frac{ab}{4} \tau^{max} \frac{2}{3} b \Rightarrow \tau^{max} = \frac{3 M_t}{ab^2}$$

↑ Att.: equivalenza a metà M_t

- Funzione di miglioramento:

$$\begin{cases} \nabla_{G_3} x = \frac{1}{4\beta} \nabla_{G_3} y + y = \frac{1}{4\beta} (-2\beta y) + y = -y \\ \nabla_{G_3} y = -\frac{1}{4\beta} \nabla_{G_3} x - x \end{cases} \Rightarrow d\Psi_g = -y \, dx - x \, dy = -d(xy)$$

Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti alle metà del momento torcente. L'altra metà di M_t sarà legata alle z^* nelle zone A^* (stesso ordine di grandezza ma bracci più brevi in direz. x lunghi dell'ordine di a).

$$\tau^{max} = \frac{3 M_t}{ab^2}$$

(esse x)
 $y=0 \rightarrow \Psi_g = 0$
no importa.
lungo l'asse x
etrasferibile sullo spessore ($y^{max} = \frac{b}{2}$)
 $= \lim_{b/a \rightarrow 0} \Psi_g^{\text{ell}}$ $\Psi_g = 0$