

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

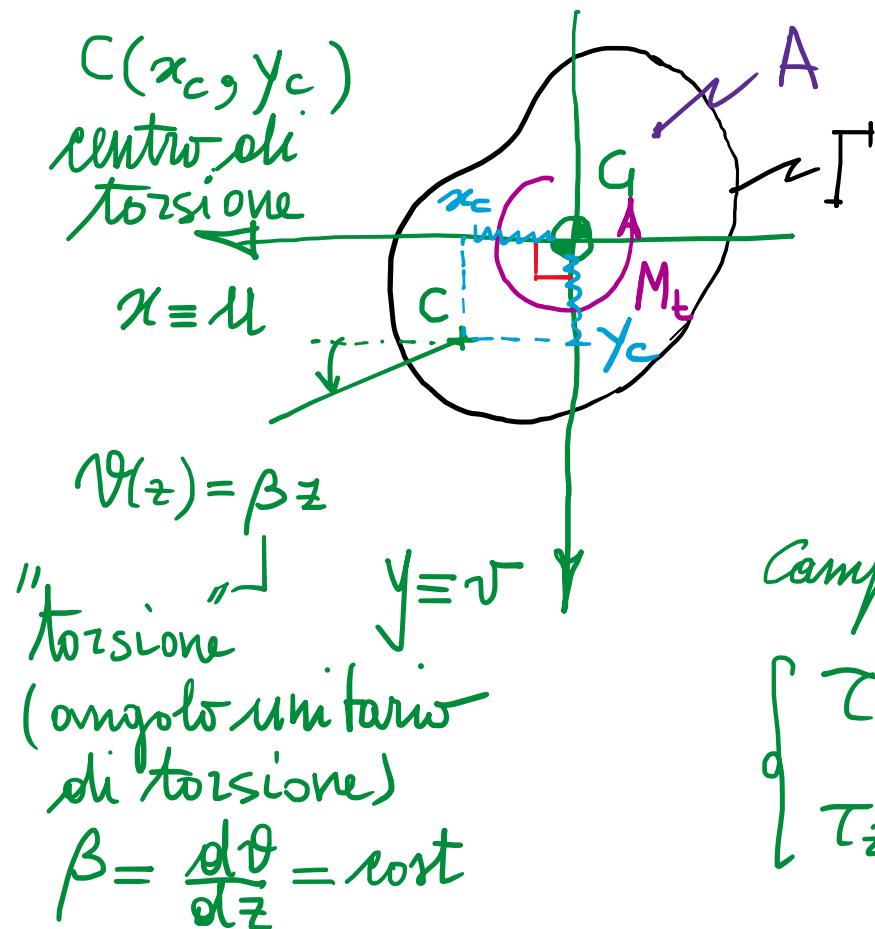
[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 19

## Centro di torsione

Nell'approccio agli spostamenti si presume un campo di spostamenti ricomprensente:

- una rotazione rigida nel piano della sezione (rispetto a punto C, detto centro di torsione, in generale discosto dal barycentro G);
- un ingobbamento fuori piano della sezione, riferibile a tale punto:



Campo di spostamenti ( $x_c \neq 0, y_c \neq 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_x = -\beta z (y - y_c) \\ \delta_y = \beta z (x - x_c) \end{array} \right\} \text{rotazione rigida rispetto a C}$$

$$\delta_z = \beta \Psi_c(x, y) \text{ funzione di ingobbamento}$$

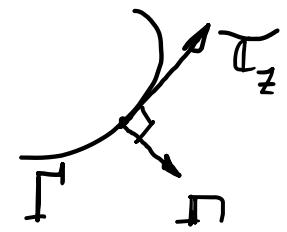
Campo delle tens. tangenziali: riferito a C

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{zx} = G \beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ T_{zy} = G \beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{array} \right. \begin{array}{l} 2G\beta = c \\ -\text{Eq. di congr. v fuori piano} \\ -\text{Eq. di equil.} \Rightarrow \nabla^2 \Psi_c = 0 \text{ in A} \\ \text{Eq. di Laplace} \end{array}$$

Condizione al contorno:

$$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$= \cancel{q\beta} \left[ (\psi_{c,z} - y + y_c) n_x + (\psi_{c,y} + x - x_c) n_y \right] = 0$$



$$\underbrace{\psi_{c,x} n_x + \psi_{c,y} n_y}_{\text{derivate direzionali } \psi_{c,n}} + y_c \frac{\partial n_x}{\partial n} - x_c \frac{\partial n_y}{\partial n} = n_x y - n_y x = \star \cdot t$$

stesso termine noto visto per  $\psi_G$   
nelle direz. n

$$(\psi_c + y_c x - x_c y)_{|n} = n_x y - n_y x \quad \text{c.c. di Neumann-Dini}$$

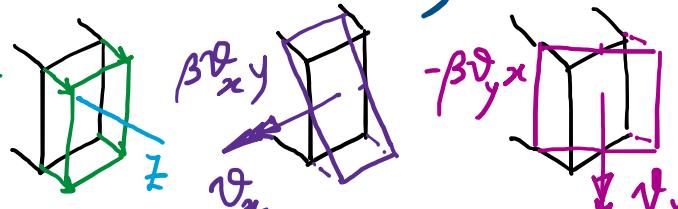
$\psi^*$  differisce da  $\psi_c$  per  
un campo lineare in  $x$  e  $y$   $\Rightarrow \nabla^2 \psi^* = 0$  in A ( $\nabla^2 \psi_c = 0$ )

$\psi^*$  e  $\psi_G$  devono risolvere lo stesso pb. di N-D per l'equazione di Laplace:

$$\Rightarrow \psi^* = \psi_G + K \quad (\text{differiscono al più per una costante})$$

Pertanto:  $\psi_c(x, y) = \psi_G(x, y) + K - y_c x + x_c y$

valo medio  $\bar{\psi}_c = \bar{\psi}_G + K \rightarrow 0$



completo di moto rigido fuori piano della sezione

- Si definisce centro di torsione il punto C rispetto al quale avvengono le rotazioni rigide nel piano delle sezione e risultano nulle le seguenti rotazioni medie fuori piano delle sezione rispetto agli assi x e y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\sigma_z}{y} y^2 dA = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\sigma_z}{y} dJ_x = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c y dA = 0 \\ \bar{\nu}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\sigma_z}{x} x^2 dA = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\sigma_z}{x} dJ_y = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c x dA = 0 \end{array} \right.$$

PLV:  $\downarrow$  flessione  $\downarrow$  torsione  $\frac{\sigma_{zz}}{\psi_{zz}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{M_x} \quad \bar{\nu}_x = \int_A \frac{\cancel{M_x}}{J_x} y dA \quad \sigma_z \\ \cancel{M_y} \quad \bar{\nu}_y = \int_A -\frac{\cancel{M_y}}{J_x} x dA \quad \sigma_z \end{array} \right.$$

ingombramento  
medio nullo  
fuori piano

Quindi

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0$$

$$\bar{\psi}_g = \frac{1}{A} \int_A \psi_g dA = 0$$

coordinate del centro di torsione

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_g(x, y) y dA; \quad y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_g(x, y) x dA$$

N.B. Se Esse olisimm. rette, C è sulla asse

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \psi_g y dA + \cancel{\int_A K y dA} - \int_A y_c x dA + \int_A x_c y^2 dA = 0 \\ \int_A \psi_g x dA + \cancel{\int_A K x dA} - \int_A y_c x^2 dA + \int_A x_c y x dA = 0 \end{array} \right.$$

- Torsione: Approssimazione agli sforzi (faghiamo a priori l'equilibrio, imponiamo la congruenza)

H<sub>p</sub>:  $\exists$  f.n.  $\Phi = \Phi(x, y)$  funzione potenziale di sforzo o di Airy (definita a meno di cost.)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \Phi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = -\Phi_{,x} \end{cases}$$

[sotto la necessaria "regolarità"  
 $\Rightarrow$  fina delle derivate]

Th. di Schwarz

- Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,y} + \tau_{zy,x} = 0 \text{ in } A \Rightarrow (\Phi_{,y})_{,x} + (-\Phi_{,x})_{,y} = \Phi_{,yyx} - \Phi_{,xxy} = 0 \quad \checkmark$$

- Eq. di congruenza:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \text{ in } A \Rightarrow (\Phi_{,y})_{,y} - (-\Phi_{,x})_{,x} = \underbrace{\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy}}_{\nabla^2 \Phi(x, y)} = -c$$

- Condizione al contorno (equil.):

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma \Rightarrow \Phi_{,y} \overset{n_x}{\underset{n_y}{\sim}} -t_x - t_x \sim \Phi_{,x} \overset{n_y}{\underset{n_x}{\sim}} \Phi_{,y} + t_y$$

$\therefore \Gamma$   $\Phi = \text{cost} = 0$  su  $\Gamma$  c.e. di Dirichlet

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = -c \text{ in } A$$

Eq. di Poisson con termine noto costante

$$c \leftrightarrow M_t$$

- Si ottiene pertanto un pb. di Dirichlet per l'eq. di Poisson (con termine noto costante).

- Equivalenze statice (tra il campo delle tensioni tangenziali e il momento torcente che le ha generate) :

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A (-\varphi_s x - \varphi_s y) dA$$

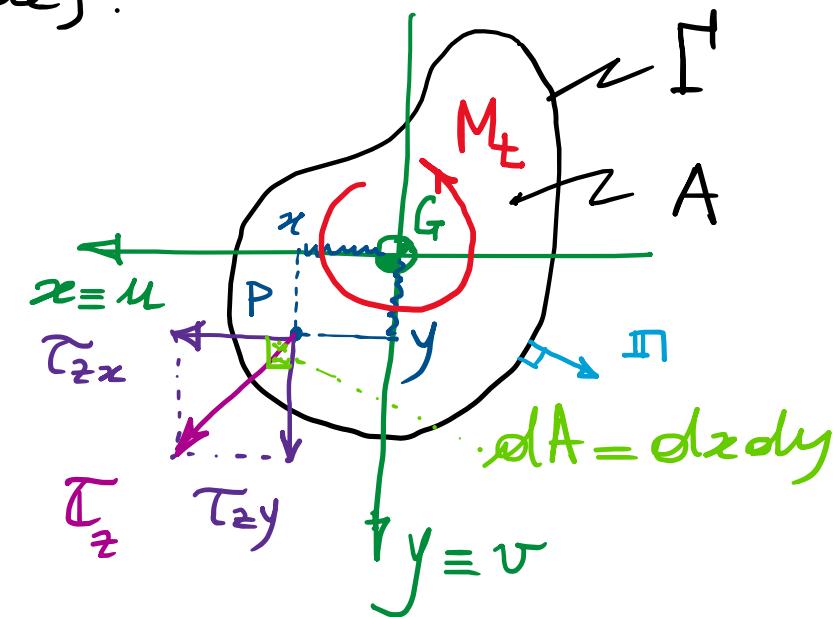
$$= - \int_A [(\varphi_x)_{sx} + (\varphi_y)_y] dA + 2 \int_A \varphi dA$$

Th. Div.  
 $\int_A dA \rightarrow \int_\Gamma d\Gamma$

~~$$= - \int_\Gamma \varphi (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \varphi dA$$~~

Quindi:

$$M_t = 2 \int_A \varphi(x, y) dA \quad M_t \leftrightarrow c$$



$$(\varphi_x)_{sx} = \varphi_s x + \varphi \underbrace{x_{sx}}_1$$

$$(\varphi_y)_{sy} = \varphi_s y + \varphi \underbrace{y_{sy}}_1$$

$$-\varphi_s x = -(\varphi_x)_{sx} + \varphi$$

$$-\varphi_s y = -(\varphi_y)_{sy} + \varphi$$

## Quadro sinottico (Torsione)

Approccio agli spostamenti

$\psi_G(x, y)$ ;  $\beta$   
f.n. di ingombramento "torsione", cost

$$\nabla^2 \psi_G = 0 \text{ in } A$$

Pl. di Neumann-Dini  
per l'eq.n. di Laplace

$$\psi_{G,n} = \underbrace{n_x y - n_y x}_{\propto \cdot \pm} \text{ su } \Gamma$$

$$\beta = \frac{M_t}{G J}; \quad J(\psi_G) = \frac{J_G}{\eta \geq 1}$$

$$\tau_{zx} = G \beta (\psi_{G,x} - y) = -\varphi_{,y}$$

$$\tau_{zy} = G \beta (\psi_{G,y} + x) = -\varphi_{,x}$$

campo delle tensioni tangenziali

$$\psi_G \rightarrow \varphi$$

incognite

Approccio agli sforzi

$\sigma(x, y); c$   
f.n. di Airy  
costante di integrazione

equazione

$$\nabla \varphi = -c \text{ in } A$$

Pl. di Dirichlet  
per l'eq.n. di Poisson

$$\varphi = 0 \text{ su } \Gamma$$

relazioni

$$M_t = 2 \int_A c \varphi \, dA$$

corrispondenze

$$2G\beta = c$$

Inoltre:  $\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = -c$

$$G\beta(-\psi_{G,yx} - 1 + \psi_{G,xy} - 1) = -c$$

Th.  
Schwarz

$$\psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{,y} + y$$

$$\psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \varphi_{,x} - x$$

$$\varphi \rightarrow \psi_G$$

## Metodi di soluzione :

### - Analitici : ( problemi differenziali )

- Esatte ( possibile solo in casi particolari, in forme chiuse o mediante sviluppi in serie ).

- Approssimate ( comunque valide ai fini ingegneristici, in forme chiuse o per sviluppi in serie troncati ).

### - Numerici : ( problemi algebrici $\Rightarrow$ per discretizzazione )

- Metodo delle Differenze Finite ( FDM )  $\Rightarrow$  Calcolo Numerico

- Metodo degli Elementi Finiti ( FEM )  $\Rightarrow$  Computational Mechanics of Solids and Structures

es. caso delle sezioni ellittiche

es. profili sottili

( aperte e chiuse )

$\Rightarrow$  passaggio da numero  $\infty$  di gall a numero finito, cioè discreto, di gall