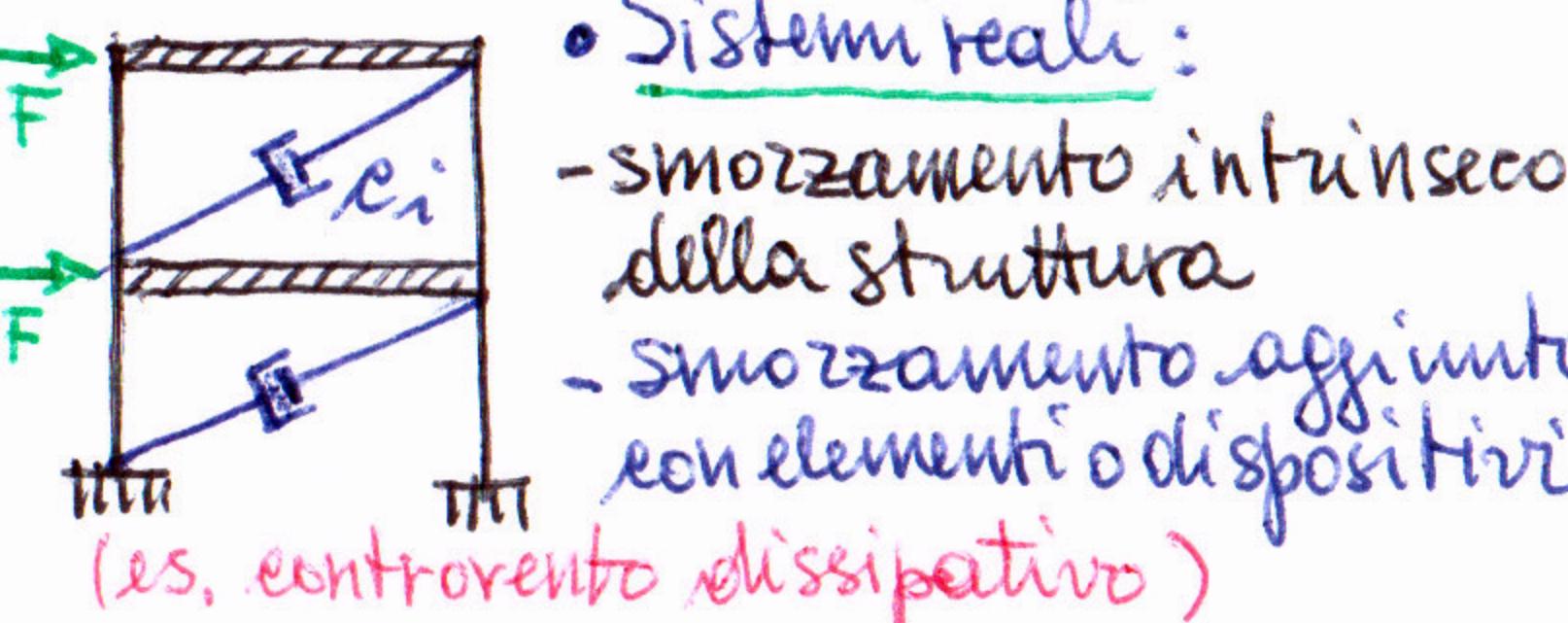


16a Lez. FDIS - Sistemi smorzati angolari

erizzi@unibg.it



Sistemi reali:

- smorzamento intrinseco della struttura
- smorzamento aggiunto con elementi o dispositivi (es. controvento dissipativo)

Smorzatore i-esimo

$$\begin{aligned} z_i \ddot{z}_i &\rightarrow F_{di} = c_i z_i \ddot{z}_i \rightarrow F_d = C_2 \ddot{z}, \text{ con } C_2 = \text{diag}[c_i] \text{ e } \ddot{z} = \{z_1 \dots z_n\}^T \\ D_i &= \frac{1}{2} \dot{z}_i \ddot{z}_i \rightarrow D = \frac{1}{2} \ddot{z}^T F_d = \frac{1}{2} \ddot{z}^T C_2 \ddot{z} = \frac{1}{2} \ddot{q}^T \left(\frac{\partial \ddot{z}}{\partial q} C_2 \frac{\partial \ddot{z}}{\partial q} \right) \ddot{q} = \frac{1}{2} \ddot{q}^T C \ddot{q} \\ \text{con } z_i &= z_i(q_k) \Rightarrow \ddot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \ddot{q}_k \Leftrightarrow \ddot{z} = \frac{\partial \ddot{z}}{\partial q} q_k \ddot{q}^T \ddot{q} = \ddot{q} \end{aligned}$$

Infatti, con n_d dissipatori viscosi:

$$D = \sum_{i=1}^{n_d} D_i = \frac{1}{2} \sum_i \dot{z}_i \ddot{z}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j \ddot{q}_j^T$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i \sum_{K=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_K} \ddot{q}_K &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \ddot{q}_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \ddot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \ddot{q}_i^T C_i \ddot{q}_i \\ C_{jk} &= \sum_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \\ C &= \sum_i C_i \end{aligned}$$

$D = \frac{1}{2} \Pi_d$ - potenza dissipata dagli smorzatori viscosi

- semidefinita positiva
- simmetrica

$$q = \Phi p$$

\ddot{q} matrice degli autovettori

Equazioni del moto:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = Q(t) \quad \text{con } Q_d = -F_d = -\frac{\partial D}{\partial q} = -C \dot{q} \quad (\text{Vedi equazioni di Lagrange})$$

forze sulle masse delle strutture. L'azione sui dissipatori viscosi

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = Q(t) \quad \text{- La trasformazione in coordinate principali NON consente però, in generale, di diagonalizzare anche } C: \quad C = \Phi^T C \Phi \text{ NON diagonale}$$

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\Phi}}^T Q = P(t) \rightarrow \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = P(t)$$

Esempio:

$$\begin{aligned} z &= \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 - q_2) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial q_i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}; \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{cases} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases} \\ C &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z^T}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \begin{cases} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = C = \frac{1}{2} (q_1 - q_2) \text{ OK} \end{aligned}$$

$$\text{oppure } D = \frac{1}{2} e \ddot{z}^2 = \frac{1}{2} e \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 - q_2) \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e (q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2) = \frac{1}{2} \{q_1, q_2\} \frac{1}{2} e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \ddot{q}^T C \ddot{q}$$

AZIONI INTERNE

$\mathcal{A}(s,t) : N(s,t), T(s,t), M(s,t)$ funzioni dello spazio e del tempo (risposta dinamica)

$$\begin{aligned} \text{Forze elastiche all'istante generico } t: \quad E_1 &= K q_1(t) = Q(t) - M \ddot{q}_1(t) - C \dot{q}_1(t) \\ \text{Applicate staticamente alla struttura} & \text{generano le A.I. } N, T, M \text{ all'istante } t. \end{aligned}$$

- A.I. modali - Secondo i modi principali vibrare:

$$q_{ik} = \phi_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_k) \rightarrow \ddot{q}_{ik} = -\omega_k^2 \phi_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_k)$$

$$M \ddot{q} + K q = 0 \Rightarrow E = K q = -M \ddot{q} = \underline{\underline{E}}_I \xrightarrow[K]{\text{modo}} \underline{\underline{E}}_k = K \phi_k = \omega_k^2 M \phi_k = F_{IK}. \quad \text{Quindi } \underline{\underline{E}}_k \text{ tali da dare } \underline{\underline{A}}_k \text{ possono essere valutate come } \underline{\underline{E}}_k = F_{IK} = K \phi_k = \omega_k^2 M \phi_k$$

- Spesso interessano i valori max attesi delle A.I.: $\mathcal{A}^{\max}(s,t) \mid s$ dato oppure $\mathcal{A}^{\max}(s,t) \mid t$ (stime delle A.I. massime)

- Esempio: $K = \frac{6}{7} E J \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $M_I = m \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.4320 \\ 1 \end{bmatrix}, \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.6481 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 0.3017, \lambda_2 = 2.841 (\omega_i^2 = \lambda_i \frac{E}{m})$

A_1 E_1 E_2 E_3 E_4 E_5

$E_1 = \frac{18}{7} \frac{48}{7} \frac{18}{7} \frac{18}{7} \frac{30}{7} \frac{30}{7}$

M_1 $q_1 = 1$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_1 = \phi_{11} p_1 + \phi_{21} p_2$

$[M_1] = [F]$

$q_1 = \phi_{11} p_1 + \phi_{21} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed 2^a colonna di K

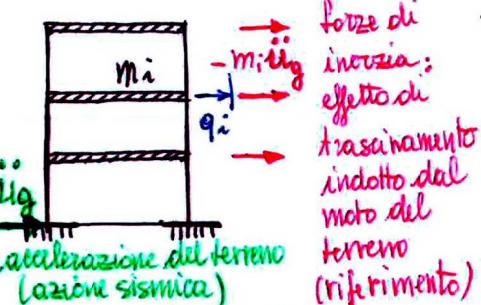
$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 2^a colonna di K

$q_2 = \phi_{12} p_1 + \phi_{22} p_2$

forze agenti date dalla 1^a ed

17a Lez. FDIS - Azione sismica su strutture ad n gdl (con riferimento ai telai "shear-type") egidio.rizzi@unibg.it

12E³

forze di
inertia:
effetto del
trascimento
indotto dal
moto del
terreno
(riferimento)

- Telai "shear-type" (tipotaglio):
 - dalle lip. poste $\Rightarrow M_i = \text{diag}[m_i]$
 - elementi assialmente rigidi, $E A_i \rightarrow \infty$
 - travi orizzontalmente rigide, $E I_i \rightarrow \infty$
 - colonne deformabili flessionalmente e prive di massa
 - masse concentrate ai piani
 - gdl dinamici q_i , spostamenti orizz.

\Rightarrow contano gli spostam. orizz. relativi tra i piani: rappresentano complessivamente una deformazione a taglio del telaio con sviluppo lungo la sua altezza.

1° modo con ω_1 più piccolo (T_1 più grande), in genere dominante

$$M_i \ddot{q} + C_i \dot{q} + K_i q = -M_i \ddot{q}_{ig} \quad (\text{Eq. m. del moto disaccoppiate nei coord. principali})$$

$$\text{diag}[M_i = \Phi_i^T M_i \Phi_i], \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \omega_i M_i], \text{diag}[K_i = \Phi_i^T K \Phi_i]$$

$$i=1, n \quad M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i = -\Phi_i^T M_i \ddot{q}_{ig} \quad (\text{fattori di partecipazione modale})$$

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\frac{\Phi_i^T M_i}{M_i} \ddot{q}_{ig} \quad (\text{a volte chiamato accelerazione generatrice})$$

$$\lambda_i = \frac{\Phi_i^T M_i}{M_i} = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (\text{fattore di partecipazione modale})$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (\text{a volte chiamato fattore di partecipazione modale})$$

$$\lambda_i = \sum_i \Phi_{ij}^2 m_j = \sum_i \Phi_{ij}^2 m_j \quad (\text{con dimensioni di massa})$$

$$\Rightarrow \text{masse partecipanti modali}$$

- Fattori di partecipazione modale all'azione sismica (amplificano \ddot{q}_{ig} come forzante):

$$\Gamma_i = \frac{\Phi_i^T M_i}{M_i} = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (\text{fattore di partecipazione modale})$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (\text{a volte chiamato fattore di partecipazione modale})$$

- Spettro di risposta del progetto:

esempio (v. normative) $\approx 0.2 \pm 0.4$



Γ_i periodo proprio modale

γ_i fattore di smorzamento modale

N.B. L'analisi con spettro di risposte consente di bypassare l'integrazione delle n eq. m. del moto disaccoppiate (*), riferendosi semplicemente alle accelerazioni modali S_i e relativi fattori di amplificazione Γ_i

- K da metodo degli spostamenti, secondo lo schema base \Rightarrow (oppure da matrice di cedev. γ_j , $K = \gamma_j^{-1}$)

- C solitamente supposta diagonalizzabile in coordinate principali da smorzamento classico (alla Rayleigh): $C = \alpha M + \beta K$ comb. lin. o semplicemente diagonale nelle p_i con smorzamenti

Modelli $\ell_i = 2\zeta_i \omega_i$; $M_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}$ ℓ_i rigidezze modali

e fattori di smorz. modali ζ_i assegnati M_i masse modali

$\omega_i = \sqrt{K_i/M_i}$ pulsazioni naturali

- Modi principali da pb. agli autovetori generalizzato: naturali

$K \Phi_i = \omega_i^2 M_i \Phi_i \Rightarrow$ autovar. $\omega_i \rightarrow \omega_i$, $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ periodi propri

autovett. Φ_i , normalizzati in modo opportuno

$\Phi_i^T M_i \Phi_i = 1$ $\Phi_i^T K \Phi_i = \Gamma_i$ $\Phi_i^T \ddot{q}_{ig} = \ddot{q}_{ig}$ matrice degli autovettori

Γ_i fattore di partecipazione modale

gamma maiuscola rapporto tra massa partecipante e massa totale

Propr. Γ_i : $M_i > 0$ numero puro $[\Gamma_i] = [1] ([M]/[M])$ \rightarrow partecipante e massa modale

- dipend. da come viene normalizzato Φ_i (ad es. con $M_i = 1$)

$\sim \Phi_i / \Phi_i^T \Phi_i$ (idem per λ_i)

- dato in segno, è opposto del segno di $\Phi_i^T M_i \Phi_i$ ($M_i > 0$)

accelerazioni modali secondo l'input dato

calcolati Γ_i , ζ_i si entra "nello spettro leggendo i valori di accelerazione S_{ai} (in genere si lavora direttamente sullo spettro o pseudo-spettro di accelerazione)

- Nota $S_{ai} \propto S_{di}$ velocità modali $S_{ri} = \frac{S_{ai}}{\omega_i} \rightarrow S_{di}$ spostam. modali $S_{di} = \frac{S_{ri}}{\omega_i} = \frac{S_{ai}}{\omega_i^2}$

$S_{ai} = S_{ai}(\Gamma_i, \zeta_i)$ - n "lettura", con valori dipendenti dai parametri modali (molto spesso ζ_i assunto sul 5%)

- Stima dello spostamento massimo modale nelle coordinate principali p_i : (non di senso fisico)

$p_i^{max} = |\Gamma_i| S_{di} = |\Gamma_i| \frac{S_{ai}}{\omega_i^2}$ definisce l'ampiezza massima di oscillazione secondo ogni coord. modale

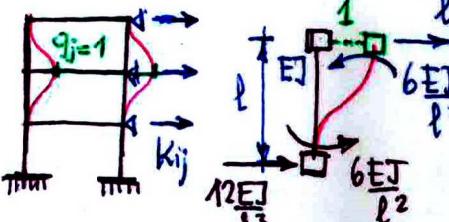
- Stima dello spostamento massimo nelle coordinate lagrangiane reali: (di senso fisico)

Poiché $q = \sum_i \Phi_{ij} p_i$: $q_{j,max}^{max}$ (ingenerale molto percesso)

- Stima conservativa di $q_{j,max}$ in realtà i max. delle risposte p_i si producono in istanti diversi

$q_{j,max}^{max} = \sum_i |\Phi_{ij}| p_i^{max} = \sum_i |\Phi_{ij}| |\Gamma_i| \frac{S_{ai}}{\omega_i^2}$ ω_i specie di valore medio

N.B. formula NON più dipendente dalla normalizzazione di Φ_i in base ai valori modali ω_i e ampiificati di Γ_i



$12E^3$ l^3 l^2 $6EJ$ $6EJ$ $12E^3$ l^3 l^2

l K_{ij} l K_{ij} l K_{ij} l K_{ij}

17a/1

- Calcolo delle Azioni Interne dovute all'azione sismica:

 - Si determinano le forze modali per $\phi_i = 1$: $E_i = K\phi_i = \omega_i^2 M_i \phi_i = F_{I,i}$ Sezione caratteristica dipende dalla normalizzazione di ϕ_i
 - Si calcolano le A.I. modali $\bar{E}_{ij}(s)$, sfruttando la soluzione dello scheme base rappresentato a lato:
 - si parte dall'ultimo piano e si determinano le forze taglienti F_{ij} in cima ad ogni colonna: $F_{ij} = \frac{\bar{E}_{in}}{n \text{ colonne}}$ forza \bar{E}_i al piano n (modo i) [per colonne con stessa rigidezza flessionale EJ]
 - $F_{ck} = \frac{EJ_{ek} \bar{E}_{in}}{\sum_k EJ_{ek}}$ ripartite in base alla rigidezza di ogni colonna EJ_{ek} (se differenti)
 - si calcolano momenti e tagli alle estremità delle colonne (e M alle est. delle travi)
 - l'equilibrio alla rotazione dell'impalcato fornisce, per equilibrio, le azioni assiali N nelle colonne (mentre le N nelle travi non sono determinabili per congruenza, per la supposta inest. assiale)
 - si scende al piano sottostante j, considerando la somma di tutte le forze orizzontali soprastanti $\sum_{k=j}^n \bar{E}_{ik}$ e si ripete il calcolo di F_c e conseguenti azioni caratteristiche secondo lo schema base.
 - con gli equilibri nodali ai nodi trave/pilastro si determinano i momenti alle estremità delle travi
 - quindi si ripete scendendo sino alla base, dove agisce il taglio modale alla base somma di tutte le forze orizzontali d'inerzia soprastanti: $T_i = \sum_j F_{ij} = \sum_j \bar{E}_{ij} = \sum_j (\omega_i^2 m_j \phi_{ij}) = \mathbf{r}^T \bar{E}_i = \bar{E}_i^T \mathbf{r} = \omega_i^2 \Phi_i^T M_i^T \mathbf{r} = \omega_i^2 \Lambda_i = T_i = F_{i,tot}$ taglio modale alla base
 - Determinate (e rappresentate j in opportuni diagrammi di azione interna N, T, M) le $\bar{E}_{ij}(s)$ modali, si stimano i valori max caratteristici delle A.I. (nelle sezioni caratteristiche), ad es., come fatto per gli spostamenti m_{ej} , con stime SRSS:
 - Taglio massimo alla base secondo il modo i-esimo: $T_i^{max} = |\tau_i| \rho_i = |\tau_i| I_i |Sai| = \omega_i^2 I_i |L_i| L_i |Sai| = \frac{\Lambda_i}{M_i} S_{ai} = M_i^{eff} S_{ai}$ relazione tipo $F = ma$
 - Si può dimostrare che la somma delle masse modali efficaci è pari alla massa totale del telaio: $\sum_i M_i^{eff} = M_{tot} = \sum_j m_j$ somma delle masse ai piani
 - Infatti: $r = \Phi^T \mathbf{r}$ vettore dei fattori di partecip. $\Phi^T M_i \Phi = \Phi^T M_i \Phi^T \mathbf{r} = \Lambda_i^T \mathbf{r}$ vettore delle masse partecip. Quindi: $M_{tot} = \sum_j m_j = \mathbf{r}^T M_i r = \mathbf{r}^T \Phi^T M_i \Phi \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \Phi^T M_i \mathbf{r} = \sum_i \tau_i \Lambda_i = \sum_i \frac{\Lambda_i}{M_i} = \sum_i M_i^{eff}$
 - Stime del taglio massimo totale alle base: $T^{max} = \sqrt{\sum_i (\tau_i^{max})^2} = \sqrt{\sum_i (M_i^{eff} S_{ai})^2} = F_i^{max}$ stime delle forze d'inerzia totale massima

Schema base

Vedi molle in parallelo:

$$\frac{F_1}{K_1} = \frac{F_2}{K_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{K_1}{K_2} \Rightarrow F_K = \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} F \quad F_1 + F_2 = F$$

Taglio modale alla base

$$K_{ek} = \frac{12 EJ_{ek}}{L_{ek}^3} \quad \mu = \frac{F_K}{K_{tot}} = \frac{F}{K_{tot}}$$

Taglio modale alla base

$$T_i = \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\omega_i^2 \Lambda_i}{\omega_i^2 M_i} = \frac{\omega_i^2 \Lambda_i}{M_i}$$

Stime SRSS

$$\Lambda(s) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Lambda_i}{S_K} \right)^2} = \sqrt{\sum_i \frac{\Lambda_i^2}{S_K}}$$

Onde $\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i \rho_i$ dovute a $\bar{E}_i = \bar{E}_i \rho_i = \omega_i^2 M_i \Phi_i^T \mathbf{r}$ già amplificate di ρ_i^{max}

L'effettiva massa modale efficace del modo i $M_i^{eff} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \frac{\Phi_i^T M_i \Phi}{\Phi_i^T M_i \Phi}$ indipendente dalla normalizzazione di Φ_i

Esprime la massa modale partecipante all'azione sismica utile alla determinazione del taglio massimo alle basi (spesso il I modo possiede già il 70% - 90% di M_{tot})

Erizzo $\frac{1}{\sum_i \Phi_i^2} = \frac{1}{\sum_i \Phi_i^2}$