Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

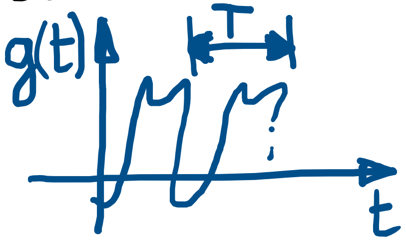
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Analisi nel dominio delle Frequenze

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$

pulsazione fondam.

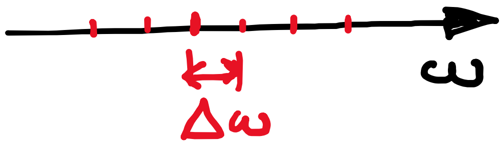


forzante del sistema in TD

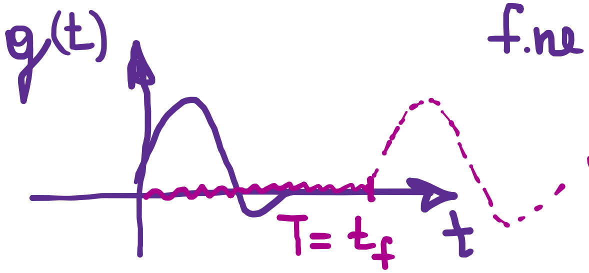
f.ne periodica di periodo $T \in P_T$

$$g(t) \simeq \sum_{n=(-\infty)-N}^{(+\infty)N} C_n\, e^{+i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{-i\omega_n t}\, dt}\; e^{+i\omega_n t}$$

$\omega_n = n\omega_0 = n\,\Delta\omega$

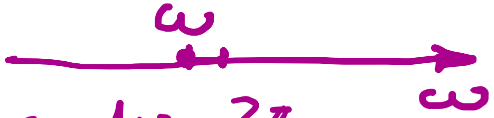


Sviluppo in serie di Fourier: sovrapposizione di ∞ componenti armoniche a pulsazioni discrete, separate di $\Delta\omega$



f.ne aperiodica $\in P_\infty$ $(T \to \infty)$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}\; e^{+i\omega t}$$



$\frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi} \Leftarrow d\omega = \frac{2\pi}{T}$ asse reale

Trasformata di Fourier: $G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

Antitrasform. di F.: $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega$

Time Domain

$\mathcal{F} \downarrow \quad \uparrow \mathcal{F}^{-1}$

Frequency Domain

CS di Dirichlet

$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < +\infty$

$\Rightarrow g(t) \in P_\infty$

sovrapposizione di ∞ componenti armoniche, di ampiezza $G(\omega)$, a pulsazioni continue, separate da $d\omega$ infinitesime

Proprietà di $\mathcal{F}$ (di differenziaz.)

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{i\omega t}\right) = (i\omega)^n e^{i\omega t}$$

proprietà di differenziazione della f.ne esponenziale (autosomiglianza della derivata)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(\omega)(i\omega)^n}\, e^{i\omega t}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}\left((i\omega)^n G(\omega)\right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right) = (i\omega)^n \mathcal{F}(g(t))}$$

Equazione del moto (SDOF):

$g(t) \rightarrow u(t)$ TD

$G(\omega) \rightarrow U(\omega)$ FD

$F_e = Ku \rightarrow \underbrace{K^{-1}}_{\text{cedevolezza}} F = u$

$$\mathcal{F}\left(m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku(t) = g(t)\right)$$

$$m(i\omega)^2 U(\omega) + c(i\omega)U(\omega) + K\,U(\omega) = G(\omega)$$

proprietà sistema dinamico

$$\underbrace{(K - m\omega^2 + ic\omega)}\, U(\omega) = G(\omega) \Rightarrow U(\omega) = \underbrace{(K - m\omega^2 + ic\omega)^{-1}} \cdot G(\omega) = \boxed{H(\omega)\cdot G(\omega) = U(\omega)}$$

$H(\omega)$ Funzione di risposta in frequenza (FRF)

"cedevolezza" nel dominio delle frequenze (FD)

$$K\left(1 - \frac{m}{K}\omega^2 + i\frac{c}{K}\omega\right) \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_1$$

$$K\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + i\, 2\zeta\omega_1 \frac{m}{K}\omega\right)$$

$$K\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + i\, 2\zeta \frac{\omega}{\omega_1}\right) \Rightarrow H(\omega) = \underbrace{\frac{1}{K}}_{u_{st} = \frac{F=1}{K}}\; \underbrace{\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + i\, 2\zeta\frac{\omega}{\omega_1}}}_{N\left(\beta = \frac{\omega}{\omega_1}\right)}$$

frequency ratio $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

$g(t) = 1\, e^{i\omega_0 t}$

(come visto per forzante armonica di pulsaz. ω e ampiezza 1) "filtro"

INPUT

$g(t)$ delta di Dirac

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

OUTPUT

$u(t)$ f.ne risposta ad impulso unitario

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

integrale di convoluzione (Duhamel)

Dominio del tempo TD

$$g(t)=1\,e^{i\omega_0 t}$$

$$g(t)=\delta(t)$$

$$u(t)=H(\omega_0)\,e^{i\omega_0 t}$$

$$u(t)=h(t)=\frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\xi\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

SISTEMA DINAMICO STRUTTURALE

$\mathcal{F}$ $\qquad$ $\mathcal{F}^{-1}$

Dominio delle frequenze FD

$$G(\omega)=2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$G(\omega)=1$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$U(\omega)=2\pi\,H(\omega)\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$U(\omega)=H(\omega)$$

$$U(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$U(\omega)=H(\omega)\cdot G(\omega)$$

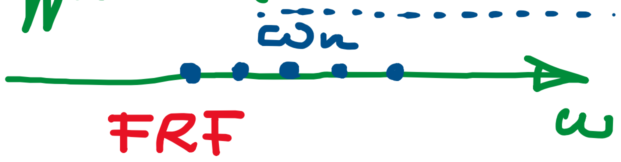
FRF (trasf. di Fourier di $h(t)$)

"cedevolezza" nel dominio delle frequenze

$$H(\omega)=\frac{U(\omega)}{G(\omega)}$$

SOMMARIO (Lez. 10)

- Analisi nel dominio delle frequenze (FD).
- Trasformata di Fourier (generalizzazione di sviluppo in serie di Fourier, tramite intero asse reale delle frequenze).



- Trasformata di F. dell'eq.ne del moto $\Rightarrow$ $U(\omega) = H(\omega) \cdot G(\omega)$ risposta in FD tramite prodotto algebrico.
- Schema interpretativo di analisi, tra i livelli TD e FD, coi legami tra le f.ni presenti. In particolare $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) \simeq N(\omega)$.

Next step: Sistemi dinamici a più gdl (MDOF) (generalizzazione dei sistemi SDOF).