

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

~~~~~  
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 18

## 2) Criterio di resistenza di de Saint Venant - Grashof

- Concetto: dualmente a G.-R.-N., assume come G.I.P. la deformazione normale massime (e minima):

$$-\varepsilon_c \leq \varepsilon_n^{\min}, \quad \varepsilon_n^{\max} \leq \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$$

"traduzione"  
-  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_1$

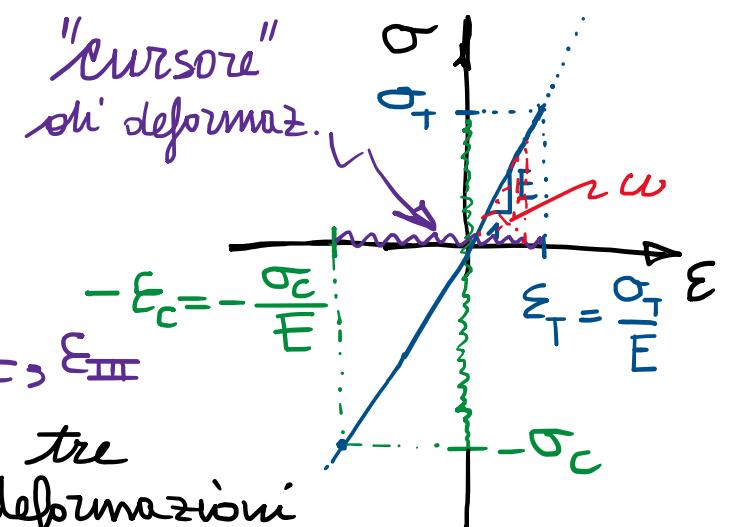
- Trasformazione del criterio nel dominio degli sforzi  
tramite legge costit. (Hooke generalizzata)

$$-\frac{\sigma_c}{E} = -\varepsilon_c \leq \frac{\sigma_1}{E} - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \leq \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$$

$$-\sigma_c \leq \underbrace{\sigma_1 - \nu(\sigma_j + \sigma_k)} \leq \sigma_t$$

N.B.: criterio fondato sulle  $\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon)$

deformazione, dipendente da  $\nu$  (coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson)  
de parametri elasticci (un parametro elastico:  $\nu$ )



6 diseguaglianze nello spazio degli sforzi principali  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

N.B.  $-1 < \nu \leq \frac{1}{2}$   
materiali ingegneristici

- Per stato di sforzo piano (ad es.  $\sigma_{III} = 0$ ), le 6 diseguaglianze divengono:

$$-\sigma_c \leq \sigma_I - \nu \sigma_{II} \leq \sigma_T$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_{II} - \nu \sigma_I \leq \sigma_T$$

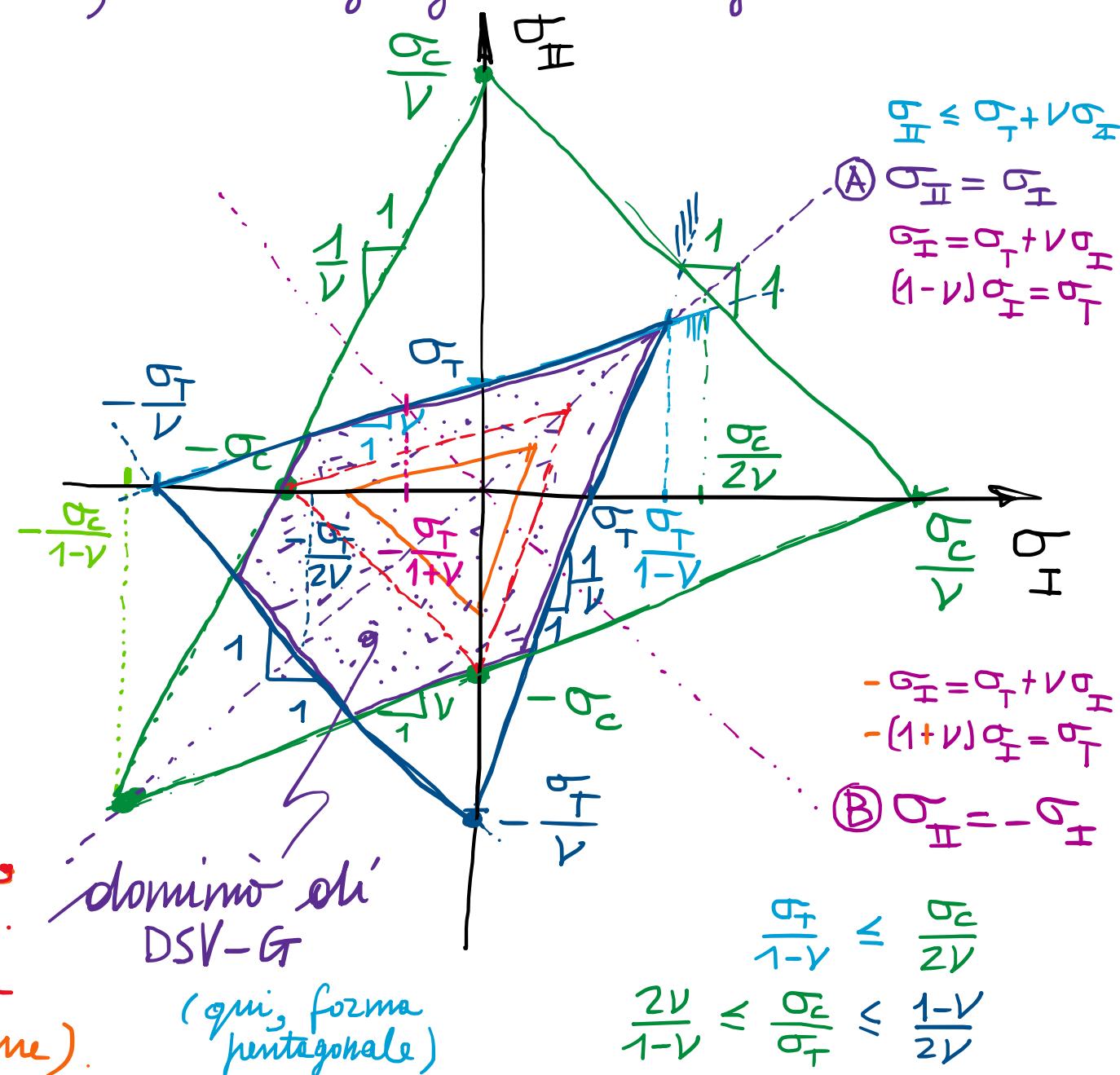
$$-\sigma_c \leq -\nu(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq \sigma_T$$

- Dominio di resistenza: intersezione di due triangoli isosceli, dipendenti da  $\sigma_T$ ,  $\sigma_c$ ;  $\nu$ .

- Forma rombica se:

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{\sigma_T} \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

- Più cadere in difetto se  $\sigma_T < \nu \sigma_c$ , per materiali con marcato comportamento asimmetrico a trazione/compressione (non raggiungibile la resist. a compressione).



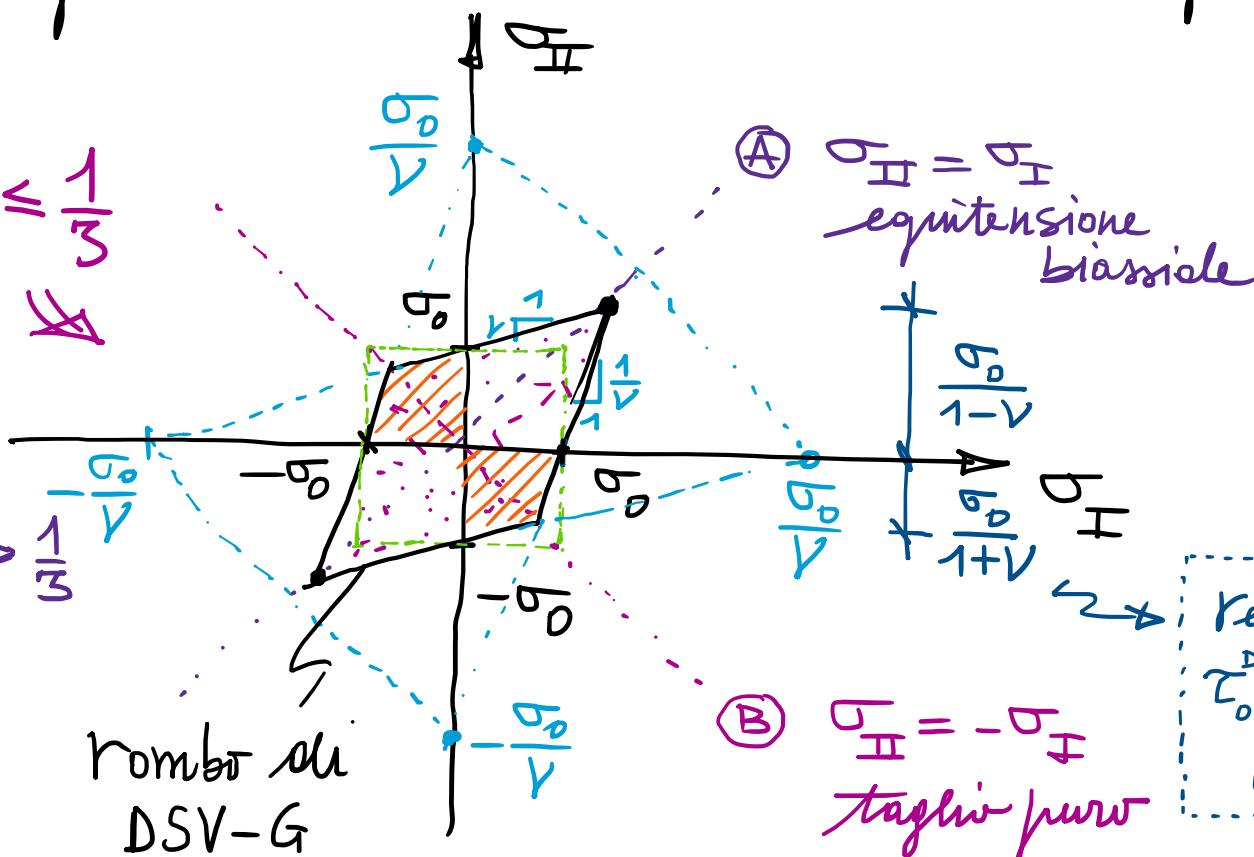
- Per materiali a comportamento simmetrico a trazione/compressione, cioè con  $\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_C$ :

$$\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_C$$

- Forma rombica:  $\nu \leq \frac{1}{3}$

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq 1 \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

- Forma esagonale:  $\nu > \frac{1}{3}$



$\nu \rightarrow 0 \rightarrow G.R.N.$

Resistenza e taglio  
 $\tau_0^{\text{DSV-G}}$  secondo DSV-G  
 (dipend. da  $\nu$ )

- Utilizzato per la verifica di resistenza in presenza di stati di sforzo alle de Saint Venant (vedi pb. di DSV), caratterizzati da tensioni principali di segno opposto:  $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$ .

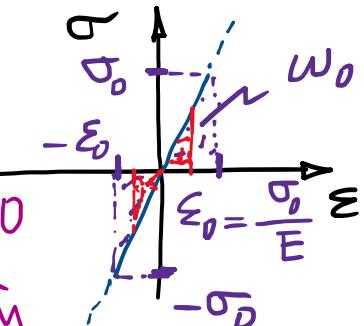
- Recupera il diverso (maggiore) livello di pericolosità di stati B vs. A.

3) Criterio di Beltrami (per materiali a comportamento simmetrico traz./comp.) -

- Di sensibilità energetica, assume come G.I.P. l'energia di deformazione elastica:

$$\omega = \frac{1}{2} \sigma : \epsilon \leq \omega_0 = \text{valore ammesso a limite elastico}$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 \quad (\text{da prova monoassiale}) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E} > 0$$



- Nel dominio degli sforzi, esprimendo  $\epsilon$  tramite legge costitutiva: indipendentemente  
del segno dello  
stato di sforzo

quadratico  
in  $\sigma$

$$\epsilon = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma \mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E} \sigma \quad [\text{legge di Hooke generalizzata}]$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( -\frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma \underbrace{\sigma : \mathbb{I}}_{\text{tr} \sigma} + \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\sigma : \sigma}_{\sigma_i \sigma_j \sigma_{ij}} \right)$$

$$\text{rif. princ. } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

$$(\text{tr} \sigma)^2 = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \sim \sigma^2$$

$$\sigma : \sigma = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{E} \left[ \underbrace{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2}_{\sigma_{eq}^2} - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \right] \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E}$$

insensibili al  
segno dello  
stato di sforzo

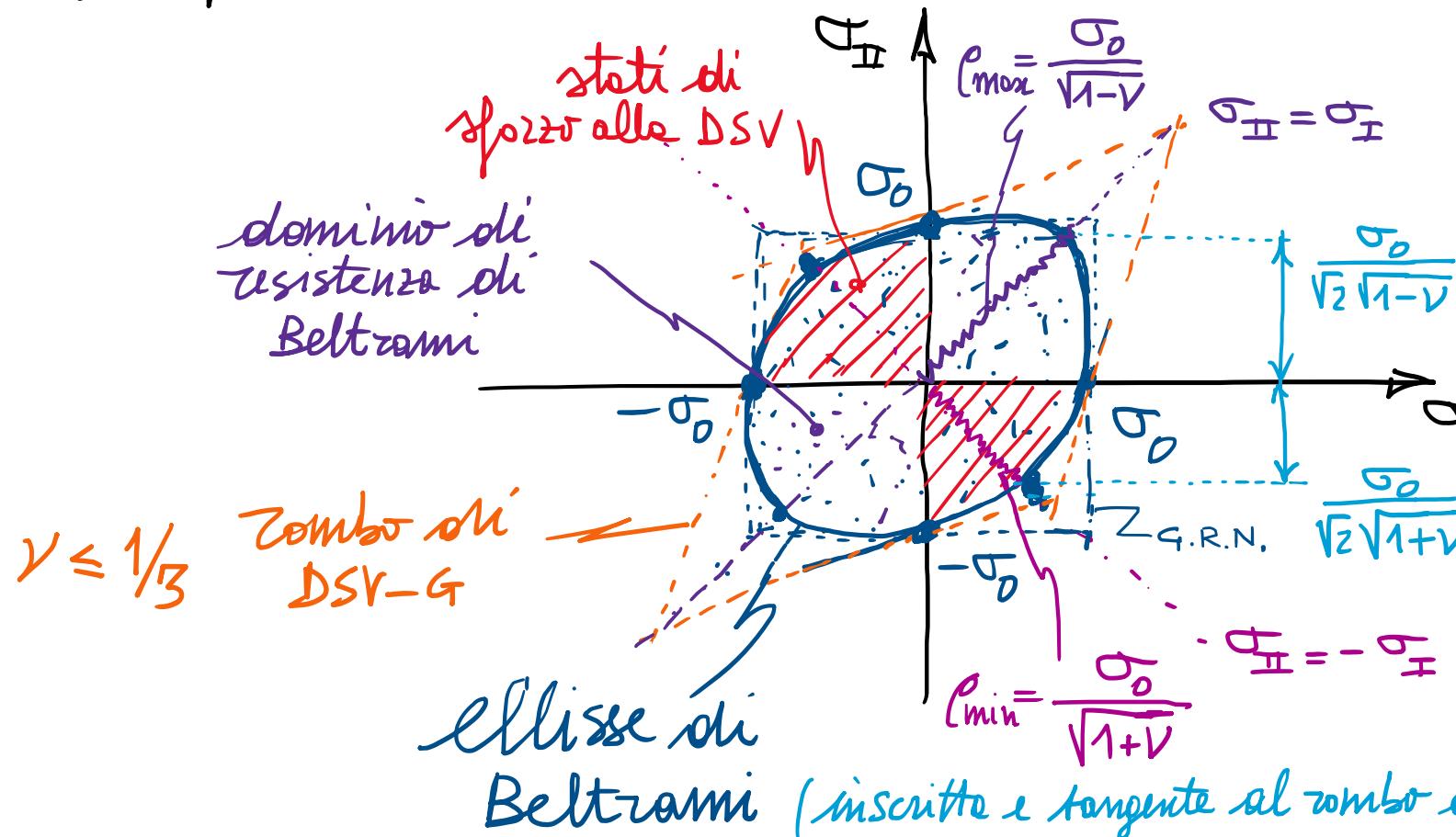
Azione  
equivalente  
di

Beltrami  $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})}$

ellisseide nello spazio  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$   
 $\leq \sigma_0$  (dipendente da  $\nu$ )

- Nel caso di stato di sforzo piano (ad es.  $\sigma_{III} = 0$ )

$$\sigma_{eq}^B = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II}} \leq \sigma_0$$



- Utile a rappresentare la verifica di resistenza per materiali a comport. simmetrico, per stato di sforzo piano (non adatto per stati di sforzo triassiali), in particolare alle DSV, con  $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$ .

$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} = \sigma_0^2$$

equazione ellisse ruotata di  $45^\circ$ , simmetrica rispetto alle bisettrici, di semiassi  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$

$$\text{per } \nu \rightarrow 1/2 : \begin{aligned} \sigma_{max} &= \sqrt{2}\sigma_0 \\ (\Rightarrow \nu M) \quad \sigma_{min} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \end{aligned}$$

resistenza a taglio secondo Beltrami

4) Criterio di Huber-Hencky-von Mises  $\Leftrightarrow$  per materiali metallici ( $\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_c$ )

- Ancore chi significa energetico ma considera le sole energie deviatoriche ai fini del raggiungimento (dell'uscita) del limite elastico del materiale (osservazione sperimentale) [celle triassiali]

$\xrightarrow{\text{Bertromi}}$   $\xrightarrow{\text{von Mises}}$

- Assume come G.I.P. l'energia deviatorica: ( $\omega_D = \omega_v + \omega_d$ )

$$\omega_d = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\epsilon} \leq \omega_d^0 \quad (\text{per es. con rifer. ad una prova monoassiale di tatt.})$$

- Nel dominio degli sforzi, da legge cost. (deviatorica)

$$\underline{\epsilon} = \frac{\underline{\sigma}}{2G}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \frac{\underline{\sigma}}{2G} \right] = \frac{3 J_2}{32G} = \frac{3 J_2^0}{6G} \leq \frac{3 J_2^0}{6G} \Rightarrow \sigma_{eq}^M = \sqrt{3 J_2} \leq \sqrt{3 J_2^0} = \sigma_0$$

Ove:

$$\underline{\sigma} = \sigma - \frac{\operatorname{tr} \sigma}{3} \mathbb{I}$$

deviatore  
di sforzo

$$P = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \quad \text{tensione media}$$

invariante  
secondo  
del deviatore

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \underline{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sum_i s_i^2$$

rif.  
princ.

$$[\underline{\sigma}]^2 = \begin{bmatrix} (\sigma_I - P)^2 \\ (\sigma_{II} - P)^2 \\ (\sigma_{III} - P)^2 \end{bmatrix}$$

$$s_i = \sigma_i - P$$

- Sviluppando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 3J_2 &= \frac{3}{2} \left[ (\sigma_I - p)^2 + (\sigma_{II} - p)^2 + (\sigma_{III} - p)^2 \right] \\
 &= \frac{3}{2} \left[ \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + \underbrace{3p^2 - 3 \cdot 2p \left( \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \right)}_{-3p^2 = -3 \left( \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \right)^2} \right] \\
 &= \cancel{\frac{3}{2}} \cancel{\frac{1}{3}} \left[ \cancel{3}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \cancel{3}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \cancel{2}(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \right] \\
 &= \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \quad \Rightarrow \quad \sigma_I = \sigma_0; \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad 3J_2^0 = \sigma_0^2
 \end{aligned}$$

tensione equivalente di von Mises

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})} \leq \sigma_0$$

(concorda con  $|\sigma_I|$  nel caso monoassiale)

- Simile a Beltrami, con  $\nu \rightarrow 1/2$ , corrisponde ad annullare  $\omega_v$ ,  $w = w_D$ , per materiale incompressibile (come se fosse).

- Indipendente dai parametri elastici ( $\nu \approx 0.3$  per mat.-metallici).

( $\nu$  è assegnato  
ma  $\sigma_{eq}^{vM}$  è  
indip. da  $\nu$ )

- Caso piano ( $\sigma_{III}=0$ ):  $\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq \sigma_0$

- Del resto :  $\omega = \omega_v + \omega_D$ ,  $\omega_D = \omega - \omega_v$

con :  $\omega_v = \frac{1}{2} p v = \frac{1}{2} p \frac{1}{K} = \frac{1}{2} \frac{1}{K} p^2$  Risposte volumetriche

- Quindi :  $\omega$

$$\omega_D = \underbrace{\frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2 E} (-\nu \operatorname{tr}^2 \sigma + (1+\nu) \sigma : \sigma)}_{\dots}$$

$$- \underbrace{\frac{1}{6E} (1-2\nu) \operatorname{tr}^2 \sigma}_{\omega_v}$$

$$= \frac{1}{6E} (3(1+\nu) \sigma : \sigma - (3\nu + 1-2\nu) \operatorname{tr}^2 \sigma)$$

$$= \frac{1}{6E} (1+\nu) \left( 3 \sigma : \sigma - \operatorname{tr}^2 \sigma \right)$$

$\left[ \begin{array}{l} \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \\ \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 \end{array} \right]$

$$= \frac{1}{6} \underbrace{\frac{1}{E} (1+\nu) 2}_{\left( \sigma_{eq}^{vM} \right)^2} \left( \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \right) = \frac{1}{6G} \underbrace{\left( \sigma_{eq}^{vM} \right)^2}_{3J_2} \leq \omega_D^0 = \frac{3J_2^0}{6G} = \frac{\sigma_0^2}{6G}$$

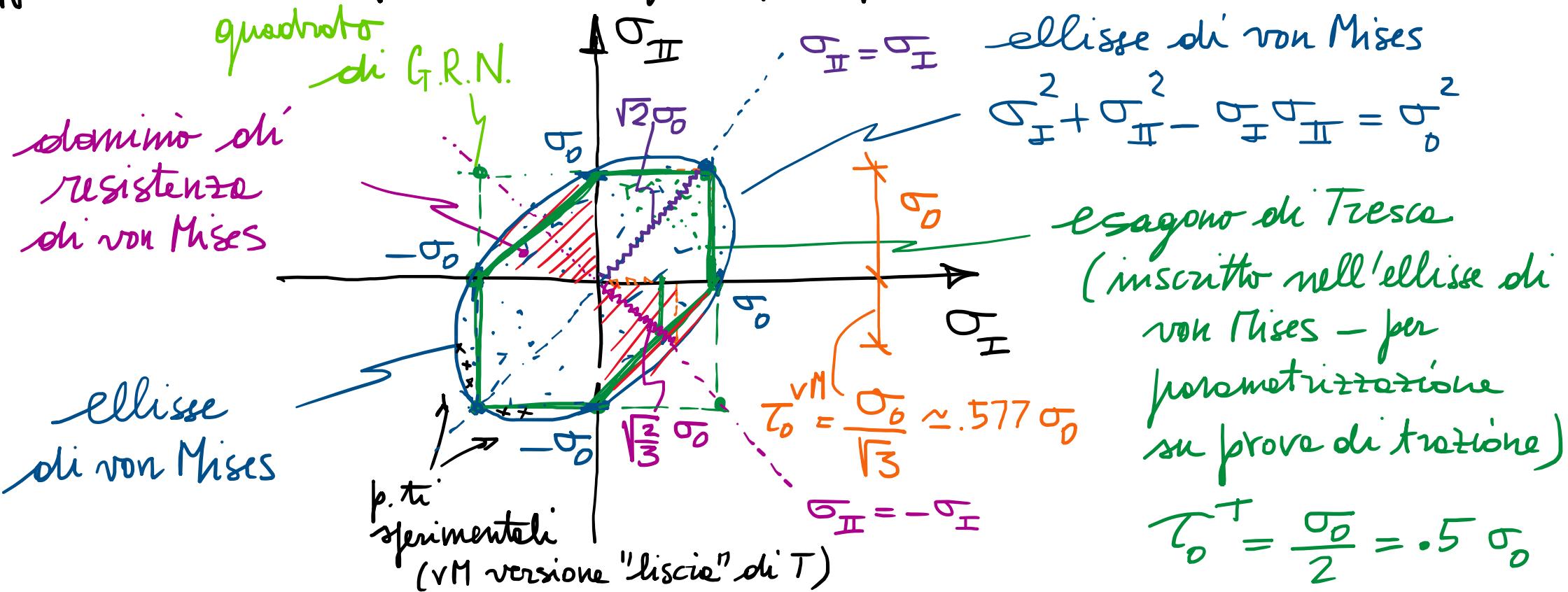
$p = \frac{\operatorname{tr} \sigma}{3}$  tensione media

$p = K v$ ;  $v = \frac{p}{K}$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

"bulk modulus"  
modulo di volume

- Rappresentazione nel piano degli sforzi principali:



- Idoneo a rappresentare le verifiche di resistenza (e il criterio di plasticità) per materiali metallici, sottoposti a stati di sforzo generici, anche trissiali, nonché per sforzi piani, in particolare alle DSV ( $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$ ) - Interpretate correttamente l'uscita del campo elastico per stati tensio-deformativi deviatorici.

## 5) Criterio di Guest-Tresca (materiali metallici)

- Duele di G.R.N., sempre nel dominio degli sforzi, ma individuano come critici, gli sforzi taglienti, cioè le  $\tau^{\max}$ :  $\rightarrow$  G.I.P.

$$\tau^{\max} \leq \tau_0 \text{ resist. a taglio del materiale}$$

- Cerchi di Mohr (e Arbelo di Mohr):

$$\tau^{\max} = \max \left\{ R_I = \frac{|\sigma_j - \sigma_k|}{2} \right\} \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_0$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_{II} - \sigma_{III} \leq \sigma_0$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_{III} - \sigma_I \leq \sigma_0$$

6 disegnazioni

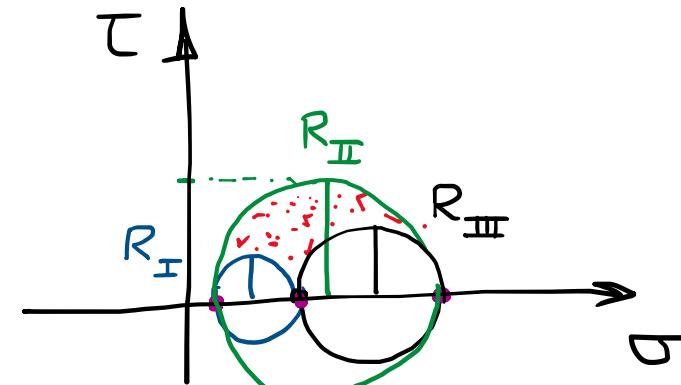
Vedi G.R.N.

Caso piano  $\sigma_{III} = 0$

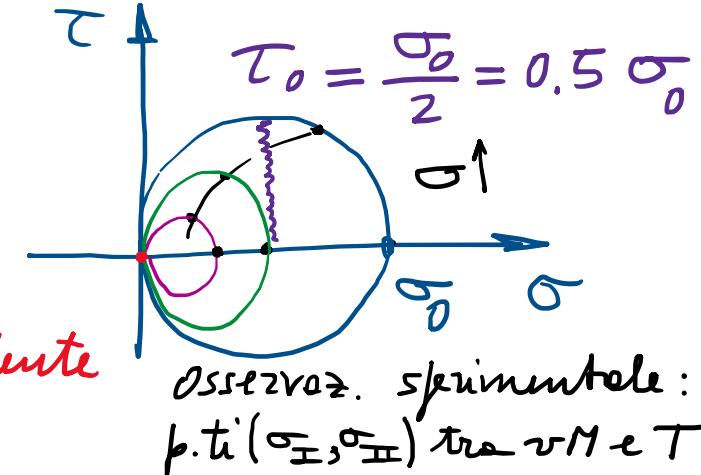
$\sigma_{eq}$

$\rightarrow$  rappresentazione a pagine precedente  
(esagono soli Tresca)

Criterio più conservativo.



$$\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$$



Osservaz. sperimentale:  
P.ti( $\sigma_I, \sigma_{II}$ ) tra  $\tau M$  e  $T$