erizzi@unibg.it

Legame costitutivo

- Si tratta del legame sforzi-deformazioni che definisce il comportamento del materiale.
- Tale relazione è evidentemente necessaria per esprimere il nesso tra sforzi e deformazioni che si producono all'interno di un solido in relazione alle proprietà meccaniche (es. rigidezza, resistenza) del materiale di cui è composto.
- Sono le eq. mancanti necessarie a chiudere il bilancio equazioni/incognite del problema elastico:

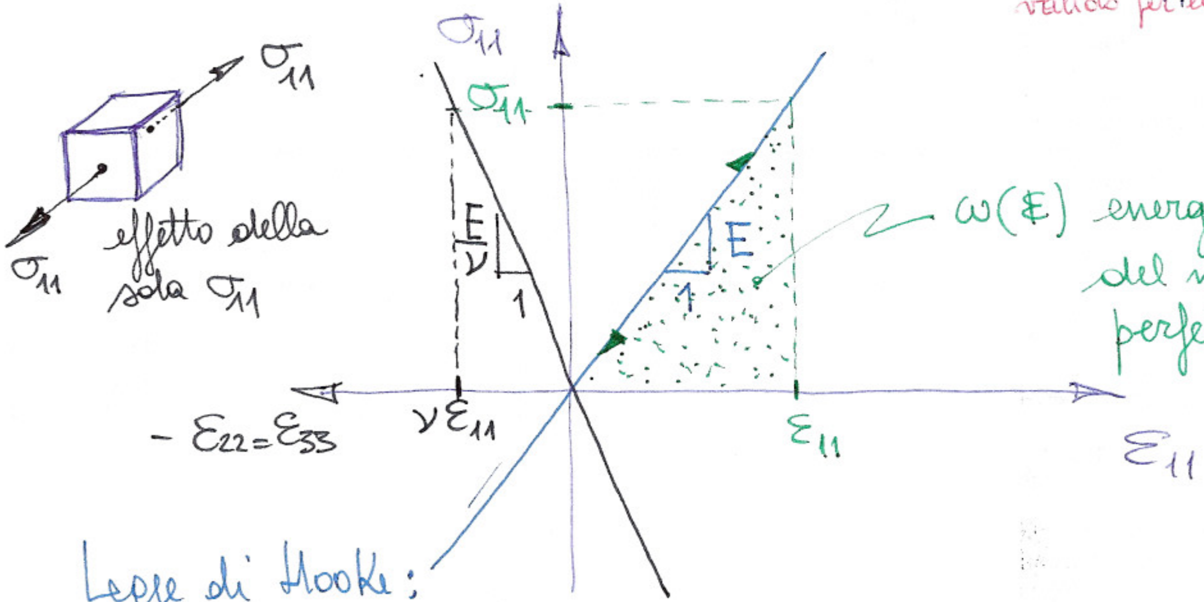
PROBLEMA ELASTICO

INCOGNITE	EQUAZIONI
Sforzo $\boldsymbol{\sigma}$, 6 comp. σ_{ij}	Equilibrio, 3 eq.: $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$
Deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$, 6 comp. ε_{ij}	Congruenza, 6 eq.: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T\right)$ (leggi deform./spost.)
Spostamento $\mathbf{s}$, 3 comp. s_i	legame costitutivo, 6 eq.: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ oppure $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ (legge sforzi/deform.)
15 incognite	15 equazioni (tutte lineari se $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ è lineare)

- Considereremo in maniera specifica il comportamento
  - elastico (∃ di un'energia di deformazione, materiale conservativo o non dissipativo)
  - lineare (legame di proporzionalità tra sforzi e deformazioni)
  - isotropo (indipendente dalla direzione nello spazio)

- Riprendiamo la risposta del materiale nella prova di trazione ed estendiamo al pluriassiale mediante il P.S.E. (Principio di Sovrapposizione degli Effetti)

valido per la supposta linearità



$\omega(\varepsilon)$ energia di deformazione (energia elastica del materiale dotato di comportamento perfettamente reversibile)

Qui: $\omega = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2$

Legge di Hooke:

$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$; $\sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11}$ con E modulo di elasticità longitudinale o modulo di YOUNG $[E] = \frac{[F]}{[L]^2}$

Contrazione trasversale (uguale in tutte le direzioni, essendo il materiale isotropo)

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{\sigma_{11}}{\left(\frac{E}{\nu}\right)}$$

con ν coefficiente di contrazione trasversale o di POISSON $[\nu] = [1]$

Legge di Hooke generalizzata:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} + \left(-\nu\dfrac{\sigma_{22}}{E}\right) + \left(-\nu\dfrac{\sigma_{33}}{E}\right) \\ \varepsilon_{22} = -\nu\dfrac{\sigma_{11}}{E} + \dfrac{\sigma_{22}}{E} + \left(-\nu\dfrac{\sigma_{33}}{E}\right) \\ \varepsilon_{33} = -\nu\dfrac{\sigma_{11}}{E} + \left(-\nu\dfrac{\sigma_{22}}{E}\right) + \dfrac{\sigma_{33}}{E} \end{cases}$$

Legame tra deformazioni normali e sforzi normali

disaccoppiati

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \dfrac{\tau_{12}}{G} \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \dfrac{\tau_{23}}{G} \\ 2\varepsilon_{31} = \gamma_{31} = \dfrac{\tau_{31}}{G} \end{cases}$$

Legame tra deformazioni taglianti e sforzi tangenziali

ove G: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio

Rappresentazione matriciale:

$$\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\} \iff$$

$\{\varepsilon\}$: 6x1, vettore che raccoglie le componenti di deformazione

$[C]$: 6x6, matrice di cedevolezza del materiale

$\{\sigma\}$: 6x1, vettore che raccoglie le componenti di sforzo

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12}=\gamma_{12} \\ 2\varepsilon_{23}=\gamma_{23} \\ 2\varepsilon_{31}=\gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & \emptyset & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & & \\ & \emptyset & & & \frac{1}{G} & \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12}=\tau_{12} \\ \sigma_{23}=\tau_{23} \\ \sigma_{31}=\tau_{31} \end{Bmatrix}$$

– Ipotesi di elasticità: ∃ un'energia di deformazione definita positiva

$$\omega = \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot [\mathbb{C}] \cdot \{\sigma\} > 0 \qquad \forall\, \sigma \neq 0$$

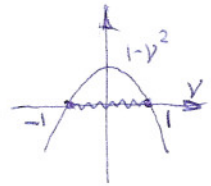
forma quadratica associata alla matrice di cedevolezza $[\mathbb{C}]$

Ciò richiede la definizione positiva della matrice $[\mathbb{C}]$: ⇒ Delimitazioni sui parametri ingegneristici di materiale

Affinché ciò accada occorre che tutti i minori principali di $[\mathbb{C}]$ siano >0:

- $\frac{1}{E} > 0 \Rightarrow \boxed{E > 0}$ (infatti a sforzo di trazione deve corrispondere allungamento, non accorciamento)

- $\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \frac{1}{E^2}(1-\nu^2) = \frac{1}{E^2}(1+\nu)(1-\nu) > 0 \Rightarrow -1 < \nu < 1$



- $\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \frac{1}{E}\frac{1}{E^2}(1-\nu^2) + \frac{\nu}{E}\left(-\frac{\nu}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2}\right) - \frac{\nu}{E}\left(\frac{\nu^2}{E^2} + \frac{\nu}{E^2}\right) =$

$$= \frac{1}{E^3}\left[(1+\nu)(1-\nu) - 2\nu^2(1+\nu)\right] = \frac{1}{E^3}(1+\nu)\underbrace{(1-\nu-2\nu^2)}$$

$$(1+\nu)(1-2\nu) = 1-2\nu+\nu-2\nu^2 = 1-\nu-2\nu^2 \text{ ok}$$

$$= \frac{1}{E^3}(1+\nu)^2(1-2\nu) > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

- $\frac{1}{G} > 0 \Rightarrow \boxed{G > 0}$

Quindi $\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$

Per materiali ingegneristici $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$

Cerchiamo ora una scrittura compatta del legame elastico lineare isotropo in termini diretti : $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$.

Riprendiamo le relazioni tra deformazioni normali e sforzi normali:

sommo e sottraggo

$$
* \begin{cases}
\varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} = -\dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{11} \\
\varepsilon_{22} = \dfrac{\sigma_{22}}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} = -\dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{22} \\
\varepsilon_{33} = \dfrac{\sigma_{33}}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{33}
\end{cases}
\Rightarrow \varepsilon_{(ii)} = -\dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{(ii)}
$$

e le relazioni tra deformazioni taglianti e sforzi taglianti:

$$
** \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}
$$

Affinché vi sia coerenza tra le relazioni scritte occorrerà che:

$$
\overbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{tensore}} = \underbrace{-\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma}_{\text{scalare}}\ \overbrace{\mathbb{I}}^{\text{tensore}} + \underbrace{\frac{1+\nu}{E}}_{\text{scalare}}\ \overbrace{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{tensore}} \iff \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}
$$

tensore identità del II ordine

delta di Kronecker $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

e $\dfrac{1}{2G} = \dfrac{1+\nu}{E} \Rightarrow \boxed{G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}}$ relazione tra i tre parametri elastici $G = G(E, \nu)$ non indipendenti!

$$
E = 2(1+\nu)G \; ; \quad \nu = \frac{E}{2G} - 1
$$

- Infatti:
  - per $i=j$ si riottengono direttamente le ⊛
  - per $i \neq j$ " " coerentemente le ⊛⊛ grazie alla relazione $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- Quindi la legge di Hooke generalizzata per un materiale elastico lineare isotropo

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\nu}{E} \operatorname{tr}\sigma \, \mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E} \sigma}$$

è definita in termini di 2 parametri di materiale indipendenti (ad es. E e ν, agilmente determinabili mediante una prova di trazione). Utilizzando 2 tra i parametri E, G, ν, il terzo è ottenuto dalla relazione

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

risolvendo rispetto al parametro incognito

- Si può inoltre dimostrare che le risposte volumetrica e deviatorica risultano disaccoppiate.

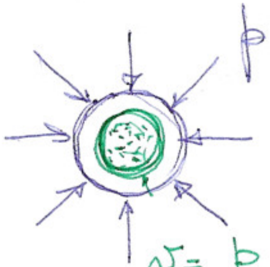
- **Risposta volumetrica**

deformazione volumetrica

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma \;\rightarrow\; \vartheta = \mathrm{tr}\,\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\underbrace{\mathrm{tr}\,\mathbb{I}}_{3} + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma$$

$$= \frac{1+\nu-3\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma = \frac{3(1-2\nu)}{E}\,\underbrace{\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}}_{p}$$

p tensione media



p

$\vartheta = \frac{p}{K}$

$$\boxed{\vartheta = \frac{p}{K} \;;\; p = K\vartheta}$$

ove $\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$: modulo di comprimibilità volumetrica o "bulk modulus" (rappresenta la rigidezza elastica volumetrica)

- per $\nu \to \frac{1}{2}$, $K \to \infty$ (materiale incomprimibile)

- **Risposta deviatorica**

$$\hookrightarrow\; e = \varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma - \frac{1-2\nu}{E}\,\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I}$$

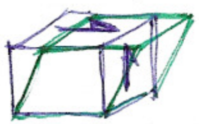
deviatore di deformazione

$$= \frac{-3\nu-1+2\nu}{E}\,\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma = -\frac{1+\nu}{E}\,\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\underbrace{\left(\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I}\right)}_{s} = \frac{2(1+\nu)}{2E}\,s = \frac{1}{2G}\,s$$

s deviatore di sforzo

s



$e = \frac{s}{2G}$

$$\boxed{e = \frac{s}{2G} \;;\; s = 2G\,e}$$

- per $\nu \to -1$, $G \to \infty$ materiale non deformabile a taglio.

ove $\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$: modulo di elasticità tangenziale (rappresenta la rigidezza elastica deviatorica).

- Energia elastica:

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon \\
&= \frac{1}{2}\,(\sigma_V + \sigma_D) : (\varepsilon_V + \varepsilon_D) \\
&= \frac{1}{2}\,\sigma_V : \varepsilon_V + \frac{1}{2}\,\sigma_D : \varepsilon_D \qquad (\text{poichè } \sigma_V : \varepsilon_D = \sigma_D : \varepsilon_V = 0) \\
&= w_V + w_D
\end{aligned}
$$

Somma di un contributo volumetrico e di uno deviatorico.

- Energia elastica volumetrica:

$$
\begin{aligned}
w_V &= \frac{1}{2}\,\sigma_V : \varepsilon_V = \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\cancel{\mathbb{I} : }\frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{\cancel{3}}\,\cancel{\mathbb{I}} \\
&= \frac{1}{2}\,p \cdot v = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p^2}{K} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,K v^2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

N.B.: l'energia elastica deviatorica è dirett. proporzionale all'invariante secondo del deviatore

invariante secondo del deviatore di sforzo

- Energia elastica deviatorica:

$$
w_D = \frac{1}{2}\,\sigma_D : \varepsilon_D = \frac{1}{2}\,s : e = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{s : s}{2G} = \dfrac{J_2}{2G} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,2G\,e : e = 2G\,J_2' \end{cases}
$$

invariante secondo del deviatore di deformazione