

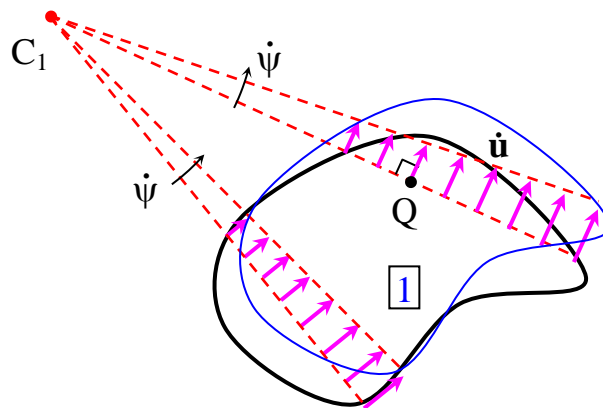
Appunti sull'analisi cinematica geometrica

di Giuseppe Cocchetti

Documento in BOZZA – aggiornamento del 04.12.2014
Segnalare eventuali refusi all'indirizzo giuseppe.cocchetti@polimi.it

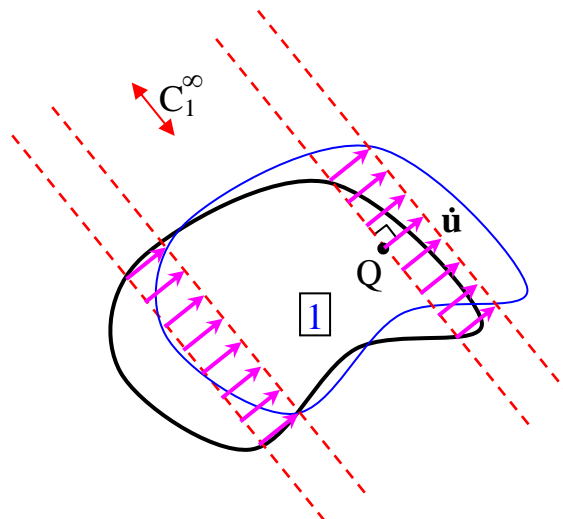
Analisi dell'atto di moto rigido nel piano.

Ogni atto di moto rigido assoluto di un corpo nel piano è rappresentabile mediante la rotazione del corpo attorno a un punto detto "Centro di Istantanea Rotazione assoluto del corpo" (CIR). Il campo di velocità ($\dot{\mathbf{u}}$) è costituito da vettori di intensità proporzionale alla distanza tra punto generico (Q) e CIR (C_1), e ortogonali al vettore posizione relativa ($\overrightarrow{C_1Q}$); il fattore di proporzionalità ($\dot{\psi}$) è la velocità angolare che caratterizza l'atto di moto: $|\dot{\mathbf{u}}_Q| = \dot{\psi} |\overrightarrow{C_1Q}|$.



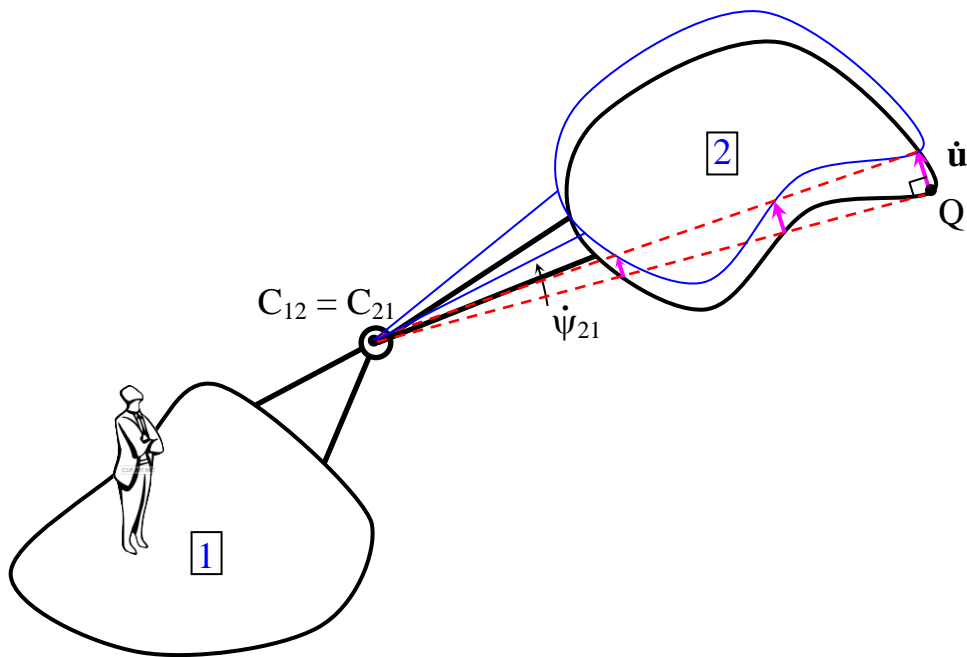
L'atto di moto di traslazione si può rappresentare come una "rotazione" attorno a un CIR posizionato all'infinito in direzione ortogonale alle velocità di traslazione.

Si noti che un punto all'infinito (detto "punto improprio") definisce una direzione nel piano. Due rette parallele e distinte hanno in comune il punto improprio individuato dalla loro direzione.



È utile evidenziare che il campo di velocità che caratterizza l'atto di moto rigido non dipende dalla forma del corpo.

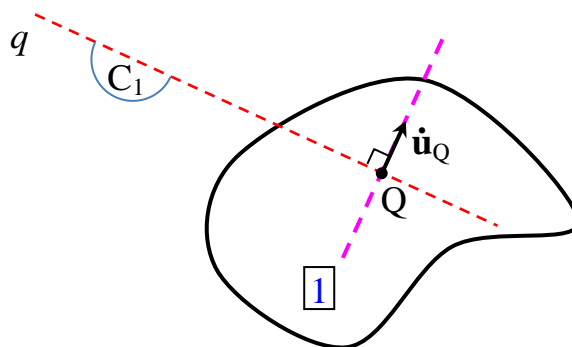
L'atto di moto relativo di un corpo rispetto a un osservatore in movimento solidale con un altro corpo si descrive in modo analogo mediante il CIR relativo:



Teorema di Chasles

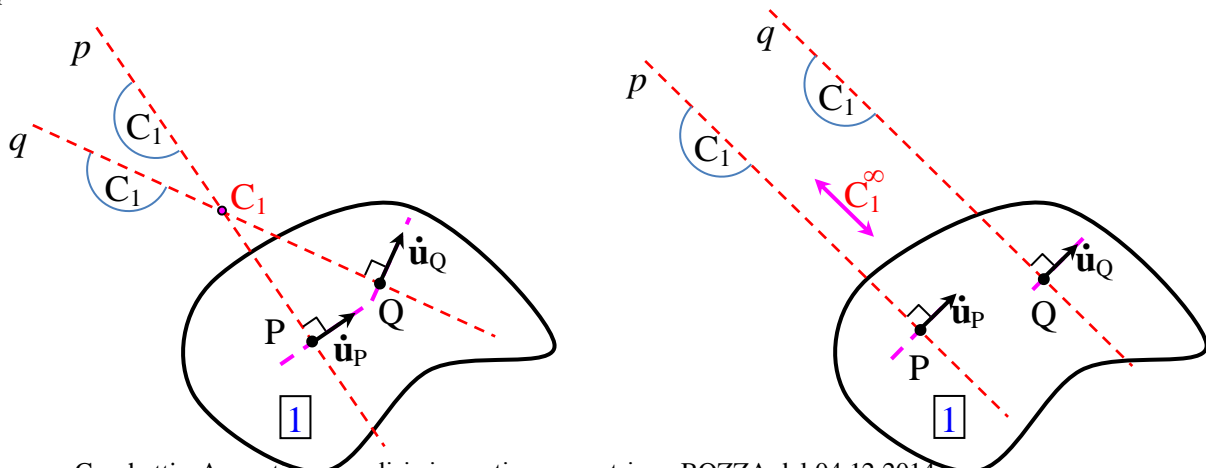
Premessa.

Se per l'atto di moto rigido (assoluto o relativo) di un corpo è nota la direzione del vettore velocità in un punto Q, il CIR (assoluto o relativo) che governa l'atto di moto dovrà appartenere alla retta q ortogonale alla velocità e passante per Q.



Teorema.

Se per l'atto di moto rigido di un corpo è nota la direzione del vettore velocità in due punti distinti P e Q, la posizione del CIR che governa l'atto di moto è determinata dall'intersezione delle due rette p e q .



Effetti dei vincoli.

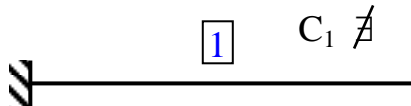
In assenza di vincoli, l'atto di moto rigido di un corpo nel piano è descritto mediante 3 variabili (gradi di libertà, GDL), ad esempio due traslazioni secondo direzioni distinte e una rotazione attorno a un punto proprio del piano.

Un vincolo rappresenta una limitazione dell'atto di moto rigido di un corpo. Tale limitazione si traduce in una riduzione del numero dei GDL del corpo, cioè in una condizione sul CIR del corpo.

Vincoli assoluti.

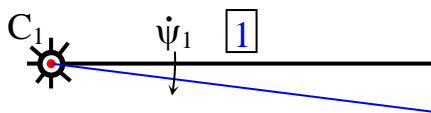
Incastro.

Per definizione, l'incastro elimina i tre GDL del corpo fornendo 3 gradi di vincolo (GDV), cioè impedisce qualunque atto di moto rigido. Dato che un atto di moto si attua se, e solo se, esiste il CIR che lo descrive, l'effetto dell'incastro è di eliminare il CIR del corpo vincolato.



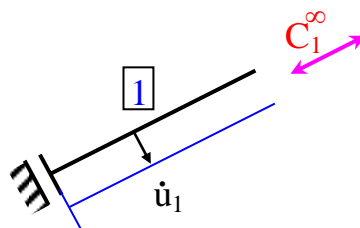
Cerniera.

La cerniera impedisce la traslazione di un punto del corpo, fornendo 2 GDV. Di conseguenza, permette una rotazione del corpo attorno al punto vincolato, punto che diviene il CIR dell'atto di moto rigido del corpo (o "CIR del corpo").



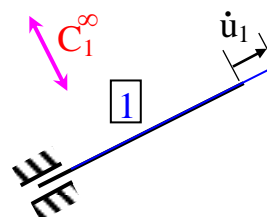
Pattino.

Il pattino impedisce la traslazione e la rotazione del corpo, fornendo 2 GDV. Di conseguenza, permette una traslazione del corpo (in direzione ortogonale a quella vincolata), cioè impone al corpo di avere un CIR all'infinito in direzione ortogonale al movimento permesso.



Manicotto.

Il manicotto fornisce le stesse condizioni del pattino.

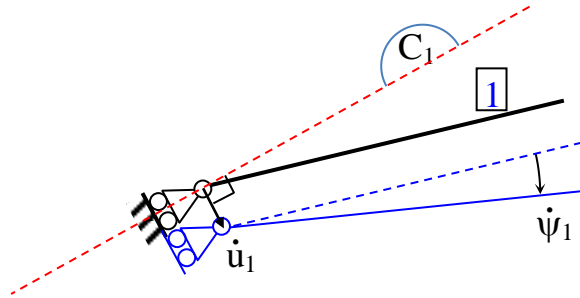


Si noti che il pattino o il manicotto si possono considerare come "cerniere generalizzate" in quanto, come nel caso della cerniera, impongono al CIR del corpo di essere in un punto specifico del piano: un punto proprio nel caso della cerniera; un punto improprio nel caso di pattino o di manicotto.

Carrello.

Il carrello impedisce la traslazione di un punto del corpo secondo un'assegnata direzione (detta "asse del carrello"), fornendo 1 GDV. Di conseguenza, permette una traslazione (in direzione ortogonale all'asse del carrello) e una rotazione del corpo. Il punto vincolato può traslare solamente in direzione ortogonale all'asse del carrello.

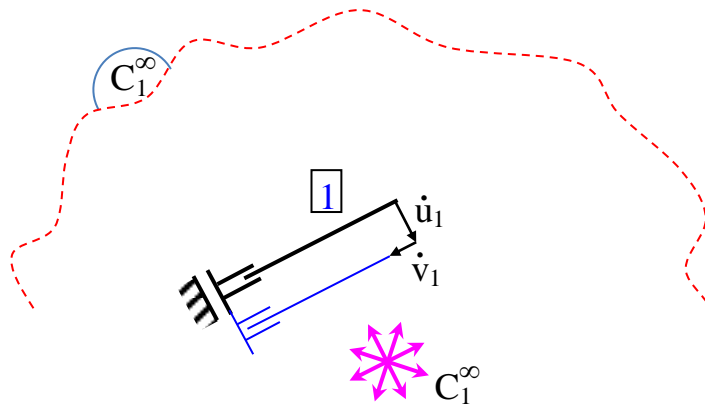
Applicando la premessa al teorema di Chasles, il CIR che descrive l'atto di moto rigido del corpo dovrà appartenere all'asse del carrello, cioè dovrà essere un punto (proprio o improprio) di tale asse.



Bi-pattino (o "pattino-manicotto").

Il bi-pattino impedisce la rotazione del corpo, fornendo 1 GDV. Di conseguenza, permette una traslazione in qualunque direzione, cioè il CIR del corpo potrà essere un qualunque punto improprio del piano.

Si può osservare che il bi-pattino rappresenta la generalizzazione del carrello. Infatti, il luogo dei punti impropri del piano è descritto dall'equazione di una retta, che prende il nome di "retta impropria". Tale retta si può considerare a tutti gli effetti come l'"asse del bi-pattino".

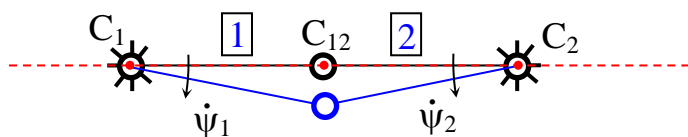


Il carrello e il bi-pattino impongono al CIR del corpo di appartenere al proprio asse, una retta propria o la retta impropria del piano.

Teoremi sulle “catene cinematiche” (dedotti dai Teoremi di Eulero).

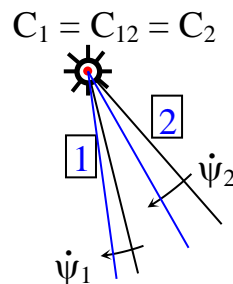
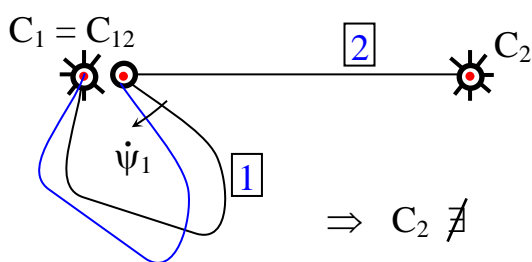
Ia – Se due corpi, i e j , sono caratterizzati da due CIR assoluti (C_i e C_j) e dal CIR relativo (C_{ij}) corrispondenti a tre punti distinti (propri e/o impropri), l'allineamento di tali punti è condizione necessaria per l'esistenza degli atti di moto (due assoluti e uno relativo) dei due corpi, cioè per l'esistenza dei CIR stessi.

Un enunciato alternativo è il seguente: il mancato allineamento dei tre CIR è condizione sufficiente per l'assenza di tali atti di moto, cioè per la non esistenza dei tre CIR.



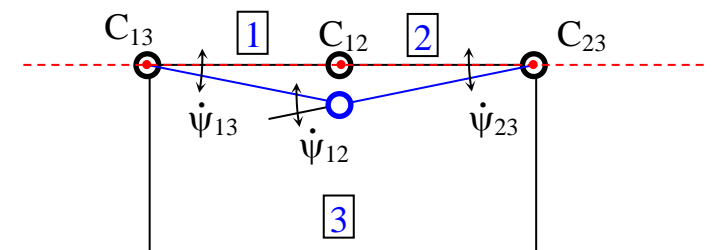
Ib – Se due dei tre CIR (C_i , C_{ij} e C_j) coincidono, la coincidenza con essi del terzo CIR è condizione necessaria per l'esistenza del corrispondente atto di moto, cioè per l'esistenza del terzo CIR.

Un enunciato alternativo è il seguente: la non coincidenza del terzo CIR coi primi due è condizione sufficiente per l'assenza dell'atto di moto associato al terzo CIR, cioè per la non esistenza del terzo CIR.



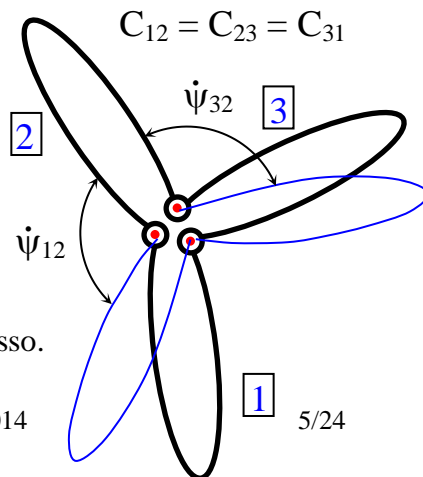
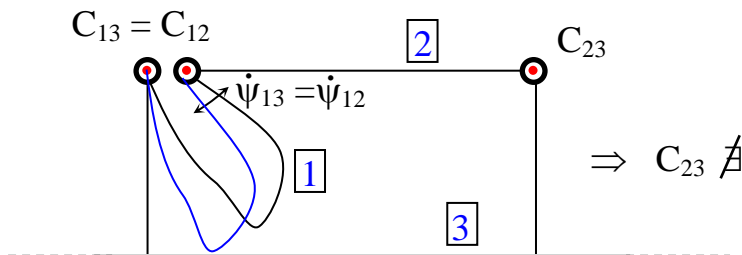
IIa – Se tre corpi, i , j e k , sono caratterizzati da tre CIR relativi (C_{ij} , C_{jk} e C_{ki}) corrispondenti a tre punti distinti (propri e/o impropri), l'allineamento di tali punti è condizione necessaria per l'esistenza degli atti di moto relativo tra i tre corpi, cioè per l'esistenza dei CIR stessi.

Un enunciato alternativo è il seguente: il mancato allineamento dei tre CIR è condizione sufficiente per l'assenza degli atti di moto relativo tra i tre corpi, cioè per la non esistenza dei CIR stessi.



IIb – Se due dei tre CIR (C_{ij} , C_{jk} e C_{ki}) coincidono, la coincidenza con essi del terzo CIR è condizione necessaria per l'esistenza del corrispondente atto di moto, cioè per l'esistenza del terzo CIR.

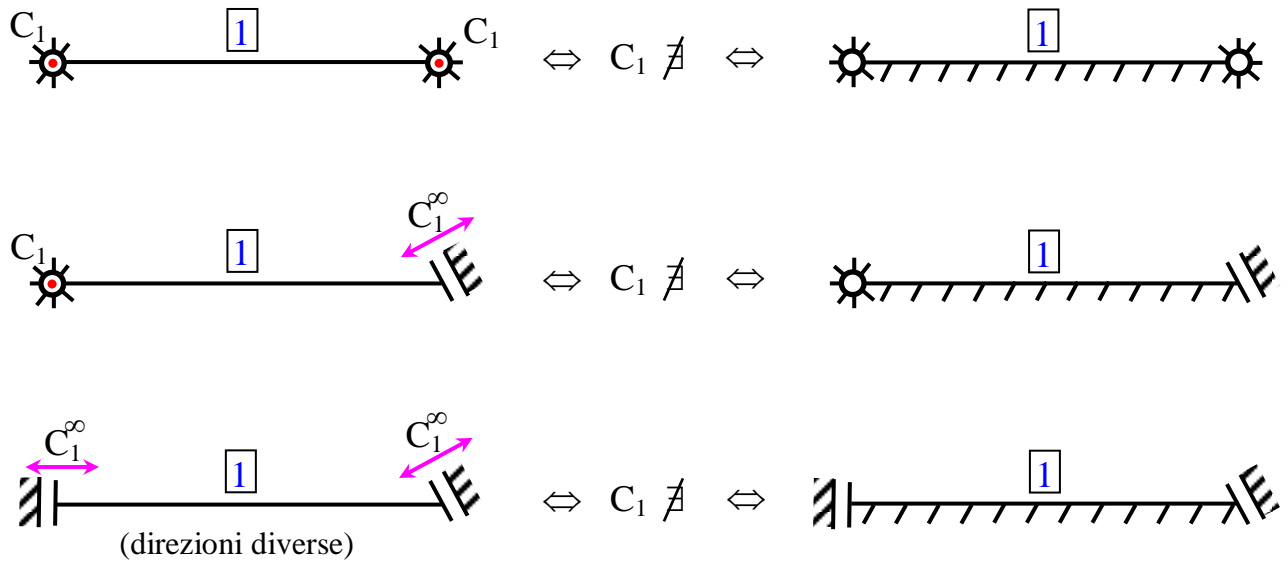
Un enunciato alternativo è il seguente: la non coincidenza del terzo CIR coi primi due è condizione sufficiente per l'assenza dell'atto di moto associato al terzo CIR, cioè per la non esistenza del terzo CIR.



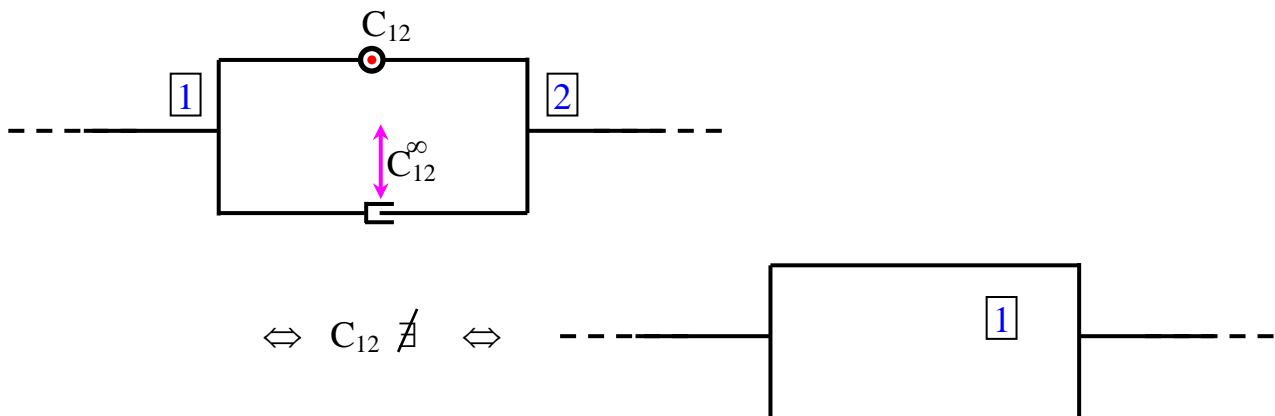
I teoremi II divengono i teoremi I se si assume che uno dei tre corpi sia fisso.

Due cerniere-incastro.

Se esistono due cerniere (anche generalizzate) che impongono due punti distinti per lo stesso potenziale CIR, allora tale CIR e il corrispondente atto di moto non esistono: se il CIR è assoluto, l'asta è fissa; se il CIR è relativo, allora le due aste sono solidali e ne formano una sola.



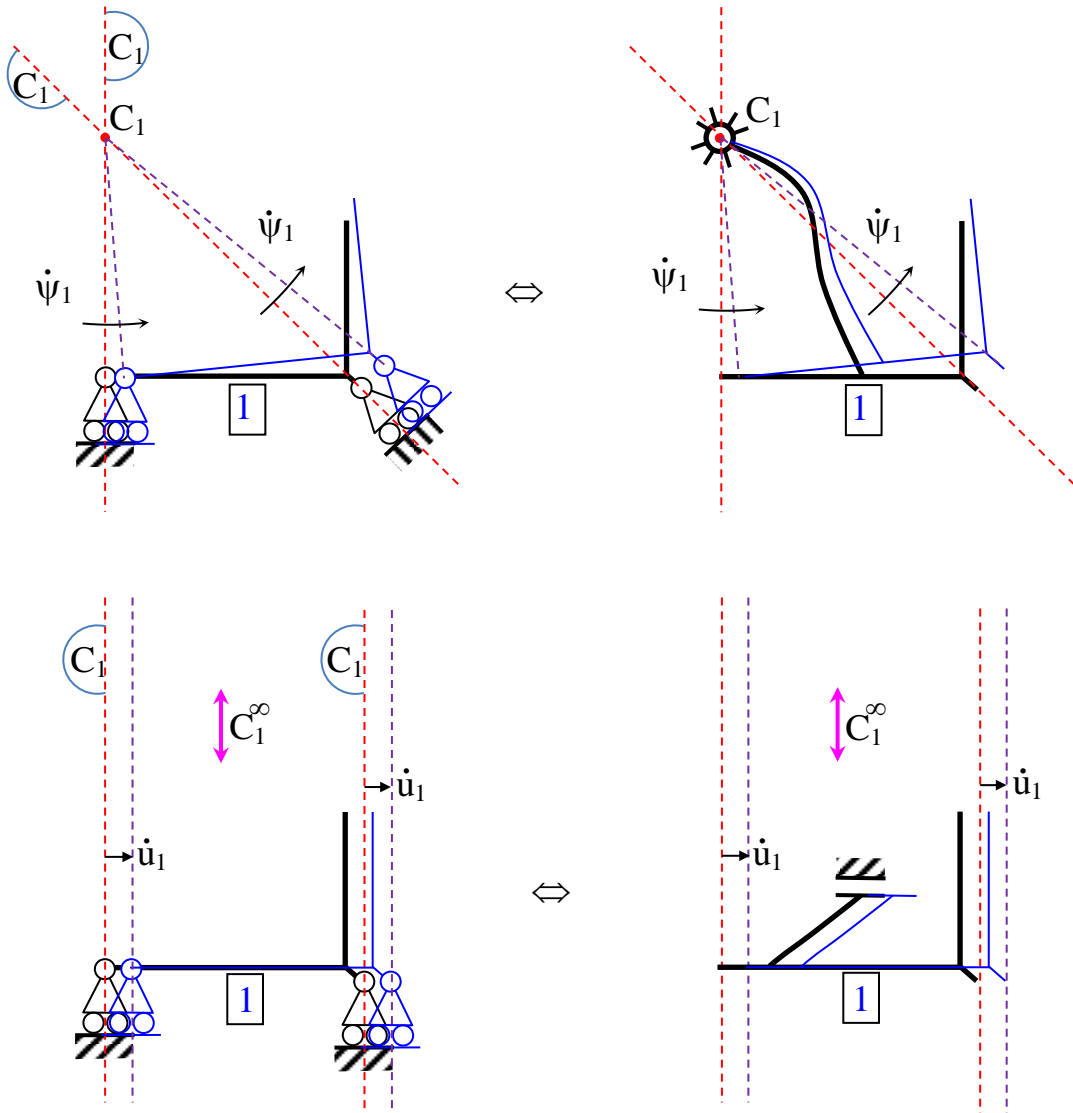
Nel caso di CIR relativo, nell'esempio che segue le aste 1 e 2 divengono solidali ed equivalenti a un'unica asta.



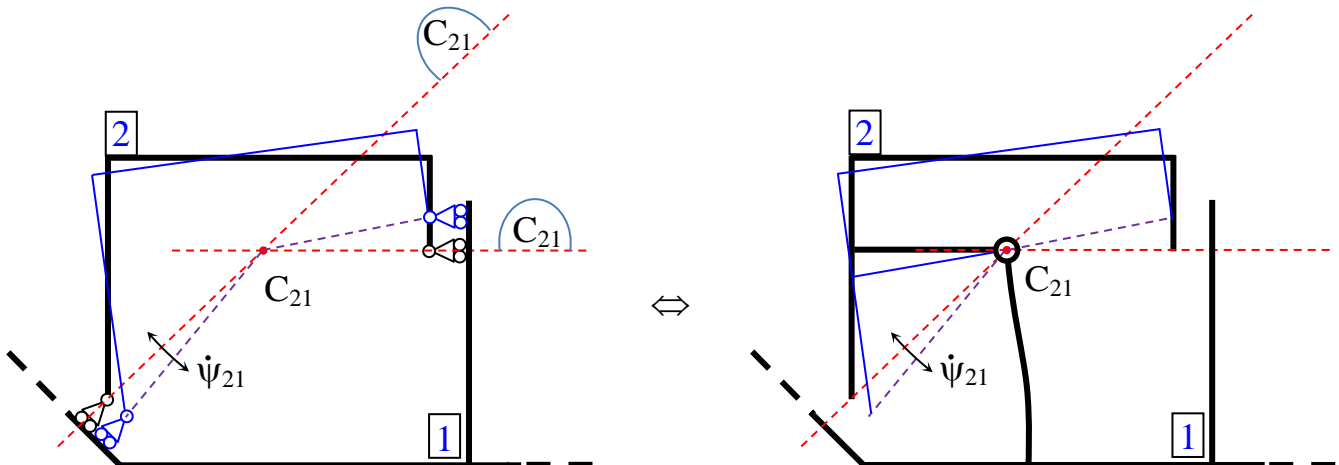
Due carrelli-cerniera.

Se un corpo è vincolato da due carrelli assoluti, il suo CIR (se esiste) è il punto di intersezione degli assi dei due carrelli (teorema di Chasles). Ne consegue che i carrelli possono essere sostituiti da una cerniera (anche generalizzata) che mantenga inalterato il CIR del corpo.

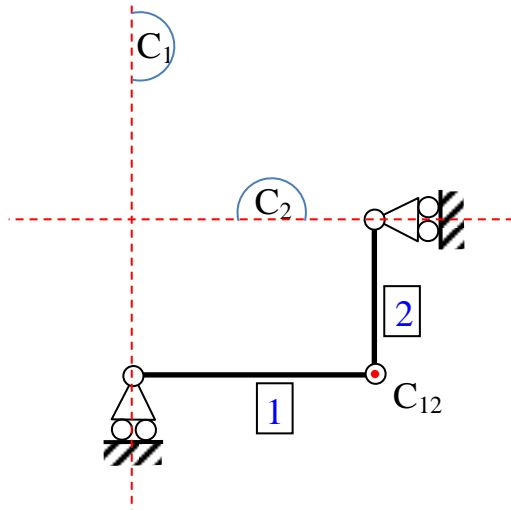
Si noti che, se necessario, per connettere la cerniera (anche generalizzata) al corpo è possibile variare la forma di quest'ultimo.



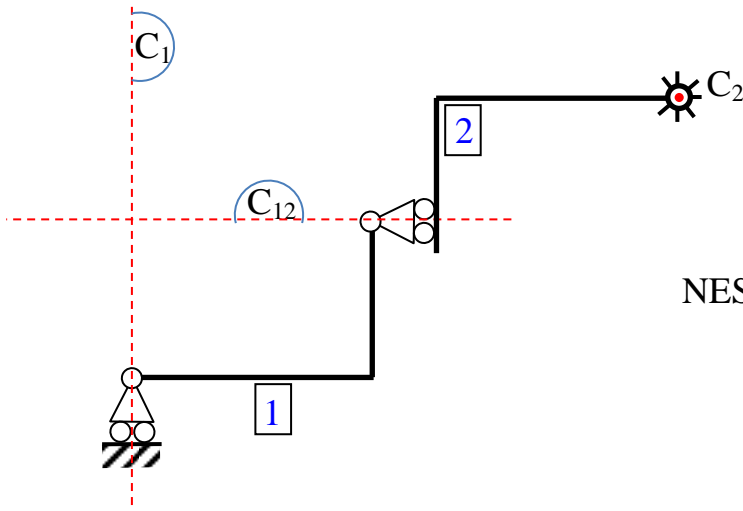
La stessa equivalenza si può applicare anche al caso di carrelli relativi tra due corpi.



Attenzione: se i due carrelli governano CIR diversi, il punto di intersezione degli assi non ha alcun significato e l'equivalenza non si può applicare.



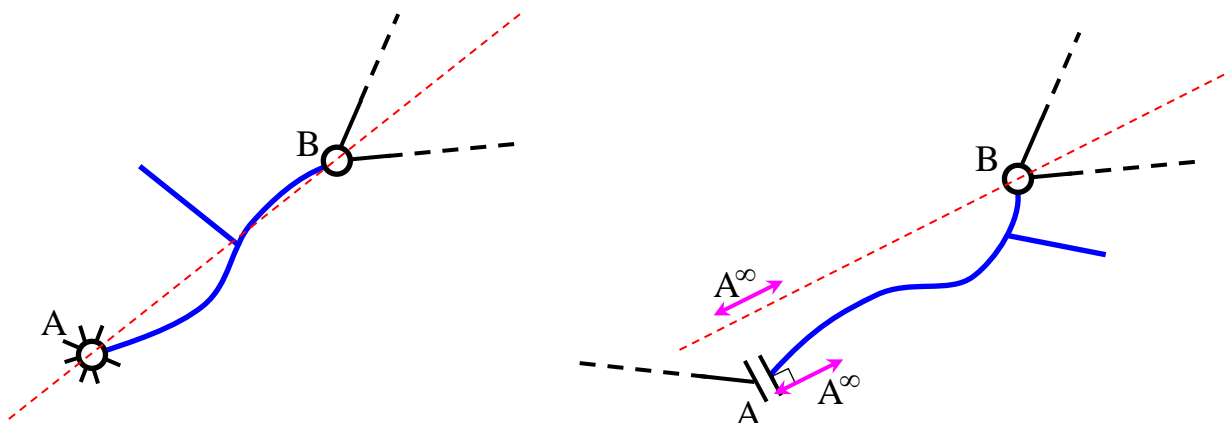
NESSUNA EQUIVALENZA



NESSUNA EQUIVALENZA

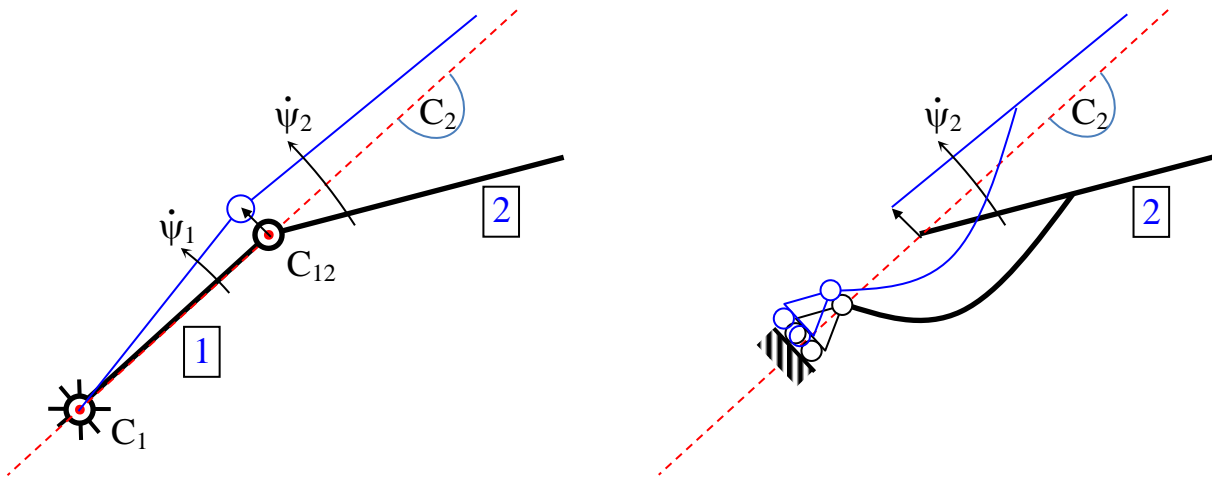
Biella-carrello.

Si definisce “biella cinematica” un’asta collegata al resto della struttura (o a terra) esclusivamente mediante due cerniere (eventualmente generalizzate). L’“asse della biella” è la retta che passa per le due cerniere di estremità (A e B nella figura a sinistra, A^∞ e B nella figura a destra).

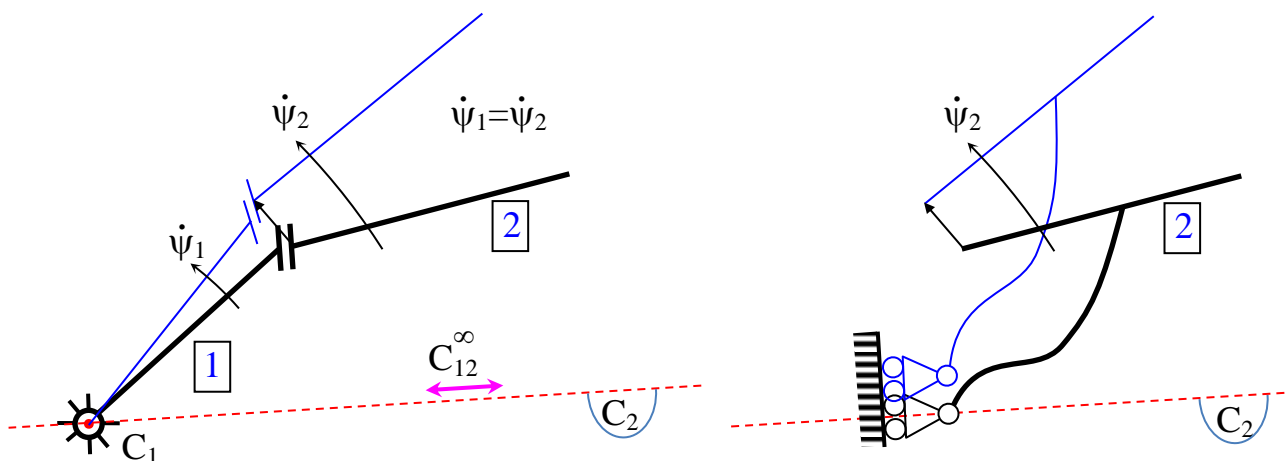


Si consideri un corpo (n.2) collegato a terra tramite una biella (n.1). Il CIR assoluto della biella (C_1), se esiste, deve coincidere con la cerniera a terra; il CIR relativo (C_{12}), se esiste, deve trovarsi in corrispondenza della cerniera relativa; il CIR assoluto del corpo 2, per esistere, deve essere allineato con C_1 e C_{12} (teorema I sulle catene cinematiche), cioè deve appartenere alla retta passante per C_1 e C_{12} , detta “asse della biella”.

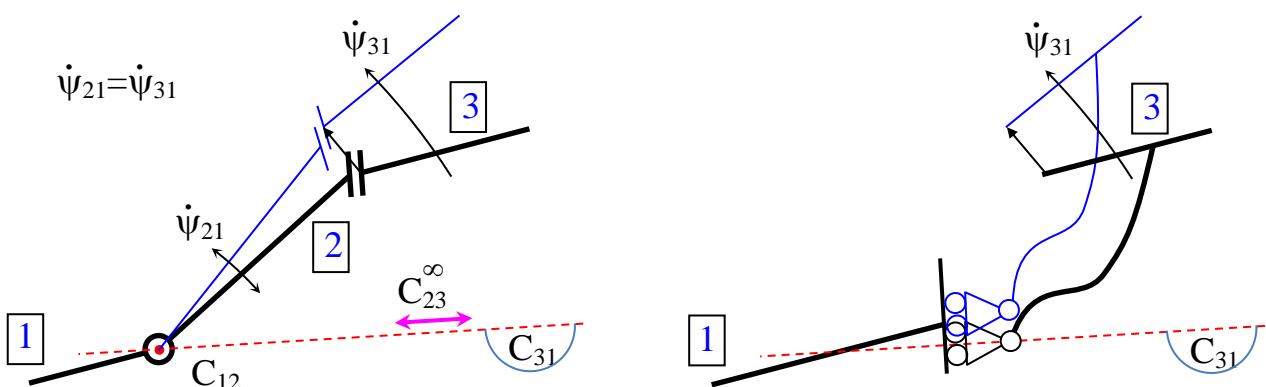
L'atto di moto rigido del corpo 2 rimane inalterato se si vincola tale corpo con un carrello assoluto avente asse coincidente con l'asse della biella.



Si noti che l'asse della biella è univocamente definito anche se uno dei due CIR è un punto improprio. Infatti, per un punto proprio e uno improprio passa una e una sola retta.



Analoghe considerazioni valgono nel caso di una biella che collega due corpi distinti.



Tutte le equivalenze cinematiche sin qui discusse permettono di sostituire la struttura di partenza con una più semplice da analizzare. L'equivalenza garantisce che, nelle due strutture, la stessa asta sia caratterizzata dallo stesso atto di moto rigido.

Procedimento operativo per l'analisi cinematica delle strutture.

Nell'analisi cinematica di una struttura, si inizia applicando le equivalenze cinematiche al fine di semplificarla senza modificarne la cinematica. Poi, si **ipotizza** che tutte le aste siano caratterizzate da atti di moto, cioè che tutti i (potenziali) CIR assoluti e relativi esistano. Successivamente, utilizzando i teoremi sulle catene cinematiche, si impongono gli opportuni allineamenti per determinare le posizioni di tutti i CIR (relativi e assoluti). Se per un CIR si ottengono due posizioni distinte, o se tre CIR (scelti secondo i teoremi I o II sulle catene cinematiche) risultano non allineati, allora questi CIR (e i corrispondenti atti di moto, relativi o assoluti) non esistono.

Si noti che le considerazioni sull'analisi cinematica possono riguardare anche solo una parte di una struttura, cioè si può eliminare (temporaneamente) la parte di struttura non coinvolta nella discussione.

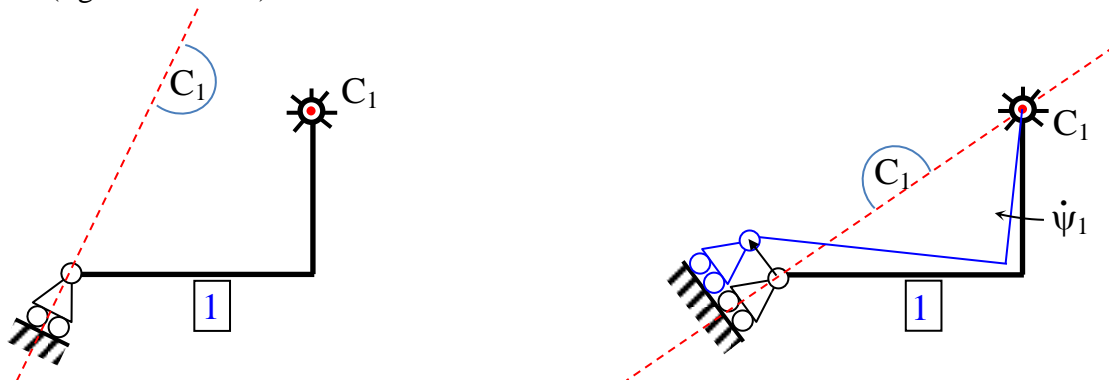
Strutture elementari.

Alcune strutture, particolarmente semplici, si presentano frequentemente in strutture più complesse, per cui è opportuno svolgerne l'analisi cinematica sin d'ora al fine di semplificare l'analisi delle strutture più complesse.

Trave cerniera-carrello.

Se tra i vincoli applicati a un'asta si possono individuare una cerniera e un carrello **che governano lo stesso CIR dell'asta**, il sistema prende il nome di “trave cerniera-carrello”.

Ad esempio, si consideri la struttura seguente formata da un'asta e da una cerniera e un carrello assoluti (figura a sinistra).



L'ipotesi iniziale è che i vincoli siano compatibili con l'esistenza di un atto di moto dell'asta, cioè che il CIR assoluto C_1 esista.

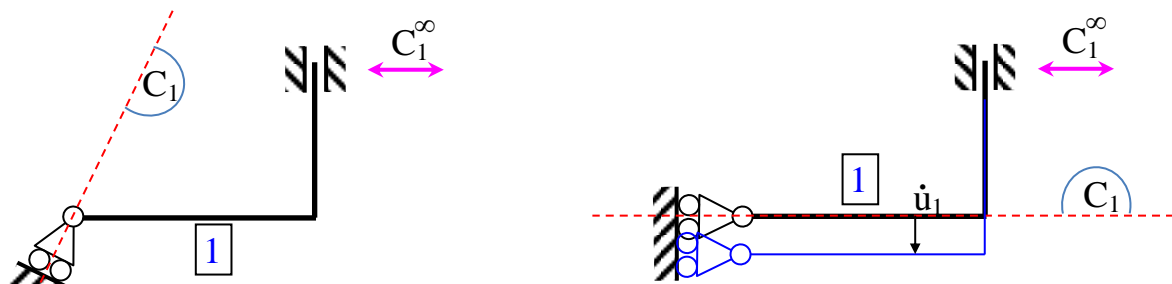
La cerniera limita il potenziale atto di moto dell'asta imponendo a C_1 di coincidere con la cerniera stessa.

Il carrello impone **allo stesso CIR** C_1 di appartenere al proprio asse.

Se l'asse del carrello non passa per la cerniera, le imposizioni fornite dai vincoli non possono essere contemporaneamente soddisfatte; di conseguenza, C_1 non può esistere: il potenziale atto di moto rigido dell'asta 1 non è compatibile coi vincoli, per cui l'asta 1 è fissa.

In alternativa, se l'asse del carrello passa per la cerniera (figura a destra) le imposizioni di entrambi i vincoli possono essere soddisfatte dal CIR C_1 coincidente con la cerniera: in assenza di ulteriori vincoli, la struttura ammette come atto di moto una rotazione rigida attorno a C_1 , e si definisce “labile”.

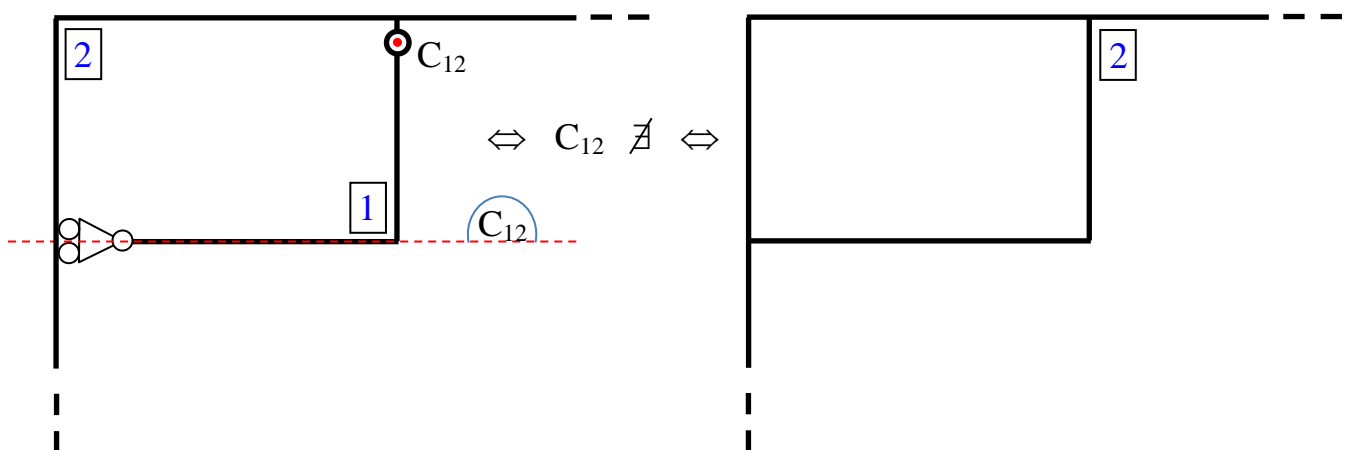
Un altro esempio di trave cerniera-carrello con vincoli assoluti è il seguente:



Il manicotto impone al potenziale CIR dell'asta 1 di essere il punto improprio in direzione orizzontale (C_1^∞). Se l'asse del carrello non è orizzontale (figura a sinistra), non passa per C_1^∞ per cui C_1^∞ non può esistere: l'asta 1 è fissa.

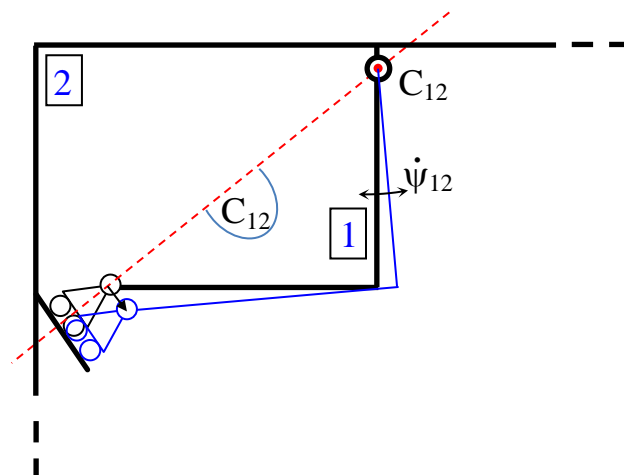
Invece, se l'asse del carrello è orizzontale (figura a destra), entrambi i vincoli sono compatibili con l'esistenza di C_1^∞ (che coincide col punto improprio dell'asse del carrello), per cui la struttura è labile e l'atto di moto rigido è rappresentato dalla traslazione della stessa in direzione verticale.

Un esempio di trave cerniera-carrello con vincoli relativi è rappresentato di seguito.

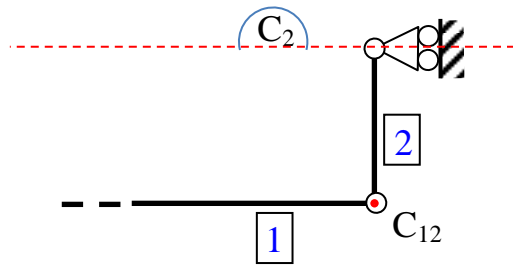


Sia il carrello relativo sia la cerniera relativa impongono condizioni sul CIR relativo tra le aste 1 e 2 (C_{12}). L'asse del carrello non passa per la cerniera, per cui C_{12} non può esistere: la struttura è internamente fissa, cioè i vincoli non permettono alle due aste di avere atti di moto relativi. Le aste 1 e 2 possono allora essere unite in una sola asta (2).

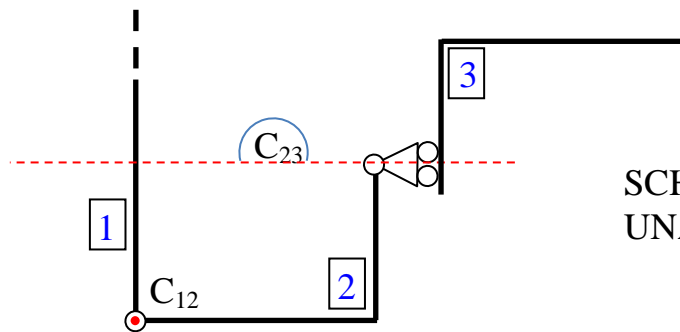
Viceversa, se l'asse del carrello passa per la cerniera le aste 1 e 2 (in assenza di altri vincoli) ammettono un CIR relativo C_{12} situato in corrispondenza della cerniera, e la struttura è detta "internamente labile".



Attenzione: se il carrello e la cerniera governano CIR diversi, lo schema non è riconducibile a una trave cerniera-carrello.



SCHEMA NON RICONDUCEBILE A
UNA TRAVE CERNIERA-CARRELLO

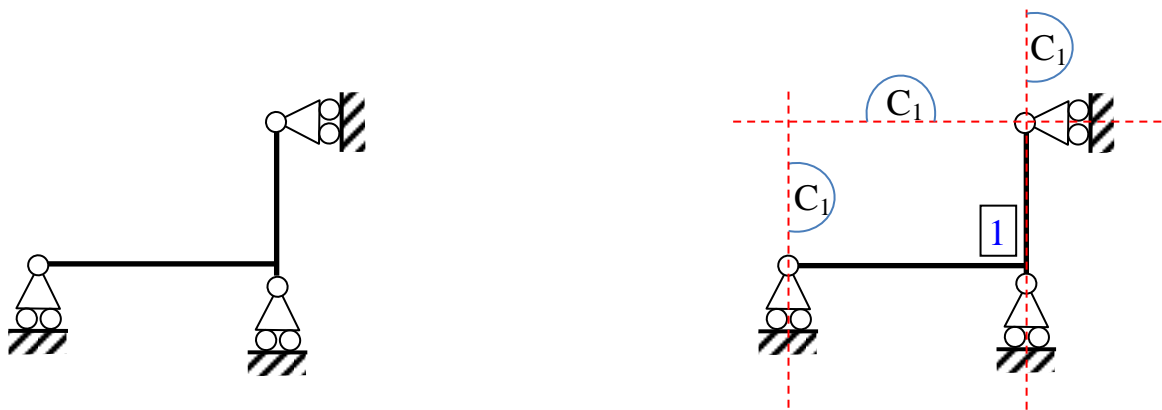


SCHEMA NON RICONDUCEBILE A
UNA TRAVE CERNIERA-CARRELLO

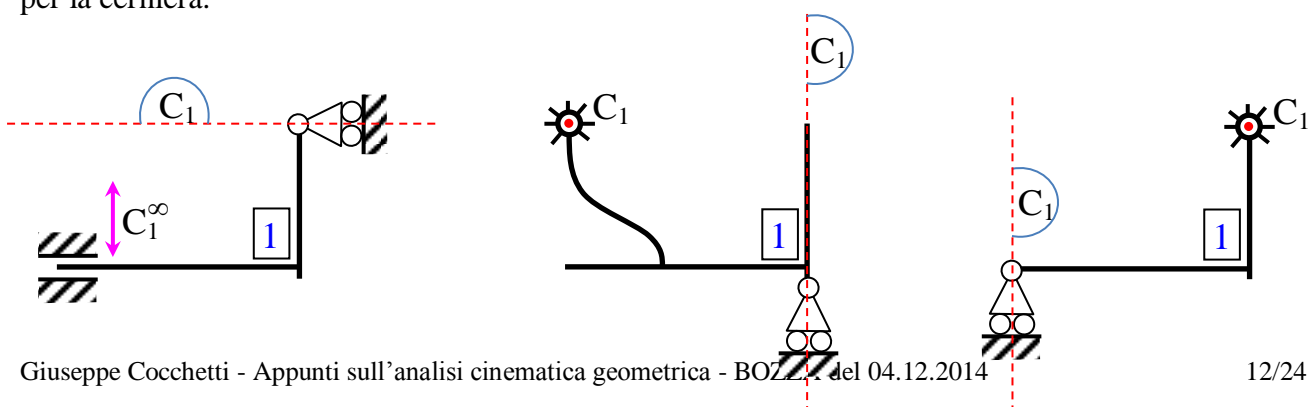
Trave su tre carrelli.

Lo schema strutturale composto da un'asta vincolata con tre carrelli che governano lo stesso CIR prende il nome di "trave su tre carrelli".

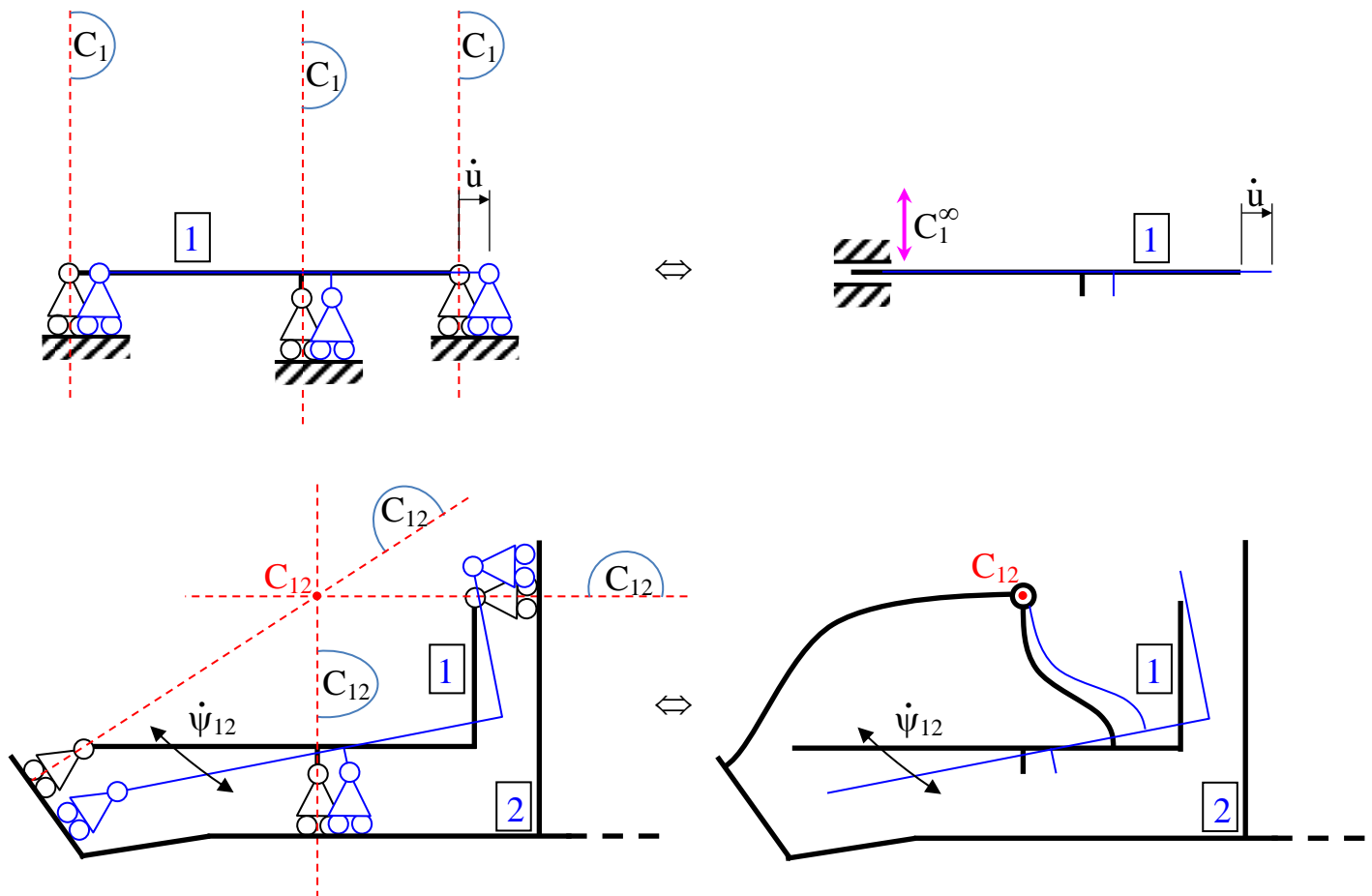
Nell'esempio seguente, ogni carrello impone al CIR assoluto dell'asta (C_1) di appartenere al proprio asse. I tre assi non hanno un punto in comune, per cui C_1 non può esistere e l'asta 1 è fissa.



In alternativa, si può osservare che due dei tre carrelli possono essere sostituiti da una cerniera assoluta, ottenendo così uno schema di trave cerniera-carrello, con l'asse del carrello che non passa per la cerniera.



Se, invece, come negli esempi seguenti, i tre assi concorrono in un punto (proprio o improprio), in assenza di altri vincoli il sistema è labile.

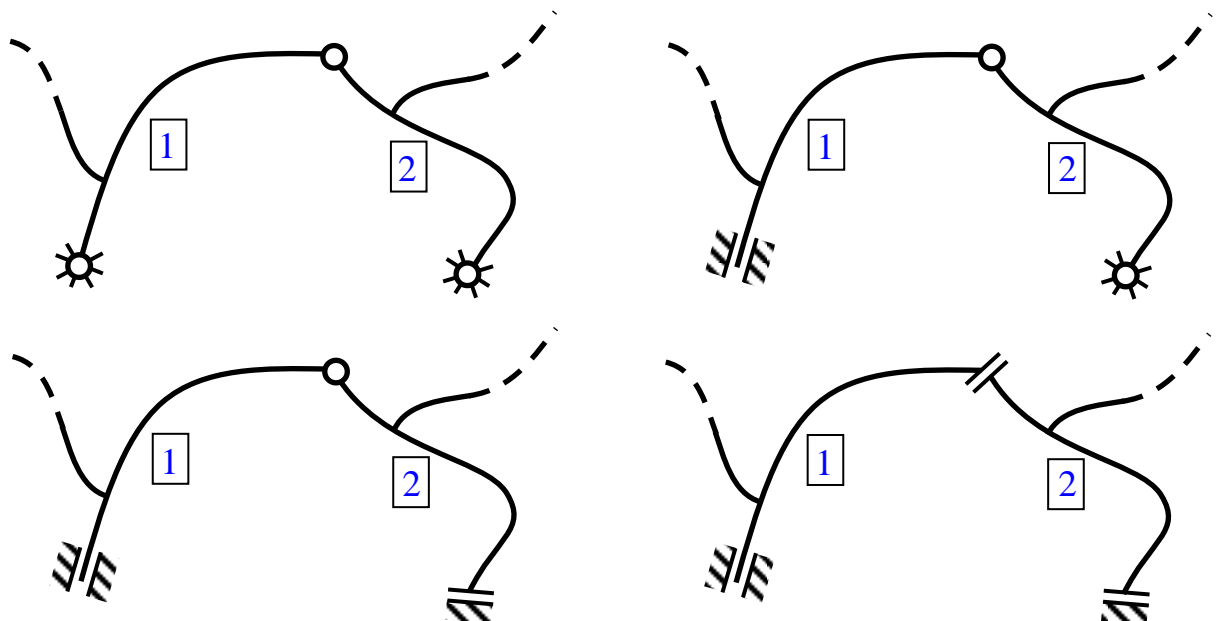


Arco a tre cerniere.

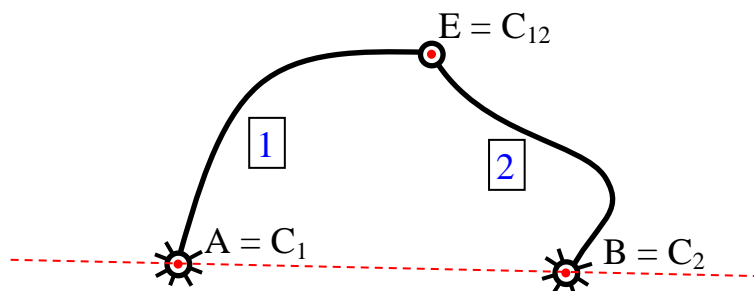
Una struttura, o una parte di essa, formata da:

- due aste,
- ciascuna vincolata a terra da una cerniera fissa (eventualmente generalizzata),
- mutuamente vincolate da una cerniera relativa (eventualmente generalizzata),

si definisce “arco a tre cerniere”. Alcuni esempi sono rappresentati nella figura seguente.



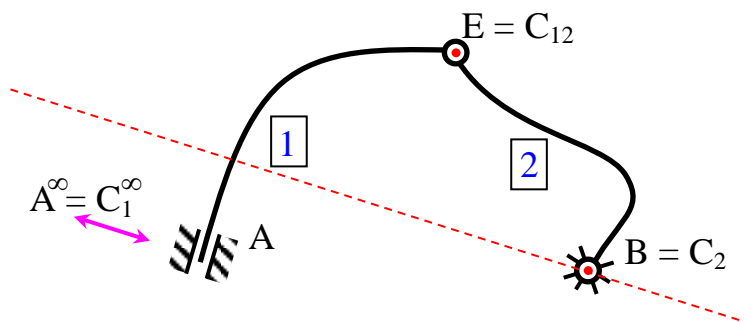
L'analisi cinematica del primo arco a tre cerniere si svolge in modo immediato.



Il CIR assoluto dell'asta 1 (C_1), se esiste, deve coincidere con la cerniera in A; il CIR assoluto dell'asta 2 (C_2), se esiste, deve coincidere con la cerniera in B. L'allineamento dei due CIR assoluti con il CIR relativo è condizione necessaria per l'esistenza degli atti di moto, cioè per l'esistenza degli stessi tre CIR.

In questo caso, il CIR relativo tra le due aste (C_{12}), se esiste, deve coincidere con la cerniera relativa in E, e non appartiene alla retta AB: i tre CIR non sono allineati. Di conseguenza, gli atti di moto non si possono realizzare (cioè “non sono compatibili coi vincoli presenti”) e i tre CIR non esistono. La struttura è fissa (cioè “non labile”).

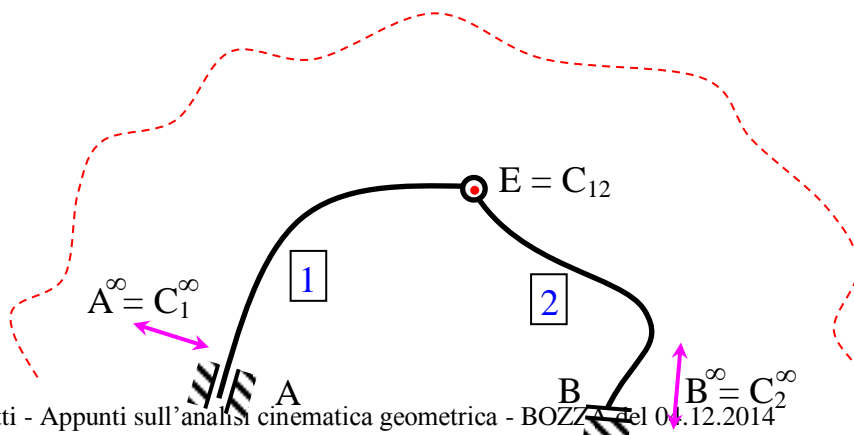
Considerazioni analoghe si possono fare per la seconda struttura.



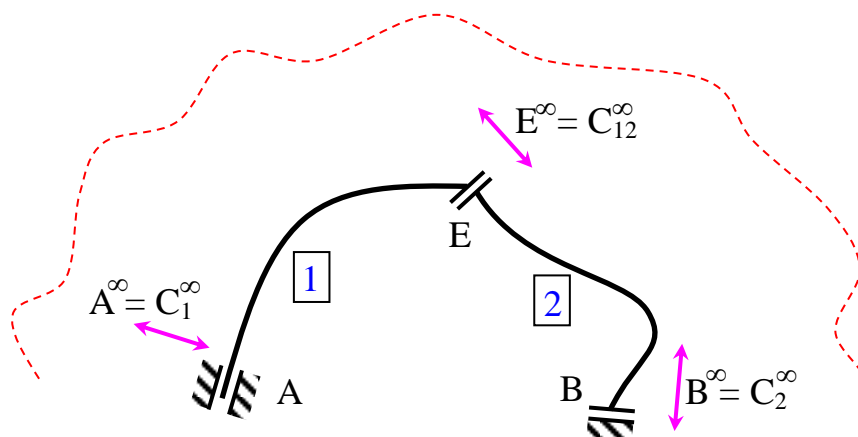
Il CIR assoluto dell'asta 1 (C_1^∞), se esiste, deve coincidere con il punto improprio A^∞ , punto che individua la direzione ortogonale al piano di scorrimento del manicotto in A; il CIR assoluto dell'asta 2 (C_2), se esiste, deve coincidere con la cerniera in B. Il CIR relativo tra le due aste (C_{12}), se esiste, deve coincidere con la cerniera relativa in E, e non appartiene alla retta $A^\infty B$: i tre CIR non sono allineati. Di conseguenza, gli atti di moto non si possono realizzare (cioè “non sono compatibili coi vincoli presenti”) e i tre CIR non esistono.

La struttura è fissa (cioè “non labile”).

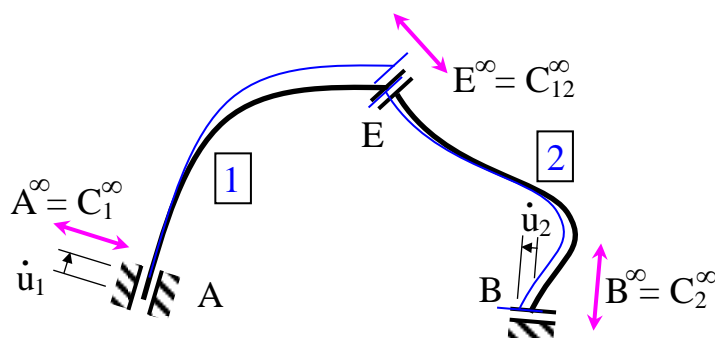
Per la terza struttura il ragionamento si ripete utilizzando i due punti impropri A^∞ e B^∞ (punti distinti in quanto associati a direzioni diverse), rispettivamente potenziali CIR assoluti per le aste 1 ($A^\infty = C_1^\infty$) e 2 ($B^\infty = C_2^\infty$). La retta che passa per i due punti impropri è la retta impropria, luogo di tutti e soli i punti impropri: tale retta, evidentemente, non passa per il CIR relativo tra le due aste ($E = C_{12}$), punto proprio, per cui i tre CIR non sono allineati e la struttura è fissa.



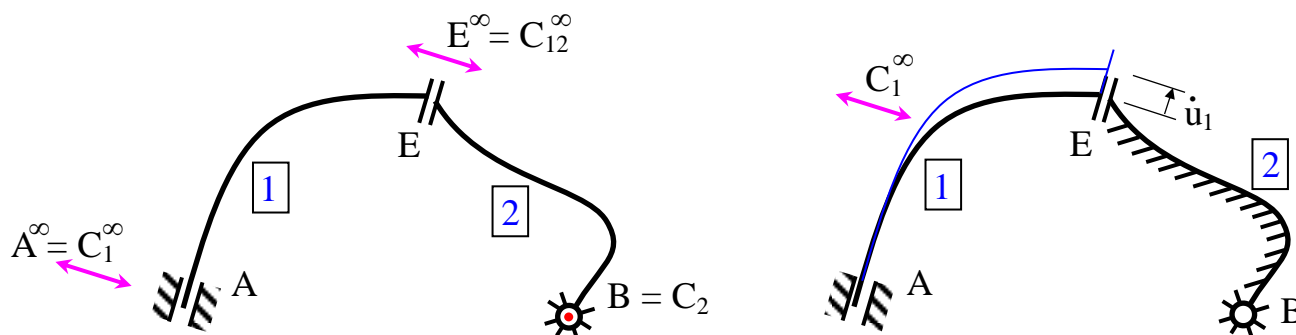
Per la quarta struttura il ragionamento coinvolge solo punti impropri (A^∞ , B^∞ ed E^∞ , punti distinti in quanto associati a direzioni diverse), potenziali CIR assoluti per le aste 1 ($A^\infty = C_1^\infty$) e 2 ($B^\infty = C_2^\infty$) e potenziale CIR relativo tra le due aste ($E^\infty = C_{12}^\infty$).



In questo caso, i tre punti risultano allineati dato che appartengono alla stessa retta (impropria): in assenza di altri vincoli la struttura è labile e le due aste sono soggette ad atti di moto (assoluto e relativo) di tipo traslatorio.



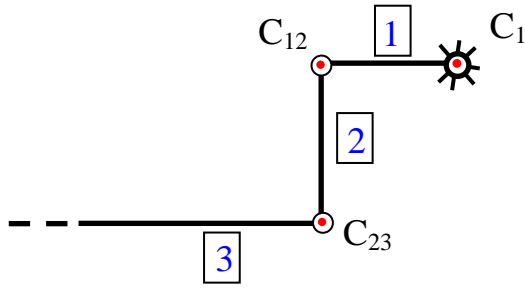
Si noti che se due dei tre CIR coincidono, si possono applicare i teoremi Ib o IIb sulle catene cinematiche anche nel caso in cui questi CIR siano punti impropri. Come esempio si consideri il seguente arco a tre cerniere, in cui il manicotto in A e il pattino relativo in E evidenziano piani di scorrimento paralleli. Ne consegue che il (potenziale) CIR assoluto dell'asta 1 ($C_1^\infty = A^\infty$) e quello relativo tra le due aste ($C_{12}^\infty = E^\infty$) coincidono, mentre il (potenziale) CIR assoluto dell'asta 2 coincide con la cerniera in B ($C_2 = B$), figura a sinistra.



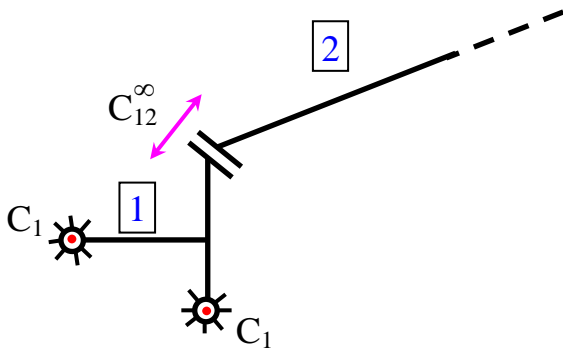
I tre punti sono evidentemente allineati dato che, geometricamente, si riducono a due soli punti ($A^\infty = E^\infty$ e B) per cui, in assenza di altri vincoli, la struttura è labile.

Essendo $C_2 \neq C_{12}^\infty = C_1^\infty$, l'applicazione del teorema Ib sulle catene cinematiche permette di dire che il CIR assoluto C_2 non esiste, cioè che l'asta 2 è fissa. Invece, l'asta 1 può traslare in direzione ortogonale a C_1^∞ , parallelamente ai piani di scorrimento del manicotto e del pattino (figura a destra).

Attenzione: se lo schema strutturale non è esattamente quello indicato nella definizione, allora non è un arco a tre cerniere.



SCHEMA **NON** RICONDUCIBILE
A UN ARCO A TRE CERNIERE



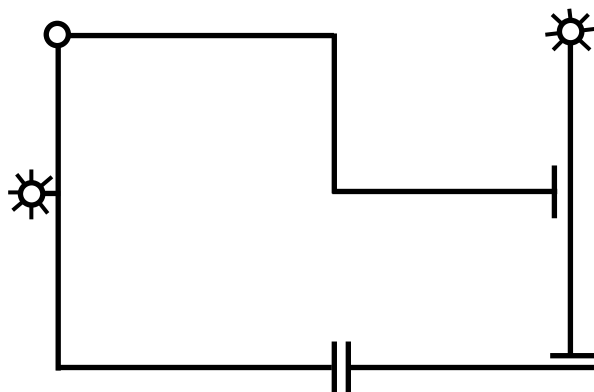
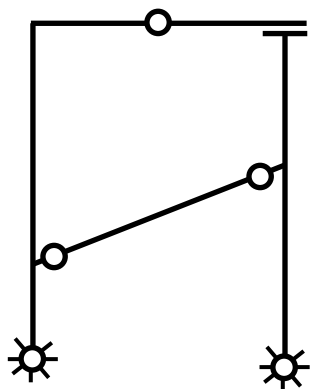
SCHEMA **NON** RICONDUCIBILE
A UN ARCO A TRE CERNIERE

Quadrilatero articolato.

Una struttura, o una parte di essa, formata da:

- due aste,
- ciascuna vincolata a terra da una cerniera fissa (eventualmente generalizzata),
- mutuamente vincolate da due bielle,

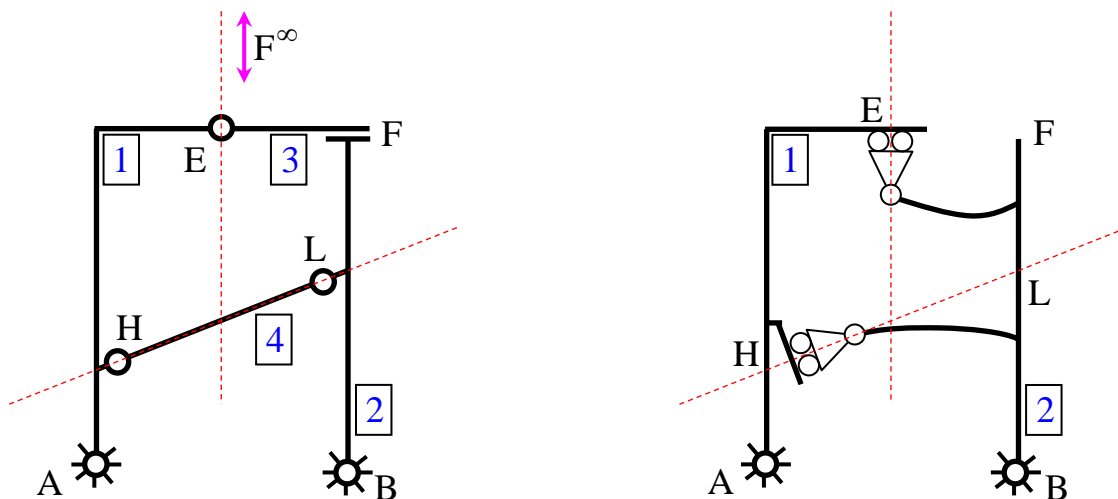
si definisce “quadrilatero articolato”. Alcuni esempi sono rappresentati nella figura seguente (alcune cerniere sono state leggermente spostate rispetto al nodo a cui si riferiscono per maggiore chiarezza grafica).



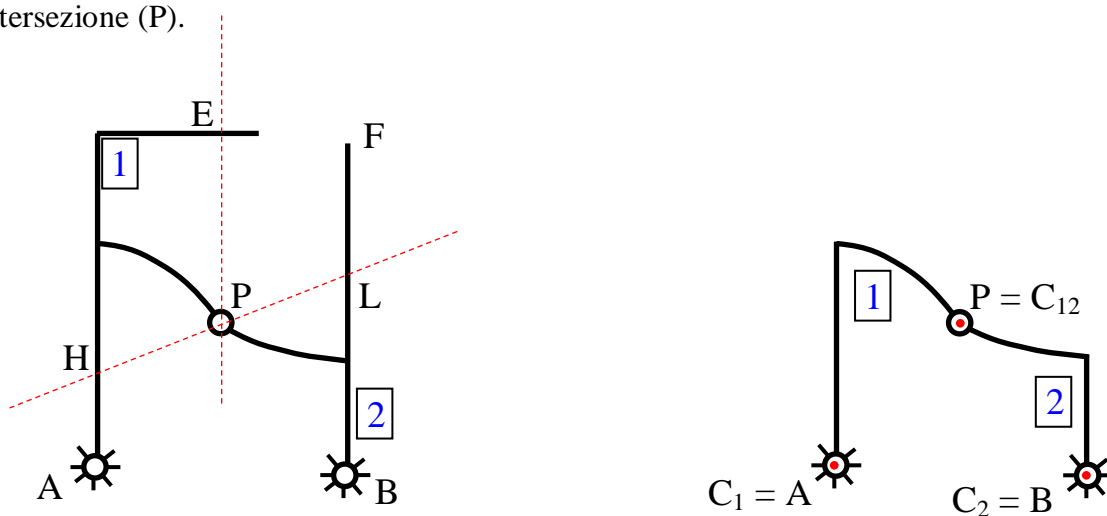
L'analisi cinematica di un quadrilatero articolato si può svolgere in vari modi; uno dei più semplici consiste nel ricondurre il quadrilatero a un arco a tre cerniere mediante equivalenze cinematiche.

Ad esempio, analizzando la struttura a sinistra nella figura precedente, si possono riconoscere le aste 3 e 4 come bielle, i cui assi (HL ed EF^∞) sono indicati dalle rette tratteggiate nelle figure seguenti.

Le bielle possono essere sostituite con carrelli: entrambe connettono le aste 1 e 2 e ciascuna può essere sostituita da un carrello relativo che vincola le stesse aste (equivalenza biella-carrello).



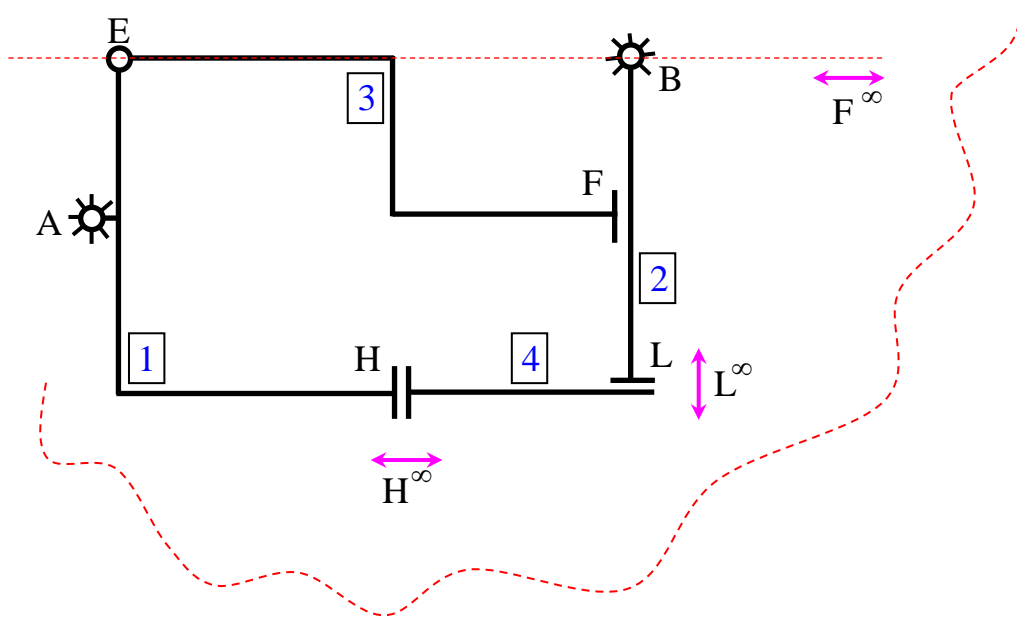
A questo punto, si può procedere con una ulteriore equivalenza cinematica: i due carrelli connettono le stesse aste (1 e 2), per cui possono essere sostituiti da una cerniera relativa posta nel loro punto di intersezione (P).



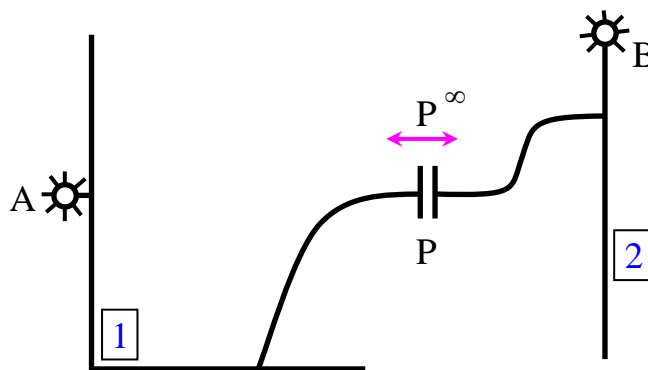
La struttura di partenza è così ricondotta, mediante equivalenze cinematiche, a un arco a tre cerniere in cui: il CIR assoluto dell'asta 1 coincide con la cerniera in A ($C_1 = A$); il CIR assoluto dell'asta 2 coincide con la cerniera in B ($C_2 = B$); il CIR relativo tra le due aste coincide con la cerniera in P. In questo caso, i tre CIR non sono allineati per cui l'arco a tre cerniere è non labile (fisso); il quadrilatero articolato di partenza è cinematicamente equivalente all'arco a tre cerniere e, dunque, anch'esso è non labile, cioè composto da aste fisse.

In generale, l'analisi cinematica di un quadrilatero articolato si può ricondurre a quella di un arco a tre cerniere ottenuto sostituendo le due bielle del quadrilatero con una cerniera relativa, posta nel punto di intersezione degli assi delle due bielle e connessa alle due aste rimanenti.

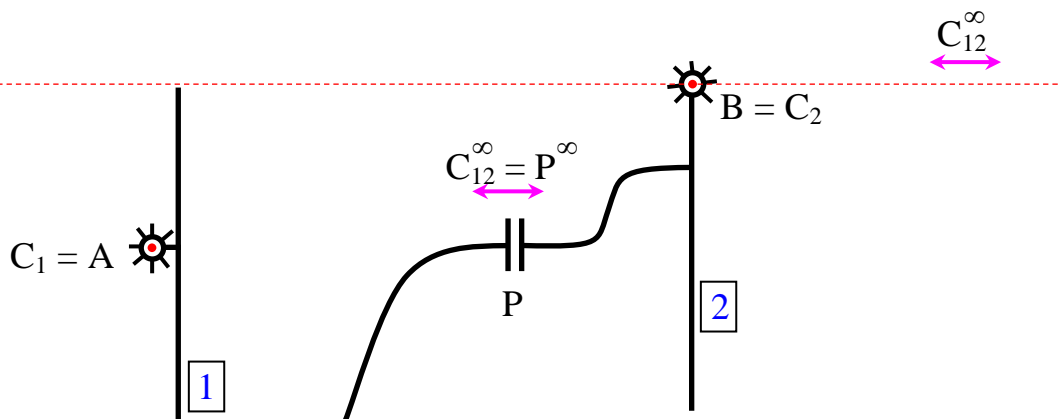
Il secondo quadrilatero articolato può essere analizzato analogamente al primo. L'asse della biella 3 è la retta EF^∞ ; l'asse della biella 4 è la retta impropria (la biella 4 può essere sostituita con un bi-pattino).



Il punto di intersezione dei due assi è il punto improprio in direzione orizzontale (P^∞), per cui le due bielle possono essere sostituite da un pattino relativo con piano di scorrimento verticale (si noti che il pattino può essere messo in un punto generico del piano).



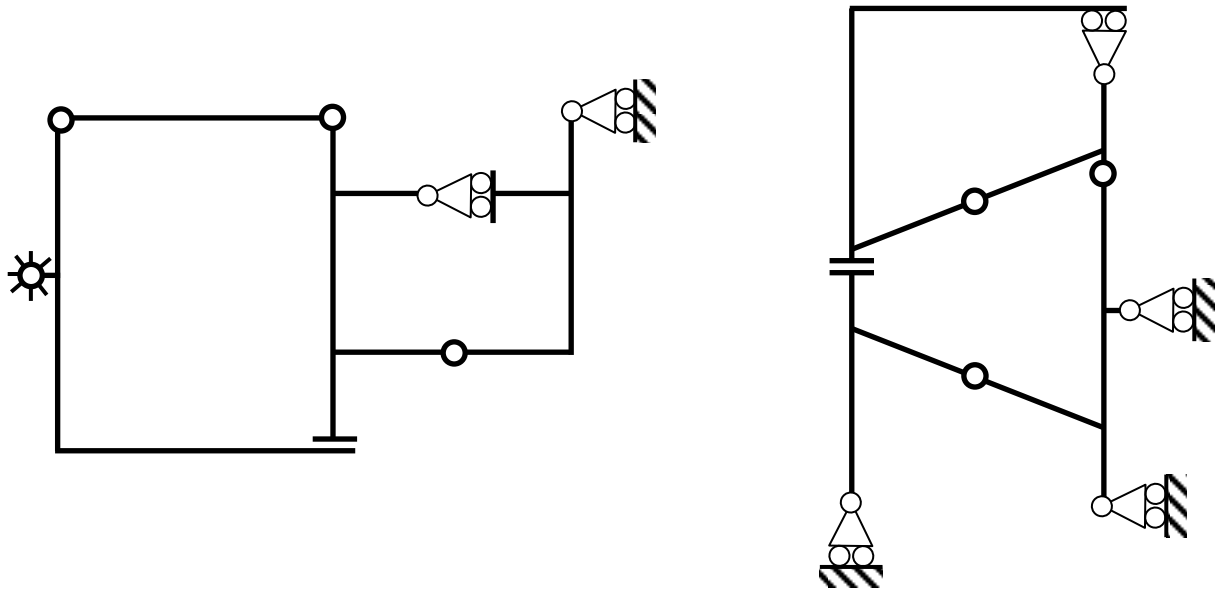
Anche in questo caso i tre CIR ($C_1 = A$, $C_2 = B$, $C_{12}^\infty = P^\infty$) risultano non allineati, per cui l'arco a tre cerniere è non labile; di conseguenza anche il quadrilatero articolato di partenza è non labile.



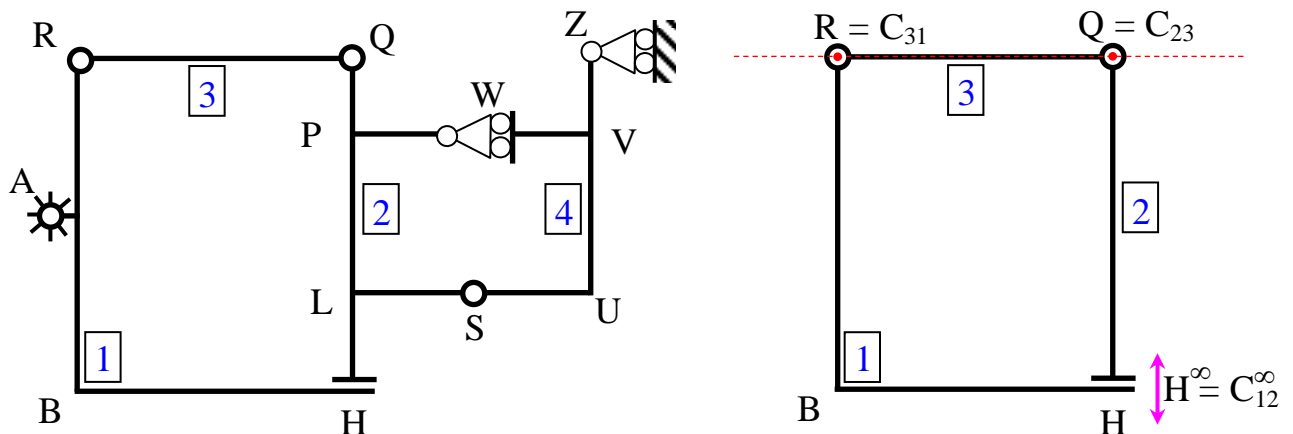
Anello chiuso isostatico.

In una struttura, un anello chiuso è definito come un percorso continuo chiuso lungo varie aste. Le aste lungo il percorso possono essere connesse da vincoli interni: se lungo l'anello si incontrano tre cerniere (non sovrapposte, eventualmente generalizzate) oppure si incontrano una cerniera (eventualmente generalizzata) e un carrello (non sovrapposti), allora l'anello chiuso è detto "isostatico".

In ognuna delle seguenti strutture si possono evidenziare degli anelli chiusi isostatici: due nella struttura a sinistra, uno in quella a destra.



In questi casi, l'analisi cinematica si deve svolgere partendo dagli anelli chiusi. Nella struttura a sinistra, il primo anello chiuso è individuato dal percorso BHLPQRB (aste 1, 2 e 3); lungo il percorso si incontrano tre vincoli relativi: il pattino in H e le cerniere in Q e R. Dunque, per definizione, è un anello chiuso isostatico.

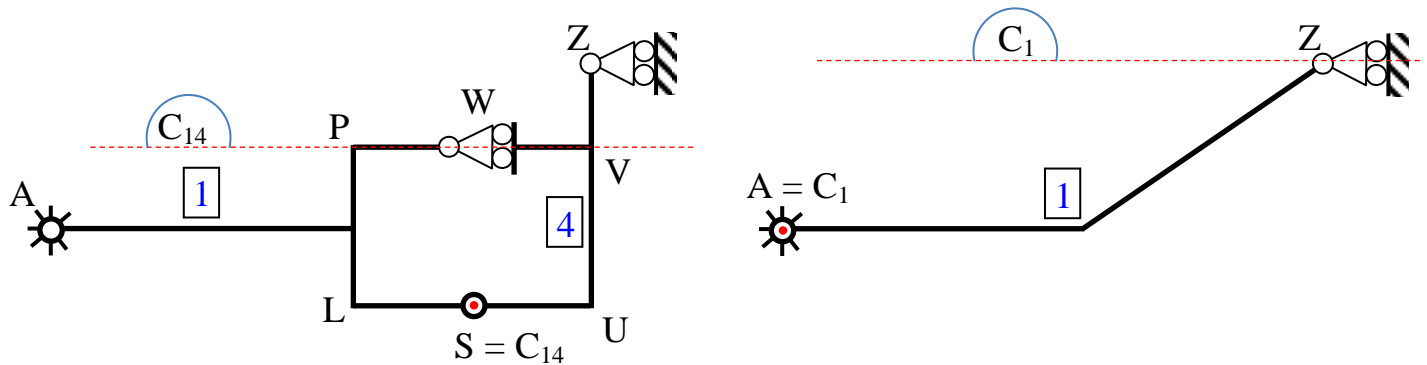


Gli atti di moto relativi tra le aste 1 2 e 3 sono possibili solo se i tre CIR relativi tra le aste sono allineati (teorema II sulle catene cinematiche). In questo caso si ha: $C_{31} = R$, $C_{12}^{\infty} = H^{\infty}$, $C_{23} = Q$. La retta passante per C_{23} e C_{31} è orizzontale e non passa per H^{∞} : i tre CIR non sono allineati. Di conseguenza, non sono ammessi atti di moto relativo fra le tre aste: i tre CIR relativi non esistono e le tre aste si possono (eventualmente) muovere come un corpo unico.

Dunque, la struttura di partenza e quella seguente sono cinematicamente equivalenti, cioè sono caratterizzate dagli stessi (eventuali) atti di moto.

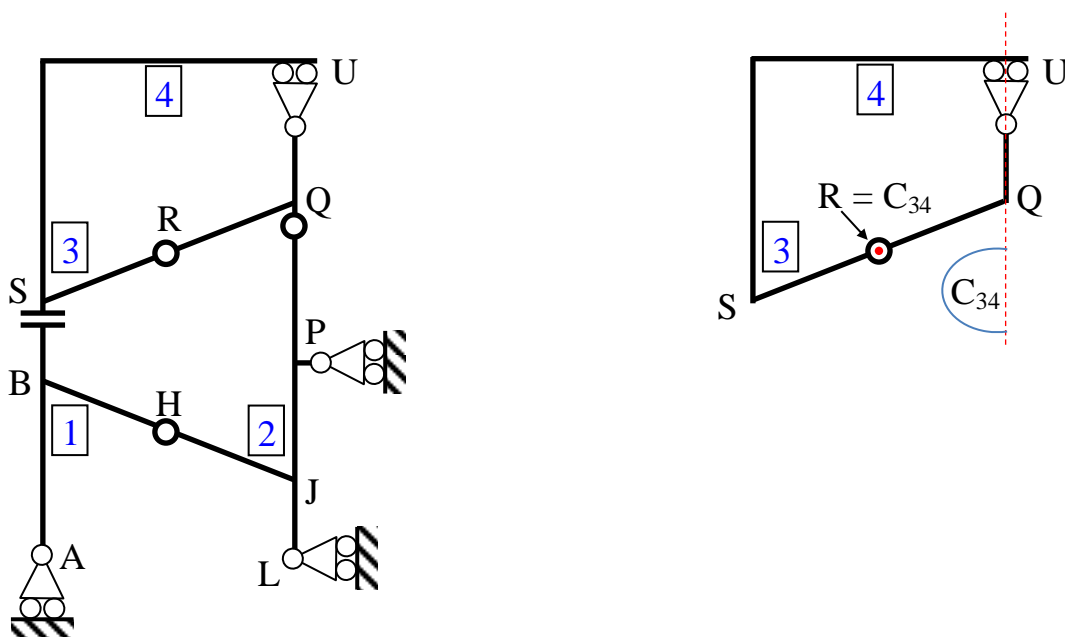
L'anello rimasto (PLSUVWP) coinvolge le aste 1 e 4; percorrendolo si incontrano una cerniera relativa (in S) e un carrello relativo (in W). Come già discusso nell'analisi dello schema elementare "trave cerniera-carrello", l'esistenza dell'atto di moto relativo tra le due aste richiede l'individuazione del CIR relativo C_{14} . Quest'ultimo, se esiste, deve coincidere con la cerniera in S e deve contemporaneamente appartenere all'asse del carrello in W (figura seguente a sinistra).

L'asse del carrello in W non passa per la cerniera in S, per cui il CIR relativo C_{14} non può esistere: i due vincoli non sono compatibili con atti di moto relativo tra le aste 1 e 4 e queste ultime possono essere unite in un'unica asta (figura a destra).

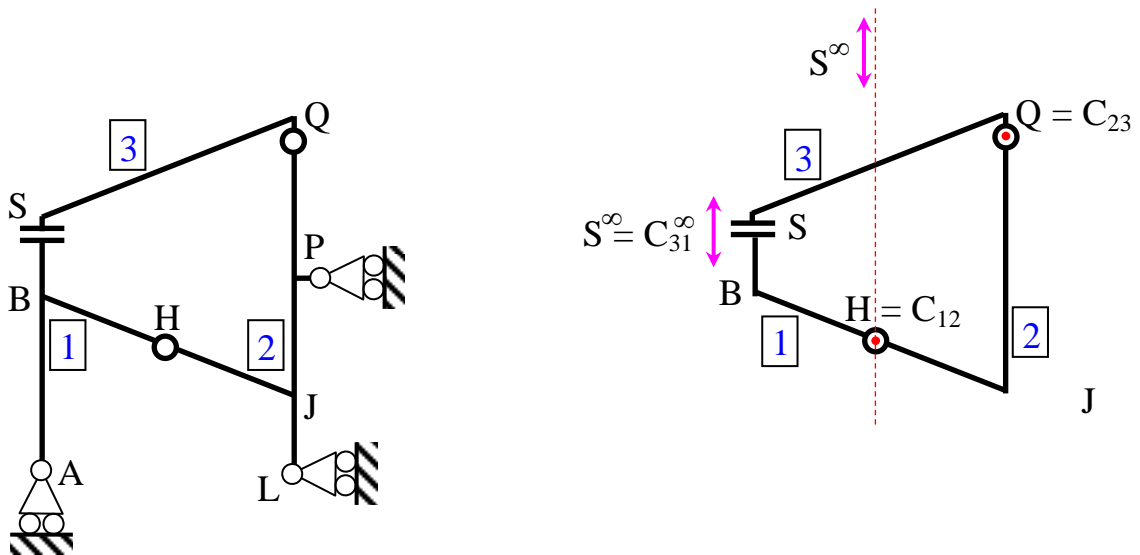


Quest'ultimo schema è identificabile come una trave cerniera-carrello: l'asse del carrello (in Z) non passa per la cerniera (in A) per cui il CIR assoluto C_1 non può esistere e l'asta è fissa. Ne consegue che anche la struttura di partenza è non labile.

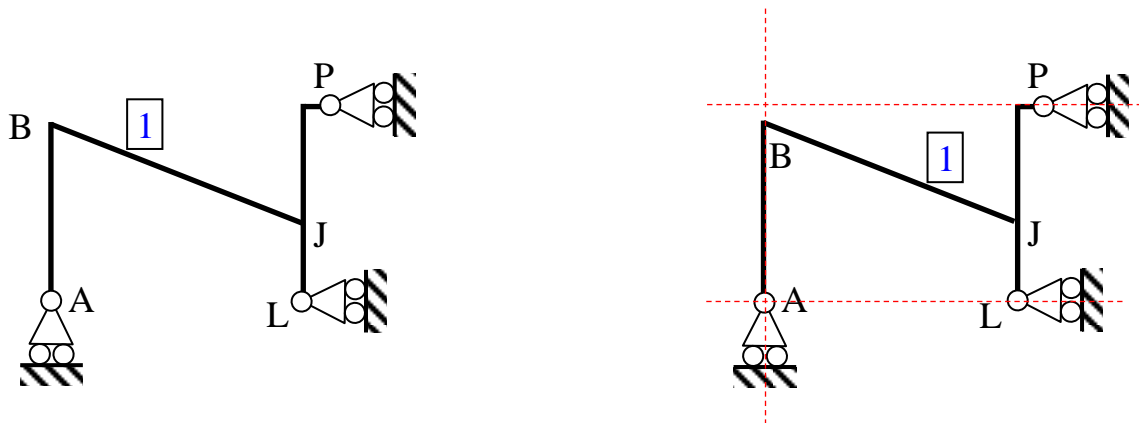
Per la seconda struttura si possono fare considerazioni analoghe. Lungo il percorso USRQU si incontrano una cerniera relativa (in R) e un carrello relativo (in U): per definizione è un anello chiuso isostatico. Il CIR relativo C_{34} dovrebbe, contemporaneamente, risiedere in corrispondenza della cerniera in R e appartenere all'asse del carrello in U; l'asse del carrello non passa per la cerniera, per cui C_{34} non può esistere: le aste 3 e 4 possono essere riunite in un'unica asta, riducibile al tratto SQ.



Dunque, la struttura di partenza è cinematicamente equivalente a quella rappresentata a sinistra, nella figura seguente. In quest'ultima, è possibile identificare un nuovo anello chiuso isostatico, definito dal percorso QSBHJPQ (figura a destra). I CIR relativi fra le tre aste (1, 2 e 3) sono posizionati in $H = C_{12}$, $Q = C_{23}$, $S^\infty = C_{31}^\infty$; la retta che passa per due dei tre CIR non passa per il terzo CIR (ad esempio, la retta HS^∞ non passa per Q): in base al teorema IIa sulle catene cinematiche i tre CIR non esistono e le tre aste si possono riunire in un'unica asta.



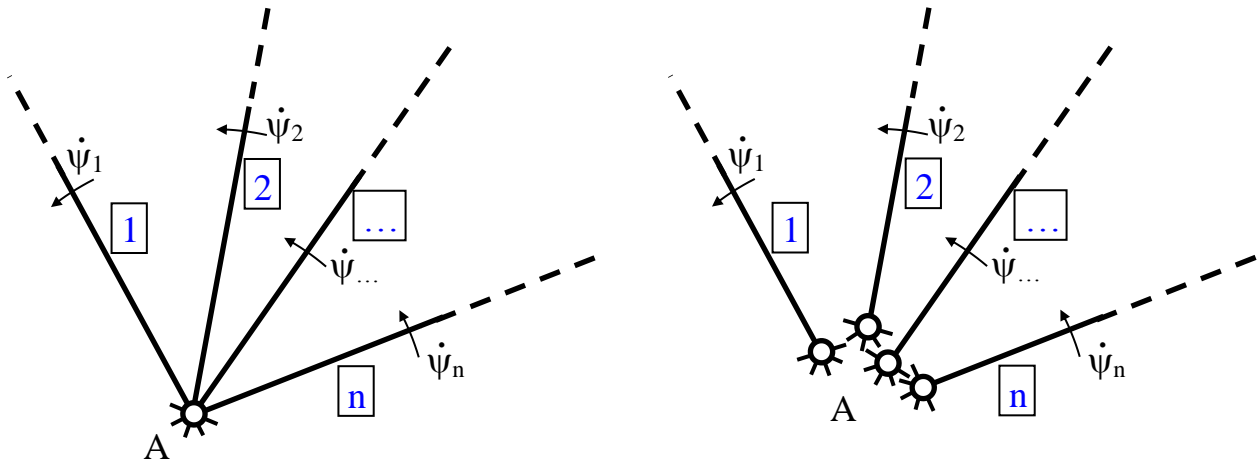
Dunque, la struttura di partenza è cinematicamente equivalente a una trave vincolata a terra da tre carrelli. Secondo lo schema elementare già discusso, gli assi dei tre carrelli non convergono in un punto per cui il CIR assoluto dell'asta (C_1) non può esistere: l'asta è fissa, e la struttura di partenza è non labile.



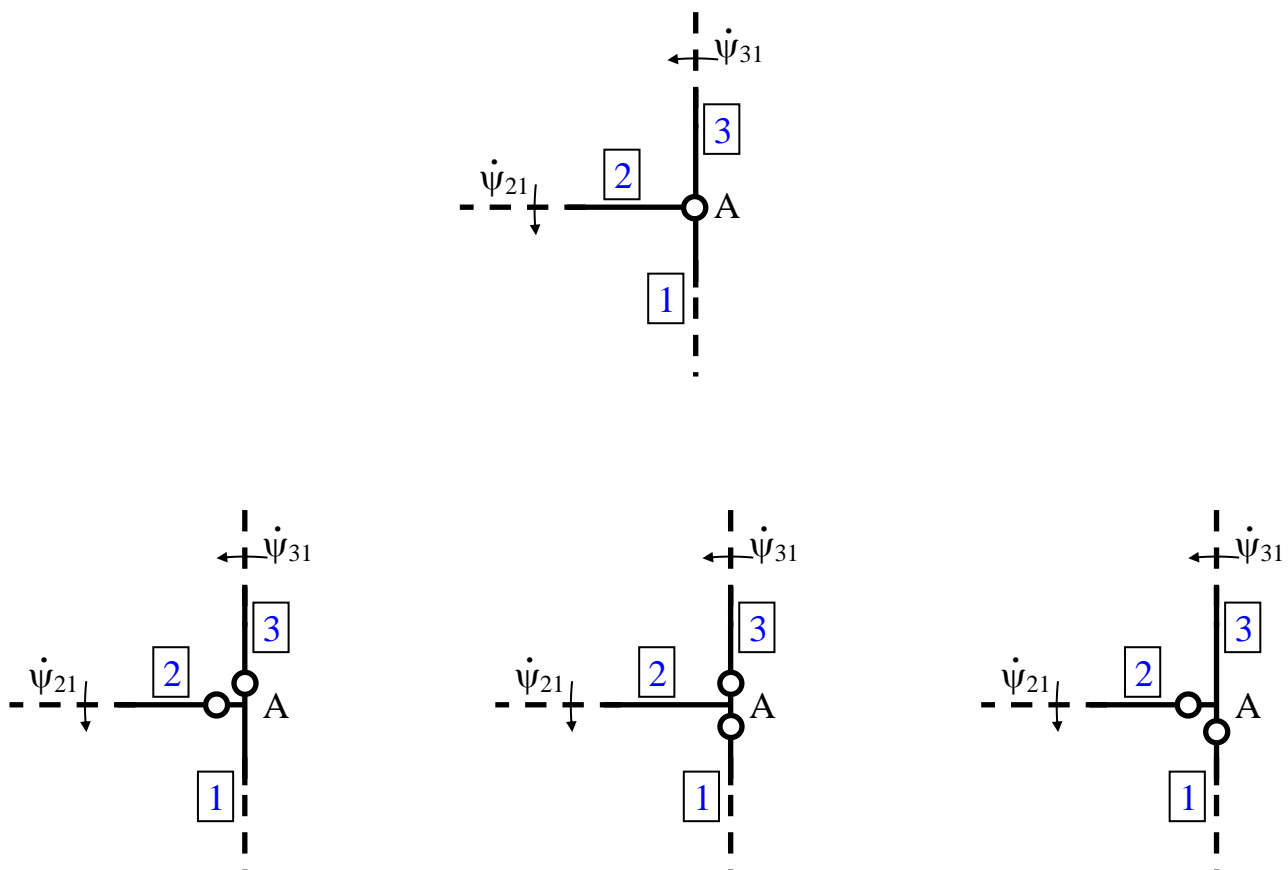
Osservazione sulla cerniera come vincolo multiplo.

In generale una cerniera cilindrica, anche come cerniera di un carrello, può connettere varie aste. Ai fini dell'analisi cinematica, si può considerare uno schema equivalente che permetta l'applicazione delle equivalenze cinematiche e/o l'individuazione delle strutture elementari discusse in precedenza.

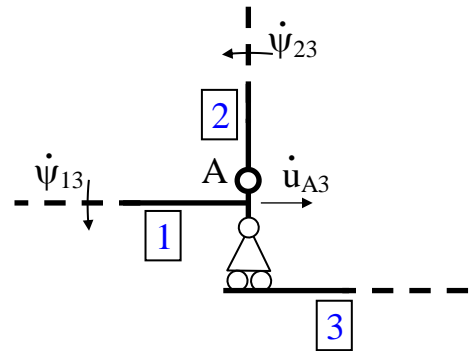
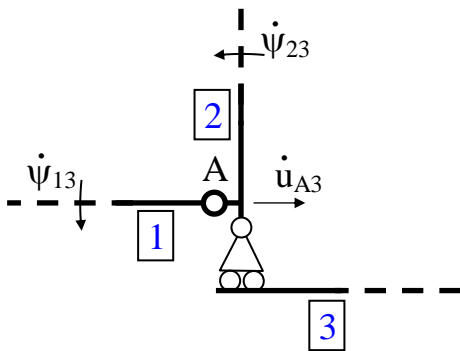
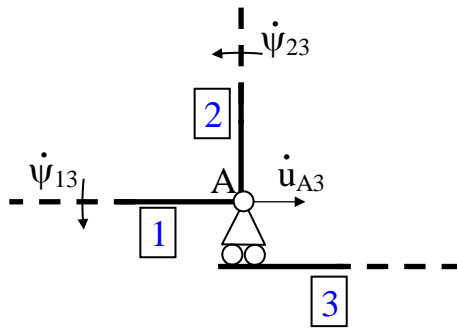
Ad esempio, una cerniera multipla assoluta può essere suddivisa in varie cerniere fisse, una per ogni asta, geometricamente sovrapposte ma rappresentate graficamente come affiancate.



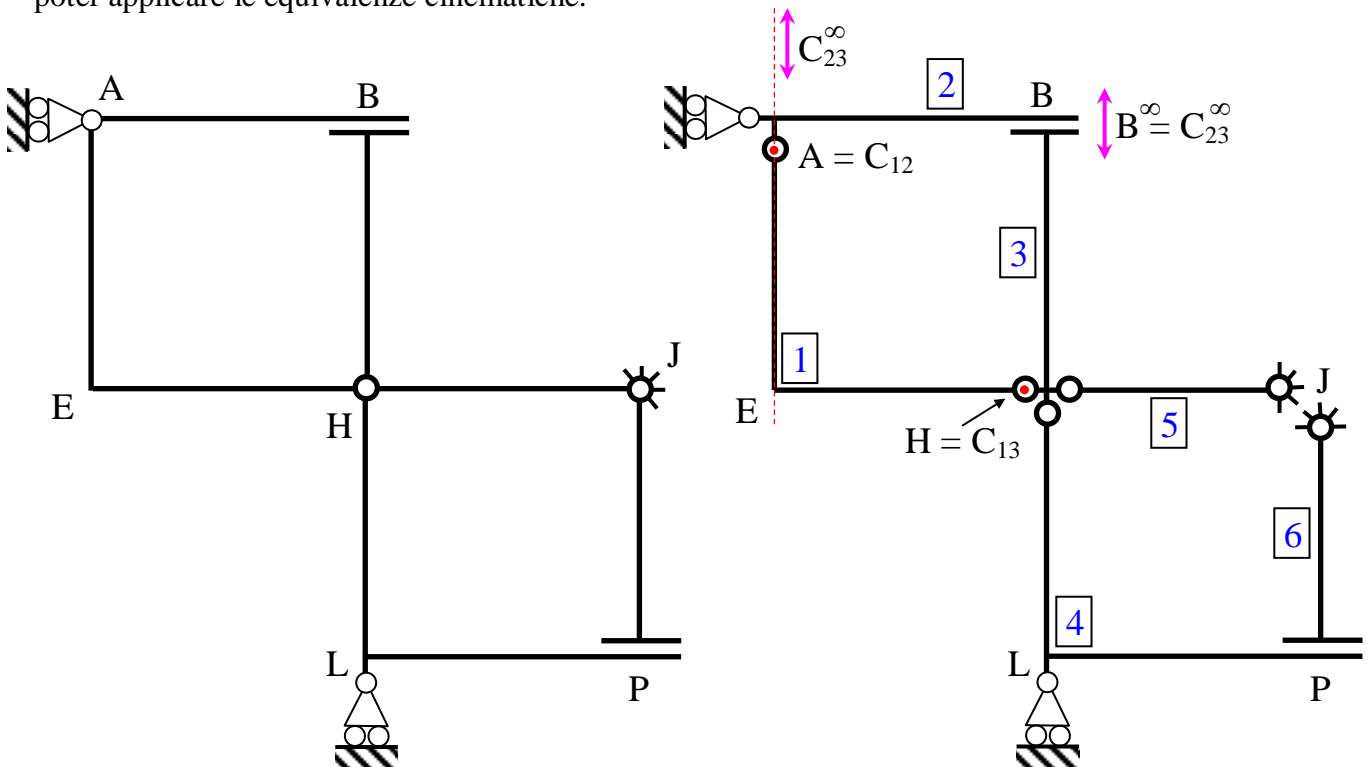
Anche nel caso di una cerniera multipla relativa si può procedere spostando varie cerniere sulle singole aste (le cerniere sono geometricamente sovrapposte, ma rappresentate graficamente come affiancate). Ad esempio, nel caso di tre aste si può procedere, in alternativa, come rappresentato nella figura seguente.



Per un carrello multiplo, relativo o assoluto, si può procedere in modo analogo.

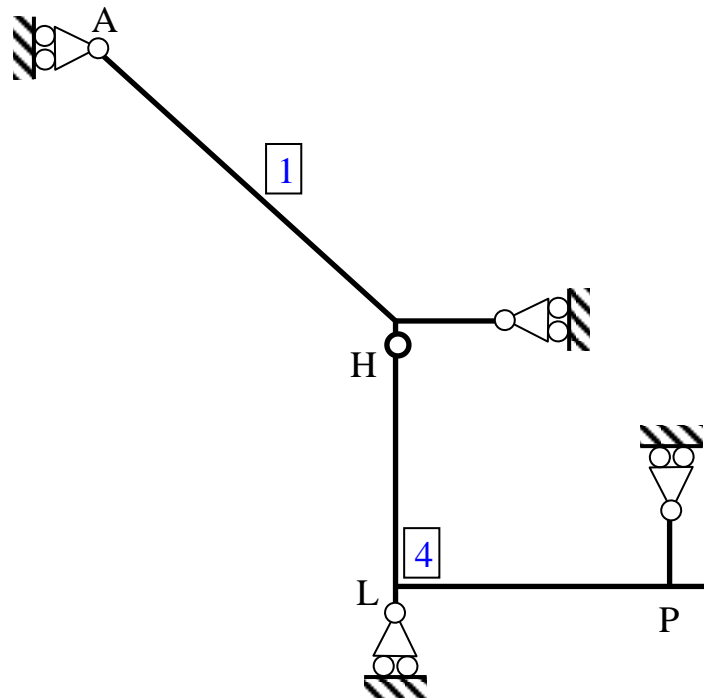


Ad esempio, per analizzare la struttura seguente si suddividono le cerniere in A e H in modo da poter applicare le equivalenze cinematiche.

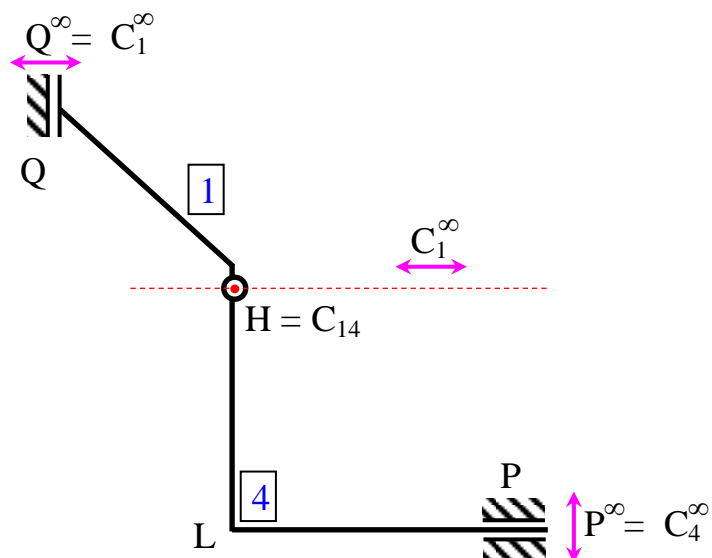


Le aste 5 e 6 sono bielle con assi, rispettivamente, orizzontale e verticale: possono essere sostituite da carrelli. Il percorso AEHBA è un anello chiuso isostatico: i CIR relativi fra le aste 1, 2 e 3 sono

posizionati in $A = C_{12}$, $H = C_{13}$, $B^\infty = C_{23}^\infty$ e non sono allineati (ad esempio, C_{13} non appartiene alla retta $C_{12}-C_{23}^\infty$), per cui le tre aste 1, 2 e 3 possono essere riunite in una sola asta.



In quest'ultimo schema i carrelli assoluti ad asse orizzontale che vincolano l'asta 1 possono essere sostituiti da un'cerniera posta nel punto di intersezione dei loro assi, ovvero da un pattino assoluto con piano di scorrimento verticale. Si noti che il pattino può essere posto in un punto qualunque ("Q") del piano, purché abbia piano di scorrimento verticale. Analogamente, i due carrelli assoluti ad asse verticale che vincolano l'asta 4 vengono sostituiti da un manicotto assoluto con piano di scorrimento orizzontale.



La struttura che si ottiene è un arco a tre cerniere: i tre CIR sono $Q^\infty = C_1^\infty$, $H = C_{14}$, $P^\infty = C_4^\infty$ e non sono allineati (ad esempio, la retta passante per H e Q^∞ non passa per P^∞): quest'ultima struttura è fissa; di conseguenza anche la struttura di partenza è non labile.