

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 22

### III - Anelasticità delle Strutture (Plasticità) → Non-linearità di materiale ("material non-linearity")

Scopio:

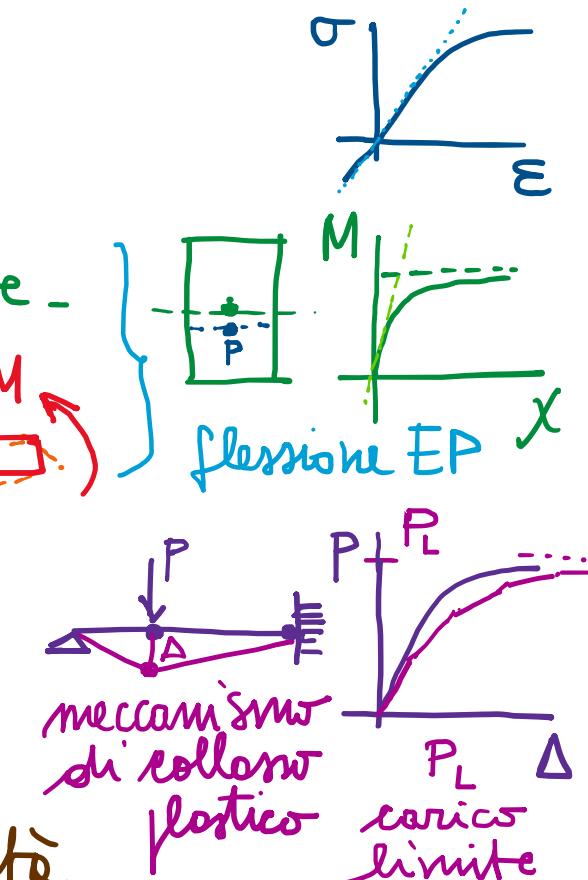
- Introduzione al comportamento non-lineare del materiale (punto materiale) [campo elasto-plastico].

- Comportamento non-lin. delle sez. trasverse delle trave.

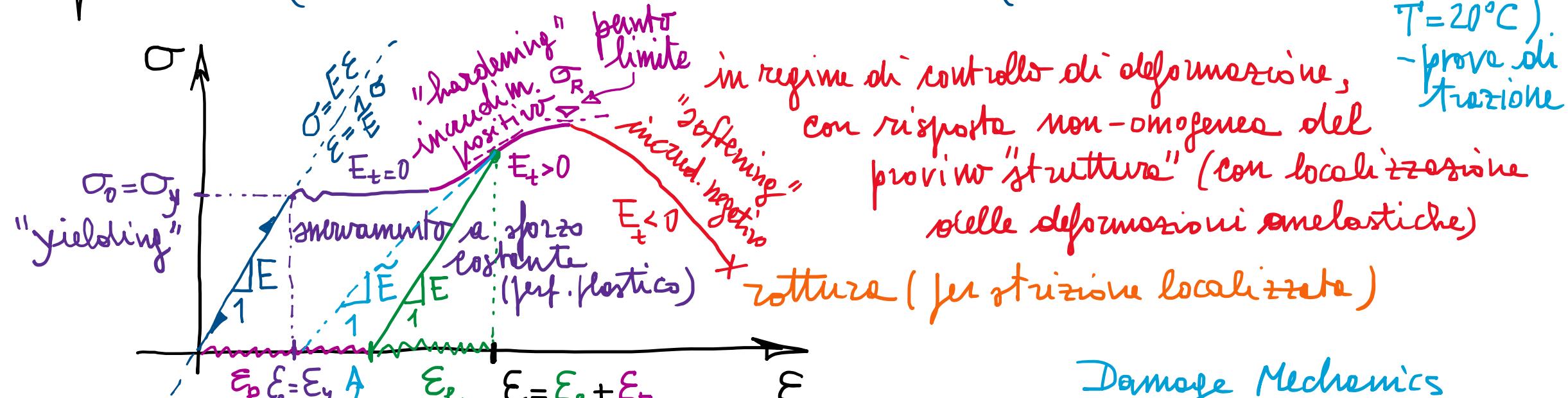
- Comportamento globale elasto-plastico delle trave

- Ipotesi di "cerniera plastica" (localizzazione delle deform. plastiche) e "calcolo a rottura" dei telai (Analisi Limite).

- Qui, non-linearità di materiale scissore non-linearietà geometrica (reale Instabilità), per cinematiche lineari (regime di "piccoli spostamenti").



- Comportamento (classi di) meccanico del materiale (non-lineare) - (Es. acciaio,  $T=20^\circ\text{C}$ ).



legge intera elasto-<sup>elastico</sup><sub>plastico</sub> [  $\tilde{E} < E$  (degradazione di rigidità)  $\Rightarrow$  Mecanica del Danneggiamento ] es. materiali quasi-fragili (lepidoli, calcestruzzo, compositi)

- Sforramento con uscita del campo elastico.

- Campo plastico: deformazioni irreversibili allo scarico (legate ad un riacquisto della struttura interna del materiale,  $\rightarrow$  movimento di dislocazioni di energia in calore).

- Comportamento anolonomo  $\Rightarrow$  legame incrementale  
distint. carico vs. scarico:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \geq 0 \quad d\epsilon \leq 0$$

scarico elastico

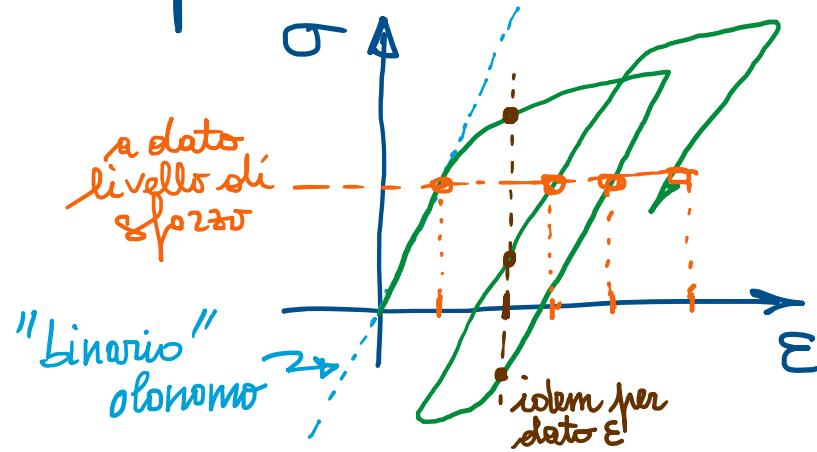
$\frac{d\sigma}{dt} = E_t \frac{d\epsilon}{dt}$

$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \geq 0$  (re-hardening) ratei di sf. elast.

- Legge costitutiva in forma incrementale:

- legame diretto  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\varepsilon})$  controllo in deformazione (consente descrizione del softening)
- " inverso"  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$  " in sforzo

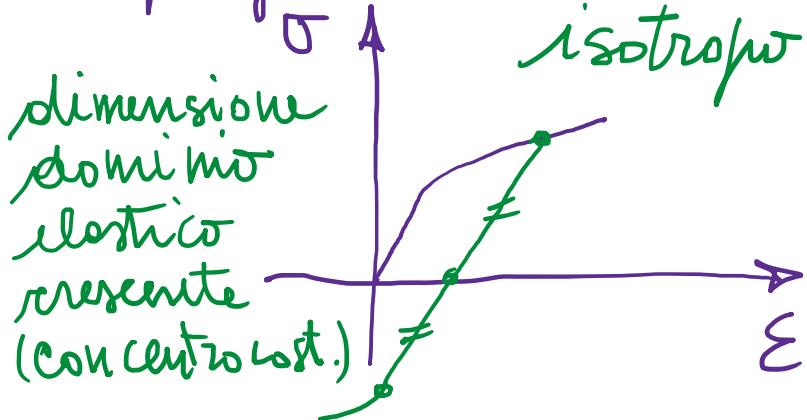
- Dipendenze dalle storie di carico (comportamento "path-dependent", descritto mediante opportune "variabili interne", utili a registrare la storia)



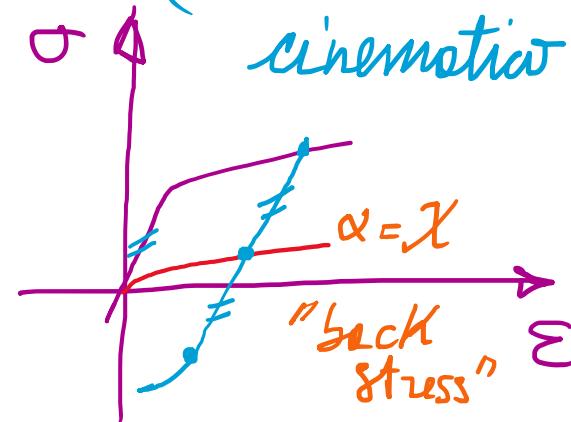
(in genere non-lineare)

(variaz. del centro)

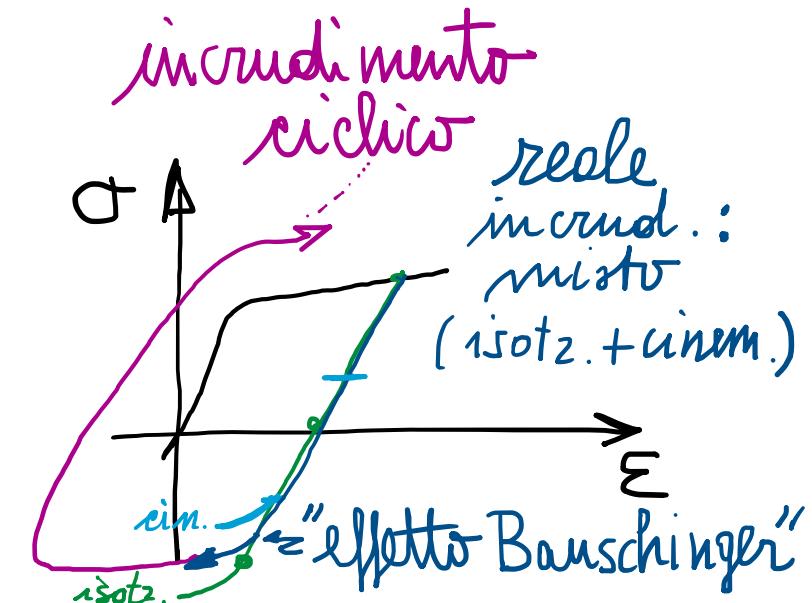
- Tipologie di incrudimento:



isotropo



cinematico



legame  
diretto  
 $\dot{\sigma}(\dot{\varepsilon})$

incremento positivo  
(hardening)  $E_t > 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \geq 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

incremento nullo  
(perfett. plastico)  $E_t = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

incremento negativo  
(softening)  $E_t < 0$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} \geq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \leq 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \leq 0\end{aligned}$$

unicità

soft. "critico"  $E_t \rightarrow -\infty$  ( $\dot{\varepsilon} = 0$ )  
perdita controllo in defor.

legame  
inverso  
 $\dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$

$$\dot{\sigma} \geq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} \geq 0$$

$$\dot{\sigma} \leq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \leq 0$$

unicità

$\dot{\sigma} > 0$  non possibile

$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}$  indeter.

non unicità

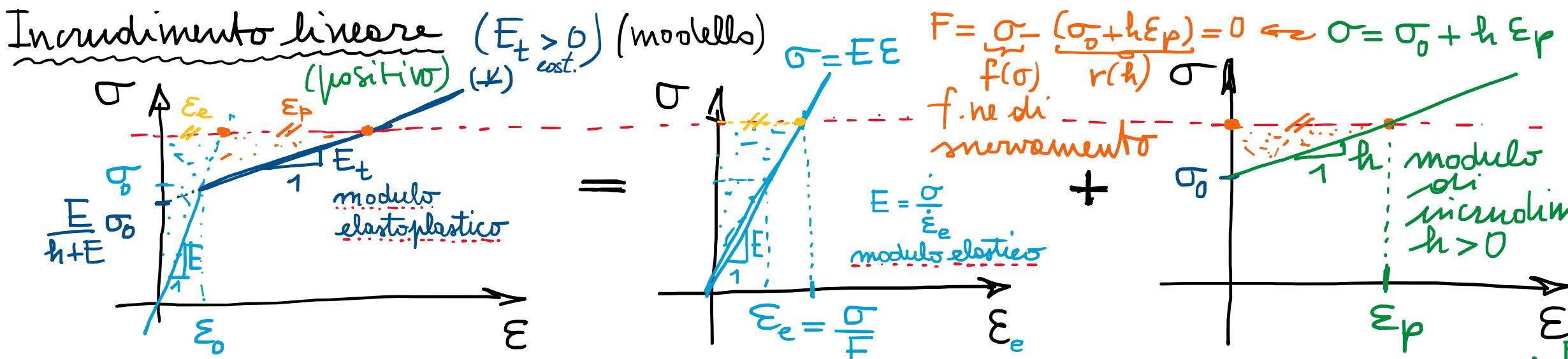
perdita di controllo  
in sforz

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} \geq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} \geq 0 \\ \dot{\sigma} \leq 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \leq 0\end{aligned}$$

non unicità

$$-\infty < E_t < E$$

$E_t > E$  "locking"  
(es. materiali biolog.)



decomposizione somme di deformazioni assime :  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{(simili in ratei in det. } E_t \end{matrix}$

$$= \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{h} - \frac{\sigma_0}{h} \Rightarrow \varepsilon + \frac{\sigma_0}{h} = \frac{h+E}{hE} \sigma \quad \Leftrightarrow \varepsilon_p = \frac{\sigma - \sigma_0}{h}$$

$$\frac{h+E}{hE} \sigma = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{h} \right) \sigma$$

$$\sigma = \underbrace{\frac{hE}{h+E} \varepsilon}_{E_t} + \cancel{\frac{hE}{h+E} \frac{\sigma_0}{h}} =$$

$$= \frac{E}{h+E} \sigma_0 + E_t \varepsilon \quad (*)$$

- Generalizzazione al 3D (teoria delle plasticità)

Condiz. di shew.  $F(\sigma_g, \lambda) = f(\lambda) - r(h, \lambda) = 0$

Legge di flusso plast.  $\dot{\varepsilon}_p = \lambda \dot{m}$  es.  $f(\sigma) = \sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{3J_2}$

Operatore tangente  $\dot{\sigma} = E_t : \dot{\varepsilon}$  moltiplicatore vettore sizez. di flusso plast. (modulo elasto-plastico)  $E_t = \frac{hE}{h+E}$

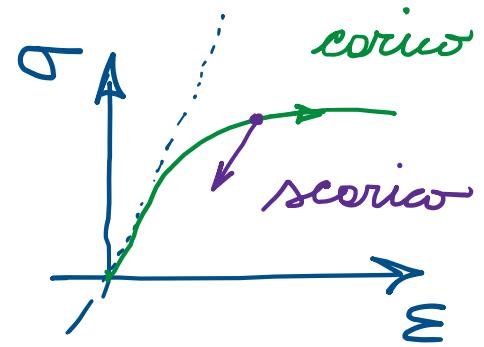
$$\left[ h = \frac{EE_t}{E-E_t} = \frac{E_t}{1-E_t/E} \right]$$

modulo tangente

## Concetti fondamentali :

- Anelasticità (in particolare Plasticità) delle strutture :
  - comportamento dissipativo anelastico delle strutture, a partire da quello del materiale  $\Rightarrow$  non-linearietà di materiale
  - manifestabile per carichi e spostamenti crescenti, tali da indurre un'uscita dal campo elastico (grado regime tipico di funzionamento ordinario, quotidiano delle strutture, in condizioni di esercizio), per condurre anche a situazioni "Limite", con possibile collasso (plastico) delle strutture, nelle sue totalità (meccanismo completo) o di una sua parte (meccanismo parziale)  $\Rightarrow$  Analisi Limite (AL) o "Calcolo e rottura" (dei telai).

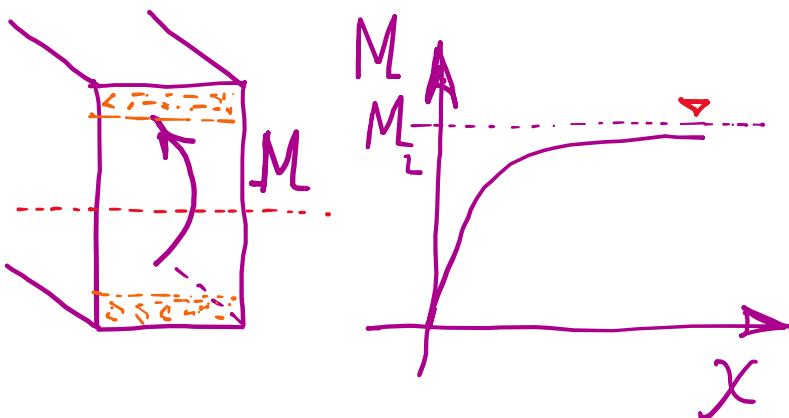
- Le diverse scie strutturali (flessione elastoplastica delle travi) :



punto materiale

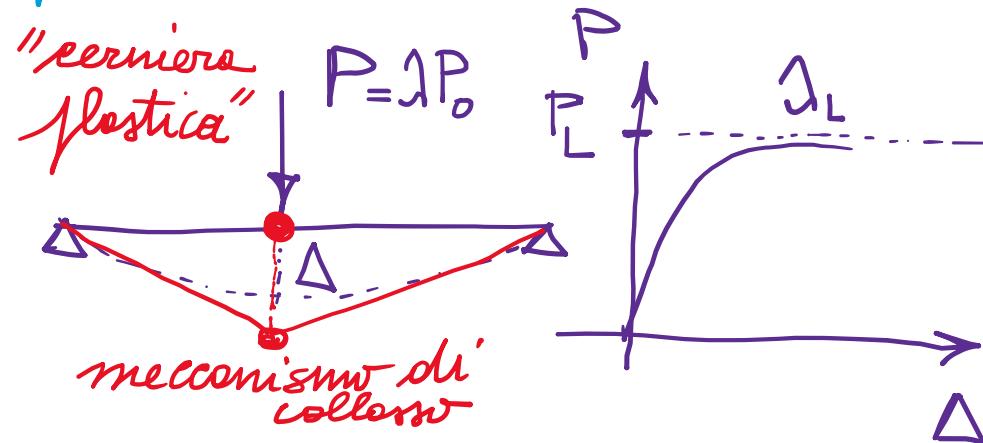
(Teorie della Plasticità)

Meccanica dei Continui in campo elastoplastico.



sezione trasversale

"Legge costitutiva" delle trave per flessione elastoplastica (in particolare per comportamento "perfettamente elastoplastico").



struttura nel suo complesso

Risposta non-lineare globale, forze-spostamento, della struttura (trave o sistemi di travi e telai), sino al collasso (plastico, duttile), descriv. anche per "localizzazioni" delle defor.

# SOMMARIO (Lec. 22)

## III - Anelasticità delle strutture (Plasticità) -

- Introduzione al comportamento non-lineare (elasto-plastico) del materiale.
- Regimi tipici: elastico, perfettamente plastic, inclin. positivo/<sup>"hardening"</sup> negativo/<sup>"softening"</sup>.
- Comportamento anolonomo: legame incrementale (carico pl. vs. scarico el.).
- Dipendenza delle storie di carico (integraz. del legame incrementale).
- Tipologie di microscopio e loro modellazione.
- Unicità del legame diretto/inverso.
- Incremento lineare e modulo tangente.
- Generalizzazione 3D: teoria delle plasticità -

Next step: Flessione elasto-plastica - Comportamento delle sezioni trasversale dell'elastica  
(verso una teoria strutturale in ambito di non-lin. di materiale).