Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

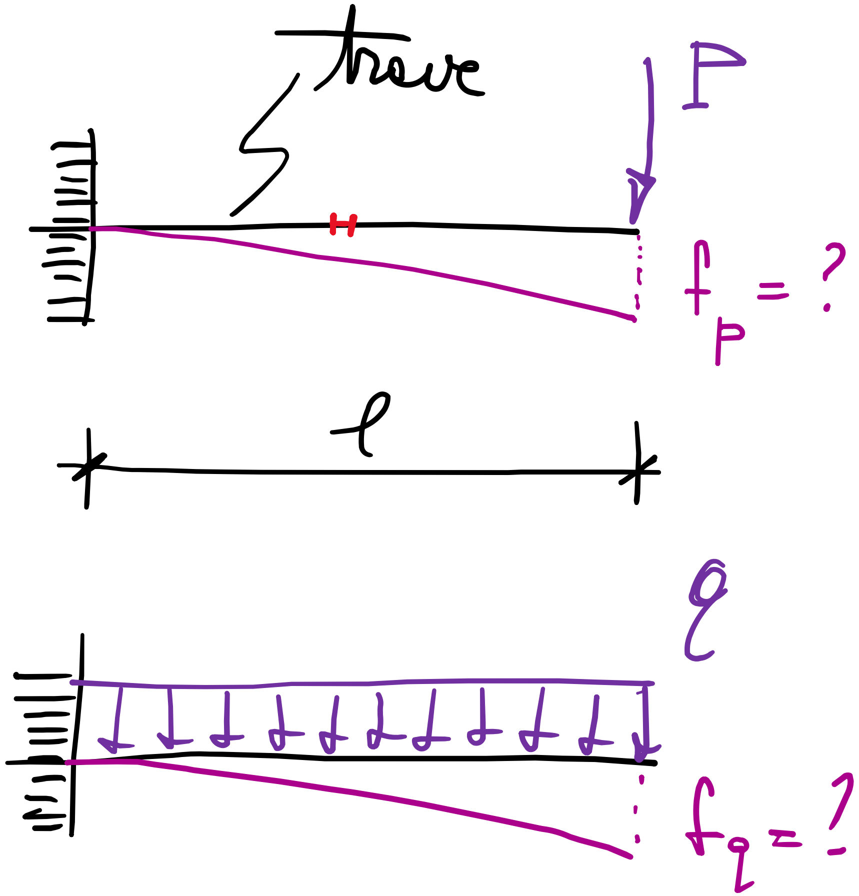
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

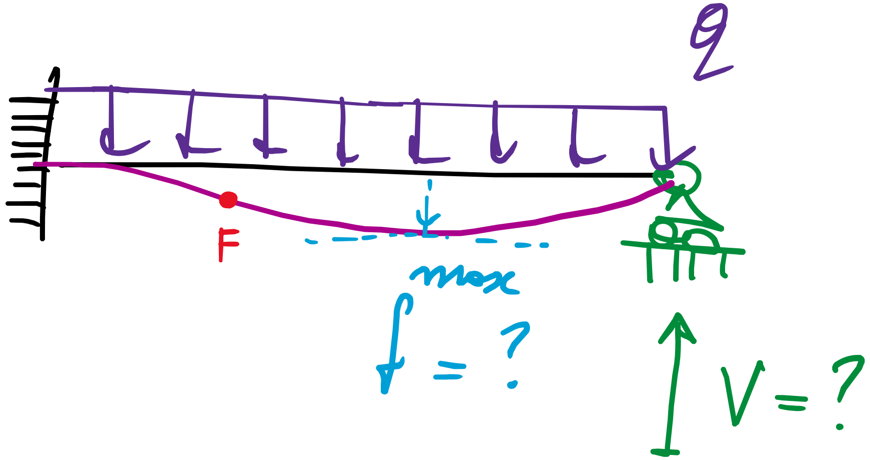
LEZIONE 09

Analisi dei sistemi di travi deformabili: (Meccanica dei Solidi → Meccanica delle strutture)

- quantificare l'entità della deformazione nei sistemi di travi (iso o iperst.)

- risolvere strutture staticamente indeterminate (iperstatiche)





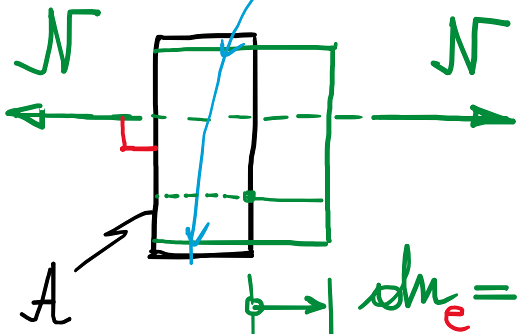
Deformazioni elastiche elementari del concio di trave (vedi casi di de Saint Venant):

$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ legge costitutiva (elastica lineare)

costanti

$\sigma = \frac{N}{A}$

(contraz. trasv., ν)



$du_e = \varepsilon_e \, dx$

dx

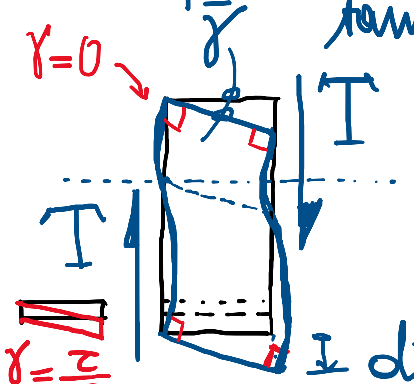
$[F]$ $\dfrac{}{\text{rigidezza assiale}} = \dfrac{N \cdot dx}{\boxed{E \cdot A}}$

$EA \to \infty$ inesten.

E: modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young $\frac{[F]}{[L]^2}$

A: area della sezione trasversale $[L]^2$

ingobbamento fuori piano (legato alla distribuzione non uniforme delle deform. tangenziali)



$\gamma = \frac{\tau}{G}$

$dt_e = \bar{\gamma}_e \, dx$

$\tau = \frac{T}{A}$

dx

$[F]$ $\dfrac{}{\text{rigidezza tagliante}} = \mu \dfrac{T\, dx}{\boxed{G \cdot A}}$

$GA \to \infty$ indeform. a taglio

$\frac{E}{2(1+\nu)} = G$: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio

isotropo

A: idem

$\mu \geq 1$: fattore di taglio

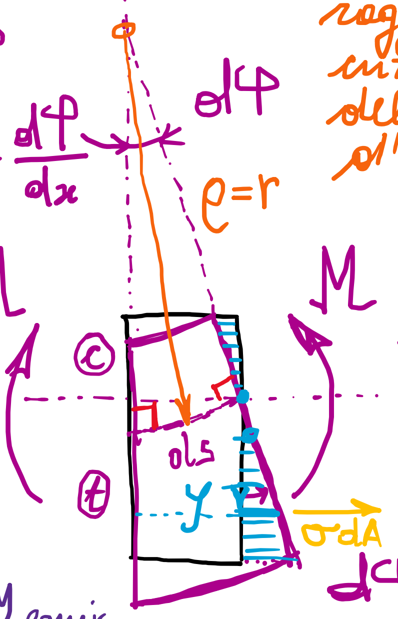
propr. geom. sez. trasv.

$ds = \rho \, d\varphi$

$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \simeq \frac{d\varphi}{dx}$

curvatura $[L]^{-1}$

raggio di curvatura della linea d'asse inflessa



rotazione relativa con conservazione della sezione piana

$\sigma = E\varepsilon$

$\varepsilon \cancel{dx} = y \overbrace{\frac{d\varphi}{\cancel{dx}}}^{\chi}$

$M = \int_A \sigma \, dA \, y$ equir. statica

$= E\chi \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{J>0}$

$d\varphi_e = \chi_e \, dx$

dx

$[F][L]^2$ $\dfrac{}{\text{rigidezza flessionale}} = \dfrac{M \cdot dx}{\boxed{E \cdot J}}$

$EJ \to \infty$ indeform. flession.

E: idem

$\boxed{\chi_e = \frac{M}{EJ}}$

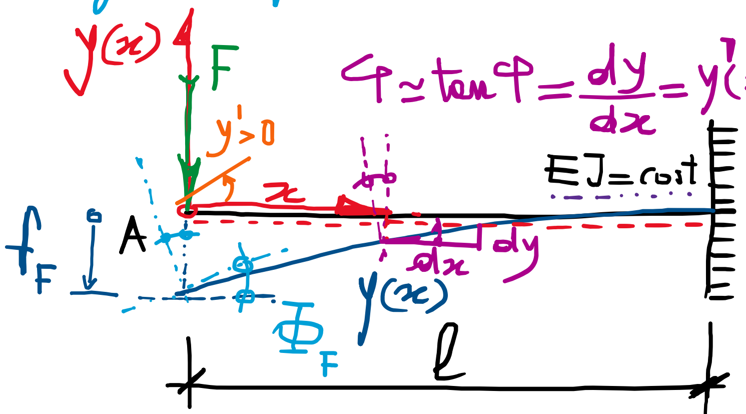
J: momento d'inerzia della sezione trasversale $[L]^4$

Metodo della Linea Elastica (deformazione di strutture inflesse con effetti flessionali predominanti)

$[dn \to 0\,;\; dt \to 0]$
$[EA \to \infty\,;\; GA \to \infty]$

curvatura $\chi_e = \dfrac{M}{EJ}$ $\iff$ $M = EJ\,\chi_e$ legge "costitutiva" della trave (Eulero-Bernoulli-Navier)

$0 <$ rigidezza flessionale EJ



$\varphi \simeq \tan\varphi = \dfrac{dy}{dx} = y'(x)$

Curvatura di linea piana di eq.ne $y = y(x)$

$$\chi(x) = \frac{y''(x)}{\left[1 + y'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \simeq y''(x)$$

$|y'(x)| \ll 1$ piccole deformazioni (gradienti di spostamento)

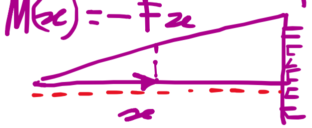
$\varphi(x) = y'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = y''(x) = \chi(x)$

$y(x)$: spost. trasversale (Linea Elastica)

Equazione differenziale della LE (del 2° ordine)

- $EJ\, y''(x) = + M(x) \overset{\text{equil.}}{=} -Fx$

$M(x) = -Fx$



$\int dx$

- $EJ\, y'(x) = -F\dfrac{x^2}{2} + A_1$

$\int dx$

- $EJ\, y(x) = -F\dfrac{x^3}{6} + \underline{A_1 x + A_2}$

• Condizioni al contorno (c.c.)

$v_B = 0$, $\varphi_B = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y(\ell) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$

B

sist. globale — sist. locale

A_1, A_2: costanti di integrazione

componente di moto rigido rototraslatorio legato alla scelta del sistema di riferimento

Imposizione delle c.c.

$EJ\,y''(l) = 0 \Rightarrow -\frac{Fl^2}{2} + A_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{Fl^2}{2}}$

$EJ\,y(l) = 0 \Rightarrow -\frac{Fl^3}{6} + A_1 l + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{Fl^3}{6} - A_1 l = \frac{Fl^3}{6} - \frac{3}{3}\frac{Fl^2}{2}l = \boxed{-\frac{1}{3}Fl^3 = A_2}$

Equazione finale della LE:

$$y(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Fx^3}{6} + \frac{Fl^2}{2}x - \frac{Fl^3}{3}\right]$$

$$y'(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Fx^2}{2} + \frac{Fl^2}{2}\right]$$

$$y''(x) = \frac{1}{EJ}\left[-Fx\right] = \frac{M(x)}{EJ}$$

$y(0) = \frac{A_2}{EJ} = -f_F \;\rightarrow\; f_F = \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EJ}$ $[L]$

$y'(0) = \frac{A_1}{EJ} = \Phi_F \;\rightarrow\; \Phi_F = \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EJ}$ $[1]$

Significato fisico delle costanti di integrazione

coefficienti di influenza

$(F=1)\quad f_1 = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ} = \frac{f_F}{F}$

N.B.:

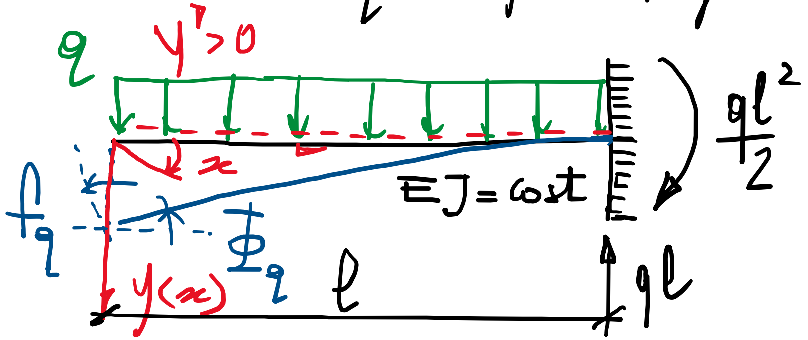
- Il gruppo dimensionale $\frac{Fl^3}{EJ}$ rappresenta spostamenti elastici flessionali
- Il gruppo dimensionale $\frac{Fl^2}{EJ}$ rappresenta rotazioni elastiche flessionali

Infatti:

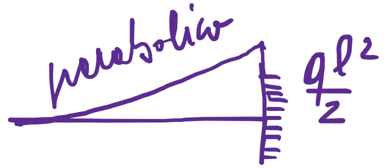
$$\left[\frac{Fl^3}{EJ}\right] = \frac{\cancel{[F]}\,[L]^3}{\frac{\cancel{[F]}}{\cancel{[L]^2}}\,\cancel{[L]^4}^{\,2}} = [L] \quad \text{lunghezza}$$

$$\left[\frac{Fl^2}{EJ}\right] = \cdots\cdots = \frac{[L]}{[L]} = [1] \quad \text{numero puro}$$

• Caso con q uniform. ripartito



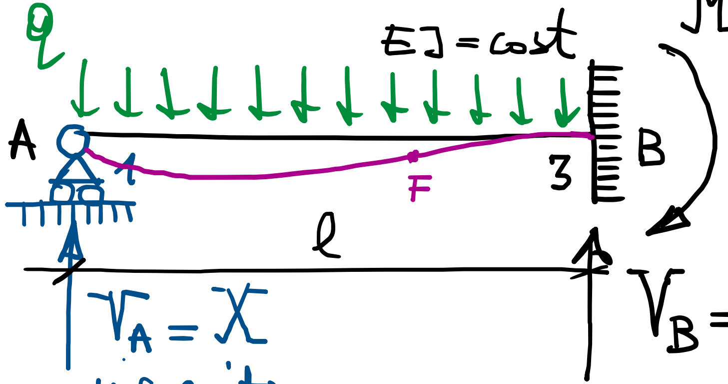
$$\begin{cases} EJ\, y''(x) = -M(x) = \dfrac{qx^2}{2} \\ EJ\, y'(x) = \dfrac{qx^3}{6} + A_1 \\ EJ\, y(x) = \dfrac{qx^4}{24} + A_1 x + A_2 = \dfrac{qx^4}{24} - \dfrac{ql^3}{6}x + \dfrac{ql^4}{8} \end{cases}$$



$$\text{c.c.} \begin{cases} EJ\, y'(\ell) = 0 \Rightarrow A_1 = -\dfrac{q\ell^3}{6} & \Rightarrow \Phi_q = \dfrac{1}{6}\dfrac{q\ell^3}{EJ} \; [1] \\ EJ\, y(\ell) = 0 \Rightarrow A_2 = -\dfrac{q\ell^4}{24} - A_1\ell = -\dfrac{q\ell^4}{24} + \dfrac{4}{4}\dfrac{q\ell^3}{6}\ell = \dfrac{q\ell^4}{8} & \Rightarrow f_q = \dfrac{1}{8}\dfrac{q\ell^4}{EJ} \; [L] \end{cases}$$

Struttura iperstatica (staticamente indeterminata) – Metodo delle forze

$M_B = \dfrac{q\ell^2}{2} - X\ell$



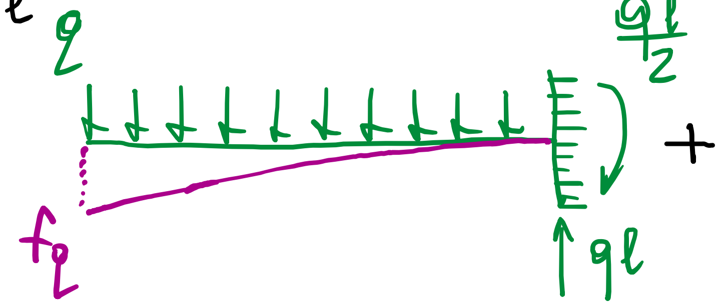
$V_B = q\ell - X$

$V_A = X$

incognita iperstatica
(in corrisp. di gdv ritenuto iperstatico)

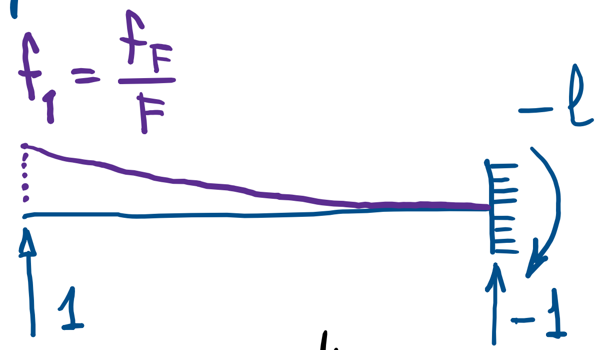
$RV = RV(q, X)$

$=$



$+ \; X$

$f_1 = \dfrac{f_F}{F}$



$$v_A = -f_q + X f_1 = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{f_1} = \frac{\frac{1}{8}\frac{q\ell^4}{\cancel{EJ}}}{\frac{1}{3}\frac{1\,\ell^3}{\cancel{EJ}}} = \frac{3}{8}q\ell$$

condizione di congruenza
rispetto del carrello in A