Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

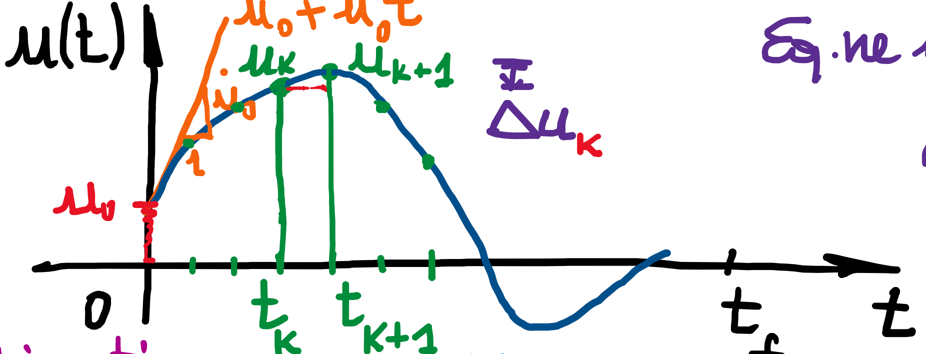
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 09

Integrazione diretta nel tempo dell'equazione del moto (integrazione passo-passo) "step-by-step"



discretizzaz. dell'asse dei tempi

Δt_k passo temporale "time step"

$\Delta t_k = \Delta t = \frac{t_f - t_0}{n}$ ... n.° dei passi

Eq.ne del moto in forma incrementale:

$$m\,\Delta\ddot u_k + c\,\Delta\dot u_k + K\,\Delta u_k = \Delta F_k \Rightarrow \Delta u,\ \Delta\dot u,\ \Delta\ddot u$$

(esatta o approx.)

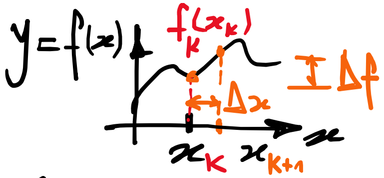
"Avanzamento" $t_k \to t_{k+1}$

$$\ddot u_{k+1} = \ddot u_k + \Delta\ddot u_k \qquad [\Delta\ddot u_k = \ddot u_{k+1} - \ddot u_k]$$

aggiornamento della soluzione

soluz. all'inizio del passo

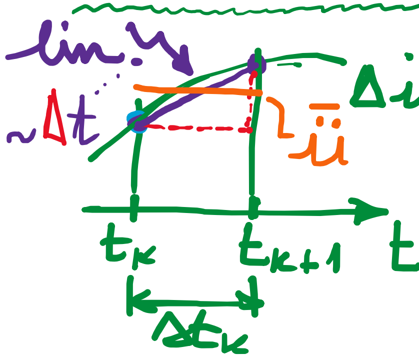
incremento della soluzione nel passo



"Metodo delle differenze finite" ⇒ rappresentaz. di derivate tramite rapporti incrementali

Sviluppo in serie di Taylor: $\Delta f_k = f(x_k + \Delta x_k) - f(x_k) = f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x)\,\Delta x^3 + \dots$ troncamento; termini di ordine superiore

- **Metodo dell'accelerazione lineare**

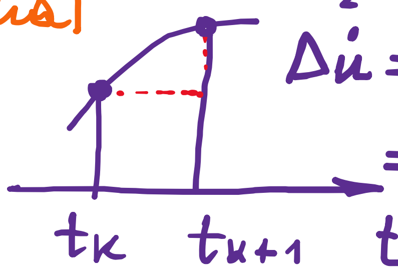


(media)

$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t$ 1° ord. $f_1 \Rightarrow \ddot u$

$\Rightarrow \dddot u = \frac{\Delta\ddot u}{\Delta t}$

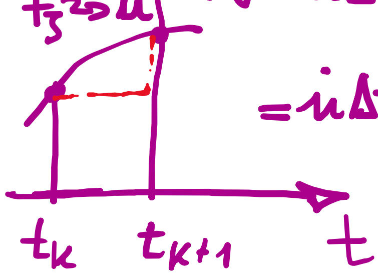
$\sim\Delta t^2$ $f_2 \Rightarrow \dot u$



2° ord.

$$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\dddot u\,\Delta t^2 = \Delta t\left(\ddot u + \frac{1}{2}\Delta\ddot u\right)$$

$\sim\Delta t^3$ $f_3 \Rightarrow u$



$$\Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot u\,\Delta t^3 = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\ddot u + \frac{1}{3}\Delta\ddot u\right)$$

3° ord.

sostituzione

Metodo di Newmark (1959) $\Rightarrow$ Generalizzazione (famiglia di metodi di integrazione)

β, γ costanti del metodo di N.

$$\Delta\ddot u = \ddot u_{k+1} - \ddot u_k$$

$$(1)\quad \Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\underbrace{(\ddot u + 2\beta\,\Delta\ddot u)}_{(1-2\beta)\ddot u_k + 2\beta\,\ddot u_{k+1}} = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \beta\,\Delta\ddot u\,\Delta t^2$$

$$(2)\quad \Delta\dot u = \Delta t\underbrace{(\ddot u + \gamma\,\Delta\ddot u)}_{(1-\gamma)\,\ddot u_k + \gamma\,\ddot u_{k+1}}$$

medie pesate di $\ddot u_k$ e $\ddot u_{k+1}$

- Acc. lin. $2\beta = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$
- " media $2\beta = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$

- Dalla (1):

$$\Delta\ddot u = \frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u\,\cancel{\Delta t}}{\beta\Delta t^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\ddot u\,\cancel{\Delta t^2}}{\beta\,\cancel{\Delta t^2}} = \boxed{\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u}{\beta\Delta t} - \frac{\ddot u}{2\beta} = \Delta\ddot u}\quad (3)$$

$\Delta\ddot u$ f.ne di Δu

- Sost. la (3) nella (2):

$$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \gamma\cancel{\Delta t}\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^{\cancel{2}}} - \gamma\cancel{\Delta t}\frac{\dot u}{\beta\cancel{\Delta t}} - \gamma\Delta t\frac{\ddot u}{2\beta} = \boxed{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot u + \frac{2\beta-\gamma}{2\beta}\ddot u\,\Delta t = \Delta\dot u}\quad (4)$$

$\Delta\dot u$ f.ne di Δu

- Sost. la (3) e la (4) nell'eq.ne del moto in forma incrementale: $m\Delta\ddot u + c\Delta\dot u + k\Delta u = \Delta F$

$$\underbrace{\left(\frac{m}{\beta\Delta t_k^2} + \frac{\gamma c}{\beta\Delta t_k} + k\right)}_{\tilde K_k}\Delta u = \underbrace{\Delta F_k + \frac{m}{\beta}\left(\frac{\dot u}{\Delta t} + \frac{\ddot u}{2}\right) + \frac{c}{\beta}\left(\gamma\dot u - \frac{2\beta-\gamma}{2}\ddot u\,\Delta t\right)}_{\Delta\tilde F_k} \Rightarrow \boxed{\tilde K\,\Delta u = \Delta\tilde F}$$

$\tilde K_k$ rigidezza efficace

$\Delta\tilde F_k$ forza incrementale efficace

$$\Delta u = \tilde K^{-1}\Delta\tilde F$$

- Noto Δu, sost. nelle (4) e (3), si ottengono gli incrementi $\Delta\dot u$ e $\Delta\ddot u$, a consentire l'avanzamento della soluzione all'istante temporale successivo.

Implementazione ("pseudo-code") => Algoritmo di integrazione

- Partendo da c.i. $u_0, \dot{u}_0$

CICLO su tutti i time step

- t_k : $u_k, \dot{u}_k, \ddot{u}_k$; ΔF_k
- calcolo di $\tilde{K}$, $\Delta \tilde{F}_k$
- soluzione $\Delta u_k = \tilde{K}^{-1} \Delta \tilde{F}_k$
- determinaz. di $\Delta \dot{u}_k$, $\Delta \ddot{u}_k$
- aggiornamento variabili $u_{k+1}, \dot{u}_{k+1}, \ddot{u}_{k+1}$

cf. => accuratezza del metodo (bontà della soluz.) approssimata rispetto alla reale

indicazione tipica per suff. accurat.

$$\Delta t \simeq \frac{T_1}{10}$$

metodo	β	γ	tipo	Δt_{cr}
acc. media	1/4	1/2	implicito	incond. stab. (∞)
" lineare	1/6			$\sqrt{3}\,\frac{T_1}{\pi}$
differenze centrali	0		esplicito	$\frac{T_1}{\pi}$ valore di riferim. per stabilità

$$\Omega_{cr} = \frac{\xi(\gamma - 1/2) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2 (\gamma - 1/2)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}$$

Stima Δt_{cr}

stime conserv. $\xi = 0$ o $\gamma = 1/2$

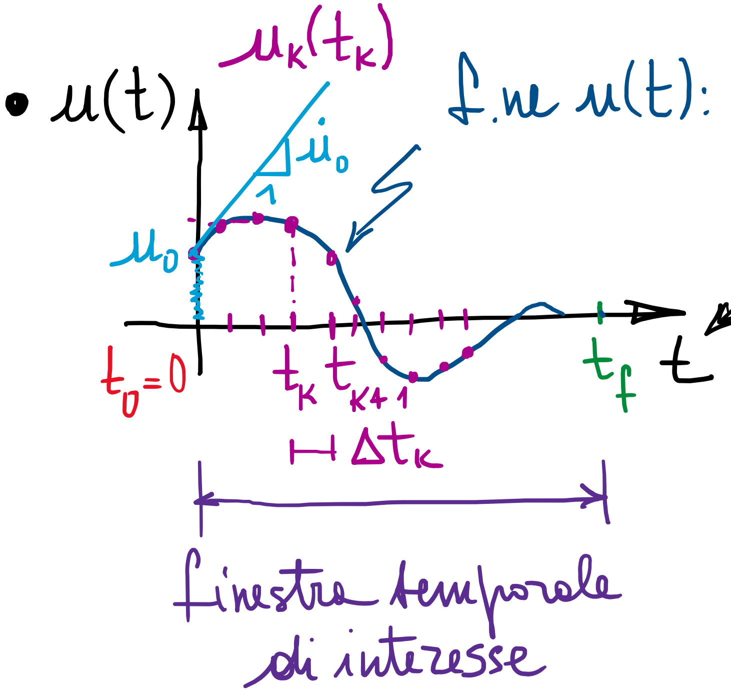
$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} ; \quad \Delta t_{cr} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}}\, T_1$$

Caratteristiche

- esplicito sse $\beta = 0$
- accuratezza del 2° ordine sse $\gamma = 1/2$ $\quad \varepsilon \sim \Delta t^2$ (errore)
- stabilità (numerica) u limitata $\forall \Delta t$
- incondizionatamente stabile ($\forall \Delta t$) $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$
- condizionatamente stabile $2\beta < \gamma$; $\gamma \geq 1/2$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_1} = \frac{\Omega_{cr}}{2\pi} T_1$$

Concetti fondamentali :



f.ne $u(t)$: risposta temporale

asse dei tempi (tempo "continuo" ↔ "continuous time")

$$t_0 \le t_K \le t_f$$

asse campionato (tempo "discreto" ↔ "discrete time") dei tempi - $n°$ discreto di istanti temporali, campionati ad intervallo di tempo Δt_K - Spesso $\Delta t_K = \Delta t = \frac{t_f - t_0}{n} = cost$

"passo temporale o di tempo"

$n°$ dei passi temporali ("time steps")

Soluzione continua esatta $u(t)$

" discreta esatta $u_K(t_K)$ (campionamento di $u(t)$)

" " approssimata $\tilde{u}_K(t_K)$ (sufficientemente accurata, nella rappresentazione della risposta reale)

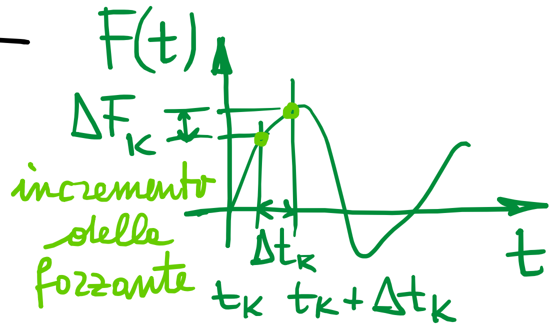
- **Eq.ne del moto in forma incrementale:**

$m, c, K = \text{cost}$ (sist. dinamico tempo-invariante)

all'inizio del passo t_K: $\quad m\ddot{u}_K + c\dot{u}_K + K u_K = F_K(t_K) \quad \ominus$

alla fine del passo $t_{K+1} = t_K + \Delta t_K$: $\quad m\ddot{u}_{K+1} + c\dot{u}_{K+1} + K u_{K+1} = F_{K+1}(t_{K+1}) \quad \oplus$

$$m\,\Delta\ddot{u}_K + c\,\Delta\dot{u}_K + K\,\Delta u_K = \Delta F_K$$



"avanzamento" della soluzione nel passo temporale $\Rightarrow$

$$\ddot{u}_{K+1} = \ddot{u}_K + \Delta\ddot{u}_K$$

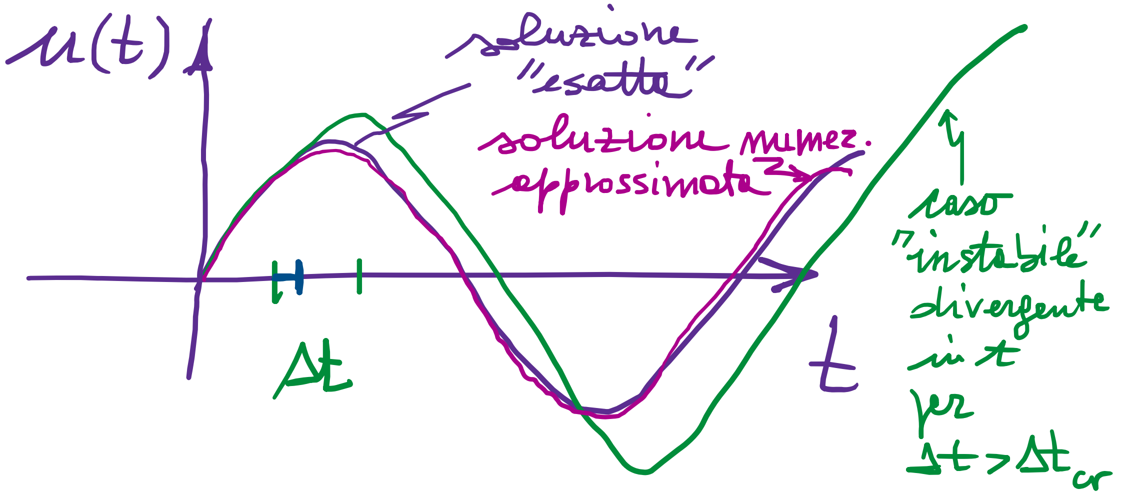
valori alla fine del passo

valori all'inizio del passo

incremento della risposta nel passo

- Metodo di integrazione: due aspetti fondamentali

  - stabilità del metodo (risposta non divergente o limitata in t al variare, crescere, di Δt)



$\tilde{u}(t)$ di significato numerico e fisico (non esplode, diverge)

  - accuratezza del metodo (stima della vicinanza della soluzione approssimata, rispetto a quella reale)

- Inoltre, caratteristica del metodo
  - implicito (necessità della soluzione all'interno del passo) non avanza automaticamente
  - esplicito ("in avanti" – "forward") può richiedere passi molto piccoli (es. in dinamica veloce)

SOMMARIO (Lez. 09)

- Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (nel dominio del tempo).
- Da sviluppo in serie di Taylor ⇒ differenze finite (approx. nel passo).
- Metodo dell'accelerazione lineare/media.
- Generalizzazione ⇒ Metodo di Newmark (famiglia di metodi).
- Implementazione in algoritmo numerico passo-passo.
- Caratteristiche (implicito/esplicito; accuratezza; stabilità numerica).

Next step: Introduzione (cenno) all'analisi nel dominio delle frequenze.

Sistemi MDOF (Multi Degree of Freedom Systems) ⇒ alias sistemi discreti a più gradi di libertà.