

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

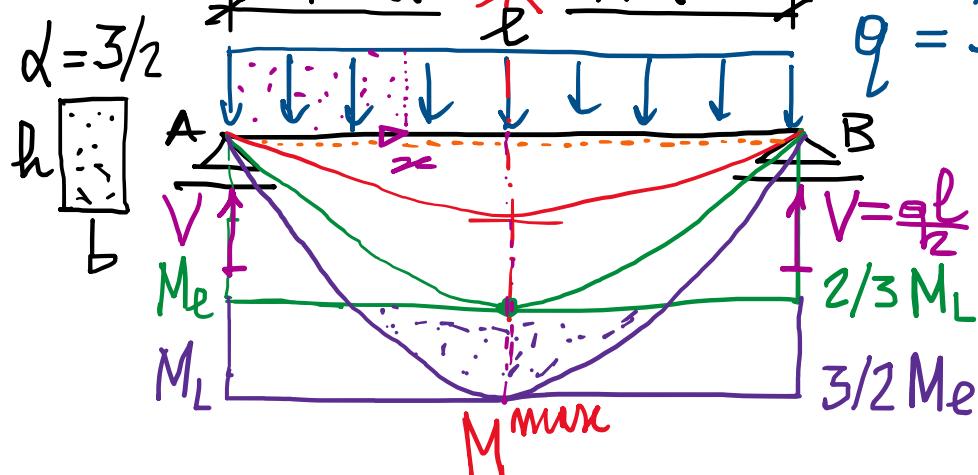
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

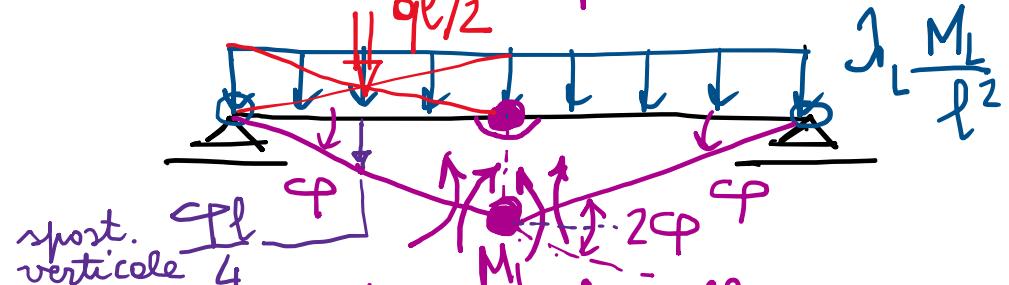
LEZIONE 25

Trae appoggio-appoggio, con carico ^{uniform.} di distribuito ^(q = cost) \rightarrow poi incastro-incastro (IPER) (150)



• Limite elastico: $M = \frac{1}{8} \lambda e M_L = M_e = \frac{2}{3} M_L \rightarrow \lambda_e = \frac{16}{3} = 5.\bar{3}$ (Regime el. $0 \leq \lambda \leq \lambda_e$)

• Collasso plastico: $M = \frac{1}{8} \lambda_L M_L = M_L \rightarrow \lambda_E = \lambda_L = 8 = \frac{24}{3}$ (Regime EP $\lambda_e \leq \lambda \leq \lambda_L$)
(limite elastico nell'ip. di CP)



meccanismo di collasso
di trae
(arco e tre cerchie allineate)

$$q = \lambda q_0 = \lambda \frac{M_L}{l^2}$$

$$M(x) = \frac{q}{2} x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M^{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{1}{8} M_L = \frac{q l^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{T_A^2}{2q} = \left(\frac{ql}{2} \right)^2 \frac{1}{2q} = \frac{q l^2}{8}$$

$$\lambda_e = \frac{16}{3} = 5.\bar{3}$$

$$\lambda_E = \lambda_L = 8 = \frac{24}{3}$$

[+ 50% rispetto a λ_e]

PLV: $\lambda_e = \frac{1}{2} \left(\frac{ql}{2} \right)^2 + \frac{P}{4} \cancel{\lambda_L q_0} = \lambda_{ip} = D = M_L 2 \cancel{q}$

$$\lambda_L = \frac{D}{\lambda_{el}} = \frac{2 M_L}{\cancel{q_0} \frac{l^2}{4} \cancel{q}} = 8$$

(come volevansi dim.)

equilibrio e
collasso incipiente

(il moltiplicatore di
collasso λ_L può agevolmente
essere determinato, noto il
meccanismo di collasso, via PLV)

Risposta elastoplastica (analisi evolutiva)

"Frecce"  EJ
 elastiche: $\frac{M_{max}}{l^3} = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EJ}$, $f_{max} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ}$

Quindi, in campo elastico:

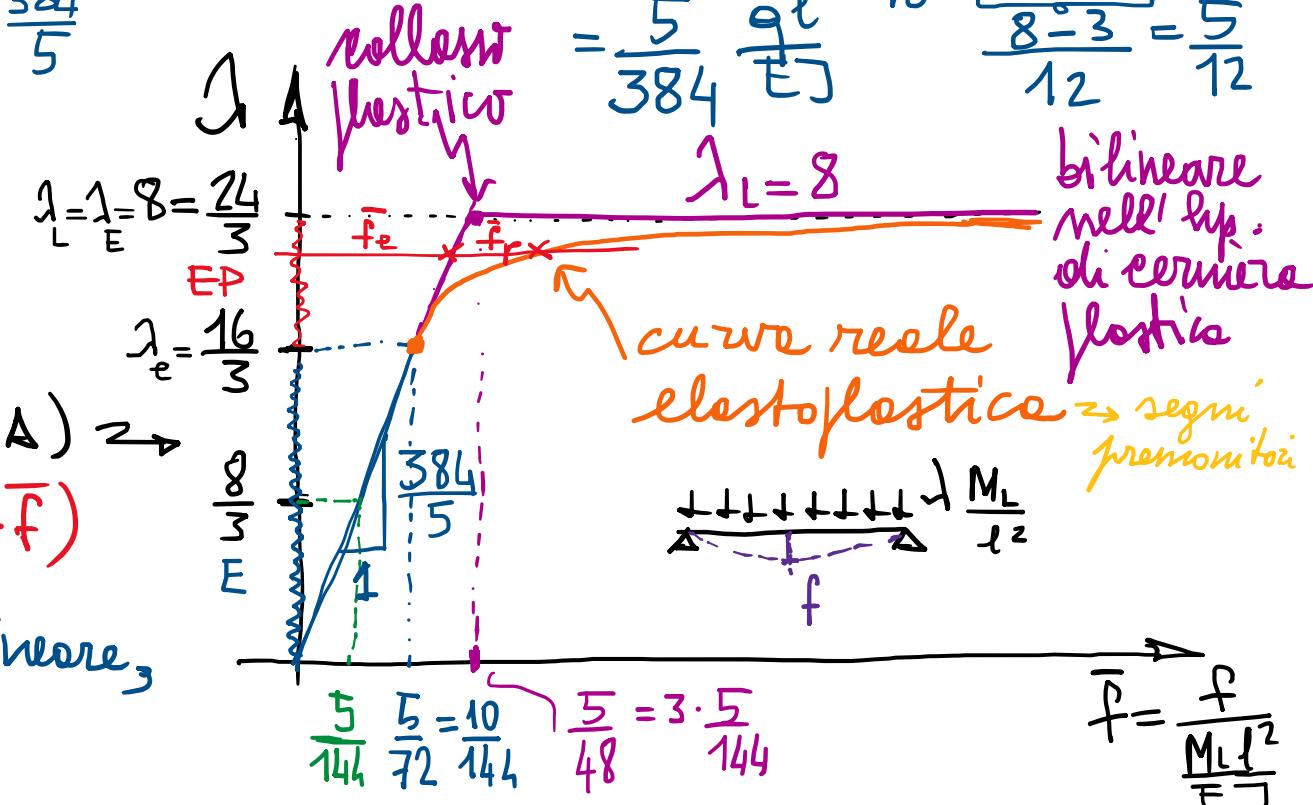
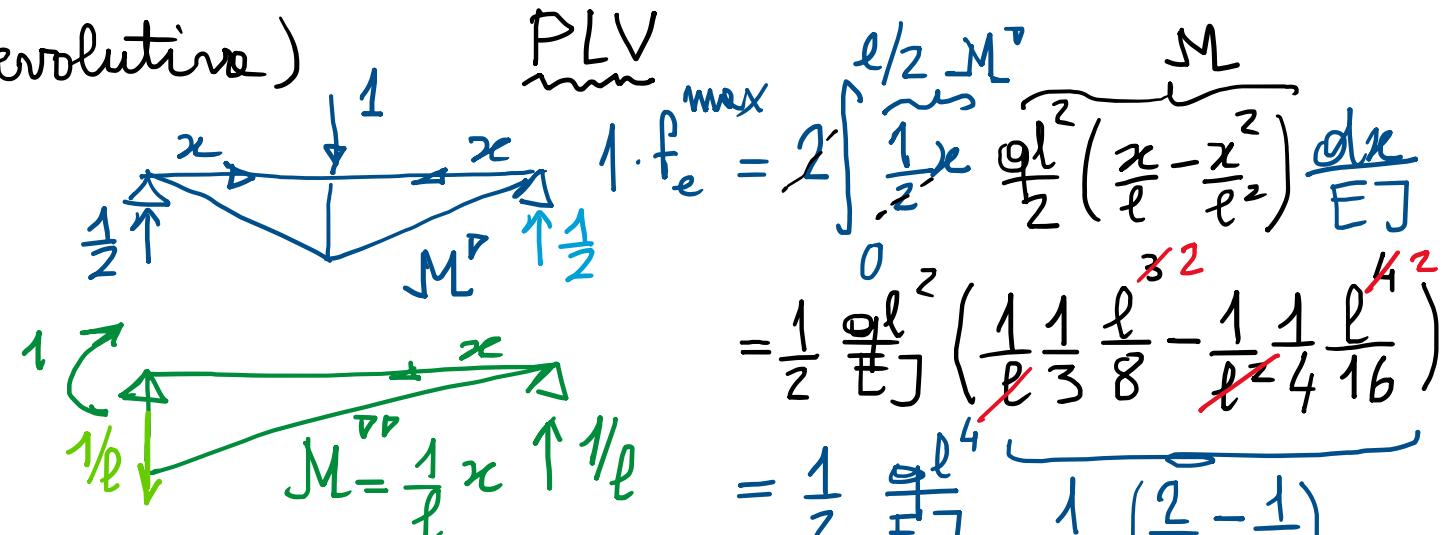
$$\bar{f} = \frac{5}{384} \cancel{\lambda / \frac{M_L l^2}{EJ}} \Rightarrow \bar{f} = \frac{5}{384} \lambda \Rightarrow \frac{1}{\bar{f}} = \frac{384}{5}$$

$$\bar{f}_e = \frac{5}{24} \cancel{\frac{384}{384} \frac{16}{3}} = \frac{5}{72}$$

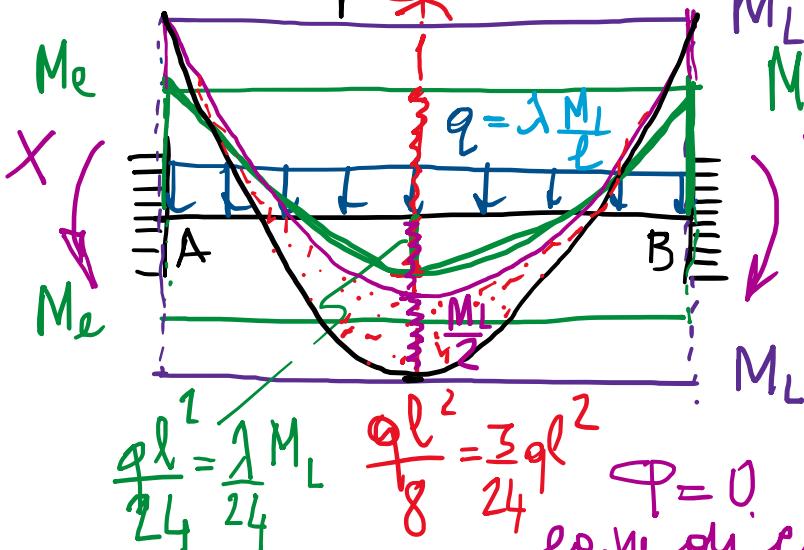
$$\bar{f}_E = \frac{5}{384} \cancel{\frac{8}{8}} = \frac{5}{48}$$

Diagramma forza-spostamento (A-A) \Rightarrow
 multipl. del carico-frecce $(\lambda - \bar{f})$

Risposte evolutive elastoplastiche non-lineare,
 per non-linearità di materiale.



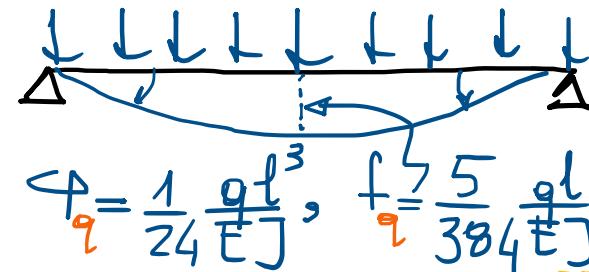
Strutture iperstatiche (trave doppiamente incastrata)



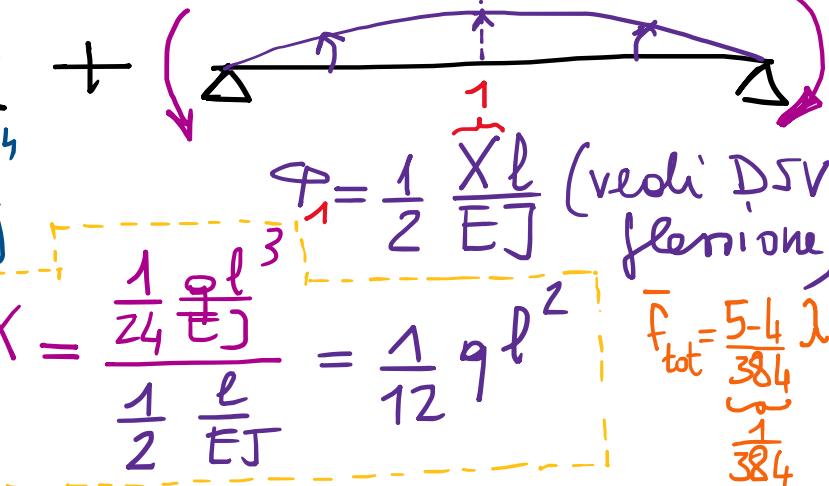
$$N_{el.}^{max} = \frac{ql^2}{12} = \frac{2}{24} ql^2 = \frac{1}{12} M_L$$

\times

$=$



$$\varphi_q = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EJ}, \quad f_q = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$



$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{Xl}{EJ} \quad (\text{vedi DSV flessione})$$

$$X = \frac{\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EJ}}{\frac{1}{2} \frac{Xl}{EJ}} = \frac{1}{12} ql^2$$

$$f_{tot} = \frac{5-4}{384} \lambda$$

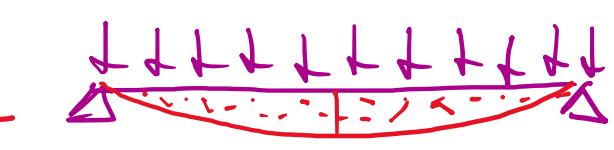
$$\frac{1}{384} \lambda$$

Limite elastico: $\frac{\lambda_e}{12} M_L = M_e = \frac{2}{3} M_L \Rightarrow \boxed{\lambda_e = 8}$

Momento limite: $\frac{\lambda_E}{12} M_L = M_L \Rightarrow \boxed{\lambda_E = 12}$ (limite elastico nell'ip. di C.P.)

N.B.: Il momento può ancora crescere in campo, sino ad M_L , mediante ridistribuzione di sforzi (dei momenti), mentre si producono deformazioni plastiche nelle trave (localizzate in A e B nell'ip. di C.P.).

$$\Delta\lambda \Rightarrow M^{max} = M_L \Rightarrow \Delta M = \frac{M_L}{2} = \frac{\Delta\lambda M_L}{8}$$

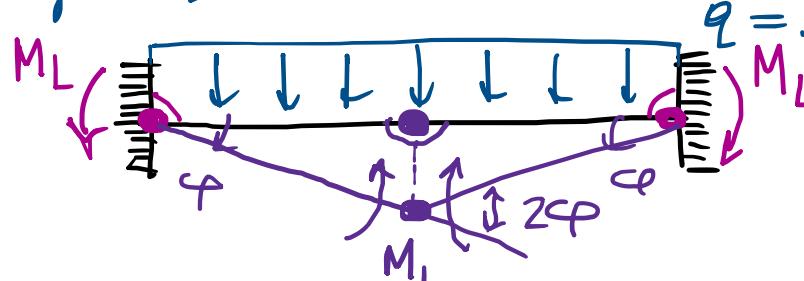


$$\Delta q = \Delta\lambda \frac{M_L}{l^2}$$

$$+33\% \quad \boxed{\lambda_L = 16}$$

$$\Delta M^{max} = \frac{\Delta q l^2}{8} = \frac{\Delta\lambda}{8} M_L \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{8}{2} = 4$$

- Infetti, analizzando il meccanismo di collasso:

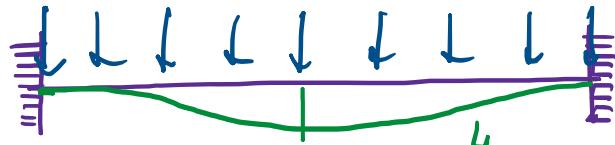


$$PLV: f_c = \lambda f_{c0} = D = f_{ip}$$

raddoppio di dissipazione plastica D_p a parità di f_{c0} , rispetto a ISO

$$\lambda_L = \frac{D}{f_{c0}} = \frac{\frac{4 M_L \varphi}{L}}{\frac{1}{4} M_L \varphi} = 16$$

- Risposta evolutiva elasto-plastica:



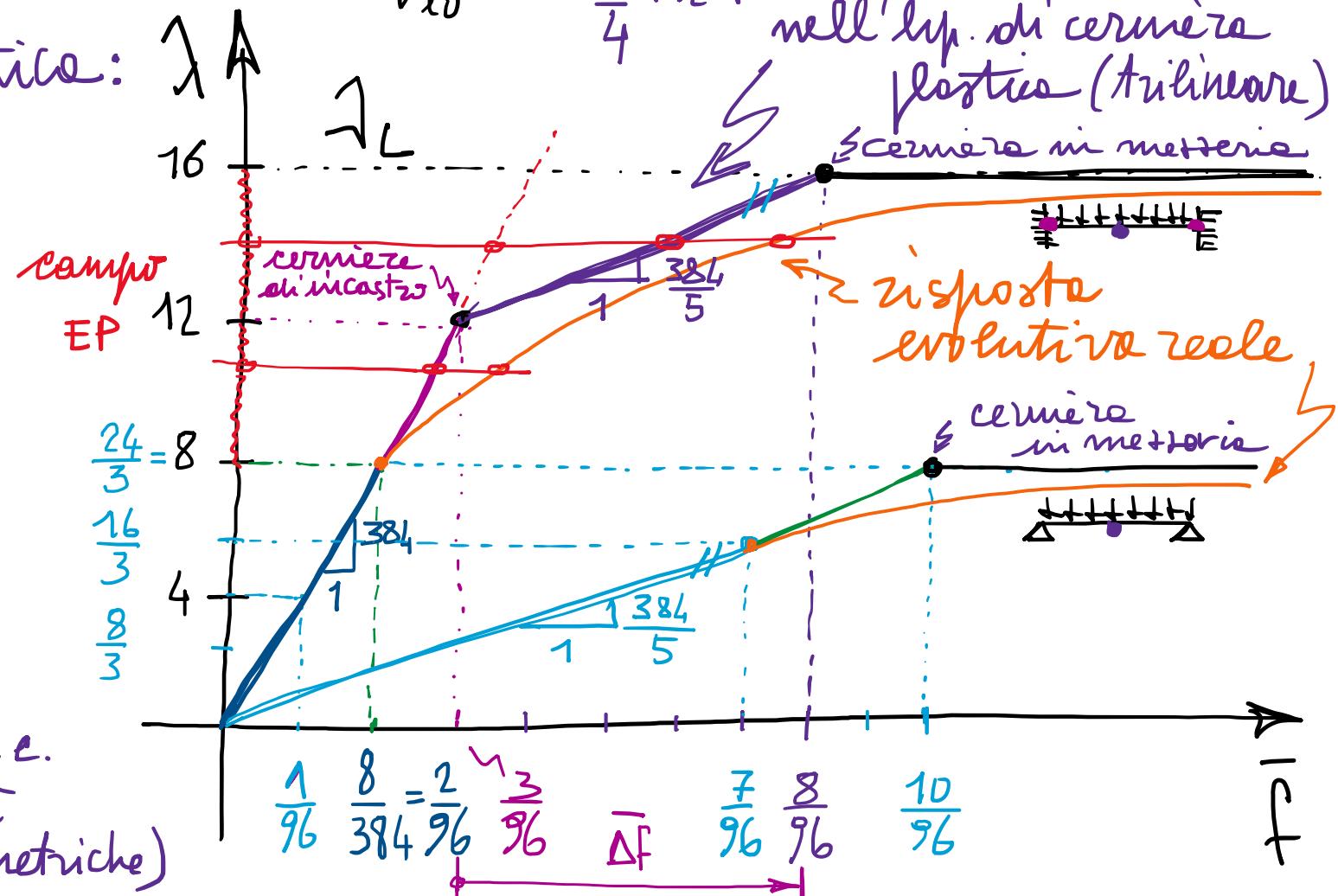
$$\bar{f} = \frac{5}{384} \lambda^4 \quad \Delta\lambda = \frac{20}{384} = \frac{5}{96}$$

$$f = \frac{1}{384} \frac{q L^4}{E J}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{384}; \quad \frac{\lambda}{\bar{f}} = 384$$

N.B.: - rigidità elastica 5 volte
- multipl. collasso 1 volta

Guadagno ottenibile con sole r.c.
(sia vincolo) e parità di proprietà
mitinseche (sia materiale e geometriche)



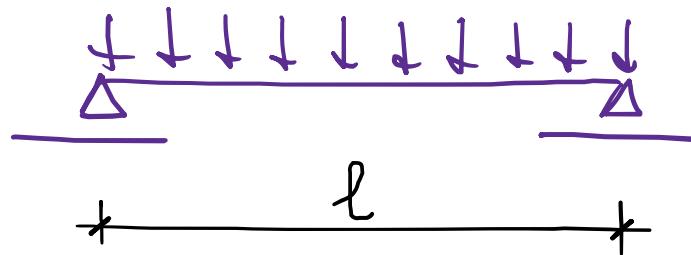
Concetti fondamentali :

- Gerarchia di approcci nell'analisi elastoplastica delle strutture :
 - determinazione delle risposte EP complete, in termini di forze e spostamenti (curva $P-\Delta$ non-lineare) -
 - tracciamento delle risposte evolutive EP, lineare a tratti, nell'ipotesi di cerniere plastiche (curva $P-\Delta$ "piece-wise linear"), con sottostime dell'entità delle deformazioni e valutazioni corrette dei valori di carico corrispondenti alle sequenze di attivazione delle CP, sino a raggiungere la situazione di collasso plastico.
 - individuazione delle sole caratteristiche di collasso plastico, in termini di : moltiplicatore (dei carichi) di collasso e corrispondente meccanismo di collasso (incipiente). \Rightarrow "metodi diretti"

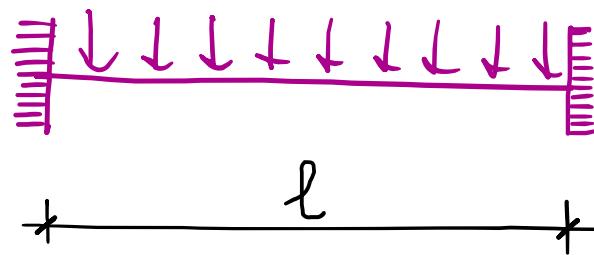
A
N
A
L
I
S
T
E

- Illustrazione mediante esempio emblematico (differenza della risposta in campo elastoplastico):

$$q = \lambda \frac{M_L}{l^2}$$



vs.



trave appoggio-appoggio

ISO

(staticamente determinate)

trave incastro-incastro

IPER

(staticamente indeterminata)

SOMMARIO (Lec. 25)

- $\bar{I} - \bar{f}$
- Analisi evolutiva trave appoggio-appoggio con q (bilineare): collasso all'attivazione delle prime cerniere plastiche in mezzerie (risorse ulteriori); I_L agilmente determinato (via PLV), nonostante sottostima deformazione EP.
 - Analisi evolutiva trave incastro-incastro con q (tutlineare): sequenze di attivazione delle cerniere plastiche (due istanze di apertura); ulteriori risorse portanti da ridistribuzione di sforzo per sviluppo di deformazioni plastiche, e carico crescente.
 - Confronto: moltiplicatore di collasso doppio (+100%); rigidezza elastica iniziale quintupla (rigidezza successiva uguale a quelle del caso precedente, all'apertura delle cerniere plastiche alle estremità incastrate).
 - In genere, informazione essenziale è collasso plastico (meccanismo e moltiplicatore) vs. analisi evolutiva.

Next step: Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (calcolo a rottura dei telai), per stima del collasso plastico - Esempi.