

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

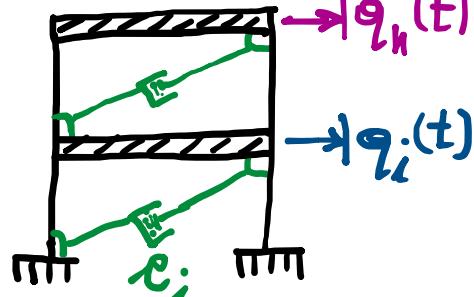
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

Sistemi MDOF smorzati



viscoso lin. $z_i(q_k)$
 "dissipatore"
 i-esimo
 (della d)
 $c_i > 0$
 coeff. di
 smorzamento

$$D_i = \frac{1}{2} \dot{z}_i F_{di}^T = \frac{1}{2} \dot{z}_i c_i \dot{z}_i$$

morfamento f. ne di dissipazione (Rayleigh)

Relazione tra \dot{z}_i e \dot{q}_k : "chain rule" (derivata di f. ne composta)

$$\dot{z}_i = \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z^T}{\partial q} \dot{q}$$

$$D = \sum_i D_i = \frac{1}{2} \sum_i \dot{z}_i c_i \dot{z}_i = \sum_{j,k} C_{jk} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} c_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j c_i \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \dot{q}_j \sum_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} c_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

- Smorzamento indotto mediante l'inserzione di dispositivi opportuni (smorzatori viscosi lineari). Es.: controventi dissipativi (\rightarrow sismica).
- Smorzamento intrinseco "spontaneo" all'interno del sistema strutturale (di entità limitata per strutture civili).

$$\rightarrow \ddot{F}_d = C_z \ddot{z}; \quad F_d = \{F_{di}\}_{nd \times 1}, \quad C_z = \text{diag}[c_i], \quad z = \{\dot{z}_i\}_{nd \times 1}$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{2} \dot{z}^T \ddot{F}_d = \frac{1}{2} \dot{z}^T C_z \ddot{z} = \frac{1}{2} \Pi_d$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\frac{\partial z}{\partial q} C_z \frac{\partial z}{\partial q}}_{\ddot{F}_d} \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q} \geq 0$$

C: matrice di smorz.

$n \times n$ simm. e semidef. pos.

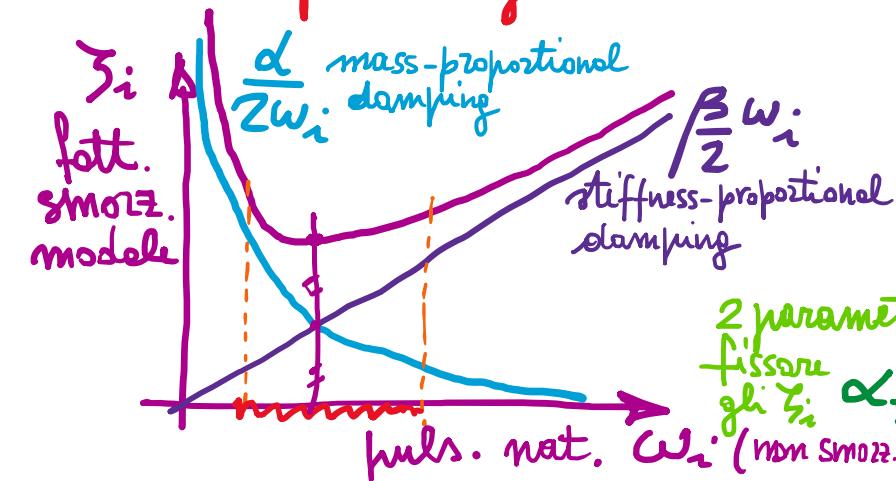
$$C_{jk} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \Leftrightarrow C = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^T \partial \dot{q}}$$

- Eq. di moto: sulla struttura sugli smorzatori
 $M\ddot{q} + Kq = Q(t) + Q_d(t)$ con $Q_d(t) = -F_d(t) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = -C\dot{q}$ (v. eq. di Lagrange)
sist. non smorzato

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q(t)$$

- Traf. in coord. principali: $q = \sum_i \phi_i p_i = \Phi P$ coordinate principali $q = \sum_i p_i \phi_i$
coordinate legrangiane
 $\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{M_i} \ddot{P} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C_i} \dot{P} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K_i} P = \Phi^T Q = P(t)$ ove $C \neq \text{diag}$ [$C_i = \Phi_i^T C \Phi_i$] in generale
 $K = \text{diag} [K_i = \Phi_i^T K \Phi_i] \neq$

- In generale C non diagonale: coeff. delle cond. lin.
- CS per diagonalizzazione: $C = \alpha M + \beta K$ (smorzamento "classico" o alle Rayleigh)



2 parametri liberi per modale
 fissare gli ζ_i α, β determinati in base a $2\zeta_i$ (ζ_1, ζ_2)

$$C = \alpha M + \beta K = \text{diag} [C_i = \alpha M_i + \beta K_i]$$

$$\left(\frac{C_i}{M_i} = 2\zeta_i \omega_i M_i \right) \quad 2\zeta_i \omega_i M_i = \alpha M_i + \beta \frac{K_i}{M_i}$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2} \omega_i$$

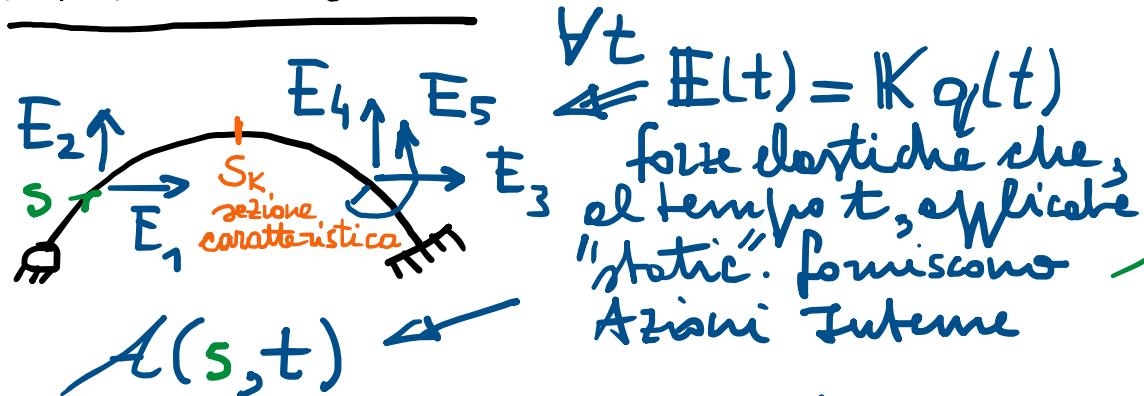
descrizione fattori di smorzamento modale

- Assumere $\mathcal{P} = \text{diag} [C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}] \Rightarrow C = \underline{\Phi}^{-T} \underline{\Lambda} \underline{\Phi}^{-1}$ $\Leftarrow \mathcal{P} = \underline{\Phi}^T \underline{\Lambda} \underline{\Phi}$
 (si ipotizzano gli ζ_i uguali o diversi per i vari modi, e si risale alla matrice di smorzamento C in coord. lagrangiane) $\zeta_i \approx 1\%$, $2-7\%$ tipic.
- Valide per smorzamento intrinseco al sistema strutturale.
- Nel caso di dispositivi aggiuntivi \mathcal{P} non diag. in generale.

• Esempio:

$\ddot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2)$, $\dot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$ [N.B. $\Rightarrow q_1 = q_2 \Rightarrow z = 0$]
 $\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$
 $\frac{\partial z}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$
 $C = \frac{\partial z}{\partial q_1} C \frac{\partial z^T}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}$
 $= \frac{1}{2} c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
 $C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial q_i \partial q_j}$
 $\underline{\Lambda} = \underline{\Phi}^T C \underline{\Phi}$ non diag.
 è singolare ($\det C = 0$) (semidef. pos.)
 Idem da scritt. di $D = \frac{1}{2} c \dot{z}^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2)$

Azioni interne



N, T, M

- A.I. per $q_j = 1 \Rightarrow E_i = K_{ij} \Rightarrow A_j(s)$
 $(q_i = 0, i \neq j)$
- A.I. modelli, per $\mu_k = 1 \Rightarrow q = \Phi_k$ (autovettori)
 $(\mu_i = 0, i \neq k)$

indotte da forte modello

$$\bar{\mathbb{E}}_k = K \Phi_k = \omega_k^2 M \Phi_k = \bar{F}_{IK} \Rightarrow \bar{A}_k(s) : k \text{ indica del modo}$$

forze elastiche modelli

$\underbrace{\Phi_k}_{\text{p.s. agli autovettori}}$ forze d'inerzia modelli

$$A(s, t) = \sum_k \bar{A}_k(s) \mu_k(t) = \bar{A}(s) \Phi(t)$$

$$- A(s, t) = \bar{A}(s) \underbrace{\Phi \Phi^T}_{q(t)} = (\Phi^T \bar{A}(s))^T \Phi^T \Phi = \bar{A}(s)^T \Phi^T \Phi = \bar{A}(s)^T I \Rightarrow \boxed{\bar{A}(s) = \Phi^T \bar{A}(s)}$$

- Stima valori $\max(\|q(t)\|)$ $\bar{A}(s)$

$$\bar{A}_k(s) = \sum_j \Phi_{kj} \bar{A}_j(s)$$

$$\text{SRSS} \quad \bar{A}(s) = \sqrt{\sum_k (\bar{A}_k(s) \mu_k^{\max})^2} = \sqrt{\sum_j (\bar{A}_j(s) q_j^{\max})^2} \quad (\text{Square Root of Sum of Squares})$$

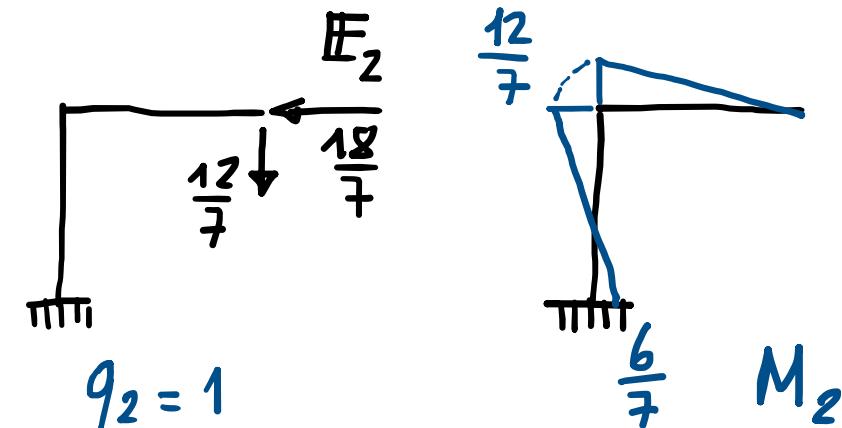
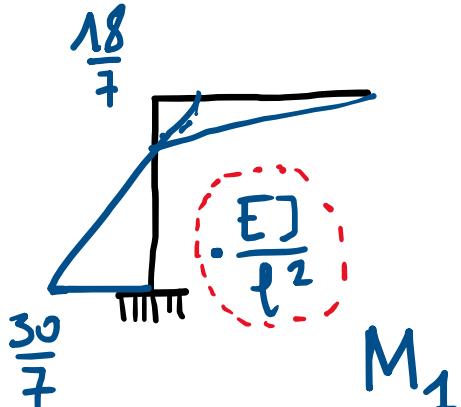
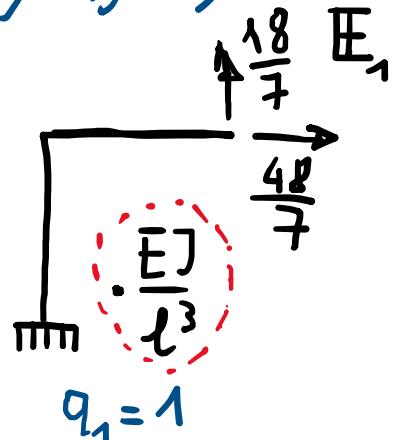
$\mathbb{E}_j = \{E_{-i}\}$ j indice del goll

Esempio 2DOF :

$$K = \frac{6}{7} \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{E}_i = K \phi_i = \omega_i^2 M L \phi_i$$

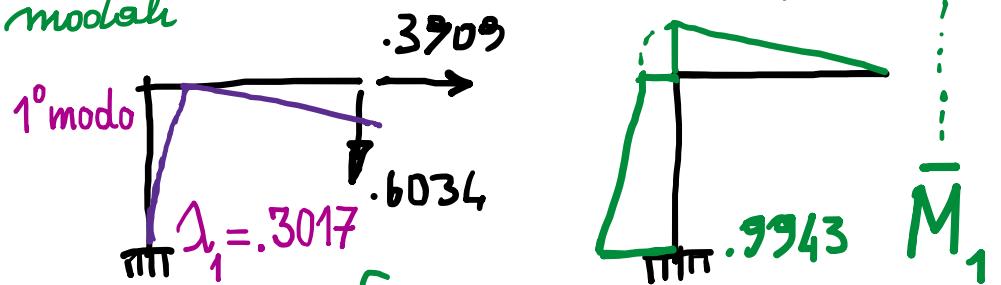
$$= \frac{EJ}{l^3} \lambda_i \begin{bmatrix} 3\phi_{i1} \\ 2\phi_{i2} \end{bmatrix}$$

$\lambda_i (q_j = 1)$



$\bar{A}_K (\mu = 1)$
azioni interne
modali

$$\bar{E}_1 \rightarrow \bar{M}_1 = M_1 \phi_{11} + M_2 \phi_{12}$$

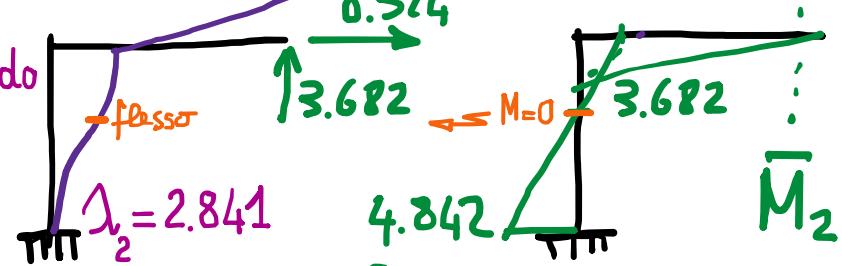


$$\phi_1^T = \begin{bmatrix} .4320 & 1 \end{bmatrix}$$

1° autovettore

$$\begin{cases} .3909 = \frac{48}{7} \cdot .4320 - \frac{18}{7} \cdot 1 = \frac{2.736}{7} \\ .6034 = -\frac{18}{7} \cdot .4320 + \frac{12}{7} \cdot 1 = \frac{4.724}{7} \end{cases}$$

$$\bar{E}_2 \rightarrow \bar{M}_2 = M_1 \phi_{21} + M_2 \phi_{22}$$



$$\phi_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -.6481 \end{bmatrix}$$

2° autovettore

$$\begin{cases} 8.524 = \frac{48}{7} \cdot 1 - \frac{18}{7} \cdot (-.6481) = \frac{59.67}{7} \\ -3.682 = -\frac{18}{7} \cdot 1 + \frac{12}{7} \cdot (-.6481) = -\frac{25.78}{7} \end{cases}$$

Concetti fondamentali :

- smorzamento strutturale (con riferimento specifico ai sistemi dinamici in ingegneria civile):
 - intrinseco, spalmato all'interno delle strutture; endemico nelle presenti di effetti dissipativi in sistemi reali.
 - predisposto, tramite l'inserzione di dispositivi appositi (smorzatori), atti ad incrementare lo smorzamento globale, in particolare in relazione a gol specifici (es. controventi dissipativi).
- generalizzazione da SDOF a MDOF: $F_d = c \ddot{u} \Leftrightarrow F_d = C \dot{\varphi}_L$.

Viene ad introdurre la matrice di smorzamento C , in generale del tutto scorrelata dalle matrici M e K sulle quali è incentrato il pb. (generalizzato) agli autoveloci $K\Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i$, che consente, in dinamica modale, di disaccoppiare le eq.m. del moto del sistema non smorzato.

- Si può assumere di preservare le proprietà di diagonalizzazione (disaccoppiamento) del sistema delle eq.m. del moto, supponendo, tipicamente per smorzamento intrinseco strutturale, che la matrice di smorzamento C possa risultare diagonale in coord. principali ($C = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}]$) - ciò può risultare ragionevole, alla luce delle incertezze insite nella definizione dello smorzamento strutturale, e fronte delle complessità del modello strutturale che mira a rappresentarlo.

— o —

- Determinazione delle Azioni Interne $A(s_k, t)$
- (N, T, M) spazio \vdash tempo \vdash nel tempo
 $A(s_k, t) \Rightarrow A(s_k)$ mese \Rightarrow stime
 L sezioni caratteristiche es. SRSS

- per sovrapposizione di A.I. per goll unitari $q_j = 1 \Rightarrow A_j(s) \dots \dots$ goll j
- per sovrapposizione di A.I. modelli (cioè per coord. princ. unitarie) $p_k = 1 \Rightarrow \bar{A}_k(s) \dots \dots$ modo k

SOMMARIO (Lec. 14)

- Smorzamento strutturale di sistemi MDOF
 - intinsico (sistemi reali).
 - aggiunto (dispositivi).
- Funzione di dissipazione e matrice di smorzamento.
- Diagonaizzazione in coordinate principali
 - smorz. alle Rayleigh.
 - " " modelli.
- Esempio 2DOF con dissipatore aggiunto.
- -
- Azioni interne
 - per coord. legrangeiane unitarie.
 - per coord. principali unitarie (AI modelli).
- Stime dei valori max (in t) [SRSS].
- Esempio 2DOF: azioni interne modelli.

Next step: Risposta sismica di sistemi MDOF (teori shear-type) - END.