Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

SOMMARI DELLE LEZIONI - I

SOMMARIO (Lez. 01)

- Le tematiche della Dinamica, della Instabilità e della Anelasticità delle Strutture: aspetti specifici e interagenti.
- Posizionamento vs. la SdC; equazioni; caratteristiche; programma.

+ Parte 1 - Dinamica delle Strutture

- Sistemi dinamici ad un gdl (SDOF). L'oscillatore semplice.
- Equazione del moto < equilibrio dinamico (principio di d'Alembert). / equazioni di Lagrange.
- Esempi di sistemi strutturali SDOF, con determinazione della costante di rigidezza.
- Telaio a portale; fattore di rigidezza trave/colonna; telaio "shear-type".

SOMMARIO (Lez. 02)

- Oscillazioni libere non smorzate (in risposta alle sole c.i.).
- Eq.ne dei moti armonici.
- Pulsazione naturale del sistema $\omega_1 = \sqrt{K/m}$.
- Moto armonico di periodo naturale $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (e ampiezza costante).
- Ampiezza e sfasamento, rispetto a puro cos o sin.
- Rappresentazione del moto mediante vettori rotanti nel piano di Argand: U sfasata; $\dot{U} \sim \omega_1 U$ in quadratura in anticipo; $\ddot{U} \sim -\omega_1^2 U$ in opposizione di fase.

- Next step: generalizzazione al caso smorzato, con ampiezza decadente nel tempo.

SOMMARIO (Lez. 03)

- Oscillazioni libere smorzate (in risposta alle sole c.i.).
- Fattore di smorzamento (~ 1% per strutture civili).
- Radici dell'eq.ne caratteristica: poli.
- Casistica: subcritico → moto oscillatorio con ampiezza decadente.
  critico → moto aperiodico non oscillatorio.
  supercritico → idem, con ampiezza iniziale e picco inferiore.
- Decremento logaritmico e stima del fattore di smorzamento.
- Integrale generale e imposizione delle c.i.
- Next step: visto l'integrale generale dell'eq.ne omogenea con termine noto nullo. Da sovrapporsi ad integrale particolare dipendente dalla forzante → risposta forzata.

SOMMARIO (Lez. 04)

- Risposta forzata (forzante armonica $F(t) = F \sin \omega t$).
- Amplificazione dinamica $N(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$ ($U \simeq N u_{st}$).

pulsaz. forzante

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$ frequency ratio

pulsazione sistema

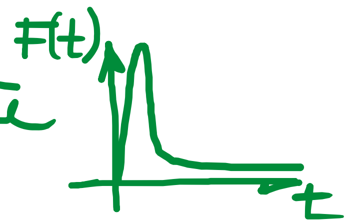
- Sfasamento della risposta
  - in fase ($\xi = 0$), $\beta < 1$;
  - in opposiz. di fase ($\xi = \pi$), $\beta > 1$.
- Integrale generale: $u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$.
- Risonanza ($\beta = 1$; $\omega = \omega_1$): risposta divergente in t (ampiezza illimitata $u \to \infty$).
- Next step: caso smorzato (risposta "steady-state"), con picco di risonanza di entità limitata, dipendente dal fattore di smorzamento ζ. ⇐ pur elevato, per ζ piccoli ($\zeta \ll 1$)

SOMMARIO (Lez. 05)

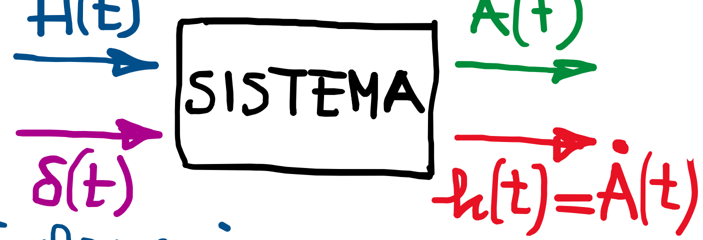
- Risposta smorzata a forzante armonica.
- Effetto dello smorzamento su curve di risonanza e di fase.
- Picco finito di ampiezza in condizioni di risonanza; risposta in quadratura rispetto alla forzante.
- Risposta a regime in componenti $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$.
- Integrale generale con risposta transiente e a regime.
- Next step: trattazione unificata in variabili complesse per risposta a $F\sin\omega t$ e/o $F\cos\omega t \rightsquigarrow Fe^{i\omega t}$.

SOMMARIO (Lez. 06)

- Trattazione in variabili complesse $\Rightarrow Fe^{i\omega t} = F\cos\omega t + iF\sin\omega t$.
- Derivazione delle relazioni caratteristiche prec. determinate.
- Risposta simultanea alle comp.ti armoniche $\cos\omega t$ e $\sin\omega t$.
- Rappresentazione nel piano di Argand
  - diagramma delle risposte.
  - diagramma delle forze.
- Generalizzazione: forzante periodica (treno di infinite armoniche).
- Effetto "filtro" del sistema vs. le comp. armoniche della forzante vicine a quelle corrispondenti alla pulsazione naturale del sistema.
- Next step: risposta a forzante generica (a partire da forzante impulsiva)



SOMMARIO (Lez. 07)



- Verso la determinazione della risposta a forzante generica.
- Funzione risposta a gradino unitario: $A(t)$.
- " " " impulso " : $h(t) = \dot{A}(t)$.
- Da th. dell'impulso, come per oscillazioni libere smorzate da velocità iniziale al tempo 0^+ pari a $\frac{I=1}{m}$.
- Rappresentazione ideale (matematica) di forzante impulsiva unitaria: Delta di Dirac $\delta(t,\tau)$.
- Next step: forzante generica per sovrapposizione di impulsi e conseguente risposta per sovrapposizione di risposte impulsive (integrale di convoluzione o di Duhamel).

SOMMARIO (Lez. 08)

- Risposta a forzante generica ⇒ sequenza di impulsi ⇒ Integrale (di convoluzione) di Duhamel.
- Scritture interpretative alternative (come per risposta armonica).
- Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel ⇒ calcolo numerico.

— o —

- Risposta al moto del riferimento (es. earthquake azione sismica).
- Forzante apparente indotta per effetto d'inerzia (trascinamento).
- Risposta simbolica via Duhamel (valutabile numericamente).
- Spettri e pseudo-spettri di risposta (ev. di progetto ⇒ codificati v. normative).
- Concetto di isolamento sismico delle vibrazioni.

Next step: Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (Metodo di Newmark).
Risposta nel dominio delle frequenze.

SOMMARIO (Lez. 09)

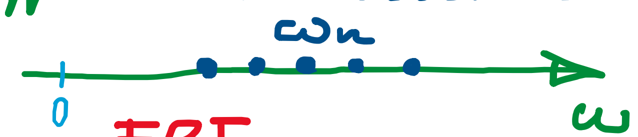
- Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (nel dominio del tempo).
- Da sviluppo in serie di Taylor ⟹ differenze finite (approx. nel passo).
- Metodo dell'accelerazione lineare/media.
- Generalizzazione ⟹ Metodo di Newmark (famiglia di metodi).
- Implementazione in algoritmo numerico passo-passo.
- Caratteristiche (implicito/esplicito; accuratezza; stabilità numerica).

Next step: Introduzione (cenno) all'analisi nel dominio delle frequenze.

Sistemi MDOF (Multi Degree of Freedom Systems) ⟹ alias sistemi discreti a più gradi di libertà.

SOMMARIO (Lez. 10)

- Analisi nel dominio delle frequenze (FD).
- Trasformata di Fourier (generalizzazione di sviluppo in serie di Fourier, tramite intero asse reale delle frequenze).



- Trasformata di F. dell'eq.ne del moto $\Rightarrow$ $U(\omega) = \overbrace{H(\omega)}^{FRF} \cdot G(\omega)$ risposta in FD tramite prodotto algebrico.
- Schema interpretativo di analisi, tra i livelli TD e FD, coi legami tra le f.ni presenti. In particolare, $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) \simeq N(\omega)$.

Next step: Sistemi dinamici a più gdl (MDOF)
(generalizzazione dei sistemi SDOF).

SOMMARIO (Lez. 11)

- Sistemi dinamici a più gradi di libertà (MDOF).
- Matrice di rigidezza/cedevolezza; energia elastica (def. pos.). $\mathcal{E} \overset{\text{en. potenz.}}{=} V$
- Matrice di massa (inerzia); energia cinetica (def. pos.) T. $\mathcal{L} = T - \mathcal{E}$
- Equazioni del moto (princ. di d'Alembert – "eq. dinamico"; eq.ni di Lagrange).

— ∘ —

- Esempio di telaio con due gdl dinamici e un gdl "statico".
- Condensazione statica, a definire la matrice di rigidezza associata ai soli gdl dinamici.
- Scrittura della matrice di rigidezza/di cedevolezza (m. spost./forze).

Next step: Modi principali di vibrare (oscillazioni libere del sistema MDOF).

SOMMARIO (Lez. 12)

- Modi principali di vibrare < pulsazioni naturali^2 $\leftrightarrow$ autovalori. / forme modali $\leftrightarrow$ autovettori.
- Ortogonalità e normalizzazione degli autovettori.
- Autovalori da rapporto di Rayleigh (in dinamica) $\Rightarrow$ generaliz. SDOF.
- Scrittura compatta del pb. agli autovalori tramite matrici degli autovettori e degli autovalori.
- Trasformazione in coordinate principali $\Rightarrow$ disaccoppiamento delle eq.ni del moto (analisi dinamica modale).
- Oscillazioni libere (sovrapposizione di n moti armonici).

Next step: esempio 2DOF; smorzamento; Azioni Interne.

SOMMARIO (Lez. 13)

- Esempio 2DOF: modi principali di vibrazione.
- Soluzione (analitica) dell'eq.ne caratteristica → autovalori.
- Determinazione degli autovettori (dal pb. agli autoval. originario), a meno di costante arbitraria.
- Normalizzazione degli autovettori. (⇐ scelta della costante arbitraria)
- Trasformazione in coordinate principali e disaccoppiamento delle eq.ni del moto.
- Calcolo numerico delle autosoluzioni (metodo dell'iterazione vettoriale inversa).

Next step: introduzione dello smorzamento; azioni interne (modali).

SOMMARIO (Lez. 14)

- Smorzamento strutturale di sistemi MDOF < intrinseco (sistemi reali). / aggiuntivo (dispositivi).
- Funzione di dissipazione e matrice di smorzamento.
- Diagonalizzazione in coordinate principali < smorz. alla Rayleigh. / " modali.
- Esempio 2DOF con dissipatore aggiunto.

— o —

- Azioni interne < per coord. lagrangiane unitarie. / per coord. principali unitarie (AI modali).
- Stime dei valori max (in t) [SRSS].
- Esempio 2DOF: azioni interne modali.

Next step: Risposta sismica di sistemi MDOF (telai shear-type) - END.

SOMMARIO (Lez. 15)

- Risposta sismica di strutture MDOF (telai "shear-type").
- Equazioni del moto con azione sismica per effetto di trascinamento.
- Analisi dinamica modale con disaccoppiamento in n eq.ni ∀ modo i.
- Determinazione della risposta tramite spettro di risposta.
- Stime (SRSS) degli indici di risposta sismica (spost., AI, taglio alla base).
- Parametri di partecipazione modale (masse, fattori) e masse modali efficaci (legate alla stima del taglio modale alla base massimo).

Next step: (Dinamica dei sistemi continui).

II: Instabilità delle strutture (dipartendo dall'analisi dinamica).