

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 20

Esempio 3DOF - Deformate critiche

Eq. ni di equil. (de stat. stell'EPT) $\nabla_2(\vartheta)$, $|\vartheta_i| \ll 1 \sim \vartheta_i^2$

$$(1) \begin{cases} (3-p)\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 \\ -\vartheta_1 + (2-p)\vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3) -\vartheta_2 + (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 = 0$$

lineari.

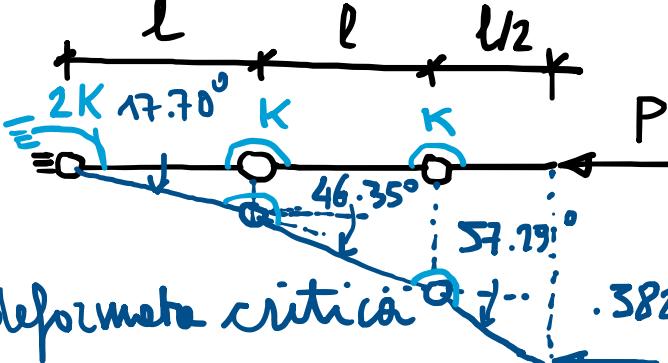
carichi critici: $\det(K) = 0 \Rightarrow p_i^*$

Deformate critiche associate ai p_i^* $\Rightarrow \delta q_i^* = q_i^* - q_0$

$$\text{Dalla (1)} \Rightarrow \vartheta_1 = \frac{\vartheta_2}{3-p} = \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} \vartheta_3$$

$$\text{Dalla (3)} \Rightarrow \vartheta_2 = (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 \approx \frac{2-p}{2}\vartheta_3$$

• 1° carico critico ($p_1^* = .3810$): $\vartheta_1 = .3090 \text{ rad} = 17.70^\circ$



N.B. $2K \approx 0$
el 1° ord.
 $(\cos \vartheta_i \approx 1)$
 $\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$

$$.3810 \frac{K}{l} = P_{cr,E}$$

1° deformata critica

2° def. critica

$$q_i = \vartheta_i$$

$$P = p \frac{K}{l}$$

$$K_E$$

$$K_G$$

$$\begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Alternativamente: $K \delta q_L = 0$

$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*$$

pb. agli autovetori generalizzati

p_i^* autovel. crit.

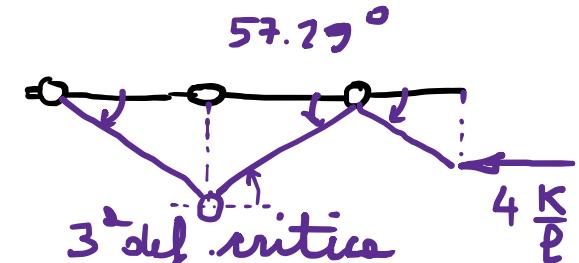
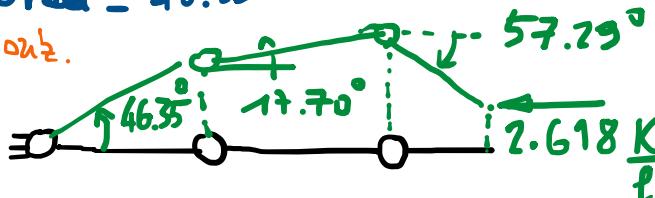
δq_i^* autovettori

Note a mani di cost. arbitraria

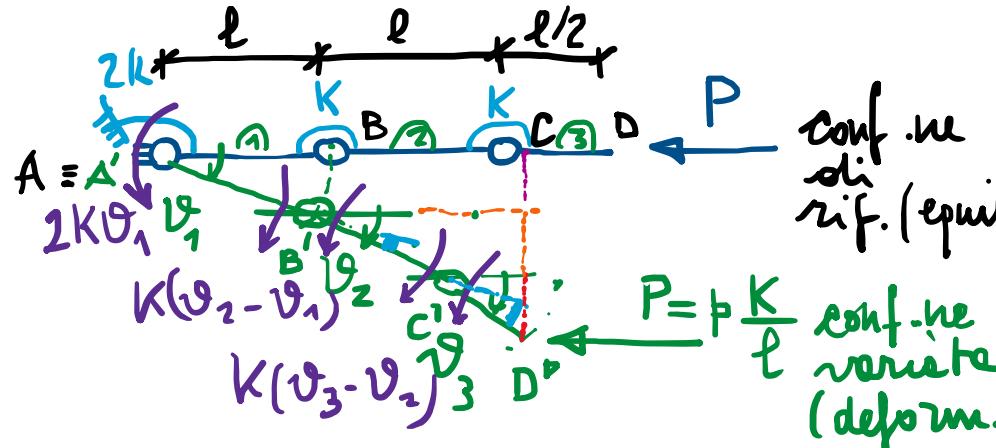
$$\delta q_i^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} \\ \frac{2-p}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \vartheta_3 = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ$$

Analogam. per $p_2^* = p_3^*$:



Approccio statico: scritture dirette delle eq.m di equilibrio varie (nelle conf. ne def.)



conf. iniz.
di rif. (equil.)
 $P = p \frac{K}{l}$ conf. ne varie (deform.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_C^3 = 0 \Rightarrow K(\vartheta_3 - \vartheta_2) - P \frac{l}{2} \sin \vartheta_3 = 0 \\ \sum M_B^{3+2} = 0 \Rightarrow K(\vartheta_2 - \vartheta_1) - P \left(\frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 \right) = 0 \\ \sum M_A^{3+2+1} = 0 \Rightarrow 2K\dot{\vartheta}_1 - P \left(\frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 + l \sin \vartheta_1 \right) = 0 \end{array} \right.$$

app. ener.
 $\leftrightarrow 3^e$ eq.

$\leftrightarrow 2^e + 3^e$ eq.
 $\leftrightarrow 1^e + 2^e + 3^e$ eq.

eq.m di equil. non-lineari (non-lin. geometriche)

Spost. "geometricamente piccoli" $|\vartheta_i| \ll 1 \Rightarrow \sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$: eq.m linearizzate

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vartheta}_1 - \vartheta_2 + (1 - \frac{p}{2}) \vartheta_3 = 0 \\ -\dot{\vartheta}_1 + (1-p)\vartheta_2 - \frac{p}{2} \vartheta_3 = 0 \\ (1-p)\dot{\vartheta}_1 - p \dot{\vartheta}_2 - P_2 \vartheta_3 = 0 \end{array} \right.$$

conf. ne di rif. equil.

$$\tilde{K} \delta q = 0$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

N.B.: bracci di leva di P
non nulli al 1° ordine
($\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$)

non simm.

Cerichi critici:

$$-\det(\tilde{K}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$-\tilde{K}_E \delta q_i^* = p_i^* \tilde{K}_G \delta q_i^* \Rightarrow \text{autovel.} \quad \text{autovett.}$$

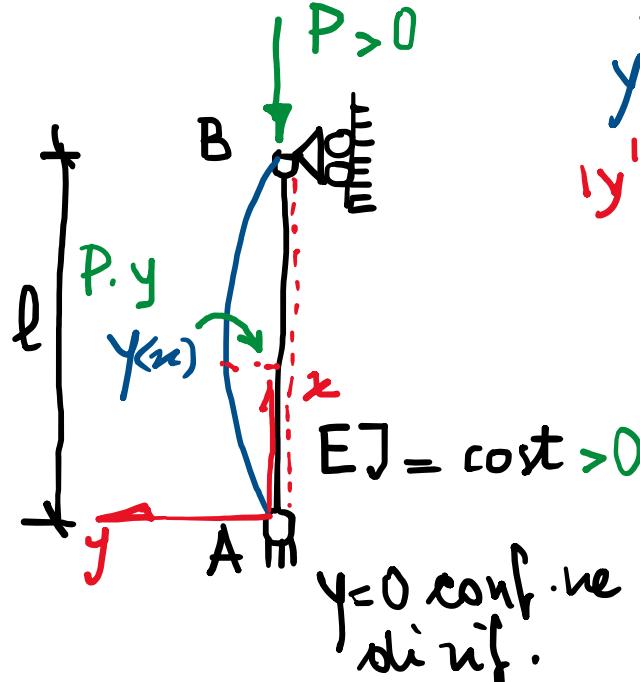
coh
identica
risultati

N.B. \tilde{K} de approccio statico può differire
da K de approccio energetico (sim.)
ma con le stesse proprietà
algebraiche sottostanti.

Sistemi continui (aste semplicemente compresse deformabili elasticamente flessionali.)

Aste di Euler (n 1750) - Approssimazione statica

nelle conf. ne def.



$$y''(x) \underset{\substack{\text{curvatura} \\ |y'| \ll 1}}{\approx} \frac{M(x)}{EJ} \Rightarrow EJ y''(x) = M(x) = -Py(x)$$

Legge di Bernoulli-Euler-Navier

$$y''(x) + \frac{P}{EJ} y(x) = 0$$

$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$

Soluz.

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

r.e. (scrittura e impostazione)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ y(l) = 0 \rightarrow A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0 \end{cases}$$

$$(A \sin \alpha l) A = 0 \quad \begin{cases} \sin \alpha l \neq 0 \rightarrow A = 0 \quad (y \equiv 0) \\ \sin \alpha l = 0 \rightarrow A \text{ arb.} \end{cases}$$

metodo delle linee elastiche

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}; \quad P = \frac{\alpha^2 l^2}{EI} \frac{EJ}{l^2} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{EJ}{EI}$$

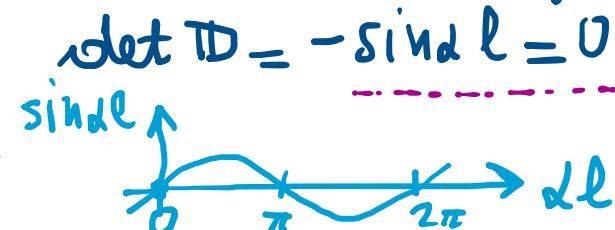
$$P_{C2} = \pi^2 \frac{E}{l^2}$$

Sistema delle r.e.;

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

Ammette soluz. non banali

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha l = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$



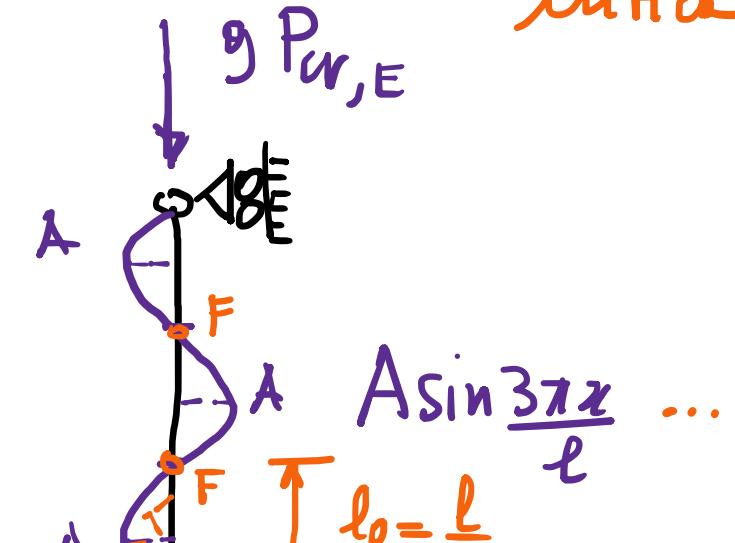
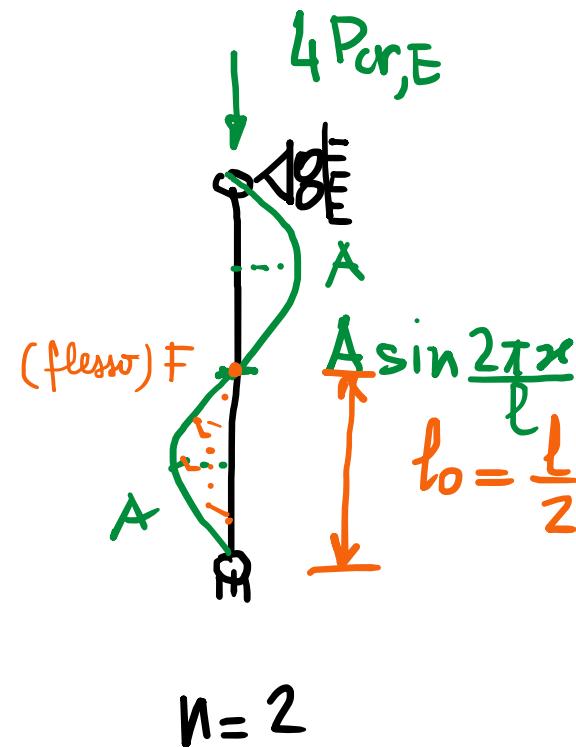
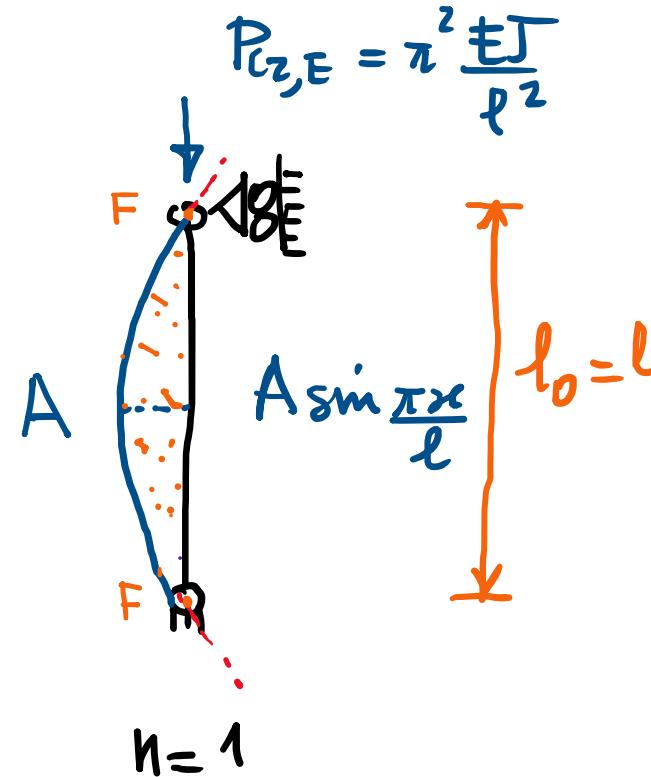
carichi critici

$$P_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 E J}{l^2} = \pi^2 E J \left(\frac{l}{n} \right)^2$$

≈ 10

$l_{0,n} = \frac{l}{n}$ lunghezza di libere in flessione

distanze tra due punti
di flesso consecutivi
delle deformazioni critiche



...

- Successive generalizzazioni per altre condizioni di vincolo (el. contorno).

Concetti fondamentali :

- Esempio 3-DOF :

- determinazione delle deformate critiche δq_i^*

- analisi tramite approccio statico :

scrittura diretta delle equazioni di equilibrio, nella configurazione deformata, con linearizzazione per spostamenti "geometricamente piccoli" (coerentemente con l'analisi al 2° ordine per $V \approx V_0$) e studio delle proprietà algebriche del sistema ottenuto.

da soluzione del sistema omogeneo

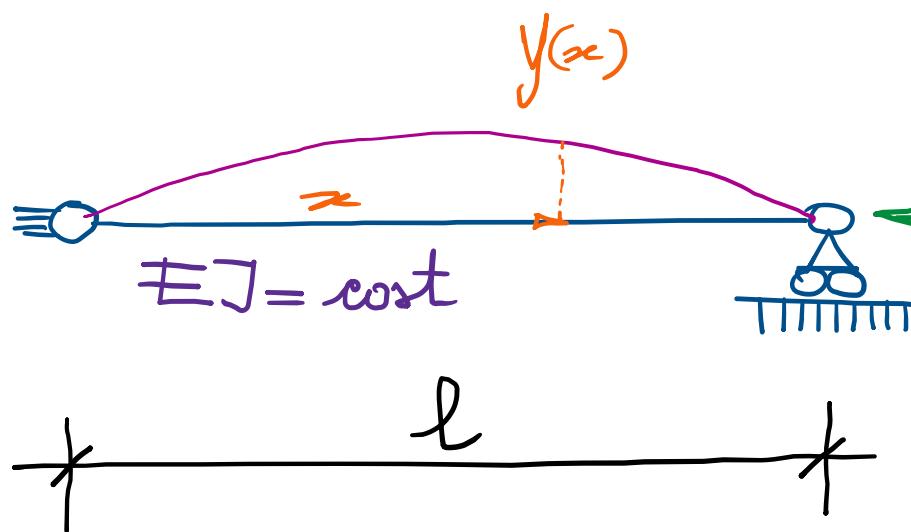
$K \delta q = 0$, in presenza di singolarità di K per $p = p_i^+$.

da soluzione del ps. generalizzato agli autovalori

$$K_E \delta q_i^* = p_i^+ K_G \delta q_i^*$$

- L'approccio statico appare concettualmente il più semplice, e conveniente, anche dal punto di vista metodologico, in quanto contempla la (sola) scrittura delle eq. ni di equilibrio (nella configurazione deformato, in particolare per spostamenti "geometricamente piccoli", tali da ridurre ad eq. ni lineari, di immediata analisi dal punto di vista algebrico), individuando i cori critici quali punti di biforcazione dei percorsi di equilibrio.
- L'esistenza di soluzioni biforzate segnala poi le perdite di stabilità delle conf. ne di riferimento, le quale definisce le condizioni di lavoro ordinarie del sistema strutturale, definendo così i livelli tollerabili dei carichi (pre-critici) ai fini pratici.

- Sistemi continui (\Rightarrow Aste di Euler) :
 - sistemi elastici, deformabili flessionalmente, soggetti a carichi di compressione (aste semplicemente compresse)



$$P = P_{cr}$$

instabilité

"Buckling"

"carico di punto"

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

SOMMARIO (Lec. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approssimazione statico: scrittura diretta delle eq. n. di equilibrio nella configurazione deformata.
 - non-lineari per spost. finiti.
 - lineari per spost. geometricamente piccoli ($\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$).
 - Eq. n. risultano comb. lineare di quelle de stat. di EPT₂, con matrice di rigidezza \mathbf{K} con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Asta di Euler (con approssimazione statico) [eq. ne LT nelle conf. ne deform.].
- Carichi critici, deformate critiche, lunghezza di libera riflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, se non ci teli, formule di Newmark, verifica di stabilità.