Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

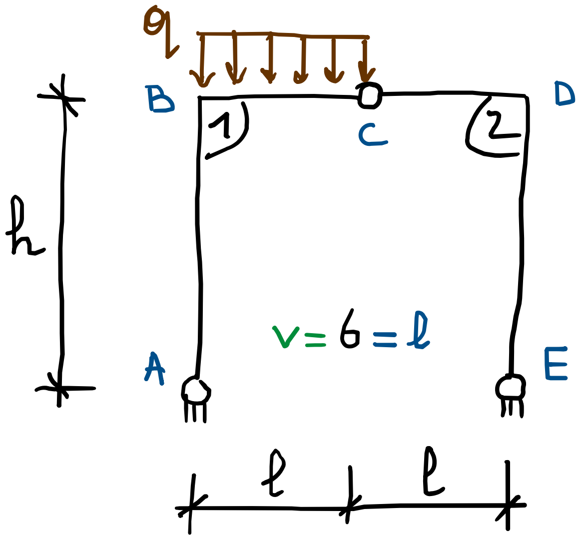
prof. Egidio RIZZI

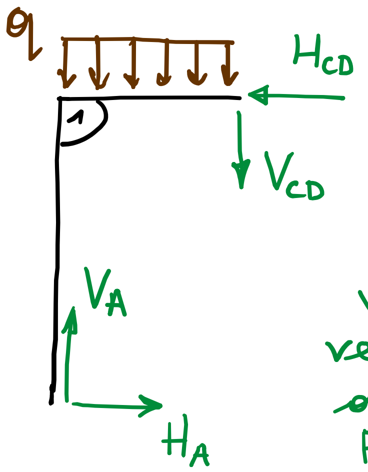
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

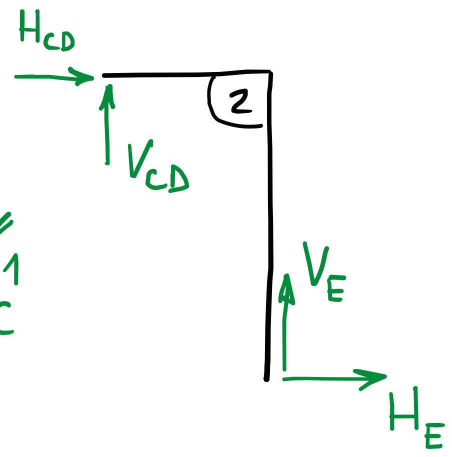
Analisi Statica (AS) $\Rightarrow$ trattazione matriciale (implementabile); dualità cinematica/statica

– Approccio completo $\Rightarrow$ rimozione di tutti i gdv ("esploso")





$$\underset{\substack{v\times 1\\ \text{vettore delle RV}}}{\mathbb{r}} = \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underset{\substack{v\times 1\\ \text{AC}}}{\mathbb{V}}$$



– Scrittura delle equazioni di equilibrio ($\Rightarrow$ sistema di equilibrio):

$$① \begin{cases} \Sigma F_x^1 = 0 \Rightarrow H_A - H_{CD} = 0 \\ \Sigma F_y^1 = 0 \Rightarrow V_A - V_{CD} - q\ell = 0 \\ \Sigma M_A^1 = 0 \Rightarrow H_{CD}h - V_{CD}\ell - \frac{q\ell^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \Sigma F_x^2 = 0 \Rightarrow H_E + H_{CD} = 0 \\ \Sigma F_y^2 = 0 \Rightarrow V_E + V_{CD} = 0 \\ \Sigma M_E^2 = 0 \Rightarrow -H_{CD}h - V_{CD}\ell = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(\ell=3n)\times 1}{\mathbb{u}} \Leftrightarrow \mathbb{S}, \mathbb{f}$$

$$\mathbb{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} H_A & V_A & H_{CD} & V_{CD} & H_E & V_E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -h & -\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\ell \\ -\frac{q\ell^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbb{0}$$

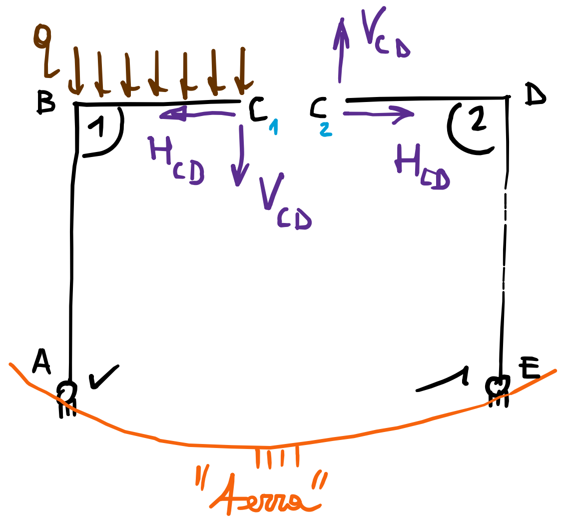
$$\underset{\text{Soluz.}}{\mathbb{r} = -\mathbb{E}^{-1}\cdot\mathbb{f}} \Leftarrow \mathbb{E}\cdot\mathbb{r} = -\mathbb{f} \Leftrightarrow \underset{\text{risultante forze}}{\mathbb{S}} = \underset{\substack{(\ell=3n)\times v\\ \text{matrice di equilibrio}}}{\mathbb{E}} \cdot \underbrace{\mathbb{r}}_{\text{reattive}} + \underset{\text{attive}}{\mathbb{f}} = \mathbb{0}$$

Per ispezione, con le corrispondenze curate:

$$\mathbb{E} = \mathbb{C}^T \underset{\text{dualità}}{\Leftrightarrow} \mathbb{C} = \mathbb{E}^T$$

($\mathbb{C}, \mathbb{E}$ di rango pieno, non sing.)

– Analogamente per analisi con sistema ridotto (schema ad albero):



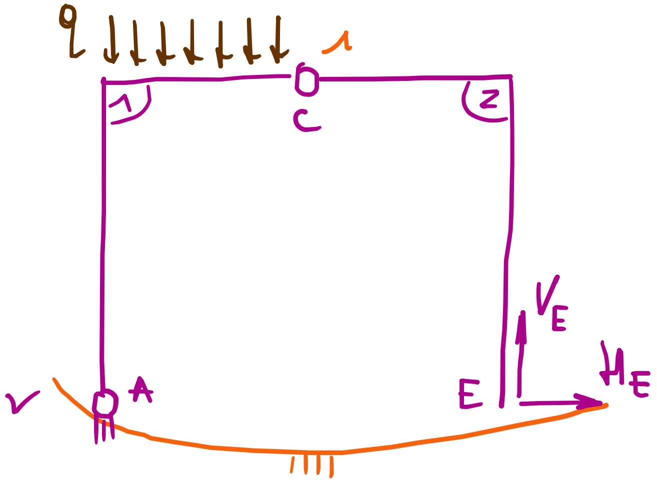
$$\begin{cases} \checkmark\ \Sigma M_A^1 = 0 \\ \nearrow\ \Sigma M_E^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} & 2\times 2 & 2\times 1 \\ s^{\triangleright} = & \begin{bmatrix} h & -\ell \\ -h & -\ell \end{bmatrix} \cdot & \begin{Bmatrix} H_{CD} \\ V_{CD} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{q\ell^2}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} H_{CD} = \frac{q\ell^2}{4h} \\ V_{CD} = -\frac{q\ell}{4} \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}^{\triangleright} \cdot r^{\triangleright} + f^{\triangleright} = 0$$

$\llcorner\ \mathbb{C}^{\triangleright T}$; sottomatrice di $\mathbb{E}$

$r[\mathbb{E}^{\triangleright}] = 2$, $\det[\mathbb{E}^{\triangleright}] = -2h\ell \neq 0$



$$\begin{cases} \checkmark\ \Sigma M_A^{1+2} = 0 \\ \nearrow\ \Sigma M_C^2 = 0 \end{cases}$$

$$s^{\triangleright\triangleright} = \begin{bmatrix} 0 & 2\ell \\ h & \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_E \\ V_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{q\ell^2}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} H_E = -\frac{q\ell^2}{4h} \\ \boxed{V_E = \frac{q\ell}{4}} \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}^{\triangleright\triangleright} \cdot r^{\triangleright\triangleright} + f^{\triangleright\triangleright} = 0$$

$\llcorner\ \mathbb{C}^{\triangleright\triangleright T}$; non sottomatrice di $\mathbb{E}$

$r[\mathbb{E}^{\triangleright\triangleright}] = 2$, $\det[\mathbb{E}^{\triangleright\triangleright}] = -2h\ell \neq 0$

Sistema di equilibrio $\mathbb{s} = \mathbb{E}\cdot\mathbb{r} + \mathbb{f} = \mathbb{0} \iff \mathbb{E}\cdot\mathbb{r} = -\mathbb{f}$

- Esistenza della soluzione (se il sistema è coerente, "consistent") $\leftrightarrow$ sistema equilibrabile
- Unicità della soluzione (determinazione statica)

– Sistema coerente $\overset{\text{CNS}}{\text{sse}}$ $r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{E}, -\mathbb{f}]$ (th. di Rouché-Capelli)

non $\qquad <$

– con unica soluz. sse $r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{E}, -\mathbb{f}] = v$ $\rightarrow$ $I = \underset{\text{nullo}}{N}[\mathbb{E}] = v - \underset{\text{rango}}{r}[\mathbb{E}] \geq 0$ sist. di equilibrio

– infinite $\qquad <$

grado di indet. statica, o di iperst. $\qquad L \leq \min\{\ell, v\}$

deficenza di rango rispetto a v $\leftarrow$ grado di indet. statica, o di iperst.

$\Updownarrow$

deficenza di rango rispetto a ℓ $\leftarrow$ grado di indet. cinem., o di labilità $\qquad L = N[\mathbb{C}] = \ell - r[\mathbb{C}] \geq 0$ sist. di congruenza

– poichè si è notato, per ispezione (poi dim. via PLV) che $\mathbb{E} = \mathbb{C}^T$; $\mathbb{C} = \mathbb{E}^T \Rightarrow r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{C}] = r$

$\Rightarrow$ dualità cinematica/statica

$$I - L = v - \cancel{r} - \ell + \cancel{r}$$

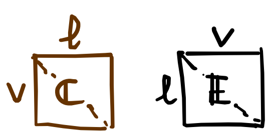
N.B. gradi di indet. cinematica alimentano gradi di indet. statica (e viceversa)

$$\Rightarrow \boxed{I = L + v - \ell} \qquad \boxed{L = I + \ell - v}$$

Classificazione

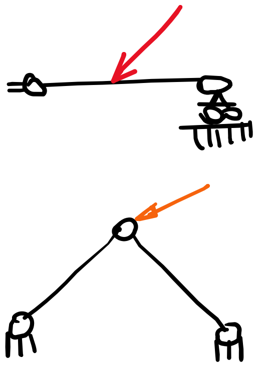
1) $L=0,\ I=0$

$r=\ell \quad r=v \quad \Rightarrow \quad v=\ell=r$



quadrate

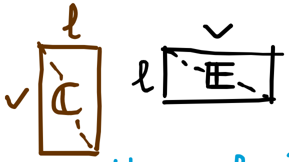
Strutture isostatiche
(sistemi cinem. e staticam. isodeterminate)



2) $L=0,\ I>0$

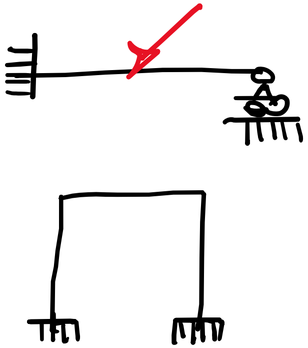
$r=\ell \quad r<v \quad \Rightarrow \quad v>\ell=r$

alta bassa



rettangolari

Strutture iperstatiche
(sistemi cinem. det. e static. indet.)



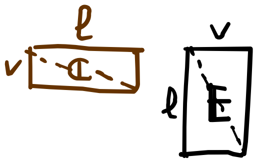
$I=1$

$I=3$

3) $L>0,\ I=0$

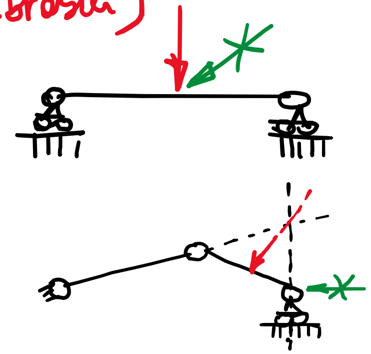
$r<\ell \quad r=v \quad \Rightarrow \quad r=v<\ell$

bassa alta



rettangolari

Strutture ipostatiche (se equilibrabili)
(sistemi cinem. indet. e static. determinati)

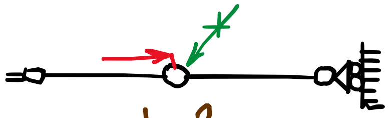


$L=1$

4) $L>0,\ I>0$

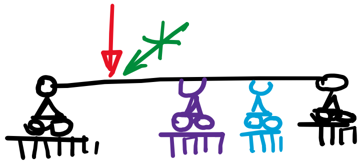
$r<\ell \quad r<v \quad \not\Rightarrow \quad v \lesseqgtr \ell$

Strutture indeterminate
(sistemi cinem. e static. indeterminati)



$L=2$

$v<\ell \quad I=1$
"iperstaticità assiale"



$L=1$

$v=\ell \quad I=1$

$v>\ell \quad I=2$