

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 06

Risposte a forzante armonica $F_e^{i\omega t}$ (trattazione in variabili complesse) ($\mu_{st} = \frac{E}{K}$)

$$\ddot{\nu} + 2\zeta\omega_1 \dot{\nu} + \omega_1^2 \nu(t) = \omega_1^2 \mu_{st} \cos \omega t \leftarrow F(t) = F \cos \omega t ; \nu(t) \text{ risposta a } F \cos \omega t$$

$$i(\ddot{\mu} + 2\zeta\omega_1 \dot{\mu} + \omega_1^2 \mu(t) = \omega_1^2 \mu_{st} \sin \omega t \leftarrow F(t) = F \sin \omega t ; \mu(t) \text{ " " } F \sin \omega t)$$

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_1 \dot{z} + \omega_1^2 z(t) = \omega_1^2 \mu_{st} e^{i\omega t} \leftarrow F(t) = F e^{i\omega t} ; z(t) = \underbrace{\nu(t)}_{\text{variabili complesse}} + i \underbrace{\mu(t)}_{\text{}}$$

Integrale particolare: $\int \mu_{st} e^{i\omega t} dt$ fase $\cos \omega t + i \sin \omega t$ $\operatorname{Re}\{z(t)\}$ $\operatorname{Im}\{z(t)\}$

$$(z_p(t) = Z e^{i\omega t})^* = Z^* e^{i(\omega t - \xi)}$$

(ritardo delle risposte $z_p(t)$ rispetto alla forza $F e^{i\omega t}$)

$$\downarrow z_p(t) = i\omega Z e^{i\omega t} = \omega Z e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

amplizza ωZ
velocità in quadratura in anticipo

$$\downarrow \ddot{z}_p(t) = -\omega^2 Z e^{i\omega t}$$

rispetto alle
risposte $z(t)$
 \Rightarrow accelerazione in opposizione di fase

Z : variabile complessa; Z^* variabile reale ($Z^* = \underbrace{\int \mu_{st}}_{\text{fatto a di amplificazione dinamica}}$)

$$Z = Z^* e^{-i\xi} = Z^* (\cos \xi - i \sin \xi) = \underbrace{Z^* \cos \xi}_{Z_1} - i \underbrace{Z^* \sin \xi}_{Z_2} = Z_1 - i Z_2$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{Z\} = Z_1 = Z^* \cos \xi \\ \operatorname{Im}\{Z\} = -Z_2 = -Z^* \sin \xi \end{cases}$$

$$\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_p^2} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 2\zeta \frac{\omega_1 \omega_1 i}{\omega_p} \right) Z e^{i\omega t} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} u_{st} e^{i\omega t}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{f}{f_1} \text{ rapporto di frequenze}$$

$$(1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta) Z = u_{st} \Rightarrow Z = \frac{1}{1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta} u_{st}$$

$$\frac{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta}{1 - \beta^2 + i 2\zeta \beta} \quad i^2 = -1$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{Quindi: } \cos \xi = \frac{1 - \beta^2}{D}; \sin \xi = \frac{2\zeta \beta}{D}$$

$$\frac{Z}{u_{st}} = \frac{1 - \beta^2 - i 2\zeta \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2} = \frac{1 - \beta^2}{D} - i \frac{2\zeta \beta}{D} = \frac{Z_1}{u_{st}} - i \frac{Z_2}{u_{st}}$$

$$\frac{Z_1}{u_{st}} = \frac{Z^* \cos \xi}{u_{st}} \quad \frac{Z_2}{u_{st}} = \frac{Z^* \sin \xi}{u_{st}}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{D}} \quad N = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

$$\tan \xi = \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = \frac{2\zeta \beta}{1 - \beta^2} \Rightarrow \xi = \arctan \frac{2\zeta \beta}{1 - \beta^2} \quad (\text{denominatore})$$

Inoltre:

$$|Z| = Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2}{D}} u_{st} = \frac{\sqrt{D}}{D} u_{st} = \frac{1}{\sqrt{D}} u_{st} = N u_{st}$$

Relazioni come precedentemente determinato per solo $F \sin \omega t$

$$N = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta \beta)^2}}$$

- Pertanto, si ottiene: N_{ust}

$$Z_f(t) = Z e^{i\omega t} = Z^* e^{i(\omega t - \xi)}$$

$$= (Z_1 - iZ_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$= \underbrace{Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t}_{\text{Complex form}} + i \left(\underbrace{Z_1 \sin \omega t - Z_2 \cos \omega t}_{\text{Imaginary part}} \right)$$

Forze: Mst zisp. a Floswt

$$F_e = k \sqrt{N} \frac{\tilde{E}}{V}$$

$$F_d = \epsilon \omega N \frac{F}{K} \quad (\frac{\epsilon}{m} = 2\zeta \omega_1)$$

$$= 2\sum m \omega_i \omega N \frac{F}{k}$$

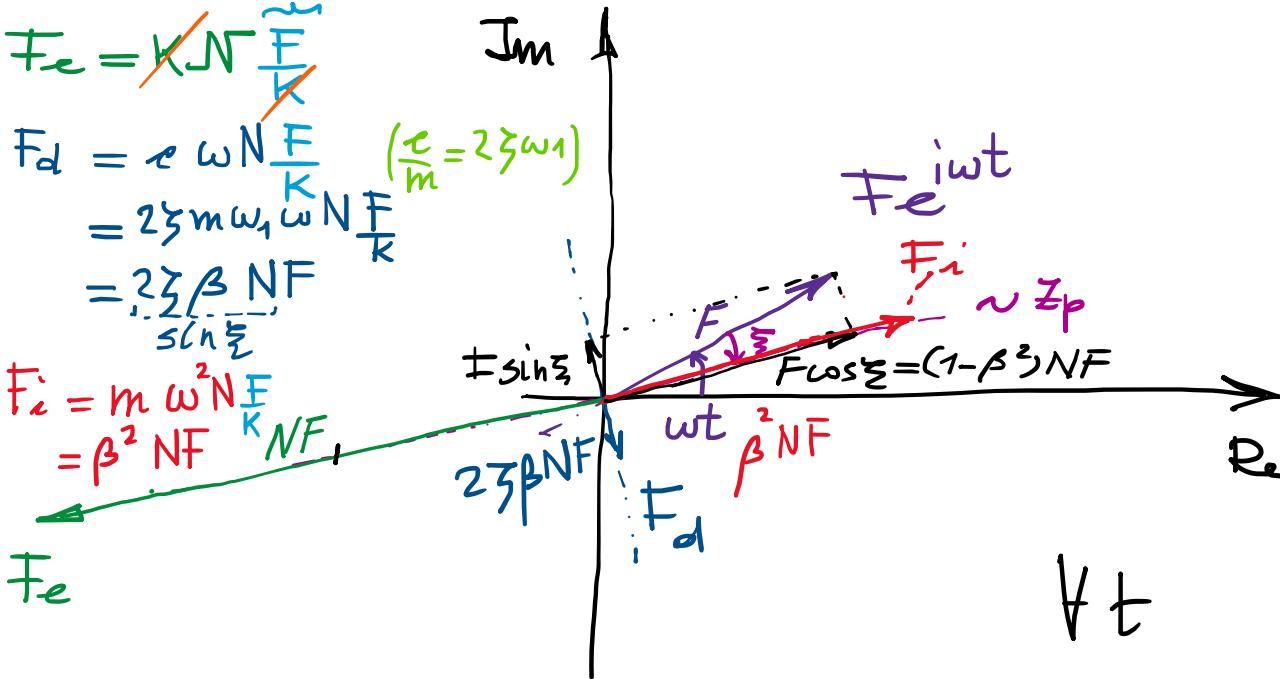
$$= 2\sum \beta N F$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| + C$$

$$F_i = m \omega^2 N_F$$

$$= \beta^2 N_F$$

F_{lo}

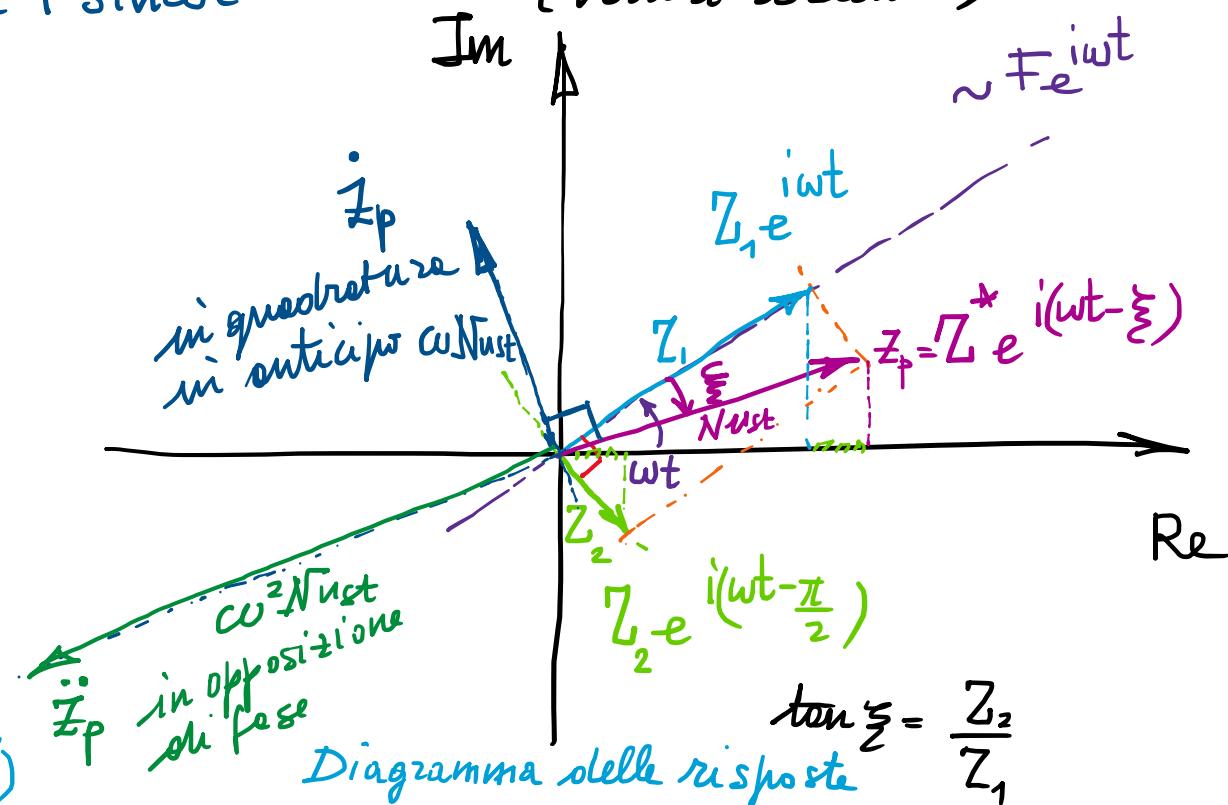


Diagrammi delle forze ("equilibrio dinamico")

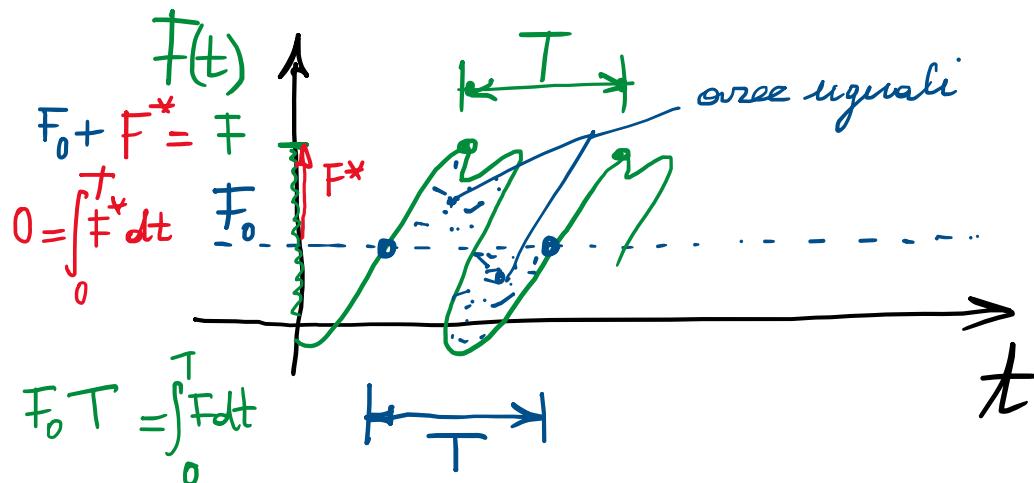
$$z_p(t) = (Z_1 - iZ_2)e^{i\omega t} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ in fase con la forzante in quadratura in ritardo rispetto alla forzante

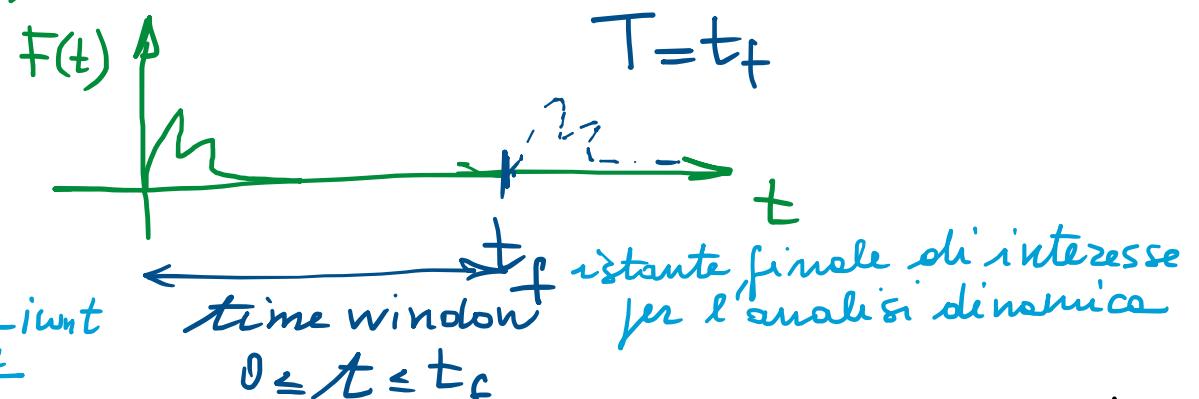
Rappresentazioni nel piano di Argand (vettori rotanti)



Risposta a forzante periodica: $F(t+T) = f(t)$ T : periodo della forzante



- così pratici con forzanti periodiche
- forzanti "rese periodiche" si fanno dell'analisi



Sviluppo in serie di Fourier:

$$F(t) \underset{\text{truncam. (N)}}{\approx} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad \text{valor medio}$$

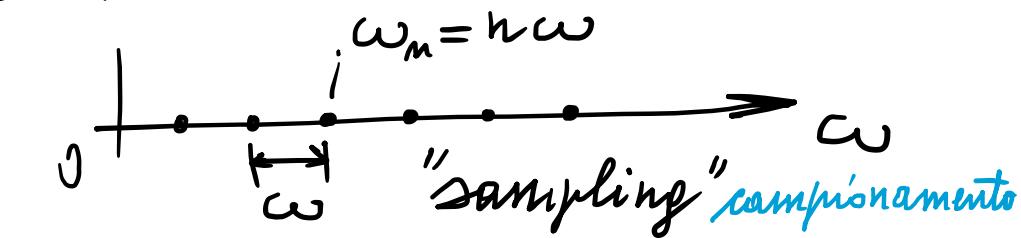
$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega_n t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega_n t dt$$

generalmente f.m.
continua

$$C_n = \frac{A_n - iB_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

con $\omega_n = n\omega$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione fondamentale
"treno" di infinite componenti armiche di pulsazioni ω_n discrete separate da ω



Risposta:

$$\mu_p(t) = \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{Z_{1n}}{F \rightarrow K_{ust}} \cos \omega_n t + \frac{Z_{2n}}{F} \sin \omega_n t \right) + B_n \left(\frac{Z_{1n}}{F} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{F} \cos \omega_n t \right)$$

(per sovrapposizione degli effetti di ogni componente armonica)

$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{K} \left(\frac{Z_{1n}}{K_{ust}} \cos \omega_n t + \frac{Z_{2n}}{K_{ust}} \sin \omega_n t \right) + \frac{B_n}{K} \left(\frac{Z_{1n}}{K_{ust}} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{K_{ust}} \cos \omega_n t \right)$$

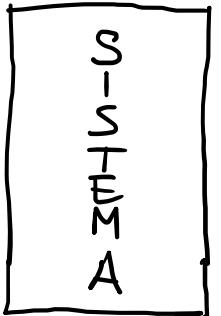
$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{K} \cos \omega_n t + \frac{B_n}{K} \sin \omega_n t$$

$$A_n = A_n \frac{Z_{1n}}{K_{ust}} - B_n \frac{Z_{2n}}{K_{ust}}$$

$$B_n = A_n \frac{Z_{2n}}{K_{ust}} + B_n \frac{Z_{1n}}{K_{ust}}$$

INPUT

$F(t)$
forzante



OUTPUT

$\mu_p(t)$
risposta
(spostamento)

Finge di "filtrare" selezionando, esaltando le componenti armiche con pulsazione più vicina a quelle naturali del sistema.

$$M_{st} = \frac{F}{K} \Rightarrow F = K_{ust}$$

risposta a $A_n \cos \omega_n t$

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega_1} = n \frac{\omega}{\omega_1} = n \beta_1$$

$$\frac{Z_{1n}}{K_{ust}} = \frac{1 - \beta_n}{D_n}$$

$$\frac{Z_{2n}}{K_{ust}} = \frac{2\beta_n}{D_n}$$

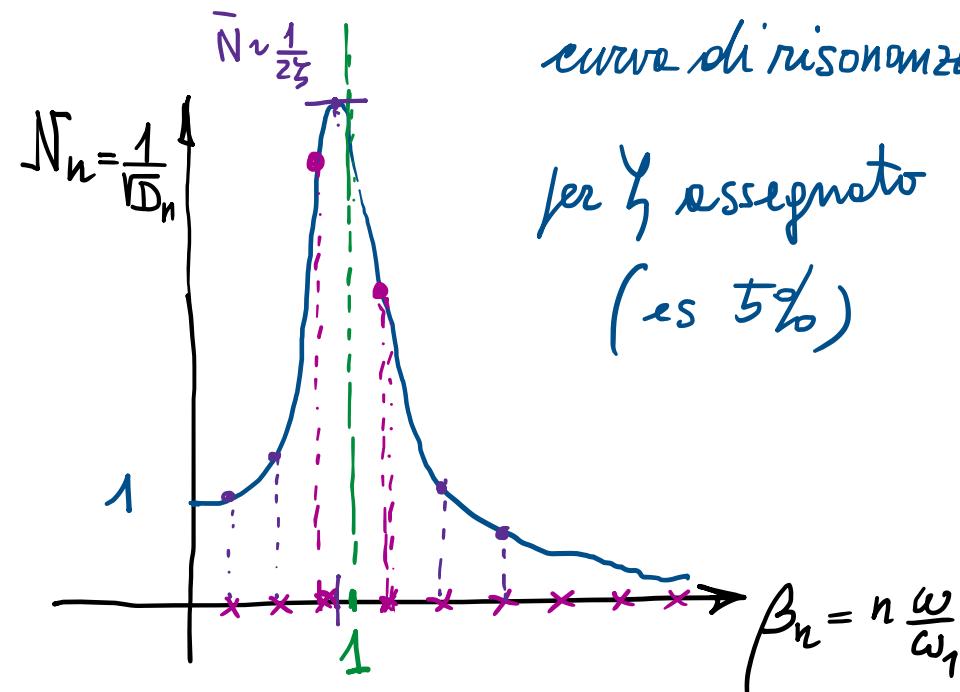
$$D_n = (1 - \beta_n)^2 + (2\beta_n)^2$$

risposta a $B_n \sin \omega_n t$

$$B_n \left(\frac{Z_{1n}}{F} \sin \omega_n t - \frac{Z_{2n}}{F} \cos \omega_n t \right)$$

curve di risonanza

per ζ assegnato
(es 5%)



$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - 2z^2} \approx 1$$

SOMMARIO (Lec. 06)

- Trattazione in variabili complesse $\Rightarrow F_e^{int} = F \cos \omega t + i F \sin \omega t$.
- Derivazione delle relazioni caratteristiche per determinate.
- Risposta simultanea alle comp. armoniche $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$.
- Rappresentazione nel piano di Argand
 - diagramma delle risposte.
 - diagramma delle forze.
- Generalizzazione: forzante periodica (tras di infinite armoniche).
- Effetto "filtro" del sistema vs. le comp. armoniche della forzante vicine a quelle corrispondenti alla pulsazione naturale del sistema.
- Next step: risposta a forzante generica (a partire da forzante impulsiva)