Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

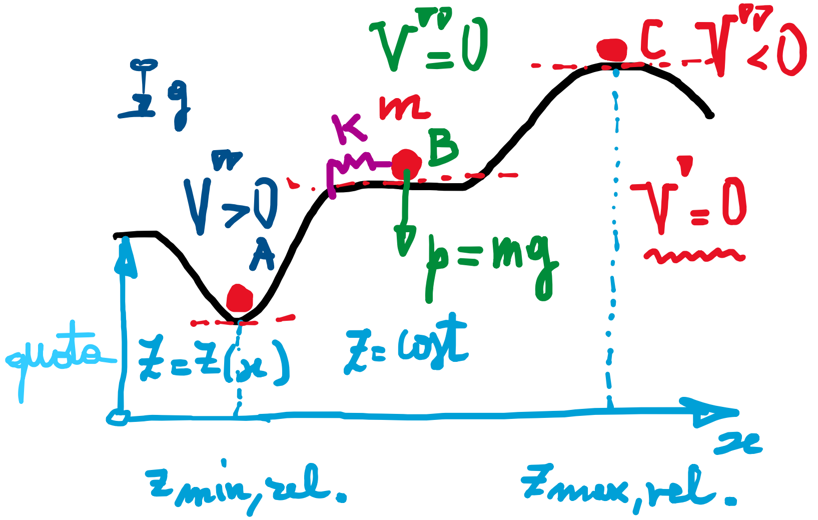
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture

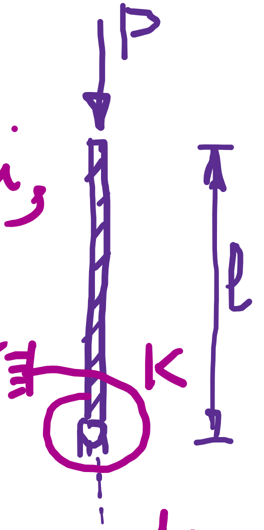


Problema puramente posizionale (governato da Energia Potenziale $V(z(x)) = \underbrace{mg}_{P}\, z(x)$ dipendente dalla sola coord. posizionale z): (concetto)

configurez. di equilibrio

- A : buca dell'EP ove V è min => STABILE (equil.)
  In seguito a (piccola) perturbazione, il sistema tende a ritornarvi (non la abbandona).
- B : valore costante dell'EP => INDIFFERENTE (equil.)
  Il sistema non tende a restare né ad abbandonare la configurazione.
  separa A da C
- C : massimo dell'EP => INSTABILE (equil.)
  Il sistema tende ad abbandonare la conf.ne, e produrre energia cinetica, alla ricerca di una altra conf.ne di equilibrio stabile.

In generale, sono presenti anche elementi elastici, utili alla stabilizzazione



=> EPT: $V = \underbrace{V_e}_{\text{En. elastica } \mathcal{E}} + \underbrace{V_f}_{\text{E.P. forze esterne conserv.}}$

Th. di Dirichlet (sulla stabilità dell'equilibrio)

Una conf.ne di equil., di un sistema olonomo (legge intera), con vincoli ideali, conservativo, è stabile, se ivi l'Energia Potenziale Totale (EPT) del sistema è minima (minimo locale rel.): CS di stabilità

$V(q)$

conf.ne

sistema discreto MDOF $\longleftrightarrow$ ($\underline{q}$ variabile generalizzate)

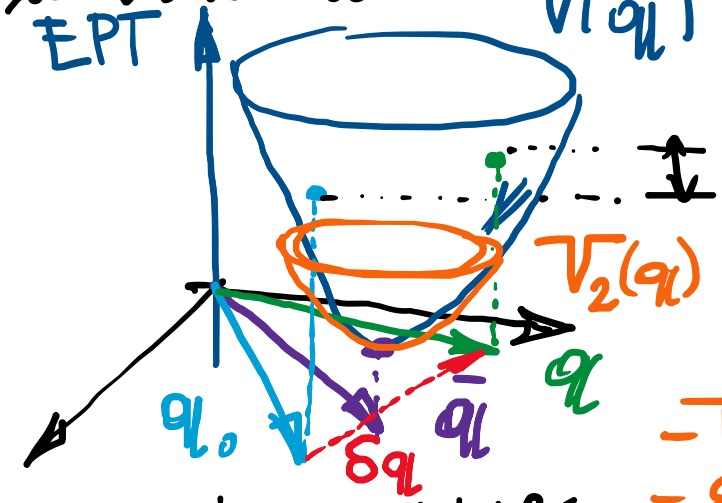
$\bar{\underline{q}}$ equil. e $V(\bar{\underline{q}})$ è min. rel. $\Rightarrow$ $\bar{\underline{q}}$ è stabile

- Naturalmente, CN per avere una conf.ne di equilibrio con min. rel. dell'EPT, ivi l'EPT deve risultare stazionaria $\Rightarrow$ $\delta V = 0$. (variaz. prima)

  Condiz. di staz. dell'EPT è CN di equilibrio $\Rightarrow$ fornisce le eq.ni di equilibrio (in generale non-lineari).

- Dal p.to di vista della CS di stabilità, possiamo definire stabile un sistema in cui si applica e non stabile (stab. non garantita) se non $\Rightarrow$ Instabile.

Sistemi MDOF



q_i: spazio variabili generalizzate ad n dimensioni

Inquadramento

$q = q_0 + \delta q$: $\delta q = q - q_0$ (variazione di q)

differenza

$$\Delta V = V(q) - V(q_0) = \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}^{T} \delta q}_{\delta V} + \underbrace{\frac{1}{2}\, \delta q^T \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q\, \partial q}\right|_{q_0} \delta q}_{\frac{1}{2}\delta^2 V} + \ldots$$

sviluppo in serie di Taylor (arrestato al 2° ordine)

- Teoria del 2° ordine
- Effetti del 2° ordine

δV: variaz. prima $\sim q$

$\frac{1}{2}\delta^2 V$: variaz. seconda $\sim q^2$ $\rightarrow V_2(q)$

$$\left(V(q) = V_e(q) + \underbrace{V_f(q)}_{-\mathcal{L}_{ef}} \right) = -\underset{\sim}{P}^T \delta q + \frac{1}{2}\, \delta q^T K\, \delta q$$

$$P = -\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}$$

vettore carichi esterni conservativi

$$K = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q\, \partial q}\right|_{q_0}$$

matrice di rigidezza (Hessiana)

- q_0: conf.ne di riferimento (in genere equil.) [spesso $q_0 = 0$]
- $\bar{q}$: conf.ne equilibrata (se di min. $\Rightarrow$ stabile)
- q: conf.ne variata

NB: per min rel., $\Delta V > 0 \; \forall \delta q$, è necessario (CN) $\delta V = 0$, in modo da non avere dip. dal segno di δq.

Analisi al 2° ordine

- Condizione di stazionarietà di $\underline{V_2(q)}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial q} = -\mathbb{P} + \mathbb{K}\,\delta q = 0 \Rightarrow$$

(CN di equil.)

eq. di equil. lineari in q

$$\mathbb{K}\,\delta q = \mathbb{P} \Rightarrow \bar{q} \text{ di equil.}$$

$q - q_0$

eq.ni di equil. (lineari)

- CS di stabilità (Dirichlet) – $\bar{q}$ è min. rel. $\frac{1}{2}\delta^2 V_{\bar{q}} = \frac{1}{2}\,\delta q^T\,\mathbb{K}_{\bar{q}}\,\delta q > 0$ $\quad \forall\,\delta q \neq 0$

$\mathbb{K}_{\bar{q}}$ è matrice def. pos.

Proprietà algebriche di $\mathbb{K}$, valutata nelle conf.ni di equil., condiz. la stabilità.

- minori princ. > 0
- autovalori (reali) > 0
- det > 0 (det = 0 ⇒ perdita di stabilità)

- Se $q_0 = \bar{q}$ (conf.ne di rif. è equil.) in genere

$$\mathbb{P} = -\frac{\partial V}{\partial q}\bigg|_{q_0 = \bar{q}} \equiv 0 \Rightarrow \delta q = 0 \quad (\bar{q} = q_0)$$

- Nelle conf.ni equilibrate $\bar{q}$:

$$\delta V_{\bar{q}} = \frac{\partial V}{\partial q}\bigg|_{\bar{q}}^T \delta q = 0 \Rightarrow \Delta V_2 = \cancel{\delta V} + \frac{1}{2}\delta^2 V + \dots$$

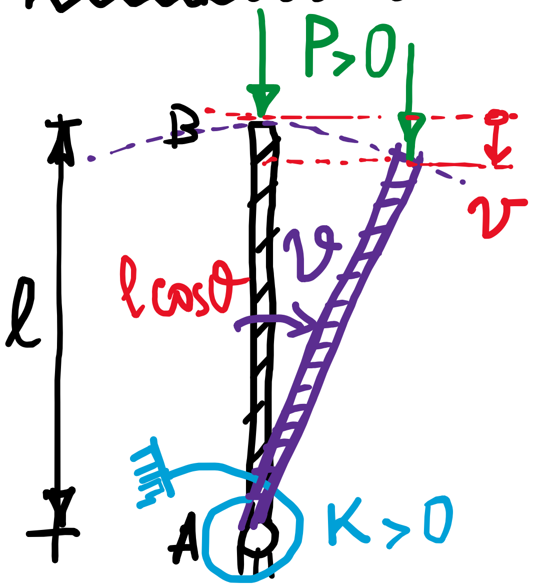
Variaz. prima nulla

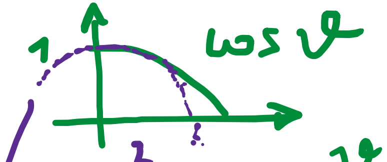
con segno legato alla variazione seconda

>0 STABILITÀ

Esempio SDOF ($q_1 = \vartheta$)

$V_e = \mathcal{E}$ $\cup$ $V_f = -\mathcal{L}_{e_f}$ ← $P \cdot v$





$1-\frac{\vartheta^2}{2}$ approx quadratica $|\vartheta| \ll 1$

carico base P_0

$$V(\vartheta) = \underbrace{\frac{1}{2}K\vartheta^2}_{} - P \cdot \underbrace{\ell(1-\cos\vartheta)}_{v}$$

EPT

$$= \underset{>0}{K}\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - p(1-\cos\vartheta)\right) \qquad p = \frac{P\ell}{K} = \frac{P}{K/\ell} \Rightarrow P = p\,\frac{K}{\ell}$$

moltiplicatore del carico

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = K\left(\frac{2}{2}\vartheta - p\sin\vartheta\right) \overset{\checkmark}{=} 0$$

come per approccio statico

Condiz. di staz. (CN di equil.) $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} K\bar\vartheta &= P\ell\sin\bar\vartheta \\ \bar\vartheta &= p\sin\bar\vartheta \\ p(\bar\vartheta) &= \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \quad (\vartheta \neq 0) \end{aligned}}$$

eq.ne di equil. non lin.

$\vartheta_0 = 0$, conf.ne di riferimento è di equil.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = K(1 - p\cos\vartheta)$$

da valutare nelle $\bar\vartheta$ di equil. =

(studio del segno di $\frac{1}{2}\delta^2 V$)

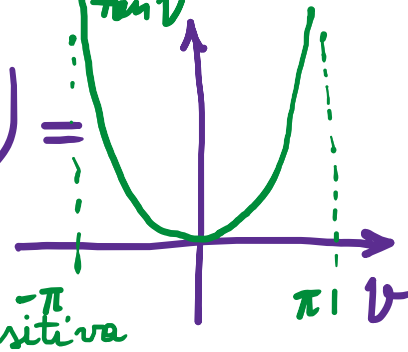
$\bar\vartheta = 0$ $\quad K(1-p) \gtreqless 0$

$p<1$	$\cup$	S
$=1$	—	$\pm$
>1	$\cap$	

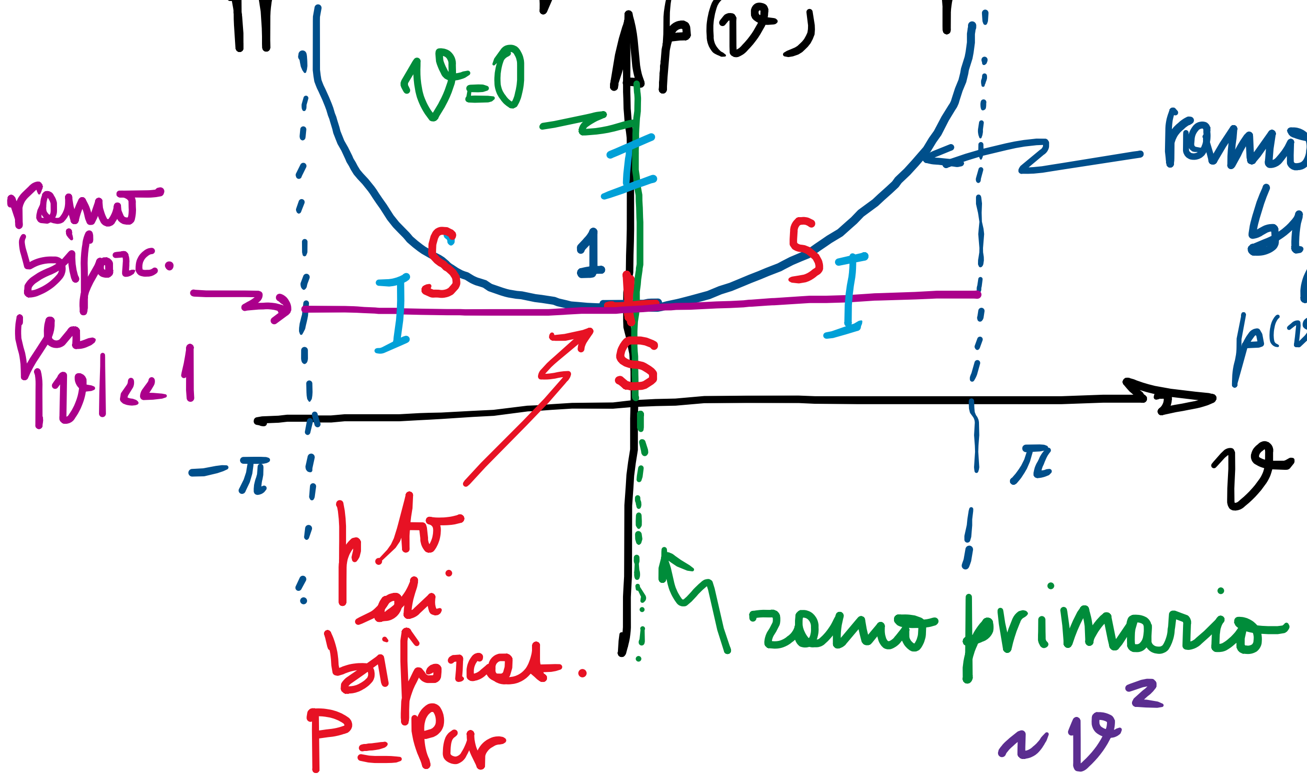
$\bar\vartheta$: $p(\bar\vartheta) = \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \to V''(\bar\vartheta) = K\left(1 - \frac{\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\vartheta\right) = K\left(1-\frac{\vartheta}{\tan\vartheta}\right)$ è positiva

>0 conf.ni stabili ($\bar\vartheta \neq 0$)

$1 - \frac{\vartheta}{\tan\vartheta} > 0 \ \forall \vartheta \neq 0$



Mappa dei percorsi di equilibrio:



N.B.: perdita di stabilità della conf.ne di equil. indef. $\vartheta=0$ per $p=1 \Rightarrow P=P_{cr}=\frac{K}{\ell}$

(come da analisi con approccio statico)

Analisi al 2° ordine: $V(\vartheta) \simeq V_2(\vartheta) = \frac{1}{2}K\vartheta^2 - P\ell\Big(\cancel{1}-\big(\cancel{1}-\underbrace{\tfrac{\vartheta^2}{2}}_{\sim\vartheta^2}\big)\Big)$ $\quad \sim\cos\vartheta$ "quadraticizzazione" di V

$$= \frac{1}{2}K\vartheta^2 - P\ell\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{1}{2}(K-P\ell)\vartheta^2$$

$\cos\vartheta = 1-\frac{\vartheta^2}{2}+\dots$

spost. "geom. piccoli"

$V'(\vartheta) = \frac{1}{\cancel{2}}(K-P\ell)\cancel{2}\,\vartheta = 0 \Longrightarrow (K-P\ell)\vartheta = 0 \;<\; \begin{array}{l} K\neq P\ell,\ \vartheta=0 \\ K=P\ell,\ \vartheta \text{ arb.} \end{array}$

eq.ne di equil. lin.

"linearizzazione" di V

$V''(\vartheta) = K-P\ell \gtreqless 0$ $\quad \begin{array}{l} K>P\ell \\ \boxed{K=P\ell} \\ K<P\ell \end{array}$ perdita di stabilità ($P=P_{cr}$)

deriv. 2ª costante

- Concetti fondamentali :

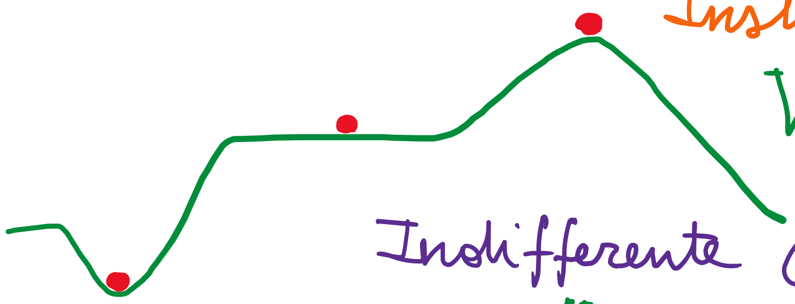
— Approccio energetico ai pb. di instabilità delle strutture _

- Concetto intuitivo per pb. puramente posizionale : V en. potenz.

pallina pesante (massante)

$g \updownarrow$

$\uparrow z$



Instabile (picco di energia potenziale)

$V'' < 0$ max. rel.

Indifferente (plateau di energia potenziale)

$V'' = 0$

en. pot. costante

Stabile

(buca di energia potenziale)

min. rel.

$V'' > 0$

Condiz. di equilibrio $V' = 0$

stazionarietà della E.P.

_ Generalizzazione per pb. strutturali, in primis "discreti" MDOF _

– Energia Potenziale Totale (EPT) : $V = V(q) = V_e(q) + V_f(q)$.

di più variabili (sistemi MDOF) ⇒ funzione delle coordinate lagrangiane q

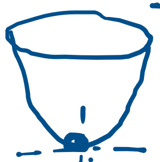
$q = \{q_i\}$ $i = 1, n$ gdl del sist.

V_e: Energia Potenziale elastica (sistema strutturale elastico lineare)

V_f: Energia Potenziale forze esterne conservative (es. campo gravitazionale)

con $V_f = -U_f = -\mathcal{L}_{ef}$

"la" EP, "il" potenziale, lavoro forze esterne conserv.


$V(q)$
min. rel.

– Condizione Sufficiente di stabilità : minimo locale dell'EPT (Th. di Dirichlet).

(garantisce la stabilità / esclude l'instabilità).

↑ visione strutturale

– Teoria del 2° ordine : $V(q) \simeq V_2(q) \sim q^2$ quadratica → V' lin., V'' cost.

– Esempio SDOF, prec. visto con approccio statico ⇒ mostra natura S/I delle configurazioni di equilibrio.

SOMMARIO (Lez. 17)

- Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture ⇒ EPT (V).
- Th. di Dirichlet (CS di stabilità ⇒ EPT min. rel.).

  mentre CN di equil. ⇒ EPT stazionaria.
- Teoria del 2° ordine ⇒ $V \simeq V_2$:
  - Eq.ni di equil., da stazionarietà, linearizzate.
  - Segno variazione seconda (se >0 ⇒ stabile).
- Esempio SDOF:
  - Scrittura dell'EPT.
  - Equil. per condiz. di stazionarietà.
  - Analisi di stabilità per studio segno variaz. 2ª.

"geom." spost. "grandi"	"geom." spost. "piccoli"
non-lineari	lineari
funzione	cost.

Next step: Cenno all'instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) ⇒ transizione continua, senza p.to di biforcazione.