# Università degli studi di Bergamo

## Scuola di Ingegneria (Dolmine)

## CCS Ingegneria Edile

## L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

# Scienza delle Costruzioni

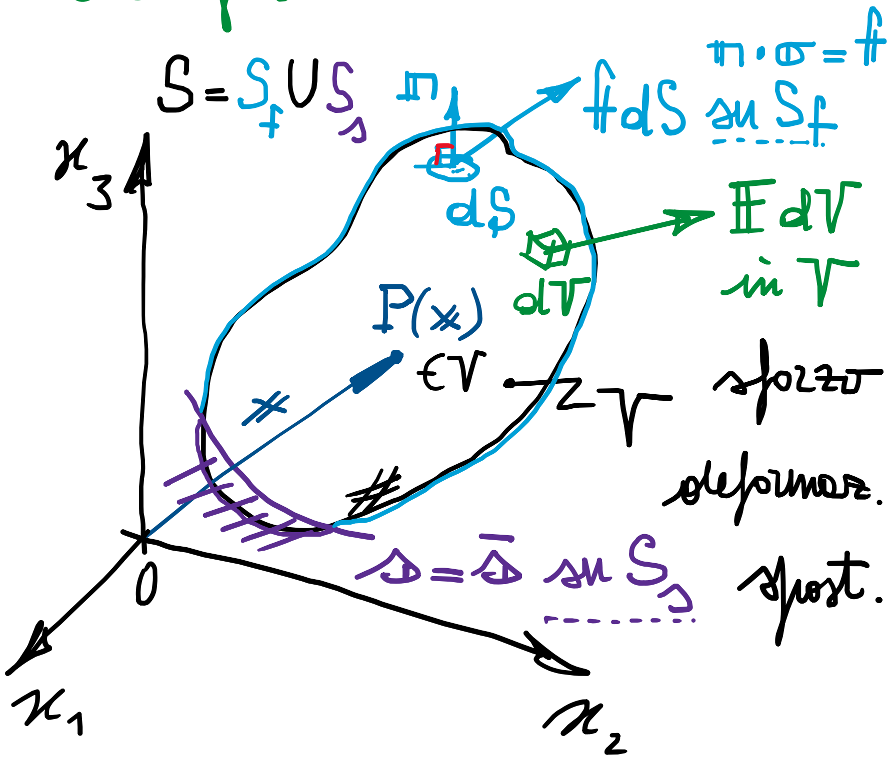
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

## LEZIONE 16

# Legame costitutivo (legge sforzi-deformazioni) $\Rightarrow$ comportamento meccanico del materiale

- Sinora visti lo sforzo (statica dei continui) e la deformazione (cinematica dei continui), nel rispetto dell'equilibrio e della congruenza, indipendenti l'uno dall'altra $\Rightarrow$ ora saranno da correlare, in ragione del comportamento meccanico del materiale di cui è composto il solido.




**Risposta tenso-deformativa (incognite)**

**Descrizione del problema fisico (problema elastico lineare) (equazioni governanti)**

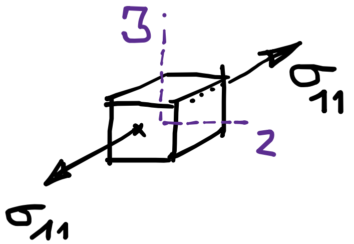
| Risposta tenso-deformativa (incognite) | | Equazioni governanti | |
|---|---|---|---|
| sforzo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \sigma_{ij}(x_k)$ | 6 | equil. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \leftrightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0$ | 3 |
| deformaz. $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varepsilon_{ij}(x_k)$ | 6 | congr. $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} + \nabla\mathbf{s}^T) \leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ | 6 |
| spost. $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \leftrightarrow s_i(x_k)$ | 3 | legame costitutivo (elastico lineare) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}),\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \leftrightarrow \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}),\ \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ | 6 |
| | 15 | | 15 |

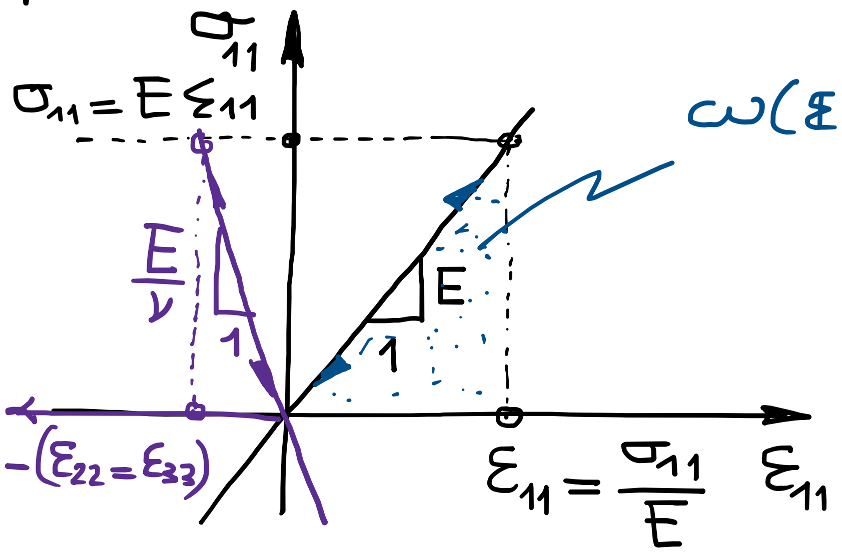
- Le (6) equazioni costitutive $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$, $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ completano il bilancio equazioni/incognite, ponendo in relazione, localmente ($\forall\, \mathbf{x}$), lo sforzo e la deformazione.

# Materiale elastico lineare (isotropo)

- **elastico**: comportamento perfettamente reversibile (senza dissipazione di energia $\Rightarrow$ assenza di deformazioni irreversibili [plastiche] allo scarico)
- **lineare**: relazione lineare di proporzionalità tra sforzi e deformazioni
- **isotropo**: comportamento (meccanico) indipendente dalla direzione

## Introduzione tramite prova monoassiale di trazione




legge di Hooke del materiale (1D)

$\omega(\varepsilon)$ energia di deformazione $> 0,\ \forall\, \varepsilon \neq 0$ (definita positiva)

$$= \frac{1}{2}\sigma_{11}\,\varepsilon_{11} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} E\,\varepsilon_{11}^2 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{E}\sigma_{11}^2 \end{cases}$$

Contrazione trasversale

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{\sigma_{11}}{\frac{E}{\nu}}$$

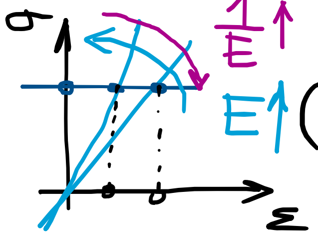
$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}$$

$\nu$: coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson [1]

$E$: modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \text{cost} > 0$$

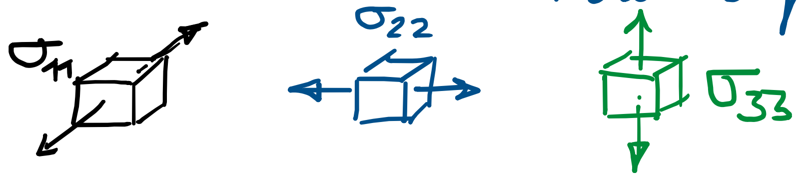
$$[E] = \frac{[F]}{[L]^2}$$




$\frac{1}{E}\uparrow$ cedevolezza

$E\uparrow$ (rigidezza del materiale)

Generalizzazione al triassiale (tramite Principio di Sovrapposizione degli Effetti – PSE)
valido per la linearità assunta




$\sigma_{11}$ $\sigma_{22}$ $\sigma_{33}$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33}
\end{cases}
$$

leggi deformazioni/sforzi normali

scorrim. angolari

$$
\left.\begin{cases}
2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G} = \frac{\sigma_{12}}{G} \\
2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G} = \frac{\sigma_{23}}{G} \\
2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G} = \frac{\sigma_{13}}{G}
\end{cases}\right\} \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}
$$

leggi deformazioni/sforzi tangenziali o taglianti

G modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio $G = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \text{cost} > 0$

scrittura in notazione matriciale

risposte normali/taglianti disaccoppiate

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}}_{\substack{\{\varepsilon\} \\ 6\times 1}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\
-\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\
-\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\
 & & & \frac{1}{G} & \cdot & \cdot \\
 & 0 & & \cdot & \frac{1}{G} & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \frac{1}{G}
\end{bmatrix}}_{\substack{[C] \\ 6\times 6}}
\cdot
\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}}_{\substack{\{\sigma\} \\ 6\times 1}}
$$

matrice di cedevolezza del materiale (simmetrica)

Ipotesi di elasticità ($\exists$nza di energia di deformazione, definita positiva) $\Rightarrow$ implica delle delimitazioni sui parametri elastici $[E, \nu; G]$

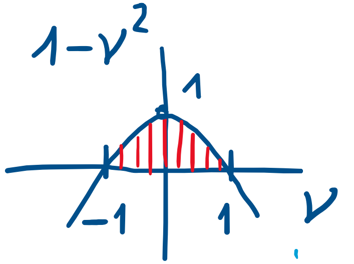
$$\omega = \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot \underbrace{[C]\cdot\{\sigma\}}_{\{\varepsilon\}} > 0 \quad \forall \begin{cases} \sigma \neq 0 \\ \{\sigma\} \neq 0 \end{cases}$$

forma quadratica associata alla matrice $C$ $\Rightarrow$ def. pos.

CNS di def. pos. di $C$ $\Rightarrow$ tutti i minori principali positivi (matrice di cedevolezza)

- 1x1 $\quad \frac{1}{E} > 0 \Rightarrow \boxed{E > 0}$

- 2x2 $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} = \frac{1}{E^2}(1-\nu^2) = \frac{1}{E}(1+\nu)(1-\nu) > 0 \Rightarrow$




$-1 < \nu < 1$

materiali ingegneristici $0 \leq \nu < 1/2$

$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

- 3x3 $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \frac{1}{E}\frac{1}{E^2}\overbrace{(1-\nu^2)}^{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\nu}{E}\frac{1}{E^2}\overbrace{(-\nu-\nu^2)}^{-\nu(1+\nu)} - \frac{\nu}{E}\frac{1}{E^2}\overbrace{(\nu^2+\nu)}^{\nu(1+\nu)}$

$$= \frac{1}{E^3}(1+\nu)\left[1-\nu-2\nu^2\right] = \frac{(1+\nu)}{E}\frac{1}{E^2}\underbrace{(1+\nu)(1-2\nu)}_{1-2\nu+\nu-2\nu^2} = \overset{>0}{\frac{1}{E}\frac{(1+\nu)^2}{E^2}}\,(1-2\nu) > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

- 4x4 (1x1) $\quad \frac{1}{G} > 0 \Rightarrow \boxed{G > 0}$

Ricerchiamo ora una scrittura compatta tensoriale per la legge costitutiva $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$.

Riprendendo le leggi viste:

$$(*)\quad\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}\sigma_{33} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} \end{cases}$$

$$(\nabla)\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \boxed{\frac{\overset{\sigma_{ij}}{\tau_{ij}}}{2G}}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = \sum_k \sigma_{kk}$$

relazione unificante

$$\varepsilon_{(ii)(ii)} = \frac{1}{E}\sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{jj}+\sigma_{kk}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{ii} + \frac{\nu}{E}\sigma_{ii} = -\frac{\nu}{E}\underbrace{(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})}_{I_1}\,1 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$$

Affinché sussista coerenza tra le $(*)$ e le $(\nabla)$, espressa da un'unica legge $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$:

Legge di Hooke generalizzata

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\underbrace{\mathbb{I}}_{} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}}$$

tensore identità del 2° ordine

$i=j \quad \varepsilon_{ii} = -\dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\;1 + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$

$i\neq j \quad \varepsilon_{ij} = \quad 〃 \quad 0 + \boxed{\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}}$

materiale indeformabile a taglio $G\to\infty$, $\nu\to -1$

$$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

$\mathrm{tr}\,\mathbb{I} = 1+1+1 = 3$

coerente se $\dfrac{1+\nu}{E} = \dfrac{1}{2G} \Rightarrow \boxed{G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}}$

oppure: $E = 2(1+\nu)G$; $\nu = \dfrac{E}{2G} - 1$

due parametri indip.!

Risposta volumetrica:

notazione tensoriale

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\boldsymbol{\sigma}$$ Legge di Hooke generalizzata (materiale elastico, lineare, isotropo)

deformazione volumetrica (variazione specifica di volume)

$$v = \underbrace{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}}_{I_1'} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\underbrace{\mathrm{tr}\,\mathbf{I}}_{3} + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$$

$$= \frac{1}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,(1+\underbrace{\nu-3\nu}_{-2\nu})$$

$$= 3\,\underbrace{\frac{1-2\nu}{E}}_{\frac{1}{K}}\,\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3}$$

$$p = \frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$ tensione media

$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} \leftrightarrow \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$ disaccoppiamento

$I_1' \leftrightarrow I_1$ (per materiali isotropi)

$$\boxed{v = \frac{1}{K}\,p\,;\quad p = K\,v}$$

risposta volumetrica

(relazioni di proporzionalità tra $p$ e $v$, diretta e inversa)

ove $\boxed{K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}} > 0$ modulo di comprimibilità volumetrica o modulo di volume ("bulk modulus")

$K \to \infty$, $\nu \to \frac{1}{2}$

materiale elasticamente incomprimibile