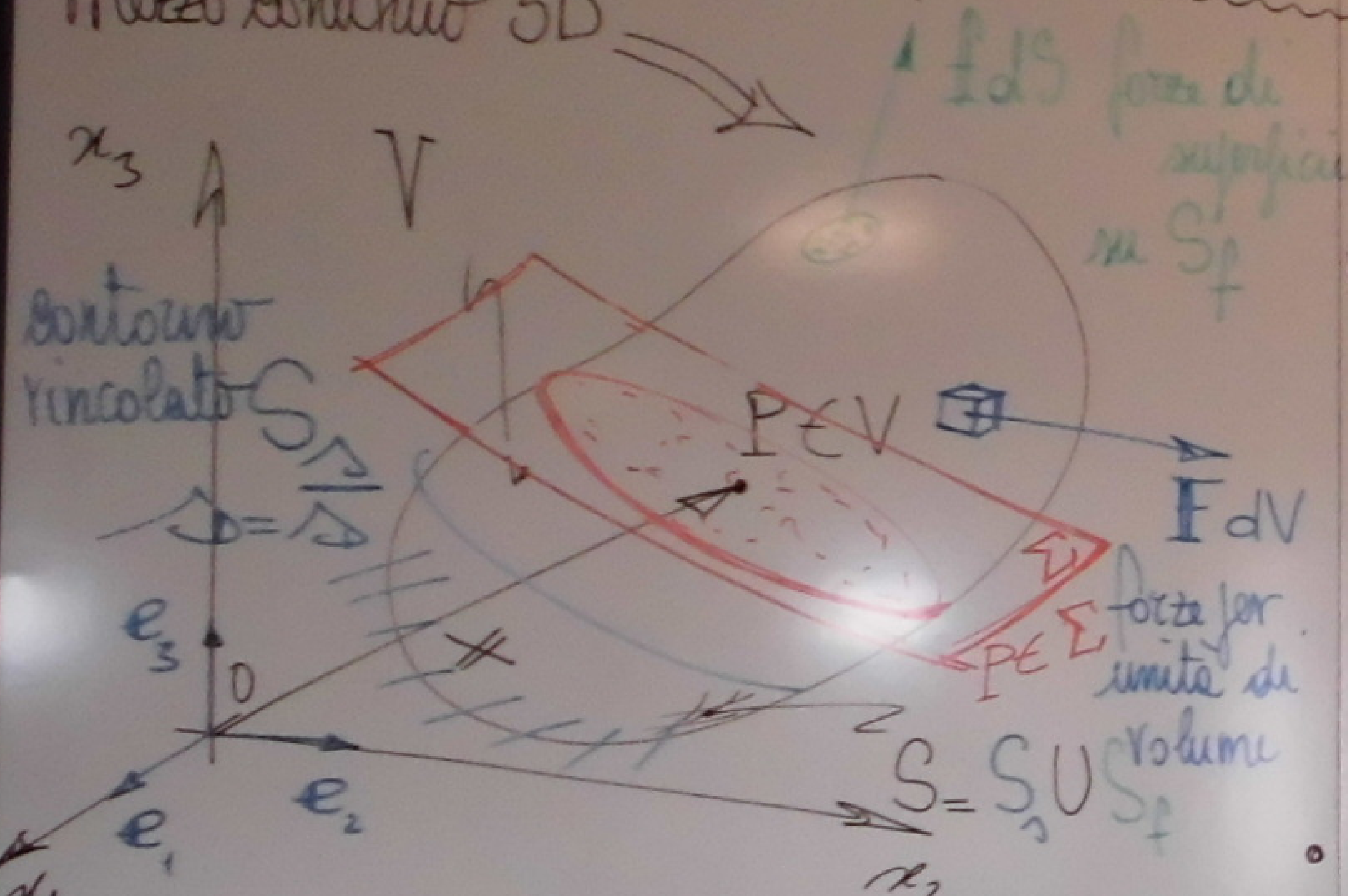
Statica dei continui (Continuo di Cauchy)

Mezzo continuo 3D

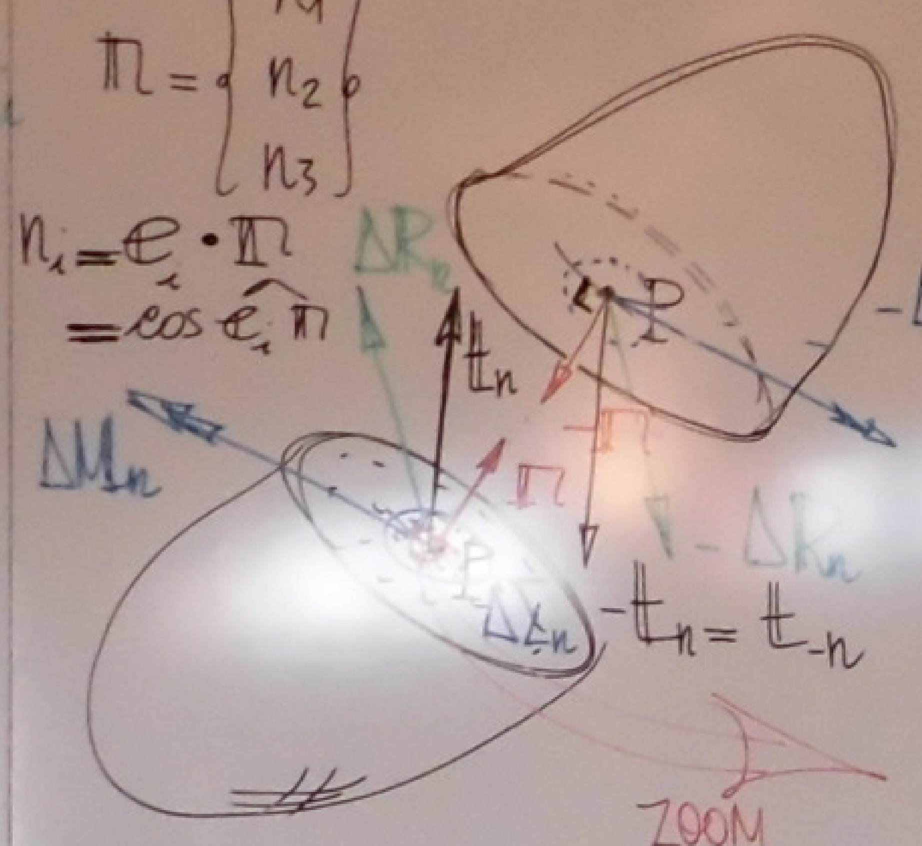


- Generalizzazione del concetto di sforzo (o tensione), introdotto in 1D nell'approccio sperimentale citato (prova di trazione, prova di torsione), al caso 3D, con definizione opportuna quantitativa ⇒ tensore sforzo di Cauchy

Versore normale (uscente) $\|n\| = 1$

$$n = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

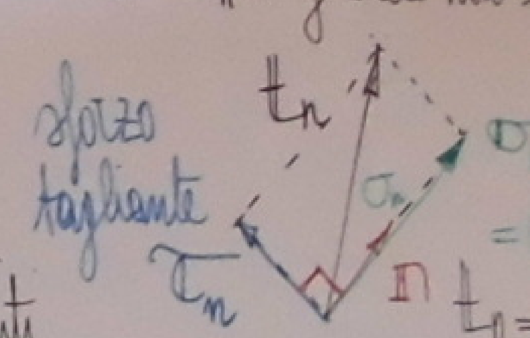
$$n_i = e_i \cdot n = \cos \widehat{e_i\, n}$$



- Si ipotizza l'esistenza dei seguenti limiti finiti
  - $\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta \Sigma_n} = t_n$ vettore sforzo di Cauchy
  - $\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0$ (continuo non polare di Cauchy)

Commenti

- $t_n(x)$ rappresenta lo stato di sforzo locale in $P(x)$, su faccia di normale n
- t_n rappresenta misura di sforzo come forza/area: $[t_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$
- t_n in generale non è $/\!/ \, n$:



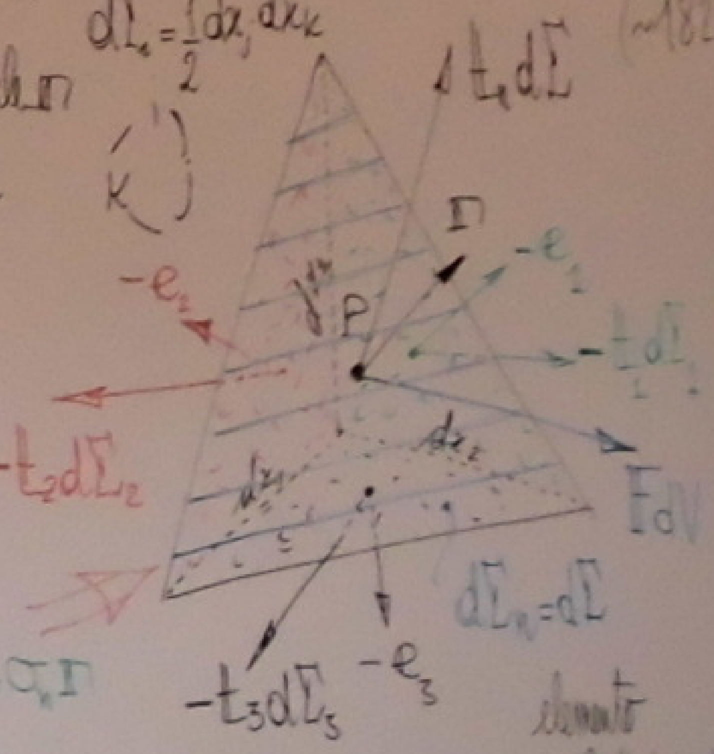
$$t_n = \sigma_n + \tau_n$$

$$\tau_n = t_n - \sigma_n n = t_n - (t_{n_i} n_i)\, n$$

- $t_{-n} = -t_n$

Tetraedro di Cauchy ⇒ relazione di Cauchy (~1822)

$$d\Sigma_i = \frac{1}{2} dx_j\, dx_k$$



$$dV = \frac{1}{3} d\Sigma_n\, dx_n = \frac{1}{6} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

elemento infinitesimo di forma tetraedrica ritagliato dalla forma inclinata con piani // ai piani coordinati del sistema di riferimento.

$$d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma$$

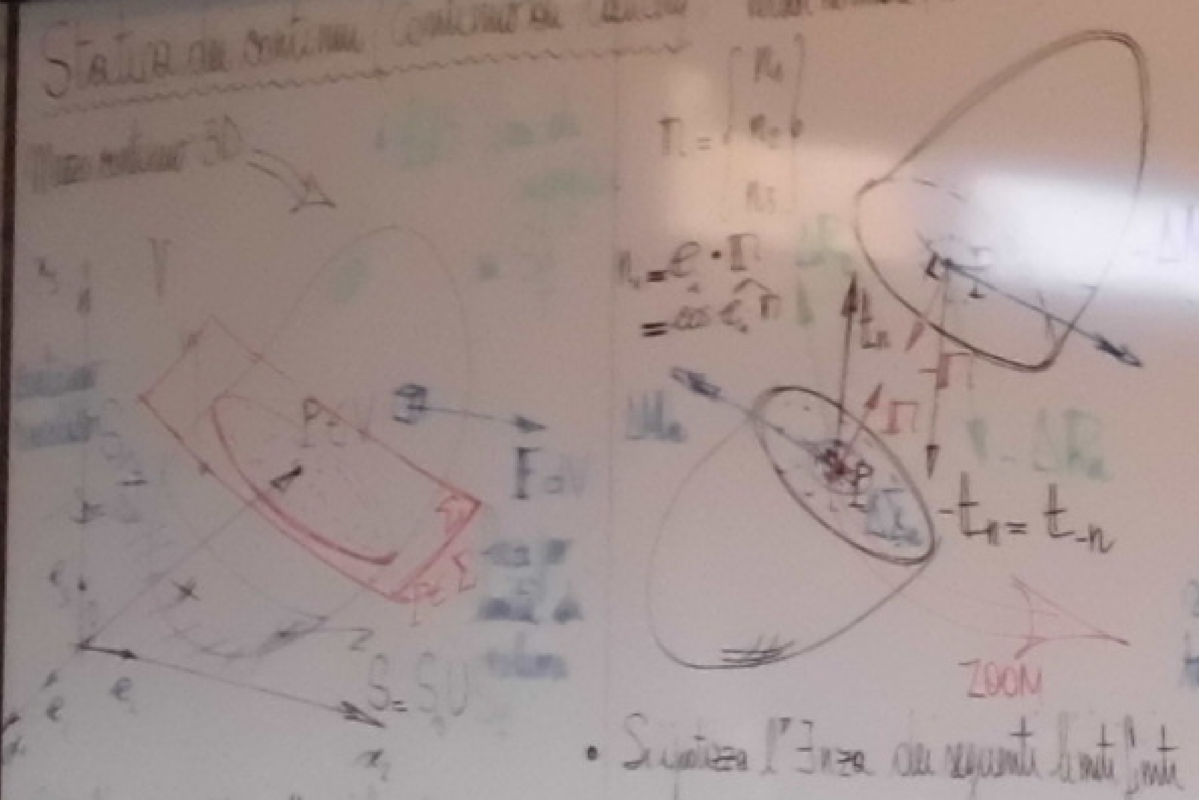
$$t_n d\Sigma - t_1 d\Sigma_1 - t_2 d\Sigma_2 - t_3 d\Sigma_3 + \ldots = 0$$

con $d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma$

- $t_n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3$
- Pertanto, noti i 3 t_i su facce ... e assegnata la normale n, di componenti $n_i = e_i \cdot n$ (coseni direttori), risulta noto il vettore sforzo t_n agente su faccia di normale n.
- ... t_n ... normale n ... $P(x)$

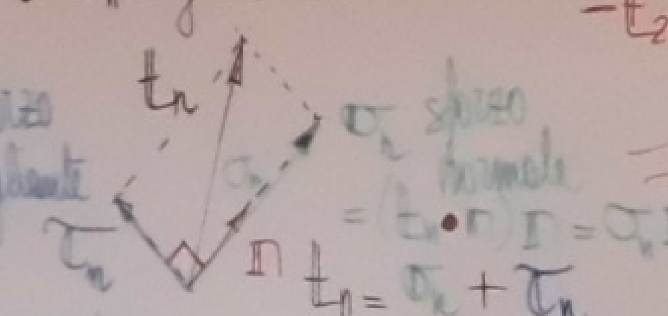
Statica dei continui (Continuo di Cauchy)
Mezzo continuo 3D
V
P ∈ V
FdV
S = S_1 U S_2
Generalizzazione del concetto di sforzo (o tensione), introdotto in 1D nell'approccio sperimentale citato (prova di trazione, prova di torsione), al caso 3D, con definizione opportuna quantitativa → tensore sforzo di Cauchy
Versore normale (uscente) ‖n‖ = 1
n_i = e_i · n = cos e_i n
−ΔM_n
t_n
−t_n = t_−n
ZOOM
Si ipotizza l'∃nza dei seguenti limiti finiti
lim ΔΣ_n→0 ΔM_n / ΔΣ_n = 0 (continuo non polare di Cauchy)
Commenti
t_n(x) rappresenta lo stato di sforzo locale in P(x), su faccia di normale n
t_n rappresenta misura di sforzo come forza/area [t_n] = [F] / [L]^2
t_n in generale non è // n :
sforzo tagliante
sforzo normale
t_n = σ_n + τ_n
τ_n = t_n − σ_n n
t_−n = − t_n
Tetraedro di Cauchy → relazione di Cauchy (~1822)
dΣ_i = 1/2 dx_j dx_k
t_n dΣ
−e_2
−e_1
−e_3
−t_3 dΣ_3
FdV
dΣ_n = dΣ
dV = 1/3 dΣ_i dx_i = 1/6 dx_1 dx_2 dx_3
dΣ_i = n_i dΣ
elemento infinitesimo di forma tetraedrica ritagliato, dalle faccie inclinate con piani // ai piani ortogonali del sistema di riferimento.
Eq di equilibrio alla traslazione (in forma indefinita, ∀x, dV o dΣ)
t_n dΣ
− t_3 dΣ_3 + F dV = 0
t_n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3
eq. vettoriale
Pertanto, noti i 3 t_i su facce // ai piani coordinati e assegnata la normale n, di componenti n_i = e_i · n (coseni direttori), risulta noto il vettore sforzo t_n agente su faccia di normale n.
L'insieme dei tre vettori sforzo t_i definisce univocamente il vettore sforzo t_n su qualunque faccia inclinata di normale n e quindi di fatto definisce lo stato di sforzo
locale nel punto P(x).

Statica dei continui (Continuo di Cauchy) Versore normale (uscente) $|\mathbf{n}|=1$



Commenti

- $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ rappresenta lo stato di sforzo locale in $P(\mathbf{x})$, su faccia di normale $\mathbf{n}$
- $\mathbf{t}_n$ rappresenta misura di sforzo come forza/area $[\mathbf{t}_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$
- $\mathbf{t}_n$ in generale non è $// \mathbf{n}$:



$= (\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n}$

$\mathbf{t}_n = \sigma_n + \tau_n$

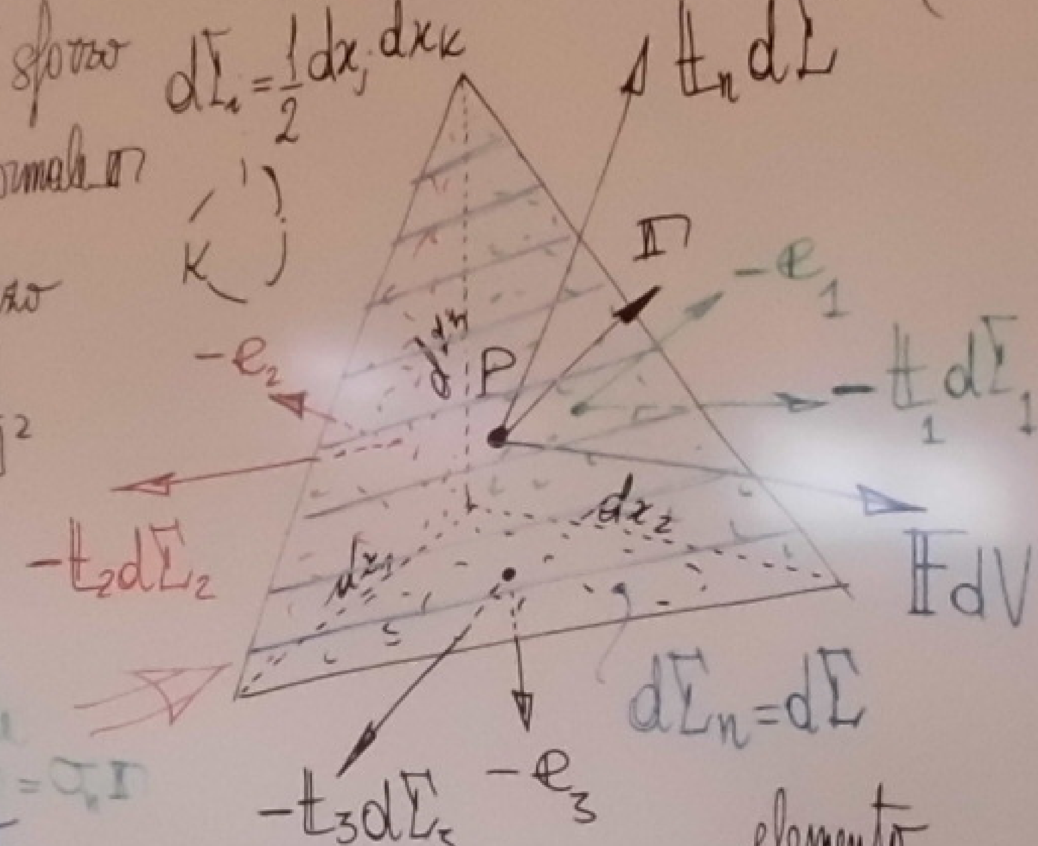
$\tau_n = \mathbf{t}_n - \sigma_n \mathbf{n}$

$= \mathbf{t}_n - (\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$

- $\mathbf{t}_{-n} = -\mathbf{t}_n$

Tetraedro di Cauchy $\rightarrow$ relazione di Cauchy (~1822)

$d\Sigma_i = \frac{1}{2} dx_j\, dx_k$



$dV = \frac{1}{3} d\Sigma_{(i)} dx_{(i)} = \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3$

$d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma$

elemento infinitesimo di forma tetraedrica ritagliato, dalla faccia inclinata con piani // ai piani ortogonali del sistema di riferimento.

$\mathbf{t}_n d\Sigma - \mathbf{t}_1 d\Sigma_1 - \mathbf{t}_2 d\Sigma_2 - \mathbf{t}_3 d\Sigma_3 + \mathbf{F} dV = 0$

Eq di equilibrio alla traslazione (in sede indefinita, $\forall \mathbf{x}$, dV o $d\Sigma$)

$o(dx_i^3)$ $\forall d\Sigma$

con $d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma$

- $\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3$ eq.ne vettoriale

- Pertanto, noti i 3 $\mathbf{t}_i$ su facce // ai piani coordinati e assegnata la normale $\mathbf{n}$, di componenti $n_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}$ (coseni direttori), risulta noto il vettore sforzo $\mathbf{t}_n$ agente su faccia di normale $\mathbf{n}$.
- L'insieme dei tre vettori sforzo $\mathbf{t}_i$ definisce univocamente il vettore sforzo $\mathbf{t}_n$ su qualunque faccia inclinata di normale $\mathbf{n}$ e quindi di fatto definisce lo stato di sforzo (sollecitazione interna) locale nel punto $P(\mathbf{x})$.

Tensore sforzo di Cauchy

(da relaz. di Cauchy: $\mathbf{t}_n = \sum_j \mathbf{t}_j n_j = \mathbf{t}_j n_j$

$$\begin{cases} t_{n1} = t_{11} n_1 + t_{21} n_2 + t_{31} n_3 \\ t_{n2} = t_{12} n_1 + t_{22} n_2 + t_{32} n_3 \\ t_{n3} = t_{13} n_1 + t_{23} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases}$$

componenti cartesiane del vettore $\mathbf{t}_n$

$$t_{ni} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_n$$

$$\mathbf{t}_n = \begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3 \end{array} \overset{\mathbf{n}}{\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}}$$

per colonna

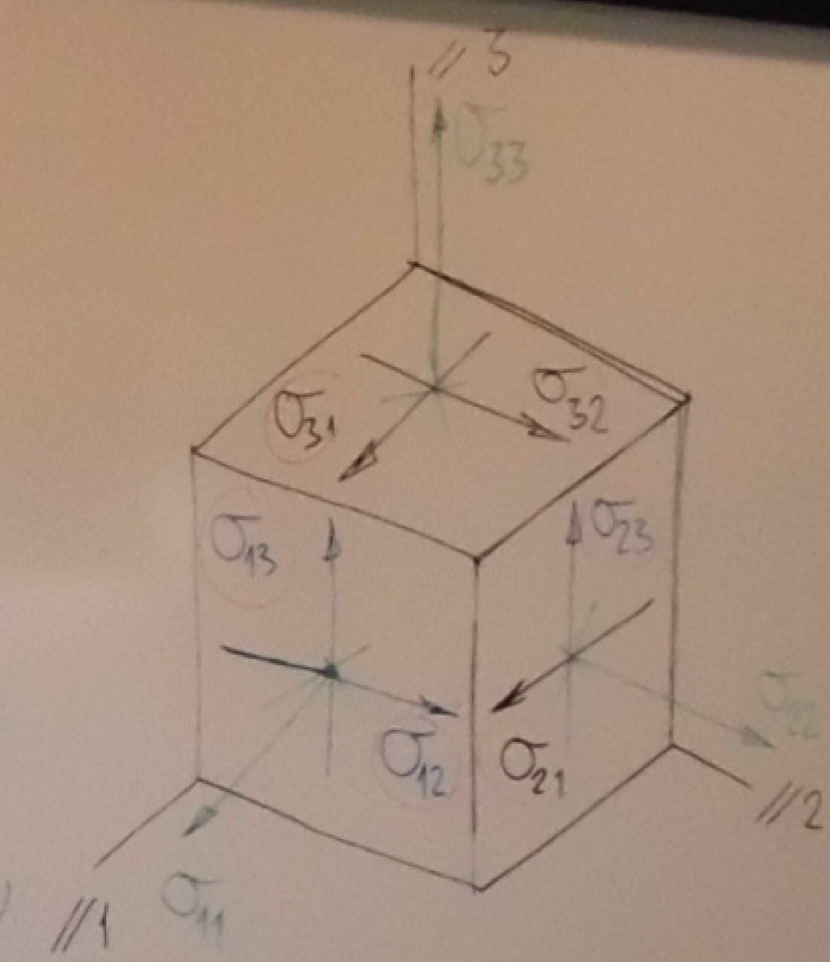
- Ciò conduce di fatto ad una trasformazione lineare di $\mathbf{n}$ in $\mathbf{t}_n$ tramite il tensore sforzo di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, di componenti cartesiane $\sigma_{ij} = t_{ij}$, tale per cui:

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}^{T} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{n_j \sigma_{ji}} \Leftrightarrow t_{ni} = t_{ji} n_j = \sigma_{ji} n_j$$

$$(\sigma^T)_{ij} n_j$$

- Pertanto la matrice sforzo $[\sigma]$ che raccoglie le comp.ti cartesiane $\sigma_{ij} = t_{ij}$ si ottiene rappresentando le comp. di $\mathbf{t}_i$ per righe

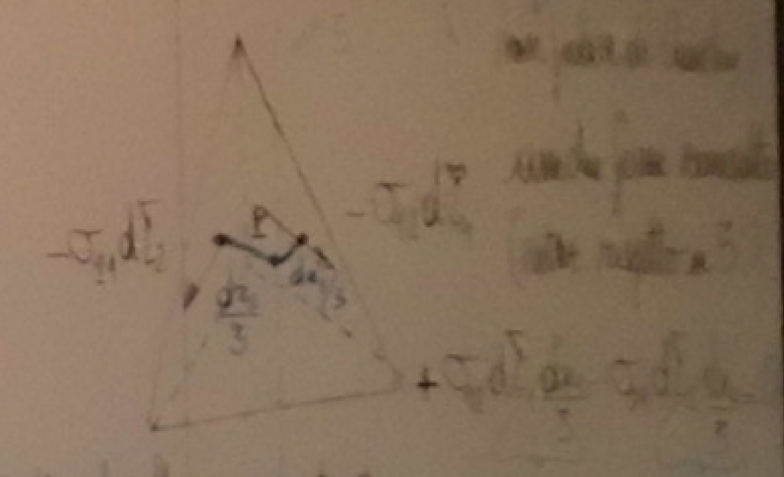
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



$i = j$ $\quad \sigma_{i=j}$ 3 sforzi normali

$j \neq i$ $\quad \tau_{ij} = \sigma_{ij}$ $\quad$ 6 sforzi taglianti $\Rightarrow$ 3 risultano indip.

- Equil. alla rotazione del tetraedro



Idem per gli altri assi, pertanto

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \begin{cases} \sigma_{21} = \sigma_{12} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{32} = \sigma_{23} \end{cases}$$

Tensore sforzo di Cauchy è simmetrico

Tensore sforzo di Cauchy

(da relaz. di Cauchy: $t_n = \sum_j t_j n_j = t_j n_j$)

$$\begin{cases} t_{n1} = t_{11} n_1 + t_{21} n_2 + t_{31} n_3 \\ t_{n2} = t_{12} n_1 + t_{22} n_2 + t_{32} n_3 \\ t_{n3} = t_{13} n_1 + t_{23} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases}$$

componenti cartesiane del vettore t_n

$$t_{ni} = e_i \cdot t_n$$

$$t_n = \begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}}_{n}$$

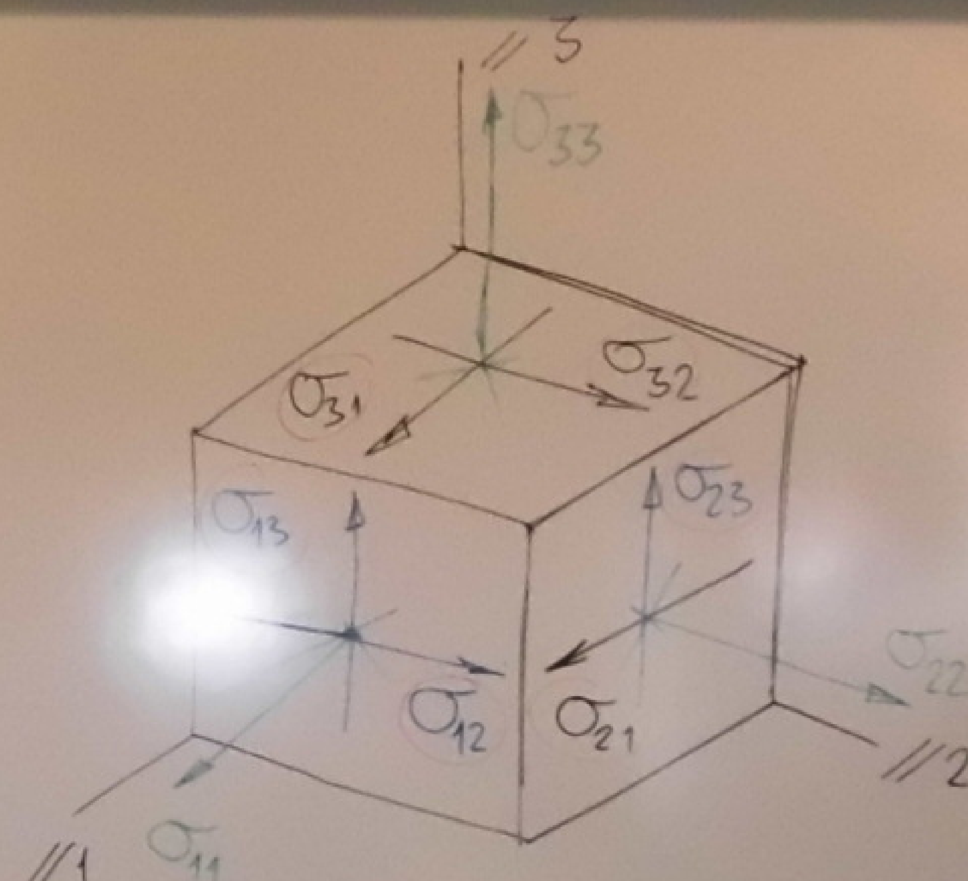
t_1 t_2 t_3 per colonna

- Ciò conduce di fatto ad una trasformazione lineare di n in t_n tramite il tensore sforzo di Cauchy σ, di componenti cartesiane $\sigma_{ij} = t_{ij}$, tale per cui:

$$t_n = \underbrace{\sigma^{(T)} \cdot n}_{(\sigma^T)_{ij} n_j} = \underbrace{n \cdot \sigma}_{n_j \sigma_{ji}} \Longleftrightarrow t_{ni} = t_{ji} n_j = \sigma_{ji} n_j$$

- Pertanto la matrice sforzo $[\sigma]$ che raccoglie le comp.ti cartesiane $\sigma_{ij} = t_{ij}$ si ottiene rappresentando le comp. di t_i per righe

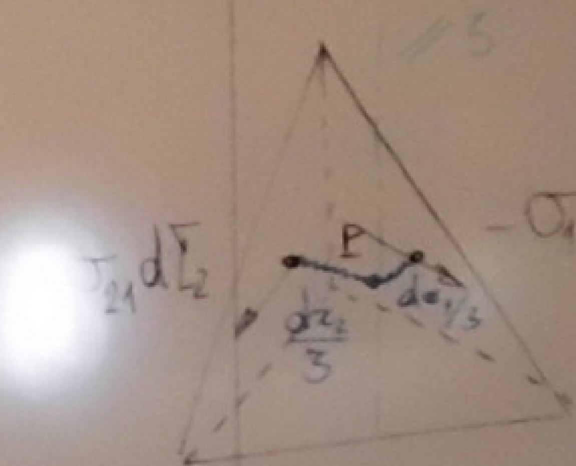
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



$i = i$ $\sigma_{(ii)}$ 3 sforzi normali

$j \neq i$ $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$ 6 sforzi taglianti $\Rightarrow$ 3 risultano indip.

- Equil. alla rotazione del tetraedro (nell'ip. di assenza di coppie di Cauchy) (anche forze di volume) (rotaz. rispetto a 3)



$$-\sigma_{12} d\Sigma_1 \qquad \sigma_{21} d\Sigma_2$$

$$+ \sigma_{12} \underbrace{d\Sigma_1 \frac{dx_1}{3}}_{dV} - \sigma_{21} \underbrace{d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3}}_{dV} = 0$$

Idem per gli altri assi, pertanto:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \Longleftrightarrow \sigma^T = \sigma \quad \begin{cases} \sigma_{21} = \sigma_{12} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{32} = \sigma_{23} \end{cases}$$

Tensore sforzo di Cauchy è simmetrico (del 2° ordine e doppio) (6 comp.ti indip.)

da teor. di Cauchy: $t_n = \sum t\, n = t\, n$

Ciò consiste di fatto ad una trasformazione

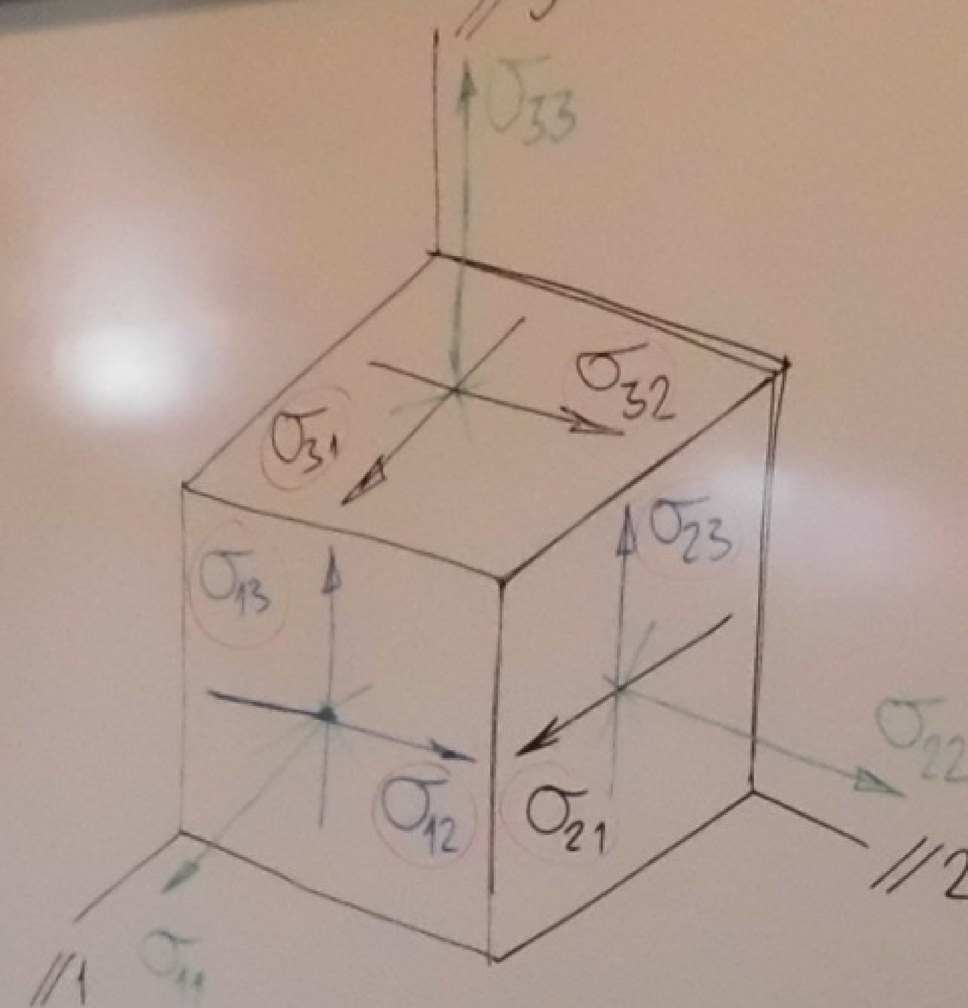
... σ, di componenti

... $\sigma_{ij} = t_{ij}$, tale per cui:

$$t_n = \sigma^T \cdot n = n \cdot \sigma \Longleftrightarrow t_{n_i} = t_{ji}\, n_j = \sigma_{ij}\, n_j$$

– Pertanto la matrice sforzo $[\sigma]$ che raccoglie le comp. ti ... $\sigma_{ij} = t_{ij}$ ... rappresentando le comp. di t_i per righe

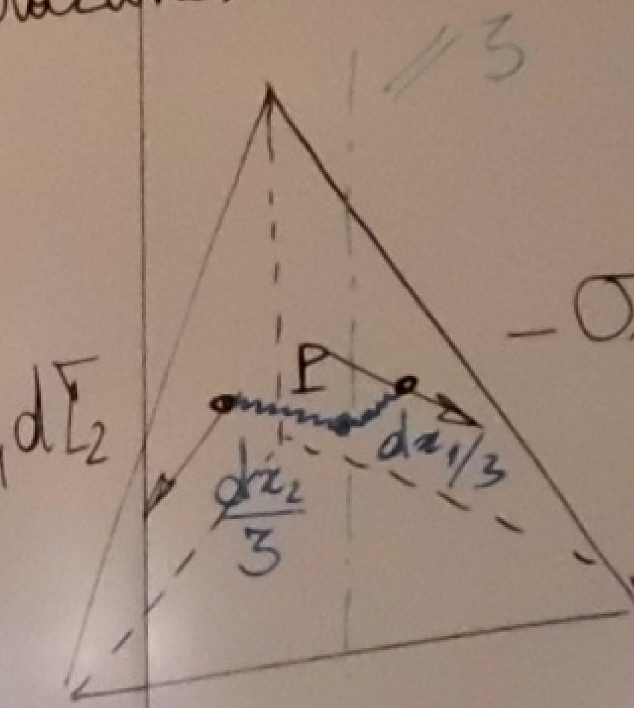
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \end{bmatrix}$$



$\sigma_{(ii)}$ 3 sforzi normali

$j \neq i \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij}$ 6 sforzi taglianti $\Longrightarrow$ 3 risultano indip.

– Equil. alla rotazione del tetraedro (nell'hp di continuo non polare di Cauchy)



$-\sigma_{21}\, d\Sigma_2$ $\qquad$ $-\sigma_{12}\, d\Sigma_1$

uniche forze coinvolte (rotaz. rispetto a 3)

$$+\sigma_{12}\, \underbrace{d\Sigma_1 \frac{dx_1}{3}}_{dV} - \sigma_{21}\, \underbrace{d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3}}_{dV} = 0$$

Idem per gli altri assi, pertanto:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \Longleftrightarrow \sigma^T = \sigma \qquad \begin{aligned} \sigma_{21} &= \sigma_{12} \\ \sigma_{31} &= \sigma_{13} \\ \sigma_{32} &= \sigma_{23} \end{aligned}$$

Tensore sforzo di Cauchy è simmetrico (del 2° ordine o doppio) (6 comp. ti indip.)