

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

~~~~~  
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

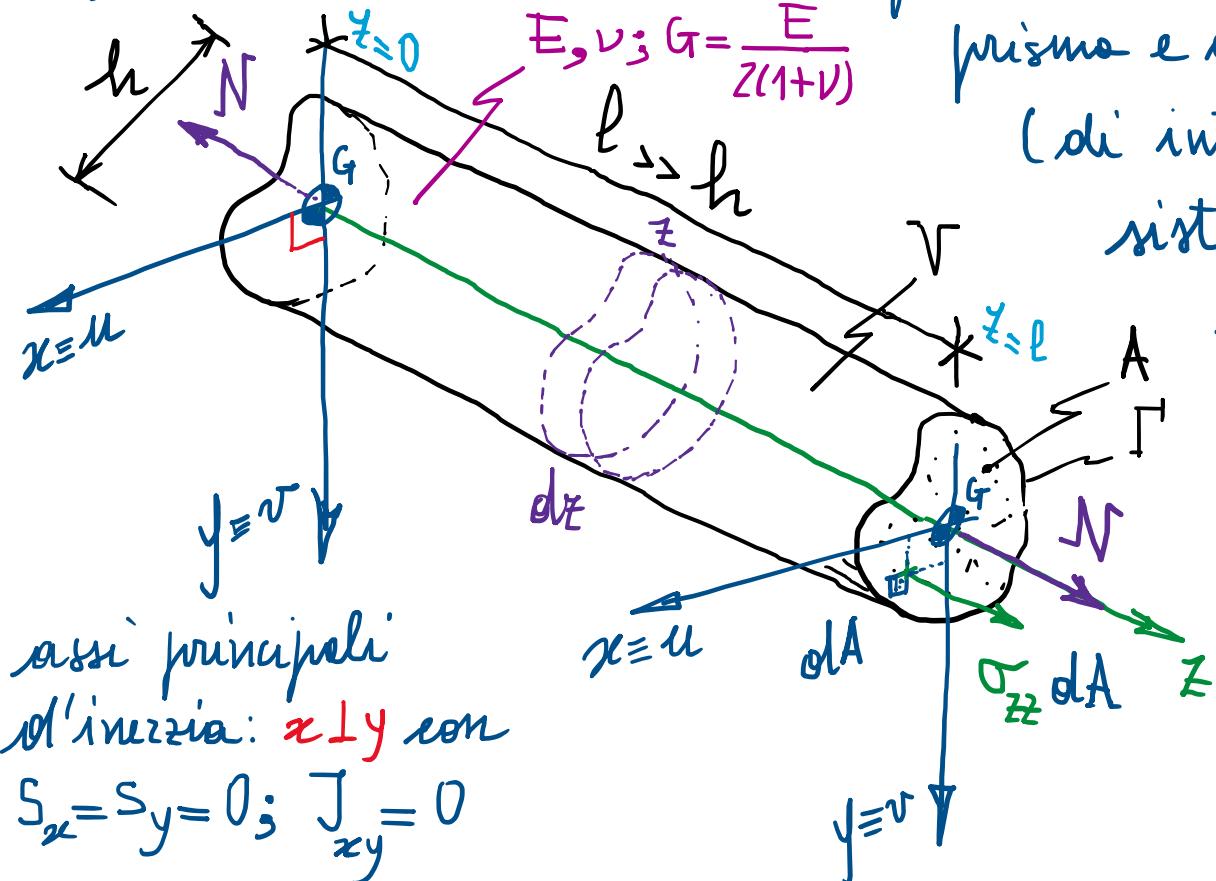
prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 20

## Casi di Saint Venant

1) Azione assiale o normale  $N$ : presenti due risultanti assiali, cioè normali alle basi del prisma e centrate nel barycentro  $G$ , uguali e contrarie (di intensità  $N$ ), quindi tali da formare un sistema di forze auto-equilibrato (in particolare alla traslazione lungo l'asse).



assi principali d'inerzia:  $x \perp y$  con  $S_x = S_y = 0$ ;  $J_{xy} = 0$

- Si opera con approccio "seminverso" agli sforzi mediante ipotesi sul campo di sforzo:

$\sigma_{zz} = \sigma_z = K = \text{cost}$ ;  $\sigma_{ij} = 0$  altrimenti  
distribuzione di sforzo normale costante  
sulla sezione trasversale.

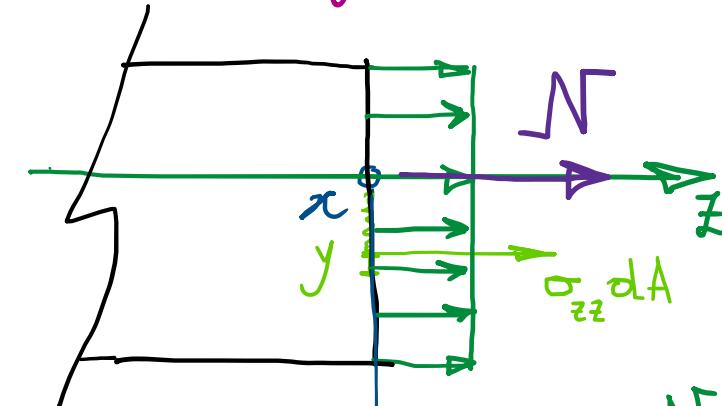
- Si verifica che le equazioni governanti il pb. di DSV (particolare pb. elastico lineare), di equilibrio, congruenza e legame costitutivo, risultino soddisfatte, in maniera tale che la soluzione ipotizzata corrisponda alle soluzioni reali cercate.  $\rightarrow$  ColSdC

$$E, \nu; G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Resta da determinare la costante  $K$ , mediante le seguenti condizioni di equivalenza statica (tra il campo  $\sigma_{zz}$  e l'azione  $N$  che l'ha ingenerato):

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

$$= \int_A K dA = K \int_A dA = KA \Rightarrow K = \frac{N}{A}$$



- Campo di deformazione:

Da legge costitutiva,

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{N}{EA}$$

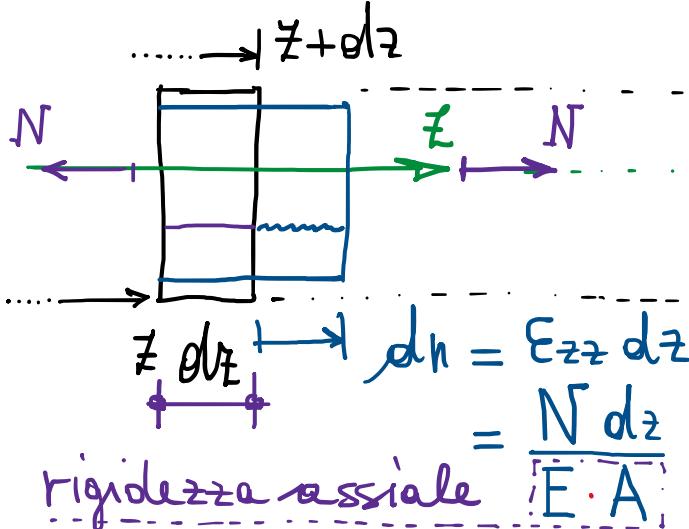
$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\frac{\nu N}{EA}$$

$$\left( \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = 0 \right)$$

$$\sigma_{zz} = K = \frac{N}{A}$$

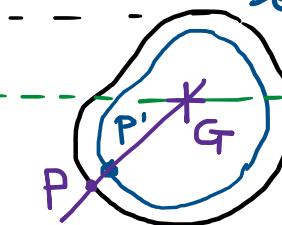
distribuzione di  
spazio normale  
costante sulle  
sezioni trasversali

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$



$$\text{Rigidità assiale} = \frac{dN}{d\epsilon_z} = \frac{N dz}{E A}$$

contrazione omotetica  
delle sez. trasvr.  
nel suo piano



$$\epsilon_r = \epsilon_{rg} = \frac{\overline{PG} - PG}{\overline{PG}} = -\frac{\nu N}{EA}$$

(materiale isotropo)

- Soluzione in termini di spostamento: moto a meno di moti rigidi, in particolare nello spazio dell'asse ( $z$ ) del prisma.
- Allungamento totale (spostamento relativo nello spazio assiale, tra le due basi):

$$\Delta l = \int_0^l dn = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = \frac{N l}{EA}$$

$\overset{l}{\underset{0}{\int}} \quad \overset{l}{\underset{0}{\int}} \quad l = \int_0^l dz$

legge "costitutiva" delle intere travi <sup>(lunga  $l$ )</sup> soggette ad azione assiale

$$\Delta l = \frac{1}{EA/l} N \quad \xleftrightarrow{\text{coerenza}} \quad x = \frac{1}{K} F$$

$$N = \frac{EA}{l} \Delta l \quad \xleftrightarrow{\substack{\text{equivalente a} \\ \text{rigidezza assiale} \\ \text{dell'intera trave}}} \quad F = K x$$

- dirett. prop. a  $N$
- " " " a  $l$
- invers. prop. alle rigidezza assiale  $E \cdot A$  (sia concio di lunghezza unitaria)
- quindi:
- inv. prop. a  $E$
- " " " a  $A$
- coerenza

molte elastiche lineare (Hooke)  $\hookrightarrow$  rigidezza

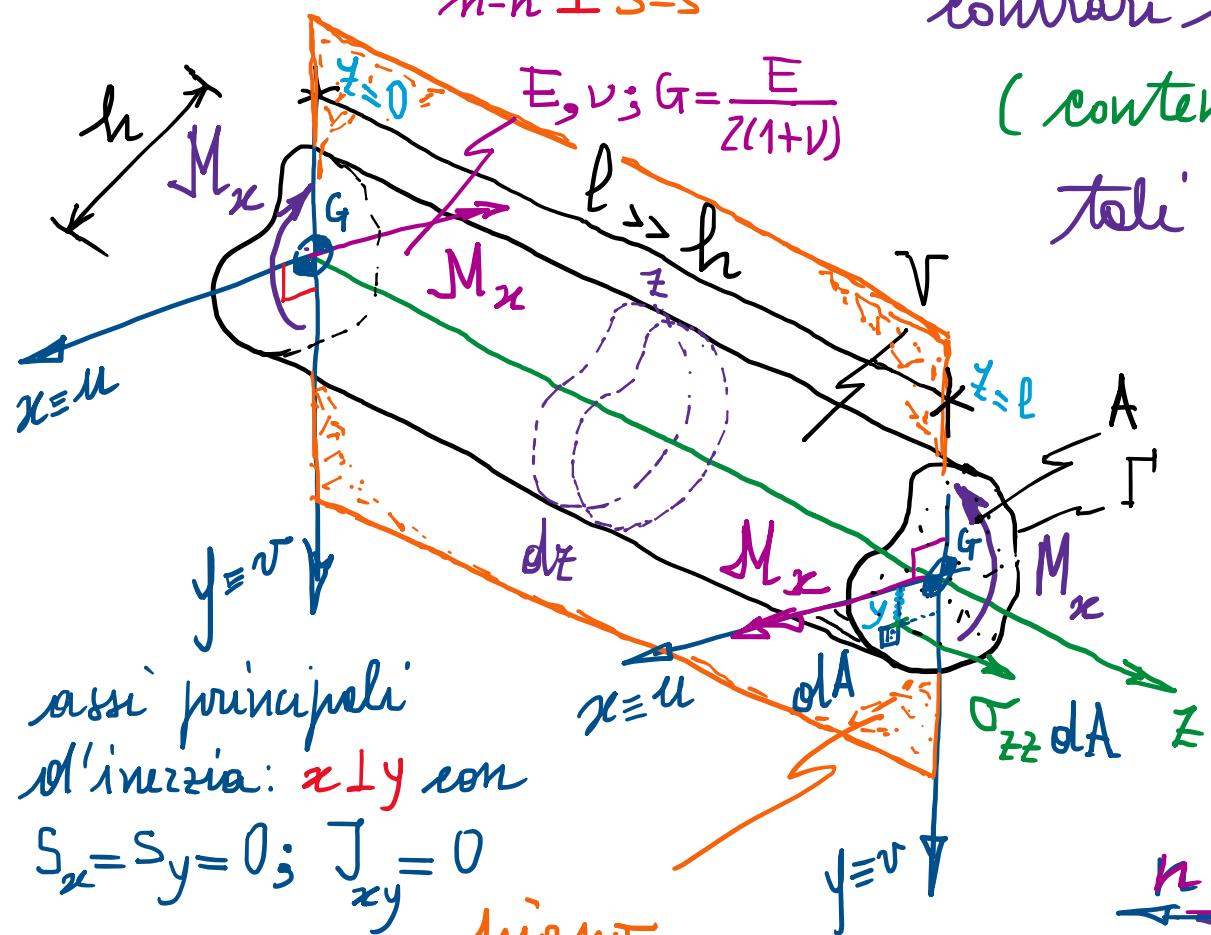
2) Flessione (retta): presenti sulle basi due momenti flettenti, uguali e contrari agenti in un piano di sollecitazione (contenente un asse principale d'inerzia, es. y), tali da formare un sistema autoequilibrato.

- Hp. sul campo di sforzo:

$$\sigma_{zz} = \sigma_z = k y ; \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ altrimenti}$$

$k = \text{cost}$

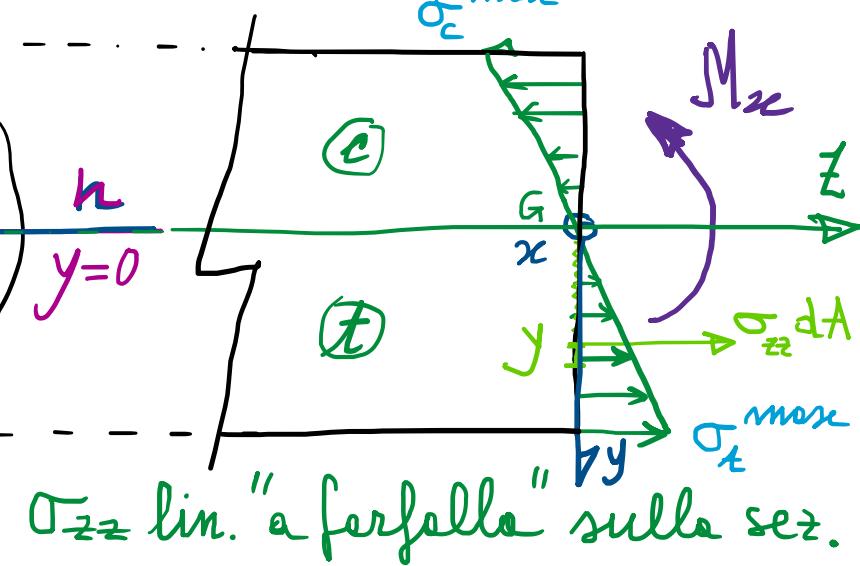
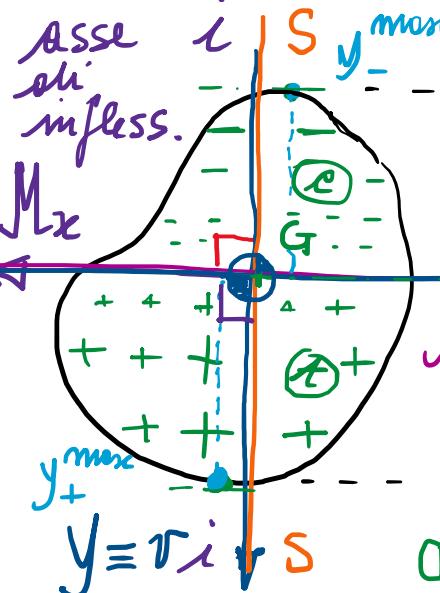
sforzo lineare sulla sez. (in y) sez. parzialm. tesa e parzialm. compresse



assi principali  
d'inerzia:  $x \perp y$  con  
 $S_x = S_y = 0$ ;  $J_{xy} = 0$

piano  
di  
sollecitazione

$S-S$  avente tracce asse  $S-S$   
( $y \equiv r_S, z$ ) nel piano della sez.



$\sigma_{zz}$  lin. "a ferro di ferro" sulla sez.

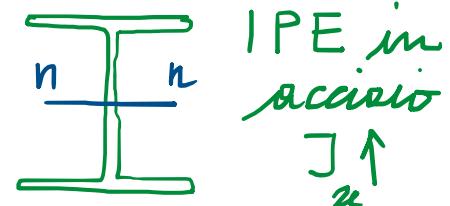
- Si può verificare che le eq.m. governanti risultano soddisfatte.  $\rightarrow$  Col SdC
- Resta da determinare la costante  $k$ , stesse condizioni di equivalenza statica (tra  $M_x$  e le  $\sigma_{zz}$  da esso indotte):

$$M_x = \int_A (\underbrace{\sigma_{zz} dA}_{ky}) \cdot y = \int_A k y \underbrace{y^2}_{y^2} dA = k \int_A y^2 dA \Rightarrow k = \frac{M_x}{J_x} \quad [F][L]$$

- Formula di Navier per le flessioni:

$$\boxed{J_{zz}(y) = \frac{M_x}{J_x} y} \quad [F] \quad [L]^2$$

- dirett. prop. a  $M_x$  sezione trasversale rispetto all'asse  $x$  (esse n-n)  $[L]^4$
- invers. " a  $J_x$
- dirett. " a  $y$  (distanza da n-n)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_t^{max} = \frac{M_x}{J_x} y_+^{max} = \frac{M_x}{J_x / y_+^{max}} = \frac{M_x}{W_x^+} \\ \sigma_c^{max} = \frac{M_x |y_-|^{max}}{J_x} = \frac{M_x}{J_x / |y_-^{max}|} = \frac{M_x}{W_x^-} \end{array} \right.$$

moduli di resistenze  $\checkmark$  (affessione) (sfazzi max invers. prop. a moduli) (a traz./compr.)  $[L]^3$  (prop. geometrica sez. trasv.)

- Campo di deformazione:

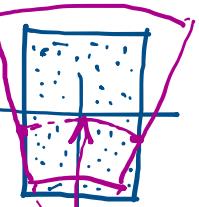
Da legge costitutiva

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{M_x}{E J_x} y$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\nu \frac{M_x}{E J_x} y$$

$$(\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \equiv 0)$$

es. sez. rettangolare



$$\bar{\rho} = \frac{1}{\nu} \rho > \rho$$

curvatura "anticlastica"  $\bar{\chi}_x = \nu \chi_x < \chi_x$  (fuori scala) nel piano della sezione

- Per l'intero prisma (lungo  $l$ ) (rotazione relativa tra le basi):

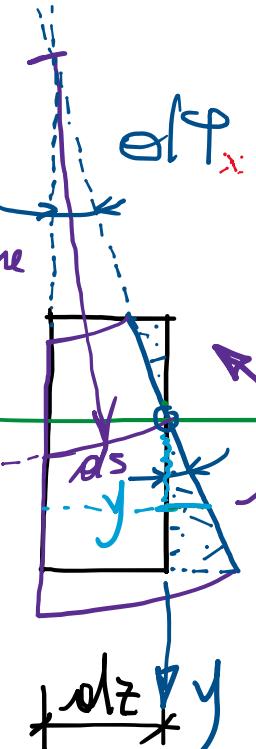
$$\Delta\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_x dz}{E J_x} = \frac{M_x l}{E J_x} = \frac{1}{E J_x / l} M_x ; \quad M_x = \frac{E J_x}{l} \Delta\varphi_x$$

rigidezza

piano i-i  $\rho = r$   
in piano di inflessione  
= con piano s-s  
linee d'asse inflessa

$$\rho d\varphi = ds \approx dz$$

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{d\varphi}{dz}$$



rotazione delle sezione piane e l'asse inflesso  
(sez. I al piano di sollecitazione)

rotazione relativa

$$d\varphi = \frac{M_x dz}{E J_x}$$

$$y d\varphi = \epsilon_{zz} dz$$

$$y d\varphi = \frac{M_x y dz}{E J_x}$$

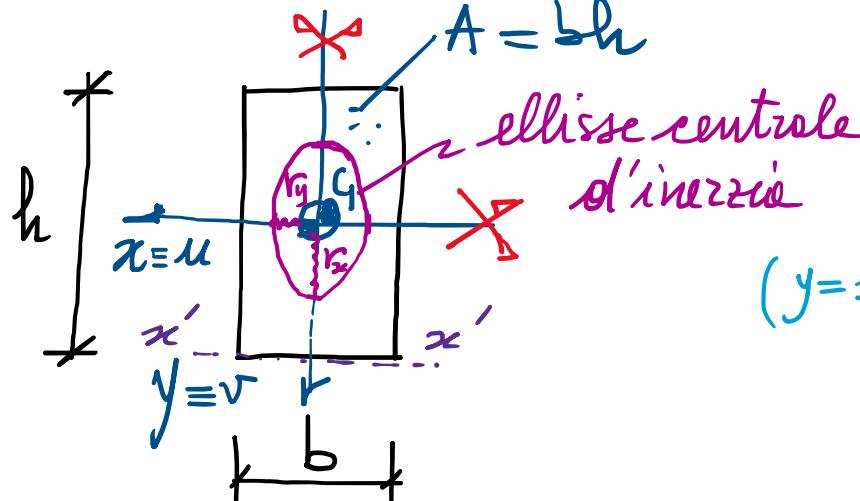
rigidezza flessionale

curvatura elastica

$$\chi_x = \frac{M_x}{E J_x}$$

Legge di E-B-N

## Es.: Sezione rettangolare

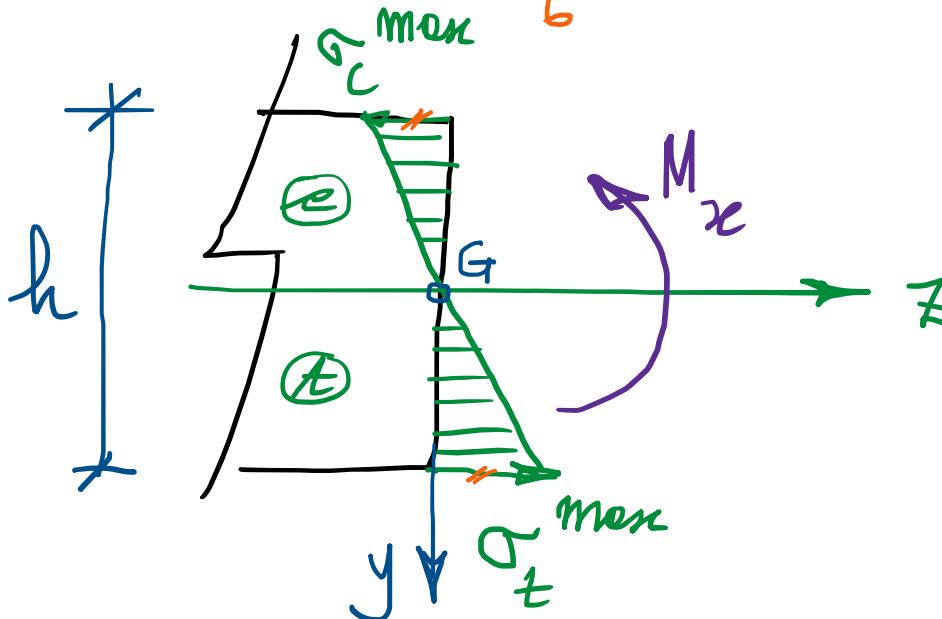


$$\begin{aligned} J_{x'} &= \int_A y'^2 dA \\ &= \int_0^b \int_0^h y'^2 dx' dy' \\ &= \frac{1}{3} bh^3 [L]^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x'} - A y_c'^2 \\ &= \frac{1}{3} bh^3 - bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \frac{4}{4} - \frac{1}{4} \frac{3}{3}\right) bh^3 = \frac{1}{12} bh^3 \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{M_x}{\frac{1}{12} bh^3} y = \frac{12 M_x}{bh^3} y$$

$$(y = \frac{h}{2}) \quad \sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x}{\frac{1}{12} bh^3} \frac{h}{2} = \frac{M_x}{\frac{bh^3}{6}} = \frac{M_x}{W_x}$$



raggio giacente d'inerzia

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \frac{1}{\sqrt{12}} h = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{h}{2} \approx 0.6 \frac{h}{2}$$

$W_x$  modulo di resistenza a flessione

$$W_x = \frac{bh^2}{6} [L]^3$$

idem per

$$J_y = \frac{1}{12} \frac{b^3 h}{l}$$

$$r_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b}{2}$$