

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

SOMMARI DELLE LEZIONI

## SOMMARIO (Lec. 16)

- Dalle Dinamica all'Instabilità delle strutture  $\Rightarrow$  criterio dinamico di stabilità secondo LIAPUNOV.
- Carico critico : valore caratteristico che segnala la perdita di stabilità del sistema (piccole perturbazioni non restano più confinate a risposta limitata).
- Transizione dinamica (verso il collasso).

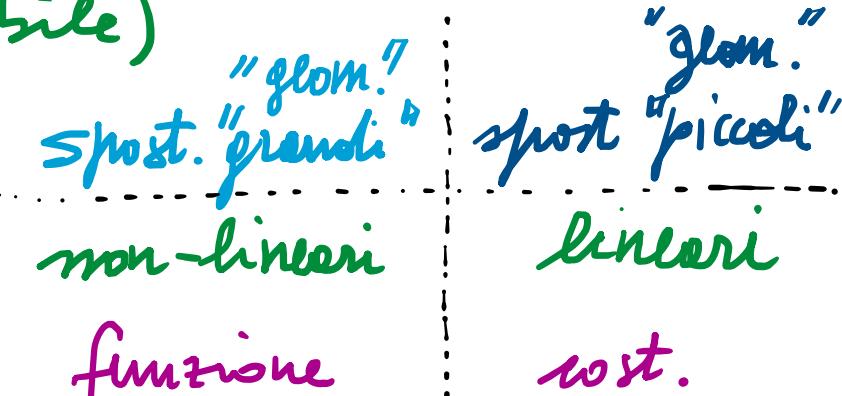
### Instabilità delle strutture

- Approssimazione statica : scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate (perdita di unicità della soluzione).
- Non-linearità geometrica carico/spostamento.
- Carico critico : p.t.o. di biforcazione nelle mappe dei percorsi di equilibrio.
- Analisi per spostamenti "geometricamente ficiuti" (con stesso  $P(r)$ ).

Next step: Approssimazione energetica per indagare le nature (stabile/instabile) delle configurazioni di equilibrio.

## SOMMARIO (Lec. 17)

- Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture  $\Rightarrow$  EPT (V).
- Th. di Dirichlet (CS di stabilità  $\Rightarrow$  EPT min. rel.)  
mentre CN di equil.  $\Rightarrow$  EPT stazionario
- Teoria del 2° ordine  $\Rightarrow \nabla \approx \nabla_2$ 
  - Eq. di equil., di stazionarietà, linearizzate
  - Segno variazione seconda ( $\alpha > 0 \Rightarrow$  stabile)
- Esempio SDOF
  - Scrittura dell'EPT
  - Equil. per condiz. di stazionarietà
  - Analisi di stabilità per studio segno variaz. 2<sup>a</sup> funzione



Next step: Cenni sull'instabilità di sistemi reali (con imperfezioni)  
 $\Rightarrow$  transizione senza p.t. di biforcazione.

## SOMMARIO (Lec. 18)

- Instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) [vs. sistemi ideali: privi di imp.]
  - transitione continua vs. ramo bifurcato  
del sistema ideale.
  - bifurcazione per  $P = P_{cr}$ .
- Approccio statico per spost. "geom. grandi" e mappa sui percorsi di equilibrio.
  - validità delle stime di  $P_{cr}$ .
- " " " " " piccoli"  $\Rightarrow$  stabilità asintotica per  $P_{cr}$ .
  - Per trovare il trend asintotico di sist. reale resta di rignif. ingegnerist.
- Approccio energetico, per spost. di entità come sopra (grandi/piccoli).
  - Individua, oltre alle stesse conf. in di equilibrio le nature stabile o non stabile di esse (stabile per il ramo primario deviato dalla parte dell'imperfezione).

Next step: pb. euleriani di stabilità - Quadro generale e esempi discreti MDOF

## SOMMARIO (Lec. 19)

- Pbl. euleriani di stabilità secondo teoria del 2° ordine, sistemi discreti MDOF.
- Condizione di perdita di stabilità ( $\frac{1}{2} \delta^2 \bar{\tau} = 0$ )  $\Rightarrow$  carichi critici.
- Matrice di rigidezza elastica e geometrica:  $K = K_E - \rho K_G$  (lin. in  $\rho$ , cost. ing.)
- Rapporto di Rayleigh e pbl. agli autovalori generalizzati  $\Leftrightarrow$  analogie con Dinamica.
- Esempio 3-DOF:
  - Scrittura dell'EPT (per spost. "geometricamente grandi").
  - Valutazione derivate prime e seconde.
  - Scrittura dell'EPT al 1° ord. (i.e. "piccoli")  $\sim q_i^2$
  - Conseguenti valutaz. derivate prime ( $\sim q_i$  lin.) e seconde ( $\sim q_i^2 = 1$  cost.).
  - Calcolo dei carichi critici che condiz. di singolarità di  $K$  ( $\det K = 0$ ).

Next step: Deformate critiche; approssimazione statica (equil. nelle conf. ne deformata).  
Sistemi continui (resta di Euler).

## SOMMARIO (Lec. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approssimazione statico: scrittura diretta delle eq. n. di equilibrio nella configurazione deformata.
  - non-lineari per spost. finiti.
  - lineari per spost. geometricamente piccoli ( $\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$ ).
  - Eq. n. risultano comb. lineare di quelle de stat. di EPT<sub>2</sub> con matrice di rigidezze  $\mathbf{K}$  con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Aste di Euler (con approssimazione statico) [eq. ne LE nelle conf. ne deform.].
- Corichi critici, deformate critiche, lunghezza di libera riflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, eemo ai telai, formule di Newmark, verifica di stabilità.

## SOMMARIO (Lec. 21)

- Aste incastrate e generalizzazione ad altre condizioni di vincolo.
- Coefficiente di vincolo, lunghezza di libera inflessione.
- Telei e nodi fissi : effetto flessionale delle travi considerato in molte rotazioni (elemento a deform. elastico concentrato).
- Formule di Newmark per travi appoggiate (errori contenuti).
- Verifica di stabilità (può essere interpretata come verifica di resistenza con esercizio amplificato di fattore  $\omega \rightarrow$  "Metodo omega").
- Fine Instabilità delle Strutture - (2<sup>a</sup> parte).

Next step: Anelasticità (flessibilità) delle Strutture (3<sup>a</sup> parte).  
Comportamento elastoflessivo del materiale.

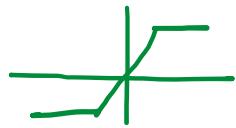
## SOMMARIO (Lec. 22)

### III - Anelasticità delle Strutture ( Plasticità ) -

- Introduzione al comportamento non-lineare (elastoplastico) del materiale.
- Regimi tipici: elastico, perfettamente plastic, incud. positivo/<sup>"hardening"</sup> <sup>"softening"</sup> negativo -
- Comportamento anolonomico: legame incrementale (carico pl. vs. scarico el.).
- Dipendenze delle storie di carico (integraz. del legame incrementale).
- Tipologie di microscopio e loro modellazione.
- Unicità del legame diretto/inverso.
- Incudimento lineare e modulo tangente.
- Generalizzazione 3D: teoria della plasticità -

Next step : Flessione elastoplastica - Comportamento delle sezioni trasversali delle travi  
(verso una teoria strutturale in ambito di non-lin. di materiale).

## SOMMARIO (Lec. 23)



[<sup>sce materiale</sup>  
<sup>e sezione</sup>]

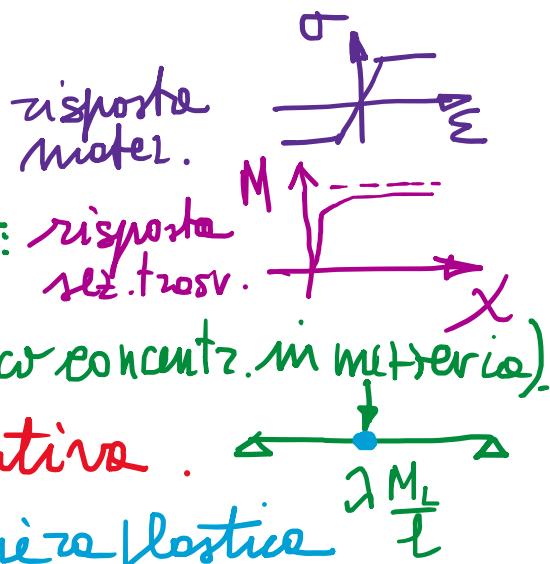
- Flessione elasto-plastica (vs. legge costitutiva delle sez. trasversale).
- Hp. di conservazione delle sezioni piane (campo lineare di deformazione).
- Regime elastico (lineare) : modulo di resistenza elastico, momento/curvatura e limite elastico.
- Regime elasto-plastico : plasticizzazione con "stress block" che si diffondono per curvature crescenti, dai lenti vs. l'interno ; legame  $M/X$  non-lin. con incrudimento ; modulo (di resistenza) plastico ; momento limite ( $X \rightarrow \infty$ ).
- Fattore di forma : guadagno / plasticità / elasticità .
- Casi pratici : momento limite quando raggiunto per deformazioni osservabili  $\sim 1\%$  in campo elastoplastico .

Next step : comportamento globale delle travi infisse ; ipotesi di cerchiere plastica ; meccanismo di collasso (plastico) delle travi .

## SOMMARIO (Lec. 24)

- Risposte elasto-plastiche delle trave (fino al collasso plastico) - Dopo: *risposta* *plastov.*
- Analisi di sistemi isostatici (trave appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria).
- Momento noto per puro equilibrio  $\Rightarrow$  curvatura da legge costitutiva.
- Concentrazione curvature (plastiche) in mezzeria  $\Rightarrow$  ipotesi di cerniere plastiche e schematizzazione semplificata per stima del collasso.
- Meccanismo di collasso plastico e stima del moltiplicatore di collasso  $\lambda_L$  da bilancio energetico (PLV).
- Curva P-Δ, forza/spostamento (moltiplicatore/frecce) non-lineare da reale risposta elasto-plastica con approssimazione lineare a tratti (piece-wise linear) nell'ip. di cerniere plastiche (utile alle stime di  $\lambda_L$ ).

Next step: Schema iperstatico (trave incostretta)  $\Rightarrow$  ulteriori risorse elasto-plastiche da ridistribuzione di sforzo, con sviluppo di deformazioni plastiche - Risposta evolutiva (lineare a tratti) con sequenza di attivazione delle cern. plast.



## SOMMARIO (Lec. 25)

- $\overline{f-f}$
- Analisi evolutiva trave appoggio-appoggio con  $q$  (bilineare): collasso all'attivazione delle prime cerniere plastiche in mezzerie (risorse ulteriori);  $\lambda_L$  agilmente determinato (via PLV), nonostante sottostima deformazione EP.
  - Analisi evolutiva trave incastro-incastro con  $q$  (tutlineare): sequenze di attivazione delle cerniere plastiche (due istanze di apertura); ulteriori risorse portanti da ridistribuzione di spazio per sviluppo di deformazioni plastiche, e carico crescente.
  - Confronto: moltiplicatore di collasso doppio (+50%); rigidezza elastica iniziale quintuplicata (rigidezza successive uguale a quelle del caso precedente, all'apertura delle cerniere plastiche alle estremità incastrate).
  - In genere informazione essenziale collasso plastico (meccanismo e moltiplicatore) vs. analisi evolutiva.

Next step: Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (dei telai), per stima del collasso plastico - Esempi.

## SOMMARIO (Lec. 26)

- Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite, alla base del Calcolo e Rotta (dei telai), volto alla determinazione (diretta) delle caratteristiche di collasso.
- Definizioni: classi staticamente e cinematicamente ammissibili (entro le quali si ricercano le condizioni di collasso).
- Teorema statico: fornisce una delimitazione inferiore del molt. limite:  $\lambda^- \leq \lambda_L$
- Teorema cinematico: " " " superiore " " " :  $\lambda_L \leq \lambda^+$
- Teorema misto: se le delimitazioni bilaterale si stringe a zero, il molt. di collasso risulta individuato  $\Rightarrow \lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$ .
- Dimostrazione via PLV (indip. de parametri destin. e effetti anelastici progressi).
- Metodi detti (statico/cinematico/misto): sulla base dei Th. visti divengono strumenti operativi per il calcolo ("monusle" o "automotiv") delle caratteristiche di collasso plastic.

Next step: Esempi (travi e telai), con determinazione o stima delle caratteristiche a collasso ( $\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$ , momento a collasso, meccanismo plastico).

## SOMMARIO (Lec. 27)

- I Th. fondamentali dell'Analisi Limite olivengono "Metodi diretti" di calcolo per le stime del collasso plastico (anche "manuali") -
- Operando con metodo statico, si mira ad ottenere una sequenza massimizzante dei  $\lambda^-$  ( $\lambda_L = \max\{\lambda^-\}$ ).
- Operando con metodo cinem., " " " " " " " minimizzante dei  $\lambda^+$ , o comunque a fornire delle impostazioni bilaterali del moltiplicatore limite  $\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$  sufficientemente ristrette.  
    (  $\lambda_L = \min\{\lambda^+\}$  ).
- Laddove  $\lambda^+$  fosse anche  $\lambda^-$ , al metodo misto, si mantiene il molt. di collasso  $\lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$  (conformità rispettata).
- Esempio di trave incastro-appoggio, con soluzione "esatta".  
Next step: Esempio di telaio e portale.

# SOMMARIO (Lec. 28)

- Esempio di telaio a portale doppia mente incastrito con carichi concentrati.
- Risoluzione con "metodi diretti", "manuali":
  - Metodo cinematico
  - Metodo statico
  - Metodo misto

• delimitazione bilaterale (in genere suff. ai fini ingegneristici),  
• stima del moltiplicatore limite  $\lambda_L$  e dei momenti a collasso  $M_{iL}(x)$ .
- Mecanismo completo (collasso dell'intera struttura)  $\Rightarrow$  struttura isostatica con distribuzione univoca di  $M_i(x)$  che, se conforme, corrisponde anche a  $\lambda_L$ .
- Mecanismo parziale (collasso di parte delle strut.)  $\Rightarrow$  " ijk " " "  
" non " " " (conformità valutabile per corte di incognite ieristiche residue)  $\Rightarrow$  vari  $\lambda^-$ .
- Metodo statico ("safe th.") fornisce sempre stime conservative  $\lambda^- \leq \lambda_L = \max \lambda^-$  ma di più difficile elaborazione per gr2. con molte sic. ieristiche (corte moltiplici).
- Metodo cinematico ("upper bound") fornisce stima non conserv.  $\min \lambda^+ = \lambda_L \leq \lambda^+$  ma di assai facile determinazione (e.g. di equil. a collasso incipiente tramite PLV).  
Laddove tutti i meccanismi,  $\lambda_L$  è il min tra tutti quelli det. ; ove una parte,  $\lambda_L \leq \lambda^+$  min.
- Metodi codificabili in forma computazionale (Programmazione Lineare) con calcolo metriciale.

## Conclusioni globali sul corso [D(I)AS]: (Plasticità)

- Tre discipline, Dinamica/Instabilità/Aneleasticità delle Strutture, viste separatamente (oggetti concettuali fondamentali) → ma in realtà interagenti.
- Come estensione da SolC (statica in ambito lineare):  
Dinamica: con incisie, linearità (elasto-viscosa).  
Instabilità/Aneleasticità: "quasi statica", non-linearietà (geometrica/di materiale).
- Dinamica anche ben tipica di stati di servizio (uso quotidiano vibrazionale, es. ponti).
- Instabilità/Aneleasticità più tipica di stati limite ultimo (preludono o concludono al collasso), tipicamente tramite transizione dinamica → Risposta non-lineare con discipline ex-festanti.
- Trait d'union: sistemi discreti (masse concentrate; elementi a deformabilità concentrate, elastiche (molte)/plastiche (cerniere plastiche o suoli)).
- Modi caratteristici:
  - "di Dinamica" (modi principali di vibrazione, frequenze proprie;  $\omega_1 = \min \omega_i$ );
  - "di Instabilità" (deformate critiche, carichi critici;  $p_{cr} = \min p_{ri}$ );
  - "di Plasticità" (meccanismi di collasso, multipli dei cinematici;  $\Delta_L = \min \Delta_i^+$ ).
- Link con MCSS (discretizzazione) e uso calcolo metricale (automatizzato).
- Recano traccia del filone SolC - CdSdC - DIASt (fondamenti) sugli aspetti teorico- (+MCSS) metodologici in Meccanica dei Solidi e delle Strutture.
- Seguono aspetti applicativi nell'area di TdC (Progetto, verifica agli S.L.U., costruzioni in zona sismica).