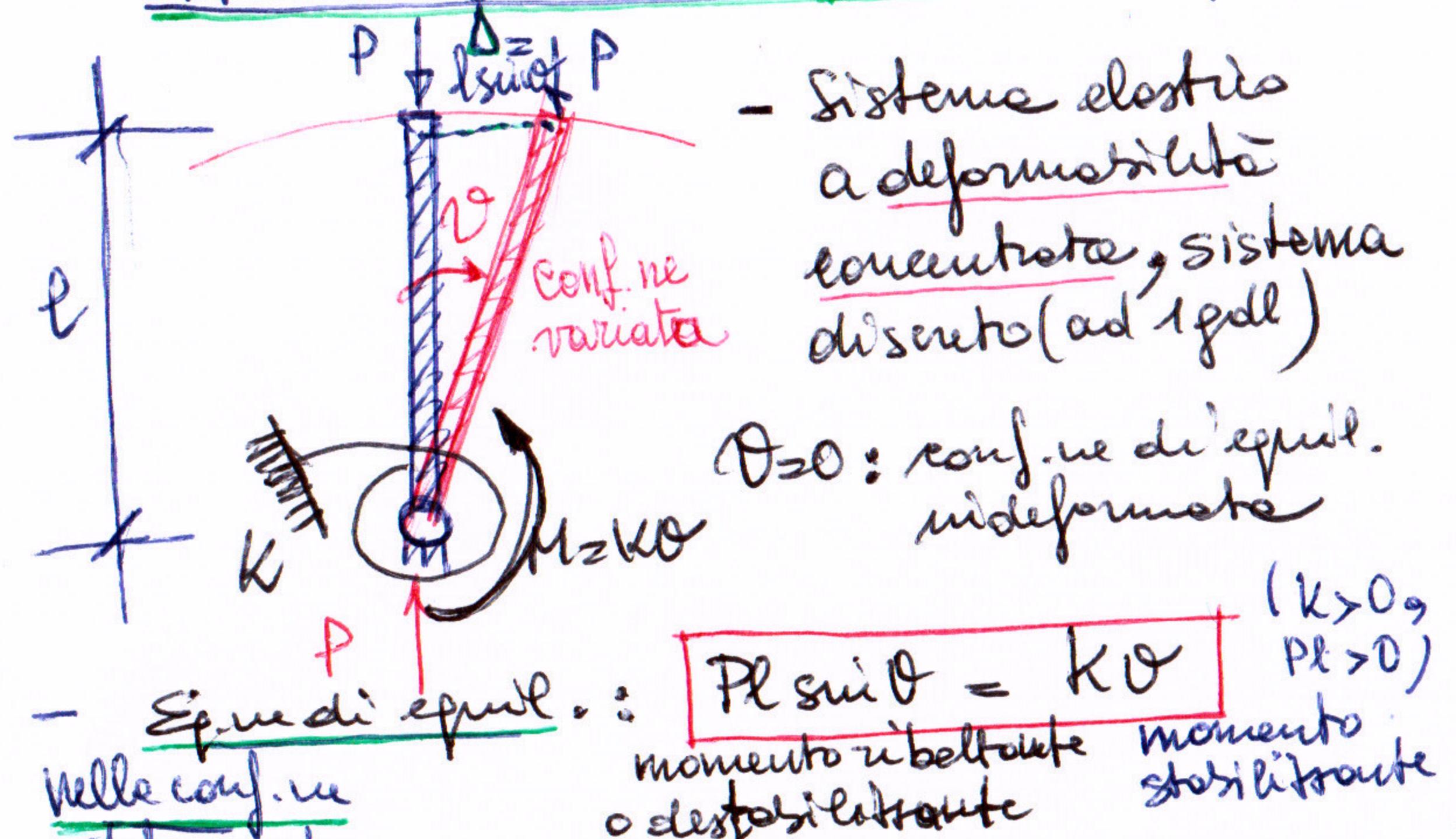


Riprendiamo l'esempio introduttivo, per il quale, secondo l'analisi di stabilità dinamica (Liapunov):  $P_{cr} = \frac{K}{\ell}$

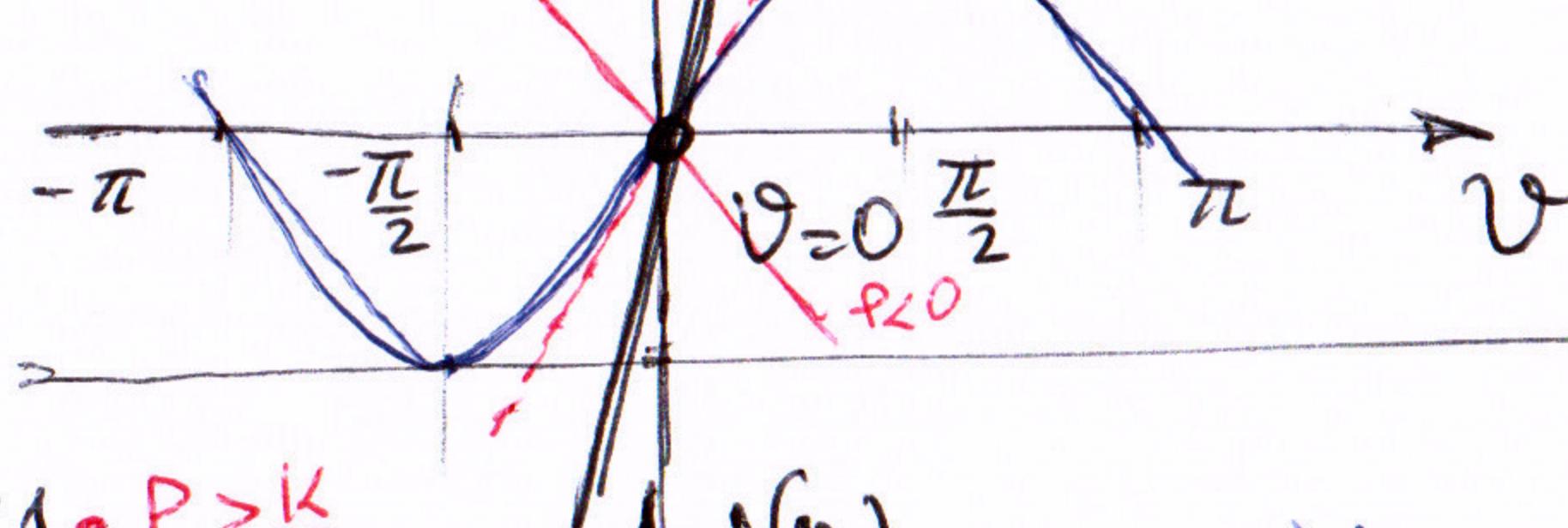
### Approccio (o metodo) statico ( $P > 0$ : compressione)



Caso 1)  $\frac{K}{P_l} > 1, P < \frac{K}{\ell}$

Unica soluz.

$\theta=0$



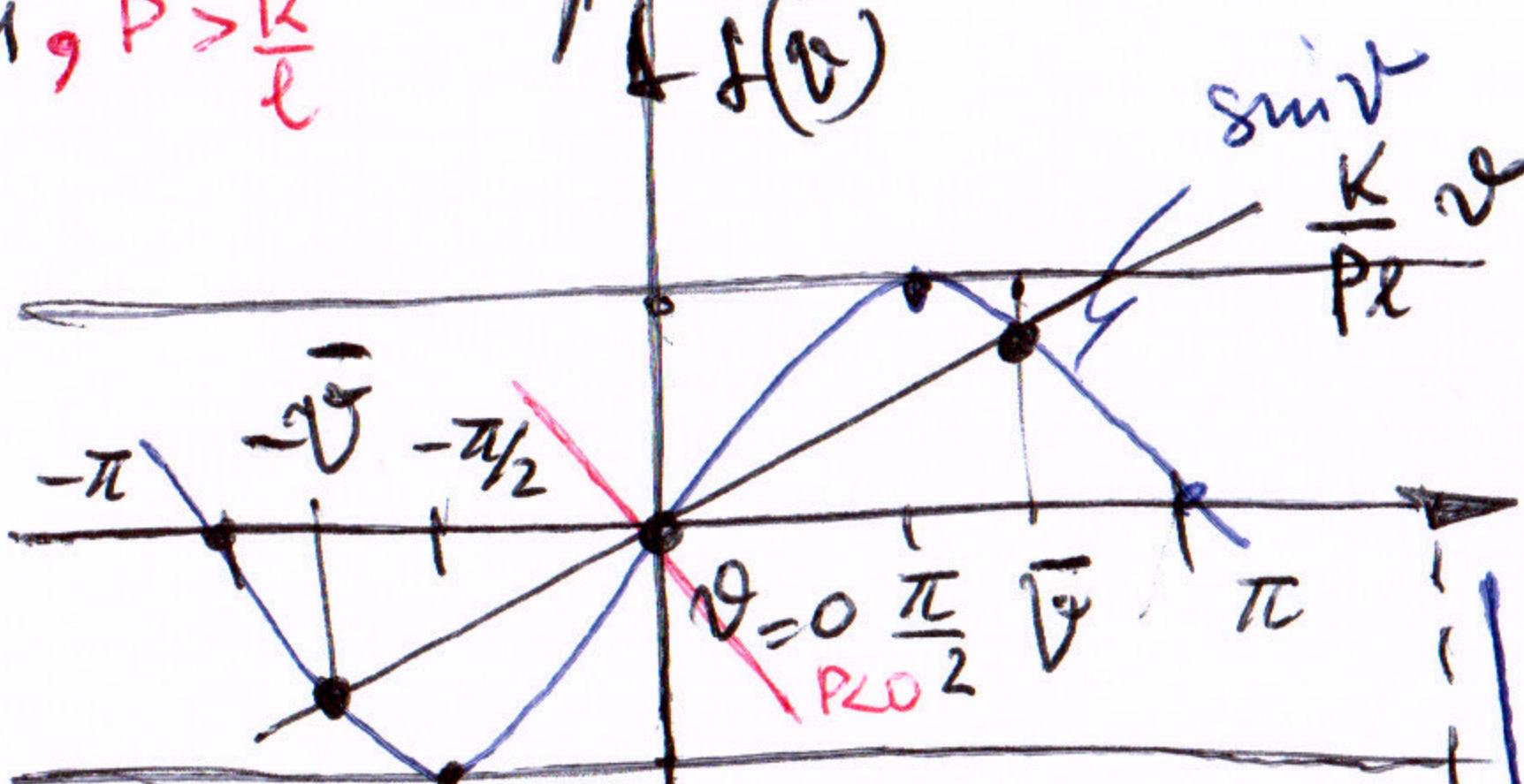
Caso 3)  $\frac{K}{P_l} < 1, P > \frac{K}{\ell}$

Soluz.:

$\theta=0 \rightarrow$

$\theta=\pm \sqrt{\frac{P}{K}}$

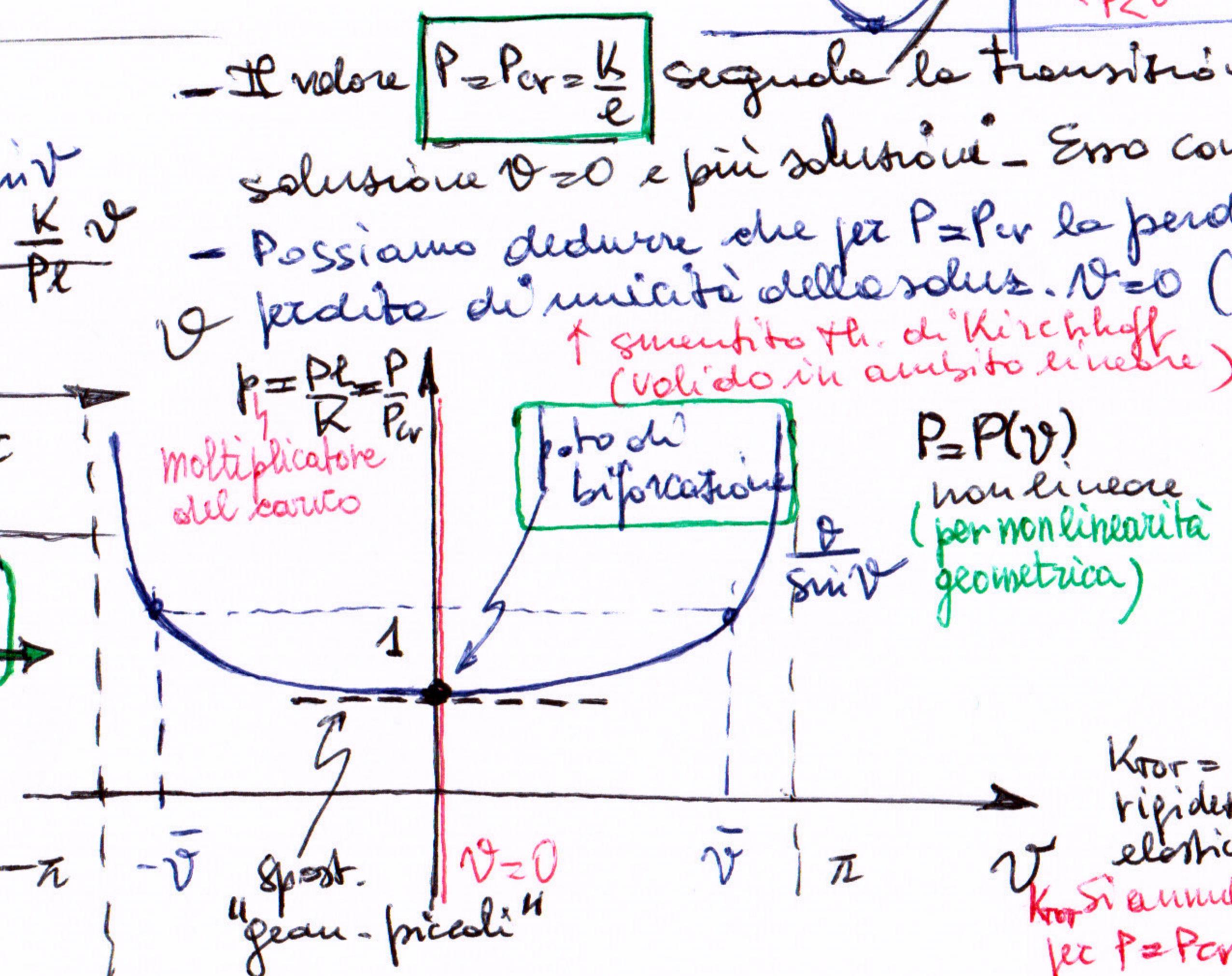
$\theta = \pm \sqrt{\frac{P}{K}} + i\omega t$



N.B.: per  $P < 0$  (tens.)

l'unica soluz. è solo  $\theta=0$  esempio

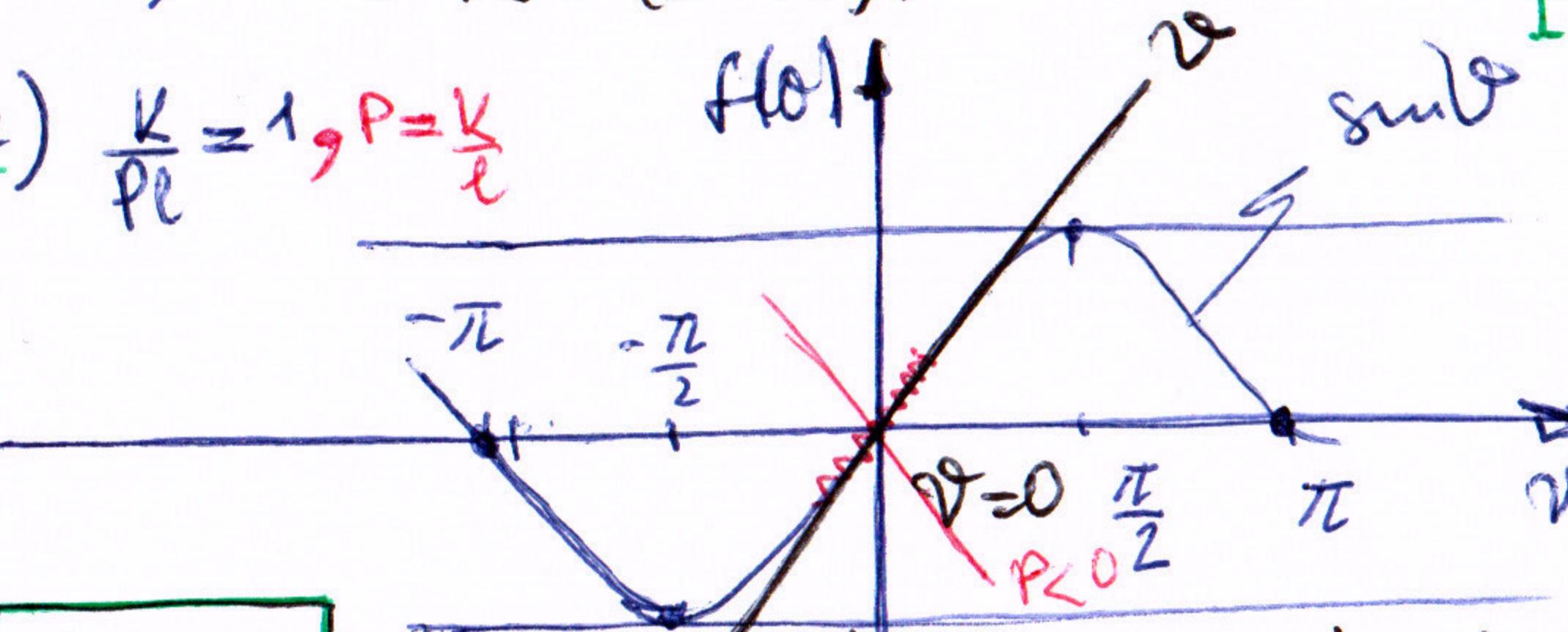
Mappa dei percorsi di equilibrio (soluzioni equilibrate)



N.B.  $\theta=0$  è certamente soluz.

- $\theta=0$  è soluz. se  $K=0$  e  $P=0$
- $P < 0$  (tens.) e  $\theta=0$  è unica soluz.

Caso 2)  $\frac{K}{P_l} = 1, P = \frac{K}{\ell}$



Altre forme:  
 $\sin \theta = \frac{K}{P_l} \theta$        $\{$  config. n. equilibrate  
 $P = \frac{P_l}{\sin \theta}$        $\{$   $\theta$  in funzione di  $P$

- soluz. nell'intorno di  $\theta=0$  ( $\theta \approx 0$  e  $\sin \theta \approx \theta$ )  
situazione di transizione o critica

- Il valore  $P=P_{cr}=\frac{K}{\ell}$  segnala la transizione tra le possibilità di avere l'unica soluzione  $\theta=0$  e più soluzioni. Ecco coincide con quanto det. con Liapunov delle config.  $\theta \neq 0$ .

- Possiamo dedurre che per  $P=P_{cr}$  la perdita di stabilità è denunciata dalla perdita di unicità della soluz.  $\theta=0$  (criterio di biforcazione per det.  $P_{cr}$ ).

$\theta = \pm \sqrt{\frac{P}{K}}$        $\uparrow$  simmetria th. di Kirchhoff (valido in ambito lineare)  
 $P = P_{cr} + P$        $\uparrow$  Multiplicatore del carico

$P = P(\theta)$   
non lineare (per non linearità geometrica)

- Il punto di biforcazione può essere rotto (quindi  $P_{cr}$ ). Anche con un'onda in spostamenti "geometricamente piccoli"

$|\theta| < 1 \rightarrow \sin \theta \approx \theta$  (linearezza dell'equazione di equil.)

$(K-P_l)\theta = 0 \quad K=P_l, \theta \text{ arb.} \rightarrow P=P_{cr}$

$K-P_l \neq 0, \theta = 0 \rightarrow P \neq P_{cr}$

$\theta = \pm \sqrt{\frac{P}{K}}$        $\uparrow$  soluz. rigidezza geometrica al sist.

$\theta = \pm \sqrt{\frac{P}{K}}$        $\uparrow$  soluz. rigidezza geometrica al sist.

## 19<sup>o</sup> Lez. FDAS

- Approccio energetico (ai pb. di stabilità dell'equilibrio)

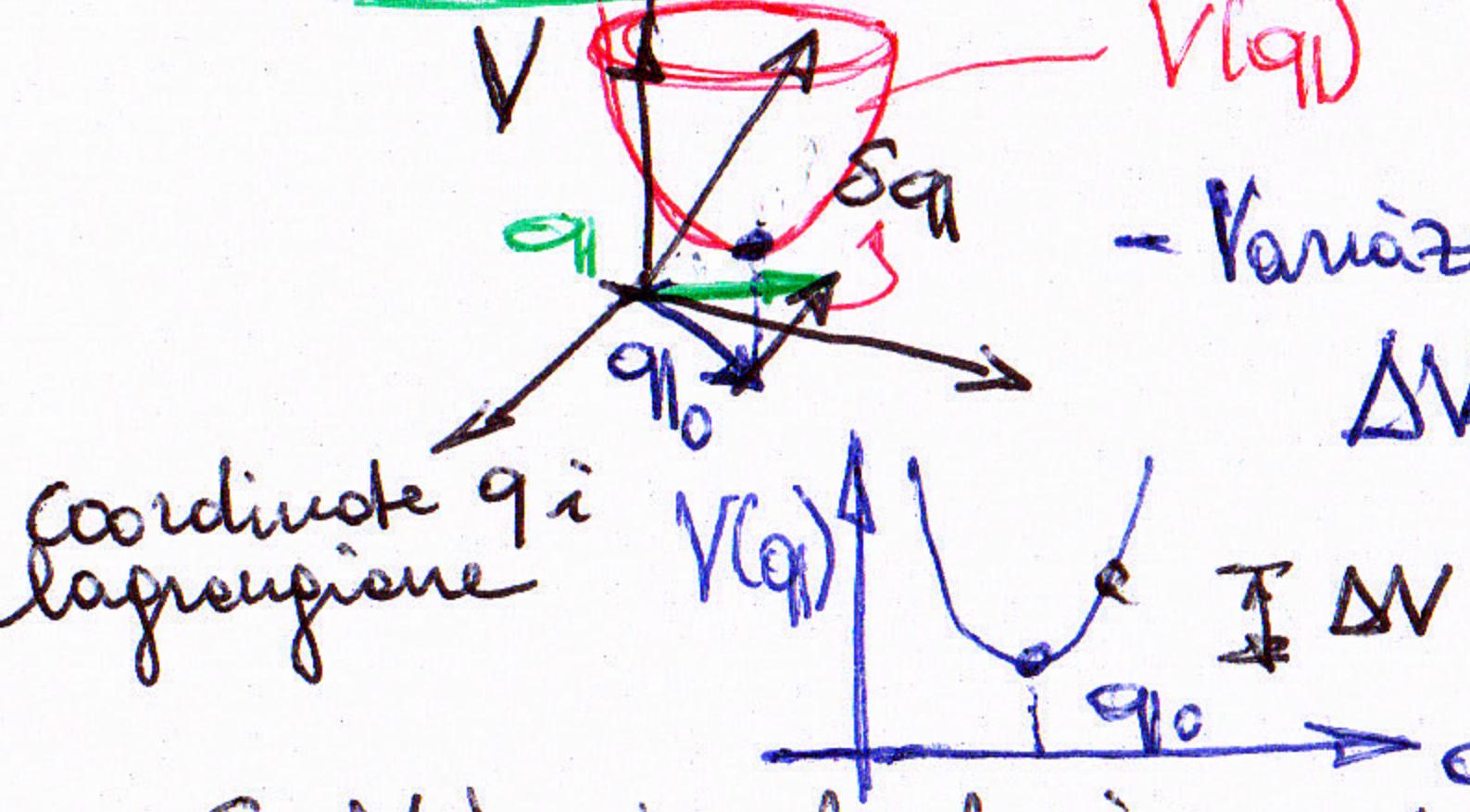
erizzi@unibg.it

- Significato di stabilità (qui pb. puramente posizionale) [Nei pb. strutturali vi è anche in gioco la deformabilità elastica del sistema]
    - $V' = 0, V'' > 0$
    - A: Stabile - Buco (min. rel.) dell'En. potenziale - In seguito a piccole perturbazioni la pallina torna nella conf. iniziale.
    - B: Indifferente - En. pot = cost - Il sistema non tende ad allontanarsi né a tornare nelle conf. di equilibrio.
    - C: Instabile - Max. rel. dell'En. pot. Una perturbazione, anche piccola, sprigiona il sistema ed abbandona tale conf. di equilibrio (per raggiungerne ev. un'altra, anche molto discosta dalla precedente).

raggiungere lo stato di equilibrio:  
Una config. di equilibrio di un sistema olonomo (retto da eq. ri finite, non differenziali), con vincoli ideali e conservativi  
e stabile se l'Energia Potenziale Totale (EPT) del sistema è minima (min. locale) CS di stabilità: qlo di equil.

$$V(q) = \text{En. pot. elastica} + \text{En. pot. dei carichi esterni conservativi}$$

Se  $V(q_0)$  è min.zel.  $\Rightarrow q_0$  stabile

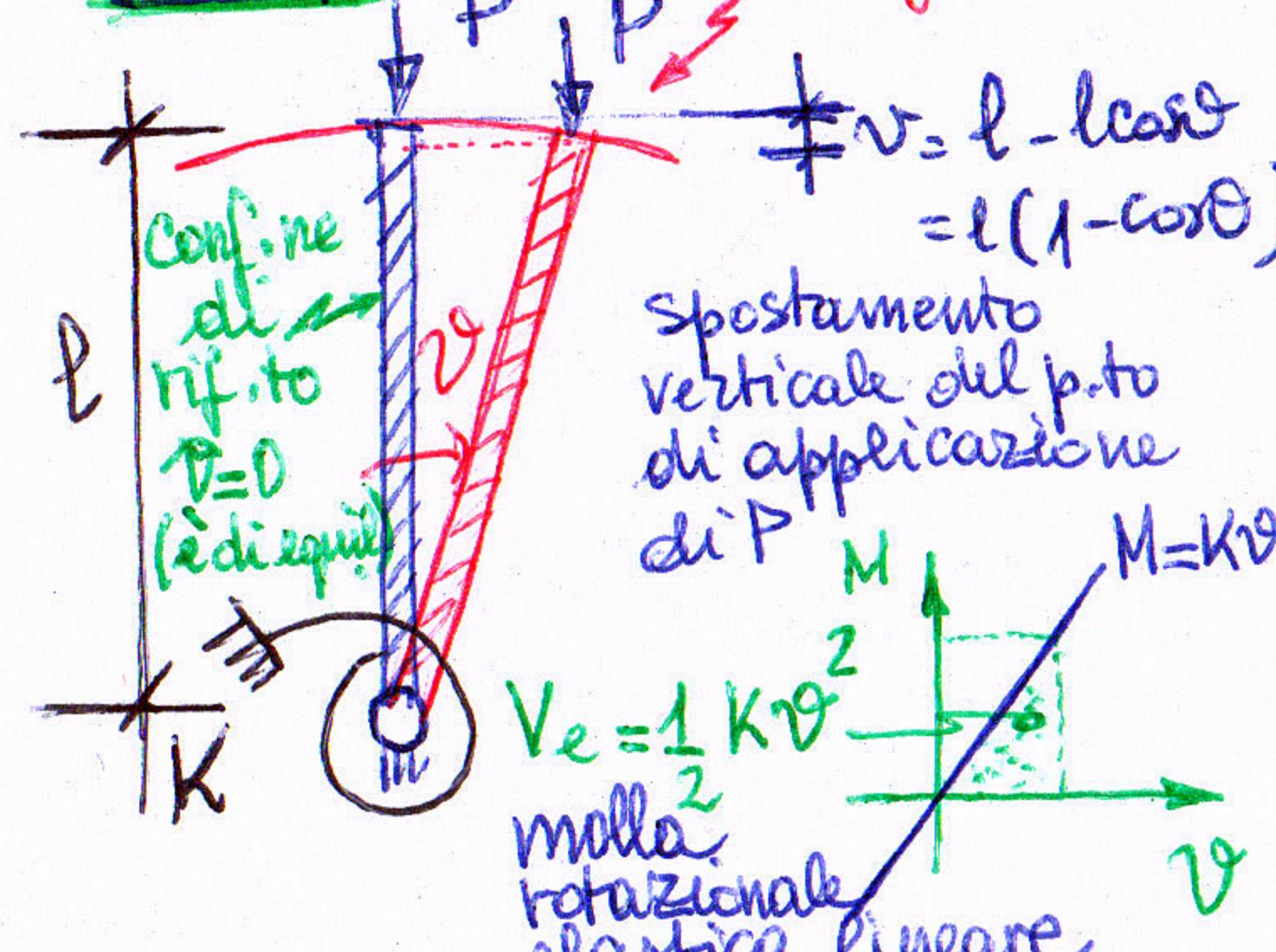


$$\Delta V = V(q) - V(q_0) = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \dots \quad \text{con} \quad \delta V = \frac{\partial V(q_0)}{\partial q_i} \quad \delta q_i = \frac{q_i - q_{i0}}{\delta q_i}$$

variaz. 2° ord.  
 prima  
 seconda  
 effetti del 2° ord.  
 sviluppo in  
 serie di 2°  
 ordine

- Se  $V$  è min. locale in  $q_0$  deve risultare  $\Delta V > 0 \wedge \delta q_i \neq 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_i}(q_0) = 0$  (poiché  $\delta V$  lineare  $\Rightarrow \delta q_i \neq 0$ , ripetessa totale  $\delta V = 0 \wedge \delta q_i \neq 0$ )   
 Infatti, necessaria per il min. è la condit. di stazionarietà: esprime che, per essere stabile, una conf. in equilibrio deve essere necessariamente di equilibrio [  $\delta V = 0$  in  $q_0$  è CN di equil. ]
  - Ora  $\delta V = 0$  (conf. in equilibrio):  $\Delta V = \frac{1}{2} \delta^2 V > 0 \wedge \delta q_i \neq 0 \Rightarrow K$  è semi-def. pos.  $\rightarrow$  lo studio delle proprietà algebriche di  $K$  si riduce se  $\alpha$  di equil. è stabile o meno  $\rightarrow$  spost. geom. piccole

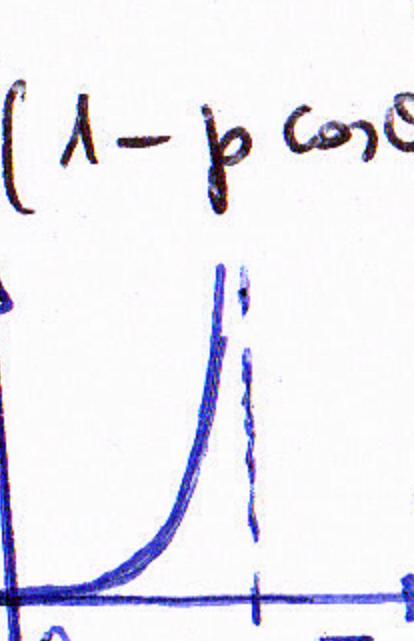
Esempio      Configurazione variata



$$V(\theta) = \frac{1}{2} K \theta^2 - P_e r = \frac{1}{2} K \theta^2 - P_e (1 - \cos \theta) \stackrel{\text{conf. ni equilibrio}}{=} K \left( \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{P_e}{K} (1 - \cos \theta) \right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = K - Pl \cos\theta = K(1 - p \cos\theta)$$

f. ne  $1 - \frac{V}{r}$   
 utile  $\frac{dV}{dr}$   
 ad indicare il  
 segno di  $V''$



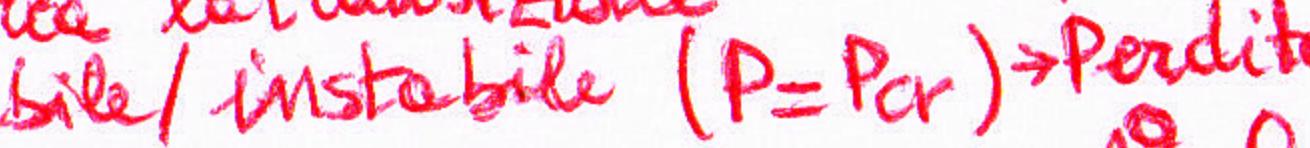
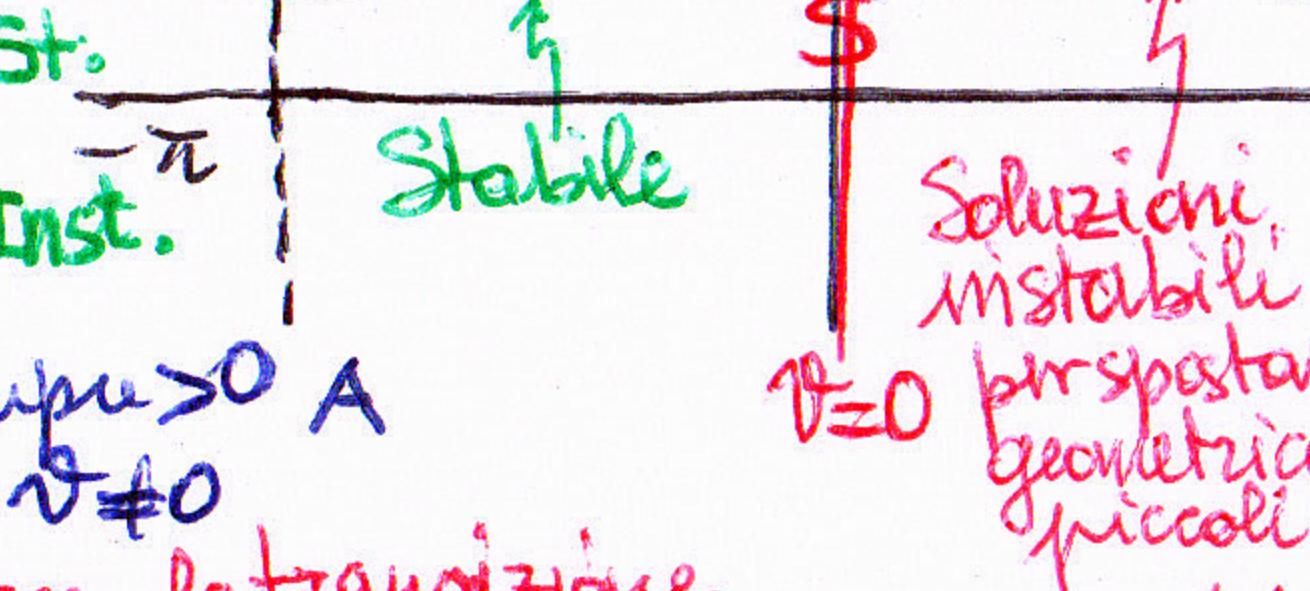
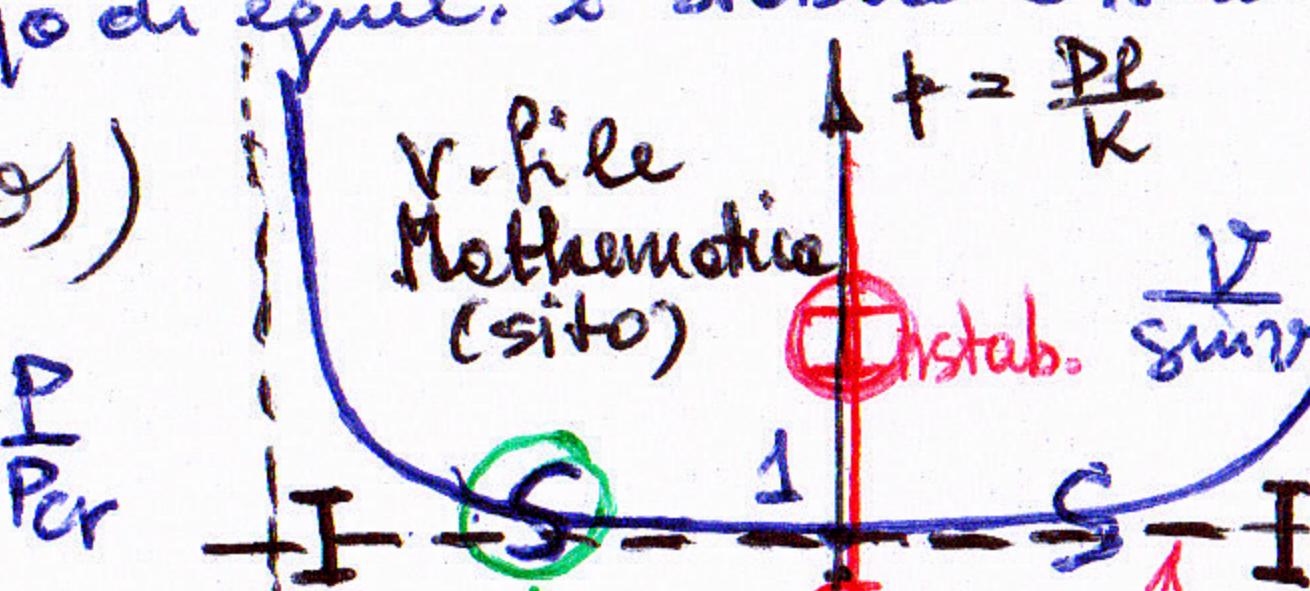
~~inf. m. expandir~~

...me trovato  
direttamente  
con l'equil.

$$x_0 \mid v=0 \rightarrow k_i$$

$$p = \frac{v}{c_{\text{eff}}} \rightarrow$$

conf. in eqn



Analisi  
per

$\rightarrow \text{Spost. geom. piccoli}$

$|V| \ll 1$

$V(\theta) \approx V_2(\theta) = \frac{1}{2} K\theta^2 +$   
 approx  
 $\frac{\partial}{\partial \theta} - PL \left( x - \left( x - \frac{\theta^2}{2} + \dots \right) \right)$   
 2° ordine  
 $= \frac{1}{2} K\theta^2 - \frac{1}{2} PL \theta^2 =$   
 $= \frac{1}{2} (K - PL)\theta^2$

---

$\pi \rightarrow \tilde{\nu}$

$V_2' = 0 \rightarrow (K - PL)\theta = 0$

$V_2'' = K - PL \begin{cases} > 0 & P < P_{cr} \\ = 0 & P = P_{cr} \\ < 0 & P > P_{cr} \end{cases}$

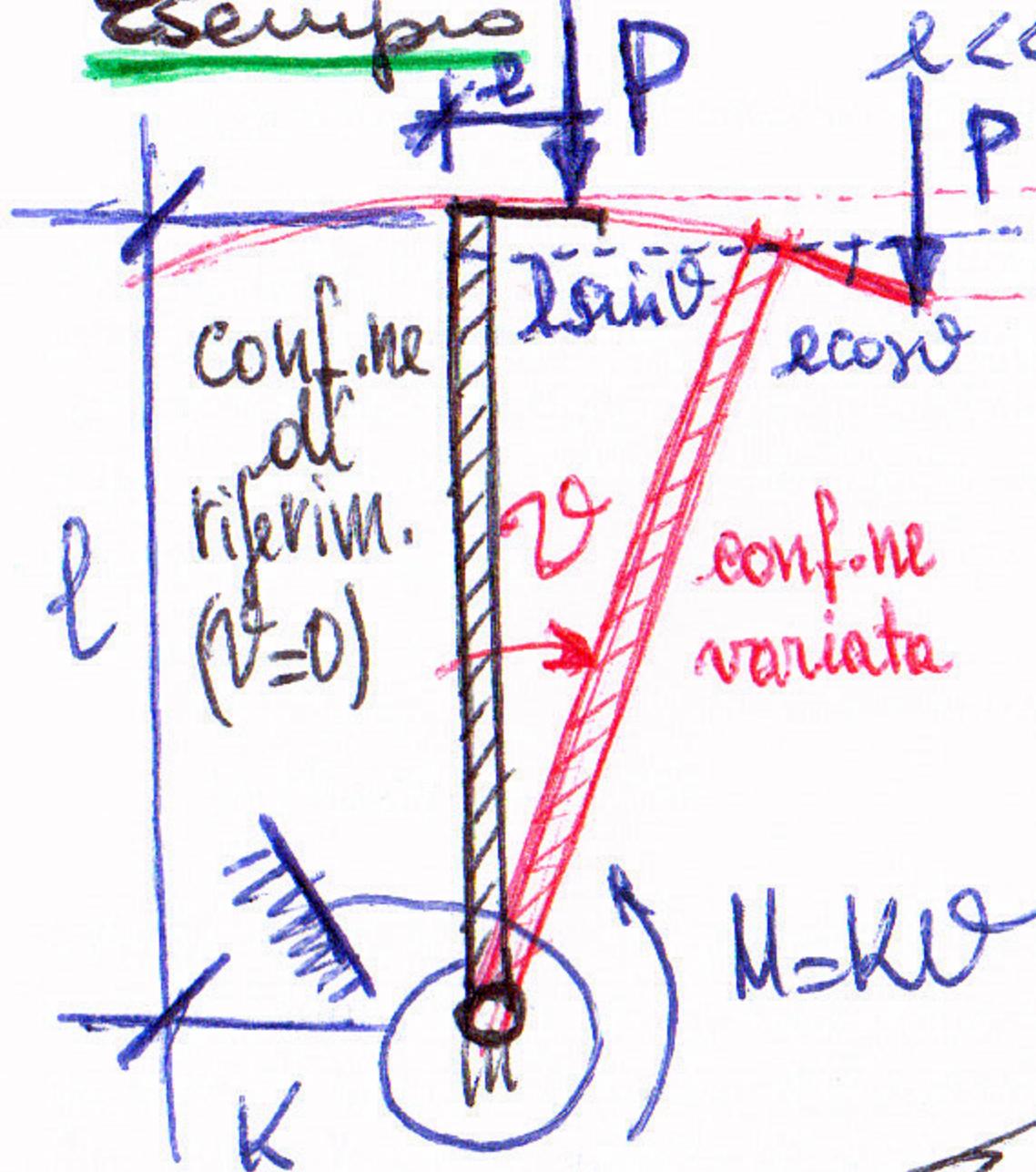
disabilità di  
consegnamento agil.

## 20<sup>a</sup> Lez. FDIS

Aste reali:

- non perf. rettilinee
- carichi eccentrici

Esempio



con  $\theta < 0$  (poti di equil. se il sist. è inviolato)

$$-\pi - \text{atan}y$$

Analisi per spostamenti

geometricamente privati (linearett. delle eq. di equilibrio).  $\sin\theta = 0$ ,  $\cos\theta = 1$  per  $|\theta| \ll 1$

$$K\theta = p\ell(\theta + y) \Rightarrow p = \frac{\theta}{\theta + y} = \frac{1}{1 + \frac{y}{\theta}}$$

anche qui si prende il p.todi biforcazione

Per il segnaleto dell'asintoto per  $\theta \rightarrow \infty$ , dove si converge vs. il percorso biforcato.

Analisi col metodo energetico:

$$\text{EPT: } V(\theta) = \frac{1}{2} K\theta^2 - P(l - l\cos\theta + \ell\sin\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{Energia Potenziale Totale} &= \frac{1}{2} K\theta^2 - P\ell(1 - \cos\theta + \ell\sin\theta) \\ &= K\left(\frac{1}{2}\theta^2 - p(1 - \cos\theta + \ell\sin\theta)\right) \end{aligned}$$

Stazionarietà:

$$V'(\theta) = K\left(\frac{1}{2}\theta - p(\sin\theta + \ell\cos\theta)\right) = 0$$

Analisi di stabilità:

$$V''(\theta) = K\left(1 - p(\cos\theta - \ell\sin\theta)\right)$$

in equi.

$$= K\left(1 - \theta \frac{\cos\theta - \ell\sin\theta}{\sin\theta + \ell\cos\theta}\right) = Kf(\theta)$$

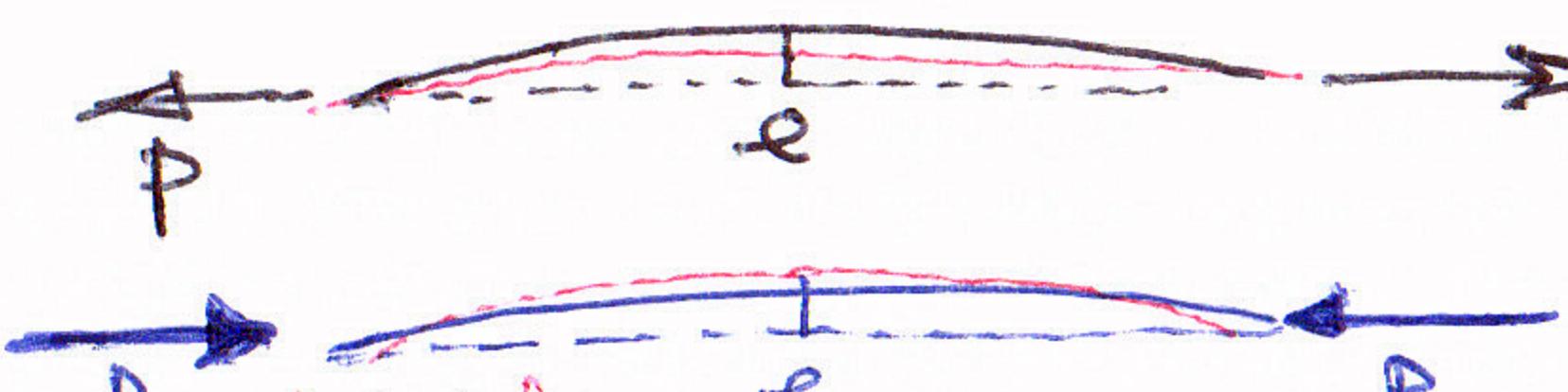
$$= K\left(1 - \theta \frac{1 - \eta \tan\theta}{\tan\theta + \eta}\right)$$

$\eta = \frac{\ell - \theta \tan\theta}{\theta + \ell \tan\theta}$

## Effetto delle imperfezioni nei sistemi reali

grizzi@unibg.it

Condizione di servizio che può essere sensibile alla presenza di imperfezioni nel sistema strutturale



frazione: riduce l'eccentricità presente

compressione: aumenta la curvatura presente

## STABILITÀ DI SISTEMI REALI

### Osservazioni

• per  $y=0$  si ritrovano le conf. ni di equil. precedenti  $p = \frac{P}{\sin\theta}$

• per  $y \neq 0$ ,  $\theta=0$  non è più conf. di equil. A p, solo per  $p=0$ .

• termini a den. nullo per:  $\tan\theta = -y \rightarrow \theta = \text{atan}(y) - \text{atan}y$  ASINTOTI  $\rightarrow \theta = \pi - \text{atan}y$ ;  $-\pi - \text{atan}y$

• scomparire il p.t. di biforcazione. Il sistema devia già dall'asse delle conf. ni di ref.  $\theta=0$ , con risposte  $P-\Delta$  non lineare (non linearità geometrica).

• inizialmente il ramo primario aderisce a quello verticale ma poi si scosta rapidamente (per  $p=1$ , cioè  $\theta = 0.628 \approx 36^\circ$ ), tendendo a ripetere circa la mappa pre-

• l'andarsì di sistemi idilli fornisce comunque per utile e definire il livello ammissibile di  $P$ , tramite opportuni fattori di sicurezza, in relazione all'entità dell'imperfezione e allo scostamento tollerato delle conf. ni di riferimento  $\theta=0$ .

Analisi energetica per piccoli spost.

Linearizz. dell'equil.  $\Rightarrow$  Forma quadratica di EPT:

$$V(\theta) \approx V_2(\theta) = \frac{1}{2} K\theta^2 - P\ell(1 - \theta + \frac{1}{2}\theta^2 + \eta\theta) = \frac{1}{2} K\theta^2 - P\ell(\frac{1}{2}\theta^2 + \eta\theta)$$

$$V'_2(\theta) = K\theta - P\ell(\theta + \eta) = 0 \Rightarrow p = \frac{\theta}{\theta + \eta} = \frac{1}{1 + \eta/\theta} \text{ OK!}$$

$$V''_2(\theta) = K - P\ell \stackrel{> 0}{=} 0 \quad p=1 \quad \text{come già det. per il sistema}$$

$$\stackrel{< 0}{=} p>1 \quad \text{sens. a impresezioni}$$

è lo stesso che fornisce le staz. dell'asse secondario  $p(\theta)=0$

$$\theta - \eta = (\theta + \eta)\tan\theta$$

$$\eta = \frac{\theta - \tan\theta}{1 + \theta \tan\theta}$$

$$\tan\theta + \eta \theta = \theta - \eta$$

$$\tan\theta(1 + \eta\theta) = \theta - \eta$$

Staz. di  $p(\theta)$ :  $p(\theta) = \frac{\sin\theta + \eta\cos\theta - \theta(\cos\theta - \ell\sin\theta)}{(\sin\theta + \eta\cos\theta)^2} = 0$

$$\tan\theta + \eta = \theta(1 - \eta + \tan\theta)$$

$$\tan\theta + \eta\theta + \eta\tan\theta = \theta - \eta$$

$$\tan\theta(1 + \eta\theta) = \theta - \eta$$

fornisce il p.t. di stazionarietà del ramo secondario (di interesse più accademico che pratico).