Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

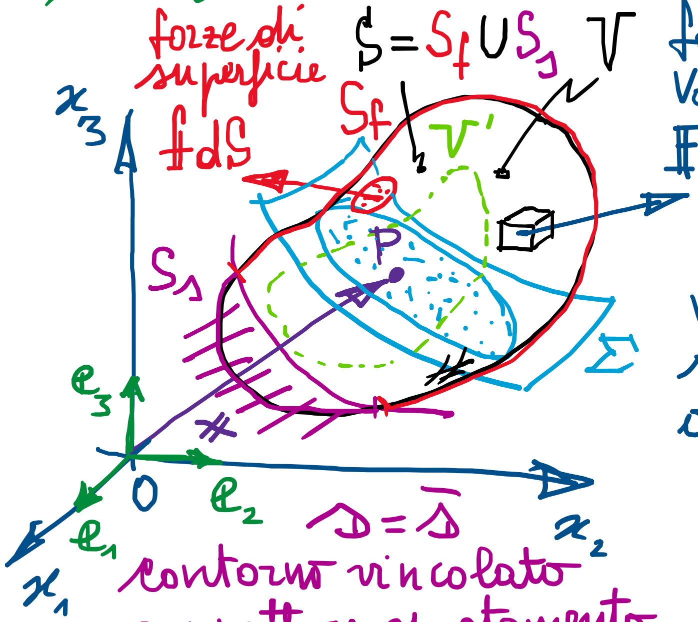
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

II Meccanica dei Solidi (o dei mezzi continui) $\Rightarrow \forall P \in V$ punto materiale

Statica dei continui: analisi dello stato di sforzo o tensione

$S = S_f \cup S_s$



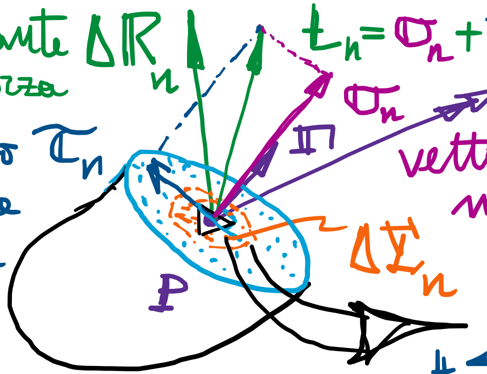
$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}}$ contorno vincolato

$\mathbf{s}$: vettore spostamento

versore normale locale in P

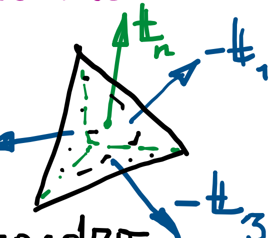
$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}, \quad n_i = \cos \widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_i} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$$

coseni direttori



$\mathbf{t}_{-n}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$

- $\displaystyle\lim_{\Delta \Sigma_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_n}{\Delta \Sigma_n} = \mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ vettore sforzo di Cauchy
- $\displaystyle\lim_{\Delta \Sigma_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta \Sigma_n} = \mathbf{0}$ (continuo non polare di Cauchy)



$d\Sigma_i = n_i \, d\Sigma_n$ tetraedro di Cauchy

Relazione di Cauchy (~1822)

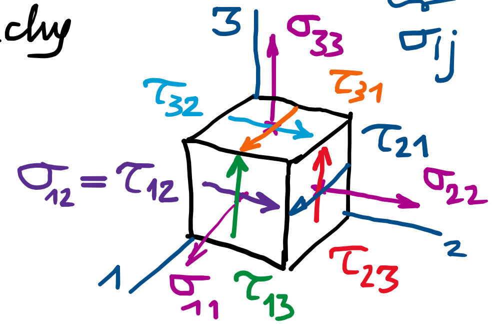
eq. di equil. alla traslazione

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbf{t}_i n_i$$

$$\Updownarrow$$

$$t_{nj} = \underbrace{t_{ij}}_{\sigma_{ij}} n_i \iff \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}^{(T)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

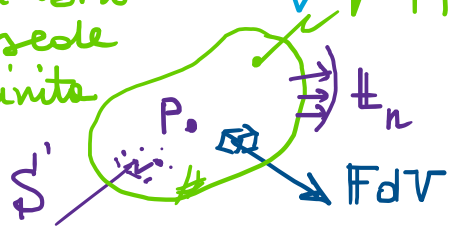
$\boldsymbol{\sigma}$ tensore sforzo di Cauchy



significato fisico delle comp.ti di sforzo σ_{ij}

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Equilibrio in sede indefinita $\forall V' \cap V$



Equil. alla traslazione:

$$\int_{V'} \mathbf{F}\,dV + \int_{S'} \underbrace{\mathbf{t}_n}_{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\,dS = \mathbf{0}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

Th. div.

$$\int_{V'} \mathbf{F}\,dV + \int_{V'} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\,dV = \mathbf{0}$$

$$\int_{V'} (\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})\,dV = \mathbf{0}, \ \forall V'$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ in } V} \quad (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{F})$$

equil. alla rotazione: tensore doppio simmetrico

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \iff \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$

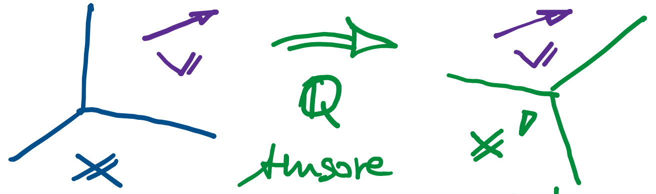
Teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{g}\,dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}\,dS$$

$\mathbf{g}$: campo tensoriale (es. g_{ij})

$$\underbrace{\operatorname{div}}_{\text{divergenza}} = \nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \qquad (\nabla: \text{gradiente})$$

• Trasformazione delle componenti al variare del sistema di riferimento



tensore ortogonale del 2° ord.

sistema ruotato

$$\boxed{\{v\}' = [\mathbb{Q}]\cdot\{v\}} \iff v'_i = Q_{ij}\, v_j \qquad \left(\{v\} = \overset{[\mathbb{Q}]^T}{[\mathbb{Q}]^{-1}}\{v\}'\right)$$

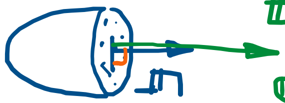
$$\mathbb{Q}^T\cdot\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$$

tensore identità del 2° ordine $[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$, $I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ Kronecker

$$Q_{ji}\,Q_{jk} = Q_{ij}\,Q_{kj} = \delta_{ik} \qquad (tr\,\mathbb{I} = 3)$$

$$\{t_n\}' = [\mathbb{Q}]\cdot\{t_n\}$$
$$= [\mathbb{Q}]\cdot[\sigma^T]\cdot\{n\}$$
$$= \underbrace{[\mathbb{Q}]\cdot[\sigma^T]\cdot[\mathbb{Q}]^T}_{[\sigma^T]'}\cdot\{n\}' = [\sigma^T]'\cdot\{n\}' \Rightarrow \boxed{[\sigma]' = [\mathbb{Q}]\cdot[\sigma]\cdot[\mathbb{Q}^T]} \iff \sigma'_{ij} = Q_{ik}\,\sigma_{kl}\,Q_{jl}$$

• Tensioni principali $(\tau_n = 0)$



direz. principale di sforzo

$$\underline{t}_n = \sigma^T\cdot\underline{n}, \quad \underline{\sigma}_n = \sigma_n\,\underline{n} \quad \Big\rangle \quad \sigma\cdot\underline{n} = \sigma_n\,\underline{n} \iff (\sigma - \sigma_n\,\mathbb{I})\cdot\underline{n} = \underline{0}$$

autovalori, autovettori

pb. agli autovalori associato a σ

$(\underline{n} \neq \underline{0})$ Soluz. non banali sse:

eq.ne caratteristica

$$-\det(\sigma - \sigma_n\mathbb{I}) = +\sigma_n^3 - I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n - I_3 = 0 \Rightarrow \text{3 radici } \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$$

INVARIANTI

primo $I_1 = tr\,\sigma = \sigma_{ii}$

secondo $I_2 = \frac{1}{2}\left(tr\,\sigma^2 - tr^2\sigma\right)$ $\quad \sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3\mathbb{I} = \mathbb{0}$

terzo $I_3 = \det\sigma = \frac{1}{3}tr\,\sigma^3 - \frac{1}{2}tr\,\sigma\left(tr\,\sigma^2 - \frac{1}{3}tr^2\sigma\right)$

da Th. di Cayley_Hamilton

L'operatore traccia è invariante:

$$tr[\sigma]' = Q_{ik}\,\sigma_{kl}\,Q_{il} = Q^T_{ki}\,Q_{il}\,\sigma_{kl} = \delta_{kl}\,\sigma_{kl} = \sigma_{kk}$$
$$= tr[\sigma]$$

Componenti volumetrica e deviatorica:

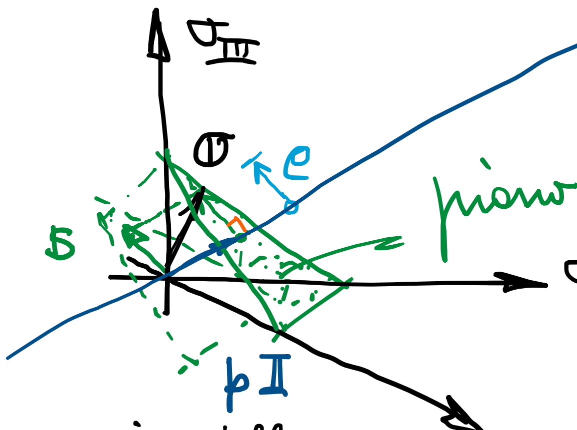
$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D$$

$$= p\,\mathbb{I} + s \Rightarrow s = \sigma - \underbrace{\frac{tr\,\sigma}{3}}_{\frac{I_1}{3}}\,\mathbb{I}$$

tensione media $p = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$

deviatore di sforzo

$$\left(tr\,s = tr\,\sigma - \frac{tr\,\sigma}{\cancel{3}}\,\cancel{3} \equiv 0\right)$$



spazio delle tensioni principali

Problemi agli autovalori:

$\sigma_V \cdot n = \sigma_V\, n$ autoval. p

$p\,\mathbb{I} \cdot n = p\, n$ autovett. n arbitrari

$s \cdot n = s_n\, n$

"shiftati" di p

$\underbrace{\sigma_n}$ autoval. $s_n = \sigma_n - p$

$(\sigma - p\mathbb{I})\cdot n = \sigma\cdot n - p\,n = s\,n \Rightarrow \sigma\cdot n = (p+s)\,n$ autovet. n stessi

$s^3 - \cancel{I_1 s^2} - J_2\, s - J_3 = 0$ (eq. ne in forma depressa)

Invarianti del deviatore:

$$\begin{cases} J_1 \equiv tr\,s \equiv 0 \\ J_2 = \frac{1}{2}\,tr\,s^2 \\ J_3 = \frac{1}{3}\,tr\,s^3 \end{cases}$$

ove
$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2 \\ J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1 \left(\frac{2}{9} I_1^2 + I_2\right) \end{cases}$$

relazioni tra invarianti J_i e I_i

Si cerca soluz. nella forma: $s_i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\,\cos\alpha_i = \dfrac{2}{3}\underbrace{\sqrt{3J_2}}_{\sigma_{eq}^{vM}}\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\underbrace{\sqrt{2J_2}}_{e}\,\cos\alpha$

Sostituendo: $\dfrac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2}\cos^3\alpha - J_2\,\dfrac{2\cdot 3}{3\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\,\cos\alpha = J_3$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2} \underbrace{\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)}_{\cos 3\alpha} = J_3 \Rightarrow \boxed{\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{J_3}{J_2^{3/2}}}$$

$$\sigma_i = p + s_i \leftarrow s_i \leftarrow \alpha_i : \begin{cases} 0 \le \alpha_1 = \frac{1}{3}\arccos \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \le \frac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Comportamento e resistenza dei materiali:

- Elastico: disaccoppiamento di risposta elastica isotropa volumetrica e deviatorica:

$p = K\,\vartheta$ (deformazione volumetrica) ; $s = 2G\,e$ (deviatore di deformaz.)

$K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di Volume

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

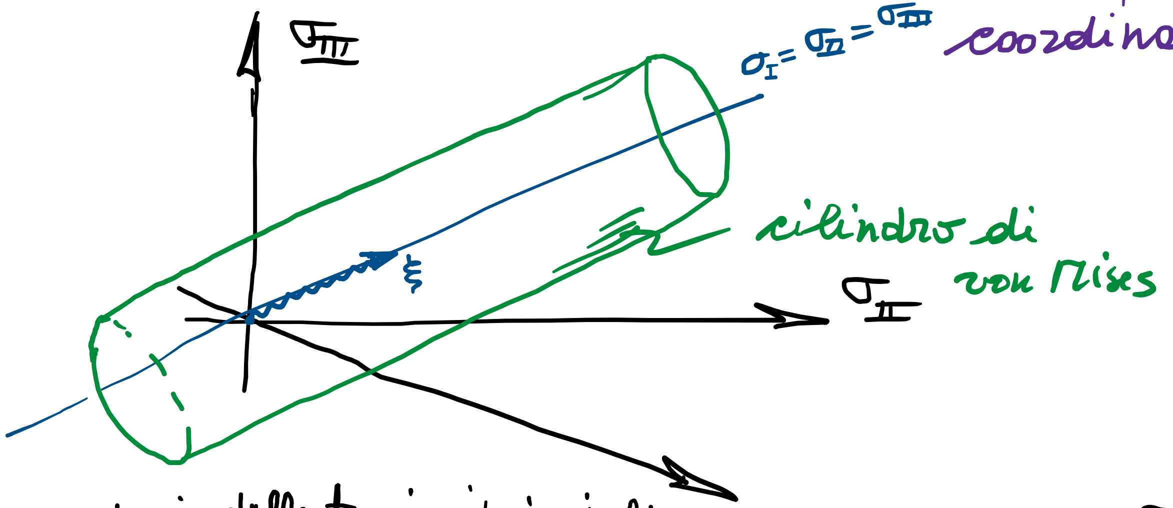
E : modulo di elasticità longitudinale o di Young

ν : coeff. di contrazione trasversale o di Poisson

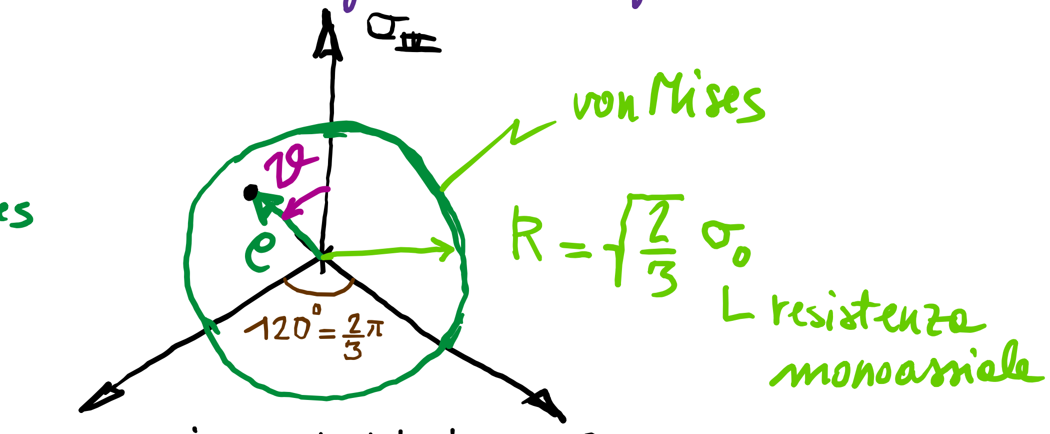
- Plastico: risposta oltre il campo elastico per diversi materiali (metallici $, lapidei) → Teoria della Plasticità
  p, $

funzione di snervamento: $f(\sigma) = f\left(\xi = \dfrac{\overbrace{\operatorname{tr}\sigma}^{I_1}}{\sqrt{3}},\ \rho = \sqrt{2J_2},\ \vartheta = \alpha\right)$ (ϑ ← J_3)

coordinate di Haigh - Westergaard



spazio delle tensioni principali



piano deviatorico