

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

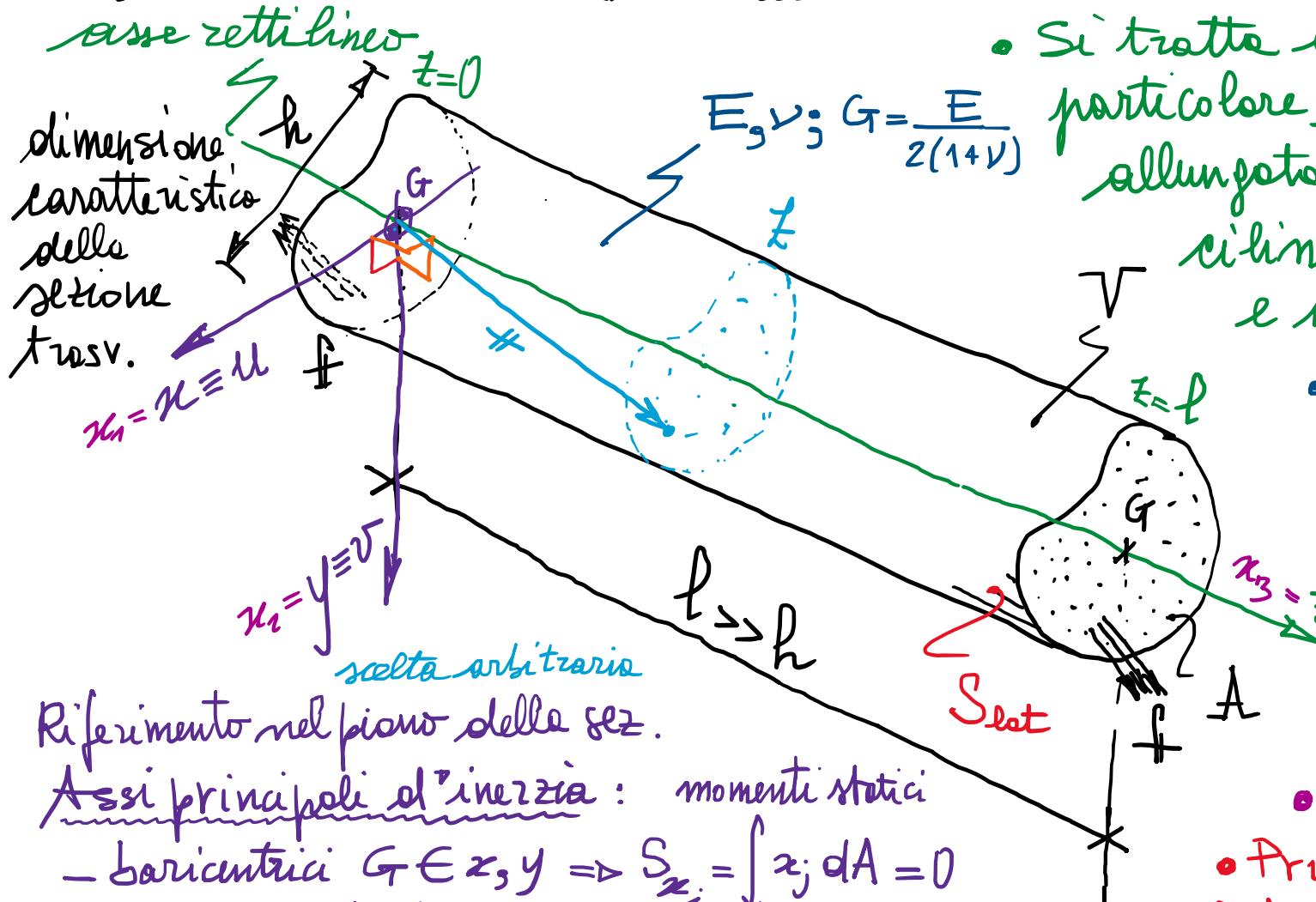
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problema di de Saint Venant (~1855) - Ipotesi e definizioni:

Casi di DSV:
 N, T, M, M_t



Riferimento nel piano delle sez.

Aksi principoli d'inerzia: momenti statici

$$- \text{baricentri } G \in x, y \Rightarrow S_{x_i} = \int_A x_i dA = 0$$

- mutuamente \perp

$$- \text{coniugati} \Leftrightarrow J_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

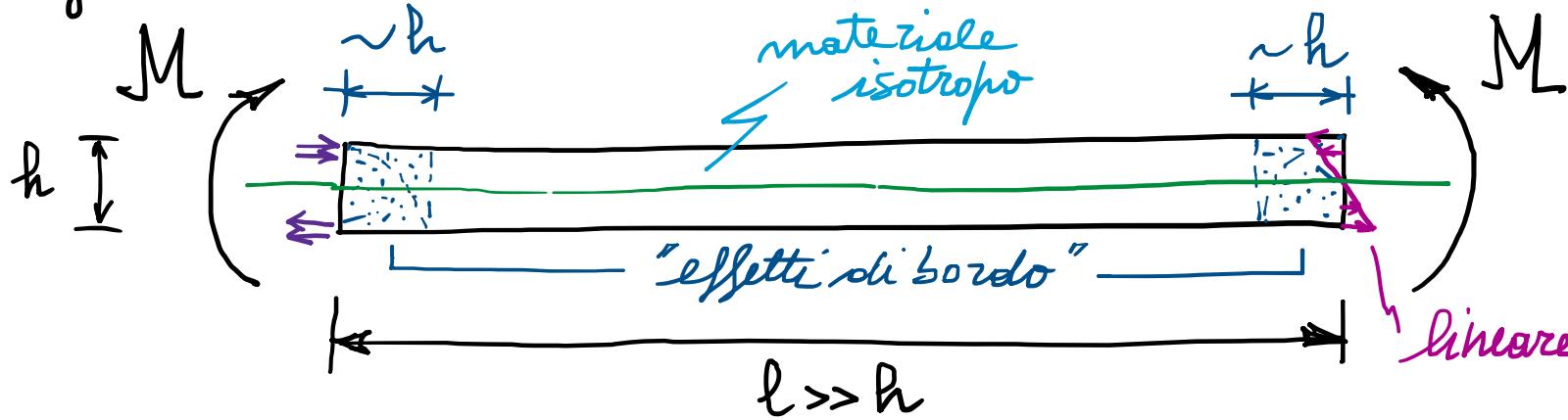
(v. es. Belluzzi) momento d'inerzia centrifugo

- Si tratta di un problema elastico lineare particolare, riguardante un solido di forme allungate ($l > h$, $l > 10h$), "tipo trave", cilindrico, a sezione costante di area A e asse rettilineo.
- Composto da materiale elastico lineare isotropo, omogeneo: $E, \nu; G$ costanti in $\forall \in V$.
- Privo di vincoli esterni ($S_j = \emptyset$) (spostamenti noti a meno di moti rigidì).
- Privo di forze di volume ($F = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ($f = 0$ su S_{let}).
- Soggetto a sole forze di superficie f agenti sulle basi, note in termini di risultanti e tali da formare un sistema autoequilibrato.

Postulato di DSV :

- La reale distribuzione (non assegnate) delle forze di superficie sulle basi, a parità di risultanti, risulta influente ai fini della risoluzione della risposta tenso-deformativa all'interno del prisma di DSV.

es. :
caso
di
DSV
delle
flessione

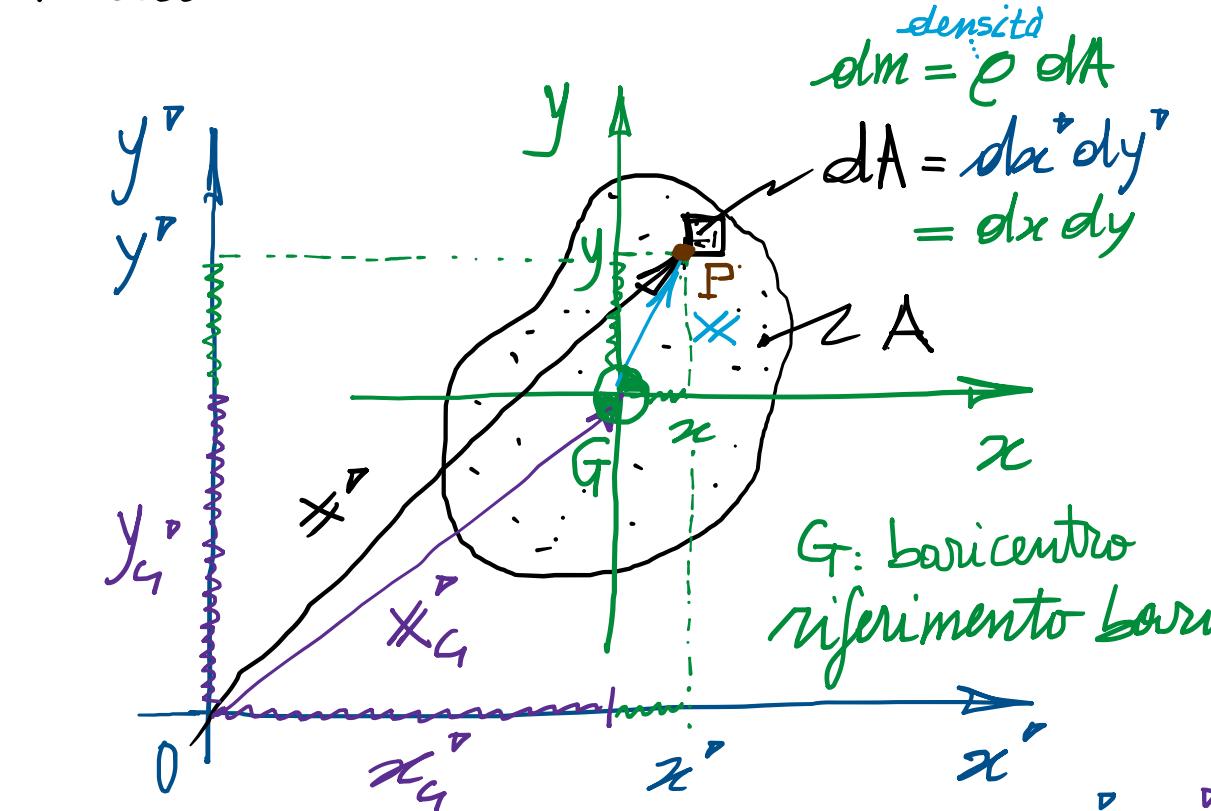


distribuz. f.a. in "eccesso"
risultante nulla
rispetto alle
distribuz. in soluz.

distribuz. f.a.
risultante nulla
potremmo creare
"effetti di bordo"
localizzati ma
sforzo nullo in quasi
tutto il solido

- Ciò appare lecito, in quasi tutto il prisma, a meno di possibili "effetti di bordo" localizzati in corrispondenza delle basi (sezioni compatte).
- In pratica si potrebbe ipotizzare di applicare le forze di superficie sulle basi secondo le distribuzioni (necognite) previste dalla soluzione del problema stesso, in termini di sforzo.

Riciami sulla geometria delle aree (o delle masse) \rightarrow v. es. Belluzzi.



$$\frac{r}{\overline{PO}} = \|\mathbf{x}\|$$

riferimento generico

$$\frac{r}{\overline{PG}} = \|\mathbf{x}\|$$

(non baricentrico)

- Si definiscono le proprietà geometriche della sezione trasversale seguenti.

Trasformazione di coordinate
per traslazione d'assi :

$$\begin{cases} x' = x_G + x \\ y' = y_G + y \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_G + \mathbf{x}$$

vettoriale

componenti

$$\begin{cases} x = -x_G + x' = x' - x_G \\ y = -y_G + y' = y' - y_G \end{cases}$$

trasformazione inversa

$$A = \int_A \frac{1}{d} dA > 0 [L]^2$$

Area della sezione [trasversale] (momento di ordine 0) d'inerzia

$$S_{x'} = \int_A y' dA \geq 0 [L]$$

Momento "statico" della sezione
rispetto all'asse x' e all'asse y' (momenti di ordine 1)

$$S_{y'} = \int_A x' dA = 0 \text{ per assi baricentrici}$$

$$\begin{cases} S_{x'} = A y_G \\ S_{y'} = A x_G \end{cases} \Rightarrow x_G = \frac{S_{y'}}{A}; y_G = \frac{S_{x'}}{A}$$

(Baricentro G è il luogo degli assi con $S=0$)

$$I_{x'} = J_{x'} = \int_A y'^2 dA > 0$$

Momento d'inerzia della sezione

$$I_{y'} = J_{y'} = \int_A x'^2 dA > 0 [L]$$

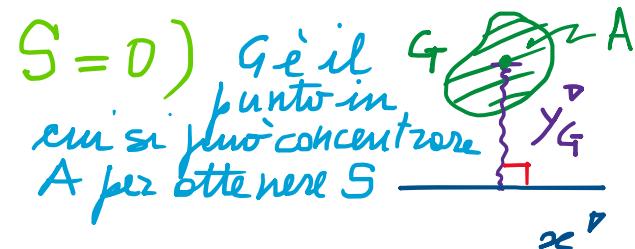
rispetto all'asse x' e all'asse y' (momenti di ordine 2)

$$I_{xy} = J_{xy} = \int_A x' y' dA \geq 0$$

centrifugo rispetto agli assi x', y'
per assi coniugati

$$I_0 = J_0 = \int_A r'^2 dA = \int_A (x'^2 + y'^2) dA = J_{x'} + J_{y'} > 0$$

polare rispetto a 0



Teorema di trasposizione (per traslazione d'assi baricentrici e non)

Huygens - Steiner

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}} &= \int_A \vec{x} \vec{y} dA = \int_A (\vec{x}_G + \vec{x})(\vec{y}_G + \vec{y}) dA \\
 &= \int_A \vec{x}_G \vec{y}_G dA + \int_A \vec{x} \vec{y} dA + \int_A \vec{x}_G \vec{y} dA + \int_A \vec{y}_G \vec{x} dA \\
 &= \vec{x}_G \vec{y}_G A + \mathbb{J}_{xy} + \cancel{\vec{x}_G \vec{x}} + \cancel{\vec{y}_G \vec{y}}
 \end{aligned}$$

se x, y assi
 baricentrici
 $(G \in x, y)$

Pertanto : $\mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}} = \mathbb{J}_{xy} + A \vec{x}_G \vec{y}_G^2$

$$\mathbb{J}_x = \mathbb{J}_x + A \vec{y}_G^2$$

analogamente :

$$\mathbb{J}_y = \mathbb{J}_y + A \vec{x}_G^2$$

$$\mathbb{J}_0 = \mathbb{J}_G + A \vec{r}_G^2$$

trasf. da assi baricentrici a non baric.

$$\mathbb{J}_{xy} = \mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}} - A \vec{x}_G \vec{y}_G^2$$

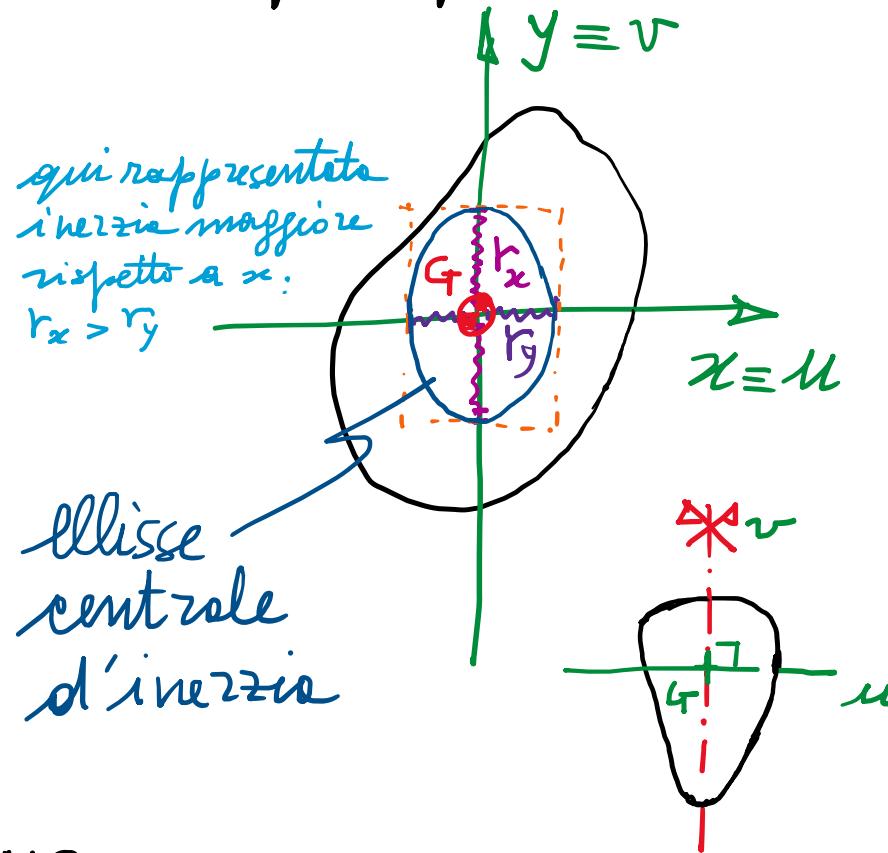
$$\mathbb{J}_x = \mathbb{J}_{\vec{x}} - A \vec{y}_G^2$$

$$\mathbb{J}_y = \mathbb{J}_{\vec{y}} - A \vec{x}_G^2$$

$$\mathbb{J}_G = \mathbb{J}_0 - A \vec{r}_G^2$$

trasf. da assi non baricentrici a assi baric.

Assi principali d'inerzia $J_{xy} = J_{uv} = 0$ (assi ^{CNS.} componibili) (in generale che determina per rotazione d'assi)



N.B.: Se \exists asse di simmetria retta, esso è asse principale d'inerzia, e l'altro asse è quello baricentrico ed esso perpendicolare.

asse di sim. \Rightarrow asse principale

J_u e J_v risultano il max e il min momento d'inerzia al variare di tutte le giri attorno nel piano (rotazione d'assi).

Raggi giratori d'inerzia:

$$r_x = r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} ; \quad r_y = r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad [L]$$

Ellisse centrale d'inerzia delle sezioni:

$$\left(\frac{x}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x}\right)^2 = 1$$

$$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}} \approx \frac{6h}{2} \quad A = b \cdot h$$

es.: sezione rettangolare

$$r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

Spesso figure composte
de aree elementari A_i :

$$A = \sum_i A_i$$

$$J_x = \frac{1}{3} b h^3; \quad J_x = \frac{1}{12} b h^3$$