

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

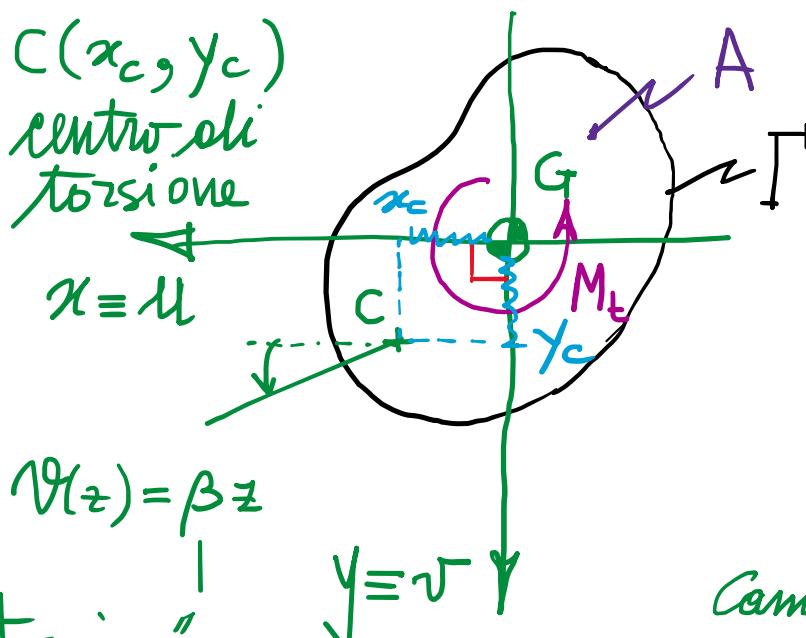
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Centro di torsione

Nell'approccio agli spostamenti si presume un campo di spostamenti ricomprensente:

- una rotazione rigida nel piano della sezione (rispetto a punto C, detto centro di torsione, in generale discosto dal bari centro G);
- un ingobbamento fuori piano della sezione, riferibile a tale punto:



Campo di spostamenti ($x_c \neq 0, y_c \neq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_x = -\beta z (y - y_c) \\ \delta_y = \beta z (x - x_c) \end{array} \right\} \text{rotazione rigida rispetto a } C$$

$$\delta_z = \beta \Psi_c(x, y) \quad \text{funzione di ingobbamento}$$

riferito a C
definite a
muro di comp.
rototraslatorie

fuori piano

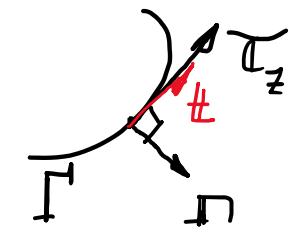
Campo delle tens. tangenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{zx} = G \beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ T_{zy} = G \beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{array} \right. \begin{array}{l} 2G\beta = c \\ -\text{Eq. di congr.} \checkmark \\ -\text{Eq. di equil.} \Rightarrow \nabla^2 \Psi_c = 0 \text{ in A} \\ \text{eq. di Laplace} \end{array}$$

Condizione al contorno:

$$\bar{\tau}_z \cdot \mathbf{n} = \bar{\tau}_{zx} n_x + \bar{\tau}_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$= G\beta \left[(\psi_{c,z} - y + y_c) n_x + (\psi_{c,y} + x - x_c) n_y \right] = 0$$



$$\underbrace{\psi_{c,x} n_x + \psi_{c,y} n_y}_{\text{derivate direzionale } \psi_{c,n}} + y_c \frac{\partial n_x}{\partial n} - x_c \frac{\partial n_y}{\partial n} = n_x y - n_y x = * \cdot t$$

stesso termine noto visto per ψ_G
nelle direz. n

$$\underbrace{(\psi_c + y_c x - x_c y)}_{n} = n_x y - n_y x \quad \text{c.c. di Neumann-Dini}$$

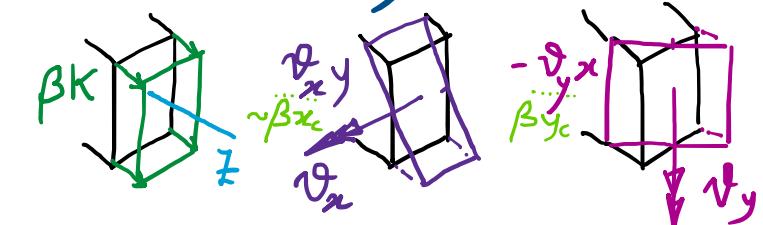
ψ^* differisce da ψ_c per un campo lineare in x e y $\Rightarrow \nabla^2 \psi^* = 0$ in A ($\propto \nabla^2 \psi_c = 0$)

ψ^* e ψ_G devono risolvere lo stesso pb. di N-D per l'equazione di Laplace:

$$\Rightarrow \psi^* = \psi_G + K \quad (\text{differiscono al più per una costante})$$

Pertanto:

$$\boxed{\psi_c(x, y) = \psi_G(x, y) + K - y_c x + x_c y}$$



compte di moto rigido fuori fuori della sezione

$$\text{valore medio } \bar{\psi}_c = \bar{\psi}_G + K \xrightarrow{=} 0$$

- Si definisce centro di torsione il punto C rispetto al quale avvengono le rotazioni rigide nel piano delle sezione e risultano nulle le seguenti rotazioni medie fuori piano delle sezione rispetto agli assi x e y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\delta_z}{y} \underbrace{y^2 dA}_{dJ_x} = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\delta_z}{y} dJ_x = 0 \Rightarrow \\ \int_A \psi_c y dA = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\delta_z}{x} \underbrace{x^2 dA}_{dJ_y} = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\delta_z}{x} dJ_y = 0 \Rightarrow \\ \int_A \psi_c x dA = 0 \end{array} \right.$$

PLV: flessione
torsione

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{M_x} \quad \bar{\nu}_x = \int_A \frac{\cancel{M_x}}{J_x} y dA \quad \delta_z \\ \cancel{M_y} \quad \bar{\nu}_y = \int_A -\frac{\cancel{M_y}}{J_x} x dA \quad \delta_z \end{array} \right.$$

ingombramento
medio nullo
fuori piano

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0$$

$$\bar{\psi}_G = \frac{1}{A} \int_A \psi_G dA = 0$$

Quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \psi_G y dA + \cancel{\int_A K y dA} - \cancel{\int_A y_G x y dA} + \int_A x_G y^2 dA = 0 \\ \int_A \psi_G x dA + \cancel{\int_A K x dA} - \cancel{\int_A y_G x^2 dA} + \int_A x_G y x dA = 0 \end{array} \right.$$

coordinate del centro di torsione

$$x_G = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_G(x, y) y dA; \quad y_G = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_G(x, y) x dA \leftarrow$$

N.B. Se E fosse una simm. retta, C è su tale asse

- Torsione: Approssimazione agli sforzi (taghiamo e priori l'equilibrio, imponiamo le congruenze)

H_p: \exists f.n. $\Phi = \Phi(x, y)$ funzione potenziale di sforzo o di Airy (definita a meno di cost.)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \Phi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = -\Phi_{,x} \end{cases}$$

[sotto la necessaria "regolarità"
 \Rightarrow fina delle derivate]

- Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,y} + \tau_{zy,x} = 0 \text{ in } A \Rightarrow (\Phi_{,y})_{,x} + (-\Phi_{,x})_{,y} = \cancel{\Phi_{,xy}} - \cancel{\Phi_{,xxy}} = 0 \quad \checkmark$$

- Eq. di congruenze:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \text{ in } A \Rightarrow (\Phi_{,y})_{,y} - (-\Phi_{,x})_{,x} = \underbrace{\nabla^2 \Phi(x, y)}_{\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy}} = -c$$

- Condizione al contorno (equil.):

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma \Rightarrow \Phi_{,y} \overset{n_x}{\underset{n_y}{\sim}} -\Phi_{,x} \overset{-n_y}{\underset{n_x}{\sim}} = \Phi_{,xx} t_x + \Phi_{,yy} t_y$$



$$\Phi = \text{cost} = 0 \text{ su } \Gamma$$

c.e. di Dirichlet

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = -c \text{ in } A$$

Eq. di Poisson con termine noto costante

$$c \leftrightarrow M_t$$

- Si ottiene pertanto un pb. di Dirichlet per l'eq. di Poisson (con termine noto costante).

- Equivalenze statiche (tra il campo delle tensioni tangenziali e il momento torcente che le ha generate) :

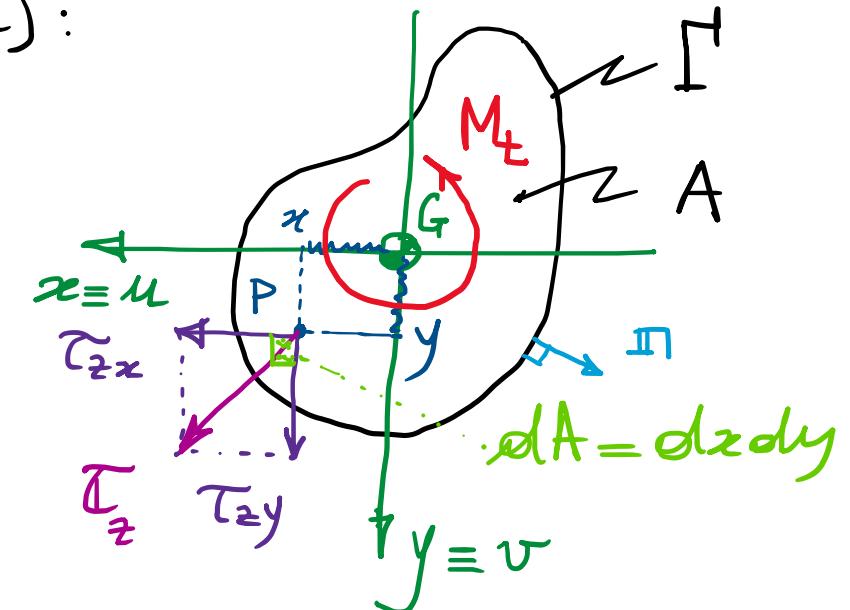
$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A (-\varphi_s x - \varphi_s y) dA$$

$$\begin{aligned} \text{Th. Div.} &= - \int_A [(\varphi_x)_{,x} + (\varphi_y)_{,y}] dA + 2 \int_A \varphi dA \\ &\quad \int_A dA \rightarrow \int_\Gamma d\Gamma \quad \text{0 su } \Gamma \\ &= - \int_\Gamma \varphi (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \varphi dA \end{aligned}$$

Quindi :

$$M_t = 2 \int_A \varphi(x, y) dA \quad M_t \leftrightarrow c$$



$$\begin{aligned} (\varphi_x)_{,x} &= \varphi_{,x} x + \varphi_x \underbrace{\overbrace{x}_{1}}_{1} \\ (\varphi_y)_{,y} &= \varphi_{,y} y + \varphi_y \underbrace{\overbrace{y}_{1}}_{1} \end{aligned}$$

$$-\varphi_{,x} x = -(\varphi_x)_{,x} + \varphi$$

$$-\varphi_{,y} y = -(\varphi_y)_{,y} + \varphi$$

Quadro sinottico (Torsione)

Approccio agli spostamenti

$\psi_G(x, y)$; β
f. ne di ingobboamento "torsione", cost

incognite

Approccio agli sforzi

$\sigma(x, y)$; c
f. ne di Airy costante di integrazione

Pl. di Neumann-Dini
per l'eq. ne di Laplace

$$\nabla^2 \psi_G = 0 \text{ in } A$$

$\psi_{G,n} = \underbrace{n_x y - n_y x}_{\propto \cdot \#}$ su Γ

equazione

Pl. di Dirichlet
per l'eq. ne di Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -c \text{ in } A \\ \varphi &= 0 \text{ su } \Gamma \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; J(\psi_G) = \frac{J_G}{\eta=1}$$

relazioni

$$M_t = 2 \int_A \varphi \, dA$$

corrispondenze
 $2G\beta = c$

Infatti: $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -c$
 $G\beta(-\psi_{G,yx} - 1 + \psi_{G,xy} - 1) = -c$

Th. Schwarz

$$\tau_{zx} = G\beta(\psi_{G,x} - y) = \varphi_{xy}$$

$$\tau_{zy} = G\beta(\psi_{G,y} + x) = -\varphi_{yx}$$

campo delle tensioni tangenziali

$$\psi_G \rightarrow \varphi$$

$$\psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{xy} + y$$

$$\psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \varphi_{yx} - x$$

$$\varphi \rightarrow \psi_G$$

Metodi di soluzione:

- Analitici: (problemi differenziali)

- Esatte (possibile solo in casi particolari, in forme chiuse o mediante sviluppi in serie).

- Approssimate (comunque valide ai fini ingegneristici, in forme chiuse o per sviluppi in serie troncati).

- Numerici: (problemi algebrici \Rightarrow per discretizzazione)

- Metodo delle Differenze Finite (FDM). \Rightarrow Calcolo Numerico

- Metodo degli Elementi Finiti (FEM). \Rightarrow Computational Mechanics of Solids and Structures

es. caso delle sezioni ellittiche

es. profili sottili

(aperti e chiusi)

passaggio da numero ∞ di gall a numero finito, cioè discreto, di gall