Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problemi euleriani di stabilità (Teoria del 2° ordine – Sistemi discreti MDOF)

n gdl

Hp. • Sono conf.ni di equilibrio dipendenti linearmente dai carichi:

$$\mathbb{P} = p\,\mathbb{P}_0$$

$\mathbb{P}_0$ vettore dei carichi base

p moltiplicatore dei carichi (adimensionale, ≥ 0)

• Linearità pre-critica:

$$q = p\,\bar{q}_0$$

$\bar{q}_0$ conf.ne equilibrata corrispondente ai carichi base (q: coordinate lagrangiane)

• Si assume una forma lineare in p per la variazione 2ª dell'EPT:

$$\frac{1}{2}\delta^2 V_2 = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}\,\delta q = \underbrace{\omega(\delta q)}_{} - p\,\underbrace{w_2(\delta q)}_{}$$

$\omega = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_E\,\delta q$ ← energia potenz. elastica > 0

$\mathbb{K}_E$ matrice di rigidezza elastica

lavoro del 2° ordine dei carichi esterni conservativi $> 0 \;\forall \delta q \neq 0$

$w = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_G\,\delta q$

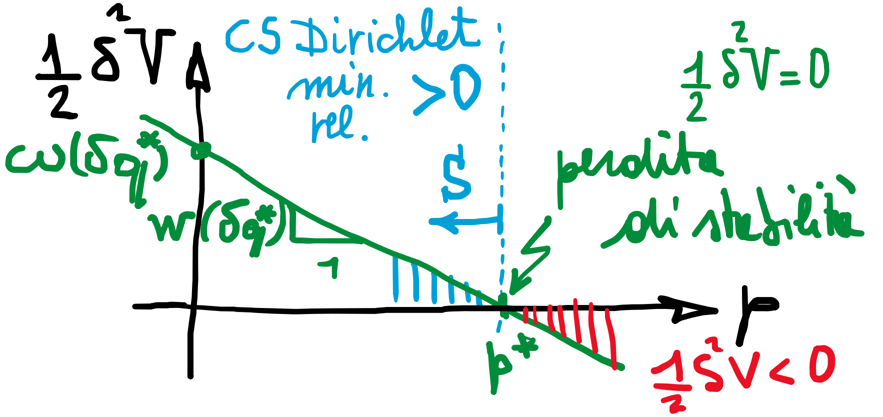
$\mathbb{K}_G$ matrice di rigidezza geometrica

Matrice di rigidezza

$$\underset{n\times n}{\mathbb{K}} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G \quad \text{(cost. in } q\text{, lin. in } p\text{)}$$

coerentemente figlia di due contributi, con p che, per livelli crescenti, porta a "negativizzare" $\mathbb{K}$

$n \begin{cases} p_i^* : \text{moltiplicatori critici} \\ \delta q_i^* : \text{deformate critiche} \end{cases}$



- Condizione di perdita di stabilità ⇒ carichi critici:

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \omega(\delta q_l^*) - p^* w(\delta q_l^*) = 0 \Rightarrow p_i^*(\delta q_{l\,i}^*) = \frac{\omega(\delta q_l^*)}{w(\delta q_l^*)} = \frac{\frac{1}{2}\delta q_l^{*T}\mathbb{K}_E\,\delta q_l^*}{\frac{1}{2}\delta q_l^{*T}\mathbb{K}_G\,\delta q_l^*} = R(\delta q_l^*)$$

"rapporto di Rayleigh" in instabilità (v. analogia in dinam.)

- Il minimo valore dei moltiplicatori critici si dice moltipl. critico euleriano:

$$p_{cr}^E = \min\{p_i^*\} \Rightarrow \mathbb{P}_{cr}^E = p_{cr}^E\,\mathbb{P}_0$$

(prima condiz. di perdita di stabilità al crescere di p).

- Per $p = p_{cr}^E$, $\mathbb{K}$ diviene semidef. pos. (perde per la prima volta la sua def. pos.)

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \omega(\delta q_l) - p_{cr}^E w(\delta q_l) = \frac{1}{2}\delta q_l^T(\mathbb{K}_E - p_{cr}^E\mathbb{K}_G)\delta q_l \geq 0 \quad \forall \delta q_l \neq 0$$

- Det. dei molt. critici (p_i^*):
  - Studio propr. algebriche di $\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\mathbb{K}_G$
    - + min. princ., $m_i = 0$ ⇒ p_i^*
    - + singolarità, $\det\mathbb{K} = 0$
  - Studio pb. agli autov. generalizzato associato a $\mathbb{K}_E, \mathbb{K}_G$

$$\mathbb{K}\,\delta q_l = (\mathbb{K}_E - p\mathbb{K}_G)\delta q_l = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{K}_E\,\delta q_l = p\,\mathbb{K}_G\,\delta q_l} \Rightarrow \begin{cases} p_i^* & \text{autovalori} \\ \delta q_i^* & \text{autovettori} \end{cases}$$

$$p_{cr}^E \leq \frac{\omega(\delta q_l)}{w(\delta q_l)} = R(\delta q_l)$$

$$\underbrace{p_{cr}^E}_{\tilde{p}_i^*} \qquad \underbrace{\delta q_l}_{\delta \tilde{q}_{l\,i}^*}$$

vedi analogia con Dinamica

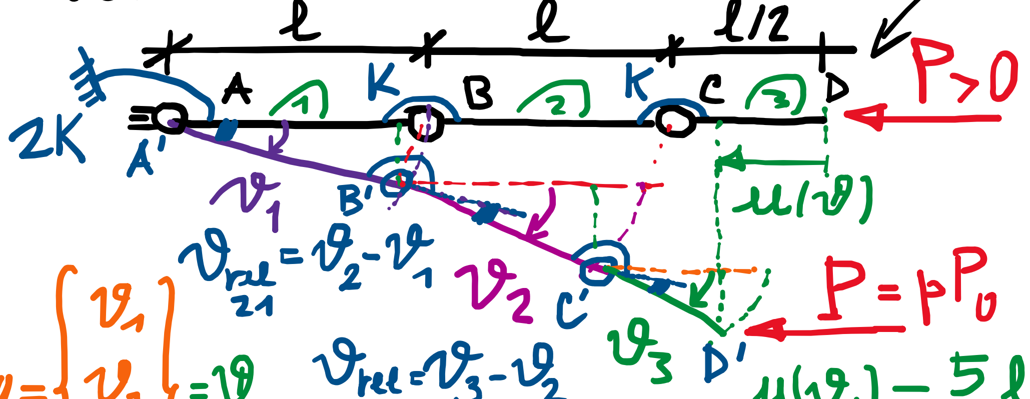
- Rapporto di Rayleigh fornisce stime per eccesso del moltip. cr.
- R è stazionario nelle conf.ni equilibrate e minimo per p_{cr}^E (dim.) (deform. critiche)

Esempio (3-DOF)

conf.ne di riferimento $\vartheta_i = 0$ ($\bar{q}_0 = 0$ di equil.)

Approccio energetico

$\Rightarrow \delta q = q - q_0 = q$



$\vartheta_{rel\,21} = \vartheta_2 - \vartheta_1$

$\vartheta_{rel\,32} = \vartheta_3 - \vartheta_2$

$$q = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \vartheta$$

conf.ne variata (discosta dalla conf.ne di rif.)

EPT: $$V(q) = \underbrace{\frac{1}{2} K \left[2\vartheta_1^2 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + (\vartheta_3 - \vartheta_2)^2 \right]}_{\text{energia potenziale elastica}} \underbrace{- P u}_{V_f \text{ EP carichi esterni conservat.} \; -\mathcal{L}_{ef}}$$

ϑ ...

$$u(\vartheta_i) = \frac{5}{2} l - l \cos\vartheta_1 - l \cos\vartheta_2 - \frac{l}{2} \cos\vartheta_3$$

$$p = \frac{P l}{K} = \frac{P}{K/l} \Rightarrow P = p \underbrace{\frac{K}{l}}_{P_0} = p P_0$$

$$\tilde{V} = \frac{V(q)}{K} = \left[\frac{1}{2} \left(3\vartheta_1^2 + 2\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 - 2\vartheta_2\vartheta_3 \right) - p \left(\frac{5}{2} - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_3 \right) \right]$$

$$\cos\vartheta_i = \left(1 - \frac{\vartheta_i^2}{2}\right) \Rightarrow \tilde{V}_2(q), u_2$$

- equaz. di equil. (da staz.) $\quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} = {}_{,i}$ deriv. parziale

$$\tilde{V}_2(q) = \frac{\omega}{K} - p \underbrace{\frac{1}{2} \left(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_3^2 \right)}_{\frac{u_2}{l}}$$

$$\begin{cases} \tilde{V}_{,\vartheta_1} = 3\vartheta_1 - \vartheta_2 \quad 0 \quad - p \sin\vartheta_1 = 0 \\ \tilde{V}_{,\vartheta_2} = -\vartheta_1 + 2\vartheta_2 - \vartheta_3 - p \sin\vartheta_2 = 0 \\ \tilde{V}_{,\vartheta_3} = \quad 0 \quad - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \frac{p}{2} \sin\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $|\vartheta_i| \ll 1$ "spost. piccoli" $\sin\vartheta_i \simeq \vartheta_i$

$\tilde{V}_{2,\vartheta_i}$

$$\begin{cases} (3-p)\vartheta_1 - \vartheta_2 \quad 0 = 0 \\ -\vartheta_1 + (2-p)\vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \\ 0 - \vartheta_2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G}$

già si delineano $\mathbb{K}_E$ e $\mathbb{K}_G$

Derivate prime $\Rightarrow$ vett. gradiente. eq. di equil. non lineari

eq. di equil. linearizz., da staz. di $\tilde{V}_2$

• Derivate seconde (matrice hessiana):

$$[\tilde{V}_{,\vartheta_i\vartheta_j}] = \begin{bmatrix} 3-p\cos\vartheta_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-p\cos\vartheta_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2}\cos\vartheta_3 \end{bmatrix} \xRightarrow{|\vartheta_i|\ll 1} \overbrace{\begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix}}^{\tilde{V}_{2,\vartheta_i\vartheta_j}} = \tilde{\mathbb{K}}$$

$= \tilde{V}_{,\vartheta_j\vartheta_i}$ [Th. Schwarz]

$$\tilde{\mathbb{K}}_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\mathbb{K}}_G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{3\times 3}{\tilde{\mathbb{K}}} = \tilde{\mathbb{K}}_E - p\,\tilde{\mathbb{K}}_G$$

matrice di rigidezza elast. — matrice di rigid. geom. — matrice di rigidezza da V_2 (cost. in ϑ_i, lineare in p)

• Carichi critici (da singolarità di $\mathbb{K}$):

$$\det(\tilde{\mathbb{K}}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$\underbrace{p^3 - 7p^2 + 13p - 4 = 0}_{\text{eq.ne caratteristica (3° grado} \Rightarrow \text{3 radici)}} \Rightarrow (p-4)(p^2-3p+1) = 0$$

$p=4$ è soluz.

$16\cdot\cancel{4} - 28\cdot\cancel{4} + 13\cdot\cancel{4} - 1\cdot\cancel{4} = 0$

radici:

$$\begin{cases} p_{1,2}^* = \dfrac{3\mp\sqrt{5}}{2} < \begin{matrix} .3820 = p_{cr}^E \\ 2.618 \end{matrix} \\ p_3^* = 4 \end{cases}$$

min. dei p_i^*

moltiplicatori critici

$$\boxed{P_{cr}^E = .3820\,\frac{K}{\ell}}$$

Concetti fondamentali :

- Problemi euleriani di stabilità per sistemi discreti a più gdl (MDOF):
  - Analisi al 2° ordine $\Rightarrow$ EPT $V(\underline{q}) \simeq V_2(\underline{q})$ (quadratica)

    Utile ad indagare il segno della variazione seconda $\frac{1}{2}\delta^2 V$:

    (ove $\frac{1}{2}\delta^2 V > 0$, conf. equil. con $\delta V = 0$ è min. rel. $\Rightarrow$ stabile)

    (ove $\frac{1}{2}\delta^2 V = 0$, " no min. rel. $\Rightarrow$ cessa di essere stabile)

    $\Rightarrow$ condizioni "critiche" (no CS Dirichlet)

- Carichi variabili proporzionalmente tramite comune moltiplicatore dei carichi p, ad amplificare i carichi base.

- Si considera una dipendenza lineare della variazione seconda $\frac{1}{2}\delta^2 V$ col moltiplicatore dei carichi p: la condizione di annullamento di $\frac{1}{2}\delta^2 V$ conduce ad un'equazione lineare in p $\Rightarrow$ carichi critici.

- "Modi di instabilità": p_i^* carichi critici $\rightarrow$ di cui il min. è p_{cr}^E

δq_i^* deformate critiche

configurazioni critiche in corrispondenza delle quali il sistema cessa di essere stabile (e la prima che si incontra, al crescere di p, è quella corrispondente al carico critico euleriano del sistema).

- Perdita di stabilità $\frac{1}{2}\delta^2 V = 0 \Rightarrow \mathbb{K}\,\delta q = 0$

condiz. di singolarità

matrice di rigidezza

$\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$

$\mathbb{K}_G$ geometrica

$\mathbb{K}_E$ elastica

$\Updownarrow$

$$\mathbb{K}_E\,\delta q_i^* = p_i^*\,\mathbb{K}_G\,\delta q_i^*$$

$\rightarrow$ p_i^* autovalori

δq_i^* autovettori

problema agli autovalori generalizzato associato alle matrici $\mathbb{K}_E$ e $\mathbb{K}_G$

DINAMICA

$$\mathbb{K}\,\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\phi_i$$

modi principali di vibrare

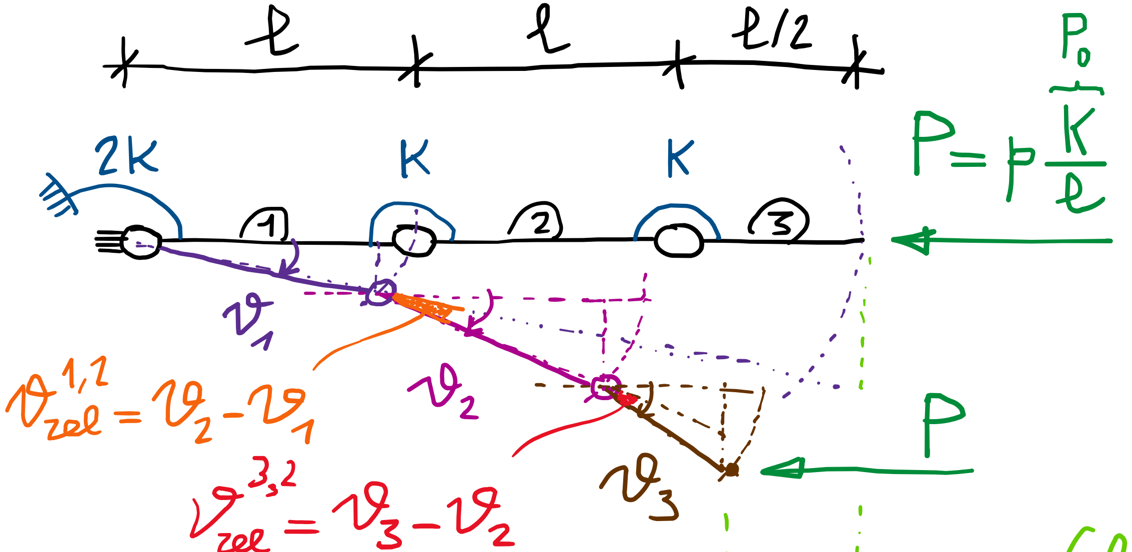
$\longleftrightarrow$ analogia

• Esempio MDOF (3-DOF):

coordinate lagrangiane

rotazioni assolute

$$q = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} ; \quad \bar{q}_0 = 0$$



$$u = \left(\ell + \ell + \frac{\ell}{2}\right) - \left(\ell\cos\vartheta_1 + \ell\cos\vartheta_2 + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta_3\right)$$

spostamento orizzontale

$$= \ell\left(\frac{5}{2} - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_3\right)$$

E.P.T.: $$\tilde{V} = \frac{V(\vartheta)}{K} = \frac{1}{2}\cancel{K}\left(2\vartheta_1^2 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + (\vartheta_3 - \vartheta_2)^2\right) \underbrace{- \overset{p\frac{\cancel{K}}{\cancel{\ell}}}{P}\, u}_{-\mathcal{L}_{ef}}$$

SOMMARIO (Lez. 19)

- Pb. euleriani di stabilità secondo teoria del 2° ordine, sistemi discreti MDOF.
- Condizione di perdita di stabilità ($\frac{1}{2}\delta^2 V = 0$) $\Rightarrow$ carichi critici.
- Matrice di rigidezza elastica e geometrica: $\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$ (lin. in p, cost. in q).
- Rapporto di Rayleigh e pb. agli autovalori generalizzato $\Leftrightarrow$ analogia con Dinamica.
- Esempio 3-DOF:
  - Scrittura dell'EPT (per spost. "geometricamente grandi").
  - Valutazione derivate prime e seconde.
  - Scrittura dell'EPT al 2° ord. (" " " piccoli") $\sim q_i^2$.
  - Conseguenti valutaz. derivate prime ($\sim q_i^1$ lin.) e seconde ($\sim q_i^0 = 1$ cost.).
  - Calcolo dei carichi critici da condit. di singolarità di $\mathbb{K}$ ($\det \mathbb{K} = 0$).

Next step: Deformate critiche ; approccio statico (equil. nella conf.ne deformata).
Sistemi continui (asta di Eulero).