Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) – Meccanica delle Strutture (sistemi di travi)

PLV

$\mathbb{E} = \mathbb{C}^T$

$\mathbb{C} = \mathbb{E}^T$

STATICA		CINEMATICA
$\mathbf{s} = \mathbb{E}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$	sist. articolati di	$\mathbf{v} = \mathbb{C}\cdot\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$
sist. di equilibrio	corpi (rigidi)	sist. di congruenza

- PLV: "ponte" tra le sponde della cinematica e della statica.
- non aggiunge eq.ni governanti al problema ma consente di mettere in comunicazione le due "sponde".
- riferito potenzialmente a sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema reale (peraltro associabili tramite lavori mutui), quindi indip. dal comportamento del materiale (no relazione di causa-effetto tra Ⓐ e Ⓑ).
- principio ⇒ teorema dimostrabile (Meccanica dei continui)

Definizioni:

Ⓐ sistema di quantità statiche equilibrate, azioni esterne e azioni interne, staticamente ammissibili

Ⓑ sistema di quantità cinematiche congruenti, "spostamenti" e deformaz., cinematicamente ammissibili

PLV: CN di equilibrio e di congruenza

$$\forall \text{Ⓐ}, \text{Ⓑ} \Rightarrow \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

ove

$$\mathcal{L}_e^{AB} = \sum_i \mathbf{F}_i^A \cdot \mathbf{s}_i^B + \mathbf{W}_i^A \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^B + \mathbf{R}_i^A \cdot \bar{\mathbf{s}}_i^B$$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_{str} N^A \cdot dn^B + T^A \cdot dt^B + M^A \cdot d\varphi^B$$

$\neq 0$ per sistemi deformabili

Manifestazioni operative (Princ. Spostamenti/Forze Virtuali):

PSV: CS di equilibrio

Ⓑ, $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow$ Ⓐ equil.

- calcolo di RV e AI nei sist. articolati di corpi rigidi ($\mathcal{L}_i = 0$)

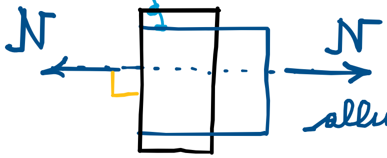
PFV: CS di congruenza

Ⓐ, $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow$ Ⓑ congruente

- calcolo di componenti di spost. e soluzione di strutture iperst.

– Deformazioni elementari del concio di trave: (elastiche + anelastiche): ⇒ ad es. termiche
(coazioni impresse di natura termica)

contraz. trasv. legata a ν, coeff. di Poisson



N N

allungamento

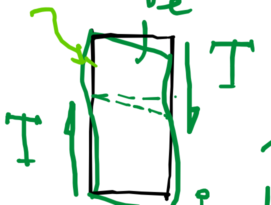
ds $dn_e = \varepsilon_e \, ds = \frac{N \, ds}{EA}$ rigidezza assiale

E: modulo di elast. longitudinale o di Young

A: area sezione trasv. $(EA \to \infty)$

ingobbamento fuori piano della sez.

$\chi \geq 1$ fattore di taglio



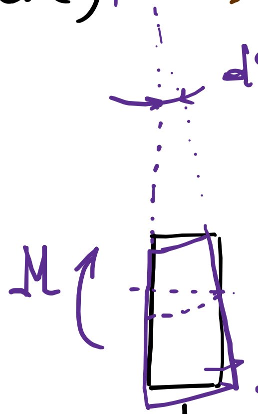
$\bar{\gamma}_e$ T T

scorrimento

ds $dt_e = \bar{\gamma}_e \, ds = \chi \frac{T \, ds}{GA}$ rigidezza tagliante

G: modulo di elast. tangenz.

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $(GA \to \infty)$



$d\varphi_e$ M M

rotazione

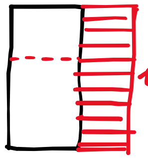
ds $d\varphi_e = \chi_e \, ds = \frac{M \, ds}{EJ}$ rigidezza flessionale

prevalenti nei sist. di travi

J: momento d'inerzia sezione trasversale

$+\Delta T$ incremento di temp. uniforme

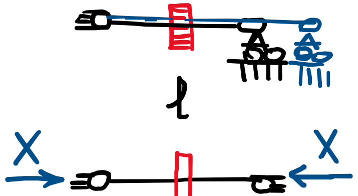
α: coeff. di dilatazione termica $\sim 10^{-5} \div 10^{-6} \, {}^{\circ}C^{-1}$



cost. $\varepsilon_t = \alpha \Delta T$ def. termica

ds $dn_t = \varepsilon_t \, ds$

$\Delta l_t = \varepsilon_t \, l$



l X X

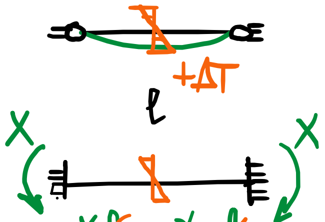
def. sì sforzo NO

def. NO sforzo SÌ

$\frac{X \cancel{l}}{EA} = \varepsilon_t \cancel{l}$

$X = \alpha \Delta T \, EA$

$-\Delta T$ $\Delta\varphi_t = \chi_t \, l$

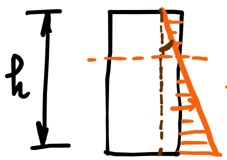


$+\Delta T$ l X X

$\frac{X \cancel{l}}{EJ} = \chi_t \cancel{l}$

$X = \chi_t EJ = \frac{2\alpha\Delta T}{h} EJ$

$d\varphi_t$ $-\Delta T_2$



h lin. $+\Delta T_1$ ds

$\chi_t = \alpha \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{h} = \vartheta_t$ curvatura termica

$d\varphi_t = \chi_t \, ds$

• **Dualità (via PSV):** AB

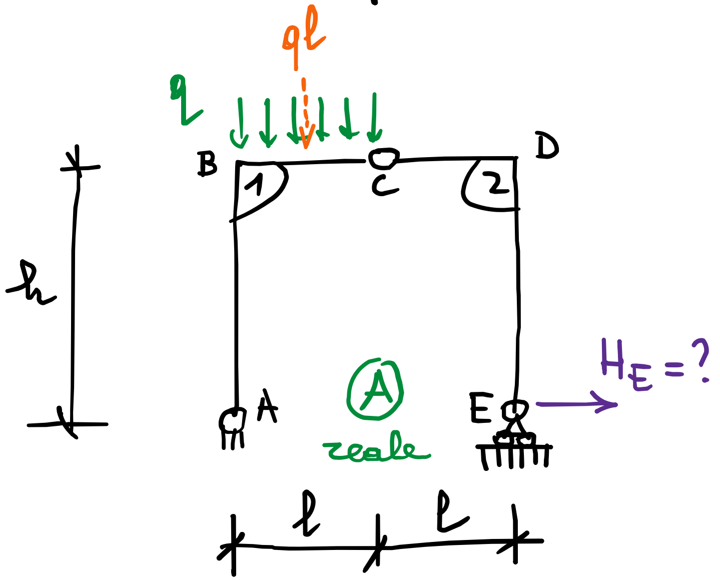
(A) reale: $\mathbf{r}, \mathbf{f}$ ⇒ $\mathcal{L}_e = 0$ equil.

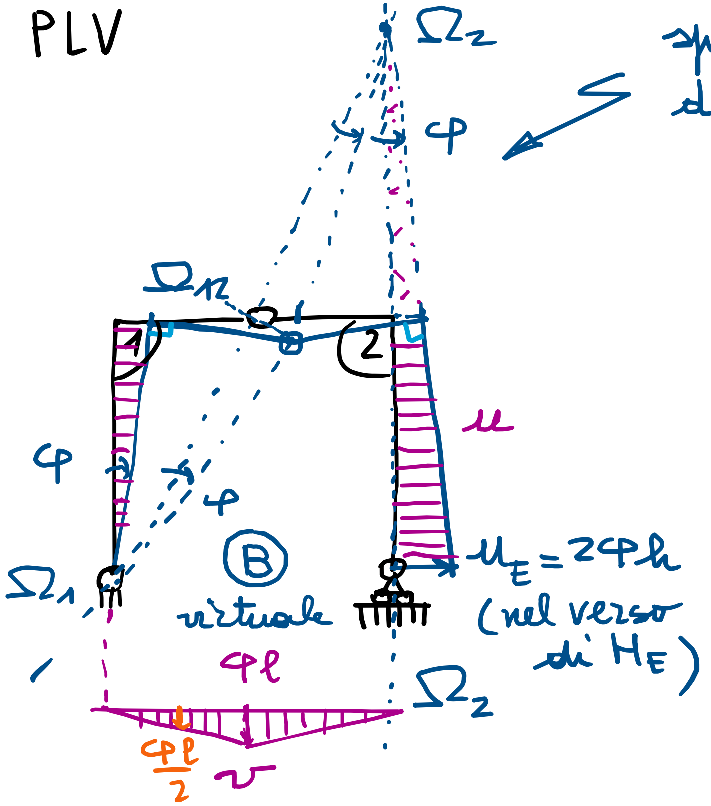
(B) virtuale: $\mathbf{v} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{u}$ congr.

$= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ $\forall \mathbf{u}$

$= \mathbf{r} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = (\mathbb{C}^T \cdot \mathbf{r} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbb{C}^T \cdot \mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$ equil. $\leftrightarrow \mathbf{s} = \mathbb{E} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{C}^T; \ \mathbb{C} = \mathbb{E}^T}$

- Calcolo di RV e AI tramite PLV (PSV, CS di equilibrio):





spostata che si produrrebbe in assenza del gdv associato ad H_E

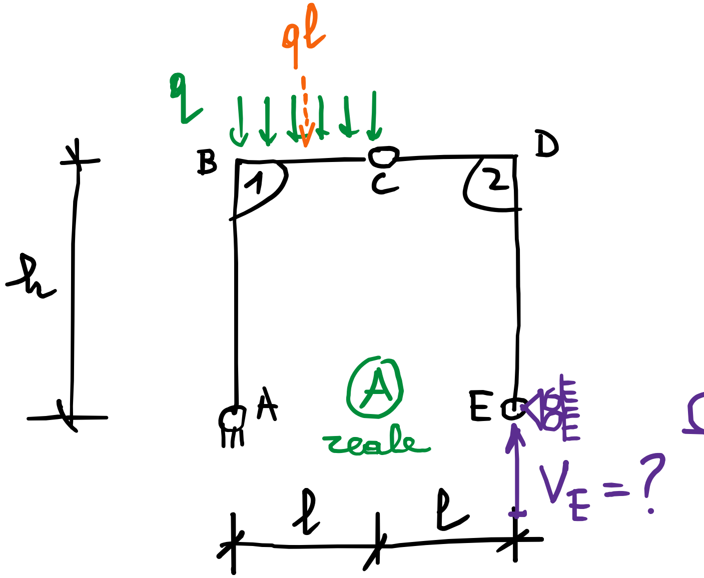
calcolo selettivo di H_E:

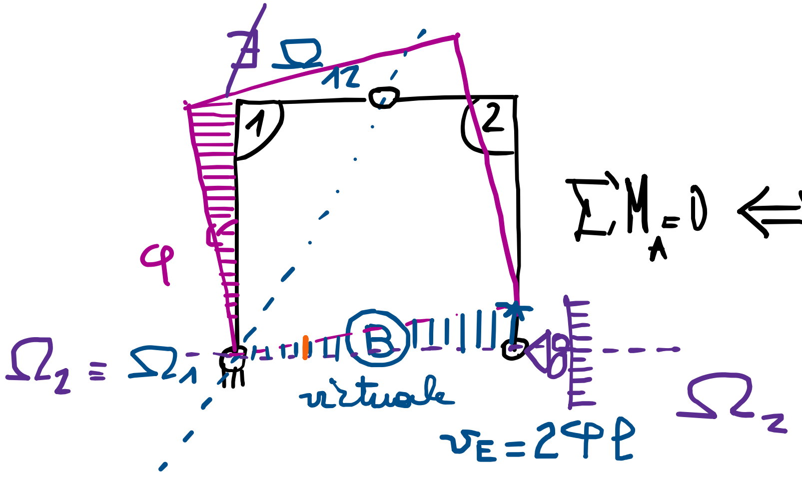
unica eq.ne nella sola incognita H_E

$$\mathcal{L}_e^{AB} = \overbrace{H_E\, 2\cancel{\varphi} h}^{>0\ (es.)} + \overbrace{q\ell\, \frac{\cancel{\varphi}\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}\ è\ >0} = 0 \quad \forall\varphi$$

$$\boxed{H_E = -\frac{q\ell^2}{4h}}$$

(segno meno: H_E risulta opposta ad u_E, spostata che produce lavoro positivo per q)

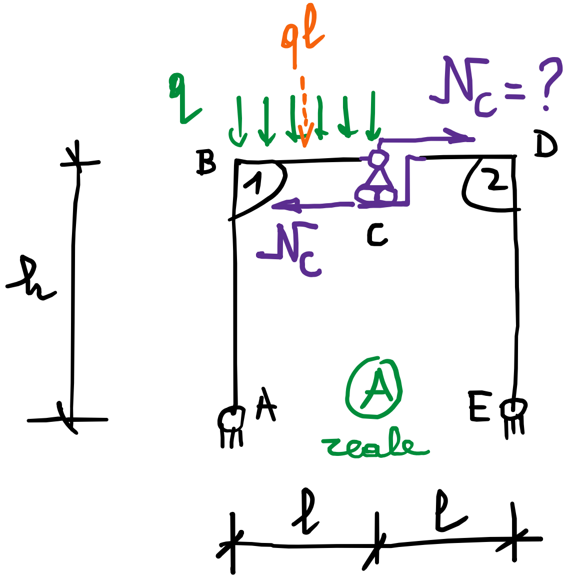


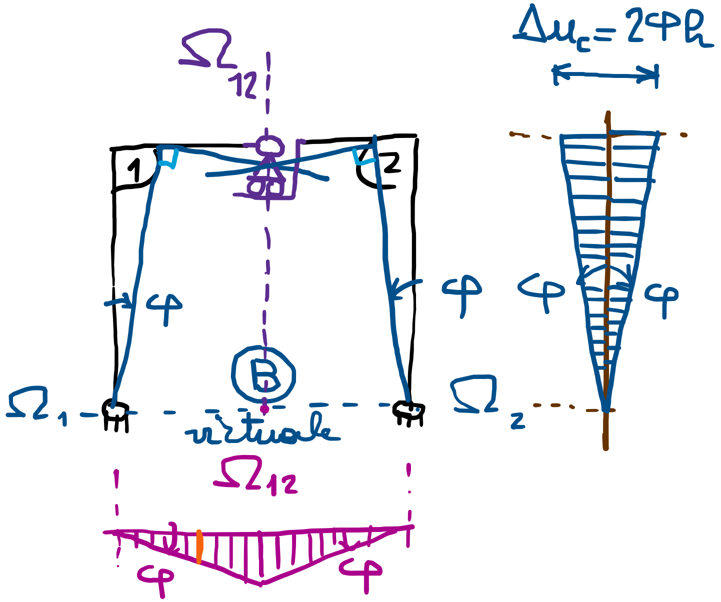


$$\sum M_A = 0 \iff \mathcal{L}_e^{AB} = \overbrace{V_E\, 2\cancel{\varphi}\ell}^{>0\ (es.)} \overbrace{-\, q\ell\, \frac{\cancel{\varphi}\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}\ è\ <0} = 0 \quad \forall\varphi$$

$$\boxed{V_E = \frac{q\ell}{4}}$$

(segno più: V_E risulta equiversa a v_E, spostata che produce lavoro negativo per q)

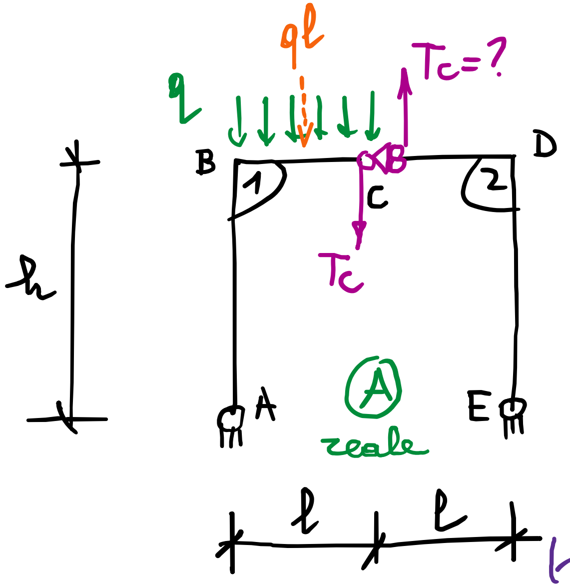


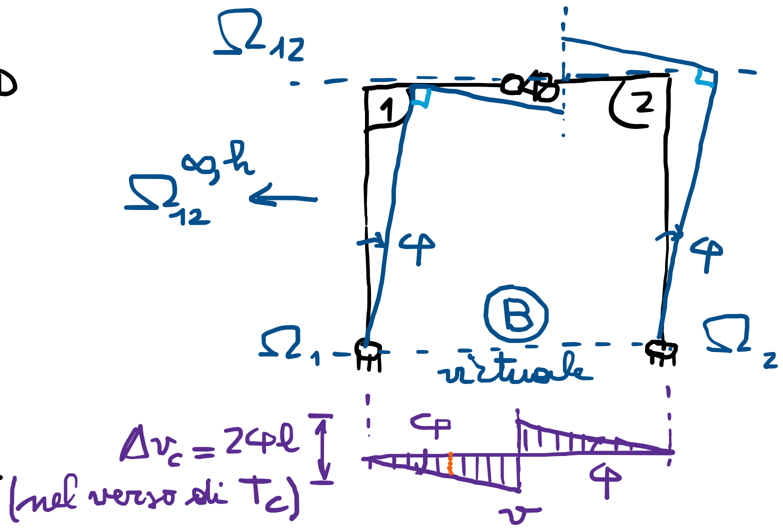


$$\mathcal{L}_e^{AB} = N_c \underbrace{(\varphi h + \varphi h)}_{\Delta u_c = 2\cancel{\varphi} h} + \overbrace{q\ell \frac{\cancel{\varphi}\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}^e > 0 \ \forall\varphi} = 0$$

$$\boxed{N_c = -\frac{q\ell^2}{4h}}$$

(idem: N_c finale opposta a Δu_c)

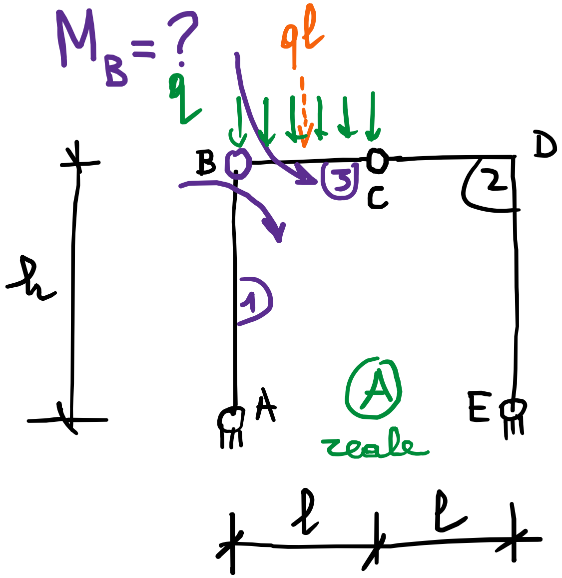


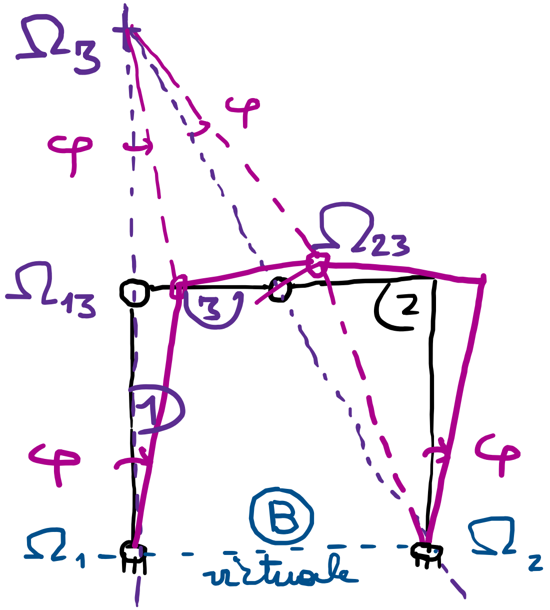


$$\mathcal{L}_e^{AB} = T_c \underbrace{(\varphi\ell + \varphi\ell)}_{\Delta v_c = 2\cancel{\varphi}\ell} + \overbrace{q\ell \frac{\cancel{\varphi}\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}^e > 0 \ \forall\varphi} = 0$$

$$\boxed{T_c = -\frac{q\ell}{4}}$$

(idem: T_c finale opposto a Δv_c)

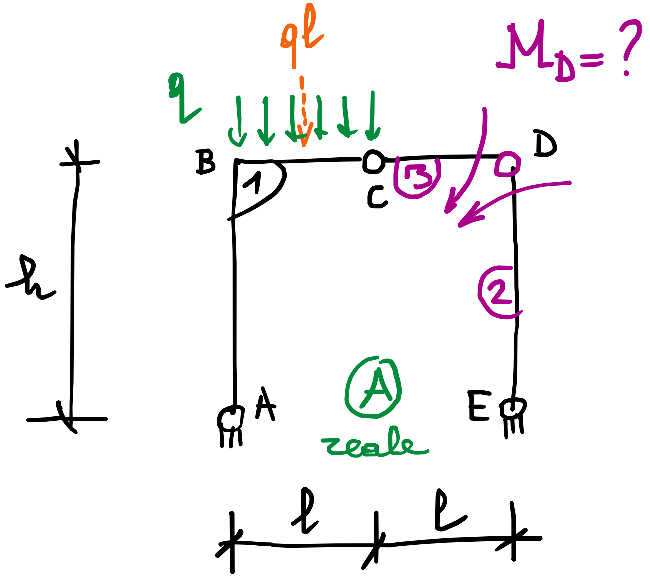


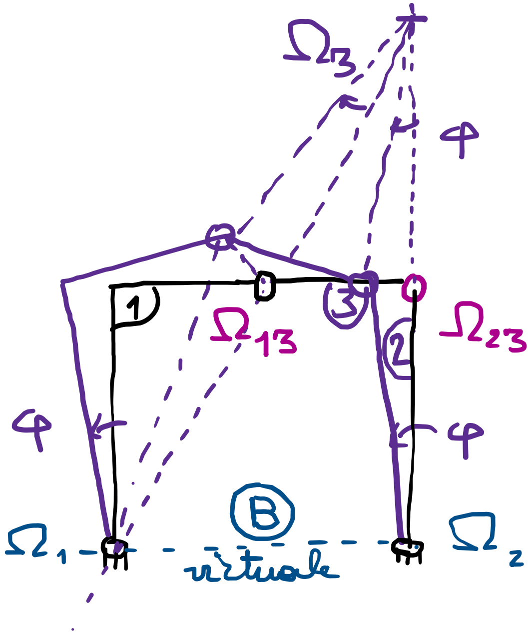


$$\mathcal{L}_e^{AB} = M_B \overbrace{(\varphi+\varphi)}^{\Delta\varphi_B = 2\cancel{\varphi}} \overbrace{- q\ell \frac{\cancel{\varphi}\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq} \text{ è } < 0} = 0 \quad \forall\varphi$$

$$\boxed{M_B = \frac{q\ell^2}{4}}$$

(idem: M_B finale equiverso a $\Delta\varphi_B$)





$$\mathcal{L}_e^{AB} = M_D \overbrace{(\varphi+\varphi)}^{\Delta\varphi_D = 2\cancel{\varphi}} \overbrace{- q\ell \frac{\cancel{\varphi}\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq} \text{ è } < 0} = 0 \quad \forall\varphi$$

$$\boxed{M_D = \frac{q\ell^2}{4}}$$

(idem: M_D finale equiverso a $\Delta\varphi_D$)