

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

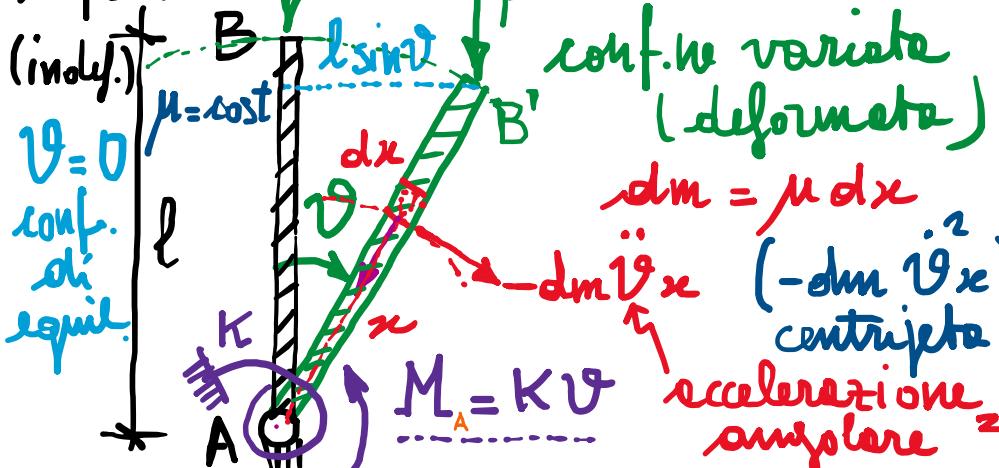
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

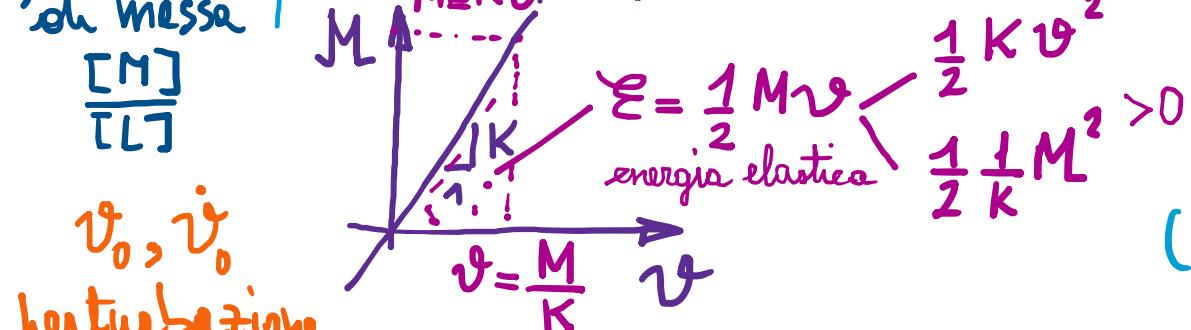
LEZIONE 16

II - Instabilità delle Strutture

conf. iniz. di riferim.
(indif.)



mu densità
di messa
[M]
[L]



perturbazione iniziale molle elastica lineare

(piccole entità) (molla rotazionale)

(Introduzione ai sistemi discreti - SDOF)

- Sistemi a deformabilità elastica concentrata
- Forze conservative (campo gravitazionale):
 - P se direz. verticale costante (no forze "follower")
 - di intensità costante (ovverosia in misura "quasi-statica") $\rightarrow P = \mu P_0 > 0$
 - carico base
 - moltiplicatore del carico
 - $\mu = \frac{P}{P_0}$

Eq. ne di "equilibrio dinamico" (ella

$$P l \sin \vartheta = K \vartheta - \int_{0}^l (-dm \dot{\vartheta}_x) x \quad \begin{array}{l} \text{rotazione} \\ \text{rispetto} \\ \text{alla} \\ \text{mossa} \\ \text{momento} \\ \text{elastico} \\ \text{legato all'inerzia} \end{array}$$

momento ribatt.
(effetto destabilit.)

non-lineare

Eq. ne del moto: $P l \sin \vartheta = K \vartheta + \mu \int_0^l x^2 dx \ddot{\vartheta}$

effetto stabilizzante

$$\int_0^l x^2 dx = I = \frac{1}{3} \mu l^3 \quad \begin{array}{l} > 0 \\ \text{momento} \\ \text{d'inerzia} \end{array}$$

Eq. del moto: $P_l \sin\vartheta = I \ddot{\vartheta} + K \vartheta$ $\frac{\text{eq. del moto non-lin.}}{\text{lin. non-lin.}}$ $(I \ddot{\vartheta} + K \vartheta - P_l \sin\vartheta = 0)$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$$

Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" ($|\vartheta| \ll 1$) $\Rightarrow \sin\vartheta \approx \vartheta$

$I \ddot{\vartheta} + (K - P_l) \vartheta = 0$ $\frac{\text{eq. ne lineare}}{\text{mom.}}$ $\ddot{\vartheta} + \frac{K - P_l}{I} \vartheta(t) = 0$ $\frac{\text{linearizzazione}}{\text{(dell'eq. ne del moto)}}$

d'inerzia rigidezze: $K_{\text{elast}} - K_g$ rigidezze "geometriche" (sottrar rigidità del sistema, al crescere del carico P)

1) $K - P_l > 0$; $P < \frac{K}{l}$ $\Rightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta(t) = 0$ $\omega_1^2 = \frac{K - P_l}{I}$ (dip. del valore di P) \downarrow per P_l

(caso sub-critico) eq. ne dei moti armonici:

Sistema stabile (secondo criterio di stabilità

dinamico di LIAPUNOV).

il sistema non tende ad abbandonare le conf. ne di rif. (di equil.), oscillando di poco intorno ad esse (+ smozz.)

e.i. $\begin{cases} \dot{\vartheta}_0 = A \\ \ddot{\vartheta}_0 = \omega_1 B \end{cases}$

$\vartheta(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t = \dot{\vartheta}_0 \cos \omega_1 t + \frac{\ddot{\vartheta}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$

moto armonico

- di pulsaz. $\omega_1(P)$

- di ampiezza $\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{\ddot{\vartheta}_0^2}{\omega_1^2}}$ (piccole)

attorno alle conf. ne di riferimento che ottiene progressivamente l'oscillazione

$$2) K - Pl = 0; P = \frac{K}{l} \Rightarrow I \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta(t) = A + Bt$$

Perdita di stabilità delle conf. ne di equil. $\dot{\vartheta} = 0$: sistema tende a divergere, cioè ad abbandonarla

Codificazione di transizione $P_{cr} = \frac{K}{l}$
carico critico

$$3) K - Pl < 0; P > \frac{K}{l} \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \alpha^2 \vartheta = 0$$

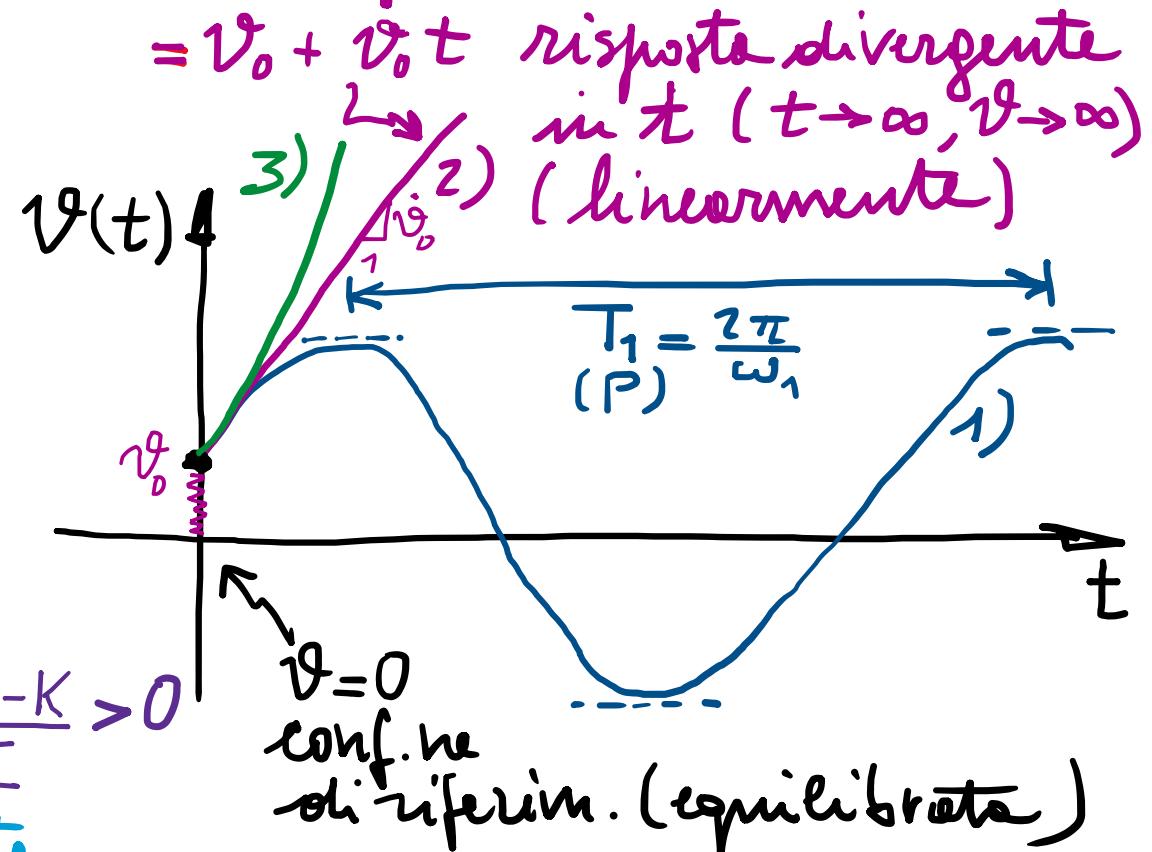
eq. ne corrett. ($e^{\lambda t}$)

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha \Rightarrow e^{\pm \alpha t}$$

$$\vartheta(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}$$

caso supercritico



esponentzialmente in t $P = p P_{cr} = p \frac{K}{l}$ ($p = 1$ carico critico)

In sintesi:

- Stabile $P < P_{cr} = \frac{K}{l}$ ($p < 1$)
- Instabile $P \geq P_{cr} = \frac{K}{l}$ ($p \geq 1$)

Approccio Attico

eq. di equil.

$$P_l \sin \vartheta = k \vartheta$$

eq. non lineare in ϑ

$$\sin \vartheta = \frac{k}{P_l} \vartheta$$

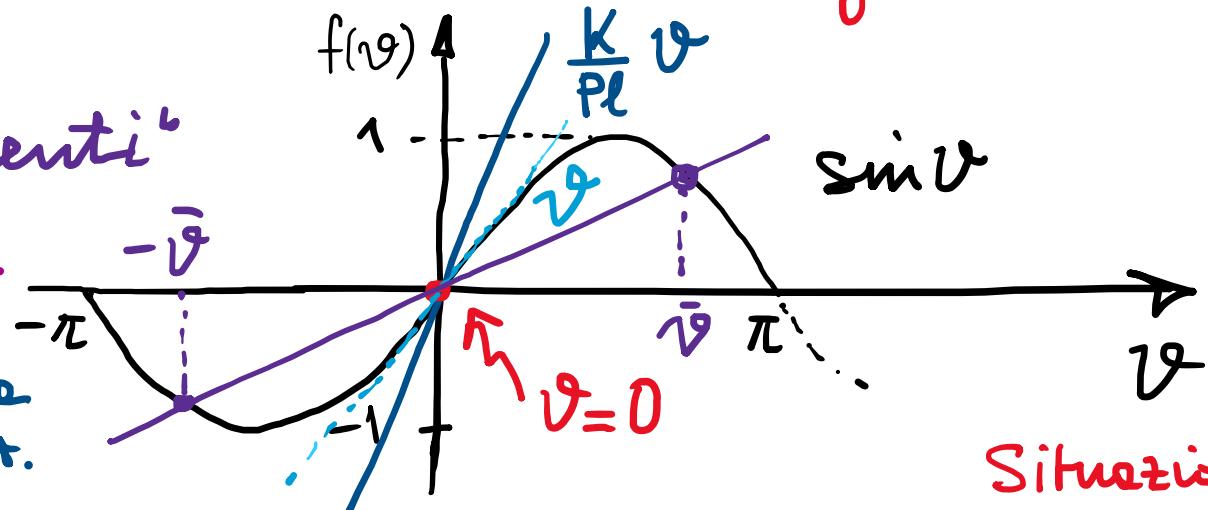
($\vartheta=0$ è una conf. ne di equil.)

nelle conf. ne deformate (gli spostamenti sono tali da influenzare l'eq. ne di equilibrio):

- analisi in "grandi spostamenti"
- non-linearietà geometrica

$$1) \frac{K}{P_l} > 1; P_l < \frac{K}{l}$$

$\vartheta=0$ unica solut.



$$2) \frac{K}{P_l} = 1; P_l = \frac{K}{l} = P_{cr} \text{ infinite soluzioni nell'intorno di } \vartheta=0$$

$$3) \frac{K}{P_l} < 1; P_l > \frac{K}{l} \text{ più soluz. equil. } \begin{cases} \vartheta=0 \\ \vartheta=\pm\bar{\vartheta} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{P_l}{K}; \beta = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

$$P = P_{cr} = \frac{K}{l} \text{ perdita di stabilità -}$$

($P = \beta \frac{K}{l} = \beta P_{cr}; P_{cr} = 1$)

Situazione di

transizione (critica): si

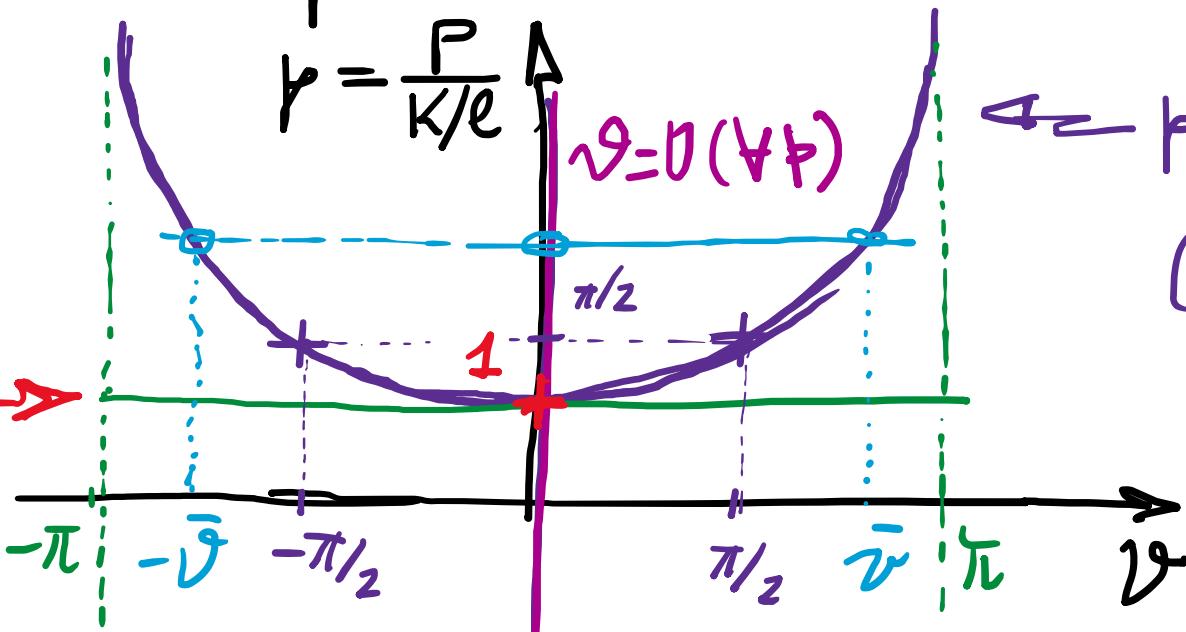
produce per lo stesso valore $P_{cr} = \frac{K}{l}$ preced.

det. con LIA+UNOV

- Mappa dei percorsi di equilibrio:

$$P = P_{cr} = \frac{K}{\ell} \quad (p=1)$$

p.tto di biforcazione \Rightarrow
dei percorsi di equilibrio



(f.n. "pari" $P(\vartheta) = P(-\vartheta)$)

$$P = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

(effetto P-Δ)

curva forza-spost.
non lineare

- Il corso critico viene deolatto in base alle presenti di un p.tto di biforcazione dei percorsi di equilibrio (perdita di unicità delle soluz.)

- Idem per analisi sui spostamenti "geometricamente fricoli": (resto utile)
 $|v| \ll 1 \Rightarrow \sin v \approx v \Rightarrow (K - Pl)v = 0$ $K - Pl \neq 0 \Rightarrow v = 0$ a determinare
 $K - Pl = 0 \Rightarrow v = v_{cr}$ p.tto di biforcaz. per $P = \frac{K}{\ell} = P_{cr}$

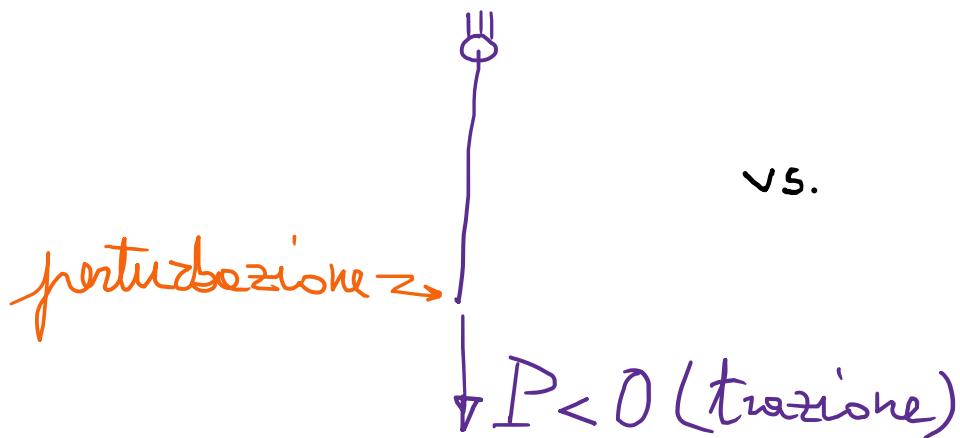
p.tto di biforcaz. per $P = \frac{K}{\ell} = P_{cr}$

Concetti fondamentali:

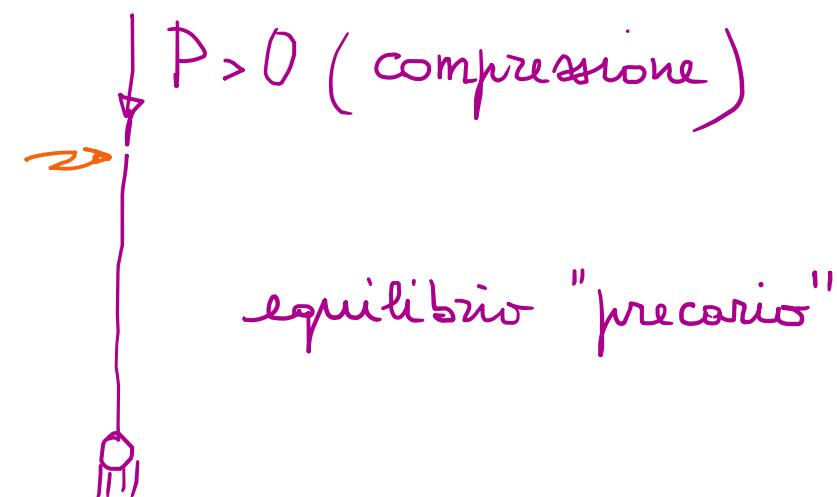
- Dalle Dinamica alle Instabilità delle Strutture:

Tornando ad un ambito "statico" (carichi lentamente variabili nel tempo), si mira ad indagare se le configurazioni di equilibrio risultino stabile oppure no.

- Per stabile, con criterio di stabilità "dinamico" (alla Liapunov), si intende la possibilità che piccole perturbazioni della configurazione non vengano ad alterarla, nel senso di far tendere il sistema ad abbandonarla.
- Due esempi intuitivi:



vs.

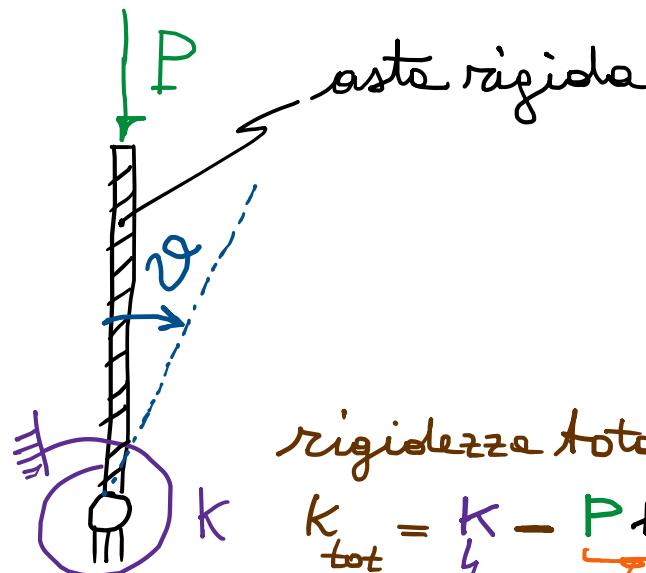


- L'analisi potrà richiedere di abbandonare l'ambito lineare, indagando effetti di non-linearietà (geometrica) nella relazione tra carichi e spostamenti, ritenendo cioè gli spostamenti "grandi", vale a dire tali da influenzare le condizioni di equilibrio.

- Carico "critico": condizione "spontanea" stabilità/instabilità.

esempio
discreto
SDOF

sistema a deformabilità
elastica concentrata
2 molle (elastica lineare)



rigidezza totale

$$K_{\text{tot}} = \frac{K}{l} - \frac{P l}{\theta}$$

elastica

geometrica (sottrae rigidezza)

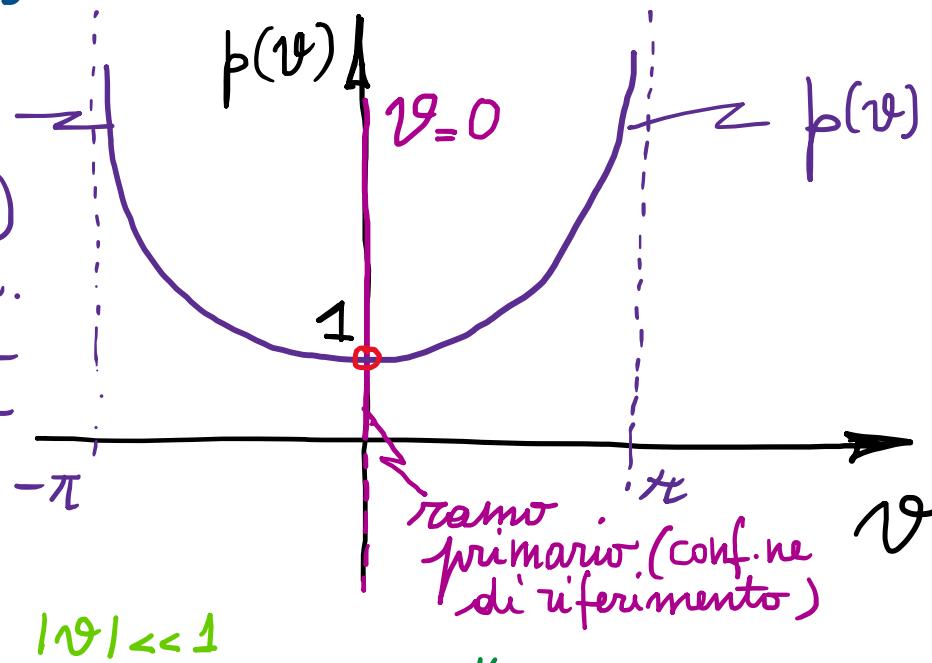
$$P_{\text{cr}} = \frac{K}{l}$$

parametro di
rigidezza
(elastica lineare)

parametro
geometrico del
sistema

- Approccio statico: carico critico solotto come punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio

ramo biforcato \rightarrow
 (bifurcated branch)
 configurazioni di equil.
 deformate, discoste da
 quelle di riferimento



$$P(v) = \frac{P(v)}{K/l} = \frac{v}{\sin v}$$

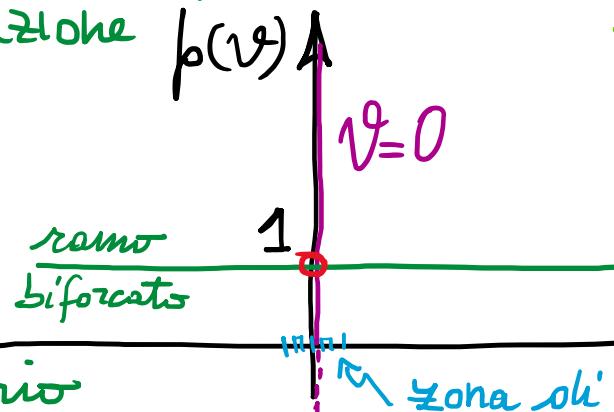
curva di risposta
 "carico-spostamento"
 non-lineare
 ("effetto P-Δ")

- Per spostamenti "geometricamente piccoli": linearizzazione dell'eq. di equilibrio e medesimo p.to di biforcazione per $P=1$:

$$(K - Pl)v = 0$$

$P \neq 1, v = 0$

$P = 1, v$ arbitrario



\Rightarrow analisi comunque utile
 ad individuare (più
 semplicemente) il carico
 critico $P_{cr} = \frac{K}{l}$

v zona di reale validità per v piccoli, $|v| << 1$

SOMMARIO (Lec. 16)

- Dalle Dinamica all'Instabilità delle strutture \Rightarrow criterio dinamico di stabilità secondo LIAPUNOV.
- Carico critico: valore caratteristico che segnala le perdite di stabilità del sistema (piccole perturbazioni non restano più confinate a risposta limitata).
- Transizione dinamica (verso il collasso).

Instabilità delle strutture

- Approssimazione statica: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate (perdite di unicità della soluzione).
- Non-linearità geometrica carico/spostamento.
- Carico critico: p.t. di biforcazione nelle mappe dei percorsi di equilibrio.
- Analisi per spostamenti "geometricamente flessibili" (e.h. stesso P_{cr}).

Next step: Approssimazione energetico per indagare la natura (stabile/instabile) delle configurazioni di equilibrio.