

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 01

Inquadramento delle tematiche del corso { Dinamica  
Instabilità  
Anelasticità .... delle strutture

(con riferimento alle Scienze delle Costruzioni - SdC)

[proprietà]

SdC

Dinamica

NON-LINEARITÀ

Instabilità

Anelasticità

Mecaniche dei  
Solidi/Strutture

3 equaz. fondam.  
(LINEARI)

- equilibrio  
(statica)

- congruenza  
(legge deform./spost.)

- legame  
costitutivo  
(legge spzzi/deform.)

(LINEARI)  
- equazioni del  
moto  
(masse; spost.  $u(t)$ ,  
velocità  $\dot{u}(t)$ , accel.  $\ddot{u}(t)$ )

"

"

"

(equil. nello confine  
deformato)  
- non-lin. geometrica  
con effetto P-Δ  
grandi spostamenti  
carico critico

"

- non-linearità di  
matrice

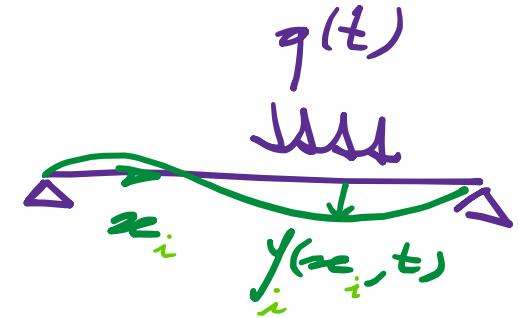
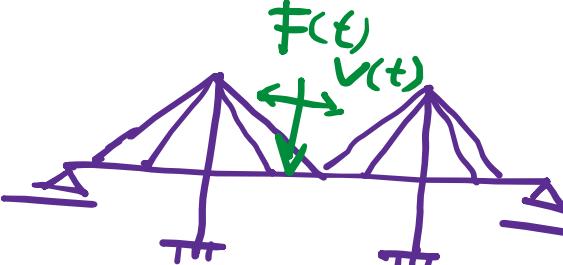
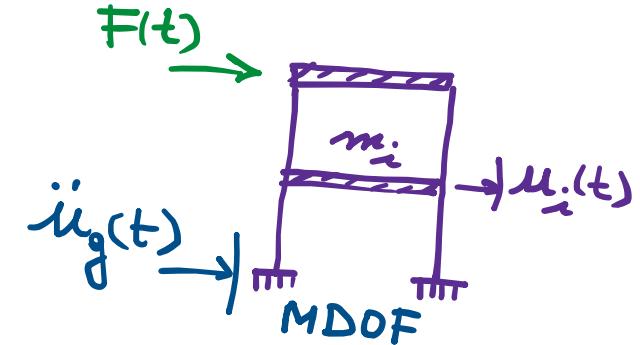
Esempi

Caratteristiche  
seleziate

Programme  
del corso

Elaborati

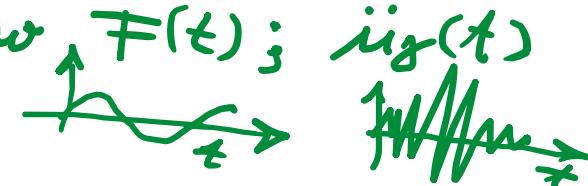
# Dinamica delle Strutture



effetti iniziali: distribuzione delle masse  
spostamenti dip. del tempo ( $t$ ), velocità, accelerazioni  
 $u(t)$   $ii(t)$   $ii_g(t)$

forzanti dipendenti del tempo  $F(t)$ ;  $ii_g(t)$

equazione del moto



Sistemi discreti

(n. finito di gradi)

Sistemi SDOF

„ MDOF

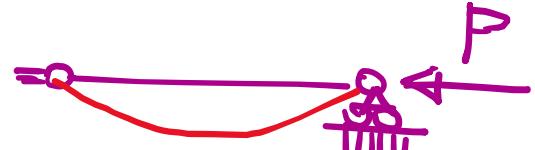


~ 2/3

Sistemi SDOF + MDOF, soggetto a forzanti dip. del tempo e ad azione sismica

## Esempi

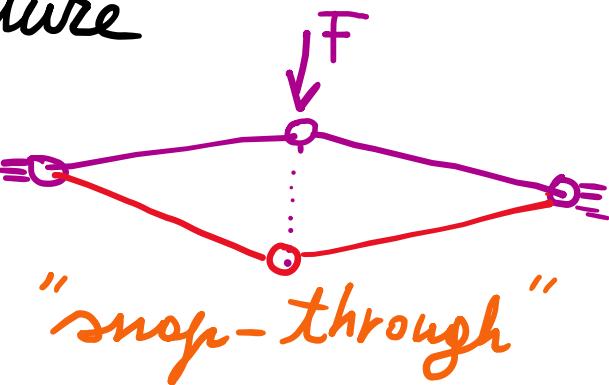
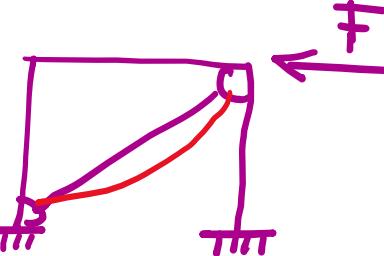
### Instabilità



"buckling"



### delle Strutture



"snap-through"

## Caratteristiche salienti

carichi quasi-statici

$$P = \beta P_0$$

carico critico  $P_{cr}$ ,  $\lambda_{cr}$

carico base  
moltiplicatore dei carichi

equil. nelle conf. ne deformate  
effetti del 2° ordine

approccio  
statico/energetico

## Programma del corso

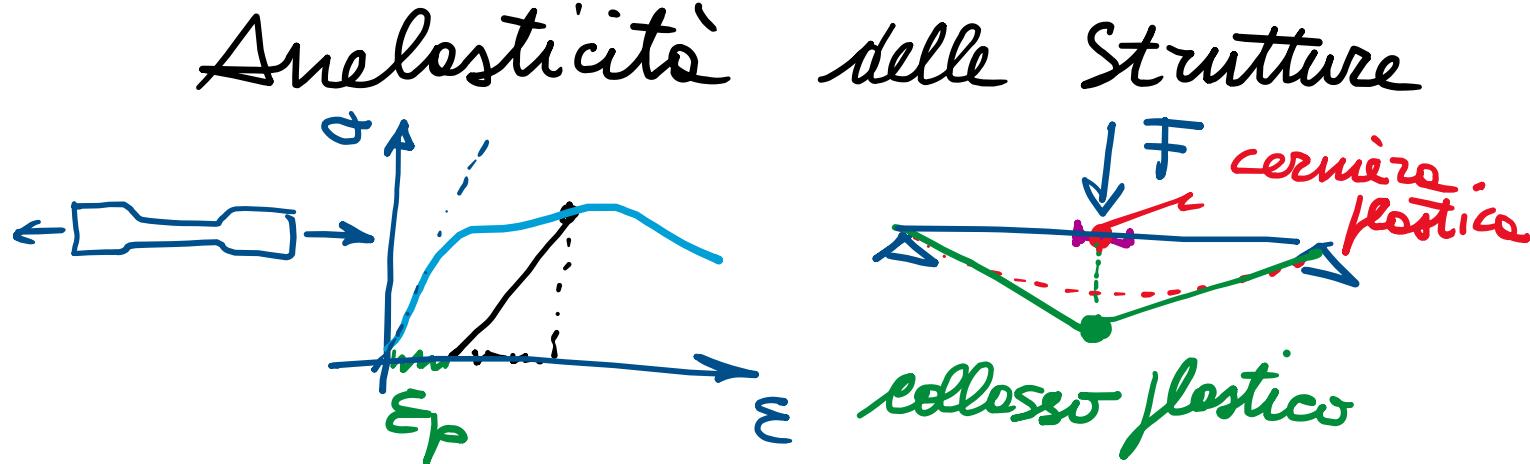
sistemi discreti MDOF ; sistemi continui  
(statico/energetico) (statico)

## Elaborati

Sistema discreto MDOF + continuo  
con det. di  $P_{cr}$ , deform. critiche, verifica di stabilità

$\sim 1/3$

Esempi



Caratteristiche salienti

Cariichi quasi-statici  $F = \lambda F_0$

$\lambda_L$  moltiplicatore di collasso

Comportamento anelastico (in particolare plastico)

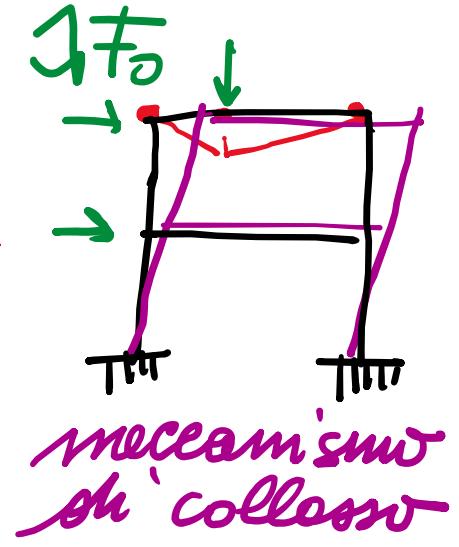
Dissipazione di energie (comportamento irrevers.)

"Calcolo e Rotta" dei telai, uso dei th. fondamentali dell'Analisi Limite

Programma del corso

Elaborati

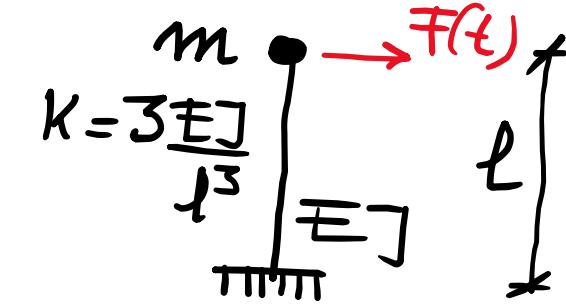
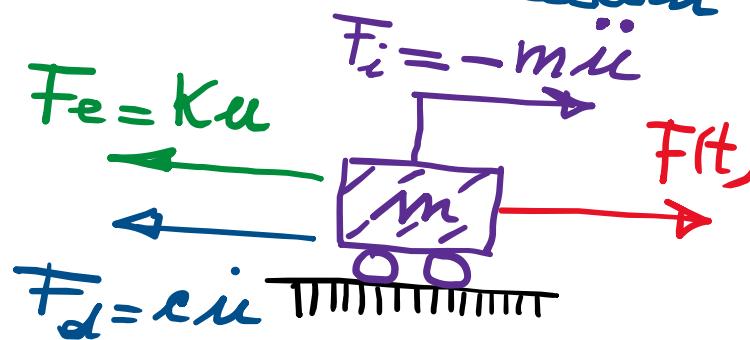
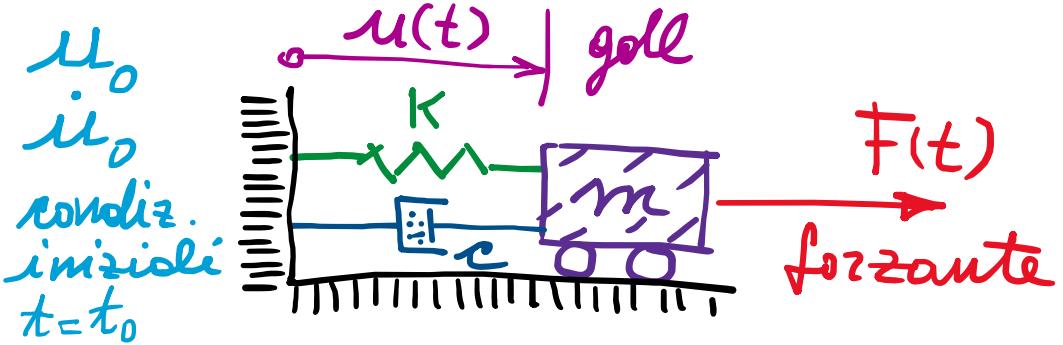
Calcolo e collasso di strutture a telai  $\sim 1/5^+$



# I) Dinamica delle Strutture

Sistemi  
Single  
Degree  
of  
Freedom

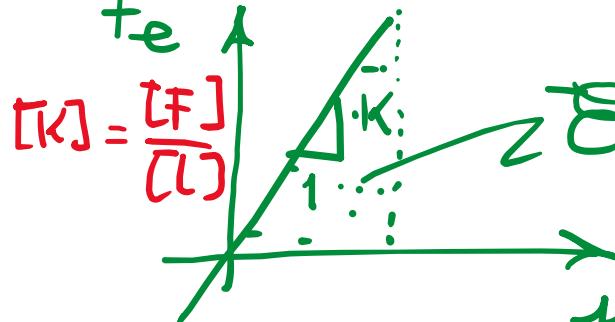
$$(.) = \frac{d}{dt} ( )$$



Molla elastica lineare

"spring"   $\rightarrow F_e = K u$

$$u = \frac{1}{K} F_e \quad \text{legge di Hooke}$$



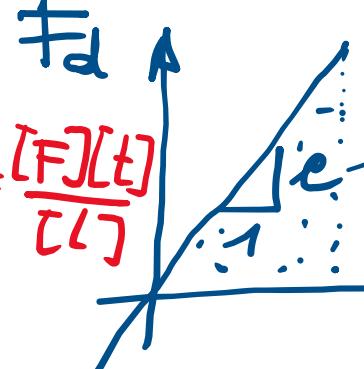
$K > 0$  costante di rigidezza

$$\frac{1}{2} K u^2 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{K} F_e^2$$

energia elastica

Smorzatore Viscoso lineare

"dash-pot"   $\rightarrow F_d = c \dot{u}$   
 $\dot{u} = \frac{1}{c} F_d$



$c > 0$   
coeff. di f. he di dissipazione  
smorzamento o di Rayleigh

# Equilibrio dinamico (Princípio di D'Alembert)

$F_i$ : forze  
d'inerzia

Regge fondamentale della dinamica  $\mathbb{F} = m\alpha \Rightarrow \mathbb{F} - ma = 0$

equazione del moto  $\leftarrow$  equazione di "equilibrio dinamico"  $\# + F_i = 0$

SDOF  $q_1 = u$

sist. tempo invariante  $m, c, k$  cost

$$\begin{cases} m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + K u(t) = F(t) \\ \text{eq. differenziale del 2° ordine con cost.} \end{cases}$$

$k=1, \dots, n$

- Altrimenti, tramite equazioni di Lagrange:  $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^* = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k}$$

forze generalizzate  $= L(q_k, \dot{q}_k)$

coordinate

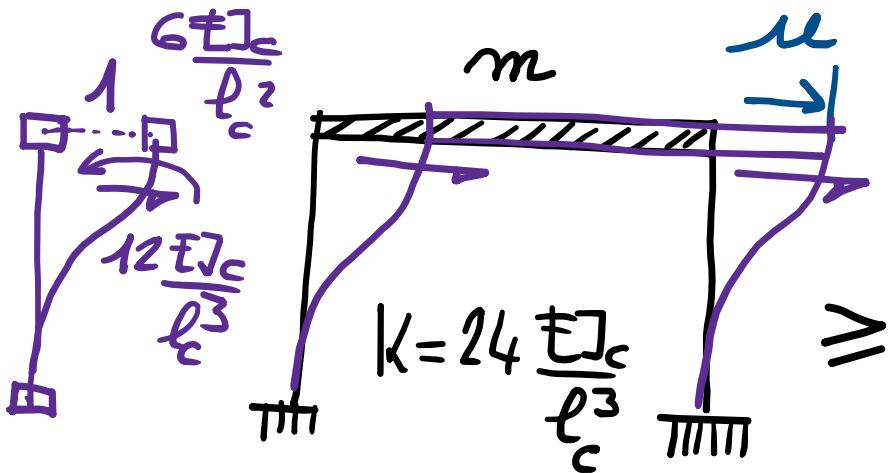
lagrangiana

$$Q_{kf}^* = - \frac{\partial V_f}{\partial q_k}$$

$$Q_{kd}^* = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = - F_d = - e_i$$

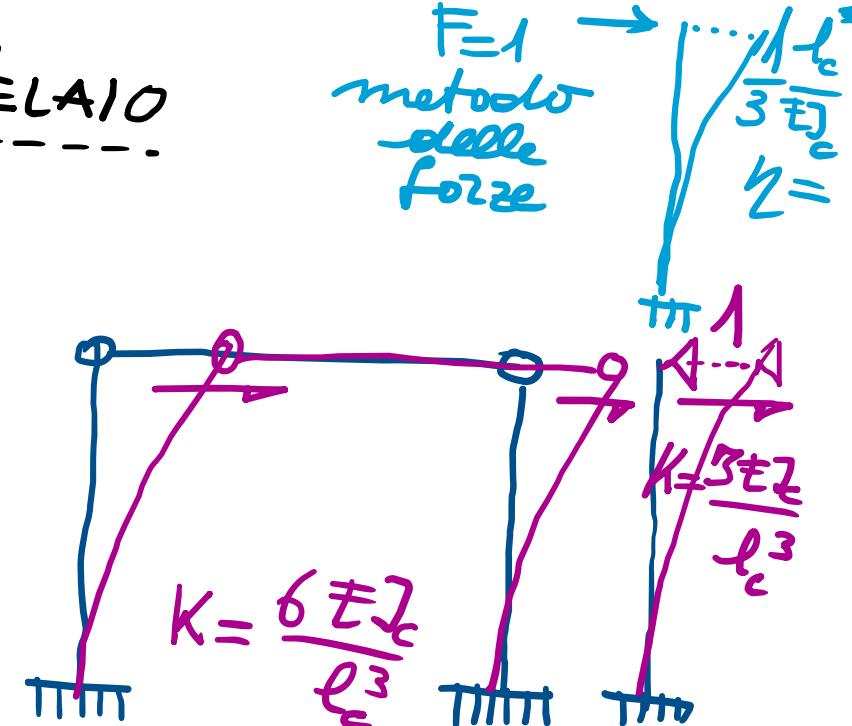
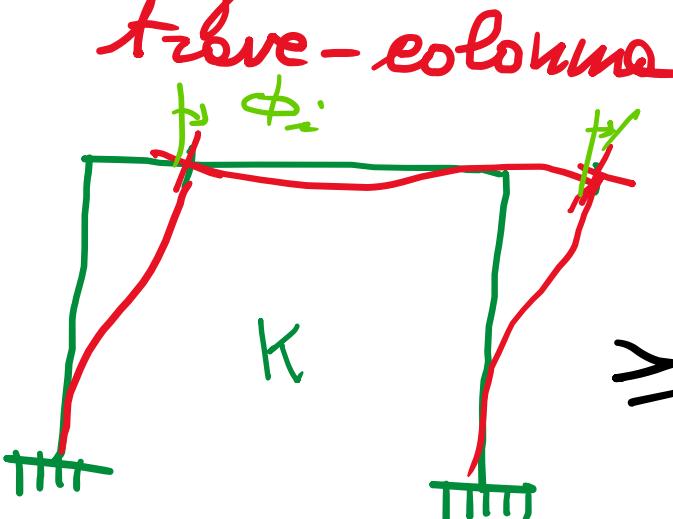
$$\begin{aligned} - T &= \frac{1}{2} m \dot{u}^2 & \text{energia cinetica} \\ - V &= \frac{1}{2} K u^2 & \text{energia pot. elastica} \end{aligned}$$

## Esempi di strutture



e: fatto di rigidezza  
trave-colonna

TELAI



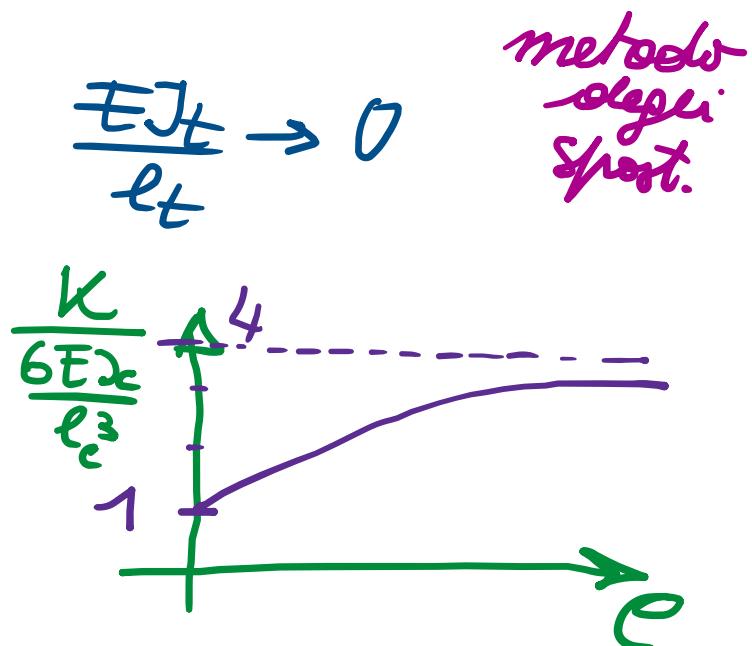
Telai "shear-type"

- $\frac{EI_t}{lt} \rightarrow \infty$  (impermeabile rigido)
- $\frac{EAc}{lc} \rightarrow \infty$  (colonne ossia lm. rigide)
- $m$  concentrate al piano

$$C = \frac{\sum \frac{EI_t}{lt}}{\sum \frac{EI_c}{lc}}$$

$$K = \frac{6EI_c}{l_c^3} \frac{12\rho + 1}{3\rho + 1}$$

(tramite "condensazione statica" dei gradi rotazionali ai nodi)



## Concetti fondamentali :

- La struttura fornisce supporto (elastico; dissipativo viscoso per sistemi reali smorzati) alle masse, della stessa o di quantità sostenute.
- L'equazione del moto del sistema dinamico si può esprimere per "equilibrio dinamico":

(principio di D'Alembert)

$m, c, K = \text{cost}$   
sistema tempo-invariante

$K_{ii} \rightarrow u(t)$

$m_{ii} \leftarrow$

$c_{ii} \leftarrow$

$F(t)$

con e.i.  $\begin{cases} u_0 \\ u_{ii_0} \end{cases} @ t=t_0$

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad \text{eq. ne differenziale del 2° ordine in } u(t)$$

- Se costante di rigidezza  $K$ , che rappresenta la struttura (elastica lineare), si determina in ambito statico con metodi noti (vedi metodo delle forze  $\Rightarrow$  cedevolezza  $\eta = K^{-1}$ ; metodo degli spostamenti  $\Rightarrow$  rigidezza  $K = \eta^{-1}$ ). Es.:

$K = 48 \frac{EJ}{l^3}$

$M(x) = \frac{1}{2}x$

$\eta = 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{24} \frac{1}{3} \frac{1}{8} \frac{l^3}{EJ}$

PLV(PFV)  $= \frac{1}{48} \frac{l^3}{EJ}$

# SOMMARIO (Lec. 01)

- Le tematiche della Dinamica, della Instabilità e della Anelasticità delle Strutture: aspetti specifici e interagenti.
- Posizionamento vs. la SeC; equazioni; caratteristiche; programma.

## + Parte 1 - Dinamica delle Strutture

- Sistemi dinamici ad un gdl (SDOF). L'oscillatore semplice.
- Equazione del moto  equilibrio dinamico (principio di d'Alembert).  
equazioni di Lagrange.
- Esempi di sistemi strutturali SDOF, con determinazione delle costante di rigidezza.
- Telaio a portale; fattore di rigidezza trave/colonna; telaio "shear type".