Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

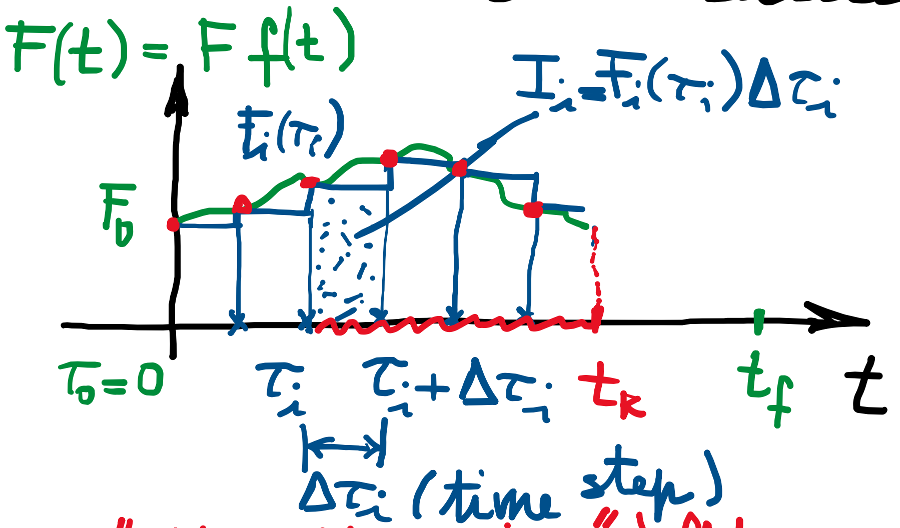
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 08

Risposta a forzante generica → Integrale di Duhamel



"discretizzazione" dell'asse dei t

$$F(t_k) \simeq \sum_{0\ i}^{k-1} \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\ \overbrace{\delta(t_k,\tau_i)}^{\text{f.ne delta di Dirac (impulso unitario in } \tau_i)}$$

Sovrapposizione di un numero finito (discreto) di impulsi I_i ricevuti dal sistema negli istanti τ_i

$$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\, \overbrace{\delta(t,\tau)}^{\delta(t-\tau)}\, d\tau \quad \text{(proprietà tipica della } \delta)$$

INPUT $\downarrow \delta(t,\tau)$

$\boxed{\text{SISTEMA}}$

OUTPUT $\downarrow h(t,\tau)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t \qquad \omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \simeq \omega_1 \quad |\zeta| \ll 1$$

$$u_0(t_k) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\ \overbrace{h(t_k,\tau_i)}^{\text{f.ne risposta ad impulso unitario}}$$

("convoglia" in t gli effetti dinamici di impulsi ricevuti in τ)

$$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$$

$$= \int_0^t F(\tau)\, \overbrace{h(t,\tau)}^{h(t-\tau)}\, d\tau$$

Integrale di "convoluzione"

Integrale di Duhamel:

$$u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\, \underbrace{\frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\, d\tau$$

τ variabile di integraz.

t istante di lettura della risposta

$$= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

- Fornisce una rappresentazione formale analitica esatta della risposta
- Raramente determinabile analiticamente:
  - in genere $F(t)$ non è nota in forma analitica, bensì "campionata" ad istanti di tempo discreti t_i.
  - qualora lo fosse, per espressioni generiche della forzante, non soluz. analitica in forma chiusa
- In genere valutabile mediante integrazione numerica in forma approssimata.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow h(t)$$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t-\tau)\, d\tau \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Scritture alternative

$$\frac{k}{m} = \omega_1^2 \,, \quad \omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$$

- $F(t) = F\, f(t)$:

$$u_0(t) = \frac{\overset{u_{st}}{\overbrace{F}}\ \frac{k}{K}}{m\omega_d}\int_0^t f(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

$$= N(t)\, u_{st} \;; \quad \underset{\zeta \ll 1}{N(t)} = \frac{\omega_1}{\cancel{\sqrt{1-\zeta^2}}} \int_0^t f(\tau)\, \frac{e^{\zeta\omega_1\tau}}{e^{\zeta\omega_1 t}}\, \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

fattore di amplificazione dinamica dipendente dal tempo.

- $$u_0(t) = \frac{1}{\omega_1}\,\underbrace{\frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau}_{V(t)\ \text{"pseudo-velocità"}} = \frac{V(t)}{\omega_1}$$

(come per risposta armonica)

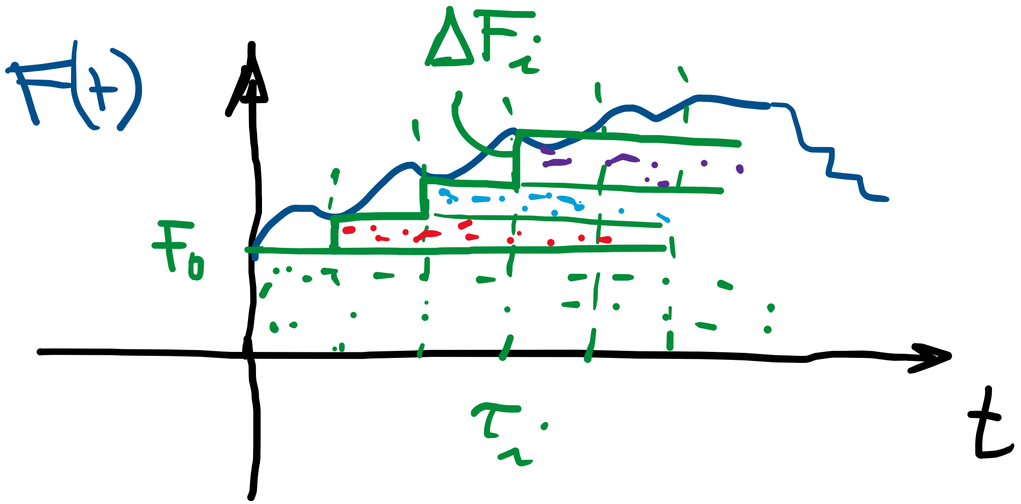
- $\sin\omega_d(t-\tau) = \sin\omega_d t\cos\omega_d\tau - \cos\omega_d t \sin\omega_d\tau \Rightarrow$

$$u_0(t) = \underbrace{A(t)}\sin\omega_d t - \underbrace{B(t)}\cos\omega_d t$$

Ampiezze dip. ti dal tempo

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t F(\tau)\,\frac{e^{\zeta\omega_1\tau}}{e^{\zeta\omega_1 t}}\cos\omega_d\tau\, d\tau \\ B(t) = \text{"} \quad \cdots\cdots \sin\omega_d\tau \cdots \end{cases}$$

Visione alternativa:



Sequenze di forzanti a gradino:

$$u_0(t) = F_0\,A(t) + \sum_i \frac{\Delta F_i(\tau_i)}{\Delta\tau_i}\,A(t-\tau_i)\,\Delta\tau_i$$

f.ne risposta a gradino unitario

$$\Big\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$$

$$= F_0\,A(t) + \int_0^t \dot F(\tau)\,A(t-\tau)\,d\tau$$

$$dA = -\dot A\,d\tau$$

Integrando per parti:

$$u_0(t) = \cancel{F_0\,A(t)} + F(\tau)\,A(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t F(\tau)\,\underbrace{\dot A(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\underbrace{F(t)\,A(t-t)}_{A_0=0} - \cancel{F_0\,A(t)}$$

Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel $\int_0^t y(\tau)\,d\tau$

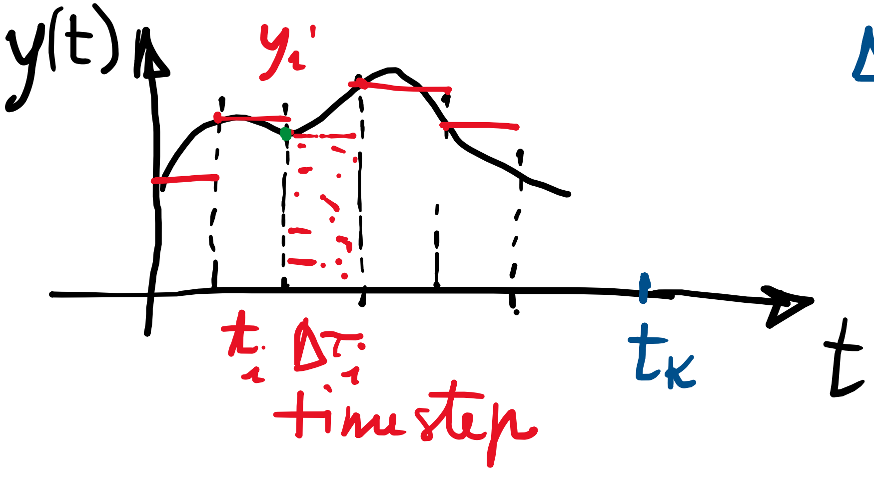
$\Rightarrow$ vedi calcolo numerico

• Regola dei rettangoli

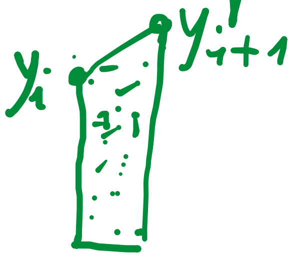
$$I_{int} \simeq \sum_{i=0}^{K-1} y_i \, \Delta\tau_i$$

$\Delta\tau_i = \Delta\tau$

$$= \Delta\tau \left(y_0 + y_1 + \dots + y_{K-1} \right)$$



• Regola dei trapezi



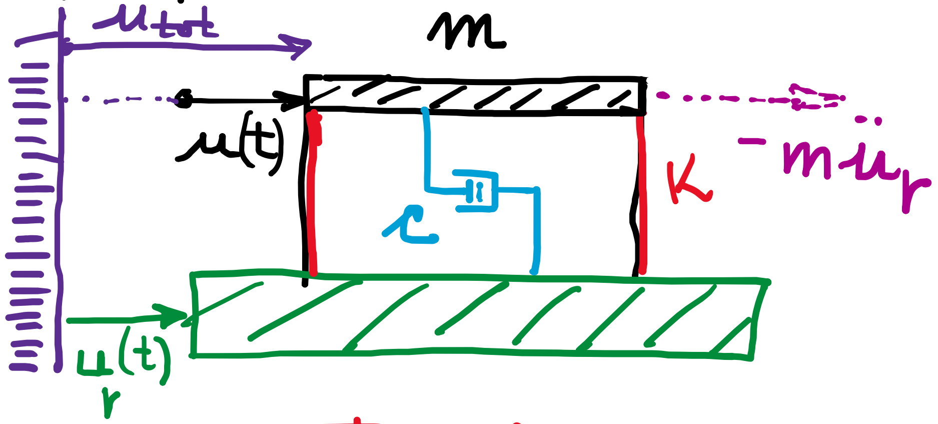
$$I \simeq \sum_{i=0}^{K-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta\tau_i$$

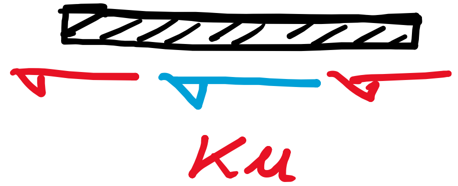
$$= \frac{\Delta\tau}{2} \left(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{K-1} + y_K \right)$$

• Regola di Simpson, etc.

Risposta al moto del riferimento (vedi azione sismica)

$u_{tot} = u_r + u$





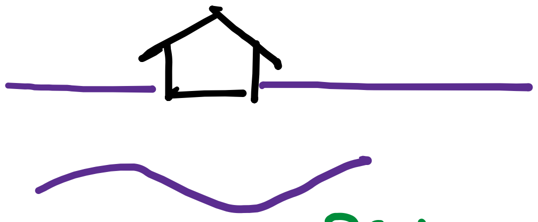
$\rightarrow F_I = -m\ddot{u}_{tot}$

$= -m(\ddot{u}_r + \ddot{u})$

$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = -m\ddot{u}_r(t) \leftarrow$ Forzante indotta per inerzia quale effetto di trascinamento

es. moto del terreno per effetto del terremoto $(\ddot{u}_g(t))$

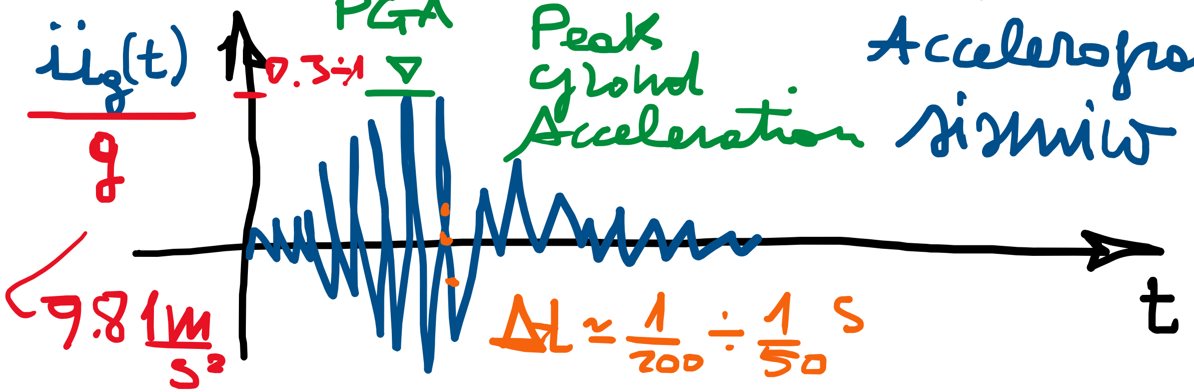
↳ ground



estensione limitata della strutt. di massa contenuta, in modo da non creare interazioni suolo-struttura

Peak ground Acceleration

Accelerogramma sismico



$\Delta t \simeq \frac{1}{200} \div \frac{1}{50}$ s

Spettro di risposta

$S_a = \max_t \{\ddot{u}_t\}$

$\rightarrow$ Spettro di progetto

Risposta sismica

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = (-)\,\ddot{u}_g(t) \Rightarrow u(t) \text{ per } \int \text{ di D.}$$

Spettri di risposta (BIOT, 1932)

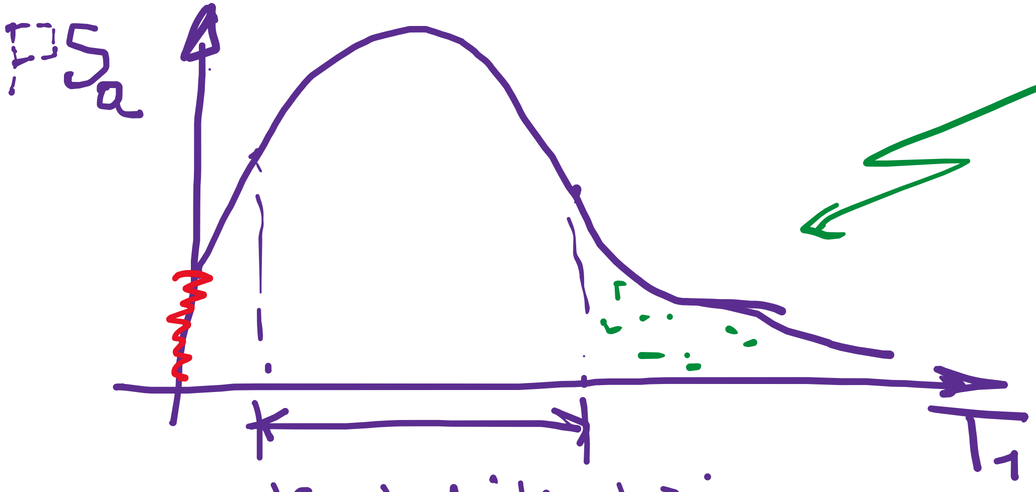
$$\begin{aligned} S_d &= \\ S_v &= \max_t \\ S_e &= \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} & u(t;\, T_1, \zeta) \\ & \dot{u}(t;\, T_1, \zeta) \\ & \ddot{u}_t(t;\, T_1, \zeta) \end{aligned} \right.$$

Pseudo-spettri

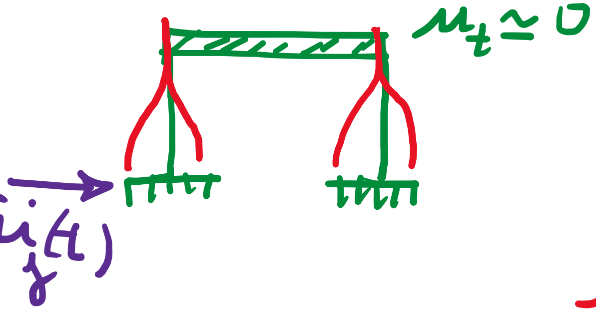
$$S_d \Leftrightarrow PS_v = \omega_1 S_d$$

$$PS_a = \omega_1 PS_v = \omega_1^2 S_d$$

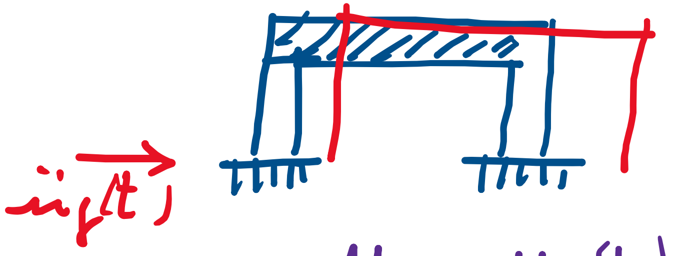
(come per risposta armonica)



Isolamento sismico (strutt. fless.)
T_1 grandi



Vs. Strutture rigide



$u_t \simeq u_g(t)$
$(u \simeq 0)$

SOMMARIO (Lez. 08)

(di convoluzione)

- Risposta a forzante generica => sequenza di impulsi => Integrale di D.
- Scritture interpretative alternative (come per risposta armonica).
- Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel.

— o —

- Risposta al moto del riferimento (es. earthquake).
- Forzante apparente indotta per effetto d'inerzia (trascinamento).
- Risposta simbolica via Duhamel.
- Spettri e pseudo-spettri di risposta (ev. di progetto).
- Concetto di isolamento delle vibrazioni sismiche.

Next step: Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (Metodo di Newmark) -
Risposta nel dominio delle frequenze.