

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

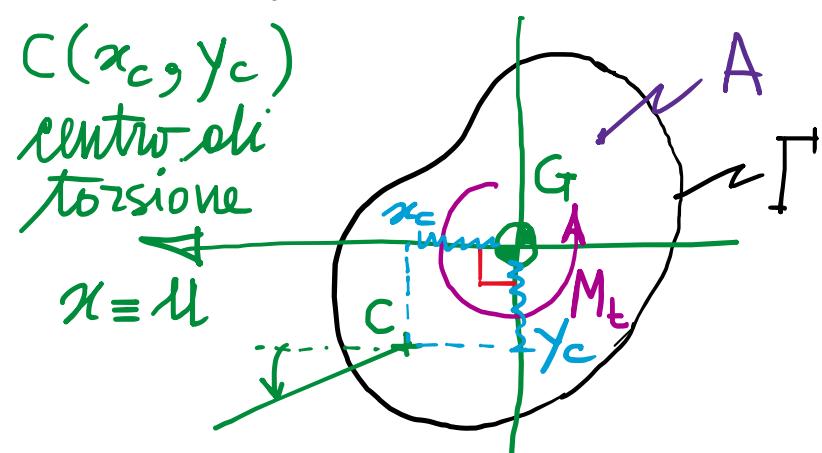
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

## Centro di torsione

Nell'approccio agli spostamenti si presume un campo di spostamenti ricomprensente :

- una rotazione rigida nel piano della sezione (rispetto a punto C, detto centro di torsione, in generale discosto dal baricentro G);
- un ingombramento fuori piano delle sezione, riferibile a tale punto:



$$\theta(z) = \beta z$$

"torsione"  
(angolo unitario  
di torsione)

$$\beta = \frac{d\theta}{dz} = \text{cost}$$

Campo di spostamenti ( $x_c \neq 0, y_c \neq 0$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_x = -\beta z(y - y_c) \\ \delta_y = \beta z(x - x_c) \end{array} \right\} \text{rotazione rigida rispetto a } C$$

$$\delta_z = \beta \Psi_C(x, y) \quad \begin{array}{l} \text{funzione di ingombamento} \\ \text{riferito a } C \end{array}$$

Campo delle tens. tangenziali:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{zx} = G\beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2G\beta = c \\ \text{- eq. di congr.} \end{array} \rightarrow \nabla^2 \Psi_C = 0 \text{ in } A$$

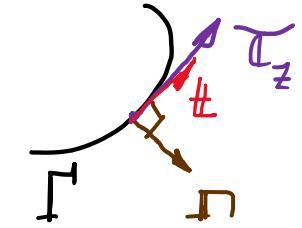
definite a  
muro di compon.  
rototraslazione  
fuori piano

eq. di Laplace

Condizione al contorno:

$$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$= G\beta [(\psi_{c,z} - y + y_c) n_x + (\psi_{c,y} + x - x_c) n_y] = 0$$



$$\underbrace{\psi_{c,x} n_x + \psi_{c,y} n_y}_{\text{derivate direzionale di } \psi_{c,n}} + y_c \frac{\partial n_x}{\partial n} - x_c \frac{\partial n_y}{\partial n} = n_x y - n_y x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}$$

stesso termine noto visto per  $\psi_G$   
nelle direz. n

$$(\psi_c + y_c x - x_c y)_{,n} = n_x y - n_y x \quad \text{c.c. di Neumann-Dini}$$

$\psi^*$  differisce da  $\psi_c$  per  $\nabla^2 \psi^* = 0$  in A ( $\propto \nabla^2 \psi_c = 0$ )  
un campo lineare in x e y

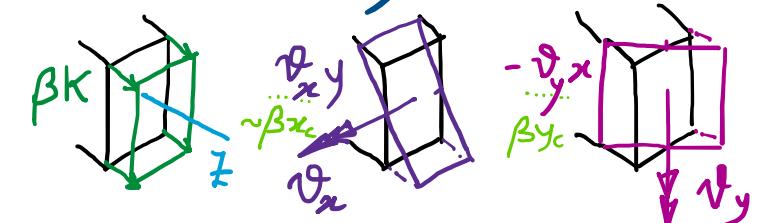
$\psi^*$  e  $\psi_G$  devono risolvere lo stesso pb. di N-D per l'equazione di Leflace:

$$\Rightarrow \psi^* = \psi_G + K \quad (\text{differiscono al più per una costante})$$

Pertanto:

$$\psi_c(x, y) = \psi_G(x, y) + K - y_c x + x_c y$$

$$\text{valori} \quad \psi_c = \psi_G + K \rightarrow 0$$



compte di moto rigido fuori piano della sezione

- Si definisce centro di torsione il punto C rispetto al quale avviene la rotazione rigida nel piano delle sezione e risultano nulle le seguenti rotazioni medie fuori piano delle sezione rispetto agli assi x e y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\Delta_2}{y} y^2 dA = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\Delta_2}{y} dJ_x = 0 \Rightarrow \int_A \bar{\psi}_c y dA = 0 \\ \bar{\nu}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\Delta_2}{x} x^2 dA = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\Delta_2}{x} dJ_y = 0 \Rightarrow \int_A \bar{\psi}_c x dA = 0 \end{array} \right.$$

PLV: flessione torsione

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{M_x} \cdot \bar{\nu}_x = \int_A \frac{\Delta_2}{J_x} y dA \cdot \Delta_2 \\ \cancel{M_y} \cdot \bar{\nu}_y = \int_A -\frac{\Delta_2}{J_x} x dA \cdot \Delta_2 \end{array} \right.$$

ingobbamento  
medio nullo  
fuori piano

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0$$

$$\bar{\psi}_G = \frac{1}{A} \int_A \psi_G dA = 0$$

Quindi

coordinate del centro di torsione

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \bar{\psi}_G (x, y) y dA; \quad y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \bar{\psi}_G (x, y) x dA$$

N.B. Se Esse di simm. rette, C è sulla asse

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \bar{\psi}_G y dA + \int_A K y dA - \int_A y_c x y dA + \int_A x_c y^2 dA = 0 \\ \int_A \bar{\psi}_G x dA + \int_A K x dA - \int_A y_c x^2 dA + \int_A x_c y x dA = 0 \end{array} \right.$$

- Torsione: Approssimazione agli sforzi (taghiamo a priori l'equilibrio, imponiamo la congruenza)

H<sub>p</sub>:  $\exists$  f.n.  $\Phi = \Phi(x, y)$  funzione potenziale di sforzo o di Airy (definita a meno di cost.)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \varphi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

[ soltate della necessaria "regolarità"  
↳ Enza delle soluzioni ]

- Eq. di equilibrio:

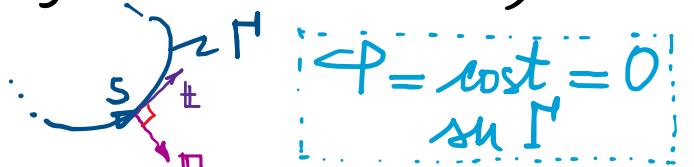
$$\tau_{zx,xx} + \tau_{zy,y} = 0 \quad \text{in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,x} + (-\varphi_{,x})_{,y} = \varphi_{,yyx} - \varphi_{,xxy} = 0 \quad \text{Th. di Schwarz}$$

- Eq. di congruenza:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \quad \text{in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,y} - (-\varphi_{,x})_{,x} = \underbrace{\nabla^2 \Phi(x, y)}_{\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}} = -c$$

- Condizione al contorno (equil.):

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \Rightarrow \varphi_{,y} n_x - \varphi_{,x} n_y = \varphi_{,x} t_x + \varphi_{,y} t_y$$



c.e. di Dirichlet

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(x, y) = -c \quad \text{in } A}$$

Eq. di Poisson con termine noto costante

$$c \leftrightarrow M_t$$

- Si ottiene pertanto un pb. di Dirichlet per l'eq. di Poisson (con termine noto costante).

- Equivalenze statice (tra il campo delle tensioni tangenziali e il momento torcente che le ha generate):

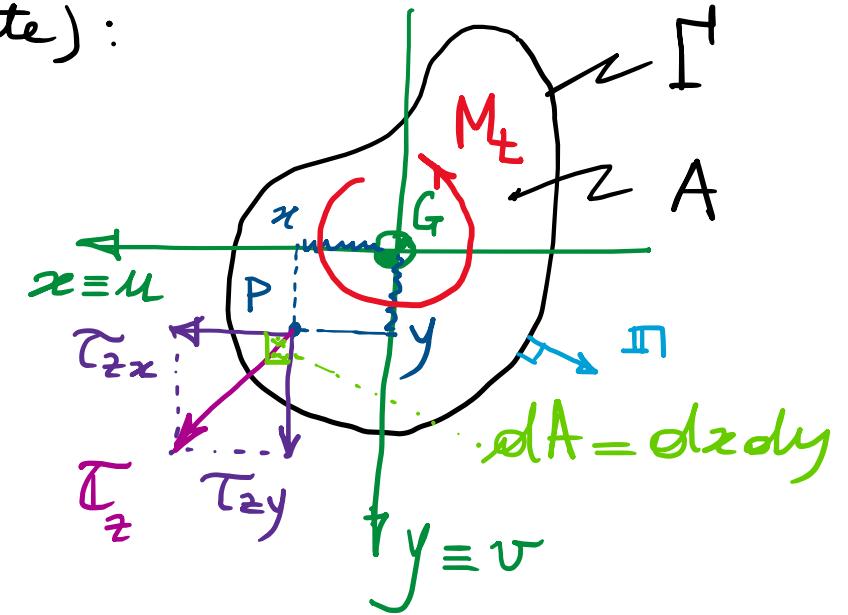
$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A (-\varphi_{,x}x - \varphi_{,y}y) dA$$

$$\begin{aligned} &= - \int_A [(\varphi_{,x})_{,x} + (\varphi_{,y})_{,y}] dA + 2 \int_A \varphi dA \\ \text{Th. Div.} : &\int_A dA \rightarrow \int_{\Gamma} d\Gamma \quad \text{O su } \Gamma \\ &\pm - \int_{\Gamma} \varphi (x_{n,x} + y_{n,y}) d\Gamma + 2 \int_A \varphi dA \end{aligned}$$

Quindi:

$$M_t = 2 \int_A \varphi(x, y) dA \quad M_t \leftrightarrow c$$



$$\begin{aligned} (\varphi_{,x})_{,x} &= \varphi_{,x}x + \varphi_{,x}^{(1)}x \\ (\varphi_{,y})_{,y} &= \varphi_{,y}y + \varphi_{,y}^{(1)}y \end{aligned}$$

$$-\varphi_{,x}x = -(\varphi_{,x})_{,x} + \varphi$$

$$-\varphi_{,y}y = -(\varphi_{,y})_{,y} + \varphi$$

## Quadro sinottico (Torsione)

Approccio agli spostamenti

$\psi_G(x, y)$ ;  $\beta$   
f. ne di ingobbiamento "torsione", cost

PL. di Neumann-Dini  $\nabla^2 \psi_G = 0$  in A

per l'eq.ne di Laplace  $\psi_{G,n} = \underbrace{n_x y - n_y x}_{\propto \cdot \#}$  su  $\Gamma$

$$\beta = \frac{M_t}{G J}; \quad J(\psi_G) = \frac{J_G}{\eta \geq 1}$$

$$T_{zx} = G \beta (4 \psi_{G,x} - y) = \varphi_{,y}$$

$$T_{zy} = G \beta (\psi_{G,y} + x) = -\varphi_{,x}$$

$\psi_G \rightarrow \varphi$

campo delle tensioni tangenziali

incognite

Approccio agli sforzi

$\varphi(x, y); c$   
f. ne soli Airy costante di integrazione

equazioni

PL. di Dirichlet  $\nabla^2 \varphi = -c$  in A  
per l'eq.ne di Poisson  $\varphi = 0$  su  $\Gamma$

relazioni

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA$$

corrispondenze

$$2G\beta = c$$

Infatti:  $\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = -c$   
 $G\beta(-4\psi_{G,y}x - 1 + 4\psi_{G,x}y - 1) = -c$  Th. Schwarz

$$-2G\beta = -c$$

$$\psi_{G,yx} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{,y} + y$$

$$\psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \varphi_{,x} - x$$

$$\varphi \rightarrow \psi_G$$

## Metodi di soluzione:

- Analitici: (problem differenziali)

- Esatte (possibile solo in casi particolari, in forme chiuse o mediante sviluppi in serie).

- Approssimate (comunque valide ai fini ingegneristici, in forme chiuse o per sviluppi in serie troncati).

- Numerici: (problemi algebrici  $\Rightarrow$  per discretizzazione)

- Metodo delle Differenze Finite (FDM).  $\Rightarrow$  Calcolo Numerico

- Metodo degli Elementi Finiti (FEM).  $\Rightarrow$  Computational Mechanics of Solids and Structures

es. caso delle sezione ellittica

es. profili sottili (aperti o chiusi)

passaggio da numero  $\infty$  di gall a numero finito, cioè discreto, di gall