Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 03

AC geometrica - Tramite I e II Th. sulle catene cinematiche (CN di labilità) -

- Si presuppone la potenziale labilità dell'intero sistema articolato di (n) corpi rigidi, andando a verificare/imporre tutte le possibili condizioni di allineamento -

- Computo delle condizioni di allineamento e dei CIR da considerare:

  - Coppie o doppiette di aste:

$\forall$ asta, e sono n, possiamo associare $(n-1)$ coppie, pur considerando che 1/2 di queste sono distinte $(i,j \equiv j,i)$

$$n_d = n\,\frac{(n-1)}{2} \sim n^2 \longleftrightarrow \text{tale è anche il n° di CIR relativi } \Omega_{ij}: \quad n_{\substack{CIR\\rel.}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$n_{\substack{CIR\\ass.}} = n$$

$$n_{CIR}^{tot} = n\left(\frac{\cancel{1}\,2}{2} + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} \sim n^2$$

  - Triple o triplette di aste:

$\forall$ coppia, e sono $\frac{n(n-1)}{2}$, possiamo associare $(n-2)$ triple, pur considerando che 1/3 di queste sono distinte $(i,j,k \equiv j,k,i \equiv k,i,j)$

$$n_t = n\,\frac{(n-1)}{2}\,\frac{(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim n^3$$

- Analisi certo dispendiosa, al crescere di n.

$$n_{c.all.}^{tot} = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\cancel{3}}{3} + \frac{n-2}{3}\right) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6} \sim n^3$$

- Infatti, dal calcolo combinatorio:

Il numero N di sottoinsiemi di K elementi di un insieme di n elementi è: $(K<n)$

$$N = \underbrace{\frac{1}{K!}}_{\text{n° di permutazioni di } K \text{ elementi}} \prod_{i=0}^{K-1} (n-i) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-K+1)}{K!} = \underbrace{\binom{n}{K}}_{\text{coeff. binomiale "n su K"}} = \frac{n!}{K!(n-K)!} \overset{\text{infatti}}{=} \frac{\cancel{(n-K)!}\,(n-K+1)\ldots(n-1)n}{K!\,\cancel{(n-K)!}}$$

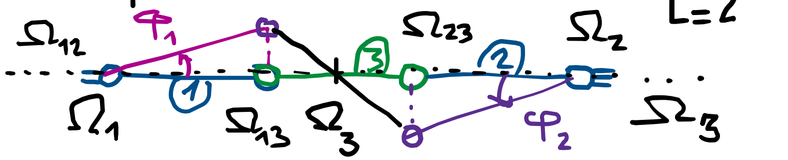
$K=2$, $N = n_d = \dfrac{n(n-1)}{2!}$

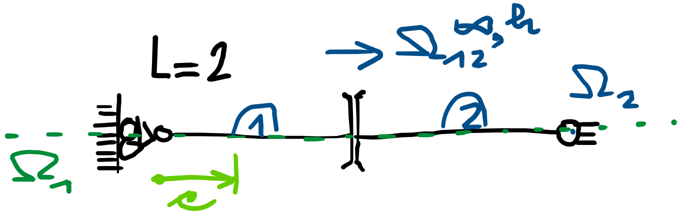
$K=3$, $N = n_t = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

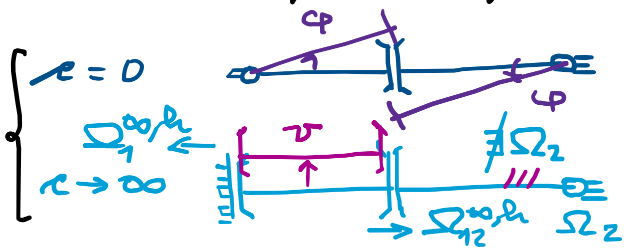
- laddove condiz. di allin. venissero violate, quel sottosistema risulterebbe non labile
- Se tutti i CIR risultano univocamente determinati, e non vi sono casi degeneri con CIR coincidenti, il sistema risulta al più una volta labile $(L \leq 1)$

$L = n = 4$

- " " " " " " a meno di c coordinate, " " "
" " " " " " c+1 volte labile $(L \leq c+1)$
- Spesso è necessario procedere in maniera iterativa o provare a rappresentare la spostata per individuare completamente i CIR.

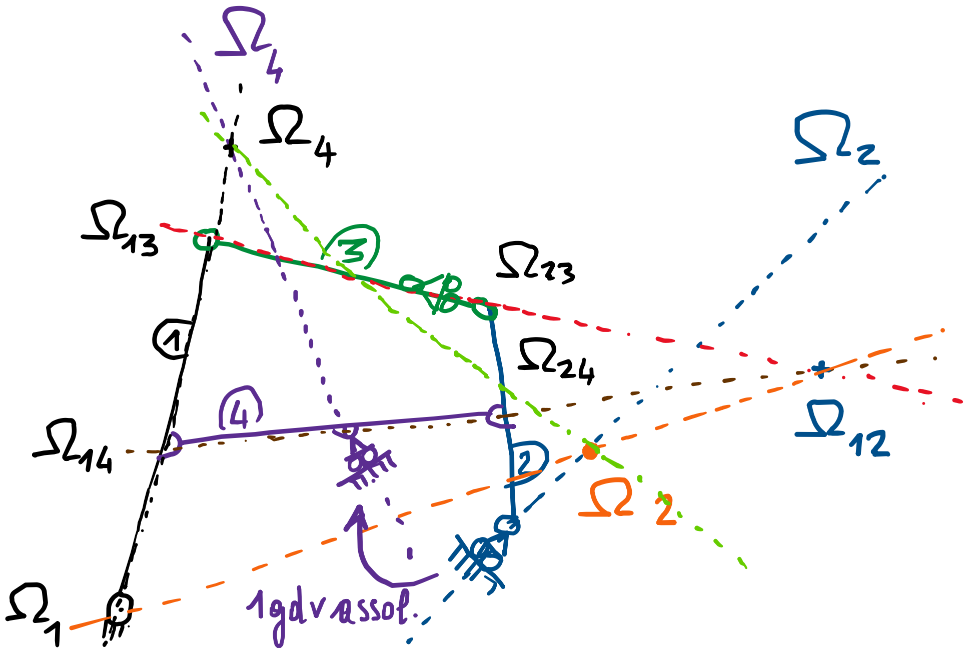






meccanismi base

- Esempio: "pseudo quadrilatero articolato" (con 1 gdv assoluto spostato) $(n=4)$



$n=4$

sistema non labile

- Doppiette $\frac{n(n-1)}{2} = 6$

12 Ω_1 (Ω_2) Ω_{12} ② Ω_2

[13 Ω_1 Ω_3 Ω_{13}]

14 Ω_1 (Ω_4) Ω_{14} ③ Ω_4

[23 Ω_2 Ω_3 Ω_{23}]

24 Ω_2 Ω_4 Ω_{24} ④ violata $\Rightarrow$ 2+4 è non labile $\Rightarrow$ in cascata, anche 1 e 3 fisse. $(L=0)$

[34 Ω_3 Ω_4 Ω_{34}]

- Triplette $\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

asse biella 3 • 123 (Ω_{12}) Ω_{23} Ω_{13}

124 (Ω_{12}) Ω_{24} Ω_{14}

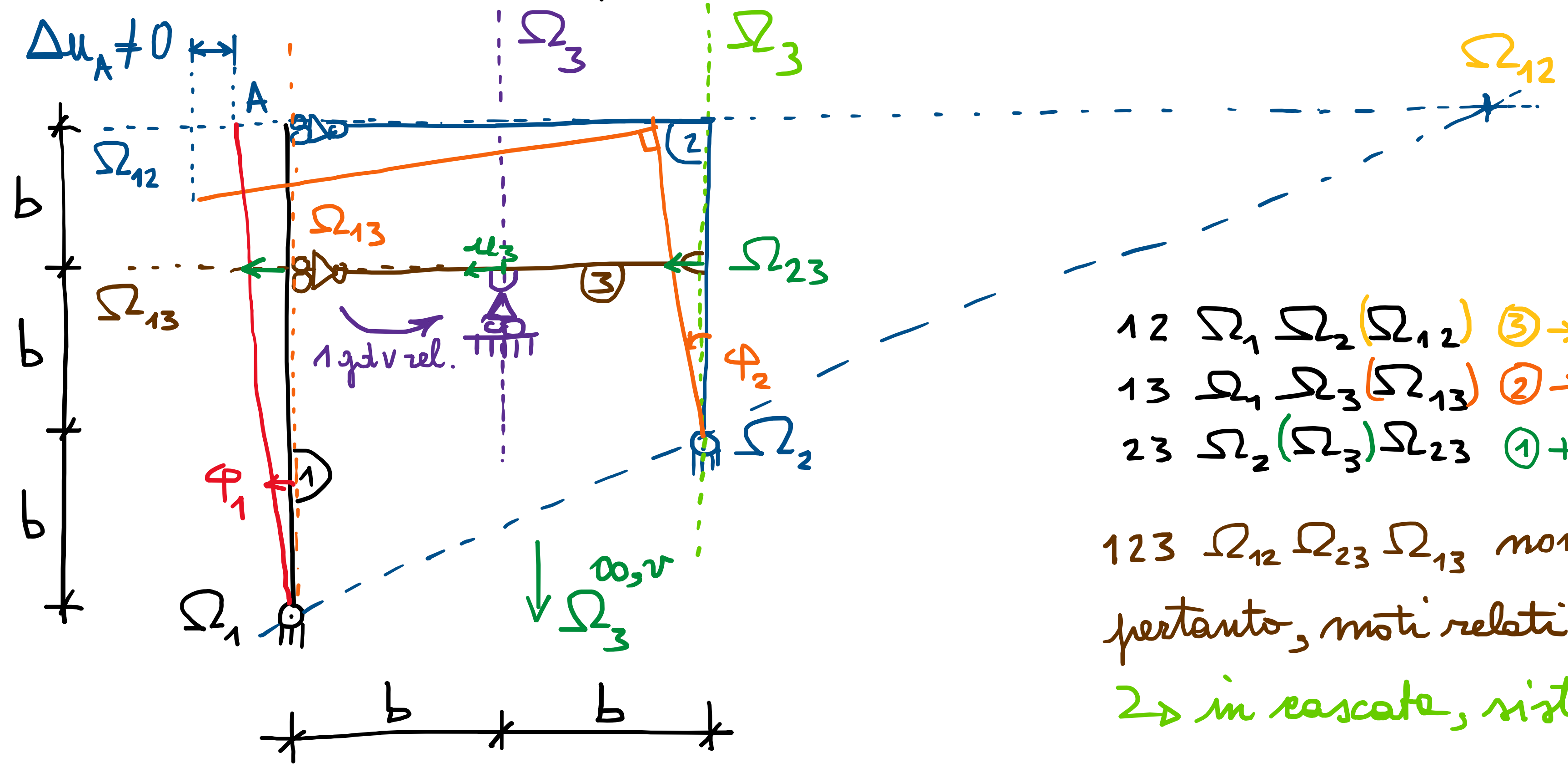
$\Big\}$ ① Ω_{12}

[134 Ω_{13} Ω_{34} Ω_{14}]

[234 Ω_{23} Ω_{34} Ω_{24}]

biella ev. condensabile in carrello ai fini dell'AC (labilità); se labile, ripristinata per individuarne CIR.

- Ulteriore esempio (simil-quadrilatero articolato, con un gdv relativo spostato) ($n=3$)



12 $\Omega_1\ \Omega_2\ (\Omega_{12})$ ③ → Ω_{12}

13 $\Omega_1\ \Omega_3\ (\Omega_{13})$ ② → Ω_{13}

23 $\Omega_2\ (\Omega_3)\ \Omega_{23}$ ① + carrello ⇒ $\Omega_3^{\infty, v}$

123 $\Omega_{12}\ \Omega_{23}\ \Omega_{13}$ non allineati → violata

pertanto, moti relativi tra 1, 2, 3 impossibili

⇒ in cascata, sistema non labile.

Infatti, provando direttamente a tracciare la spostata, facendo fede su continuità in Ω_{23} (e Ω_{13}), si riscontrerebbe violazione di compatibilità nel carrello relativo tra 1 e 2:

(vs. sinistra) $u_3 = \varphi_1 \cdot 2b = \varphi_2 \cdot b \Rightarrow \varphi_2 = 2\varphi_1$

ma $u_A^1 = \varphi_1 \cdot 3b$; $u_A^2 = \varphi_2 \cdot 2b = 2\varphi_1 \cdot 2b = 4\varphi_1 b \Rightarrow \Delta u_A = u_A^2 - u_A^1 = 4\varphi_1 b - 3\varphi_1 b = \varphi_1 b \neq 0$