Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

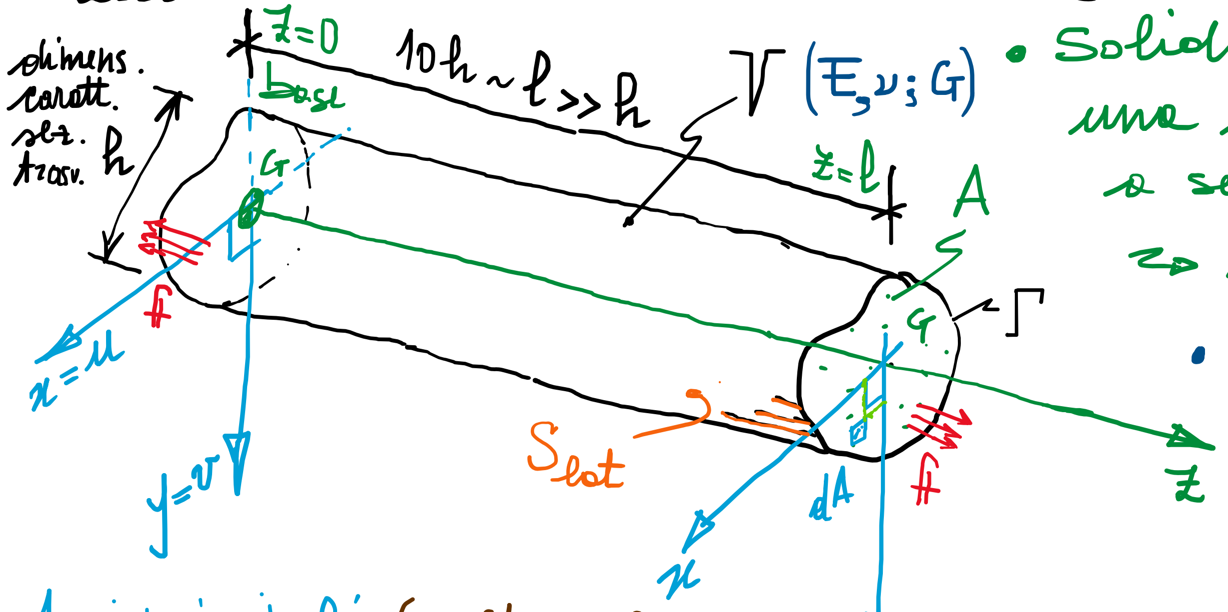
Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

Problema di de Saint Venant (~1855) – Caso di problema elastico lineare particolare:



- Solido "tipo trave" di forma allungata, cioè con una dimensione prevalente rispetto alle altre due, a sezione costante (di area A) ed asse rettilineo $\Rightarrow$ cilindro o prisma di DSV.
- Composto da materiale elastico, lineare, isotropo, omogeneo $\forall x \in V \Rightarrow E, \nu; G$ cost
- Privo di vincoli esterni ($S_u \equiv \emptyset$) $\Rightarrow$ soluz. in termini di spostamento nota a meno di moti rigidi.
- Privo di forze di volume ($F = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie su S_{lat} ($f = 0$ su S_{lat}).
- Soggetto solamente a forze di superficie sulle basi ($z = 0$, $z = \ell$), di distribuzione non specificata e note solo in termini di risultanti (tali da formare un sistema di forze autoequilibrato).

Assi principali d'inerzia: (scelta del sistema di rif.)

– baricentrici: $G \in x, y \Rightarrow S_x = \int_A y \, dA = 0; \; S_y = \int_A x \, dA = 0$ momenti statici nulli

– mutuamente perpendicolari: $x \perp y$

– coniugati $\overset{CNS}{\Longleftrightarrow}$ $J_{xy} = \int_A xy \, dA = 0$ momento d'inerzia centrifugo nullo

(l'uno contiene il "centro" relativo all'altro)

NB: Se $\exists$ asse di simm. retta, tale asse è principale (insieme al $\perp$ per G)

Postulato di DSV: La reale distribuzione di queste forze di superficie, a parità di risultanti, è ininfluente ai fini della soluzione (salvo per possibili "effetti di bordo" localizzati).

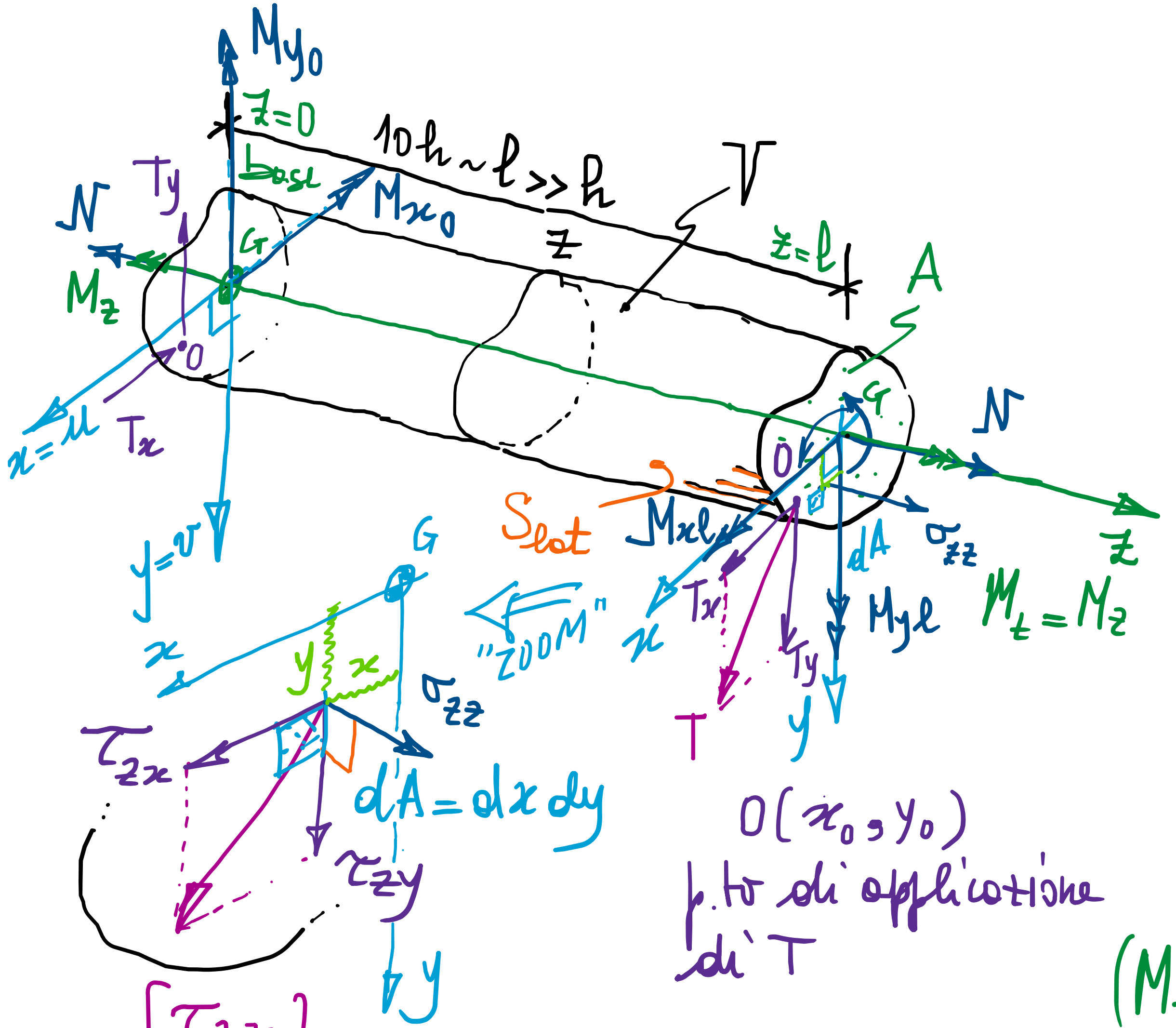
Risultanti ⇒ casi di DSV: (equivalenza statica)

$$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA = \text{cost}$$ Azione assiale o normale

$$T_x = \int_A \tau_{zx}\, dA = \text{cost}$$
$$T_y = \int_A \tau_{zy}\, dA = \text{cost}$$
Azioni taglianti o tagli (componenti)

$$M_x = \int_A \sigma_{zz}\, y\, dA = M_{x_0} + T_y\, z$$
$$M_y = -\int_A \sigma_{zz}\, x\, dA = M_{y_0} - T_x\, z$$
Azioni flettenti (momenti ")

lineari in z



$$(M_t = M_z) + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$ con

M_t azione torcente (momento ") costante

Equivalenza statica tra risultanti e campo di sforzo da esse indotto.

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$, σ_{zz} sforzo normale al piano della sezione

vettore delle tensioni tangenziali nel piano della sezione

• Soluzione tramite approccio semi-inverso (agli sforzi):

• Hp. fondamentale di DSV: $\boxed{\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0}$; restano σ_{zz} ; $\underbrace{\tau_{zx}, \tau_{zy}}_{\boldsymbol{\tau}_z}$

$(= \tau_{yx})$

suffragata dall'osservaz. sperimentale
(e supportata dall'unicità della soluzione)

componenti di sforzo da determinare, in $(x, y; z)$.

• Equaz. indefinite di equilibrio:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \cancel{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \text{ in } V \iff \sigma_{ij,i} = 0$$

(campo di sforzo solenoidale ⇒ a divergenza nulla)

$$\begin{cases} \cancel{\sigma_{xx}}_{,x} + \cancel{\tau_{yx}}_{,y} + \tau_{zx,z} = 0 \\ \cancel{\tau_{xy}}_{,x} + \cancel{\sigma_{yy}}_{,y} + \tau_{zy,z} = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\tau}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}(x,y) \\ \tau_{zy}(x,y) \end{Bmatrix} \quad \text{indip. da } z$$

$$\Rightarrow \left(\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z}} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

equazione di equilibrio

Th. Schwarz $0 = -\sigma_{zz,zz}$

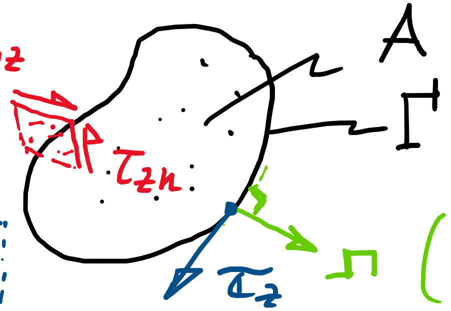
$\Rightarrow \sigma_{zz}$ lineari in z

• Condizioni al contorno:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} = \mathbf{0} \text{ su } S_{lat} \text{ (su } \Gamma) \iff n_i \sigma_{ij} = 0$$

$$\begin{cases} n_x \cancel{\sigma_{xx}} + n_y \cancel{\tau_{yx}} + \cancel{n_z} \tau_{zx} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \cancel{\tau_{xy}} + n_y \cancel{\sigma_{yy}} + \cancel{n_z} \tau_{zy} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + \cancel{n_z} \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

sup. laterale scarica $0 = \tau_{nz}$



$(n_z = 0)$

$\boldsymbol{\tau}_z$, su Γ, tangente al contorno

equilibrio al contorno $\boxed{\boldsymbol{\tau}_z \cdot \mathbf{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0, \ \boldsymbol{\tau}_z \perp \mathbf{n}}$

• Legame costitutivo:

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=-\nu\,\varepsilon_{zz}=-\nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

lineari in z;

deformazioni normali

$(\gamma_{xy}=0)$ $\quad \gamma_z=\begin{Bmatrix}\gamma_{zx}\\ \gamma_{zy}\end{Bmatrix}=\frac{\tau_z}{G}$

$$\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij}=\frac{\tau_{ij}}{G}=2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{ij} \qquad G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\tau_{ij}$$ indip. da z

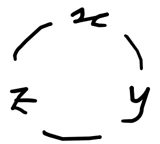
deformazioni taglianti

• Equazioni di congruenza interna:

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}=\varepsilon_{ik,jl}+\varepsilon_{il,jk} \qquad 81\to 6\to 3$$

di DSV

$$\begin{cases}\cancel{\varepsilon_{xx,yy}}+\cancel{\varepsilon_{yy,xx}}=2\cancel{\varepsilon_{xy,xy}} & \checkmark\\ \cancel{\varepsilon_{yy,zz}}+\varepsilon_{zz,yy}=2\cancel{\varepsilon_{yz,yz}} & \Rightarrow\ \sigma_{zz}\ \text{lin. in } y\\ \varepsilon_{zz,xx}+\cancel{\varepsilon_{xx,zz}}=2\cancel{\varepsilon_{zx,zx}} & \Rightarrow\ \sigma_{zz}\ \text{lin. in } x\end{cases}$$



$$\left.\begin{cases}\varepsilon_{xx,yz}+\varepsilon_{yz,xx}=\cancel{\varepsilon_{xy,xz}}+\varepsilon_{xz,xy}\\ \varepsilon_{yy,zx}+\varepsilon_{zx,yy}=\varepsilon_{yz,yx}+\cancel{\varepsilon_{yx,yz}}\\ \varepsilon_{zz,xy}+\cancel{\varepsilon_{xy,zz}}=\cancel{\varepsilon_{zx,zy}}+\cancel{\varepsilon_{zy,zx}}\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_{zx,xy}-\varepsilon_{zy,xx}=\varepsilon_{xx,yz}\\ \varepsilon_{zx,yy}-\varepsilon_{zy,yx}=-\varepsilon_{yy,zx}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ σ_{zz} indip. da xy

Sforzo normale:

costanti $a_0, a_1, a_2 ; b_0, b_1, b_2$

$$\sigma_{zz}(x,y;z) = a_0 + a_1 x + a_2 y - z(\cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y)$$

$$= (a_0 - \cancel{b_0} z) + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$$

Infatti:

$$\int_A \mathrm{div}\, \tau_z \, dA \overset{Th. Div.}{=} \int_\Gamma \cancel{n \cdot \tau_z} \, d\Gamma$$

$$\int_A -\sigma_{zz,z} \, dA = \cancel{b_0} A = 0$$

Per equivalenza statica:

$$N = \int_A \sigma_{zz} \, dA = (a_0 - b_0 z)A + (a_1 - b_1 z)\cancel{S_y} + (a_2 - b_2 z)\cancel{S_x} = cost \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{N}{A} ; \quad b_0 = 0}$$

$$\begin{cases} M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA = (a_0 - b_0 z)\cancel{S_x} + (a_1 - b_1 z)\cancel{J_{xy}} + (a_2 - b_2 z) J_x \\ M_y = -\int_A \sigma_{zz} x \, dA = -(a_1 - b_1 z) J_y \end{cases}$$

$$J_x = \int_A y^2 \, dA \qquad J_y = \int_A x^2 \, dA \qquad \text{momenti di inerzia}$$

$$M_{x_0} + T_y z = M_x = (a_2 - b_2 z) J_x$$

$$M_{y_0} - T_x z = M_y = -(a_1 - b_1 z) J_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} ; \quad a_2 = \frac{M_{x_0}}{J_x}, \quad b_2 = -\frac{T_y}{J_x} \\ & a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y} ; \quad a_1 = -\frac{M_{y_0}}{J_y}, \quad b_1 = -\frac{T_x}{J_y} \end{aligned}}$$

campo lineare

$$\boxed{\sigma_{zz}(x,y;z) = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x}$$

(vedi tenso-flessione deviata, per PSE, dovuti a N, M_x, M_y)

- Equazione di congruenza (nelle τ_{zx}, τ_{zy}):

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1+\nu}{\cancel{E}}\underbrace{(\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x})}_{f}{}_{,x} = -\frac{\nu}{\cancel{E}}\sigma_{zz,zy} \\ &\frac{1+\nu}{\cancel{E}}(\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x})_{,y} = +\frac{\nu}{\cancel{E}}\sigma_{zz,zx} \end{aligned}} \begin{aligned} &= +\nu b_2 \\ &= -\nu b_1 \end{aligned}$$

sia $\bar{\nu} = \dfrac{\nu}{1+\nu}$

Integrando: $\int df = \int f_{,x}dx + \int f_{,y}dy$

costante di integrazione arbitraria (sarà legata a M_t)

$$\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x} = \bar{\nu}(b_2 x - b_1 y) - c$$

$$= \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x + \frac{T_x}{J_y}y\right) - c \quad \text{equazione di congruenza}$$

- Problema nelle $\tau_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}\}^T$: (due equazioni governanti) (equazioni differenziali del 1° ordine)

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z} = \cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y = -\left(\dfrac{T_x}{J_y}x + \dfrac{T_y}{J_x}y\right) & \text{eq. di equil. in } A \\ -(\mathrm{rot}\,\tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\dfrac{T_y}{J_x}x + \dfrac{T_x}{J_y}y\right) - c & \text{eq. di congruenza in } A \end{cases}$$

c.c. $\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ (contorno della sez. trasversale)