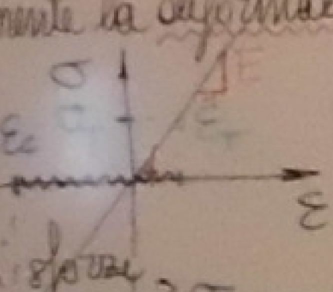

2) Criterio di de Saint Venant - Grashof
- Analogo a quello di G-R-N, fondato sullo sforzo normale, ma riguardante dualmente la deformazione:
spazio degli sforzi con En rappresentato da due delle def. prime.
tramite legge costitutiva
- Si ottengono 6 disuguaglianze nel dominio degli sforzi principali, formulando un dominio di resistenza dipendente dal parametro elastico ν: -1 < 0 ≤ ν < 1/2
- Per ν=0 → G-R-N
- Nel caso di sforzo piano (σIII = 0)
dominio di resistenza di DSV-G
Si ottiene dalla ∩ di due triangoli isosceli nel piano delle tensioni principali σI, σII
(altrimenti resist. a compressione non raggiungibile)
(taglio puro)
- Nel caso di materiale a comporto simmetrico a traz./compr.
(equitrazione biassiale)
ellisse di Beltrami
rombo di DSV-G
quadrato di GRN
3) Criterio di Beltrami

2) Criterio di de Saint Venant - Grashof

- Analogo a quello di G-R-N, fondato sullo sforzo normale, ma riguardante dualmente la deformazione;

$-\varepsilon_c \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_T$



spazio degli sforzi
con ε_n rappresentate da due delle def prine $\varepsilon_n^{max} = \varepsilon_I$,
$\varepsilon_n^{min} = \varepsilon_{III}$, tramite legge costitutiva

$k = I, II, III$

$-\frac{\sigma_c}{E} \leq \varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_j + \sigma_k) \leq \frac{\sigma_T}{E}$

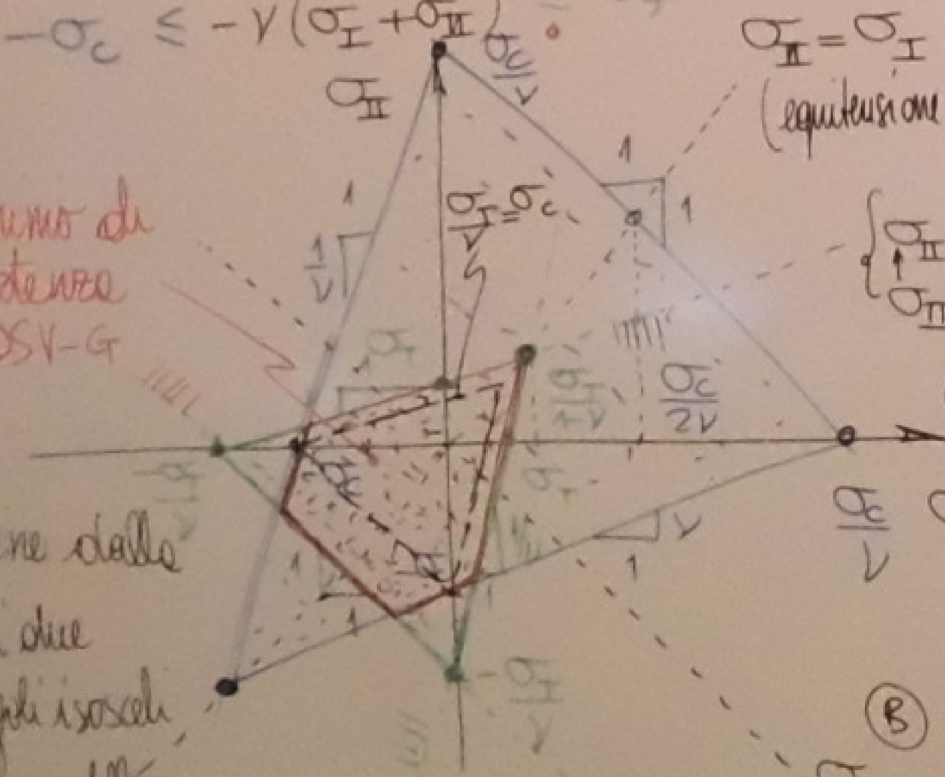
- Si ottengono 6 disuguaglianze nel dominio degli sforzi principali, formulando un dominio di resistenza dipendente dal parametro elastico ν $-1 < \nu < 1/2$ - Per $\nu = 0 \to$ G-R-N

- Nel caso di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$)

$-\sigma_c \leq \sigma_I - \nu\sigma_{II} \leq \sigma_T$

$-\sigma_c \leq \sigma_{II} - \nu\sigma_I \leq \sigma_T$

$-\sigma_c \leq -\nu(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq \sigma_T$



dominio di resistenza di DSV-G

- Si ottiene dalla $\cap$ di due triangoli isosceli nel piano delle tensioni principali σ_I, σ_{II}

$\sigma_T > \nu\,\sigma_c$
(altrimenti resist. a compressione non raggiungibile)

- Nel caso di materiale a comp.to simmetrico a traz./comp. ($\sigma_T = \sigma_c = \sigma_0$)

Ⓐ $\sigma_{II} = \sigma_I$ (equitensione biassiale)

$\begin{cases} \sigma_{II} = \sigma_T + \nu\sigma_I \\ \sigma_{II} = \sigma_I \end{cases}$

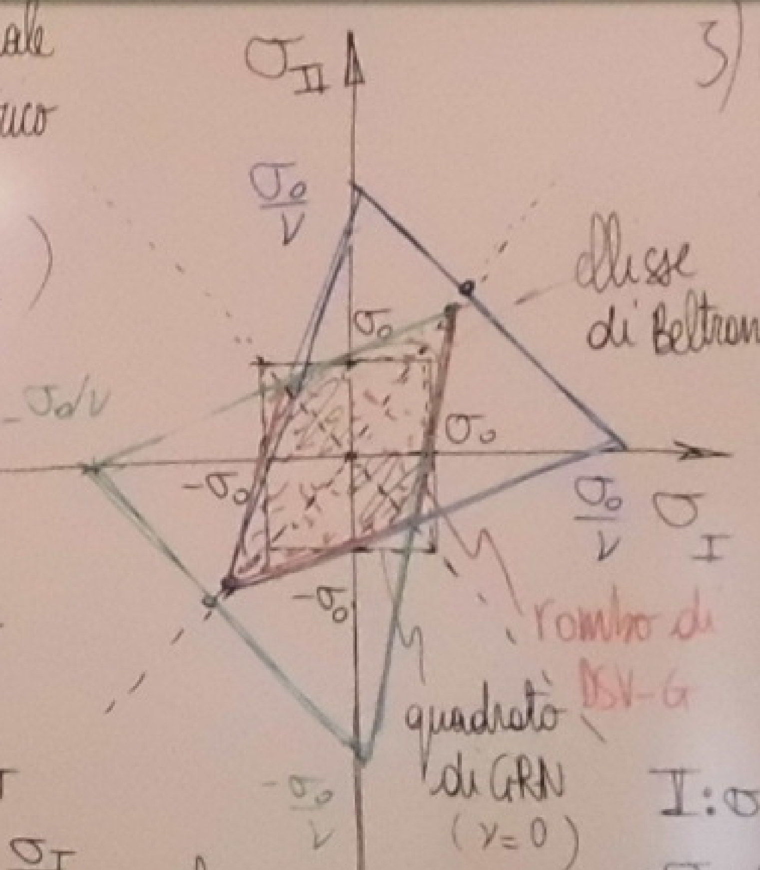
$(1-\nu)\sigma_I = \sigma_T$

$\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{\sigma_T}{1-\nu}$

$\frac{\sigma_T}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{2\nu}$

Ⓑ $\sigma_{II} = -\sigma_I$ (taglio puro)

$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{\sigma_T} \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$ forma rombica



forma rombica $\nu \leq \frac{1}{3}$
" esagonale $\nu > \frac{1}{3}$

- OK per descrivere la resistenza per stati di sforzo alla DSV ($\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$), ove recepisce le diverse pericolosità di Ⓐ e Ⓑ

3) Criterio di Beltrami (energetico)

- Mat. a comp. simm. traz./comp. ($\sigma_T = \sigma_c = \sigma_0$)

- Assume come GIP l'energia elastica (insensibile al segno dello stato di sforzo)

$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon \leq \omega_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 \underbrace{\frac{\sigma_0}{E}}_{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$

$[\sigma]_{rif\ prine} = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$

dominio degli sforzi

$\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$
legge di Hooke generalizzata

$\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{E}\left(-\nu(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 + (1+\nu)\,\underbrace{\sigma:\sigma}_{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2}\right) \leq \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$

$\mathbf{I}:\sigma = \mathrm{tr}\,\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$

$(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III}))$

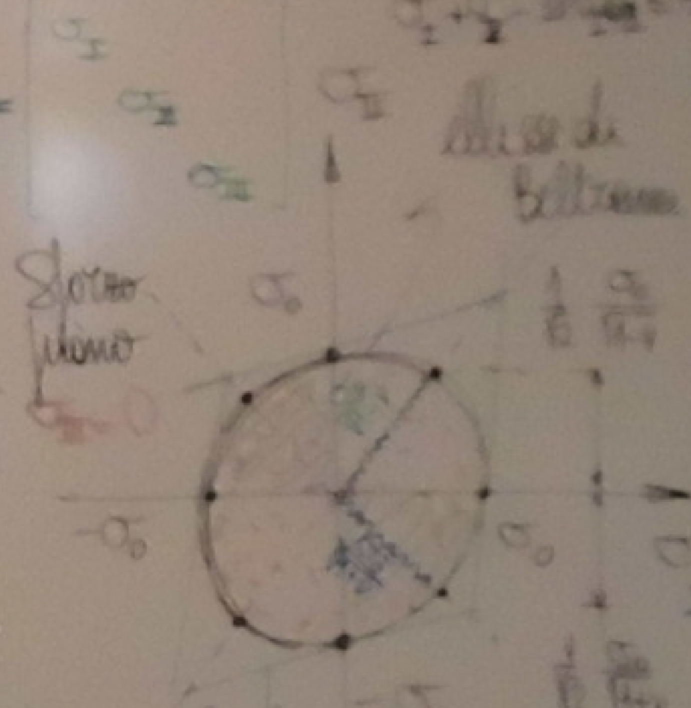
$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})\right) \leq \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$

$\sigma_{eq}^{B} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})} \leq \sigma_0$

Tensione equivalente di Beltrami (dip. da ν)

Sforzo piano

$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} \leq \sigma_0^2$



Beltrami


3) Criterio di Beltrami (energetico)
- Mat. a comp. simm. traz./compr. ($\sigma_T = \sigma_C = \sigma_0$)
(insensibile al segno dello stato di sforzo)
- Assume come GIP l'energia elastica
$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon \le \omega_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 \frac{\sigma_0}{E} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$
dominio degli sforzi
$\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$
legge di Hooke generalizzata
$\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{E}\left(-\nu(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 + (1+\nu)\,\sigma:\sigma\right) \le \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$
$\mathbf{I}:\sigma = \mathrm{tr}\,\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$
$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2$
$(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III}))$
$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})\right) \le \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$
$\sigma_{eq}^B = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})} \le \sigma_0$
tensione equivalente di Beltrami (dip. da ν)
$[\sigma] = $ rif. princ.
$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} \le \sigma_0^2$
Sforzo piano
$\sigma_{III} = 0$
ellisse di Beltrami
$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\nu}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\nu}}$
rombo di DSV
(Beltrami risulta più cautelativo, ellisse inscritta nel rombo)
ellisse di Beltrami
rombo di DSV-G
quadrato di GRN ($\nu = 0$)
forma rombica $\nu \le \frac{1}{3}$
esagonale $\nu > \frac{1}{3}$
- Nel caso di materiale a comp. simmetrico a traz./compr. ($\sigma_T = \sigma_C = \sigma_0$)
$\sigma_{II} = \sigma_I$
$\sigma_{II} = \sigma_T + \nu\sigma_I$
$(1-\nu)\sigma_I = \sigma_T$
$\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{\sigma_T}{1-\nu}$
$\frac{\sigma_T}{1-\nu} \le \frac{\sigma_C}{2\nu}$
$\sigma_T > \sigma_C$

4) Criterio di Hüber - Hencky - von Mises

- Materiali metallici (a comp. simm. traz./compr.), mostrano comp. plastico puramente deviatorico (def. plastiche a volume cost., stati idrostatici $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ non provocano l'uscita dal campo elastico)
- Ciò motiva la considerazione di depurare l'energia elastica $\omega = \omega_v + \omega_D$ secondo Beltrami, della parte volumetrica, considerando solo la componente deviatorica ai fini della resistenza elastica
- Di natura energetica, assume come GIP ω_D:

$$\omega_D = \frac{1}{2} \mathbb{S} : \mathbb{e} \leq \omega_D^0$$

$\frac{\mathbb{S}}{2G} = \mathbb{e}$ risposta deviatorica

$$[\mathbb{S}] = \begin{bmatrix} \sigma_I - p & & \\ & \sigma_{II} - p & \\ & & \sigma_{III} - p \end{bmatrix} \qquad \mathbb{S} = \sigma - \underbrace{\frac{tr\,\sigma}{3}}_{p} \mathbb{I}$$

- Si ottiene: $J_2 = \frac{1}{2} tr\,\mathbb{S}^2$

$$\omega_D = \frac{1}{2} \frac{\mathbb{S} : \mathbb{S}}{2G} = \frac{3 J_2}{3 \cdot 2G} = \frac{3J_2}{6G} \leq \omega_D^0 = \frac{3J_2^0}{6G}$$

- In termini di sforzo:

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3J_2} \leq \sqrt{3J_2^0} = \sigma_0$$

- Infatti:

$$3J_2 = 3 \frac{1}{2} tr\,\mathbb{S}^2 = \frac{3}{2}\left((\sigma_I - p)^2 + (\sigma_{II} - p)^2 + (\sigma_{III} - p)^2\right)$$

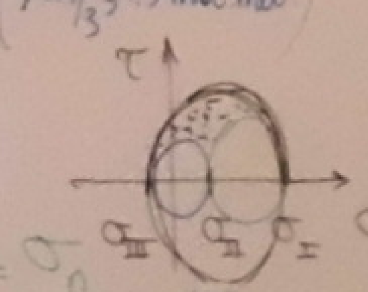
$$= \frac{3}{2}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + \underbrace{3p^2 - 3 \cdot 2p \underbrace{\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)}_{p}}_{-3p^2 = -\cancel{3}\frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{\cancel{9}\,3}}\right)$$

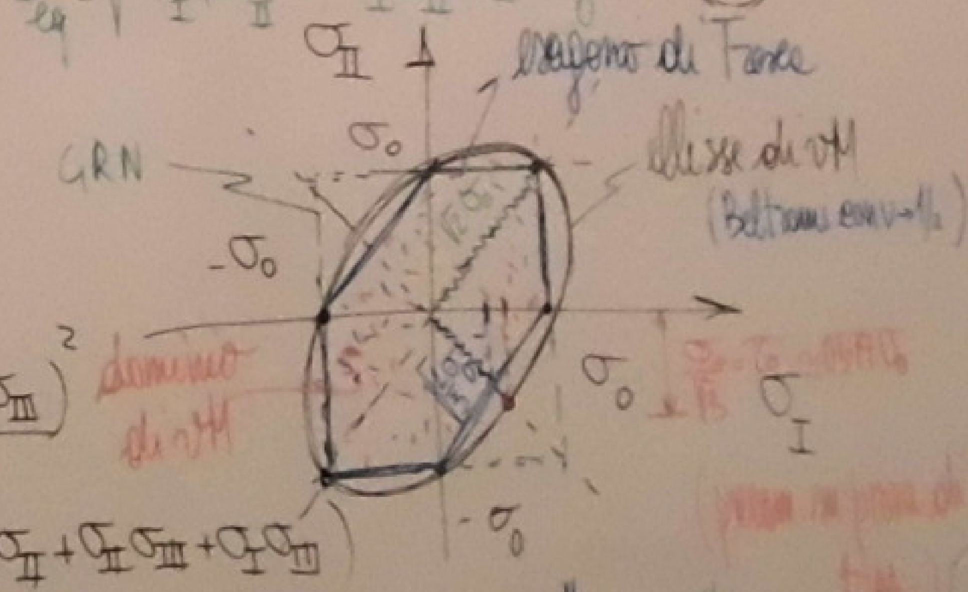
$$= \cancel{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cancel{3}}\Big(\underbrace{3(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2)}_{\cancel{2}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2)} - \cancel{2}(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III})\Big)$$

$$= \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) = (\sigma_{eq}^{vM})^2$$

- N.B.: vM è rappresentabile come caso particolare di Beltrami per $\nu \to 1/2$. Infatti in tal caso $\omega_v \to 0$ $(\omega \equiv \omega_D)$.
- Peraltro vM indip. da ν ($\nu \sim 1/3$, 0.3 mat. met.)
- Caso piano ($\sigma_{III} = 0$)

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq \sigma_0$$





5) Criterio di Guest - Tresca

- Materiali metallici mostrano effetti plastici a taglio

$$\tau^{max} \leq \tau_0$$

$$\max\left\{ R_{III} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, R_I = \frac{|\sigma_{II} - \sigma_{III}|}{2}, R_{II} = \frac{|\sigma_{III} - \sigma_I|}{2} \right\}$$

$$\boxed{-\sigma_0 \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_0}$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_{II} - \sigma_{III} \leq \sigma_0$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_0$$

4) Criterio di Hüber - Hencky - von Mises

- Materiali metallici (a comp. simm. traz./compr.), mostrano comp. plastico puramente deviatorico (def. plastiche a volume cost., i stati idrostatici non provocano l'uscita dal campo elastico)
- Ciò motiva la considerazione di dispensare l'energia elastica $\omega = \omega_v + \omega_D$ secondo Beltrami, della parte volumetrica, considerando solo la componente deviatorica ai fini della resistenza elastica
- Di natura energetica, assume come GIP ω_D

$$\omega_D = \frac{1}{2} \mathbb{S} : \mathbb{e} \le \omega_D^0$$

$$[\mathbb{S}] = \begin{bmatrix} \sigma_I - p & & \\ & \sigma_{II} - p & \\ & & \sigma_{III} - p \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S} = \sigma - \underbrace{\frac{tr\,\sigma}{3}}_{p} \mathbb{I}$$

- Si ottiene: $J_2 = \frac{1}{2} tr\, \mathbb{S}^2$

$$\omega_D = \frac{1}{2} \frac{\mathbb{S} : \mathbb{S}}{2G} = \frac{3 J_2}{6G} \le \omega_D^0 = \frac{3 J_2^0}{6G}$$

- In termini di sforzo

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3 J_2} \le \sqrt{3 J_2^0} = \sigma_0$$

- Infatti

$$3 J_2 = 3 \frac{1}{2} tr\, \mathbb{S}^2 = \frac{3}{2} \left((\sigma_I - p)^2 + (\sigma_{II} - p)^2 + (\sigma_{III} - p)^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 3p^2 - 2p \underbrace{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})}_{3p} \right)$$

$$-3p^2 \Rightarrow -\cancel{3} \frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{\cancel{9}\,3}$$

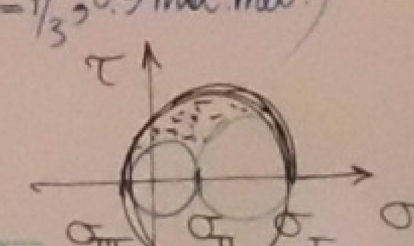
$$= \cancel{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cancel{3}} \left(3(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - 2(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) \right)$$

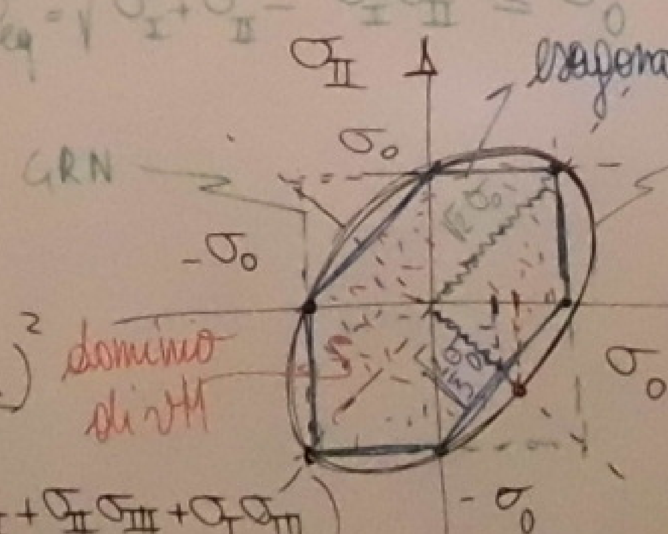
$$= \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) = (\sigma_{eq}^{vM})^2$$

(traz. monoass.: $\sigma_{eq}^{vM} = \sigma_I$; $\sigma_{eq,0}^{vM} = \sigma_0$)

- N.B.: vM è rappresentabile come caso particolare di Beltrami per $\nu \to 1/2$. Infatti in tal caso $\omega_v \to 0$ ($\omega \equiv \omega_D$).
- Peraltro vM indip. da ν ($\nu = 1/3 \div 0.3$ mat. met.)
- Caso piano ($\sigma_{III} = 0$)

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \le \sigma_0$$





5) Criterio di Guest - Tresca

- Materiali metallici mostrano effetti plastici a taglio

$$\underbrace{\tau^{max}}_{} \le \tau_0^T = \frac{\sigma_0}{2} = 0.5\,\sigma_0$$

$$\max \left\{ R_{III} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, R_I = \frac{|\sigma_{II} - \sigma_{III}|}{2}, R_{II} = \frac{|\sigma_{III} - \sigma_I|}{2} \right\}$$

$$\boxed{-\sigma_0 \le \sigma_I - \sigma_{II} \le \sigma_0}$$

stesse di G-R-N

$$\begin{cases} -\sigma_0 \le \sigma_{II} - \cancel{\sigma_{III}} \le \sigma_0 \\ -\sigma_0 \le \sigma_I - \cancel{\sigma_{III}} \le \sigma_0 \end{cases}$$

6 disuguaglianze in termini di tens. princ.

→ caso piano ($\sigma_{III} = 0$), dominio esagonale

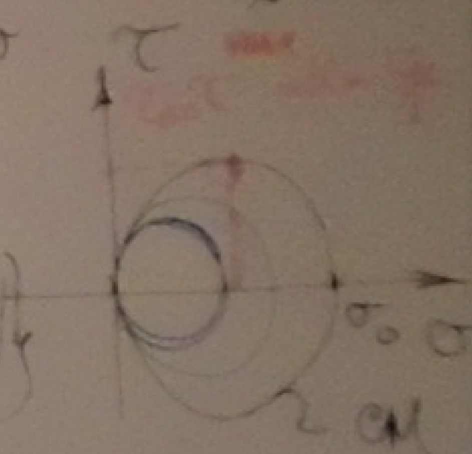
più cautelativo di von Mises (inscritto in vM)

- Duale di GRN ma fondato su τ^{max}

$$\sigma_{eq}^{DSV} = \max \begin{vmatrix} |\sigma_I - \nu \sigma_{II}| \\ |\sigma_{II} - \nu \sigma_I| \end{vmatrix}; \quad \sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}; \quad \sigma_{eq}^{T} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

I criteri, in particolare DSV, T, vM vengono spesso utilizzati per mat. metallici con sforzo alla DSV (σ, τ) → $\sigma_{eq}^{DSV} < \sigma_{eq}^{vM} < \sigma_{eq}^{T} \le \sigma_0$

prova monoassiale di trazione



5) Criterio di Guest - Tresca
- Materiali metallici mostrano effetti plastici a taglio
R = |σI - σII| / 2
−σ0 ≤ σI − σII ≤ σ0
stesse di G-R-N
−σ0 ≤ σII − σIII ≤ σ0
−σ0 ≤ σI − σIII ≤ σ0
più cautelativo di von Mises
(inscritto in vM)
- Duale di G-R-N ma fondato su τ max
6 diseguaglianze in termini di tens. princ.
→ caso piano (σIII = 0), dominio esagonale
I criteri, in particolare DSV, T, vM possono essere utilizzati per mat. metallici con sforzi alla
prova monoassiale di trazione
CM
N.B.: vM è rappresentabile come caso particolare di Beltrami per ν → 1/2. Infatti in tal caso
esagono di Tresca
ellisse di vM
(Beltrami con ν → 1/2)
dominio di vM
G-R-N