

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

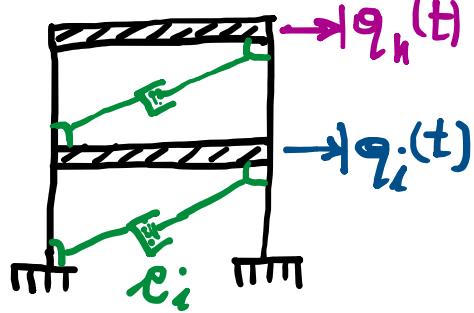
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

Sistemi MDOF smorzati



riscosolin. $\dot{z}_i(q_k)$
"dissipatore"
smorzatore
i-esimo
(dinamico)
 $r_i > 0$
coeff. di
smorzamento f. ne di dissipazione (Rayleigh)

$$F_{di}^z = r_i \dot{z}_i$$

$$D_i = \frac{1}{2} \dot{z}_i F_{di}^z = \frac{1}{2} \dot{z}_i r_i \dot{z}_i$$

- Smorzamento indotto mediante l'inserzione di dispositivi opportuni (smorzatori viscosi lineari).
Es.: controventi dissipativi (\rightarrow sismica).

- Smorzamento intrinseco "spontaneo" all'interno del sistema strutturale (di entità limitata per strutture civili).

$$\rightarrow \ddot{F}_d = C_z \ddot{z}; \quad \ddot{F}_d = \{\ddot{F}_{di}\}_{nd \times 1}, \quad C_z = \text{diag}[c_i], \quad z = \{\dot{z}_i\}_{nd \times 1}$$

$$\rightarrow D = \frac{1}{2} \dot{z}^T \ddot{F}_d = \frac{1}{2} \dot{z}^T C_z \ddot{z} = \frac{1}{2} \Pi_d$$

forme quadrate.

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\frac{\partial z}{\partial q}}_{C} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial q}}^T \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q} \geq 0$$

\dot{z} : vettore di stato
 \dot{q} : vettore di coordinate generalizzate

Relazione tra \dot{z}_i e q_k : "chain rule" (derivata di f. ne composta)

$$\dot{z}_i = \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial q}^T \dot{q}$$

$$C = \sum_i C_i$$

$$C_i = \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} r_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}^T$$

$$D = \sum_i D_i = \frac{1}{2} \sum_i \dot{z}_i r_i \dot{z}_i = \sum_{j,k} C_{jk} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} r_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}^T$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot r_i \cdot \sum_k \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \dot{q}_j \sum_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} r_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

C : matrice di smorz.

$n \times n$ simm. e semidef. pos.

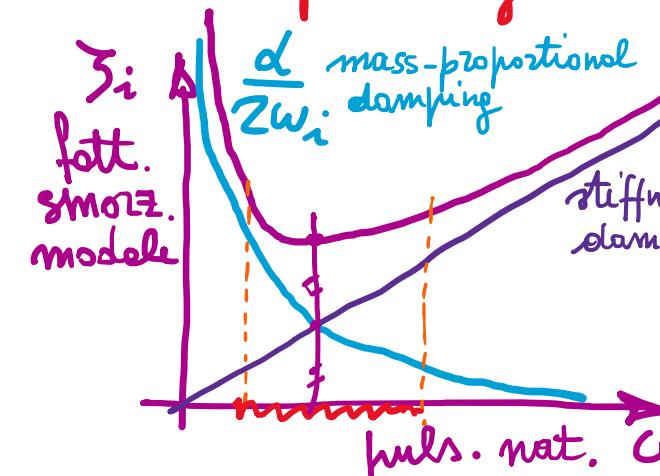
$$C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Leftrightarrow C = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^T \partial \dot{q}}$$

- Eq. di moto: sulla struttura $\ddot{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}_d(t)$ con $\mathbf{Q}_d(t) = -\mathbf{F}_d(t) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ (v. eq. di Lagrange)
- sist. non smorzato
- sugli smorzatori

$$\boxed{\ddot{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)}$$

- Traf. in coord. principali: $\mathbf{q} = \sum_i \phi_i p_i = \Phi \mathbf{p}$
- $$\underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \Phi}_{\mathbf{m}} \ddot{\mathbf{p}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{C} \Phi}_{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{K} \Phi}_{\mathbf{K}} \mathbf{p} = \Phi^T \mathbf{Q} = \mathbf{P}(t)$$
 ore $\mathbf{C} \neq \text{diag}$ [in genere]
- mass coeff. coeff.
- coordinate principali $\mathbf{q} = \sum_i p_i \phi_i$
coordinate legrangiane \mathbf{p}
- $\mathbf{m} = \text{diag} [\mathbf{M}_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i]$
 $\mathbf{C} = \text{diag} [\mathbf{C}_i = \Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i]$
 $\mathbf{K} = \text{diag} [\mathbf{K}_i = \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i]$

- In generale \mathbf{C} non diagonale: coeff. delle cond. lin.
- CS per diagonalizzazione: $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ (smorzamento "classico" o alle Rayleigh)



2 parametri liberi per modale
 fissare gli ζ_i $\alpha > \beta$ determinati in base a $2\zeta_i$ (ζ_1, ζ_2)

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} = \text{diag} [\mathbf{C}_i = \alpha \mathbf{M}_i + \beta \mathbf{K}_i]$$

$$\left(\frac{C_i}{M_i} = 2\zeta_i \omega_i M_i \right) \quad 2\zeta_i \omega_i M_i = \alpha M_i + \beta \frac{K_i}{M_i}$$

fattore di smorz.

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2} \omega_i$$

descrizione fattori di smorzamento modale

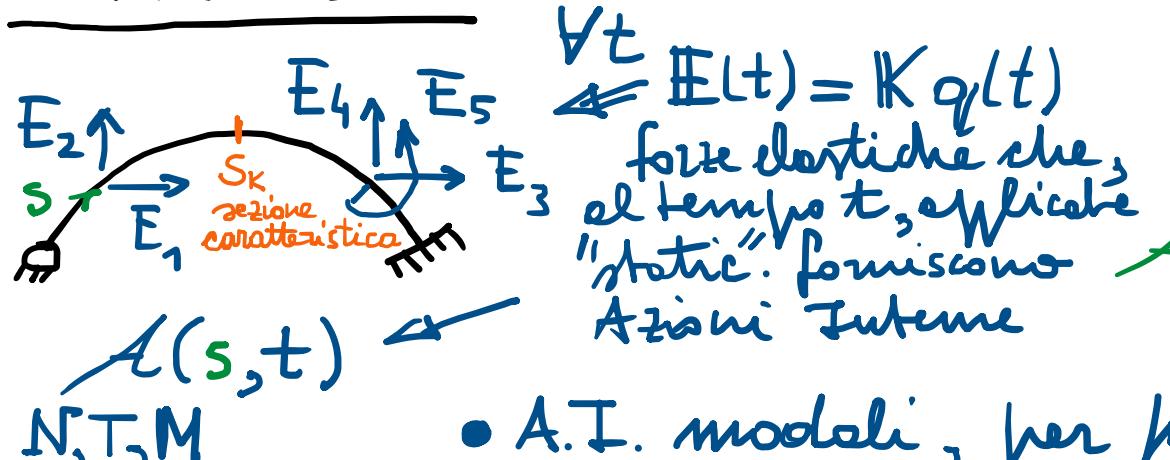
- Assumere $\mathcal{R} = \text{diag} [C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}] \Rightarrow C = \underline{\Phi}^{-T} \underline{\Lambda} \underline{\Phi}^{-1} \Leftarrow \mathcal{E} = \underline{\Phi}^T \underline{\Lambda} \underline{\Phi}$
 (si ipotizzano gli ζ_i uguali o diversi per i vari modi, e si risale alla matrice di smorzamento C in coord. legrangiane) $\zeta_i \approx 1\%$, $2-7\%$ tipici.
- Valide per smorzamento intrinseco al sistema strutturale.
- Nel caso di dispositivi aggiuntivi \mathcal{R} non diag. in generale.

• Esempio:

$\ddot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$, $\dot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2)$ [N.B. $\Rightarrow q_1 = q_2 \Rightarrow z = 0$]
 $\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$
 $q_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$

$C = \frac{\partial z}{\partial q_1} C \frac{\partial z^T}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}$
 $= \frac{1}{2} c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $C_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial q_i \partial q_j}$
 $\mathcal{E} = \underline{\Phi}^T \underline{\Lambda} \underline{\Phi}$ non diag.
 è singolare ($\det C = 0$) (semidef. pos.)
 Idem da scritt. di $D = \frac{1}{2} c \dot{z}^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 = \frac{1}{2} c \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2)$

Azioni interne



forze elastiche che, al tempo t , applicate "statico". forniscono Azioni Interne

- A.I. per $q_j = 1 \Rightarrow E_j = K_{ij} \Rightarrow A_j(s)$

$$E_j = \{E_i\} \quad j \text{ indice del goll}$$

$$(q_i = 0, i \neq j)$$

$$\bar{A}(s, t) = \sum_j A_j(s) q_j(t) = \bar{A}(s) \bar{q}(t)$$

N, T, M

- A.I. modelli, per $\mu_k = 1 \Rightarrow q = \Phi_k$ (autovettori)

$$(\mu_i = 0, i \neq k)$$

indotte da forte modello

forze elastiche modelli

$$\bar{E}_k = K \Phi_k = \omega_k^2 M \Phi_k = \bar{F}_{IK} \Rightarrow \bar{A}_k(s) : k \text{ indica del modo}$$

forze d'inerzia modelli

pb. agli autovelori

$$\bar{A}(s, t) = \sum_k \bar{A}_k(s) \mu_k(t) = \bar{A}(s) \bar{\mu}(t)$$

$$\bar{A}(s) = \Phi^T \bar{A}(s) \quad (\bar{A}(s) = \Phi^{-T} \bar{A}(s))$$

$$\bar{A}_k(s) = \sum_j \Phi_{kj} \bar{A}_j(s)$$

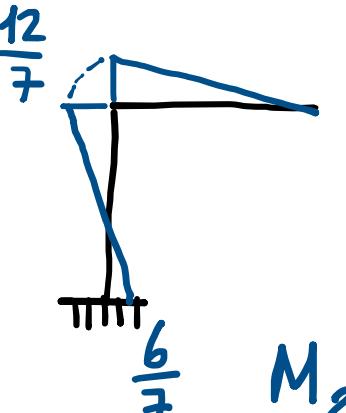
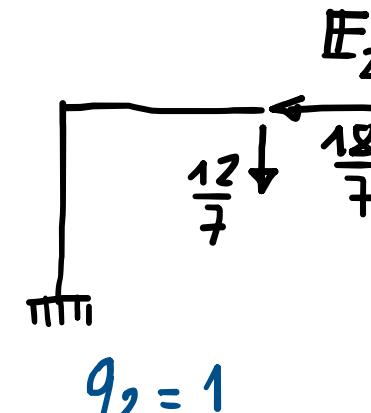
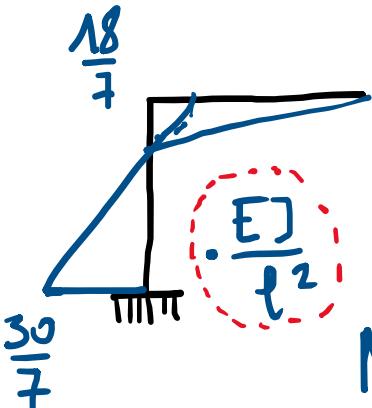
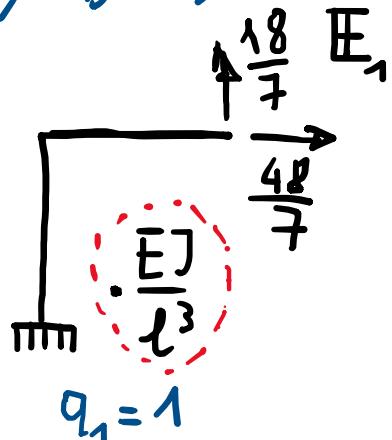
$$- \bar{A}(s, t) = \bar{A}(s) \underbrace{\Phi \mu(t)}_{q(t)} = \left(\Phi^T \bar{A}(s) \right)^T \mu(t) \Rightarrow \{ \bar{A}(s) = \Phi^T \bar{A}(s) \}$$

- Stima valori max (in t) $\bar{A}(s)$

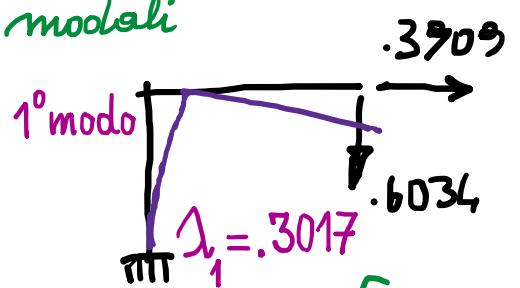
SRSS $\bar{A}(s) = \sqrt{\sum_k (\bar{A}_k(s) \mu_k^{\max})^2} = \sqrt{\sum_j (\bar{A}_j(s) q_j^{\max})^2}$ (Square Root of Sum of Squares)

Esempio 2 DOF :  $K = \frac{6}{7} \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; $M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \bar{E}_i = K \phi_i = \omega_i^2 M L \phi_i$
 $= \frac{EJ}{l^3} \lambda_i \begin{bmatrix} 3\phi_{i1} \\ 2\phi_{i2} \end{bmatrix}$

$A_j (q_j = 1)$



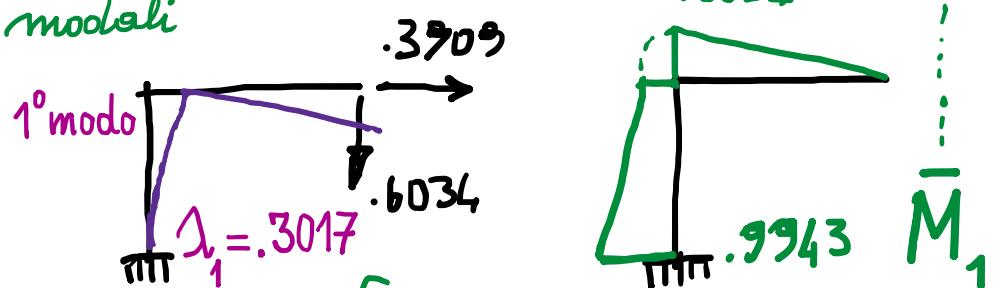
$\bar{A}_K (\mu_K=1)$
azioni interne
modelli



$$\Phi_1^T = \begin{bmatrix} .4320 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} .3909 = \frac{48}{7} \cdot .4320 - \frac{18}{7} \cdot 1 = \frac{2.736}{7} \\ .6034 = -\frac{18}{7} \cdot .4320 + \frac{12}{7} \cdot 1 = \frac{4.724}{7} \end{cases}$$

1° autovettore

$$\bar{E}_1 \rightarrow \bar{M}_1 = M_1 \phi_{11} + M_2 \phi_{12} \quad .6034$$



$$\begin{aligned} \bar{E}_2 \rightarrow \bar{M}_2 &= M_1 \phi_{21} + M_2 \phi_{22} \\ \text{2° modo} & \quad \begin{cases} \text{flesso} \\ M=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8.524 \\ 3.682 \end{cases} \quad \begin{cases} 3.682 \\ 4.842 \end{cases} \quad \begin{cases} \cdot \\ \cdot \end{cases} \quad \bar{M}_2 \\ \lambda_2 &= 2.841 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Phi_2^T = \begin{bmatrix} 1 & -.6481 \end{bmatrix} \\ 2° \text{ autovettore} \end{cases} \quad \begin{cases} 8.524 = \frac{48}{7} \cdot 1 - \frac{18}{7} \cdot (-.6481) = \frac{59.67}{7} \\ -3.682 = -\frac{18}{7} \cdot 1 + \frac{12}{7} \cdot (-.6481) = -\frac{25.78}{7} \end{cases}$$

Concetti fondamentali:

- smorzamento strutturale (con riferimento specifico ai sistemi dinamici in ingegneria civile):
 - intrinseco, spalmato all'interno delle strutture; endemico nelle presenze di effetti dissipativi in sistemi reali.
 - predisposto, tramite l'inserzione di dispositivi appositi (smorzatori), atti ad incrementare lo smorzamento globale, in particolare in relazione a gol specifici (es. controventi dissipativi).
- generalizzazione da SDOF a MDOF: $F_d = c \ddot{u} \Leftrightarrow F_d = C \dot{\varphi}_L$ -
Viene ad introdurre la matrice di smorzamento C , in generale del tutto scorrelata dalle matrici M e K sulle quali è incentrato il pb. (generalizzato) agli autoveloci $K\Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i$, che consente, in dinamica molecola, di disaccoppiare le eq.m. del moto di sistema non smorzato.

- Si può assumere di preservare le proprietà di diagonalizzazione (disaccoppiamento) del sistema delle eq.m. del moto, supponendo, tipicamente per smorzamento intrinseco strutturale, che la matrice di smorzamento C possa risultare diagonale in coord. principali ($C = \text{diag} [C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}]$) - ciò può risultare ragionevole, alla luce delle incertezze insite nella definizione dello smorzamento strutturale, e fronte delle complessità del modello strutturale che mira a rappresentarlo.

— o —

- Determinazione delle Azioni Interne $A(s_k, t)$
- (N, T, M) spazio \vdash tempo \vdash nel tempo
 $\Rightarrow A(s_k)$ mese \Rightarrow stime
 L sezioni caratteristiche es. SRSS

- per sovrapposizione di A.I. per goll unitri $q_j = 1 \Rightarrow A_j(s) \dots \dots$ goll j
- per sovrapposizione di A.I. modelli $p_k = 1 \Rightarrow \bar{A}_k(s) \dots \dots$ modo k
(cioè per coord. princ. unitarie)

SOMMARIO (Lec. 14)

- Smorzamento strutturale di sistemi MDOF
 - interno (sistemi reali).
 - esterno (dispositivi).
- Funzione di dissipazione e matrice di smorzamento.
- Diagonaizzazione in coordinate principali
 - smorz. alle Rayleigh.
 - " modelli.
- Esempio 2DOF con dissipatore aggiunto.
- —
- Azioni interne
 - per coord. legrangeiane unitarie.
 - per coord. principali unitarie (AI modelli).
- Stime dei valori max (in t) [SRSS].
- Esempio 2DOF: azioni interne modelli.

Next step: Risposta sismica di sistemi MDOF (teori shear-type)-END.