Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

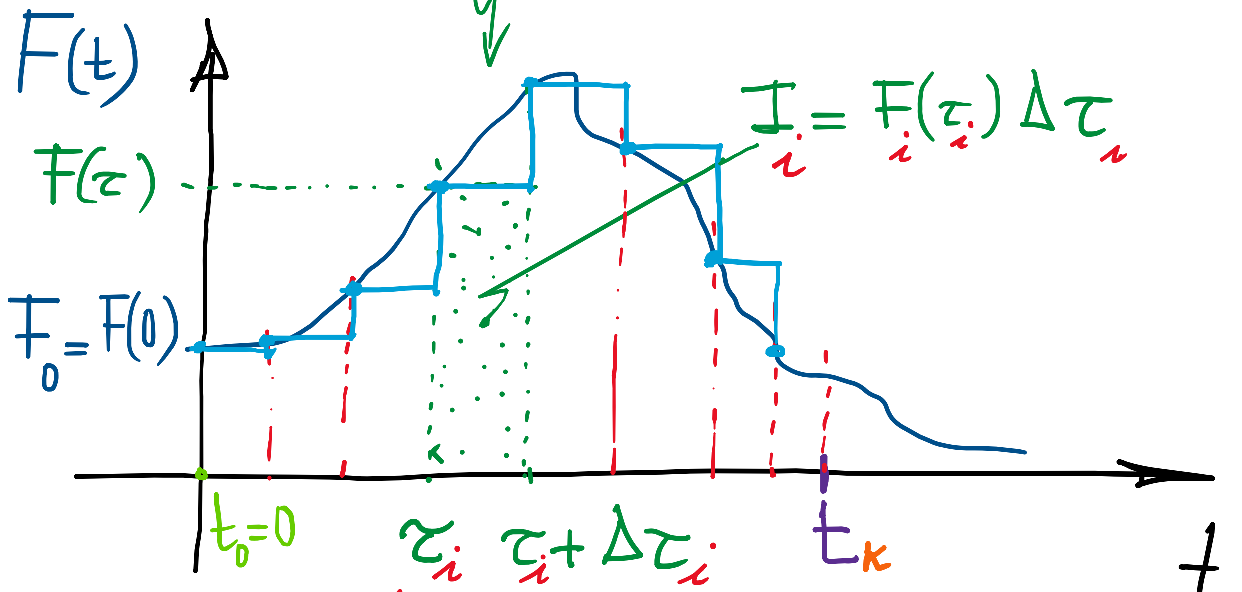
LEZIONE 08

Risposta dinamica del sistema a forzante generica

$\delta(t,\tau) \rightarrow \boxed{\text{SIST.}} \rightarrow h(t,\tau)$

$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t$

$\Delta\tau_i$: passo temporale finito



"discretizzazione" dell'asse dei tempi

$t \rightarrow t_i$

τ_i "campionati" ogni $\Delta\tau_i$

$\Delta\tau_i$

istante di manifestazione dell'impulso

$I_i = F(\tau_i)\Delta\tau_i$

istante di lettura del valore della forzante

"Concept":

Sovrapposizione di impulsi in τ_i ricevuti sino al tempo t_K

$$F(t_K) \simeq \sum_i \overbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}^{I_i} \, \overbrace{\delta(t_K,\tau_i)}^{\text{Delta di Dirac}}$$

impulso unitario

$\lim \Delta\tau_i \rightarrow 0$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t,\tau)\,d\tau$$

τ variabile di integrazione

$$u_0(t_K) \simeq \sum_i F_i(\tau_i)\Delta\tau_i \, h(t_K,\tau_i)$$

f. ne risposta a impulso unitario

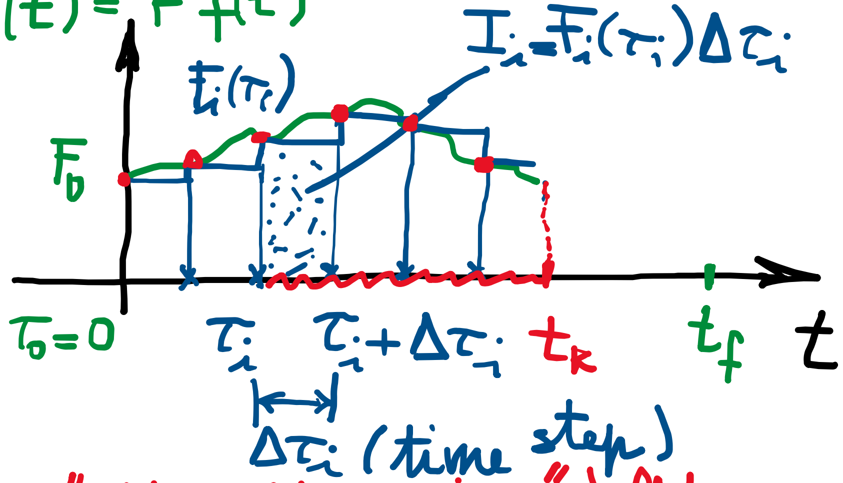
$\lim \Delta\tau_i \rightarrow 0$

$$u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau$$

Integrale di Duhamel

Risposta a forzante generica ⇒ Integrale di Duhamel

$F(t) = F\,f(t)$



"discretizzazione" dell'asse dei t

$$F(t_k) \simeq \sum_{0\,i}^{k-1} \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\, \overbrace{\delta(t_k,\tau_i)}^{\text{f.ne delta di Dirac}}$$

(impulso unitario in τ_i)

Sovrapposizione di un numero finito (discreto) di impulsi I_i ricevuti dal sistema negli istanti τ_i

$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\, \overbrace{\delta(t,\tau)}^{\delta(t-\tau)}\, d\tau$$

(proprietà tipica della δ)

INPUT $\downarrow \delta(t,\tau)$

$\boxed{\text{SISTEMA}}$

OUTPUT $\downarrow h(t,\tau)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t$$

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \simeq \omega_1 \quad |\zeta| \ll 1$

$$u_0(t_k) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\, \overbrace{h(t_k,\tau_i)}^{\text{f.ne risposta ad impulso unitario}}$$

("convoglia" in t gli effetti dinamici di impulsi ricevuti in τ) $\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$

$$= \int_0^t F(\tau)\, \overbrace{h(t,\tau)}^{h(t-\tau)}\, d\tau$$

Integrale di "convoluzione"

Integrale di Duhamel:

$$u_0(t) = \int_0^t F(\tau) \underbrace{\frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)}_{h(t-\tau)} \, d\tau$$

τ variabile di integraz.

t istante di lettura della risposta

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

$$= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) \, d\tau$$

- Fornisce una rappresentazione formale analitica esatta della risposta.
- Raramente determinabile analiticamente:
  - in genere $F(t)$ non è nota in forma analitica, bensì "campionata" ad istanti di tempo discreti;
  - qualora lo fosse, per espressioni generiche della forzante, non soluz. analitica in forma chiusa possibile.
- In genere valutabile mediante integrazione numerica in forma approssimata.

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow h(t)$$

Scritture alternative

$\frac{k}{m} = \omega_1^2$, $\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\xi^2}$

- $F(t) = F\, f(t)$: $u_0(t) = \frac{\overbrace{F}^{u_{st}}}{m\omega_d}\frac{k}{k}\int_0^t f(\tau)\, e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

$= N(t)\, u_{st}$; $N(t) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t f(\tau)\, \frac{e^{\xi\omega_1\tau}}{e^{\xi\omega_1 t}} \sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

per smorz. piccolo $\xi \ll 1$: ε, 1

fattore di amplificazione dinamica dipendente dal tempo.

- $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1}\underbrace{\frac{1}{m\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t F(\tau)\, e^{-\xi\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau}_{V(t)} = \frac{V(t)}{\omega_1}$ (come per risposta armonica)

$V(t)$ "pseudo-velocità" ⟹ vedi, poi, "pseudo-spettri"

- $\sin\omega_d(t-\tau) = \sin\omega_d t \cos\omega_d\tau - \cos\omega_d t \sin\omega_d\tau$ ⟹

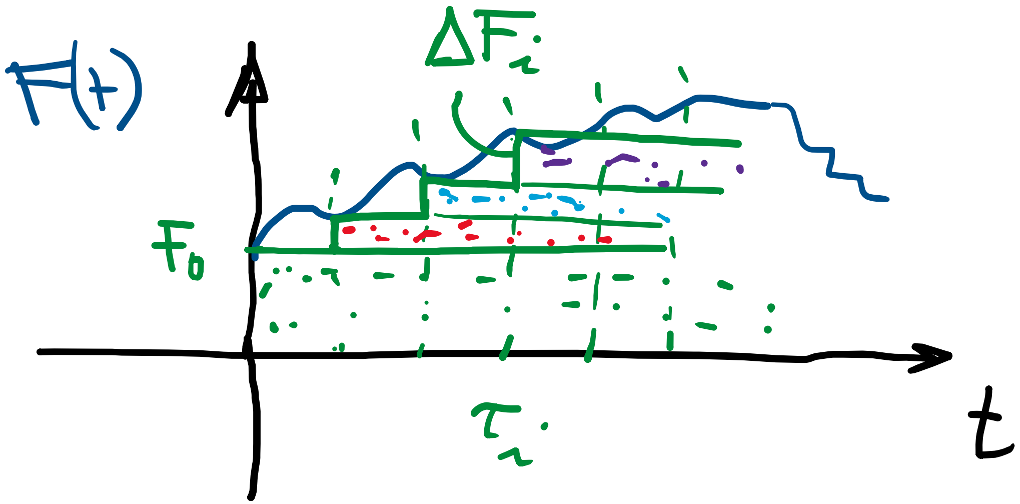
$u_0(t) = \underbrace{A(t)} \sin\omega_d t - \underbrace{B(t)} \cos\omega_d t$

Ampiezze dip.ti dal tempo

$$\begin{cases} A(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\, \frac{e^{\xi\omega_1\tau}}{e^{\xi\omega_1 t}} \cos\omega_d\tau\,d\tau & y(\tau) \\ B(t) = \text{''} \quad \dots\dots \sin\omega_d\tau \dots & z(\tau) \end{cases}$$

$F(t) = F_0 + \sum_i \Delta F_i$

Visione alternativa:



Sequenza di forzanti a gradino:

$$u_0(t) = F_0 A(t) + \sum_i \overbrace{\frac{\Delta F_i(\tau_i)}{\Delta \tau_i}}^{\text{rapporto incrementale}} A(t-\tau_i)\, \Delta \tau_i$$

f.ne risposta a gradino unitario

$$\Big\downarrow \lim_{\Delta \tau_i \to 0}$$

$$= F_0 A(t) + \int_0^t \dot F(\tau) A(t-\tau)\, d\tau$$

$$dA = -\dot A\, d\tau$$

Integrando per parti:

$$u_0(t) = \cancel{F_0 A(t)} + \underbrace{F(\tau) A(t-\tau)\Big|_0^t}_{F(t)\underbrace{A(t-t)}_{A_0 = 0} - \cancel{F_0 A(t)}} + \int_0^t F(\tau) \underbrace{\dot A(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$\tau = t$ $\qquad$ $\tau = 0$

cvd...

$(\dot{F A}) = \dot F A + F \dot A$ regola di derivazione del prodotto

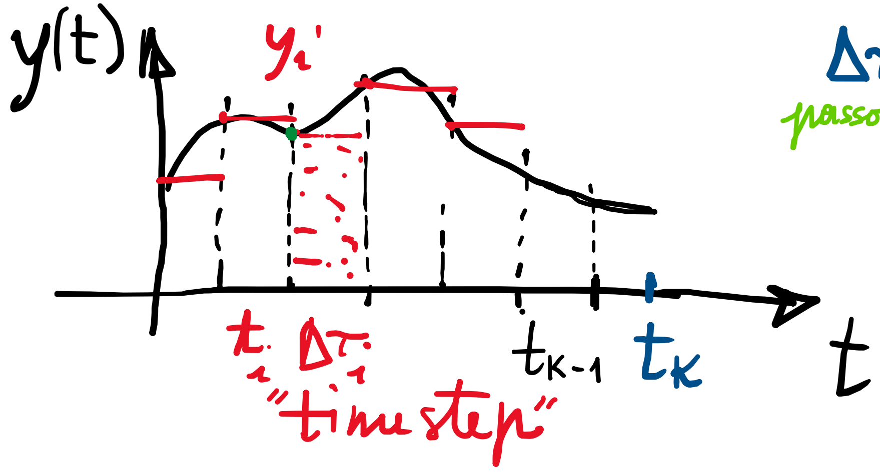
$\Rightarrow \dot F A = (\dot{F A}) - F \dot A$

Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel $\Rightarrow \int_0^t y(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow$ vedi calcolo numerico.

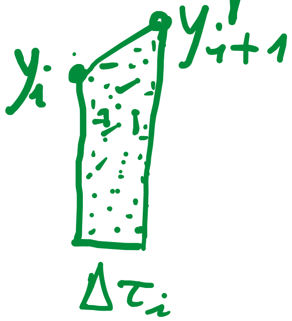
• **Regola dei rettangoli**: $I_{int} \simeq \sum_{i=0}^{K-1} y_i \, \Delta\tau_i$ (f.ne costante nel passo temporale)

$\Delta\tau_i = \Delta\tau$ passo costante $= \Delta\tau\,(y_0 + y_1 + \dots + y_{K-1})$



(f.ne parabolica nel passo)

• **Regola dei trapezi**: $I \simeq \sum_{i=0}^{K-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta\tau_i$ (f.ne lineare nel passo)

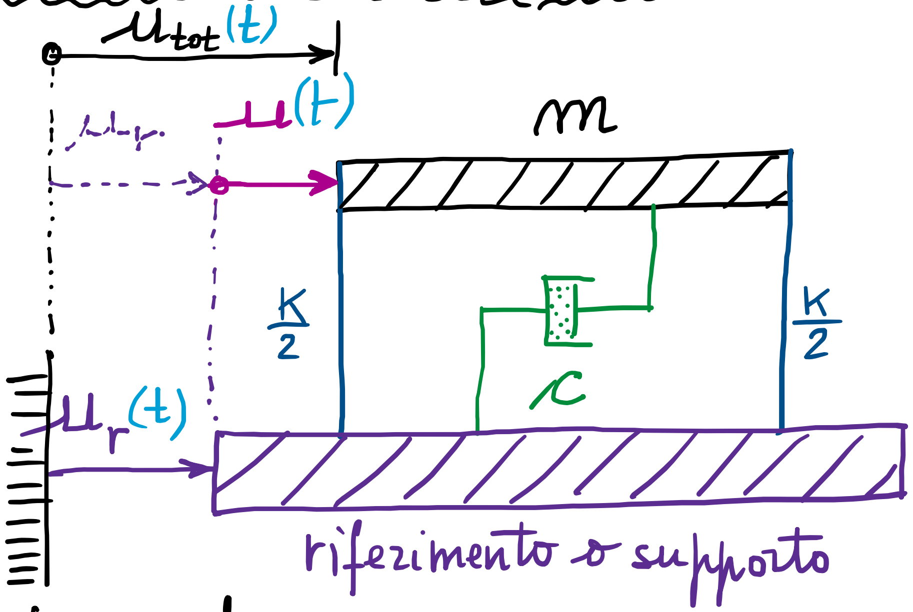


$= \frac{\Delta\tau}{2}\,(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{K-1} + y_K)$

$= \Delta\tau \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{K-1} + \frac{y_K}{2} \right)$ $\quad \frac{y_0 + y_K}{2}$

• **Regola di Simpson**, etc.

Risposta al moto del riferimento (del supporto) $\Rightarrow$ spostamento / velocità / accelerazione totale

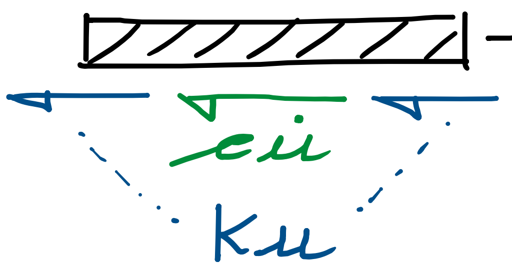


riferimento fisso

$$\ddot u_{tot}(t) = \ddot u_r(t) + \ddot u(t)$$

"Concept":

- Effetto di "trascinamento":



$$F_{i_{tot}} = -m\ddot u_{tot} = -m\ddot u_r - m\ddot u$$

$$\cancel{m}\ddot u + \frac{c}{m}\dot u + \frac{K}{m}u(t) = \underbrace{(-)\cancel{m}\ddot u_r(t)}_{F_{ir}(t)}$$

c: coefficiente di smorzamento

$F_{ir}(t)$ forza d'inerzia legata al moto del supporto

$$\boxed{\ddot u + 2\zeta\omega_1\dot u + \omega_1^2 u(t) = -\ddot u_r(t)}$$

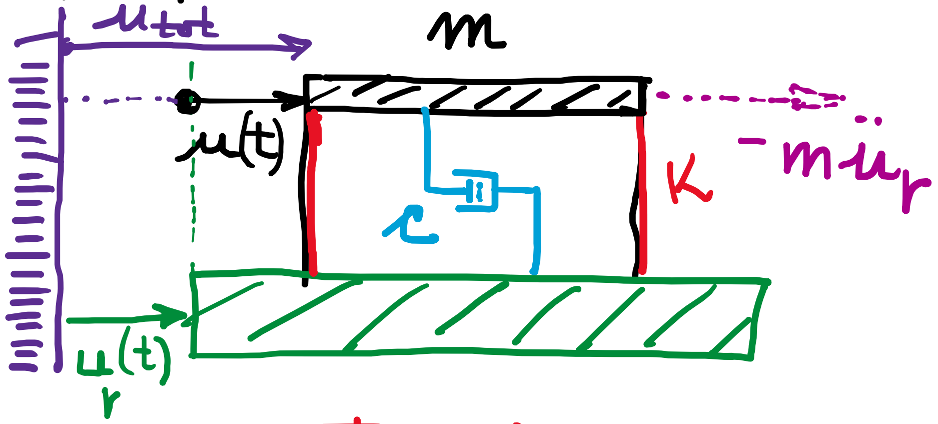
~1%, es. 5% ζ: fattore di smorz.

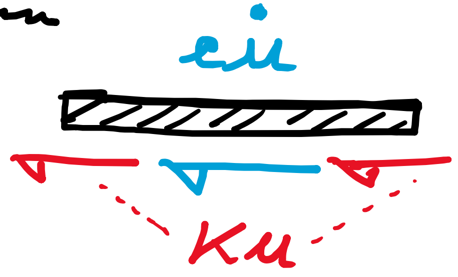
esempio tipico in ing. civile:
eccitazione o azione sismica

$$\ddot u_r(t) = \ddot u_g(t)$$

└ "ground" (terreno)

Risposta al moto del riferimento (vedi azione sismica) $u_{tot} = u_r + u$



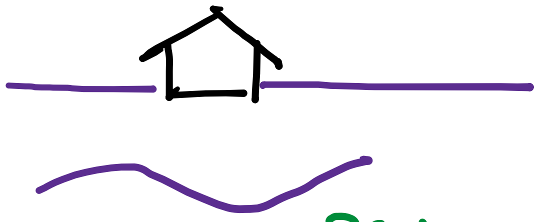


$$F_I = -m\,\ddot{u}_{tot} = -m(\ddot{u}_r + \ddot{u})$$

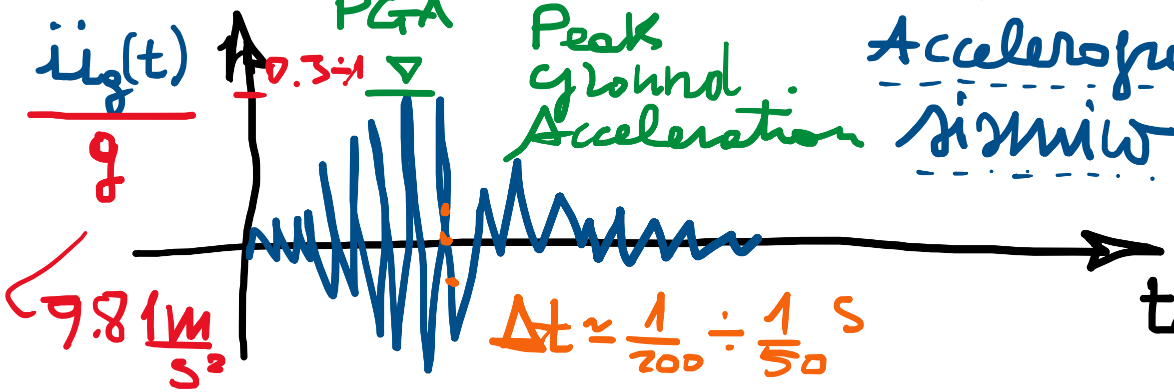
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = -m\,\ddot{u}_r(t) \leftarrow \text{Forzante}$$

indotta per inerzia quale effetto di trascinamento

{ es. moto del terreno per effetto del terremoto $\ddot{u}_g(t)$ ↳ ground



estensione limitata della strutt. di massa contenuta, in modo da non creare interazioni suolo-struttura (sisma)-

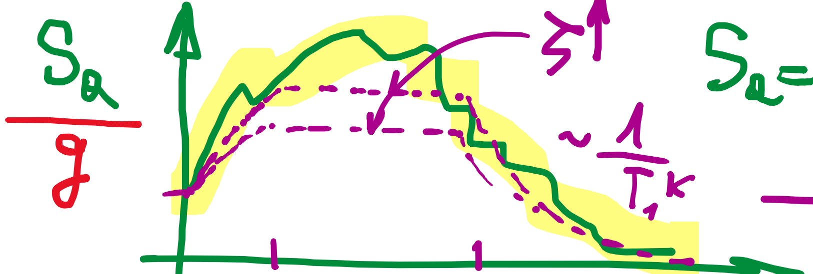


Peak ground Acceleration

Accelerogramma sismico

$\Delta t \simeq \frac{1}{200} \div \frac{1}{50}$ s

⇒



Spettro di risposta

$S_a = \max_t \{\ddot{u}_t\}$

→ Spettro di progetto

Risposta sismica: $\ddot{u}+2\xi\omega_1\dot{u}+\omega_1^2 u = (-)\,\ddot{u}_g(t) \Rightarrow u(t)$ per $\int$ di Duhamel

Spettri di risposta (BIOT, 1932): $\Rightarrow$ semplificaz. (singolo spettro) Pseudo-spettri:

displacement $S_d =$
velocity $S_v = \max_t$
acceleration $S_a =$

$$\begin{cases} u(t;\, T_1,\xi) \\ \dot{u}(t;\, T_1,\xi) \\ \ddot{u}_t(t;\, T_1,\xi) \end{cases}$$

totale ┘

$S_d \Rightarrow PS_v = \omega_1 S_d \simeq S_v$

$PS_a = \omega_1 PS_v = \omega_1^2 S_d \simeq S_a$

è V_{max}

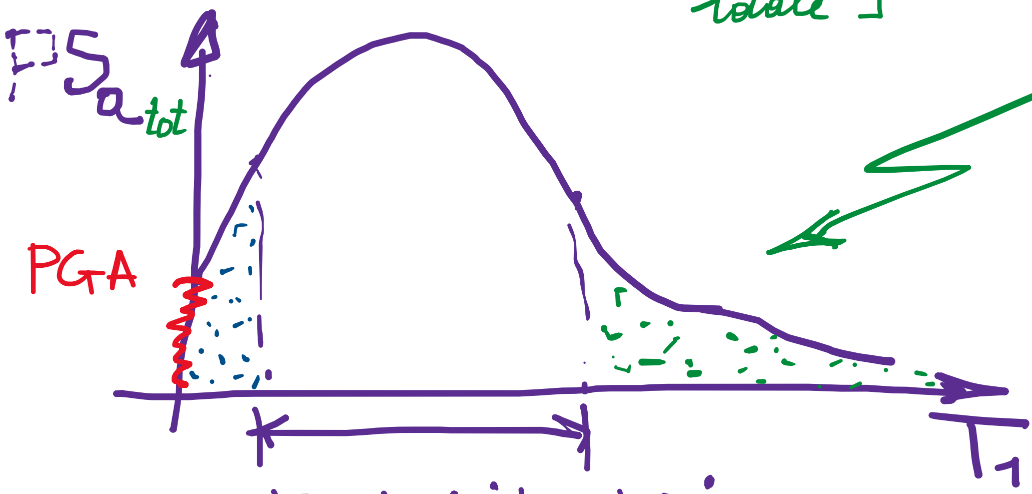
(come per risposta armonica)

$S_d = \frac{1}{\omega_1} PS_v$: vedi scrittura Duhamel $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1} V(t)$ ← pseudo-velocità

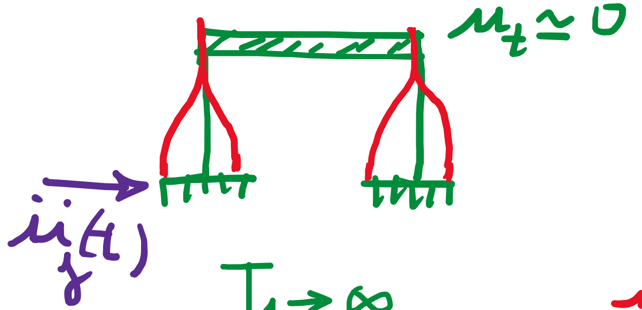
Isolamento sismico (strutt. flessibile)

T_1 grandi

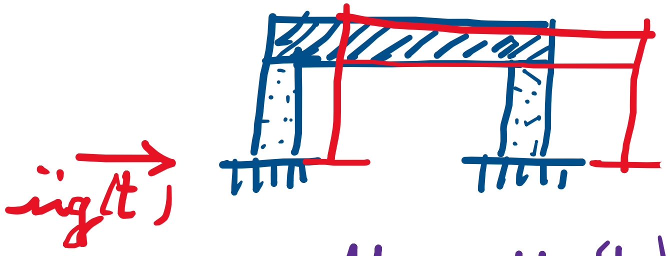
Vs. Struttura rigida



periodi propri con amplif. dell'ec. sismica



$T_1 \to \infty$
$(\omega_1 \to 0)$



$T_1 \to 0$
$(\omega_1 \to \infty)$

$u_t \simeq u_g(t)$
$(u \simeq 0)$

SOMMARIO (Lez. 08)

- Risposta a forzante generica ⇒ sequenza di impulsi ⇒ Integrale di Duhamel. (di convoluzione)
- Scritture interpretative alternative (come per risposta armonica).
- Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel ⇒ calcolo numerico.

— o —

- Risposta al moto del riferimento (es. earthquake). azione sismica
- Forzante apparente indotta per effetto d'inerzia (trascinamento).
- Risposta simbolica via Duhamel (valutabile numericamente).
- Spettri e pseudo-spettri di risposta (ev. di progetto ⇒ codificati). v. normative
- Concetto di isolamento sismico delle vibrazioni.

Next step: Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (Metodo di Newmark).
Risposta nel dominio delle frequenze.