Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

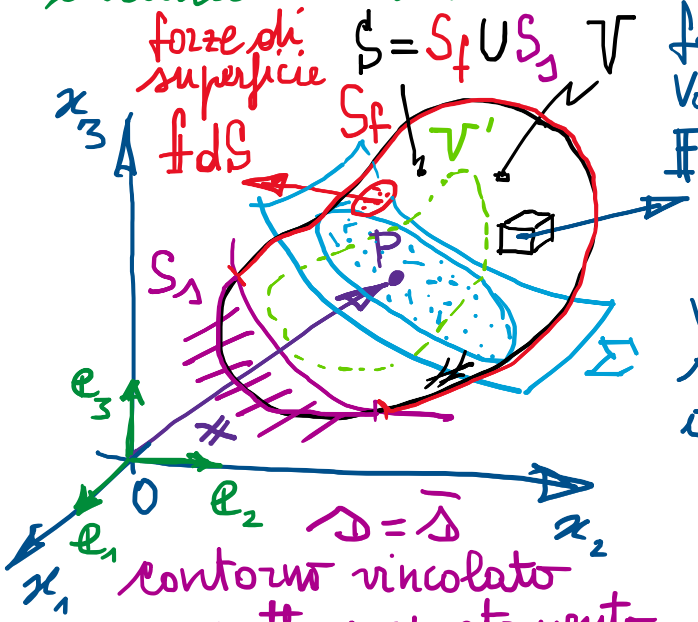
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 12

II Meccanica dei Solidi (o dei mezzi continui) $\Rightarrow \forall P \in V$ punto materiale

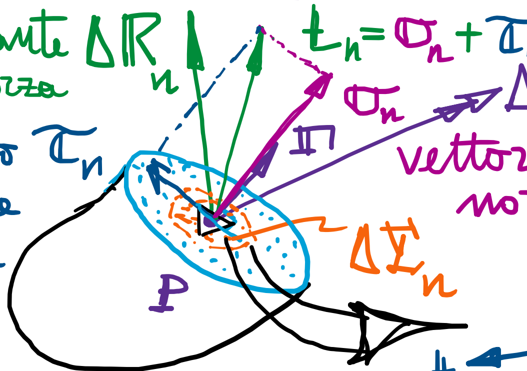
Statica dei continui: analisi dello stato di sforzo o tensione

$t_{-n}(x) = -t_n(x)$

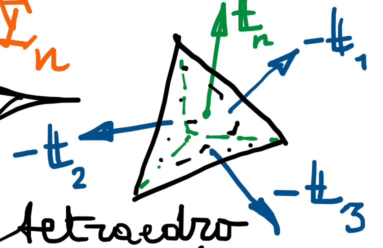


versore normale locale in P

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}, \quad n_i = \cos \widehat{n e_i} = n \cdot e_i \quad \text{coseni direttori}$$



$$d\Sigma_i = n_i \, d\Sigma_n$$



tetraedro di Cauchy

- $\displaystyle\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta\Sigma_n} = t_n(x)$ vettore sforzo di Cauchy
- $\displaystyle\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta\Sigma_n} = 0$ (continuo non polare di Cauchy)

Relazione di Cauchy (~1822)

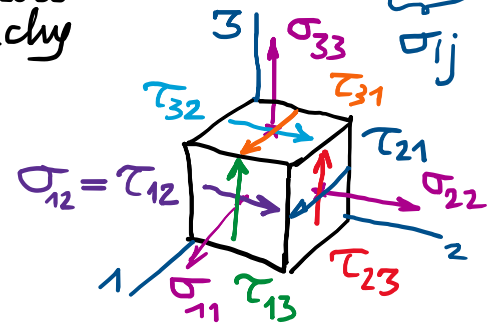
eq. di equil. alla traslazione

$$t_n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 = \sum_i t_i n_i$$

$$\Updownarrow$$

$$t_{nj} = \underbrace{t_{ij}}_{\sigma_{ij}} n_i \iff t_n = \sigma^{(T)} \cdot n = n \cdot \sigma$$

σ tensore sforzo di Cauchy

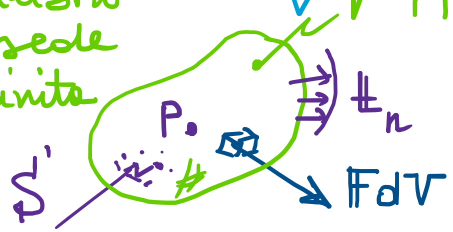


significato fisico delle comp.ti di sforzo σ_{ij}

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Equilibrio in sede indefinita

$\forall V' \cap V$



Equil. alla traslazione:

$$\int_{V'} F\,dV + \int_{S'} \underbrace{t_n}_{n \cdot \sigma}\, dS = 0 \quad \text{(Th. div.)}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\int_{V'} F\,dV + \int_{V'} \operatorname{div}\sigma\, dV = 0$$

$$\int_{V'} (F + \operatorname{div}\sigma)\, dV = 0, \ \forall V' \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\sigma + F = 0 \ \text{in } V} \quad (\operatorname{div}\sigma = -F)$$

Teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} g \, dV = \int_S n \cdot g \, dS$$

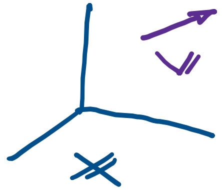
g: campo tensoriale (es. g_{ij})

$$\underbrace{\operatorname{div}}_{\text{divergenza}} = \nabla\cdot = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}}^{\text{gradiente}} \cdot$$

equil. alla rotazione: tensore doppio simmetrico

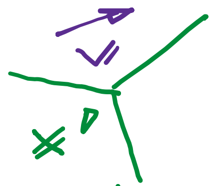
$$\sigma^T = \sigma \iff \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$

• Trasformazione delle componenti al variare del sistema di riferimento



$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$

tensore ortogonale del 2° ord.



sistema ruotato

$$\boxed{\{\mathbb{V}\}' = [\mathbb{Q}]\cdot\{\mathbb{V}\}} \iff V'_i = Q_{ij}\, V_j \qquad \left(\{\mathbb{V}\} = \underbrace{[\mathbb{Q}]^{-1}}_{[\mathbb{Q}]^T}\{\mathbb{V}\}'\right)$$

$\mathbb{Q}^T\cdot\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$ ← tensore identità del 2° ordine $[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$, $I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

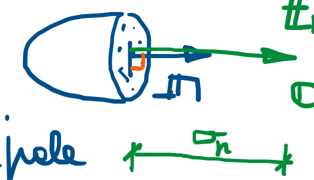
Kronecker

$(\mathrm{tr}\,\mathbb{I} = 3)$

$Q_{ji}\,Q_{jk} = Q_{ij}\,Q_{kj} = \delta_{ik}$

$$\{\mathbb{t}_n\}' = [\mathbb{Q}]\cdot\{\mathbb{t}_n\}$$
$$= [\mathbb{Q}]\cdot[\sigma^T]\cdot\{\mathbb{n}\}$$
$$= \underbrace{[\mathbb{Q}]\cdot[\sigma^T]\cdot[\mathbb{Q}]^T}_{[\sigma^T]'}\cdot\{\mathbb{n}\}' = [\sigma^T]'\cdot\{\mathbb{n}\}' \Rightarrow \boxed{[\sigma]' = [\mathbb{Q}]\cdot[\sigma]\cdot[\mathbb{Q}^T]} \iff \sigma'_{ij} = Q_{ik}\,\sigma_{kl}\,Q_{jl}$$

• Tensioni principali $(\tau_n = 0)$ autovalori autovettori



dirèz. principale di sforzo

$\mathbb{t}_n = \sigma^T\cdot\mathbb{n}$, $\sigma_n = \sigma_n\,\mathbb{n}$ $\Big\rangle$ $\sigma\cdot\mathbb{n} = \sigma_n\,\mathbb{n}$ $\iff$ $(\sigma - \sigma_n\,\mathbb{I})\cdot\mathbb{n} = \mathbb{0}$ $\quad(\mathbb{n}\neq\mathbb{0})$ Soluz. non banali sse:

pb. agli autovalori associato a σ

eq.ne caratteristica

$$-\det(\sigma - \sigma_n\mathbb{I}) = +\sigma_n^3 - I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n - I_3 = 0 \Rightarrow$$ 3 radici $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ tens. princ.

INVARIANTI

primo $I_1 = \mathrm{tr}\,\sigma = \sigma_{ii}$

secondo $I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \mathrm{tr}^2\sigma\right)$ $\qquad \sigma^3 - I_1\,\sigma^2 - I_2\,\sigma - I_3\,\mathbb{I} = \mathbb{0}$

terzo $I_3 = \det\sigma = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\sigma\right)$

da Th. di Cayley–Hamilton

L'operatore traccia è invariante:

$$\mathrm{tr}[\sigma]' = Q_{ik}\,\sigma_{kl}\,Q_{il} = Q^T_{ki}\,Q_{il}\,\sigma_{kl} = \delta_{kl}\,\sigma_{kl} = \sigma_{kk}$$
$$= \mathrm{tr}[\sigma]$$

Componenti volumetrica e deviatorica:

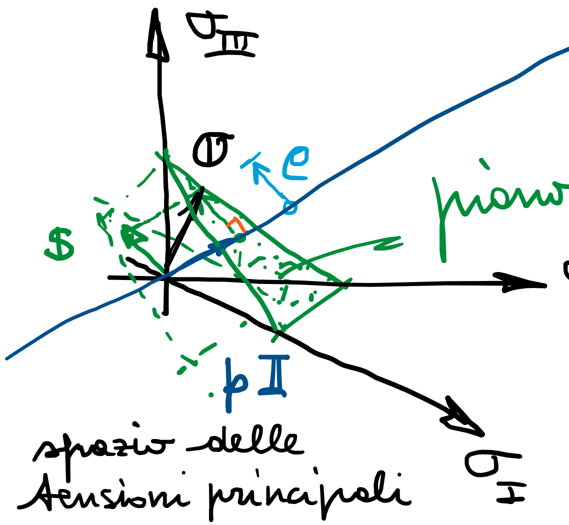
$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D$$

$$= p\,\mathbb{I} + s \Rightarrow s = \sigma - \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}}_{I_1/3}\mathbb{I}$$

p: tensione media $= \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$

deviatore di sforzo

$$\left(\mathrm{tr}\,s = \mathrm{tr}\,\sigma - \cancel{\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}}\cancel{3} \equiv 0\right)$$



spazio delle tensioni principali

asse idrostatico

$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$

piano deviatorico

($\perp$ all'asse idrostatico)

Problemi agli autovalori:

$\sigma_V \cdot n = \sigma_V\, n$ autoval. p

$p\,\mathbb{I} \cdot n = p\, n$ autovett. n arbitrari

$s \cdot n = s_n\, n$

$$(\sigma - p\mathbb{I})\cdot n = \sigma\cdot n - p\,n = s\,n \Rightarrow \sigma\cdot n = \overbrace{(p+s)}^{\sigma_n}\, n$$

autovet. n stessi

"shiftati" di p — autoval. $s_n = \sigma_n - p$

$$(*)\quad s^3 \cancel{- \ldots s^2} - J_2\, s - J_3 = 0 \quad (\text{eq.ne in forma depressa})$$

Invarianti del deviatore:

$$\begin{cases} J_1 \equiv \mathrm{tr}\,s \equiv 0 \\ J_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,s^2 \\ J_3 = \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,s^3 \end{cases}$$

Si cerca soluz. nella forma:

$$s_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha_i = \frac{2}{3}\underbrace{\sqrt{3J_2}}_{\sigma_{eq}^{vM}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\underbrace{\sqrt{2J_2}}_{e}\cos\alpha$$

Sostituendo:

$$\frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2}\cos^3\alpha - J_2\,\frac{2\cdot 3}{3\cdot\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha = J_3$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2}\underbrace{\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)}_{\cos 3\alpha} = J_3 \Rightarrow \boxed{\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}}$$

Sost. $\sigma_n = s_n + \overbrace{p}^{I_1/3}$ in

$\sigma_n(\sigma_n^2 - I_1\sigma_n - I_2) = I_3$

$(s_n+p)(s_n^2 - p s_n - 2p^2 - J_2) = I_3$

e cf. con la $(*)$.

$$\text{ove}\begin{cases} J_2 = \dfrac{1}{3} I_1^2 + I_2 \\ J_3 = I_3 + \dfrac{1}{3} I_1\left(\dfrac{2}{9} I_1^2 + I_2\right) \end{cases}$$

relazioni tra invarianti J_i e I_i

$$\sigma_i = p + s_i \leftarrow s_i \leftarrow \alpha_i \begin{cases} 0 \le \alpha_1 = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{J_3}{J_2^{3/2}} \le \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \dfrac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Comportamento e resistenza dei materiali:

– **Elastico**: disaccoppiamento di risposta elastica isotropa volumetrica e deviatorica:

$p = K\, v$ deformazione volumetrica ; $s = 2G\, e$ deviatore di deformaz.

$K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di volume

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

E: modulo di elasticità longitudinale o di Young

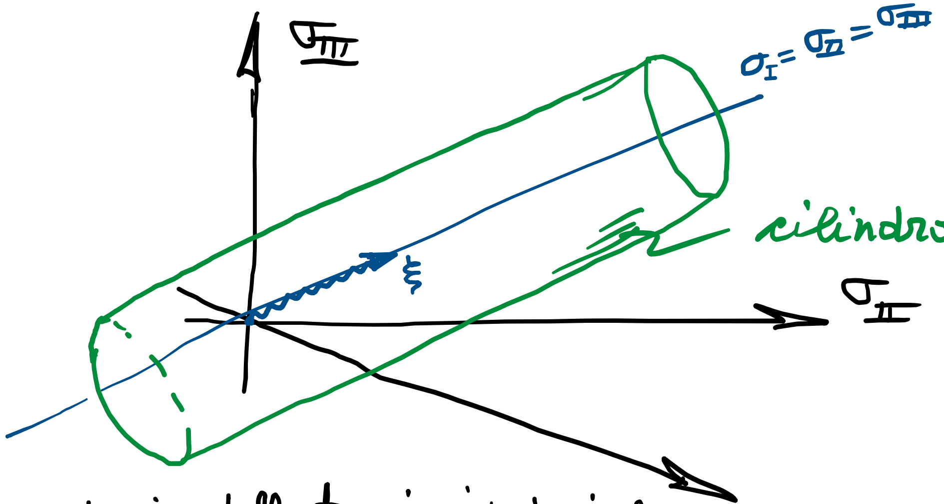
ν: coeff. di contrazione trasversale o di Poisson

– **Plastico**: risposta oltre il campo elastico per diversi materiali (metallici, lapidei) ⇒ Teoria della Plasticità

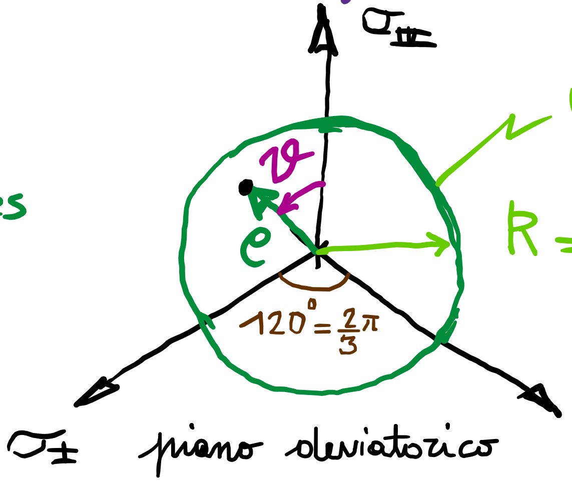
metallici: s; lapidei: p, s

funzione di snervamento: $f(\sigma) = f\Big(\xi = \dfrac{\overbrace{\mathrm{tr}\,\sigma}^{I_1}}{\sqrt{3}},\ \rho = \sqrt{2J_2},\ \vartheta \overset{J_3}{=} \alpha\Big)$

coordinate di Haigh-Westergaard



spazio delle tensioni principali



$R = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\, \sigma_0$

└ resistenza monoassiale

piano deviatorico