Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

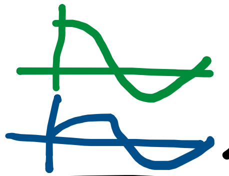
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

6. Risposta mediante trattazione in variabili complesse –

$$\ddot v + 2\zeta\omega_1 \dot v + \omega_1^2 v = \omega_1^2 u_{st} \cos\omega t$$

$$i(\ddot u + 2\zeta\omega_1 \dot u + \omega_1^2 u = \omega_1^2 u_{st} \sin\omega t)$$



$$\ddot z + 2\zeta\omega_1 \dot z + \omega_1^2 z = \omega_1^2 u_{st} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\cos\omega t + i\sin\omega t}$$

$z = v + i u$

$v = Re\{z\} \leftarrow F\cos\omega t$

$u = Im\{z\} \leftarrow F\sin\omega t$

Integrale particolare:

$$z_p(t) = \underbrace{Z}_{\text{var. complessa}} e^{i\omega t} = \underbrace{Z^*}_{\text{var. reale}:\ N u_{st}} e^{i(\omega t - \xi)}$$

$$\left[Z = Z^* e^{-i\xi} = Z^*(\cos\xi - i\sin\xi) = \underbrace{Z^*\cos\xi}_{Z_1} - i\underbrace{Z^*\sin\xi}_{Z_2} = Z_1 - iZ_2 \right]$$

$$\dot z_p(t) = i\omega Z e^{i\omega t} = i\omega z_p(t)$$

$$= \omega Z e^{i(\omega t + \pi/2)}$$ (velocità in quadratura in anticipo, con ampiezza ωZ)

$$\ddot z_p(t) = -\omega^2 Z e^{i\omega t} = -\omega^2 z_p(t)$$ (acceler. in opposizione di fase, con ampiezza $\omega^2 Z$)

Sostituendo nell'eq.ne del moto: $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{2\pi f}{2\pi f_1} = \frac{f}{f_1}$ (rapporto di frequenze)

$$\frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_1^2} + i\,2\zeta\frac{\cancel{\omega_1}\,\omega}{\cancel{\omega_1}\,\omega_1} = \frac{\cancel{\omega_1^2}\, u_{st}}{Z} \Rightarrow (1-\beta^2) + i\,2\zeta\beta = \frac{u_{st}}{Z} \Rightarrow Z = \frac{u_{st}}{1-\beta^2 + i\,2\zeta\beta} \cdot \frac{1-\beta^2 - i\,2\zeta\beta}{1-\beta^2 - i\,2\zeta\beta}$$

N (fattore di amplif. din.)

$$Z_1 - iZ_2 = \underbrace{\frac{1-\beta^2}{D} u_{st}}_{Z_1} - i\,\underbrace{\frac{2\zeta\beta}{D} u_{st}}_{Z_2} = u_{st}\,\frac{1-\beta^2 - i\,2\zeta\beta}{\underbrace{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}_{D}}$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \tan\xi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \Rightarrow \xi = \arctan\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

$$Z^* = |Z| = \sqrt{Z_1^2 + (-Z_2)^2} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}{D} u_{st} = \frac{\sqrt{D}}{D} u_{st} = \frac{1}{\sqrt{D}} u_{st}$$

$$z_p(t) = (Z_1 - iZ_2)e^{i\omega t} = (Z_1 - iZ_2)(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$\left(\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_1\right)$$

$$= \underbrace{Z_1\cos\omega t + Z_2\sin\omega t}_{v_p(t)} + i\underbrace{(Z_1\sin\omega t - Z_2\cos\omega t)}_{u_p(t)} = v_p(t) + i\,u_p(t)$$

risp. a $F\cos\omega t$ — risp. a $F\sin\omega t$

$$|F_e| = \cancel{K} N u_{st} \frac{F}{\cancel{K}} = NF$$

$$|F_d| = c\omega N \frac{F}{K} = 2\zeta\omega_1 \frac{\omega}{\omega_1^2} NF = 2\zeta\beta NF$$

$$|F_i| = m\omega^2 N \frac{F}{K} = \beta^2 NF$$

Rappresentazione nel piano di Argand

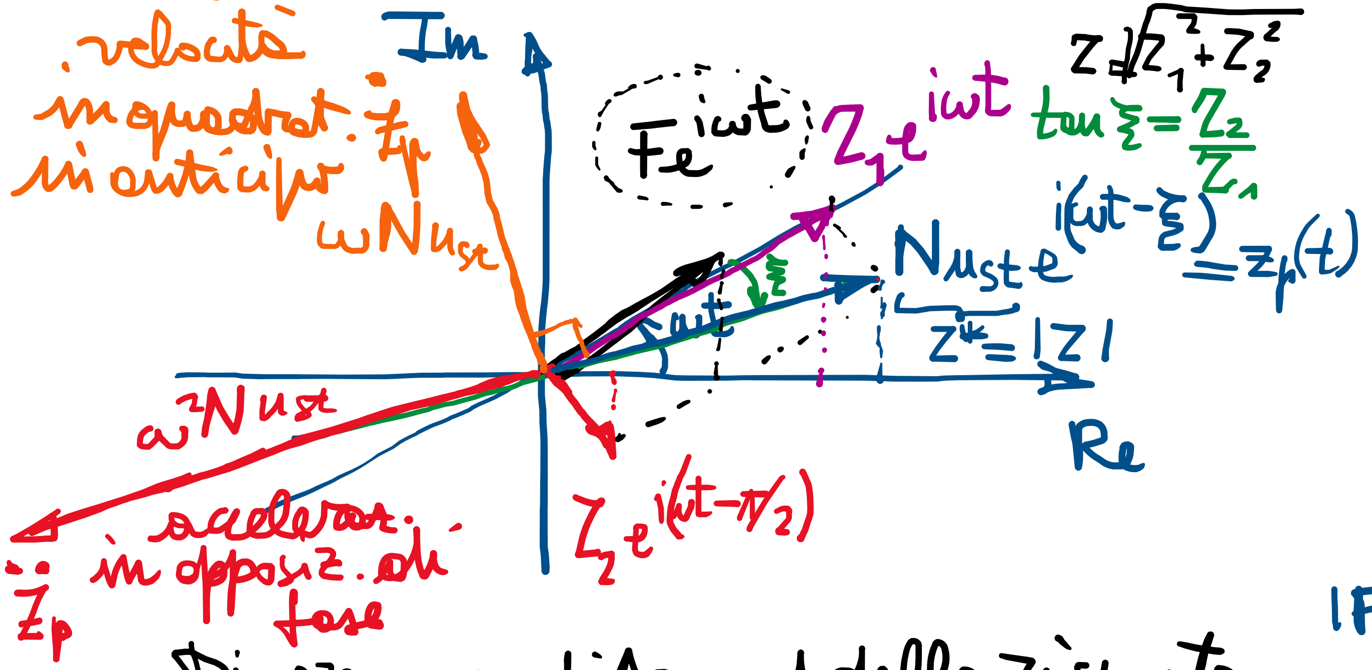


Diagramma di Argand della risposta

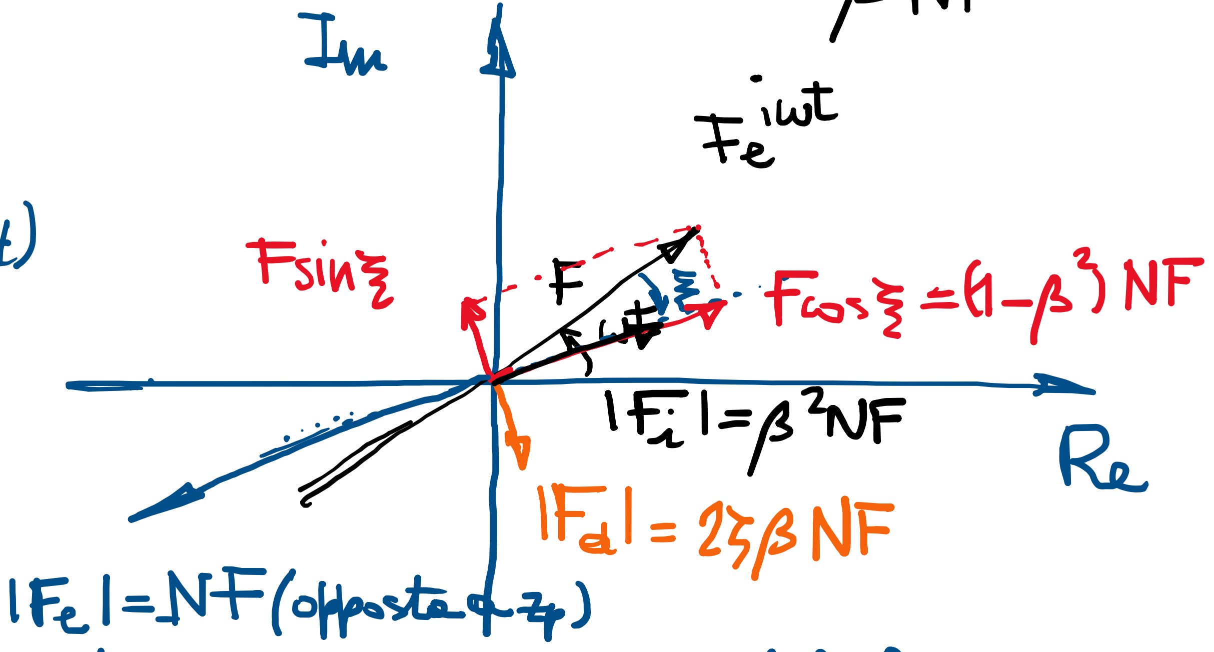
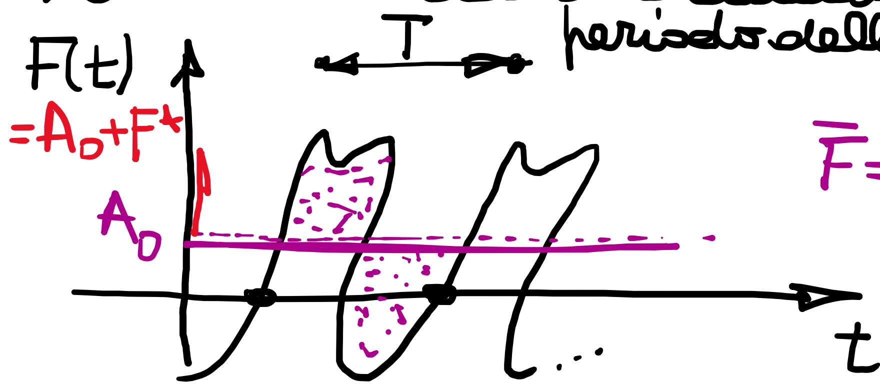


Diagramma di Argand delle forze (equil. dinamico)

Risposta a forzante periodica $\Rightarrow$ Sviluppo in serie di FOURIER



periodo della forzante

$$\bar{F} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t)\,dt \quad \text{valor medio}$$

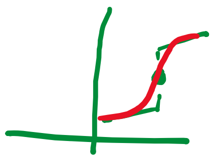
$$F(t) \simeq A_0 + \sum_{n=1}^{(\infty)N} A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$$

$\omega_n = n\omega \; ; \; \omega = \frac{2\pi}{T}$

(forma trigonometrica)

$$\frac{e^{i\omega_n t}+e^{-i\omega_n t}}{2} \qquad \frac{e^{i\omega_n t}-e^{-i\omega_n t}}{2i}\,\frac{i}{i}$$

- $A_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} F(t)\cos\omega_n t\,dt = A_{-n}$
- $B_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} F(t)\sin\omega_n t\,dt = -B_{-n}$



$$\simeq \sum_{n=(-\infty)-N}^{(+\infty)N} C_n e^{i\omega_n t} \; ; \quad C_n = \frac{A_n - iB_n}{2}$$

(forma esponenziale)

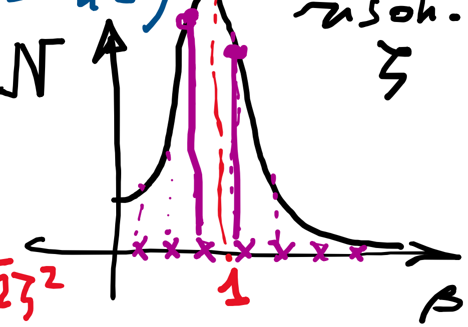
converge per f.ne generalmente continua

Risposta per PSE

$\beta = \beta_n = n\frac{\omega}{\omega_1}$

$$u_p(t) = \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{A_n}{K}}_{F}\left(\frac{Z_{1n}}{u_{st}}\cos\omega_n t + \frac{Z_{2n}}{u_{st}}\sin\omega_n t\right) + \frac{B_n}{K}\left(\frac{Z_{1n}}{u_{st}}\sin\omega_n t - \frac{Z_{2n}}{u_{st}}\cos\omega_n t\right)$$

$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n'}{K}\cos\omega_n t + \frac{B_n'}{K}\sin\omega_n t$$



SOMMARIO (Lez. 06)

- Trattazione in variabili complesse ⇒ $Fe^{i\omega t} = F\cos\omega t + iF\sin\omega t$
- Derivazione delle relazioni caratteristiche per. determinate
- Risposta simultanea alle comp.ti armoniche $\cos\omega t$ e $\sin\omega t$
- Rappresentazione nel piano di Argand
  - diagramma della risposta
  - diagramma delle forze
- Generalizzazione: forzante periodica (treno di infinite armoniche)
- Effetto "filtro" del sistema vs. le comp. armoniche della forzante vicine a quelle corrispondenti alla pulsazione naturale del sistema
- Next step: risposta a forzante generica (a partire da forzante impulsiva)