

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

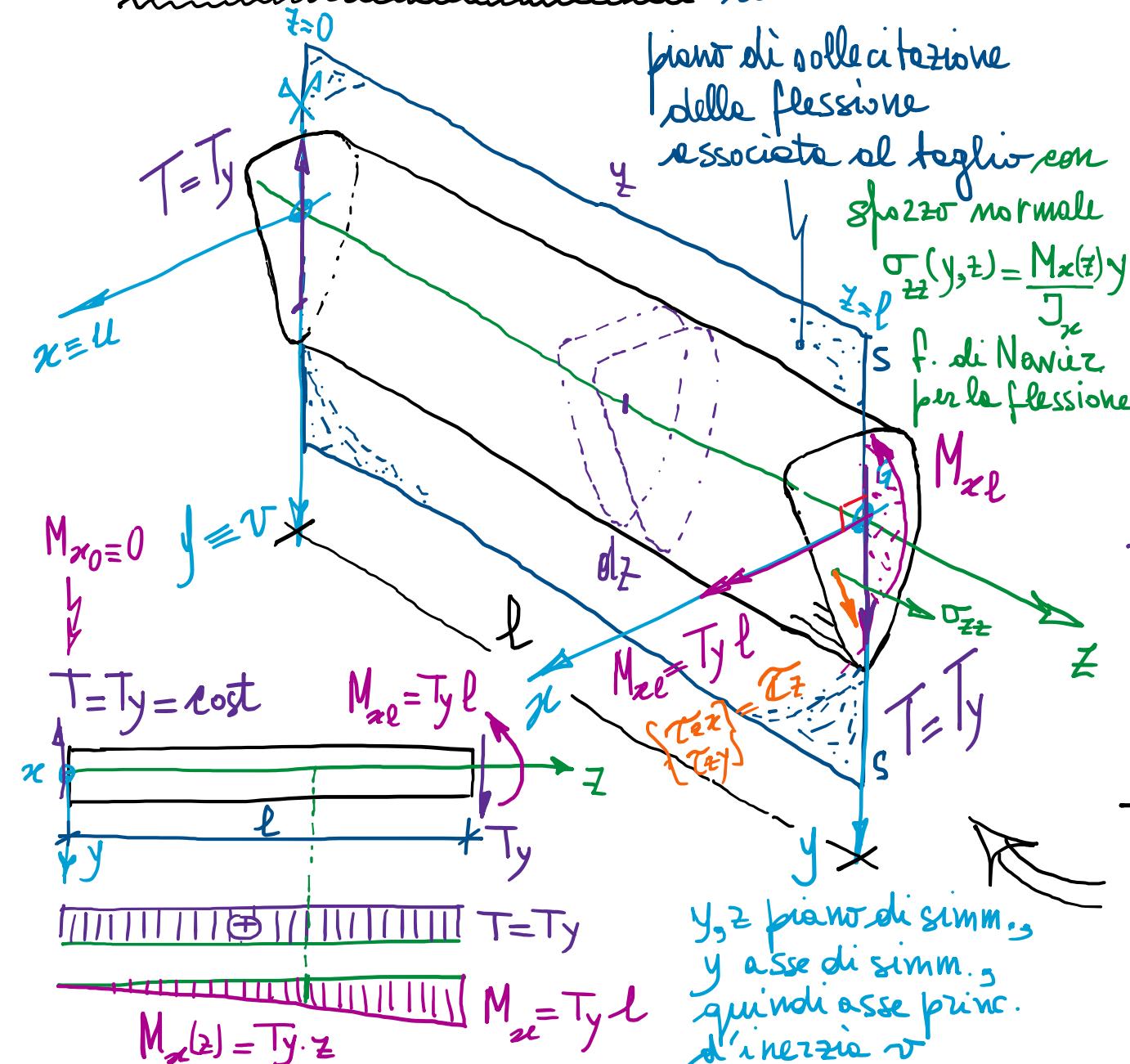
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

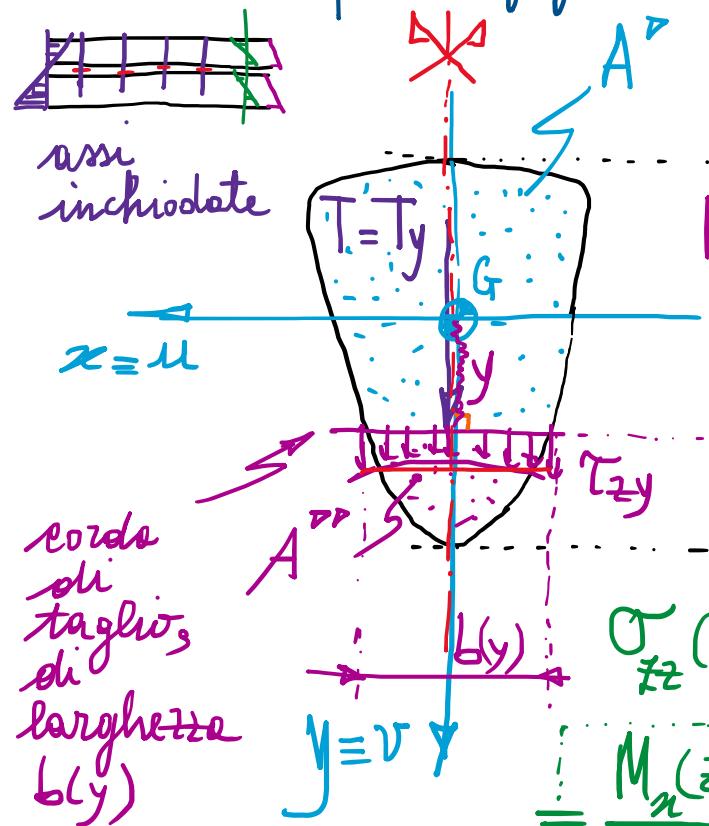
LEZIONE 22

3) Azione tagliente o taglio (flessione composta) - Risultano presenti delle azioni taglienti (uguale e contrarie) sulle basi e un momento flettente, in modo da avere un sistema di forze autoequilibrato, anche alle rotezioni \rightarrow sollecitazione composta.



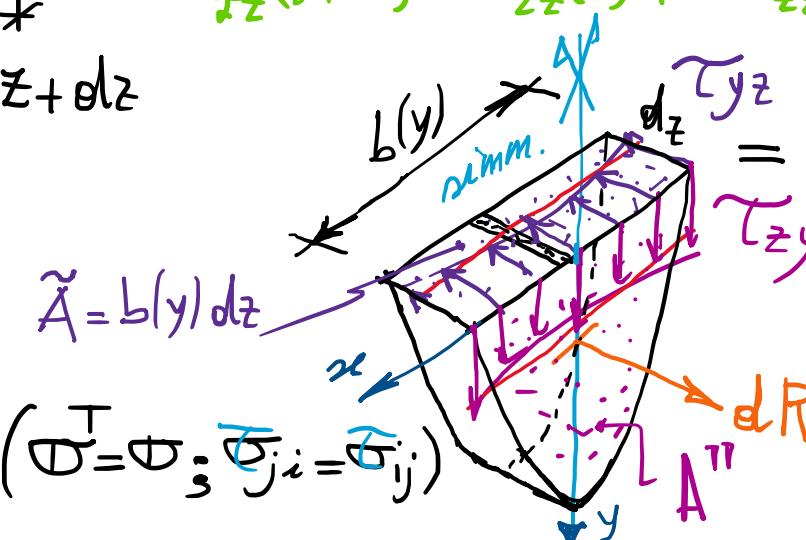
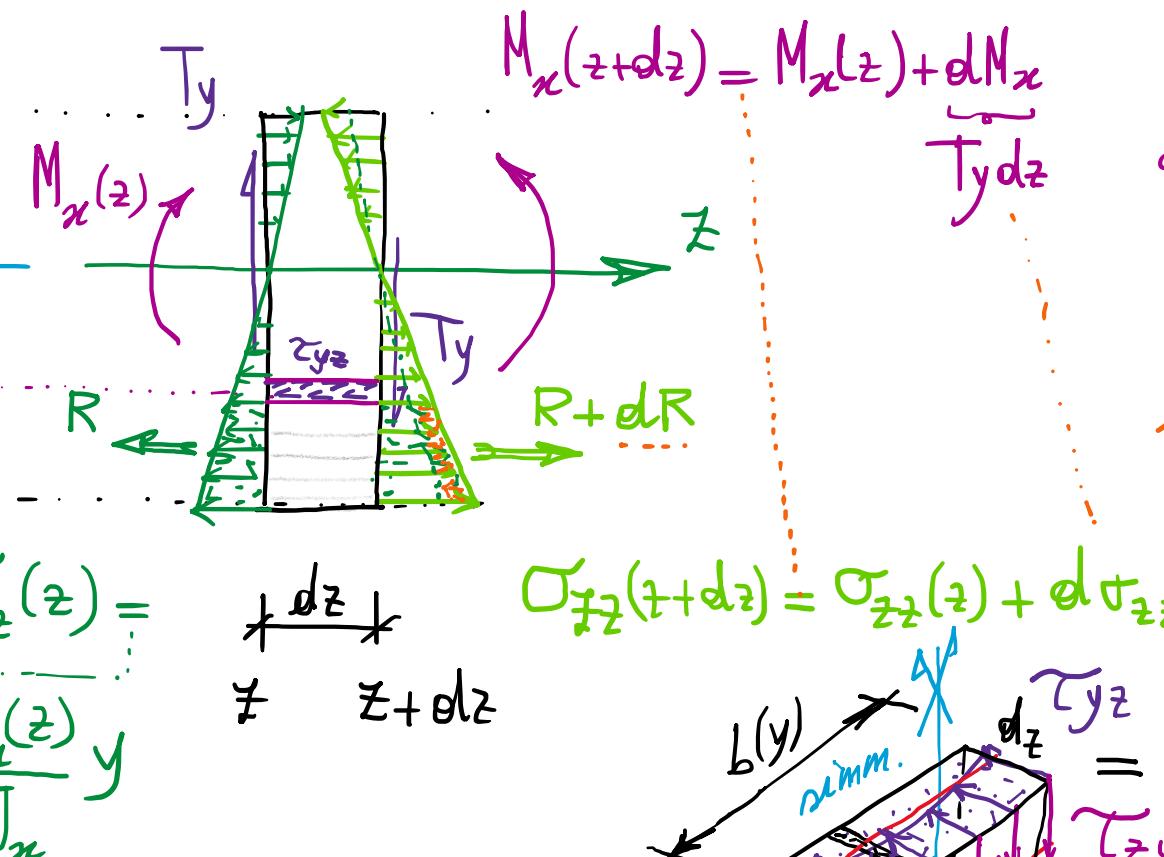
- In generale, la trattazione del caso di DSV del taglio non si presenta agevole: soluz. analitica possibile per casi particolari, anche mediante sviluppi in serie.
- Soluzioni approssimate risultano possibili e utili a determinare il campo delle tensioni tangenziali a fini ingegneristici, in particolare per casi specifici.
- Ad esempio, nel caso di prisme a sezione compatta avendo un asse di simmetria retta e caricato lungo l'asse di simmetria, che pertanto è esse princ. ol'inerzia (\rightarrow flessione retta), si ottiene stima efficace delle tasse di taglio.

- Trattazione approssimata del taglio secondo D. J. Tjourawsky (~1856)
- Utile a fini ingegneristici e fondata sul ragionamento di equilibrio (alle tre sez.) seguente.



$T_{zy}(x; my)$ ottenuta simmetriche rispetto a y
(ad es. maggiori verso l'esterno, bordo non protetto)

formule di Navier per le flessioni (indip. da x)



$$M_x(z) = T_y z$$

$$\frac{dM_x}{dz} = M'_x(z) = T_y$$

$$d\sigma_{zz} = \frac{T_y dz}{J_x} y \leftrightarrow dR$$

Equil. alle tre sez.
nella direzione z :

Risultante delle T_{zy}
su \tilde{A}

=

Risultante dR su A''
dovuto a $d\sigma_{zz}$

Equilibrio alle traslazioni (in direzione z):

$$\int_{\tilde{A}} \tau_{yz}(x; y) dx dz = \int_{A''} \frac{d\sigma_{zz}}{dx} dA'' = \int_{A''} \frac{T_y dz}{J_x} y dA'' = \frac{T_y dz}{J_x} \int_{A''} y dA'' \quad \begin{array}{l} \text{momento statico} \\ \text{di } A'' \text{ rispetto} \\ \text{a } x \end{array}$$

$$\bar{\tau}_{yz}(y) b(y) = \frac{T_y}{J_x} S_x''(y)$$

valor medio delle

$\tau_{yz}(x; y)$ alle quote y
lungo la corda

definiz.
di valor
medio
su di
un
intervallo

$$\bar{\tau}_{yz}(y) = \frac{1}{b(y)} \int_{-\frac{b}{2}(y)}^{+\frac{b}{2}(y)} \tau_{yz}(x; y) dx$$

Si ipotizza che le $\tau_{zy}(x; y)$ risultino fuori dal loro
valor medio lungo la
corda, quindi costanti lungo di esse.

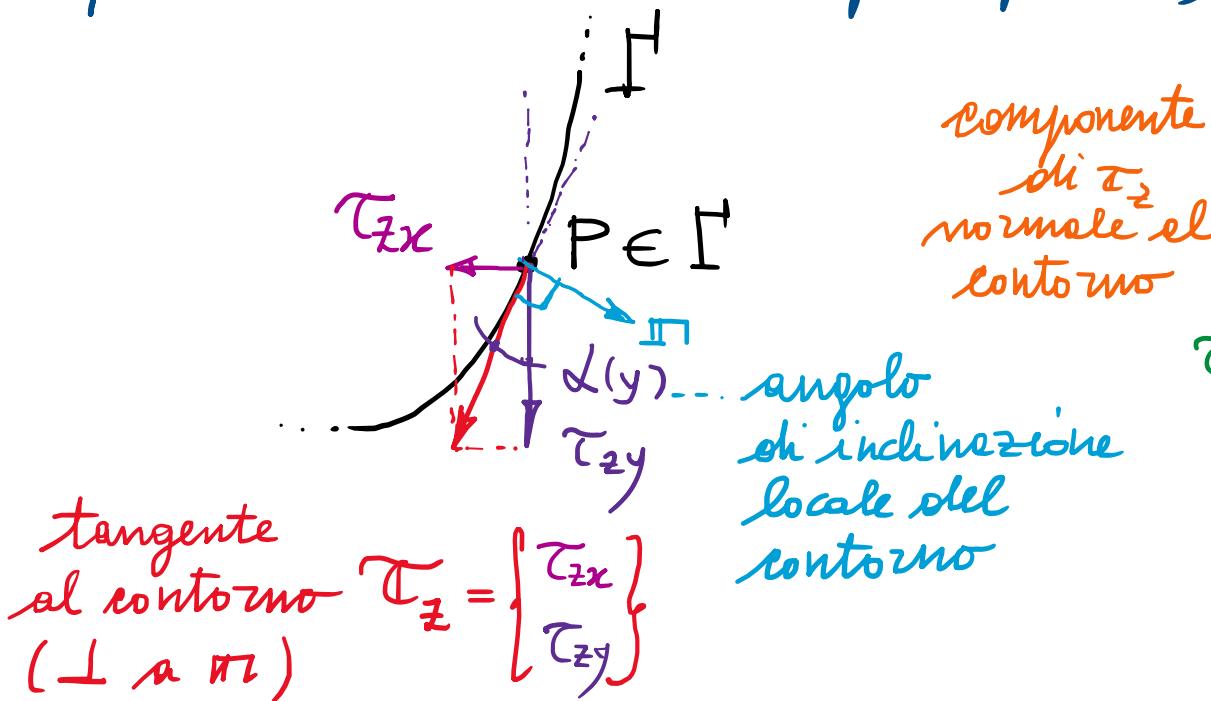
$$[\text{asse } x \text{ barientrico, } G \in x : S_x = S_x' + S_x'' = 0 \Rightarrow S_x'' = -S_x']$$

Formule di Jourawsky sul valor medio

delle τ_{zy} lungo le corde:

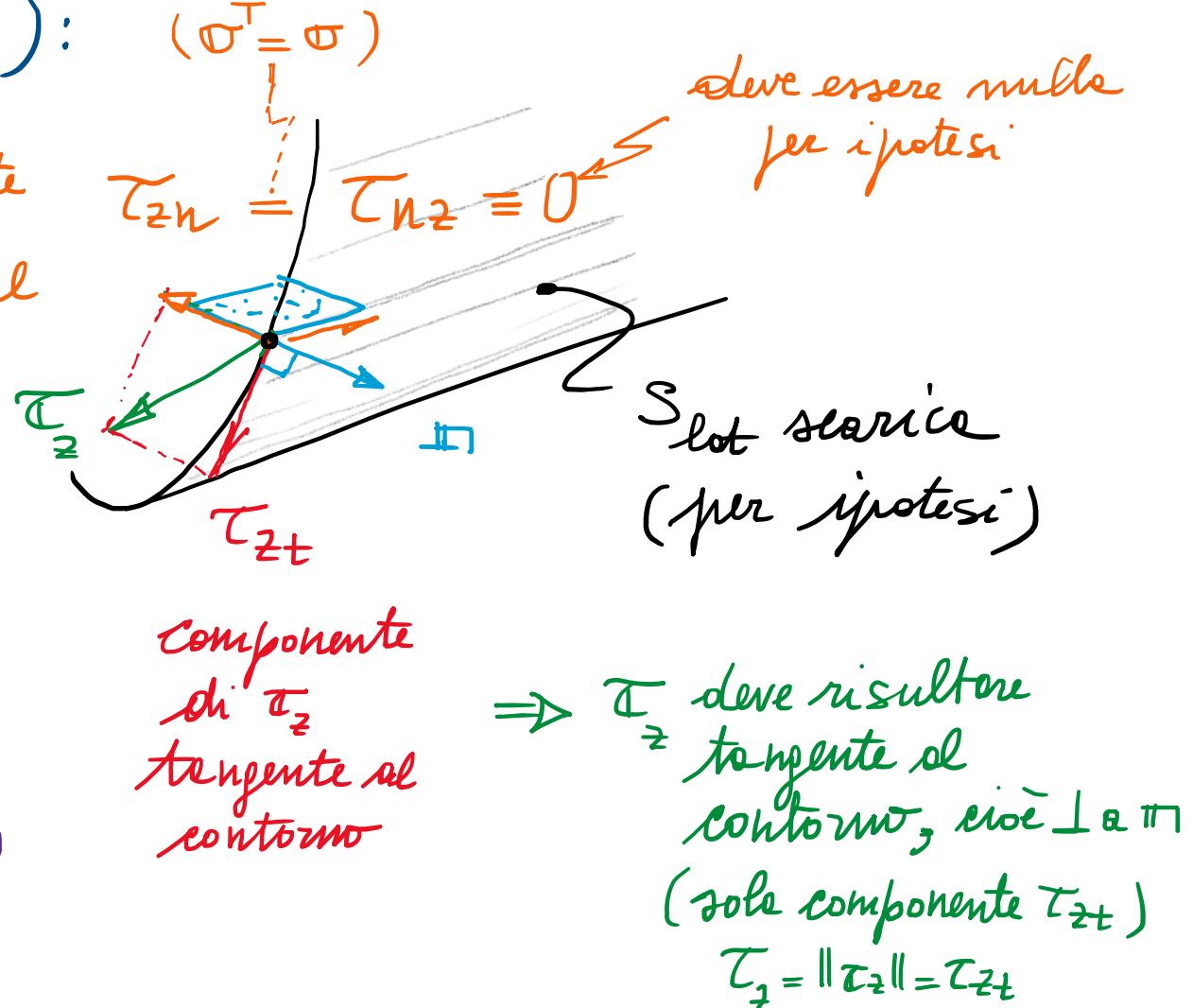
- dirett. prop. al taglio
applicato T_y
- dirett. prop. al momento
statico delle porzioni A''
rispetto all'asse x (esse
neutrali della flessione retta
associate al taglio)
- invers. prop. al momento
d'inizio dell'ultima sezione
rispetto all'asse x
- invers. prop. alla larghezza
della corda alle quote y

- Inoltre, se il contorno della sezione risulta inclinato rispetto all'asse di simmetria (asse y), dovranno risultare presenti anche delle τ_{zx} , in modo tale che sui punti del contorno il vettore τ_z risulti tangente al contorno (in quanto la superficie laterale del prisma di DSV è scarica, per ipotesi):



$$\text{In } P \in \Gamma: \tau_{zx}(y) = \tau_{zy}(y) \tan \alpha(y)$$

$$x = \pm \frac{b(y)}{2}$$



- Ancora, l'andamento delle τ_{zx} lungo le corde, alle quote y , è otto ~~so~~ antisimm. rispetto all'asse y - (per la simmetria delle sezioni).

- In più, coerentemente con l'ipotesi $\tau_{zy}(y) = \text{cost} = \bar{\tau}_{zy}$, secondo Touzowsky, dalle tre eq. ne indefinita di equilibrio, si ottengono τ_{zx} lineari in x :

$$\text{div } \sigma + \cancel{F} = 0 \quad \text{in } V \Leftrightarrow \sigma_{ij,j_i} + \cancel{F}_j = 0_j \quad j = 1, 2, 3 \\ \text{-----} \quad \text{-----} \quad \text{-----} \\ \text{forze di volume} \quad \text{forze di volume} \quad \text{forze di volume} \\ \text{nulle per hyp.} \quad \text{nulle per hyp.} \quad \text{nulle per hyp.}$$

$$j = \frac{3}{2} \quad \left(\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \right) \frac{\partial}{\partial x} = \tau_{zx}$$

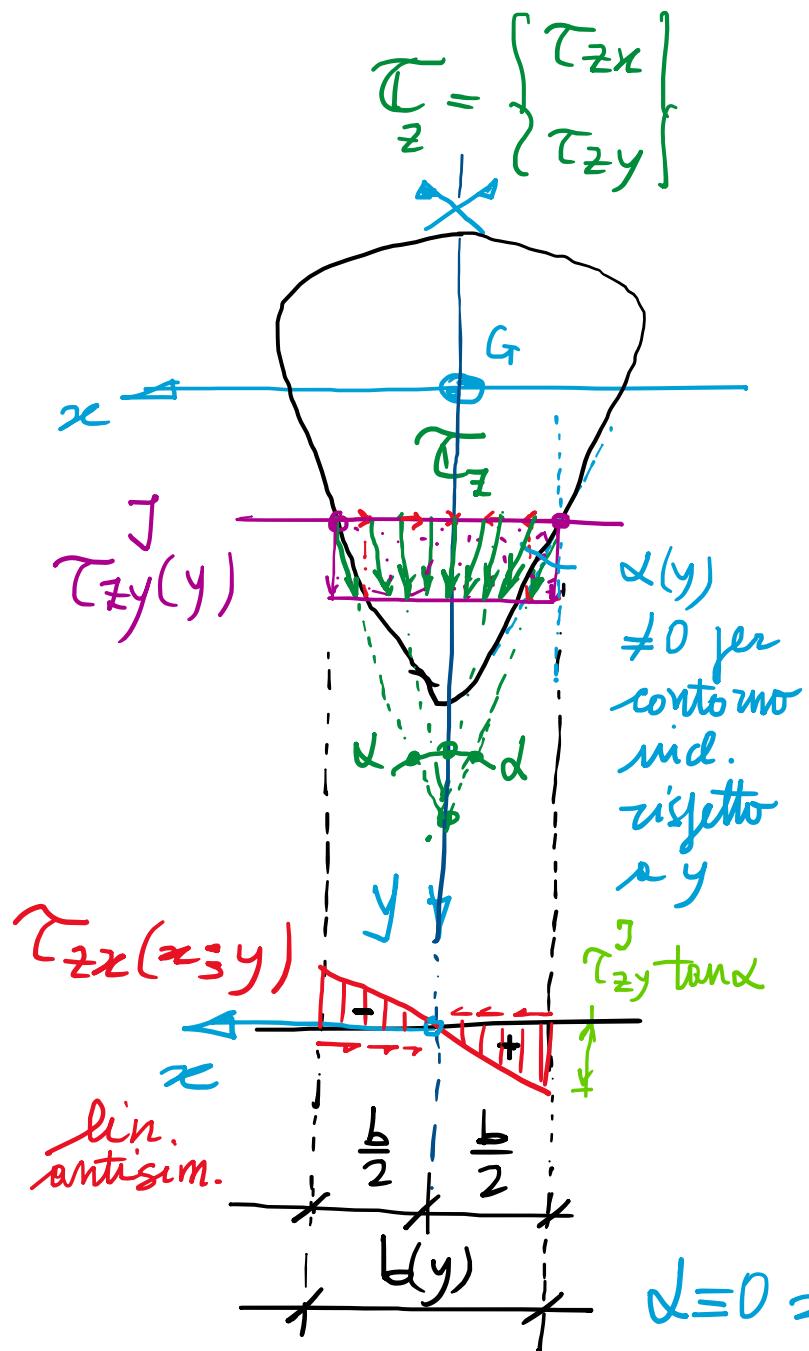
$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \sigma_{zz,z} = 0$$

τ_{zx} lineari
(e antisimmetriche)
in x

$$0 = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \sigma_{zz,z} = 0$$

Touzowsky
 $\tau_{zy} = \text{cost} = \bar{\tau}_{zy}$

Th. di Schwarz sulla
invertibilità dell'ordine
delle derivate



Campo delle tensioni tangenziali (in sez. simmetrica):

$$\tau_{zx}(x; y) = - \frac{\tau_{zy}^J(y) \tan \alpha(y)}{b(y)/2} \cdot x$$

- $\tau_{zx}(x; y) = - 2 \frac{\tan \alpha(y)}{b(y)} \tau_{zy}^J(y) \cdot x$
- $\tau_{zy}^J(y) = \frac{T_y}{J_x} \frac{S_x''(y)}{b(y)} = \text{cost in } x$
N.B.: τ_{zy}^J ove $\frac{S_x''(y)}{b}$ è max

$$\bar{\tau}_z(x; y) = \|\bar{\tau}_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^J^2} = \tau_{zy}^J \sqrt{1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b^2(y)} x^2}$$

$$\alpha=0 \Rightarrow \tau_{zx}=0 \quad (\alpha \text{ piccolo}, \tau_{zx} \text{ piccolo}, \bar{\tau}_z \approx \tau_{zy}^J)$$

Risoluzione struttura:

- AC (iso + iper)

- RT ($RT_{iso} + RT_{iper}(X)$) \leftrightarrow equilibrio ✓

- N, T, M iso \rightarrow verifica degli equil. nodali in scale, stesse scale $RV(X)$

- analisi sottostrutt. iperstatica col PLV \rightarrow

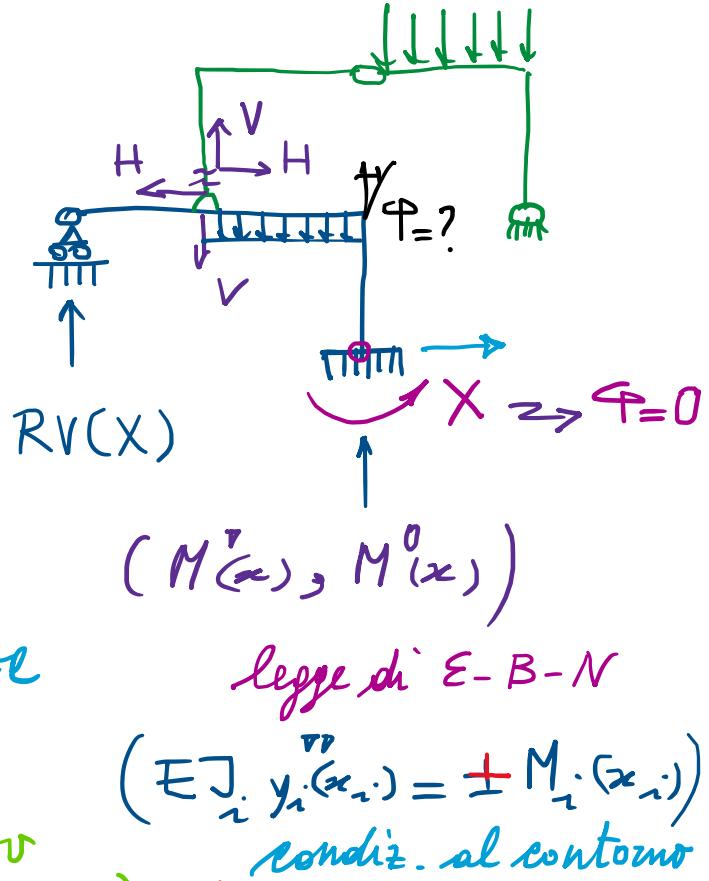
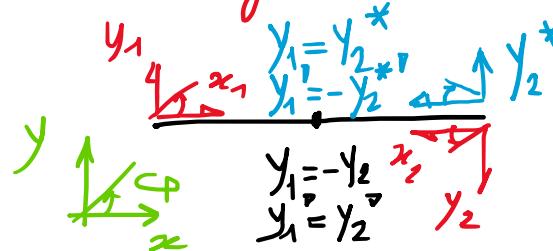
- $RV(\leftarrow X)$ finali $\rightarrow N, T, M$ iper

- " " " con LE $\rightarrow X_{LE}, y_i(x_i)$

- valutazione di spost. di interesse (nel sist. globale y, v)

- tracciamento delle deformate qualitativa \leftrightarrow guardando M

- calcolo degli spostamenti col PLV



$$X = \frac{M}{EJ}$$

Diagram showing a beam element with a bending moment $M > 0$ and a deflection curve $y_i > 0$.