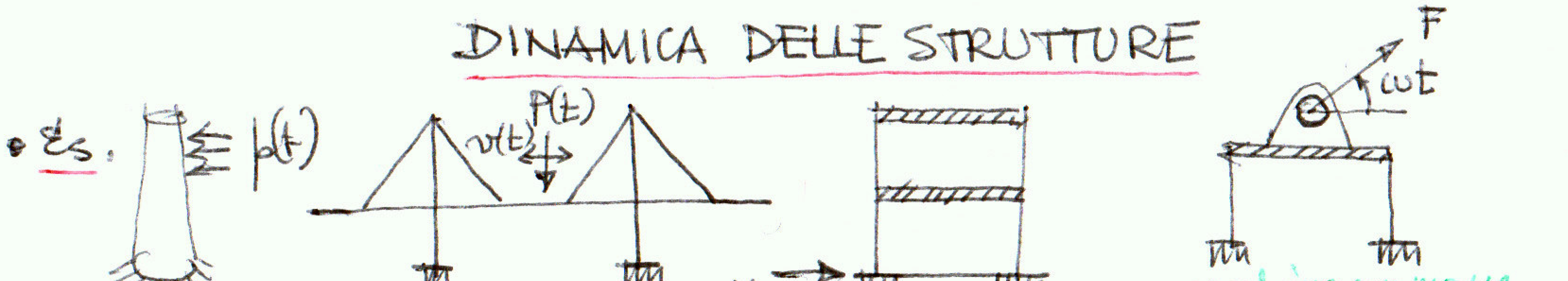
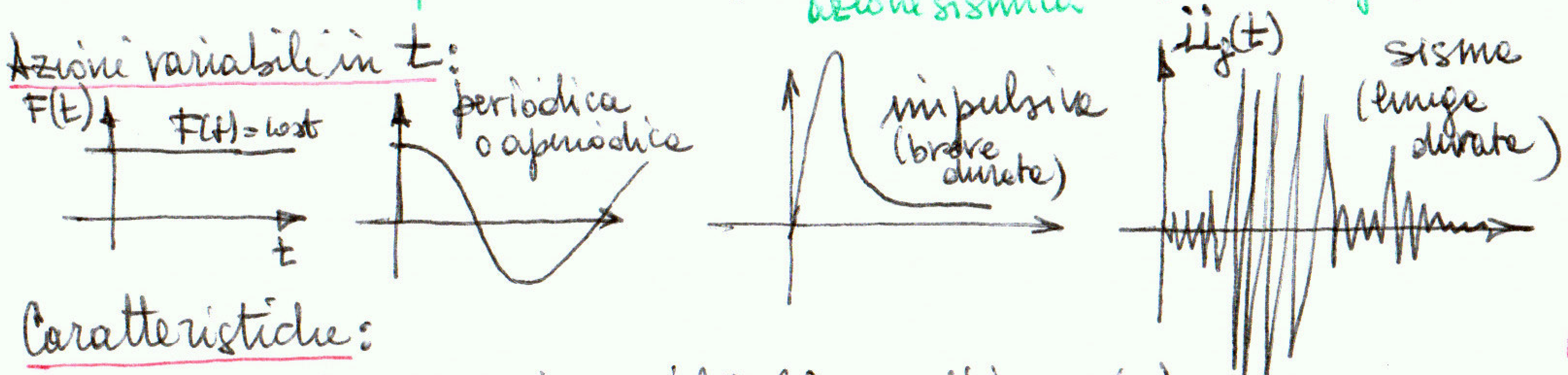
1ª Lez. FDIS – Fondamenti di Dinamica e Instabilità delle Strutture – UniBG, Facoltà di Ingegneria (Dalmine) – erizzi@unibg.it

DINAMICA DELLE STRUTTURE

- Es.

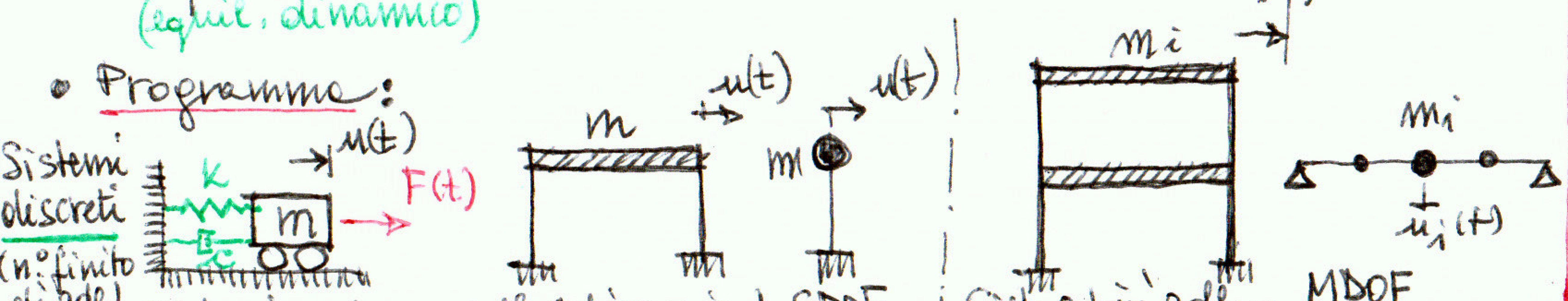


- Azioni variabili in t:



- Caratteristiche:
  - masse m ⇒ effetti inerziali (forze d'inerzia)
  - eq.ni del moto → $u, \dot{u}, \ddot{u}$ (equil. dinamico)

- Programma:



INSTABILITÀ DELLE STRUTTURE (buckling)

- Azioni:
  - cost. o lentamente variabili in t
  - variabili nel tempo, ad es. crescenti, anche tali da non indurre risposte dinamiche

Spesso l'instabilità dell'equilibrio (da prevenire) può condurre al collasso, per mezzo di transizione dinamica, anche rapida (intimo collegamento tra D. e I.)

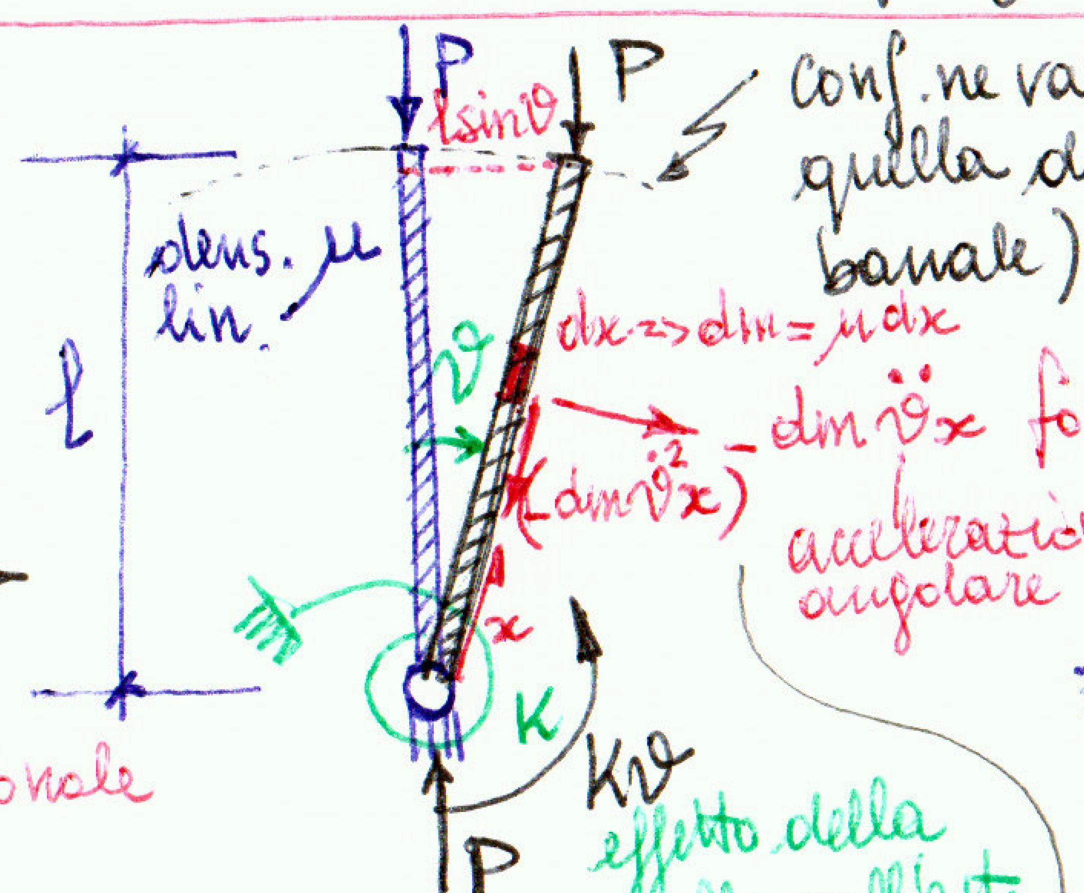
- Caratteristiche:
  - equilibrio nella configurazione deformata (grandi spostamenti, cioè tali da influenzare l'equilibrio). "effetti del 2° ordine"
  - perdite di stabilità delle conf.ne di equilibrio (carico critico)

- Programma:

Instabilità di sistemi discreti — Instabilità di sistemi continui

- ESEMPIO (unificatore – sulla intima connessione tra dinamica ed instabilità)

Asta compressa pesante con deformabilità elastica concentrata (ad 1 gdl) ⇒



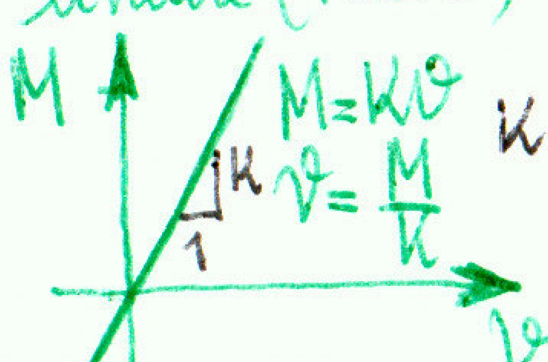
conf.ne variata, rispetto a quella di rif. $\vartheta = 0$ (equil. banale).

$-dm\,\ddot{\vartheta}x$ forza d'inerzia (Principio di d'Alembert)

accelerazione angolare

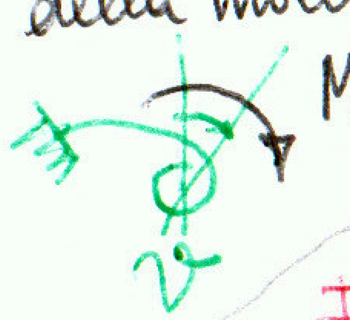
$K\vartheta$ effetto della molla sull'asta

Molla elastica rotazionale lineare (Hooke)



$[K] = [F][L]$

$K = \frac{M}{\vartheta}$ rigidezza elastica della molla



effetto dell'asta sulla molla

Equilibrio dinamico:

$$Pl\sin\vartheta = K\vartheta + \int_0^l (\underbrace{dm}_{\mu dx}\ddot{\vartheta}x)\,x$$

destabil. — stabilizzante

spost. geometr. piccoli

$$Pl\vartheta = K\vartheta + \left(\int_0^l \mu x^2 dx\right)\ddot{\vartheta}$$

(lineariz.)

$$\cong K\vartheta + I\ddot{\vartheta}$$

I: momento d'inerzia $= \frac{\mu l^3}{3}$

Eq.ne del moto (linearizzata)

$$\boxed{I\ddot{\vartheta} + (K - Pl)\vartheta = 0}$$

I: inerzia

K − Pl: rigidezza

elastica — geometrica < 0 per P > 0 compr.

con cond. iniz. (piccola perturbazione) $\begin{cases}\vartheta(0) = \vartheta_0 \\ \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_0\end{cases}$

Soluzione dell'eq.ne del moto (3 casi).

- 1) $K - Pl > 0$; $P < \frac{K}{l}$

$\ddot{\vartheta} + \frac{K - Pl}{I}\vartheta = 0 \rightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_1^2\vartheta = 0$ — ω_1: pulsazione o frequenza angolare

eq.ne dei moti armonici

Piccole oscillazioni attorno a $\vartheta = 0$ (sistema stabile secondo LIAPUNOV)

Solut.

$\vartheta(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t$

$\vartheta(t) = \vartheta_0\cos\omega_1 t + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t$

risposta armonica (periodica)

- 2) $K - Pl = 0$; $P = \frac{K}{l} = P_{cr}$

$\ddot{\vartheta} = 0 \rightarrow \vartheta(t) = \vartheta_0 + \dot{\vartheta}_0 t$

moto divergente linearm. in t ($\vartheta \to \infty$ per $t \to \infty$)

- 3) $K - Pl < 0$; $P > \frac{K}{l}$

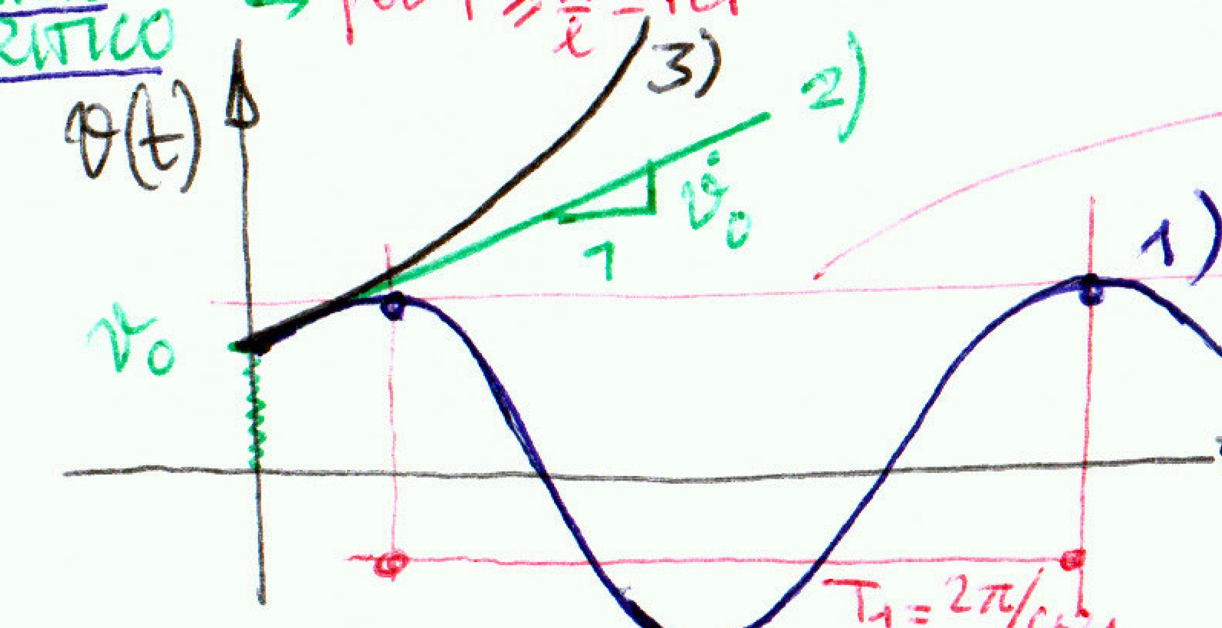
$\ddot{\vartheta} - \alpha^2\vartheta = 0$, $\alpha^2 = -\frac{K - Pl}{I} > 0$

$\hookrightarrow \vartheta(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$

moto divergente esponenzialm. in t

$= \frac{1}{2}\left(\vartheta_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha}\right)e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\left(\vartheta_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}$

CARICO CRITICO → SISTEMA INSTABILE per $P > \frac{K}{l} = P_{cr}$

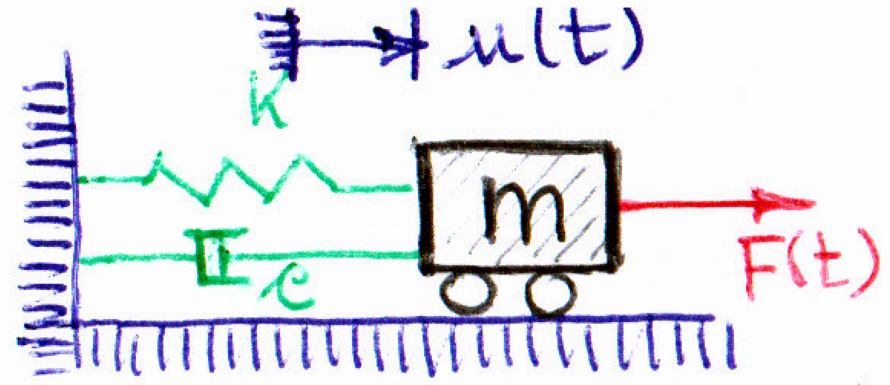


Sistema stabile solo in 1) ⇒ non tende ad abbandonare la conf.ne di equil. indeformata $\vartheta = 0$

$P < \frac{K}{l} = P_{cr}$

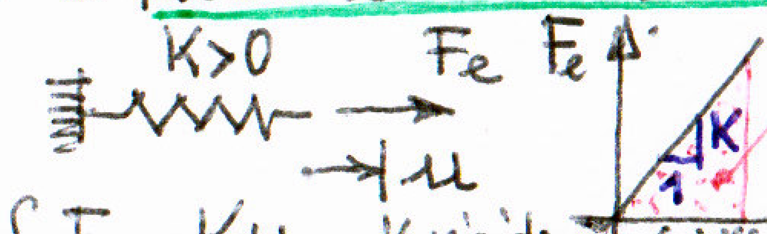
2a Lez. FDIS – Sistemi ad 1 gdl (SDOF) – Single degree of freedom systems

- **Oscillatore semplice**
  - fondamentale per comprensione dei sistemi dinamici.
  - spesso sufficiente a caratterizzare risposte reali.



- m : massa dell'oscillatore $[M] = \frac{[F][t]}{[L]}$
- $F(t)$: forzante esterna $[F]$
- $u(t)$: gdl dinamico o coord. lagrangiana $[L]$

- Molla elastica lineare (Hooke)

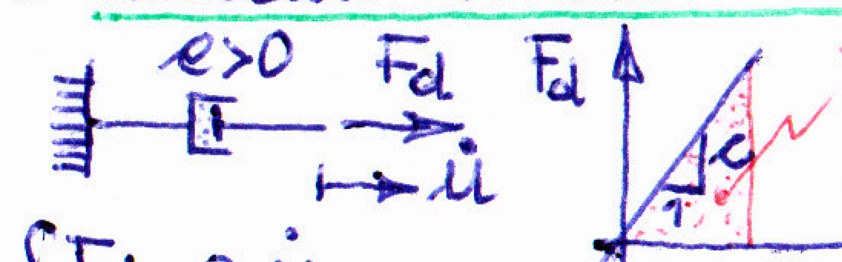


$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} F_e \cdot u = \begin{cases} \frac{1}{2} K u^2 \\ \frac{1}{2} \frac{F_e^2}{K} \end{cases}$$ energia elastica (lavoro)

$$\begin{cases} F_e = K u & K \text{ rigidezza (stiffness)} \\ u = \frac{1}{K} F_e & \frac{1}{K} \text{ cedevolezza (compliance)} \end{cases} \qquad [K] = \frac{[F]}{[L]}$$

Elemento elastico (conservativo)

- Smorzatore viscoso lineare

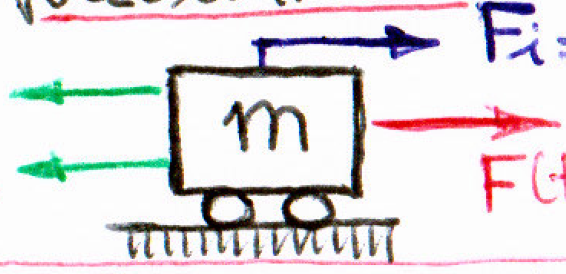


$$D = \underbrace{\frac{1}{2} F_d \dot{u}}_{\text{potenza}} = \begin{cases} \frac{1}{2} c \dot{u}^2 \\ \frac{1}{2} \frac{F_d^2}{c} \end{cases}$$ fun. di dissipazione o di Rayleigh

$$\begin{cases} F_d = c \cdot \dot{u} \\ \dot{u} = \frac{F_d}{c} \end{cases}$$ c : coeff. di smorzamento (damping coefficient) $\quad [c] = \frac{[F][t]}{[L]} = \frac{[M]}{[t]}$

Elemento viscoso (dissipativo)

- Scrittura dell'eq.ne del moto
  - Equilibrio "dinamico" con aggiunta delle forze d'inerzia



u, u̇ positive e poste $u, \dot{u}$

- $u(t)$ spost.
- $\dot{u}(t)$ velocità
- $\ddot{u}(t)$ accelerazione

Principio di d'Alembert: $\mathbb{F} - \underbrace{m\mathbf{a}}_{-\mathbb{F}_i} = \mathbb{F} + \mathbb{F}_i = 0$ forza d'inerzia

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = F(t)}$$

Equazione differenziale del 2° ordine a coeff. costanti (sistemi tempo invarianti)

con c.i. $\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$ condizioni iniziali

- Equazioni di Lagrange – Lagrangiana: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k) = T - V$

coord. lagrangiane (n gdl) o generalizzate; T energia cinetica; V energia potenziale, $V = -U$ potenziale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^* = \frac{\delta L^*(q_k)}{\delta q_k}$$

Q_k^* forza generalizzata associata a q_k; $\delta L^*(q_k)$ – Lavoro esterno associato alla variazione della sola coord. q_k

Significato di T:

$\mathbb{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} \rightarrow P = \mathbb{F} \cdot \mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})$ potenza

se m = cost (sistemi tempo invarianti) $= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2)$

Th. dell'Energia cinetica: $P = \dot{T}$ $\qquad P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{dT}{dt}$

Spesso $T = T(\dot{q}_k)$, $V = V(q_k)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_k}\right) + \frac{dV}{dq_k} = Q_k^*$$

- Se forze conservative $Q_k^{*f} = \frac{\partial U_f}{\partial q_k} = -\frac{\partial V_f}{\partial q_k}$

$U_f = L_f$ (lavoro) – Potenziale delle forze esterne conservative

$V_f = -U_f$ Energia potenziale " " " "

- Se forze dissipative viscose $Q_k^{*d} = -\frac{\partial D(\dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k}$

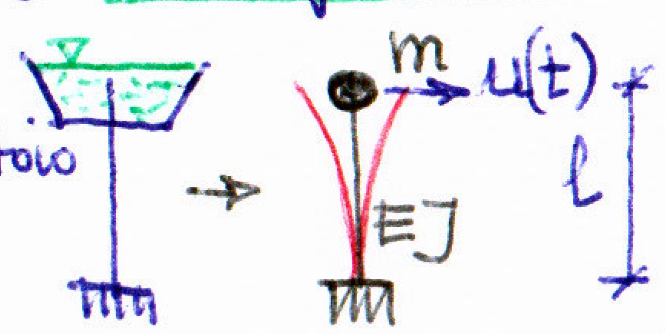
D: funzione di dissipazione – Qui $Q_d = -\frac{\partial D}{\partial \dot{u}} = -\frac{2c\dot{u}}{2} = -F_d$ forza di dissipazione agente sul sistema

Qui: $T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$, $V = \mathcal{E} = \frac{1}{2} K u^2$ $\qquad q_k = q_1 = u$ (1 gdl)

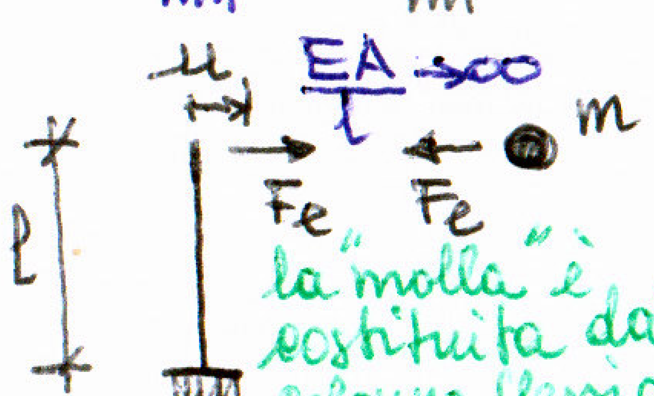
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{2} m\dot{u}\right) + \frac{2}{2} K u = (F - \underbrace{F_d}_{c\dot{u}}) \frac{\delta u}{\delta u}$$

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = F} \text{ c.v.d.}$$

- **Esempi strutturali** (calcolo della rigidezza elastica K)



$$\boxed{K = \frac{3EJ}{l^3}}$$



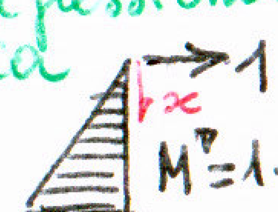
la "molla" è costituita dalla colonna flessionalm. elastica

calcolo di cedevolezza ($F_e = 1 \rightarrow u = \frac{1}{K}$)

$$u = \frac{1}{3} \frac{F_e l^3}{EJ} = \frac{F_e}{\frac{3EJ}{l^3}} = \frac{F_e}{K}$$

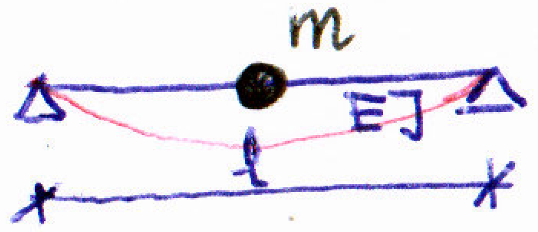
inverso della cedevolezza calcolata tramite metodo delle forze

Vedi es. PLV:



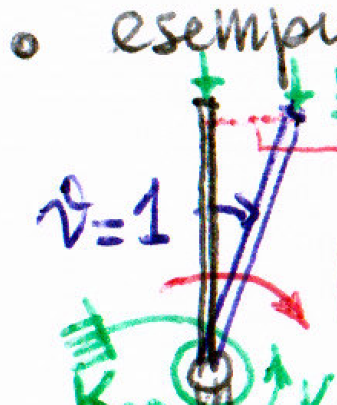
$$1 \cdot u = \int_0^l \overset{M}{(F_e \cdot x)} \overset{M'}{x} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{F_e l^3}{EJ}$$

- trave con massa concentrata



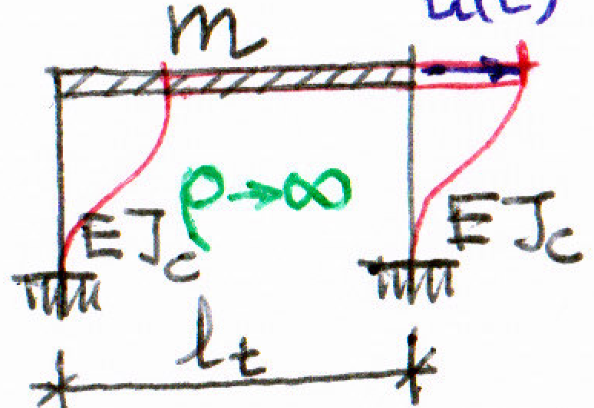
$$\boxed{K = 48 \frac{EJ}{l^3}}$$

- esempio visto



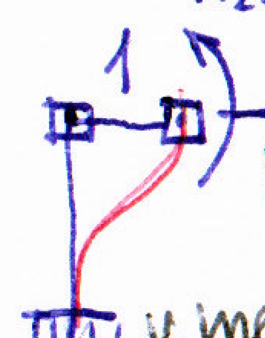
$K = K_\varphi - Pl$

- Telaio "shear-type" (taglio)



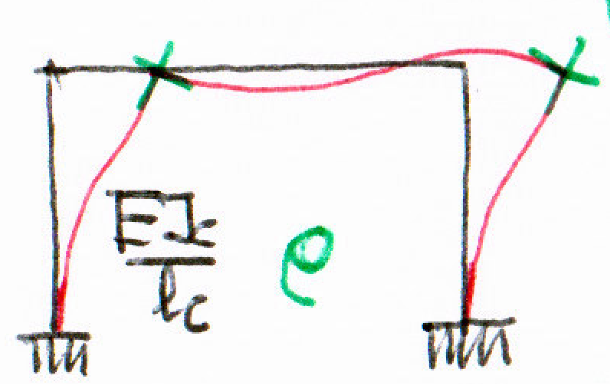
- m concentrata ai piani
- impalcati comente rigidi $\frac{EA_t}{l_t} \rightarrow \infty$; $\frac{EJ_t}{l_t} \rightarrow \infty$
- colonne assialmente rigide $\frac{EA_c}{l_c} \rightarrow \infty$

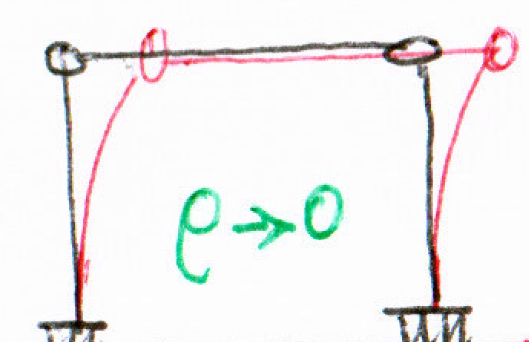
$$K = 2 \cdot \frac{12EJ_c}{l_c^3} = \boxed{24 \frac{EJ_c}{l_c^3} = K}$$



v. metodo degli spostamenti

è caso limite di: > Caso generale intermedio EJ_t/l_t > Traversi privi di rigidezza flessionale $EJ_t/l_t \rightarrow 0$





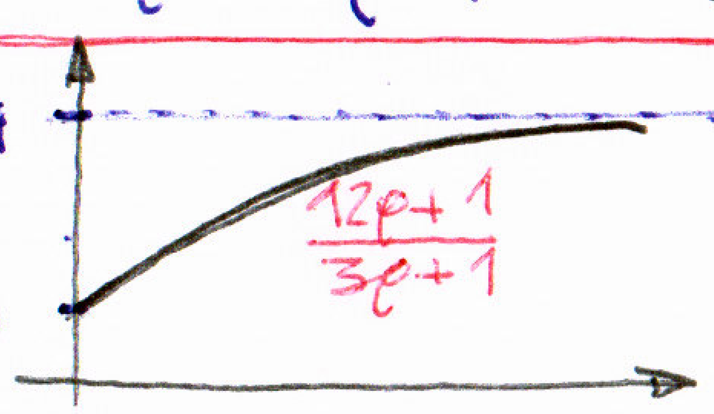
$$\boxed{K = 6 \frac{EJ_c}{l_c^3}}$$

$$\rho = \frac{\sum_t \frac{EJ_t}{l_t}}{\sum_c \frac{EJ_c}{l_c}}$$ fattore di rigidezza trave/colonne (v. ad es. CHOPRA)

costante di rigidezza elastica dipendente da ρ

$$\boxed{K = 24 \frac{EJ_c}{l_c^3} \frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} = \frac{6EJ_c}{l_c^3} \frac{12\rho + 1}{3\rho + 1}}$$

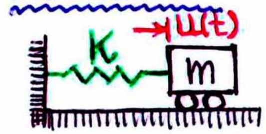
v. file Mathematica sul sito



rigidezza crescente per ρ crescente

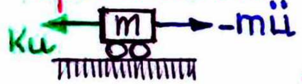
erizzi@unibg.it

3a Lez. FDIS - Oscillazioni libere (non smorzate)



e.i. $\begin{cases} u(0)=u_0 \\ \dot u(0)=\dot u_0 \end{cases}$ $m>0,\ K>0$

Risposta alle sole e.i.



Eq.ne del moto:

Equazione dei moti armonici

$$m\ddot u + Ku = 0$$

$$/m \rightarrow \ddot u + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2} u = 0 \rightarrow \boxed{\ddot u + \omega_1^2 u = 0}\ (*)$$

$[\omega_1^2] = \frac{[F]}{[L][M]} = \frac{1}{[t]^2}$; 1 g.d.l.

con $\omega_1^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$[\omega_1] = \frac{1}{[t]} \Rightarrow$ rad/s

• $\omega_1 \uparrow$ per $K\uparrow$, $m\downarrow$
• $\omega_1 \downarrow$ per $K\downarrow$, $m\uparrow$

spesso ω_n
pulsazione naturale o propria del sistema (frequenza angolare)

• Ricerca dell'integrale nella forma:

$u(t) = e^{\lambda t} \rightarrow \dot u(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda u \rightarrow \ddot u(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 u$ $\xrightarrow{\text{sost. nella } (*)}$ $\lambda^2 u + \omega_1^2 u = 0 \rightarrow (\lambda^2+\omega_1^2)u = (\lambda^2+\omega_1^2)\underbrace{e^{\lambda t}}_{>0} = 0\ \forall t \rightarrow \boxed{\lambda^2+\omega_1^2=0} \rightarrow \lambda^2 = -\omega_1^2 = i^2\omega_1^2 = (i\omega_1)^2 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1}$

eq.ne caratteristica assoc. all'eq.ne differenziale di partenza

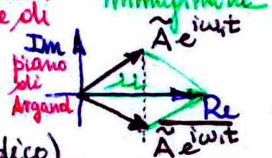
i unità immaginaria

radici complesse coniugate $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

complesse coniug.

• Integrale generale (combinazione lineare dei due integrali trovati $e^{\lambda_{1,2}t}$):

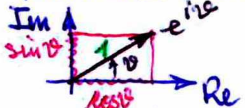
$u(t) = \tilde A e^{i\omega_1 t} + \tilde B e^{-i\omega_1 t}$ con $\tilde A, \tilde B$ costanti arbitrarie, complesse coniugate ($\tilde B = \overline{\tilde A}$). Ciò al fine di avere una risposta reale:



$\overline{e^{i\omega_1 t}} = e^{-i\omega_1 t}$

• Alternativamente:

formule di Eulero: $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$, $e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$ $\rightarrow \begin{cases} \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i} \\ \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2} \end{cases}$



$i = e^{i\pi/2}$

• Quindi anche $\sin\omega_1 t$ e $\cos\omega_1 t$, comb. lin. di $e^{i\omega_1 t}$ e $e^{-i\omega_1 t}$, possono formare l'integr. gen.

moto armonico (periodico)

$$\boxed{u(t) = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t}$$

integrale generale delle eq.ni del moto

A, B costanti reali da det. con l'imposiz. delle e.i.

• Risposte in velocità ed accelerazione:

$\dot u(t) = \omega_1 A\cos\omega_1 t - \omega_1 B\sin\omega_1 t = \omega_1 (A\cos\omega_1 t - B\sin\omega_1 t)$

$\ddot u(t) = -\omega_1^2 A\sin\omega_1 t - \omega_1^2 B\cos\omega_1 t = -\omega_1^2 u \rightarrow$ quindi $\ddot u + \omega_1^2 u = 0$ ✓ OK

• Imposizione delle e.i.:

$u(0) = \boxed{B = u_0}$

$\dot u(0) = \omega_1 A = \dot u_0 \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot u_0}{\omega_1}}$

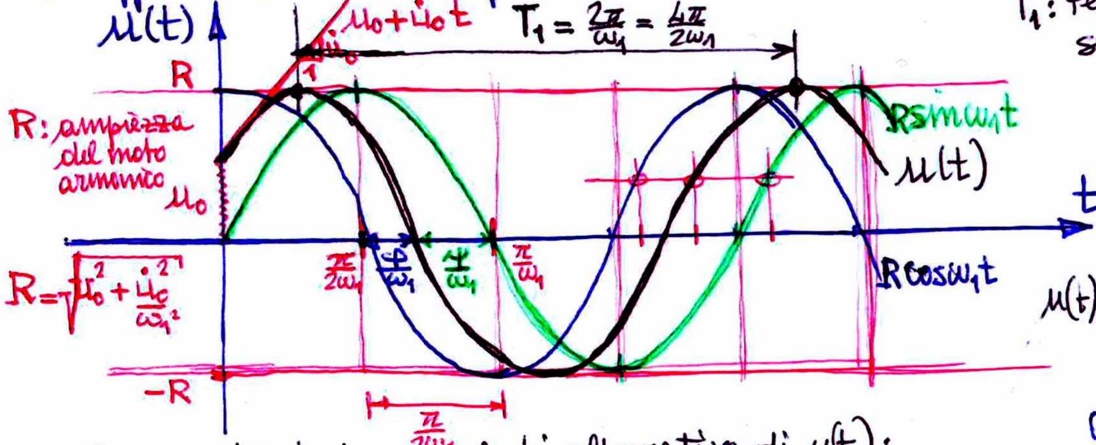
• Integrale generale finale

$$\boxed{u(t) = \frac{\dot u_0}{\omega_1}\cos\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t}$$

moto armonico di periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, di pulsazione $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, in risposta alle sole e.i. $u_0, \dot u_0$

• Il sistema oscilla indefinitam. tra +R e -R (per il fatto che qui si è considerato smorzamento nullo) -

• Rappresentazione della risposta armonica ottenuta:



T_1: Periodo naturale o proprio

$\sin\omega_1 t = \sin\omega_1(t+T_1)\ \forall t$

$\Rightarrow \omega_1 T_1 = 2\pi$

$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1/f_1$

$[T_1] = [t] \Rightarrow$ s (secondo)

f_1: Frequenza propria (ciclica)

$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi}$; $\omega_1 = 2\pi f_1$ rad/s

$[f_1] = \frac{1}{[t]} \Rightarrow \frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$

$u(t)$: in ritardo di φ su $\cos\omega_1 t$, in anticipo di ψ su $\sin\omega_1 t$

viceversa

$\cos\omega_1 t$ in anticipo di φ su $u(t)$
$\sin\omega_1 t$ in ritardo di ψ su $u(t)$

• Rappresentazioni equivalenti alternative di $u(t)$:

$$\begin{cases} u(t) = R\cos(\omega_1 t - \varphi) \\ u(t) = R\sin(\omega_1 t + \psi) \end{cases}$$

R ampiezza; φ, ψ angoli di fase o fasi

angoli complement. $\boxed{\varphi + \psi = \pi/2}$

Quindi:

$\begin{cases} A = R\sin\varphi = R\cos\psi \\ B = R\cos\varphi = R\sin\psi \end{cases} \rightarrow R^2 = A^2 + B^2;\ \frac{A}{B} = \tan\varphi = \frac{1}{\tan\psi}$

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$
$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$

$\begin{cases} R = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\frac{\dot u_0^2}{\omega_1^2} + u_0^2} \\ \varphi = \text{atan } A/B \\ \psi = \text{atan } B/A \end{cases}$

Risulta:

• $R\cos(\omega_1 t - \varphi) = R(\cos\omega_1 t\cos\varphi + \sin\omega_1 t\sin\varphi) = \underbrace{R\sin\varphi}_{A}\sin\omega_1 t + \underbrace{R\cos\varphi}_{B}\cos\omega_1 t$

• $R\sin(\omega_1 t + \psi) = R(\cos\omega_1 t\sin\psi + \sin\omega_1 t\cos\psi) = \underbrace{R\cos\psi}_{A}\sin\omega_1 t + \underbrace{R\sin\psi}_{B}\cos\omega_1 t$

$v_1 \cdot v_2 = \cos(\alpha-\beta)$

$v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \end{vmatrix} = k(\underbrace{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}_{\sin(\alpha+\beta)})$

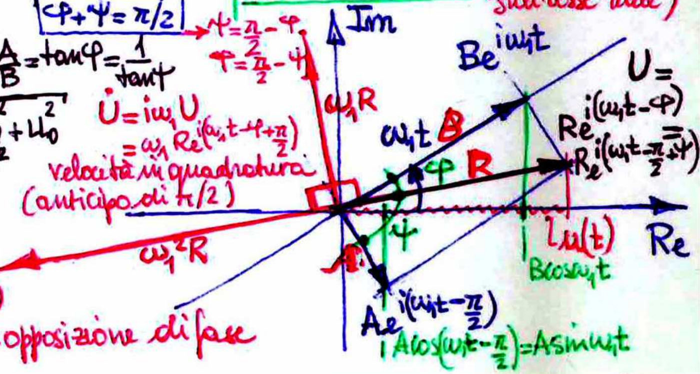
Rappr. di vettori rotanti nel piano di ARGAND (e loro proiezione sull'asse reale)

$\dot U = i\omega_1 U = \omega_1 R e^{i(\omega_1 t - \varphi + \frac{\pi}{2})}$

velocità in quadratura (anticipo di $\pi/2$)

$\ddot U = -\omega_1^2 U$

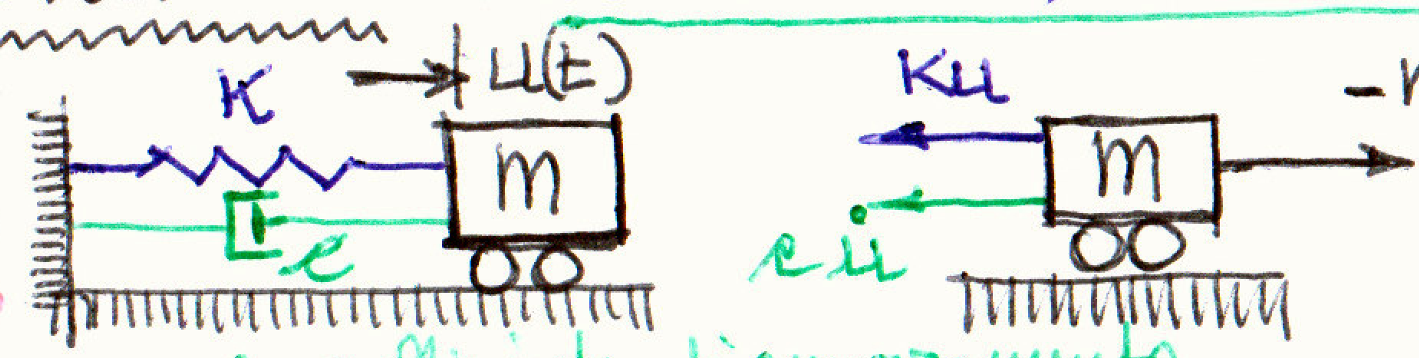
accelerazione in opposizione di fase



erizzi@unibg.it

4a Lez. FDIS – Oscillazioni libere smorzate

erizzi@unibg.it



c.i. $u(0)=u_0$, $\dot u(0)=\dot u_0$

c: coefficiente di smorzamento

Eq.ne del moto:

$$m\ddot u + c\dot u + Ku = 0$$

$$/m \Rightarrow \ddot u + \frac{c}{m}\dot u + \frac{K}{m}u = 0 \rightarrow \boxed{\ddot u + 2\zeta\omega_1\dot u + \omega_1^2 u = 0}$$

con • $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsazione naturale del sistema non smorzato

• $2\zeta\omega_1 = \frac{c}{m} \rightarrow \boxed{\zeta = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2\sqrt{Km}} = \frac{c}{c_{cr}}}$ fattore di smorzamento relativo al critico

– In ingegneria civile: $c_{cr} = 2\sqrt{Km}$

valori piccoli $\zeta \ll 1$: $\zeta = 2\% \div 7\%$, tipicam. $5\% = 0{,}05$

C.A.: $3\div5\%$ – Acciaio: $5\div7\%$

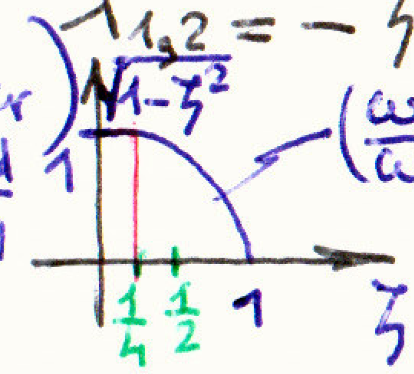
• Ricerca dell'integrale generale: $u(t) = e^{\lambda t}$, $\dot u(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot u(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ $\forall t$ → eq.ne caratteristica $\boxed{\lambda^2 + 2\zeta\omega_1\lambda + \omega_1^2 = 0}$

Soluzione dell'eq.ne caratteristica:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 \pm \sqrt{\zeta^2\omega_1^2 - \omega_1^2} = -\zeta\omega_1 \pm \omega_1\sqrt{\zeta^2-1} = \omega_1\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)$$

• Smorzamento subcritico ($\zeta<1$; $c<c_{cr}$)

$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 \pm i\omega_d$ $\quad \left(\frac{\omega_d}{\omega_1}\right)^2 = 1-\zeta^2 \Rightarrow$



$\left(\frac{\omega_d}{\omega_1}\right)^2 + \zeta^2 = 1$, $\omega_d \le \omega_1$ e $\omega_d \simeq \omega_1$ per $\zeta \ll 1$

$T_d \ge T_1$ e $\simeq T_1$ x $\zeta \ll 1$

$$e^{\lambda_{1,2}t} = e^{-\zeta\omega_1 t} \cdot e^{\pm i\omega_d t}$$

ampiezza con decadimento esponenziale determinato da ζ

risposta armonica di pulsazione $\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$ e periodo $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{T_1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\Rightarrow \sin\omega_d t$, $\cos\omega_d t$

– Integrale generale:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t) = Re^{-\zeta\omega_1 t}\cos(\omega_d t - \varphi) = Re^{-\zeta\omega_1 t}\sin(\omega_d t + \psi)$$

con stesse relazioni precedenti fra (A,B) e (R,φ) (R,ψ) –

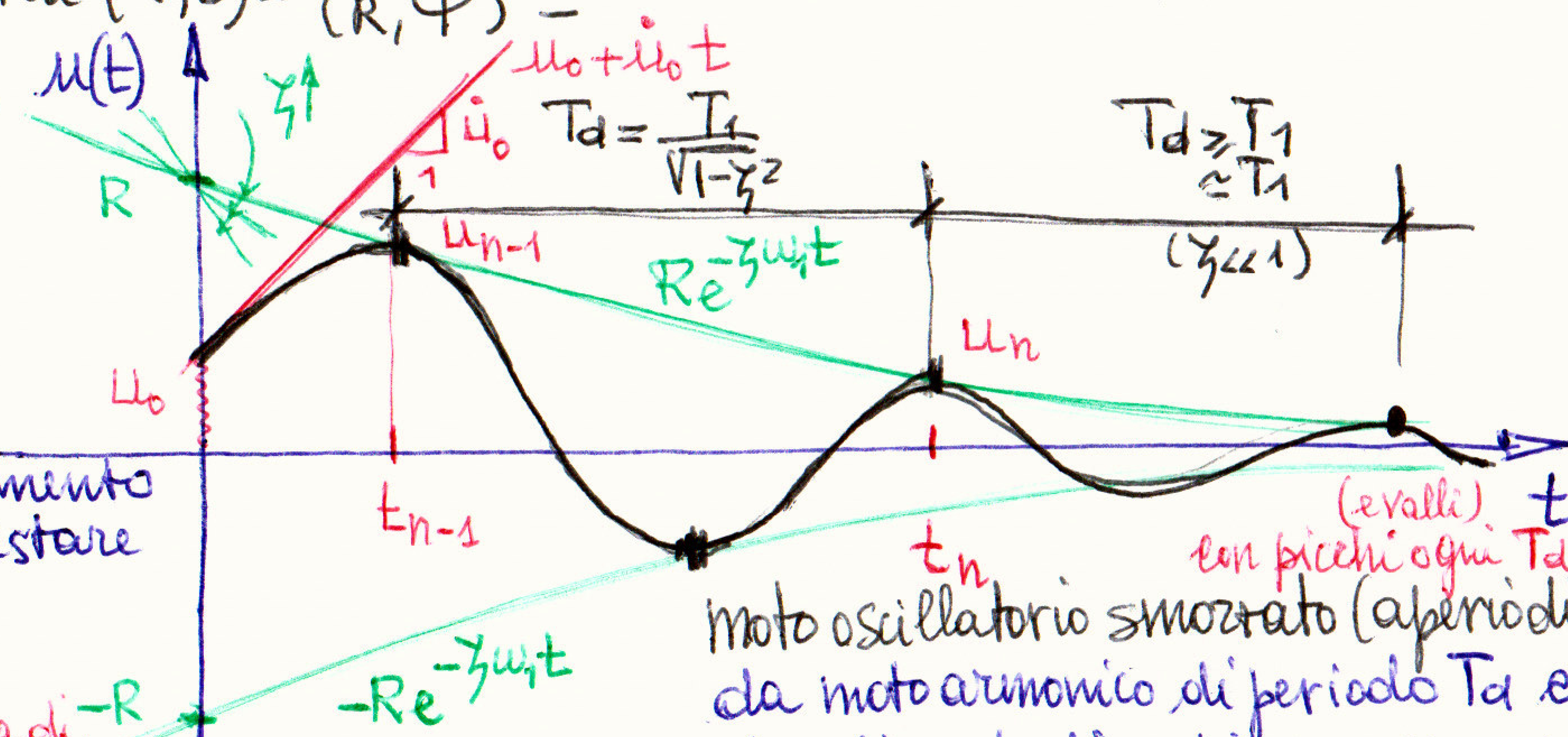
velocità: $\dot u(t) = -\zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_1 t}\omega_d(A\cos\omega_d t - B\sin\omega_d t)$

– Imposizione delle c.i.:

$$\begin{cases} u(0) = \boxed{B = u_0} \\ \dot u(0) = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A = \dot u_0 \rightarrow A = \frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 B}{\omega_d} \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}} \end{cases}$$

– Risposta finale:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right)$$



moto oscillatorio smorzato (aperiodico): da moto armonico di periodo T_d con decadimento di ampiezza esponenziale

– Decremento logaritmico

$$r = r_n = \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{\cancel{R}e^{-\zeta\omega_1(t_n - T_d)}\cancel{(\cos)}}{\cancel{R}e^{-\zeta\omega_1 t_n}\cancel{(\cos)}} = e^{\zeta\omega_1 T_d} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

cost

$\Rightarrow \delta = \ln r = \zeta\omega_1 T_d = 2\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 2\pi\zeta$ per $\zeta \ll 1$ → Stima di ζ: $\boxed{\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi}}$

decrem. logaritm.

La presenza di smorzamento porta il sistema ad arrestare le oscillazioni libere (sistemi reali).

Inoltre: $r = e^{\delta} \simeq \delta + 1$ (misura di δ per $\zeta \ll 1$)

$$\delta \simeq r - 1 = \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n} = \frac{\Delta u_n}{u_n}$$

• Smorzamento critico ($\zeta = 1$, $c = c_{cr}$)

$\lambda_{1,2} = -\omega_1 \xrightarrow{\text{integrali}} e^{-\omega_1 t}$, $te^{-\omega_1 t}$

$$u(t) = e^{-\omega_1 t}(A + Bt) = e^{-\omega_1 t}\left(u_0 + (\dot u_0 + \omega_1 u_0)t\right)$$

risposta aperiodica, non oscillatoria

$$\begin{cases} u(0) = \boxed{A = u_0} \\ \dot u(0) = -\omega_1 A + B = \dot u_0 \end{cases}$$

$\boxed{B = \dot u_0 + \omega_1 u_0}$

Infatti:

$u(t) = te^{\lambda t}$, $\dot u(t) = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} = (1+\lambda t)e^{\lambda t}$,

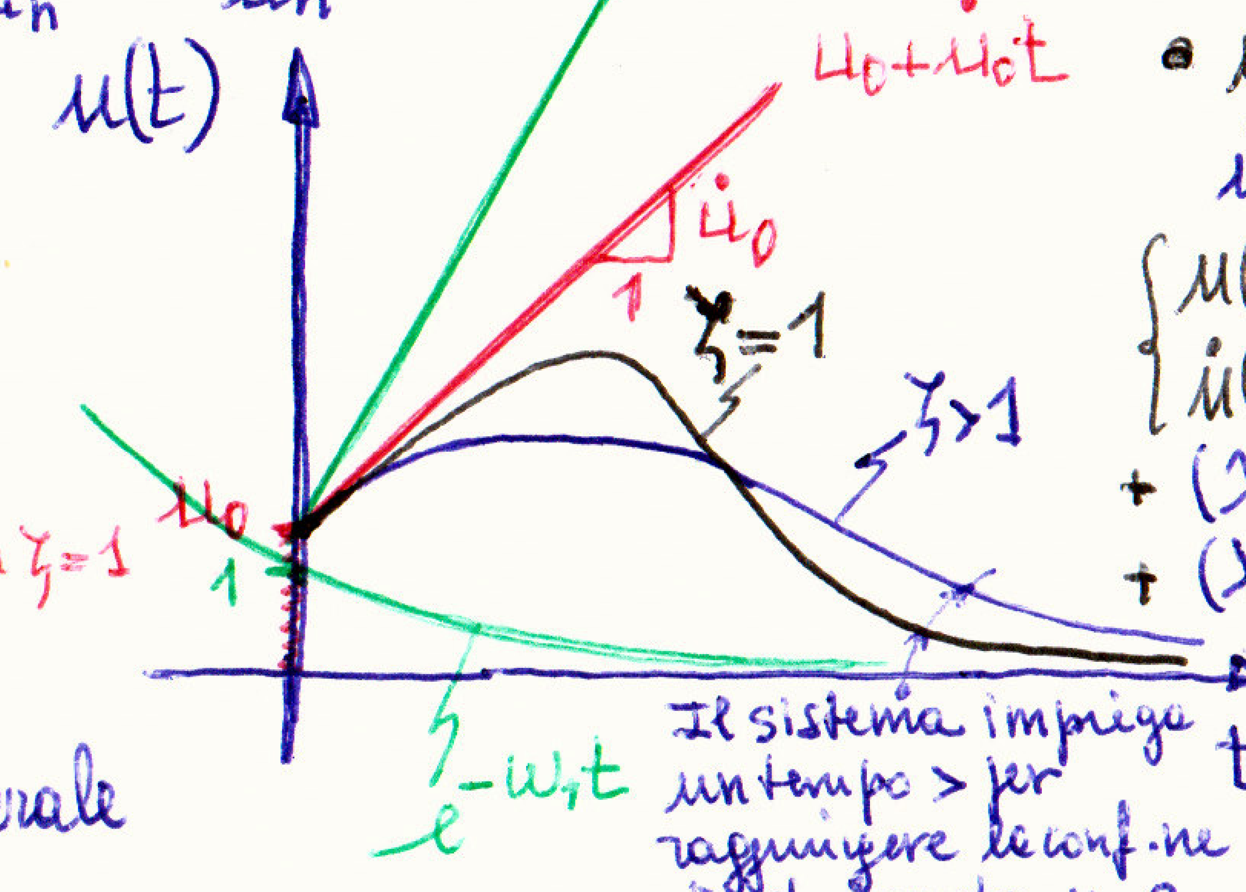
$\ddot u(t) = \lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t} = (2+\lambda t)\lambda e^{\lambda t}$

$(2+\lambda t)\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + 2\zeta\omega_1(1+\lambda t)\cancel{e^{\lambda t}} + \omega_1^2 t\cancel{e^{\lambda t}} = 0 \quad \forall t$

$\underbrace{2(\lambda + \zeta\omega_1)}_{=0 \Rightarrow \lambda = -\zeta\omega_1} + \underbrace{(\lambda^2 + 2\zeta\omega_1\lambda + \omega_1^2)}_{\text{v. sopra } =0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 = -\omega_1 \text{ per } \zeta=1}t = 0 \quad \forall t$

Quindi $u(t) = te^{\lambda t}$ è soluzione per $\zeta = 1$

integrale utile a generare l'integrale generale



Il sistema impiega un tempo > per raggiungere la conf.ne di riferimento $u=0$ –

Casistica:

• $\zeta > 1$ smorzam. sovracritico o supercritico → $\lambda_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_1$ due radici reali e distinte <0

• $\zeta = 1$ critico → $\lambda_{1,2} = \underbrace{-\zeta\omega_1}_{=-\omega_1}$ due radici reali coincidenti

• $\zeta < 1$ sottocritico o subcritico → $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 \pm i\omega_1\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_1 \pm i\omega_d$ due radici complesse coniugate

$\zeta^2 - 1 = -(1-\zeta^2) = i^2(1-\zeta^2)$

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$: pulsazione naturale del sistema smorzato

• Smorzamento supercritico ($\zeta>1$, $c>c_{cr}$)

• $u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ con $\lambda_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_1$

$\dot u(t) = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t}$

$$\begin{cases} u(0) = A + B = u_0 \\ \dot u(0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B = \dot u_0 \end{cases}$$

e $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_1 > 0$

$+\ (\lambda_1 - \lambda_2)B = \lambda_1 u_0 - \dot u_0$

$+\ (\lambda_2 - \lambda_1)A = \lambda_2 u_0 - \dot u_0$

$$\boxed{B = \frac{\lambda_1 u_0 - \dot u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}} \qquad \boxed{A = -\frac{\lambda_2 u_0 - \dot u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}}$$

$$u(t) = -\frac{\lambda_2 u_0 - \dot u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 u_0 - \dot u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t}$$

Int. generale, con $\lambda_{1,2}$ da sostituire