Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

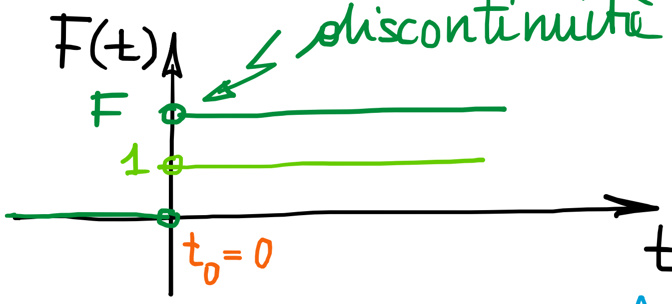
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Risposta a forzante impulsiva (da forzante a gradino; per verso forzante prospettiva generica)



$F(t) = F\,H(t) \Rightarrow$ forzante a gradino, ampiezza F

• $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t>0 \end{cases}$ Heaviside function [unit step] (gradino unitario)

$\zeta \sim 1\%$ fattore di smorzamento

Integrale generale:

$$u(t) = u_{go}(t) + u_p(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right) + \underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}$$

$t > t_0 = 0$

ω_1: pulsaz. naturale sistema non smorz.; ω_d: pulsaz. naturale sistema smorz.

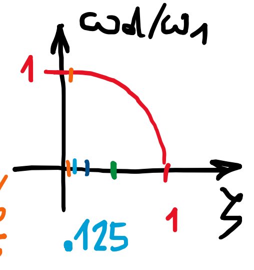
$e^{-\zeta\omega_1 t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right)$: risposta transiente per sistema (smorzato) non forzato

$\frac{F}{K}$: risposta a regime

$$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \leq \omega_1 \quad (\simeq \omega_1)$$

$$\frac{\omega_d^2}{\omega_1^2} = 1-\zeta^2$$

$$\left(\frac{\omega_d}{\omega_1}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$



Imposizione delle c.i. (N.B.: sull'integrale generale, risposta totale):

$$\begin{cases} u_0 = B + \frac{F}{K} \Rightarrow \boxed{B = u_0 - \frac{F}{K}} \\ \dot{u}_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 B}{\omega_d} = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\,\underbrace{\frac{\omega_1}{\omega_d}}_{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\simeq 1,\ \geq 1}\,\underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}}} \end{cases}$$

N.B.: costanti A, B dipendenti da c.i. u_0, $\dot{u}_0$ e da F.

Pertanto si ottiene:

$F = K u_{st}$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\frac{F}{K}\right)\sin\omega_d t + \left(u_0 - \frac{F}{K}\right)\cos\omega_d t\right) + \frac{F}{K}$$

$u_0(t)$

$u_0=0,\ \dot u_0=0$

$$= e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right) + \overbrace{\frac{F}{K}}^{u_{st}}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]$$

(*) risposta per e.i. non omogenee, con $F=0$

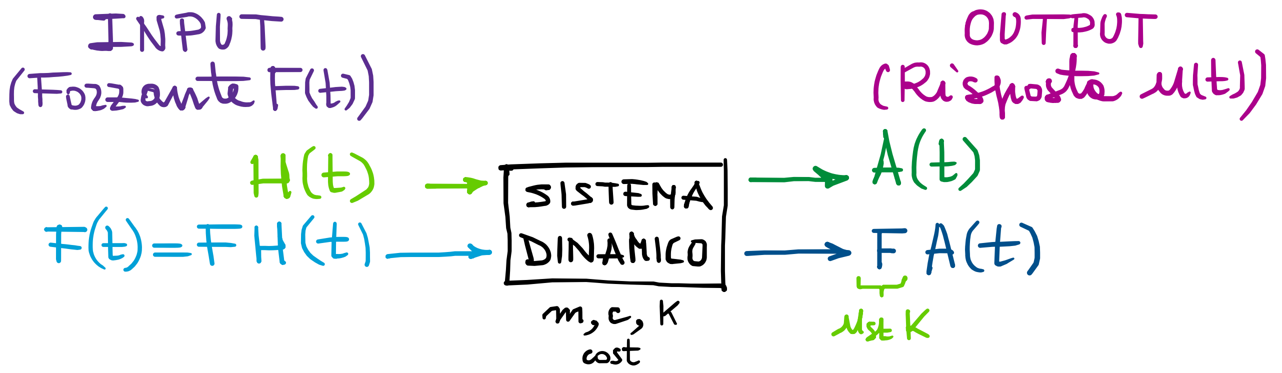
risposta per e.i. nulle a $F\neq 0$

$\Rightarrow$ funzione risposta a gradino F

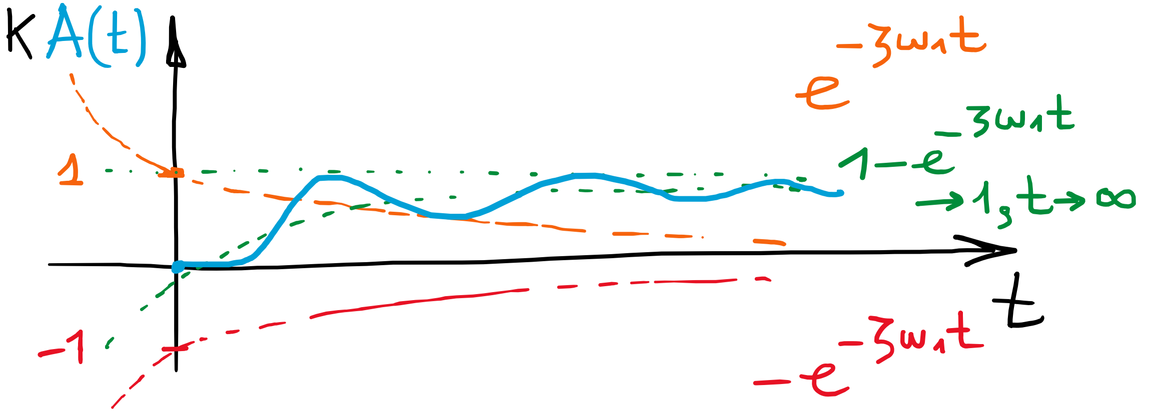
$$\underbrace{F}_{K u_{st}}\cdot\underbrace{\frac{1}{K}\left[1-e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t+\cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

funzione risposta a gradino unitario ($H(t)$)

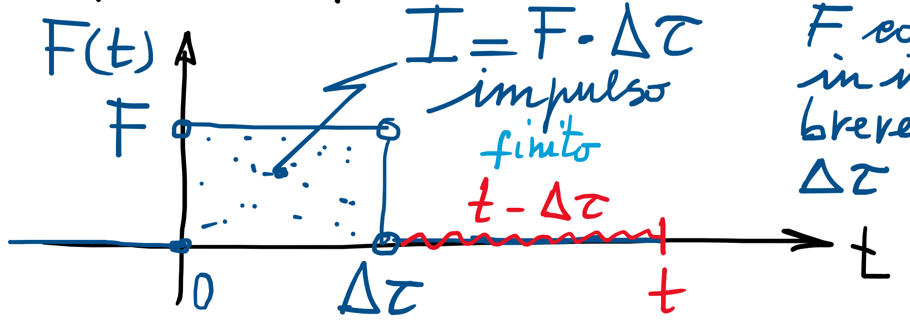
$u_{st} K A(t)$



F.ne $A(t)$, risposta a gradino unitario, utile ora a rappresentare la risposta del sistema a forzante impulsiva, tramite Principio di Sovrapponibilità (→ Sovrapposizione) degli Effetti (valido per sistema lineare, tempo invariante).



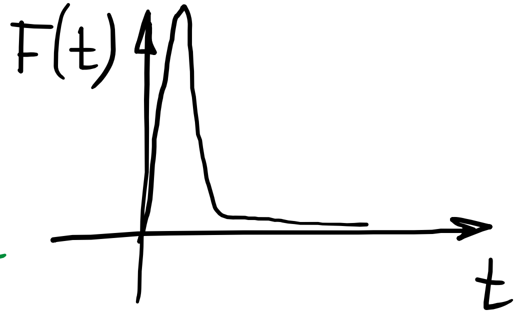
Risposta a forzante impulsiva:



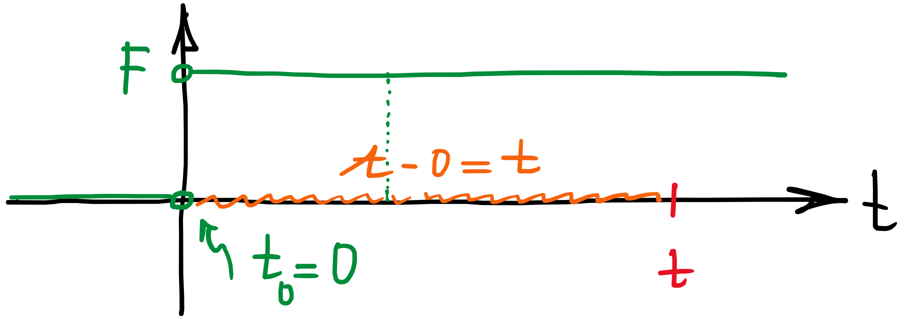
F cost in intervallo breve (finito) $\Delta\tau$

es. urti, impatti, esplosioni

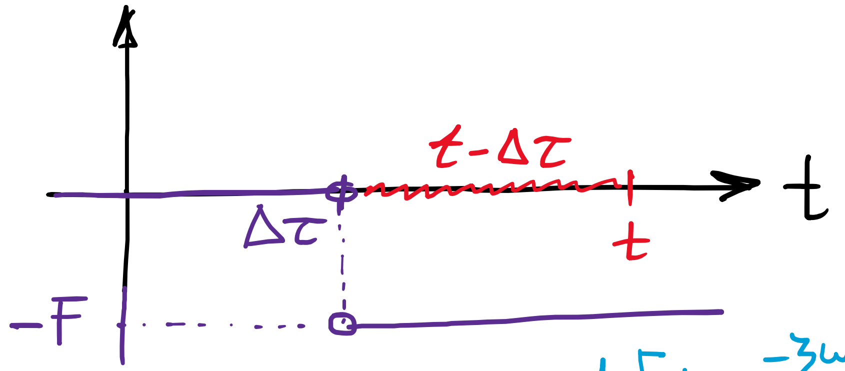
(agisce con entità elevata per un tempo breve, inducendo una risposta dinamica del sistema)



=



+



$$u(t) = F\,A(t-0) - F\,A(t-\Delta\tau) \quad \text{con} \quad \underbrace{\frac{1}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

$$= \underbrace{F\,\Delta\tau}_{I}\;\frac{A(t) - A(t-\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

$$= I \cdot \frac{\Delta A}{\Delta\tau} \;\leftarrow\; \text{rapporto incrementale } \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) \;\underset{\Delta\tau \to 0}{\overset{}{\underset{\lim}{=}}}\; I \cdot \overbrace{\frac{dA(t)}{dt}}^{\dot{A}(t) = h(t)}$$

$$= I \cdot h(t)$$

funzione risposta ad impulso unitario

processo al limite, per $\Delta\tau \to 0$ (per I finito, $F \to \infty$)
durata infinitesima

– Quindi, si ottiene, per la funzione risposta ad impulso unitario:

$$h(t) = \overset{\frac{d}{dt}}{\dot{A}(t)}$$

$$= \frac{1}{K}\left[0 + \zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cancel{\cos\omega_d t}\right) - e^{-\zeta\omega_1 t}\,\cancel{\omega_d}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\cancel{\omega_d}}\cancel{\cos\omega_d t} - \sin\omega_d t\right)\right]$$

$$\underbrace{\frac{1}{K}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]}_{A(t)}$$

$$= \frac{1}{K}\, e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t\left(\frac{\zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2}{\omega_d}\right)$$

$$\begin{cases} \omega_d^2 = \omega_1^2(1-\zeta^2) = \omega_1^2 - \zeta^2\omega_1^2 \\ \zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2 = \omega_1^2 = \frac{K}{m} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{K}\,\frac{\overset{K/m}{\omega_1^2}}{\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{m\,\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t}$$

funzione risposta ad impulso unitario

oscillazioni libere smorzate per $F=0$

N.B.: coerente con la risposta (*) per $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0^+ = \frac{1}{m}$

$F(t)$		$u(t)$
$F(t)$ impulsiva (I) $\longrightarrow$	SISTEMA	$\longrightarrow$ $I\cdot h(t)$
Impulso unitario $(I=1)$ $\delta(t)$ $\longrightarrow$		$\longrightarrow$ $h(t)$

$\delta(t)$: Delta di Dirac

- Interpretazione fisica tramite Teorema dell'impulso: $\Rightarrow$ la variazione della quantità di moto eguaglia l'impulso

$$F_{tot} = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow dI = F\,dt \underset{m=cost}{=} m\,dv = d(\underbrace{mv}_{q}) = dq$$

q quantità di moto

Su intervallo $\Delta\tau$: $\quad dq = dI = F\,dt$

$$\underbrace{\Delta q}_{\text{variazione della quantità di moto}} = q(\Delta\tau) - \cancel{q(0)}^{\,0}_{u_0=0} = \int_0^{\Delta\tau} \Big(\overset{\text{fozzante}}{F} - (\underset{\substack{\text{elastica}\\ Ku}}{F_e} + \underset{\substack{\text{viscosa}\\ c\dot{u}}}{F_d})\Big)\,dt = \int_0^{\Delta\tau} F\,dt - \int_0^{\Delta\tau\to 0} \underbrace{(F_e + F_d)}_{\text{forze di ampiezza limitata } (Ku,\, c\dot{u})}\,dt$$

con processo al limite per $\Delta\tau \to 0$:

$$m\dot{u}_0^+ = I - \underset{\text{integrale su intervallo infinitesimo di funzione limitata}}{0} \Rightarrow \boxed{\dot{u}_0^+ = \frac{I}{m}} \Rightarrow \text{valutazione sperimentale}$$

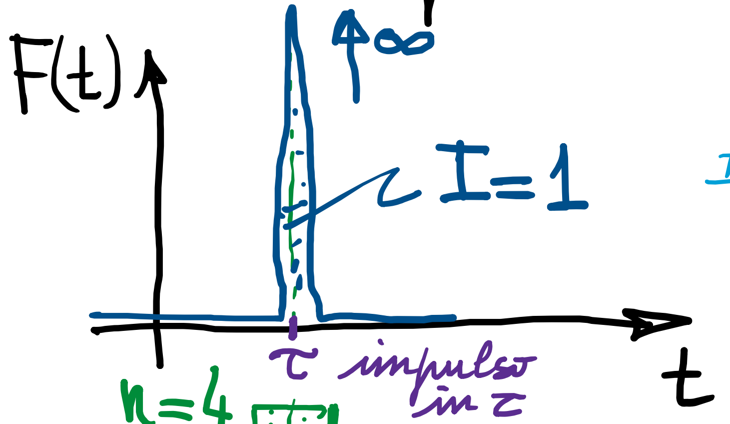
stima dell'entità dell'impulso ricevuto $\quad I = m\,\dot{u}_0^+$

$\dot{u}_0^+$ velocità subito dopo la ricezione dell'impulso (misurabile)

- Pertanto, il sistema risponde, a fozzante impulsiva, come per delle oscillazioni libere indotte da spostamento iniziale nullo e velocità iniziale pari all'impulso ricevuto diviso la massa.
- Se $I = 1$, $\dot{u}_0^+ = 1/m \Rightarrow h(t)$.

Codificazione matematica di "funzione" (⇒ è una "distribuzione")

Forzante impulsiva: (tale da produrre impulso unitario)



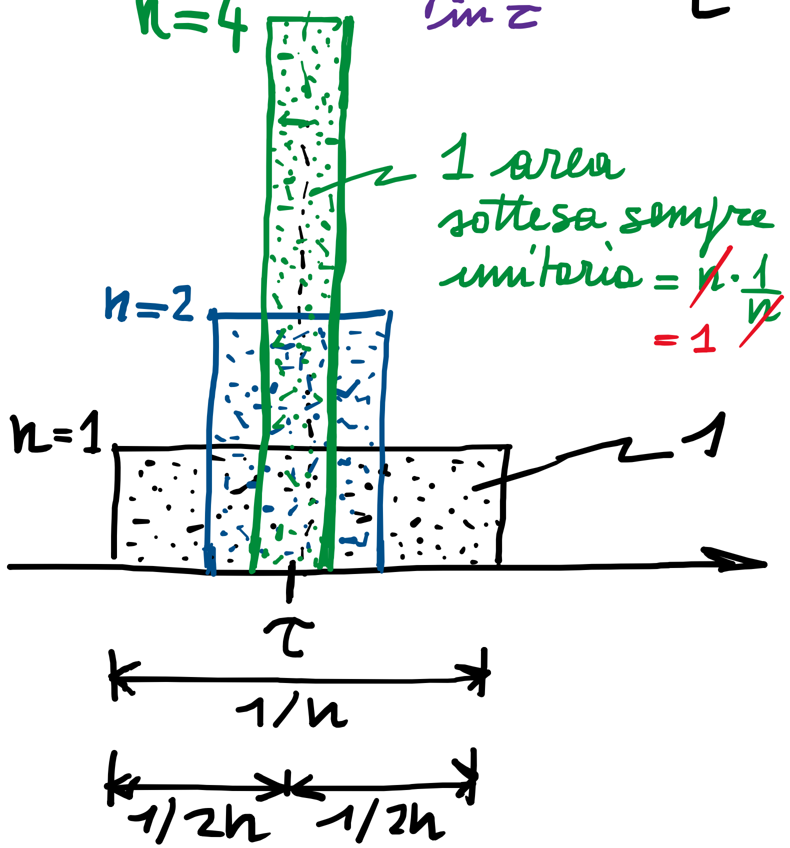
$$F(t) \begin{cases} = 0 & \forall t \neq \tau \\ \to \infty & t = \tau \end{cases} = \delta(t)$$

Delta di Dirac "distribuzione"

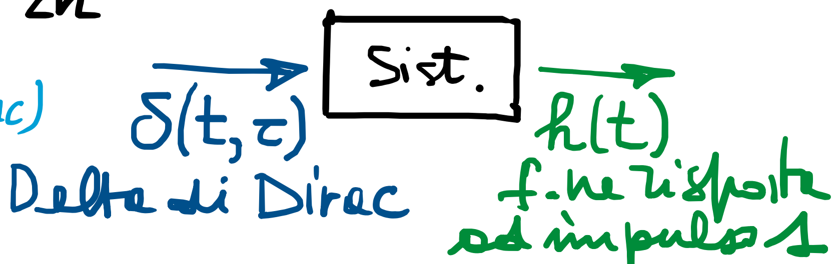
Dinamica: agisce con ampiezza infinita, per durata infinitesima (con impulso finito unitario)

Essa è il limite, per $n \to \infty$, della successione

$$\delta_n(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t-\tau| > \frac{1}{2n} \\ n & \text{se } |t-\tau| < \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad n \to \infty \quad \delta(t,\tau)$$



Proprietà: (della Delta di Dirac)

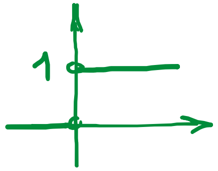


- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,\tau)\,d\tau = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \overbrace{\delta(t,\tau)}^{\text{impulso unitario}} d\tau = F(t)$ ⇒ Interpretazione della forzante come una sequenza di impulsi $dI = F(\tau)d\tau$

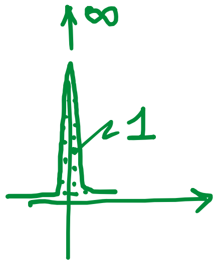
collocazione in t

Concetti fondamentali :

INPUT
(forzante)

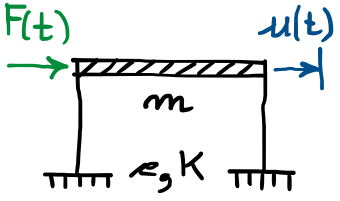


Gradino unitario $H(t)$
Heaviside



Impulso unitario $\delta(t)$
Dirac

SISTEMA



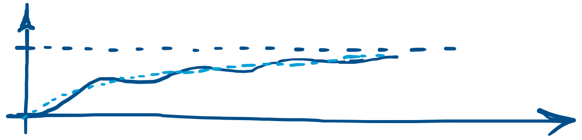
$\zeta 2\sqrt{Km}$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega_d = \omega_1 \sqrt{1-\zeta^2}$

OUTPUT
(risposta) [spost., velocità, acceler.]

$$A(t) = \frac{1}{K}\left[1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta \frac{\omega_1}{\omega_d} \sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]$$

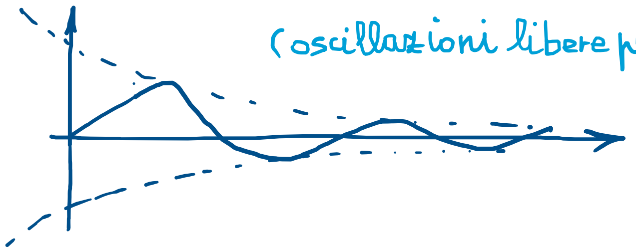
funzione risposta a gradino unitario



$$h(t) = \dot{A}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t$$

funzione risposta a impulso unitario

(oscillazioni libere per $u_0 = 0$, $\dot{u}_0^+ = \frac{1}{m}$)



SOMMARIO (Lez. 07)

- Verso la determinazione della risposta a forzante generica.
- Funzione risposta a gradino unitario: $A(t)$.
- " " " impulso " : $h(t) = \dot{A}(t)$.
- Da th. dell'impulso, come per oscillazioni libere smorzate da velocità iniziale al tempo 0^+ pari a $\frac{I=1}{m}$.
- Rappresentazione ideale (matematica) di forzante impulsiva unitaria: Delta di Dirac $\delta(t,\tau)$.
- Next step: forzante generica per sovrapposizione di impulsi e conseguente risposta per sovrapposizione di risposte impulsive (integrale di convoluzione o di Duhamel).