

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

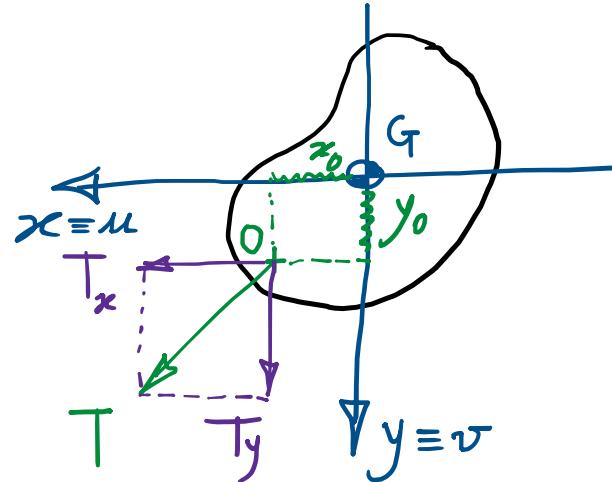
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

Taglio e Centro di Taglio



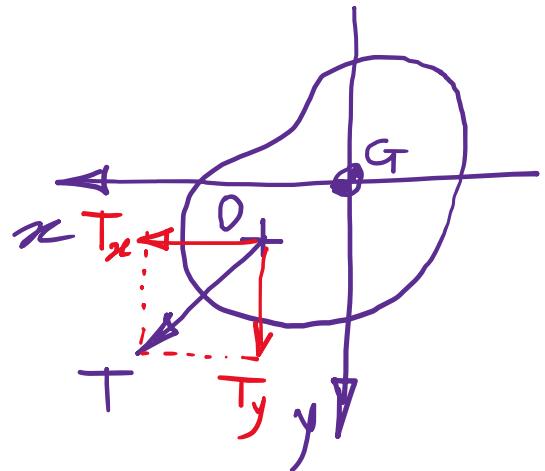
CT_a

Centro di Taglio : p.t.o di applicazione della forza tagliente T tale per cui si registra un'inflessione del prisma di dSV (flessione associata al taglio) senza rotazione delle sezioni nel suo piano (**disaccoppiamento taglio/torsione**).

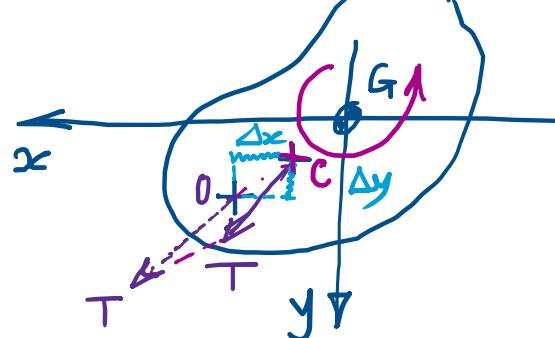
- Quindi, se $O \equiv CT_a$, la sollecitazione risulta di puro taglio (flessione composta), senza effetti torcenti (cioè senza "torsione", rotazione delle sezioni).
- Infatti, vi è in generale presente un accoppiamento taglio/torsione, in base al punto di applicazione dell'azione tagliente T, in quanto, trasponendo la forza T nel piano, restando parallela e se stessa, si genera un momento torcente di trasporto, tale da indurre effetti torcenti.
- Il CT_a, pertanto, è quel punto di applicazione dell'azione tagliente T che non induce effetti torcenti sul prisma di dSV (no rotazione delle sezioni).

- Rotazione ("torsione") nulla: in senso "energetico", vri PLV, quando sforzi taglienti e deformazioni torcenti (e viceversa), risultano energeticamente ortogonalili, cioè tali da produrre lavoro interno mutuo nullo.

- Sistema A (static. ammissibile)



static. equiv. a:



$$\frac{T_a}{T_z} = \left\{ \begin{array}{l} T_{zx} \\ T_{zy} \end{array} \right\}$$

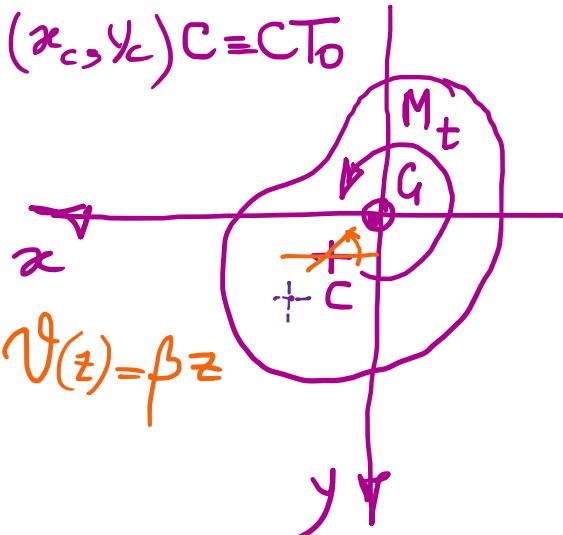
sforzi taglienti

Momento torcente di trasporto

$$T_y (x_0 - x_c) - T_x (y_0 - y_c)$$

Δx Δy

- Sistema B (cinematic. ammissibile)



$$(x_c, y_c) C = CT_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x = -\beta z (y - y_c) \\ \Delta y = \beta z (x - x_c) \end{array} \right.$$

$$\Delta z = \beta \psi_c (x_c, y)$$

$$\frac{T_0}{\gamma_z} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{zx}^{T_0} \\ \gamma_{zy}^{T_0} \end{array} \right\}$$

deformazioni taglienti

legame elast. lin. isotropo

$$\gamma_z^{T_0} = \frac{\tau_z^{T_0}}{G}$$

(G: modulo di elast. tangenziale)

PLV:

$$\frac{d\sigma_e^{AB}}{dz} = T_x \cdot \cancel{\gamma_{xc}} + T_y \cdot \cancel{\gamma_{yc}} + \underbrace{[T_y \cdot (x_0 - x_c) - T_x \cdot (y_0 - y_c)]}_{=0 \text{ } \forall T_x, T_y} \cdot \beta^B = \int_A \cancel{T_x} \cdot \gamma_z^B dA = \frac{d\sigma_i^{AB}}{dz} = 0$$

\Downarrow

$$\begin{cases} x_0 = x_c \\ y_0 = y_c \end{cases} \Rightarrow \boxed{CT_a \equiv CT_0 \equiv C}$$

energeticamente ortogonali

Inoltre, invertendo \textcircled{A} e $\textcircled{B} \Rightarrow \textcircled{A} \equiv \text{Torsione}; \textcircled{B} \equiv \text{Taglio}$

$$\frac{d\sigma_e^{T_0 T_a}}{dz} = M_t^{T_0} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \cancel{\tau_z^{T_0}} \cdot \gamma_z^{T_a} dA = \frac{d\sigma_i^{T_0 T_a}}{dz}$$

$$\beta^{T_a} = 0$$

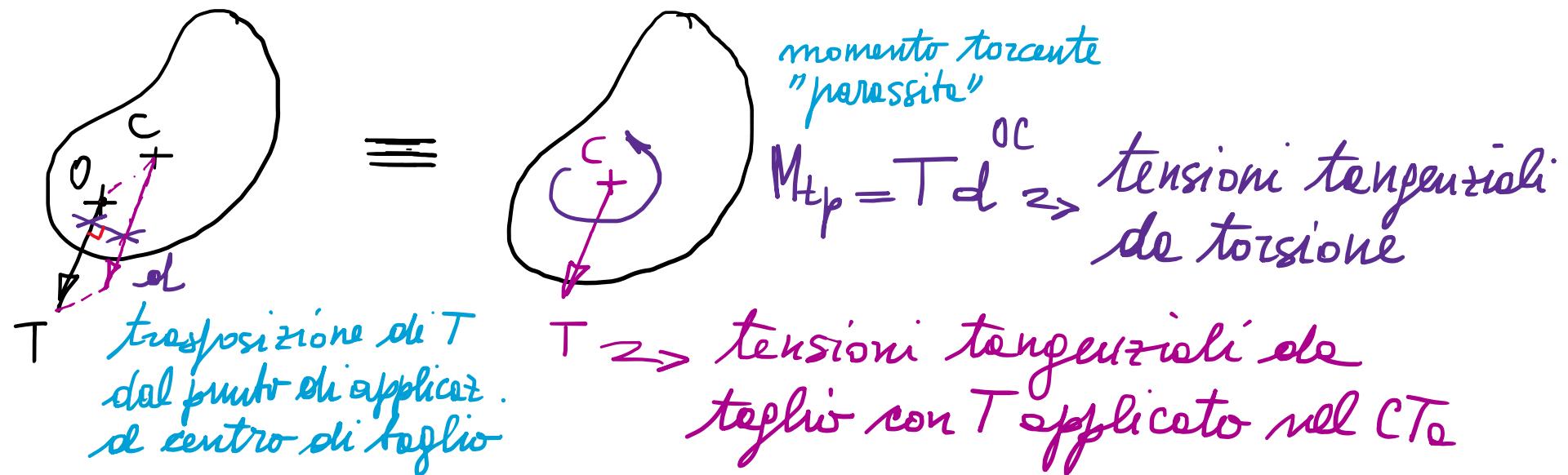
$$\int_A \cancel{\tau_z^{T_0}} \cdot \frac{\cancel{\tau_z^{T_a}}}{G} dA = \int_A \frac{\cancel{\tau_z^{T_0}}}{G} \cdot \gamma_z^{T_a} dA = \int_A \gamma_z^{T_a} \cdot \cancel{\tau_z^{T_0}} dA = 0$$

rotazione delle

sezioni dovute al taglio:

nulle se T è applicata in $C \equiv CT_a \equiv CT_0$

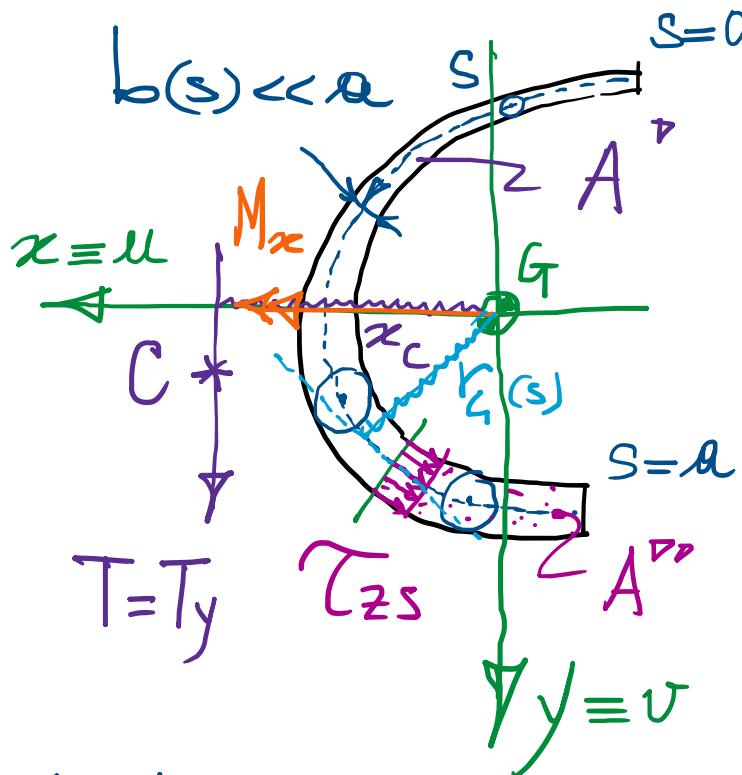
- N.B.: se T è applicato in $O \neq C$, la trasposizione di T da O a C induce un momento torcente "parassita", da tenere in debito conto per la valutazione dello stato tensione-deformativo (con effetti che possono risultare rilevanti, per es. nel caso di profili sottili aperti, dotati di scarsa capacità portante e torsione).



- Se \exists esse di simmetria, $C \equiv CT_a \equiv CT_0$ è a tale esse

- Per sezione doppia-simmetrica, $C \equiv G$ (p.t. di intersez. dei due assi di simm.)

- Taglio nei profili sottili (aperti) [soluzione approssimata di D.J. Tjekrowsky] ~ 1856



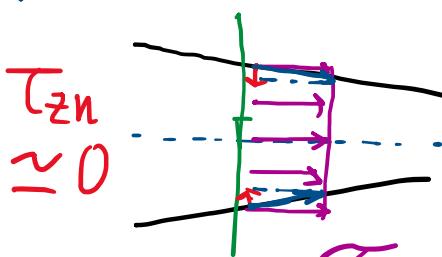
$$M = M_x = T_y \neq 0 \Rightarrow$$

$$dM_x = T_y dz \quad \sigma_{zz} = \frac{T_y}{J_x} y$$

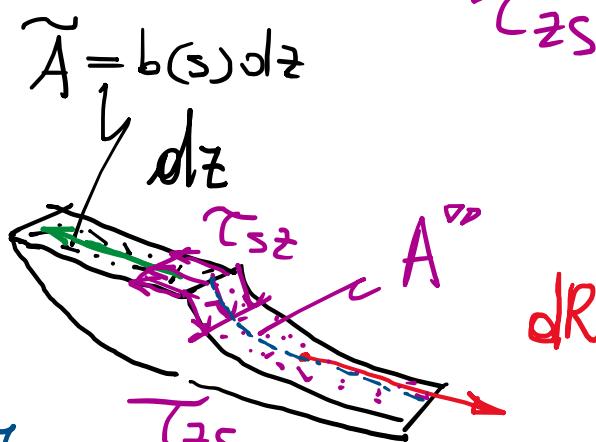
flessione legate
al taglio

formula di Navier
per le flessioni

- Corola di taglio \perp alle linee medie del profilo sottile $\Rightarrow \bar{\tau}_{zs} = \bar{\tau}_{zn} = \text{cost. sullo spessore}$



$\bar{\tau}_{zn}$ (antisimm. e lineari lungo lo spessore) trascurabili a fini ingegneristici



equil. alle
tensioni nelle
direzione z

$$dR = \int_{A''} d\tau_{zz} dA = \int_{A''} \frac{T_y dz}{J_x} y dA$$

$$\int_{\bar{A}} \frac{T_{sz} dn dz}{\bar{\tau}_{zs} b(s)} = dR$$

veloz. medio

$$\frac{Ty}{J_x} \frac{dz}{b(s)} \int_{A''} y dA = \frac{Ty}{J_x} \frac{dz}{b(s)} \int_{A''} y dA$$

S_z

- Formule di Joukowsky: $G \in x: S_x = S_x^{\rightarrow} + S_x^{\leftarrow} = 0 \Rightarrow S_x^{\rightarrow} = -S_x^{\leftarrow}$

valore medio sulle curve

$$\overline{T_{zs}(s)} = \overline{T_{zs}} = \frac{T_y S_x^{\leftarrow}(s)}{J_x b(s)} = -\frac{T_y S_x^{\rightarrow}(s)}{J_x b(s)}$$

↑
Approx.

- N.B.: le $T_{zs}(s)$ alle J. non dipendono dal punto di applicazione di $T=T_y$; esse possono forse riferire alle $T=T_y$ applicate nel centro di Teiglio. Esso risulta così determinabile dalle condizioni di equivalenza statica (rispetto a G, o a punto comodo):

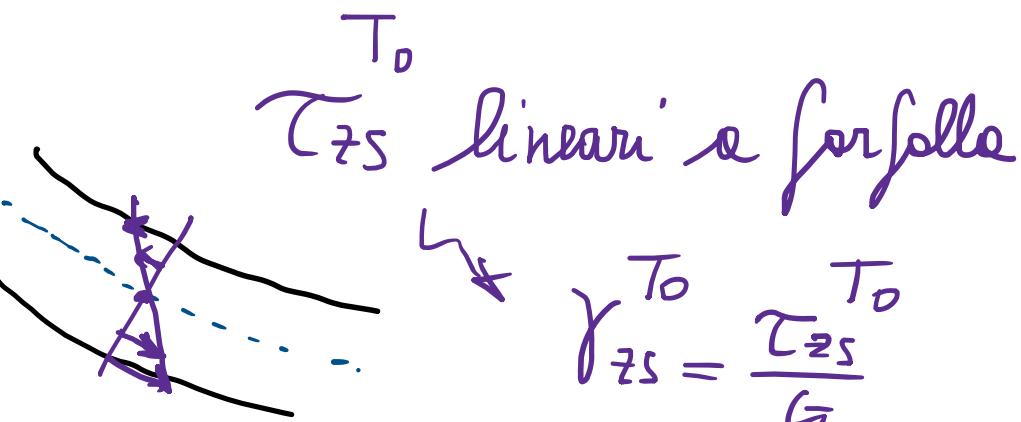
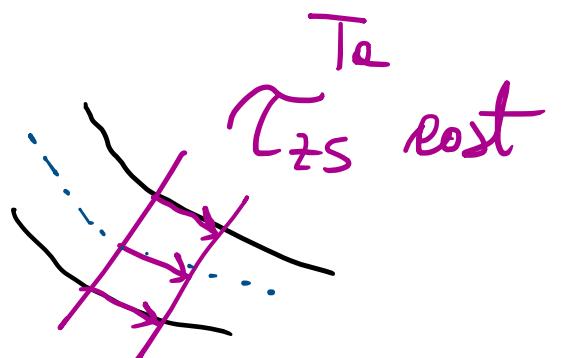
$$\int_0^a \underbrace{T_{zs}(s) b(s) ds}_{\text{forza}} \cdot \underbrace{r_G(s)}_{\text{braccio}} = T_y x_c$$

$$\int_0^a \frac{T_y S_x^{\rightarrow}(s)}{J_x b(s)} b(s) r_G(s) ds = T_y x_c \quad (\text{Ty=1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{J_x} \int_0^a S_x^{\rightarrow}(s) r_G(s) ds \\ y_c = -\frac{1}{J_y} \int_0^a S_y(s) r_G(s) ds \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{CTe} \\ (\overline{T_z=1}) \end{array}$$

frofr. geom. del profilo

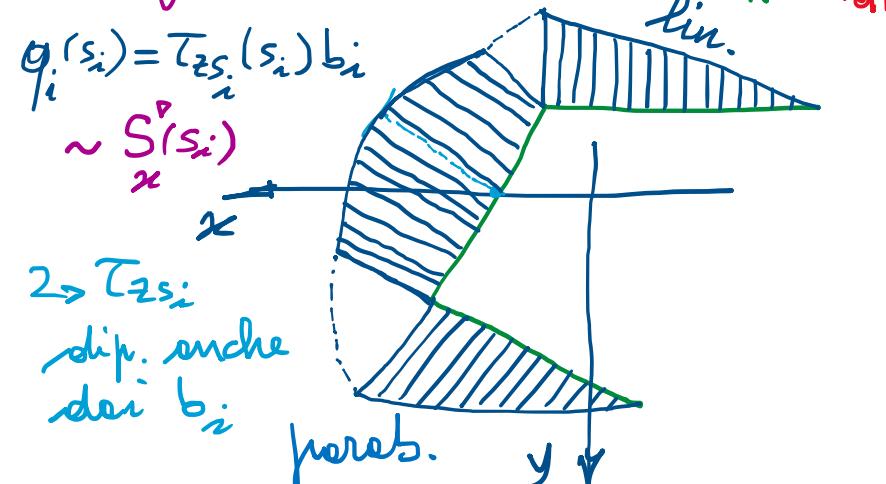
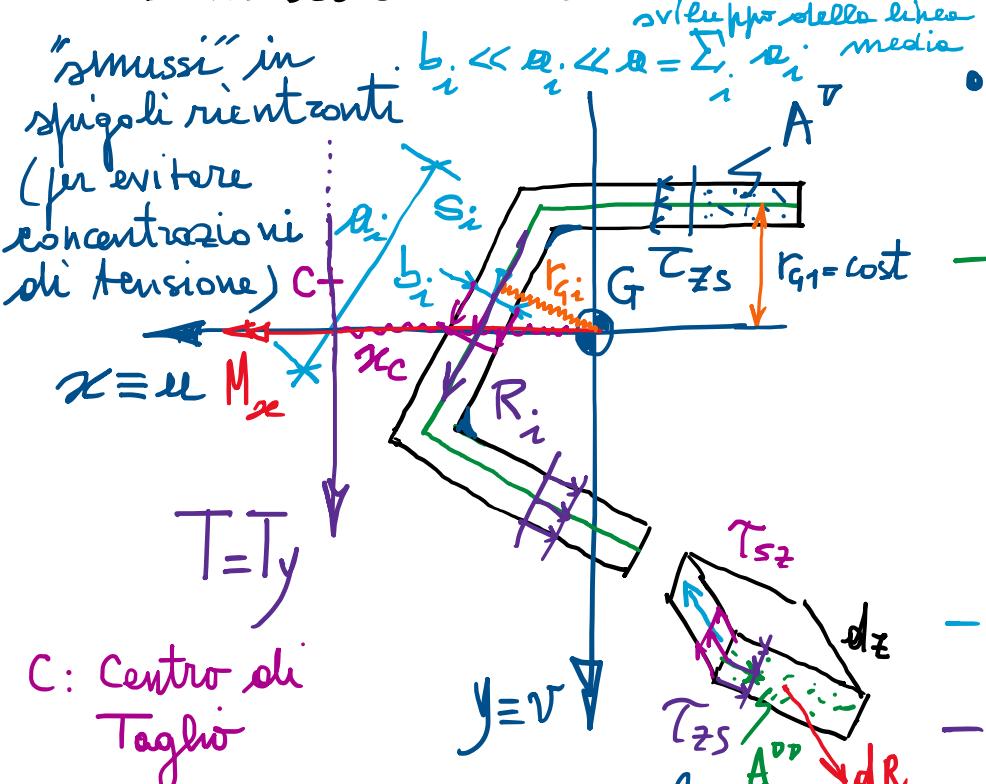
- Infatti $\tau_{zs}^{Te}(s)$ alle Jourkowsky, costanti sullo spessore, risultano energeticamente ortogonali e $\gamma_{zs}^{To}(s) = \frac{\tau_{zs}^{To}(s)}{G}$ lineari e forfalle sullo spessore:



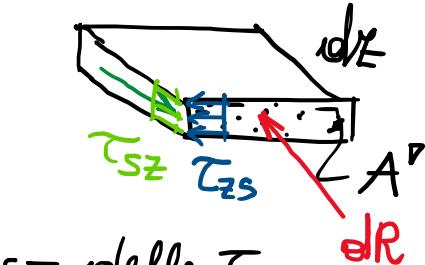
$$\gamma_{zs}^{To} = \frac{\tau_{zs}^{To}}{G}$$

$$\frac{df_i}{dz} = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}^{Te} \gamma_{zs}^{To} \frac{\tau_{zs}^{To}}{G} dn ds \equiv 0$$

Taglio in profili sottili aperti formati da rettangoli sottili' ($b_i = \text{cost}$ in ogni tratto)



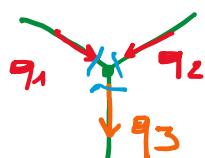
$$T_{zs_i}(s_i) = \frac{T_y S_x^\sigma(s_i)}{\bar{J}_x b_i} = - \frac{T_y S_x^\sigma(s_i)}{\bar{J}_x b_i}$$



- $S_x^\sigma(s_i)$ al più parabolico in $s_i \sim s_i^2$, in quanto $A_i \sim s_i$ e G_i di tale posizione ha distanza da x altrettanto lin. in s_i ($\sim s_i$). (in direzione z)

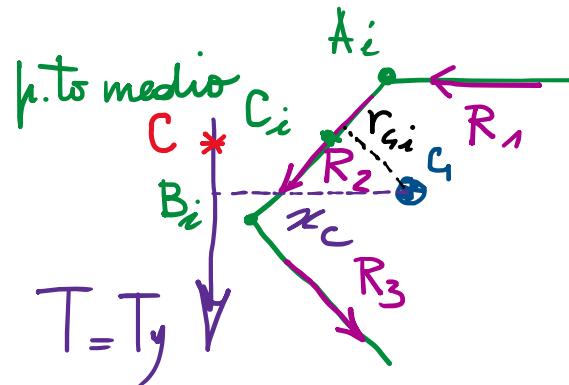
verso delle T_{zs}
secondo ragionamento di Joukowski (equil. alle trast.)

- Se tratto i -esimo // all'asse x , $r_{gi} = \text{cost}$, $S_x^\sigma(s_i) \sim s_i$. lin. (caso particolare)
- In punto ove le linee medie tocchi l'asse x , si registra punto di stazionarietà di $S_x^\sigma(s_i)$, max. rel. s. potenziale punto con T_{zs_i} .
- Bilancio di "flussi delle tensioni tangenziali", entranti/uscenti nei nodi delle linea media:



$$q_3 = q_1 + q_2 \Leftrightarrow S_{x3}^\sigma = S_{x1}^\sigma + S_{x2}^\sigma$$

- Per determinare il CT_e, quale punto di applicazione del risultante delle tensioni tangenziali (dalle Jouravsky) dovute al taglio, risulta comodo utilizzare le risultanti R_i delle $T_{zs,i}$ sui vari tratti:



$$R_i = \int_0^{a_i} \underbrace{T_{zs,i}(s_i) b_i}_{q_i(s_i)} ds_i = - \int_0^{s_i} \frac{T_y}{J_x} S_x(s_i) ds_i$$

$$= - \frac{T_y}{J_x} \int_0^{a_i} S_x(s_i) ds_i \quad \text{forma analitica}$$

bastano tre valori dei momenti statici

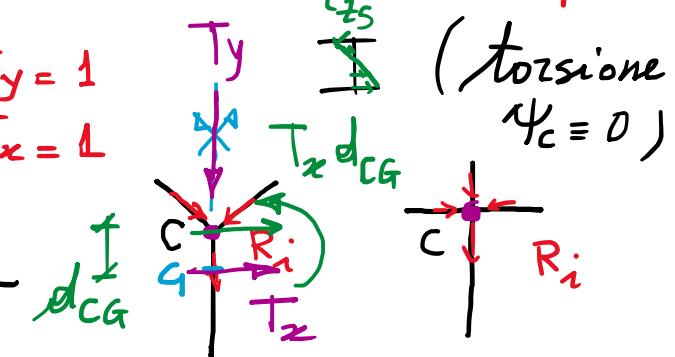
$$= \frac{a_i}{6} \left(S_{zA_i} + 4S_{xC_i} + S_{zB_i} \right)$$

formule di Simpson
(integre esattamente una parabola)

- Quindi, imponere le condizioni di equivalenza statica (in termini di momento torcente) rispetto al bocentro G (o altro punto comodo):

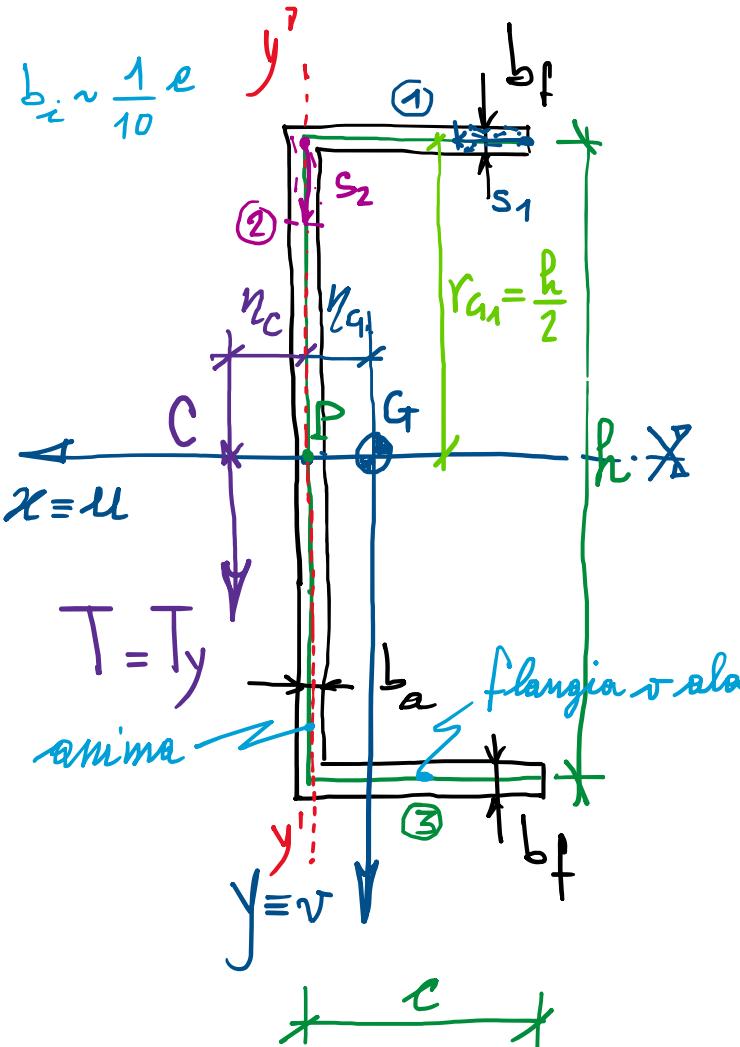
$$T_y x_c = \sum_i R_i r_{s_i} \Rightarrow x_c = \sum_i \frac{R_i}{T_y} r_{s_i}$$

$$\begin{aligned} x_c &\leftarrow T_y = 1 \\ y_c &\leftarrow T_x = L \end{aligned}$$



- N.B.: nei profili a stelle, il CT_e coincide col centro delle stelle (poiché tutte le R_i convergono in esso)

Profilo a L su CTA



$$A = 2c b_f + h b_a = b_f c \left(2 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)$$

$$\eta_G = \frac{S_y}{A} = \frac{2c b_f \frac{e^2}{2}}{A} = \frac{b_f c^2}{b_f c \left(2 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)} = \boxed{\frac{c}{2 + \frac{b_a h}{b_f c}} = \eta_G}$$

$$J_x = \frac{1}{12} b_a h^3 + 2 \left(\frac{1}{12} c b_f^3 + c b_f \frac{h^2}{4} \right) = \frac{b_f c h^2}{12} \left(6 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)$$

Tensioni tangenziali τ_{zs}

$$\textcircled{1} \quad \tau_{zs}(s_1) = - \frac{T_y S_x(s_1)}{J_x b_f}; \quad S_x(s_1) = -s_1 b_f \frac{h}{2} \quad \text{lin. in } s_1$$

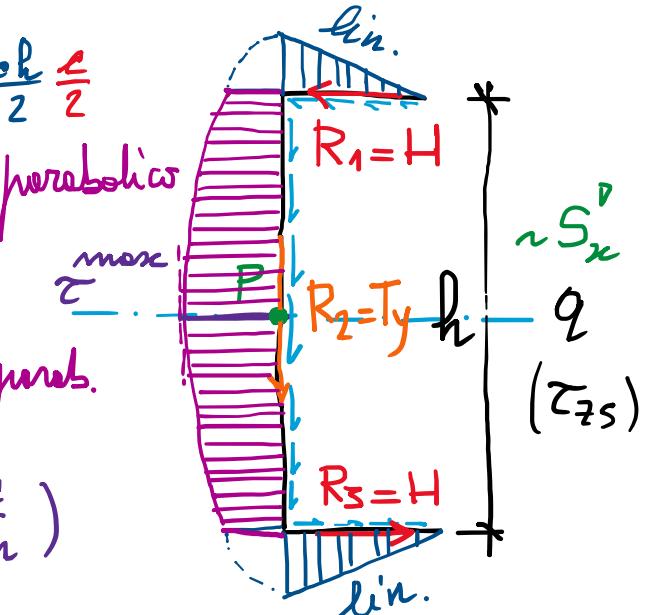
$$\tau_{zs1}^{\max} = \frac{T_y}{J_x} c \frac{h}{2} \quad H = \int_0^e \tau_{zs1} b_f ds_1 = \frac{T_y b_f}{J_x} \frac{ch}{2} \frac{e}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \tau_{zs}(s_2) = - \frac{T_y S_x(s_2)}{J_x b_a} \quad = \frac{T_y}{J_x} \frac{b_f h c^2}{4} \quad \text{parabolico}$$

$$S_x(s_2) = c b_f \frac{h}{2} + b_a s_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) \sim s_2^2 \quad \text{parab.}$$

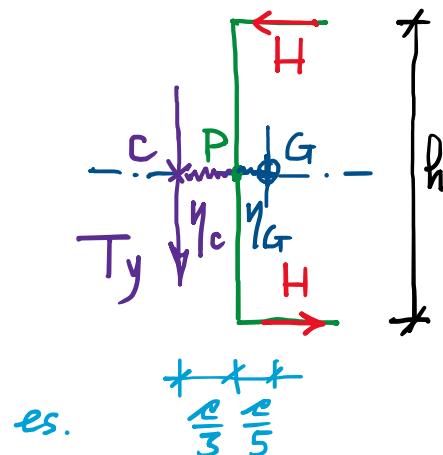
$$\tau^{\max} = \tau_{zs}(s_2 = \frac{h}{2}) = \frac{T_y}{J_x} \frac{h^2}{8} \left(1 + 4 \frac{b_f c}{b_a h} \right)$$

$$b_a = b_f, h = 3c; \eta_G = \frac{c}{5}$$



Centro di taglio:

- Equivalenza statica rispetto a P (punto "comodo")



es. $\frac{e}{3} \frac{e}{5}$

$$\bar{\eta}_G = \eta_c + \eta_G \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) c = \frac{8}{15} e$$

N.B.: per $T=T_y$ applicato in $O \neq C$
(ad es. tipicamente in G), cioè
"eccentrico" rispetto al CTa,
necessa, de considerare, un concomitente
momento torcente parassita $M_{tp} = T_y \eta_{co}$
(es. $O \equiv G$ ecc. $\eta_{ca} = \eta_c + \eta_G$)

coppia generata dalle H

$$T_y \eta_c = H h \quad \Rightarrow \eta_c = \frac{H}{T_y} h = \frac{1}{J_x} \frac{b_f h c^2}{4} h$$

$$= 3 \frac{1}{6 + \frac{2ah}{b_f e}} c$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{3} \frac{b_e h}{b_f e}} c > \eta_G \Leftrightarrow \frac{e}{5}$$

$$\text{es. } b_e = b_f, h = 3c; \eta_c = \frac{c}{3}$$

$$\eta_c = \frac{3c}{4 + c/\eta_G} = \eta_G \frac{3c/\eta_G}{4 + c/\eta_G}$$

Conclusioni sul Corso di CdSdC (da Indice delle Lezioni)

[ARCHIVIO LEZIONI ONLINE CdSdC \(2022\)](#)

Meccanica delle Strutture

- [Lezione 01. Introduzione al corso di CdSdC. Programma. Analisi Cinematica \(AC\) e suoi approcci. Rappresentazione analitica e geometrica di atto di moto \(piano\)](#)
- [Lezione 02. Spostate e mappe di componenti di spostamento \(oriz. e vert.\). Ruolo cinematico di biella e carrello. AC geometrica. I e II Teorema sulle catene cinematiche](#)
- [Lezione 03. AC geometrica per applicazione sistematica di I e II Th. sulle catene cinematiche. Computo di doppiette, triplette e CIR. Esempi di AC geometrica](#)
- [Lezione 04. Esempi di tracciamento di spostate e mappe. AC analitica. Esempio con singolo corpo rigido. Sistema di congruenza. Sistema ridotto da schema ad albero](#)
- [Lezione 05. AC analitica di sistemi articolati. Sistema di congruenza. Proprietà algebriche. Grado di indeterminazione cinematica o di labilità. Classificazione](#)
- [Lezione 06. Analisi Statica \(AS\) e dualità S/C. Sistema di equilibrio. Proprietà algebriche. Grado di indeterminazione statica o di iperstaticità. Classificazione delle strutture](#)
- [Lezione 07. PLV, CN di equilibrio e congruenza; PSV, CS di equil.; PFV, CS di congr. Deformazioni elementari elastiche e termiche. Dualità via PSV. Calcolo di RV/AI col PSV](#)
- [Lezione 08. Soluzione di strutture iperstatiche col PLV \(PFV\). Scrittura indiretta della condizione di congruenza tramite PLV. Calcolo di componenti di spostamento](#)
- [Lezione 09. Soluzione di strutture iperstatiche mediante metodo della Linea Elastica. Condizioni al contorno in presenza di molle assolute e relative, elongazionali e rotazionali](#)
- [Lezione 10. Travature reticolari. AC e AS \(Metodo dei nodi; Metodo delle sezioni\). Esempio di travatura reticolare isostatica, con diagonali tesi o compresi](#)
- [Lezione 11. Travatura reticolare iperstatica soggetta a dilatazione termica. Azione interne in aste curve: arco semicircolare con carico concentrato in chiave](#)
- [Lezione 12. Equazioni indefinite di equilibrio del concio di trave curvilinea. Esempio di arco semicircolare: con q uniforme; con p uniforme](#)

Meccanica dei Solidi

- [Lezione 13. Statica dei continui: sforzo, invarianti, problemi agli autovalori; equazioni indefinite di equilibrio](#)
- [Lezione 14. Cinematica dei continui: spostamento e deformazione; equazioni di congruenza](#)
- [Lezione 15. Problema elastico lineare: bilancio equazioni/incognite. Legame costitutivo iperelastico \(lineare; isotropo, trasversalmente isotropo, ortotropo\)](#)
- [Lezione 16. PLV in meccanica dei continui; dimostrazione \(CN di equilibrio e congruenza\). Proprietà del problema elastico lineare; unicità della soluzione \(Teorema di Kirchhoff\)](#)
- [Lezione 17. Problema di de Saint Venant: ipotesi e definizioni; approccio semi-inverso agli sforzi; sforzo normale lineare; problema differenziale nelle tensioni tangenziali](#)
- [Lezione 18. Caso di DSV della torsione. Approccio agli spostamenti: problema di Neumann-Dini per l'equazione di Laplace](#)
- [Lezione 19. Centro di torsione. Approccio agli sforzi: problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Quadro sinottico dei due approcci](#)
- [Lezione 20. Analogie fisiche del problema della torsione: analogia idrodinamica; analogia della membrana](#)
- [Lezione 21. Soluzioni analitiche del problema della torsione: sezione ellittica; sezione rettangolare sottile](#)
- [Lezione 22. Torsione nei profili sottili aperti](#)
- [Lezione 23. Torsione nei profili sottili chiusi. Formula di Bredt. Confronto profilo aperto/chiuso](#)
- [Lezione 24. Taglio e centro di taglio. Taglio nei profili sottili aperti e formati da rettangoli sottili. Centro di taglio del profilo a C. Conclusioni sul corso](#)