

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

A.A. 2020/2021

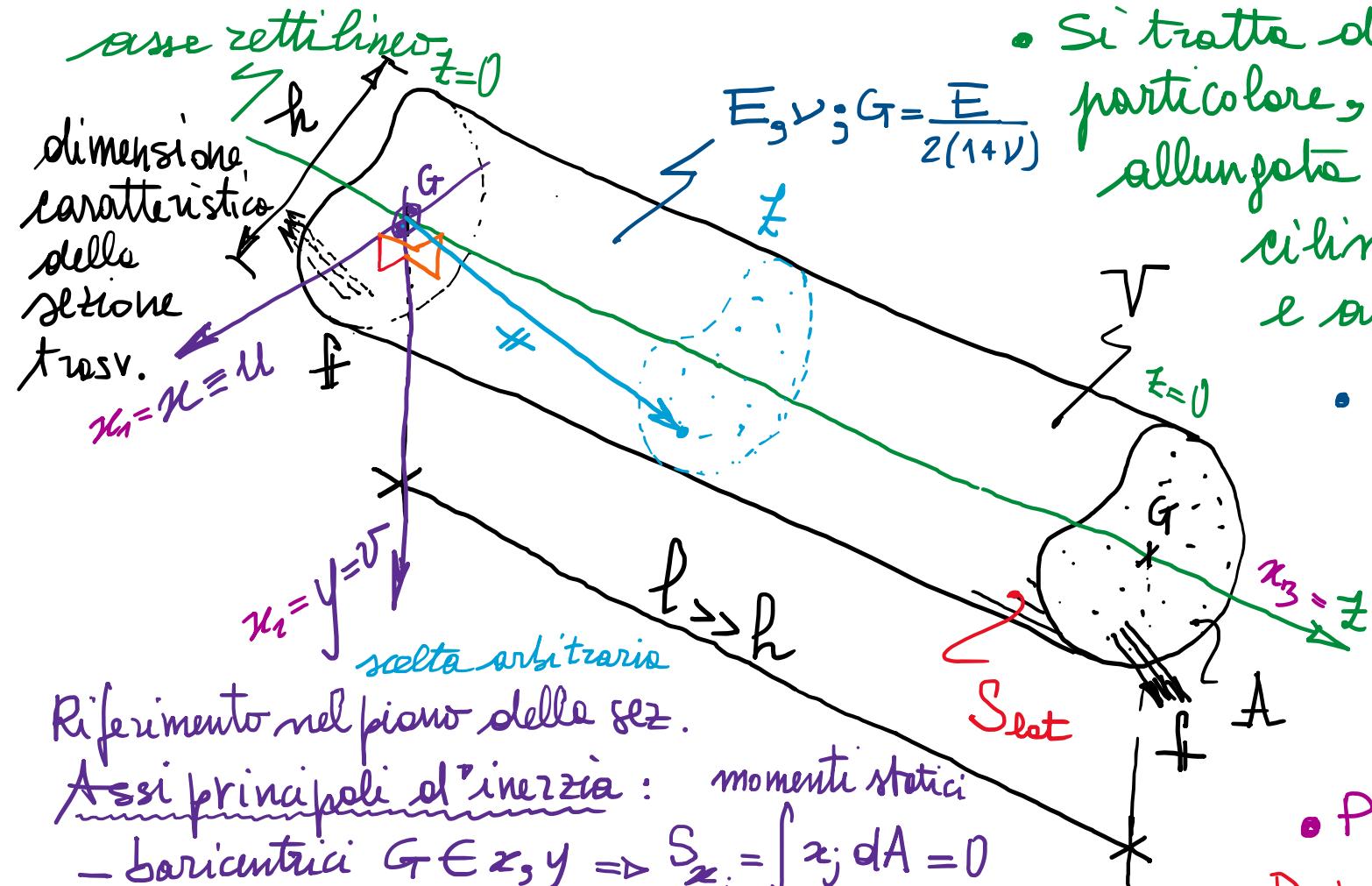
prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 19

# Problema di de Saint Venant ( $\sim 1855$ ) - Ipotesi e definizioni:

Casi di DSV:  
 $N, T, M, M_t$



Riferimento nel piano delle sez.

Aksi principali d'inerzia: momenti statici

$$\text{- baricentri} G \in z, y \Rightarrow S_{z_i} = \int_A x_i dA = 0$$

- mutuamente  $\perp$

$$\text{- coniugati} \Leftrightarrow I_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

(v. es. Belluzzi)

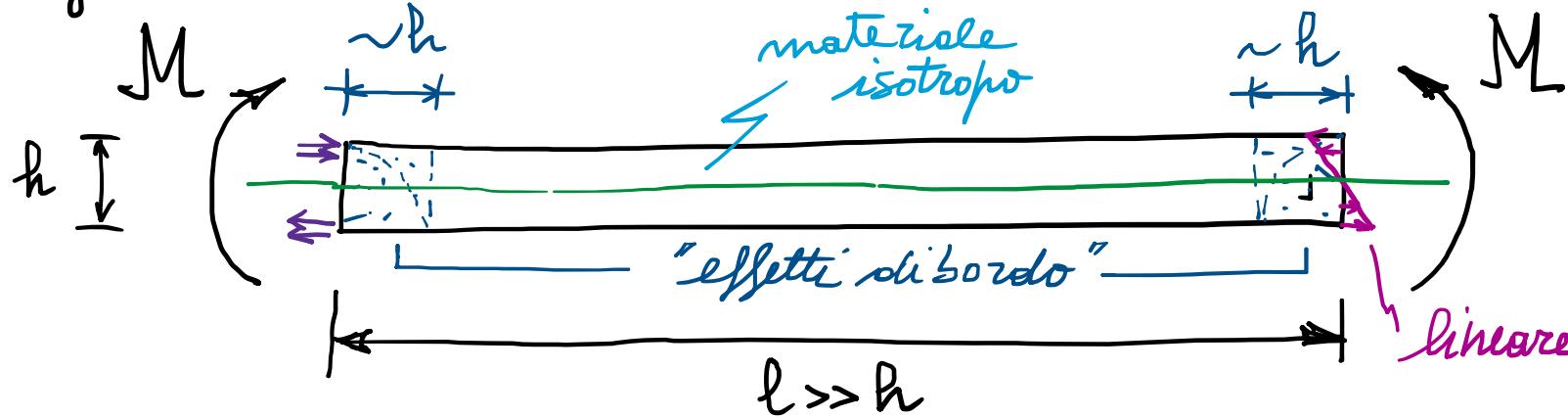
momento d'inerzia centrifugo

- Si tratta di un problema elastico lineare particolare, riguardante un solido di forme allungate ( $l > h$ ,  $l > 10h$ ), "tipo trave", cilindrico, a sezione costante di area  $A$  e asse rettilineo.
- Composto da materiale elastico lineare isotropo, omogeneo:  $E, \nu; G$  costanti in  $\mathbb{V}$ .
- Privo di vincoli esterni ( $S_j = \emptyset$ ) (spostamenti noti a meno di moti rigidì).
- Privo di forze di volume ( $\mathbb{F} = 0$  in  $\mathbb{V}$ ).
- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ( $f = 0$  su  $S_{\text{lat}}$ ).
- Soggetto a sole forze di superficie  $f$  agenti sulle basi, note in termini di risultanti e tali da formare un sistema auto-equilibrato

## Postulato di DSV :

- La reale distribuzione (non assegnate) delle forze di superficie sulle basi, e parità di risultanti, risulta ininfluente ai fini della risoluzione della risposta tensio-deformativa all'interno del prisma di DSV.

es. :  
caso  
di  
DSV  
della  
flessione

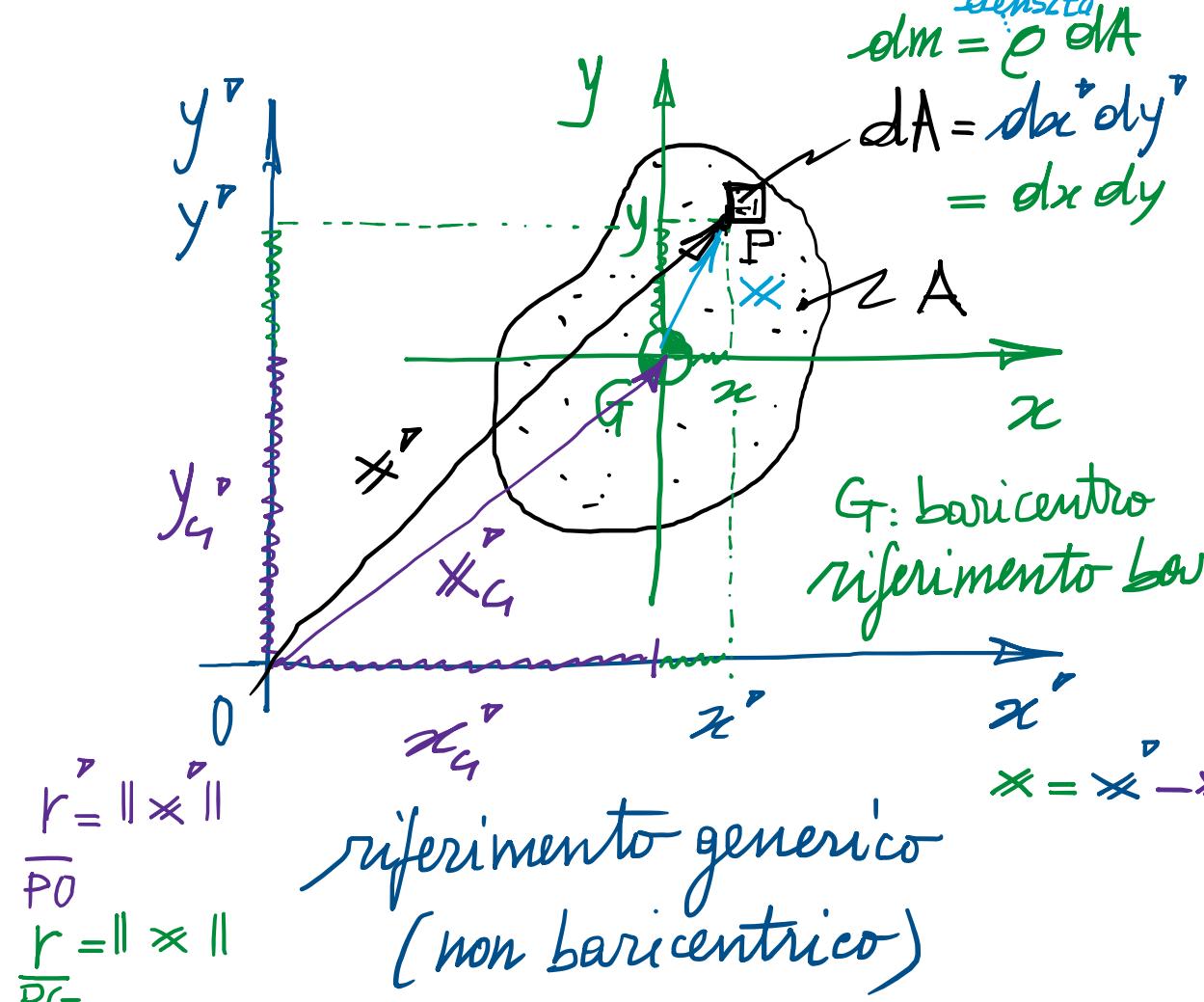


distribuz. f.a  
risultante nulla  
rispetto alle  
distribuz. in eccesso  
rispetto alle  
distribuz. in soluz.

distribuz. f.a  
risultante nulla  
potremo creare  
"effetti di bordo"  
localizzati ma  
sforzo nullo in quasi  
tutto il solido

- Ciò appare lecito, in quasi tutto il prisma, a meno di possibili "effetti di bordo" localizzati in corrispondenza delle basi (sezioni compatte).
- In pratica si potrebbe ipotizzare di applicare le forze di superficie sulle basi secondo le distribuzioni (magenta) previste dalla soluzione del problema stesso, in termini di sforzo.

Riciami sulla geometria delle aree (o delle masse)  $\rightarrow$  v. es. Belluzzi.



Trasformazione di coordinate  
per traslazione d'assi :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x_G + x \\ y' = y_G + y \end{array} \right. \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{x}_G + \vec{x}$$

vettoriale

componenti

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -x_G + x' = x' - x_G \\ y = -y_G + y' = y' - y_G \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

trasformazione inversa

- Si definiscono le proprietà geometriche della sezione trasversale seguenti.

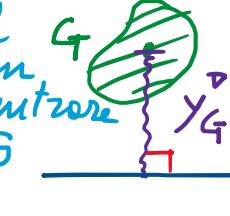
- $A = \int_A dA > 0$   $[L^2]$  Area della sezione trasversale (momento di ordine 0) d'inerzia

- $S_{x'} = \int_A y' dA$   $[L^3]$  Momento "statico" della sezione rispetto all'asse  $x'$  e all'asse  $y'$  (momenti di ordine 1)

$S_{y'} = \int_A x' dA \geq 0$  per assi baricentrici

$$\begin{cases} S_{x'} = A y_G \\ S_{y'} = A x_G \end{cases} \Rightarrow x_G = \frac{S_{y'}}{A}; y_G = \frac{S_{x'}}{A}$$

(Baricentro G è il luogo degli assi con  $S=0$ )  $G$  è il punto in cui si può concentrare  $A$  per ottenere  $S$



$I_{x'} = J_{x'} = \int_A y'^2 dA > 0$  Momento d'inerzia della sezione

- $I_{y'} = J_{y'} = \int_A x'^2 dA > 0$   $[L^4]$  rispetto all'asse  $x'$  e all'asse  $y'$  (momenti di ordine 2)

$I_{xy} = J_{xy} = \int_A x'y' dA \geq 0$  centrifugo rispetto agli assi  $x', y'$   
per assi coniugati

$I_0 = J_0 = \int_A r'^2 dA = \int_A (x'^2 + y'^2) dA = J_{x'} + J_{y'} > 0$  polare rispetto a 0

Teorema di trasposizione (per traslazione d'assi baricentrici e non)  
 i Huygens-Steiner

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}^*} &= \int_A \vec{x}\vec{y}^* dA = \int_A (\vec{x}_G + \vec{x})(\vec{y}_G + \vec{y}) dA \\
 &= \int_A \vec{x}_G \vec{y}_G^* dA + \int_A \vec{x} \vec{y} dA + \int_A \vec{x}_G \vec{y} dA + \int_A \vec{y}_G \vec{x} dA \\
 &= \vec{x}_G \vec{y}_G^* A + \mathbb{J}_{xy} + \cancel{\vec{x}_G \vec{x}} + \cancel{\vec{y}_G \vec{y}} \quad \text{se } \vec{x}, \vec{y} \text{ essi} \\
 &\quad \text{baricentrici} \quad (G \in \vec{x}, \vec{y})
 \end{aligned}$$

Pertanto :  $\mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}^*} = \mathbb{J}_{xy} + A \vec{x}_G \vec{y}_G^*$

$$\mathbb{J}_{x^*} = \mathbb{J}_x + A \vec{y}_G^2$$

$$\mathbb{J}_{y^*} = \mathbb{J}_y + A \vec{x}_G^2$$

$$\mathbb{J}_G = \mathbb{J}_G + A \vec{r}_G^2$$

analogamente :  
 $\mathbb{J}_x = \mathbb{J}_{x^*} - A \vec{y}_G^2$   
 $\mathbb{J}_y = \mathbb{J}_{y^*} - A \vec{x}_G^2$   
 $\mathbb{J}_G = \mathbb{J}_G - A \vec{r}_G^2$   
 trasf. da assi baricentrici a non baric.

$$\mathbb{J}_{xy} = \mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}^*} - A \vec{x}_G \vec{y}_G^*$$

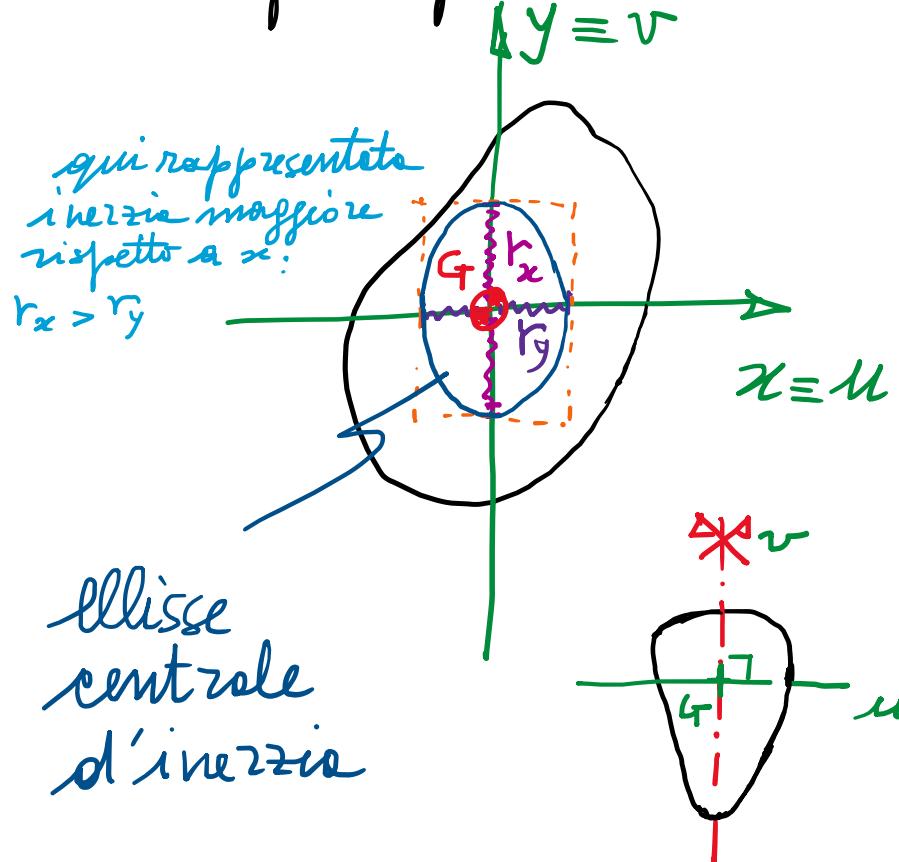
$$\mathbb{J}_x = \mathbb{J}_{x^*} - A \vec{y}_G^2$$

$$\mathbb{J}_y = \mathbb{J}_{y^*} - A \vec{x}_G^2$$

$$\mathbb{J}_G = \mathbb{J}_G - A \vec{r}_G^2$$

trasf. da assi non baricentrici a assi baric.

Assi principali d'inerzia



Ellisse centrale d'inerzia

N.B.: Se  $\exists$  asse di simmetrie rette, esso è esse principale d'inerzia, e l'altro asse è quello baricentrico ad esso perpendicolare.  
asse di sim.  $\Rightarrow$  asse principale

$J_{xy} = J_{uv} = 0$  (assi coniugati) (in generale che determina CNS per rotazione d'assi)

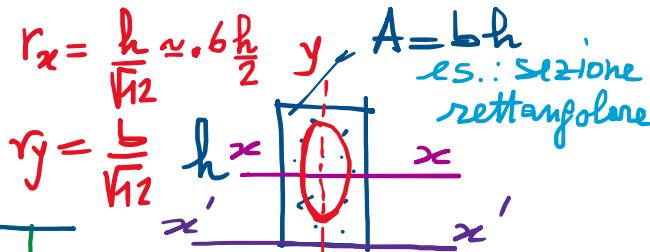
$J_u$  e  $J_v$  risultano il max e il min momento d'inerzia al variare di tutte le giaciture nel piano (rotazione d'assi).

Raggi giratori d'inerzia:

$$r_x = r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} ; \quad r_y = r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad [L]$$

Ellisse centrale d'inerzia delle sezioni:

$$\left(\frac{x}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x}\right)^2 = 1$$



Spesso figure composte  
de aree elementari  $A_i$

$$A = \sum_i A_i$$

$$J_x^* = \frac{1}{3} b h^3; \quad J_x = \frac{1}{12} b h^3$$