Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

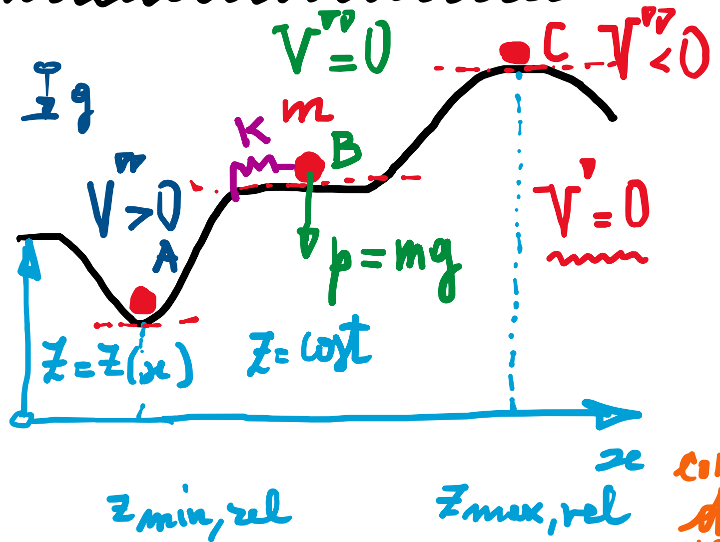
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture



Problema puramente posizionale (governato da energia potenziale $V(z(x)) = \underbrace{mg}_{P}\, z$ dipendente dalla sola coord. posizionale z): (concetto)

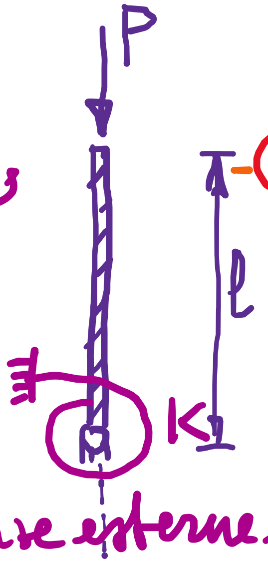
- A: buca dell'EP ove V è min ⇒ equil. STABILE
  In seguito a (piccola) perturbazione, il sistema tende a ritornarvi. (non abbandona).

conf.ne di equil.

- B: valore costante dell'EP ⇒ equil. INDIFFERENTE
  Il sistema non tende a restare né ad abbandon. la configurazione.
  separa A da C

- C: massimo dell'EP ⇒ equil. INSTABILE
  Il sistema tende ad abbandonare la conf.ne, a produrre energia cinetica, alla ricerca di una altra conf.ne di equilibrio stabile.

In generale, sono presenti anche elementi elastici, utili alla stabilizzazione



⇒ EPT: $V = \underbrace{V_e}_{\text{En. elastica } \mathcal{E}} + \underbrace{V_f}_{\text{E.P. forze esterne conserv.}}$

Th. di Dirichlet (sulla stabilità dell'equilibrio)

Una conf.ne di equil., di un sistema olonomo (leggi interna), con vincoli ideali, conservativo, è stabile, se ivi l'Energia Potenziale Totale (EPT) del sistema è minima (minimo locale): CS di stabilità

conf.ne (q variabili generalizzate) — sistema discreto MDOF

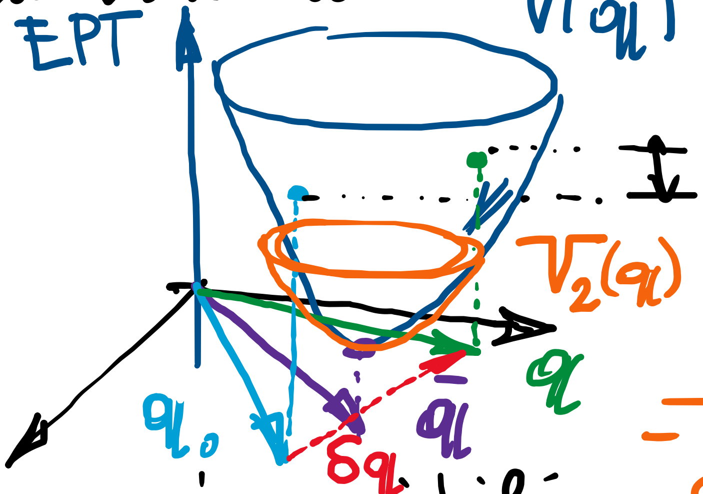
$\bar{q}$ equil. e $V(\bar{q})$ è min.] $\bar{q}$ è stabile

- Naturalmente, CN per avere una conf.ne di equilibrio con min. rel. dell'EPT, ivi l'EPT deve risultare stazionaria $\Rightarrow$ $\delta T = 0$. (variaz. prima)

Condiz. di staz. dell'EPT è CN di equilibrio $\Rightarrow$ fornisce le eq.ni di equilibrio.

- Dal p.to di vista della CS di stabilità, possiamo definire stabile un sistema in cui si applica e non stabile (stab. non garantita) se non $\Rightarrow$ Instabile.

Sistemi MDOF



q_i: spazio variabili generalizzate ad n dimensioni

q_0: conf.ne di riferimento (in genere equil.)

$\bar{q}$: conf.ne equilibrata (se di min => stabile)

q: conf.ne variata

Inquadramento

$q = q_0 + \delta q$: $\delta q = q - q_0$ (variazione di q)

$$\Delta V = V(q) - V(q_0) \pm \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}^T \delta q}_{\delta V} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta q^T \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q}\right|_{q_0} \delta q}_{\frac{1}{2}\delta^2 V} + \dots$$

sviluppo in serie di Taylor (arrestato al 2° ordine)

- Teoria del 2° ordine
- Effetti del 2° ordine

δV: variaz. prima $\sim q$

$\frac{1}{2}\delta^2 V$: variaz. seconda

$V_2(q)$, $\sim q^2$

$$\left(V(q) = V_e(q) + \underbrace{V_f(q)}_{-\mathcal{L}_{ef}} \right) = -P^T \delta q + \frac{1}{2} \delta q^T K \delta q$$

$$P = -\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}$$

vettore carichi esterni conservativi

$$K = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q}\right|_{q_0}$$

matrice di rigidezza (Hessiana)

NB: per min rel., $\Delta V > 0 \ \forall \delta q$, è necessario (CN) $\delta V = 0$, in modo da non avere dip. sul segno da δq.

- Condizione di stazionarietà di $V_2(q)$:

Analisi al 2° ordine

$q - q_0$

$$\frac{\partial V_2}{\partial q} = -\mathbb{P} + \mathbb{K}\,\delta q = 0 \Rightarrow K\,\delta q = \mathbb{P} \Rightarrow \bar{q} \text{ di equil.}$$

(CN di equil.)

eq. di equil. lineari

eq.ni di equil. (lineari)

- CS di stabilità (Dirichlet) – $\bar{q}$ è min. rel. $\frac{1}{2}\delta^2 V_{\bar{q}} = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_{\bar{q}}\,\delta q > 0$ $\quad \forall\, \delta q \neq 0$

$\mathbb{K}$ è matrice def. pos.

Proprietà algebriche di $\mathbb{K}$, valutata nelle conf.ni di equil. condiz. la stabilità.

- minori princ. > 0
- autovalori (reali) > 0
- det > 0 (det $= 0 \Rightarrow$ perdita di stabilità)

- Se $q_0 = \bar{q}$ (conf.ne di rif. è equil.)

$$\mathbb{P} = -\frac{\partial V}{\partial q}\bigg|_{q_0 = \bar{q}} \equiv 0 \Rightarrow \delta q = 0 \quad (\bar{q} = q_0)$$

- Nelle conf.ni equilibrate $\bar{q}$:

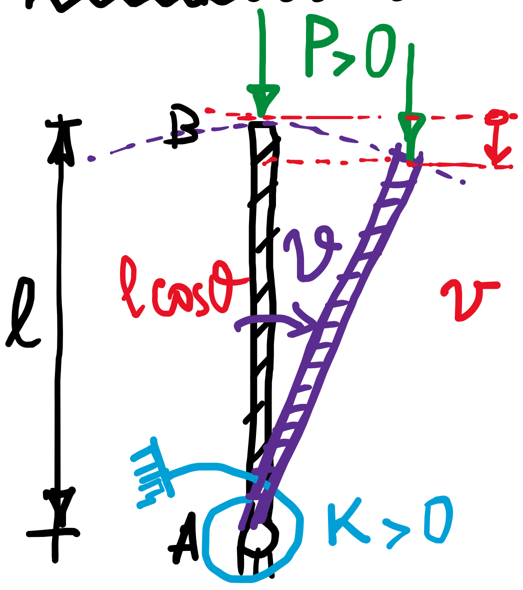
$$\delta V_{\bar{q}} = \frac{\partial V}{\partial q}\bigg|_{\bar{q}}^T \delta q = 0 \Rightarrow \Delta V_2 = \cancel{\delta V} + \frac{1}{2}\delta^2 V + \dots$$

Variaz. prima nulla

con segno legato alla variazione seconda

> 0 STABILITÀ

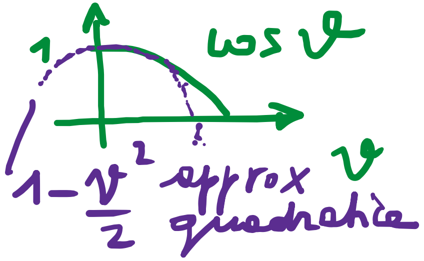
Esempio SDOF ($q_1 = \vartheta$)



$\vartheta = 0$, conf.ne di riferimento è di equil.

$V_e = \mathcal{E}$ ∪ $V_f = -\mathcal{L}_{ef}$

$$V(\vartheta) = \frac{1}{2}K\vartheta^2 - P\cdot\underbrace{\ell(1-\cos\vartheta)}_{v}$$



carico base P_0

EPT

$$= \underbrace{K}_{>0}\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - p(1-\cos\vartheta)\right) \qquad p = \frac{P\ell}{K} = \frac{P}{K/\ell} \Rightarrow P = p\,\frac{K}{\ell}$$

molt. dei carico

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = K\left(\frac{2}{2}\vartheta - p\sin\vartheta\right) \overset{\checkmark}{=} 0$$

condiz. di staz. (CN di equil.) ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} K\bar\vartheta &= P\ell\sin\bar\vartheta \\ \bar\vartheta &= p\sin\bar\vartheta \\ p(\vartheta) &= \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} \quad (\vartheta \neq 0) \end{aligned}}$$

eq.ni di equil.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = K(1 - p\cos\vartheta)$$

da valutare nelle $\bar\vartheta$ di equil.

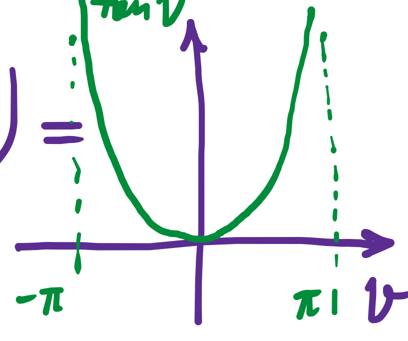
(studio del segno di $\frac{1}{2}\delta^2 V$)

= $\bar\vartheta = 0$: $K(1-p) \gtreqless 0$

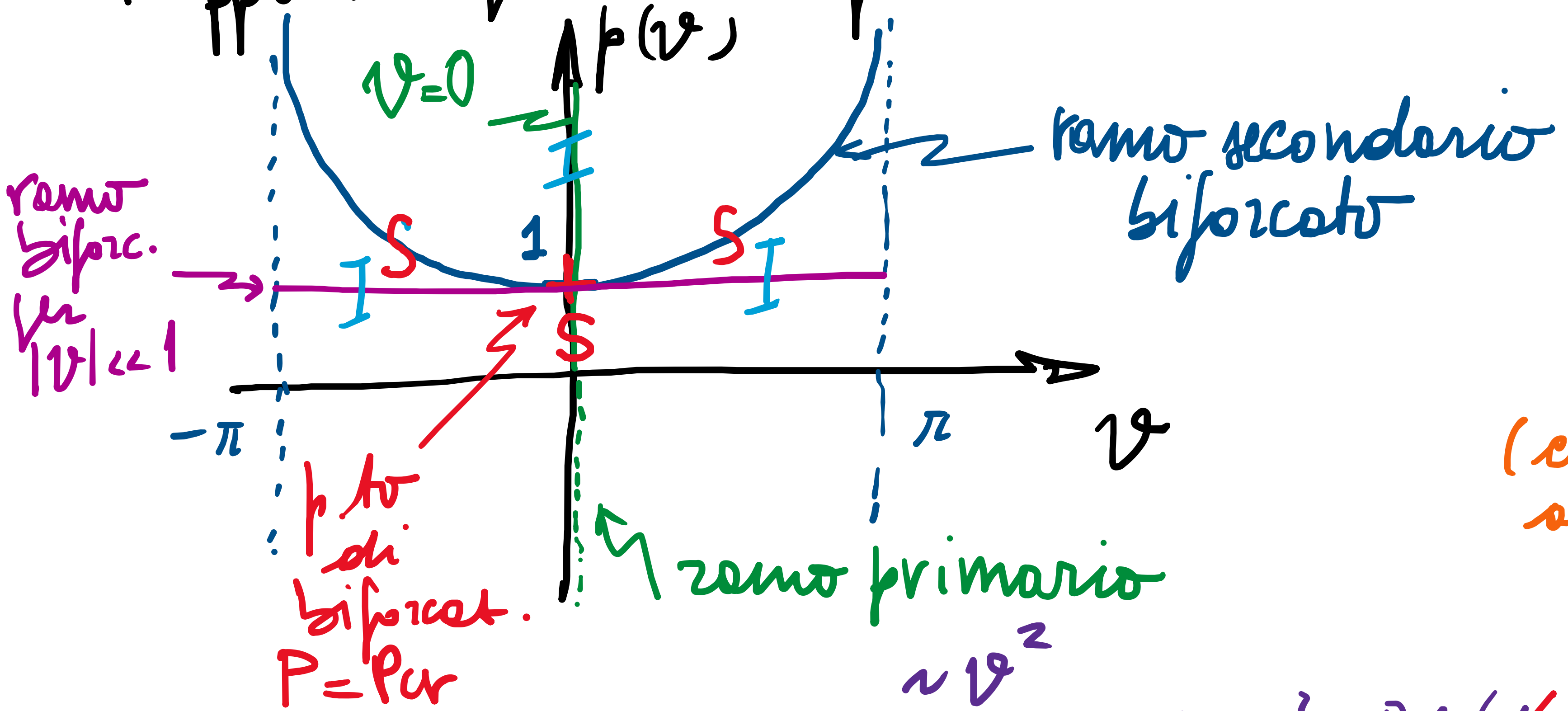
- $p < 1$ ∪ S
- $= 1$ — I
- > 1 ∩

= $\bar\vartheta$: $p(\bar\vartheta) = \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \rightarrow V''(\bar\vartheta) = K\left(1 - \frac{\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\vartheta\right) = K\left(1 - \frac{\vartheta}{\tan\vartheta}\right) > 0$

conf.ni stabili ($\vartheta \neq 0$)



Mappa dei percorsi di equilibrio:



N.B.: perdita di stabilità della conf.ne di equil. indef. $\vartheta=0$ per $p=1 \Rightarrow P=P_{cr}=\frac{K}{\ell}$

(come da analisi con approccio statico)

Analisi al 2° ordine: $V(\vartheta) \simeq V_2(\vartheta) = \frac{1}{2}K\vartheta^2 - P\ell\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{\vartheta^2}{2}\right)\right)$ "quadraticizzazione" di V

$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \dots \qquad \sim \vartheta^2$

$$= \frac{1}{2}K\vartheta^2 - P\ell\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{1}{2}(K-P\ell)\vartheta^2$$

spost. "geom. piccoli"

$$V'(\vartheta) = \frac{1}{\cancel{2}}(K-P\ell)\cancel{2}\,\vartheta = 0 \Rightarrow (K-P\ell)\vartheta = 0 \quad \begin{cases} K \neq P\ell, & \vartheta = 0 \\ K = P\ell, & \vartheta \text{ arb.} \end{cases}$$

eq.ne di equil. lin.

"linearizzazione" di V'

$$V''(\vartheta) = K - P\ell \gtreqless 0 \qquad \begin{matrix} K > P\ell \\ \boxed{K = P\ell} \\ K < P\ell \end{matrix}$$

perdita di stabilità ($P=P_{cr}$)

deriv. 2ª costante

SOMMARIO (Lez. 17)

- Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture $\Rightarrow$ EPT (V).
- Th. di Dirichlet (CS di stabilità $\Rightarrow$ EPT min. rel.)

  mentre CN di equil. $\Rightarrow$ EPT stazionaria
- Teoria del 2° ordine $\Rightarrow$ $V \simeq V_2$
  - Eq.ni di equil., da stazionarietà, linearizzate
  - Segno variazione seconda (se >0 $\Rightarrow$ stabile)
- Esempio SDOF
  - Scrittura dell'EPT
  - Equil. per condiz. di stazionarietà
  - Analisi di stabilità per studio segno variaz. 2ª

"geom." spost. "grandi"	"geom." spost "piccoli"
non-lineari	lineari
funzione	cost.

Next step: Cenno all'instabilità di sistemi reali (con imperfezioni)
$\Rightarrow$ transizione senza p.to di biforcazione.