

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

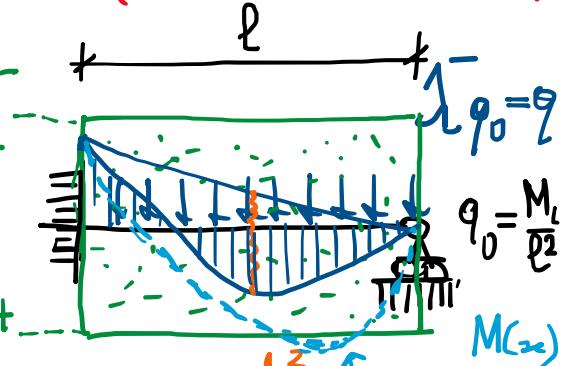
LEZIONE 26

# Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (Calcolo a rotture dei telai)

Volti a definire delle strategie di calcolo delle caratteristiche di collasso (metodi "diretti")

## DEFINIZIONI:

- Sistema di quantità statiche: carichi esterni, permanenti o  $\overset{\text{statico}}{\underset{\text{accidentali}}{\text{accidentali}}}$  (affetti da moltiplicatore  $\lambda$  dei carichi)  $\overset{\text{momento}}{\underset{\text{flettente}}{\text{M}_L = M_L^-}}$  e A.I. ( $M_{(x)}$ ):



staticamente •  $M_{(x)}$  in equilibrio coi carichi esterni ( $\lambda^-$ );

plasticamente •  $M_L^- \leq M_{(x)} \leq M_L^+$  (conformità plastiche).  $\Rightarrow$

Claasse di quantità  $\frac{q_0 l}{8}$  non conformi statiche all'interno delle quali si ricercano le caratteristiche di collasso.

- Sistema di quantità cinetiche: spostamenti e rotazioni

(in particolare plastiche, nelle CP) associabili a moltiplicatore cinematico  $\lambda^+$ , secondo bilancio energetico (de PLV), come se vi trattasse delle condizioni di collasso iniziente:

cineticamente • spost.  $y(x)$  e rotaz.  $\varphi_i$ : compatibili coi vincoli e tali

e che producano lavoro esterno positivo ( $\Delta_e > 0$ );

plasticamente • rotazioni plastiche  $\varphi_i^+ \geq 0$  ove  $M = M_L^+$  e  $\varphi_i^- \leq 0$  ove  $M_L = M_L^-$

ammisibili (tali da fornire dissipat. plastico  $D \geq 0$  nelle CP.).

$$S = \lambda_L \rightarrow M_{coll(x)} \in (\lambda^-, M_{(x)})$$



Claasse di quantità cinematiche dove si ricercano quelle di collasso.

$$S = \lambda_L, y_{L(x)} \in (\lambda^+, y_{(x)}, \varphi_i)$$

- Moltiplicatore cinematico associato (al meccanismo ammissibile):

Determinato come se fosse il meccanismo di collasso reale PLV

$$d_L = \underbrace{\sum_i \lambda^+ P_{i0} y_i + \int_i \lambda^+ q_{i0} y_i(x) dx}_{\lambda^+ L_{eo} \text{ carichi accidentali}} + \underbrace{\int_i q_i(x) y_i(x) dx}_{\text{Leg. gravit.}} = d_{ip} = D = \sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^- > 0$$

Leg. gravit. (dissipazione plastica  $\geq 0$ )  
 $L_{eo} > 0$  lavoro esterno dei carichi base

$$\Rightarrow \lambda^+ = \frac{D - \text{Leg.}}{L_{eo}} > 0$$

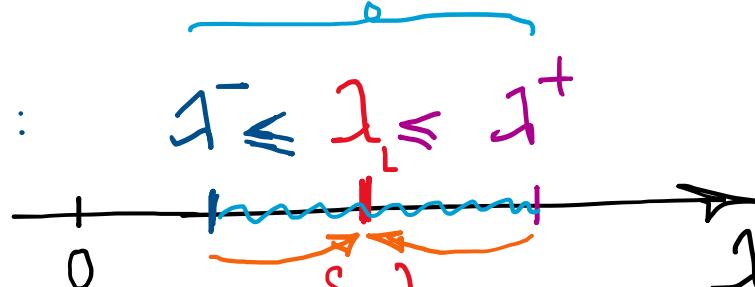
- Teorema statico ("lower-bound" o "soft Th.):

All'interno delle classi dei moltiplicatori statici  $\lambda^-$  staticamente ammissibili, il mult. di collasso  $\lambda_L$  è il mass. dei  $\lambda^-$ :

$$\lambda_L = \max \{ \lambda^- \}$$

- Teorema cinetico ("upper-bound" Th.):
- All'interno delle classi dei moltiplicatori cinematici  $\lambda^+$  cinem. ammissibili, il mult. di collasso  $\lambda_L$  è il min. dei  $\lambda^+$ :

$$\lambda_L = \min \{ \lambda^+ \}$$



delimitazione

bilaterale del moltiplicatore limite

Teorema misto:

Per coincidenza tra moltiplicatore statico  $\lambda^-$  e moltiplic. cin.  $\lambda^+$ , allora  $\lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$ , e  $\lambda_L$  risulta individuato.

## Dimostrazione ( Attraverso PLV : $\lambda_i = f_i$ )

quantità statiche e collasso

Th. statico : "lower bound"

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_{L,i}^+ \varphi_i^+ + M_{L,i}^- \varphi_i^-$$

equazione che consente di calcolare  $\lambda_L$   
dato il meccanismo di collasso

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_i^+ \varphi_i^+ + M_i^- \varphi_i^-$$

quantità cinematiche e collasso

quantità statiche simm. ( $\lambda^-$ )

$$(\lambda_L - \lambda^-) \sum_i P_{i0} y_i = \sum_i (M_{L,i}^+ - M_i^+) \varphi_i^+ + (M_{L,i}^- - M_i^-) \varphi_i^- \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^- \leq \lambda_L}$$

$\lambda_L = \max\{\lambda^-\}$

Th. cinematico:  
"upper bound"

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_{L,i}^+ \varphi_i^+ + M_{L,i}^- \varphi_i^-$$

quantità statiche rel.  
al cinem. amm. ( $\lambda^+$ )

equazione che consente di calcolare  $\lambda^+$   
dato il meccanismo cinem. ammesso

$$\sum_i P_{i0} y_i = \sum_i M_i^+ \varphi_i^+ + M_i^- \varphi_i^-$$

quantità statiche e collasso

$$(\lambda^+ - \lambda_L) \sum_i P_{i0} y_i = \sum_i (M_{L,i}^+ - M_i^+) \varphi_i^+ + (M_{L,i}^- - M_i^-) \varphi_i^- \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_L \leq \lambda^+}$$

$\lambda^+ = \min\{\lambda^+\}$

## Corollari:

- Le caratteristiche di collasso ( $I_L$ ,  $M_{coll}(x)$ ,  $Y_{coll}(x)$ ) non dipendono dalle proprietà elastiche (in quanto esse non intervengono nelle equazioni viste, oltre ad individuare delle stime delle caratteristiche a collasso stesse)  $\Rightarrow$  tip. di comportamento rigido-plastico (non per risposte evolutive).
- le presenze di reazioni, carimenti ricambi, stati tensio-deformativi (es. spolti residui) ~~per~~ stessi (all'imposizione di carichi incidentali, amplificati da  $I_L$ ) non influenzano la determinazione del moltiplicatore  $I_L$  (in quanto non entrano nelle scritture delle eq. in viste).

## Strumenti operativi (metodi "diretti")

- Metodi di calcolo a collasso "manuali" che consentono la determinazione delle caratteristiche a collasso per esempi specifici (travi, telai).
- Metodi di calcolo "automatico" (implementazione) nell'ambito delle Programmazione Matematica (risoluz. di pb. di max. o di min.). Esempio metodo del simplex.

## SOMMARIO (Lec. 26)

- Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite, alla base del Calcolo e Rotta (dei telai), volto alla determinazione (diretta) delle caratteristiche di collasso.
- Definizioni: classi staticamente e cinematicamente ammissibili (entro le quali si ricercano le condizioni di collasso).
- Teorema statico: fornisce una delimitazione inferiore del molt. limite:  $\lambda^- \leq \lambda_L$
- Teorema cinematico: " " " superiore " " " :  $\lambda_L \leq \lambda^+$
- Teorema misto: se le delimitazioni <sup>"forchette"</sup> bilaterale si stringe a zero, il molt. di collasso risulta individuato  $\Rightarrow \lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$ .
- Dimostrazione via PLV (indip. da parametri destinati e effetti anelastici progressi).
- Metodi detti (statico/cinematico/misto): sulla base dei Th. visti divengono strumenti operativi per il calcolo ("monusle" o "automotiv") delle caratteristiche di collasso plastico.

Next step: Esempi (travi e telai), con determinazione o stima delle caratteristiche a collasso ( $\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$ , momento a collasso, meccanismo plastico).