Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

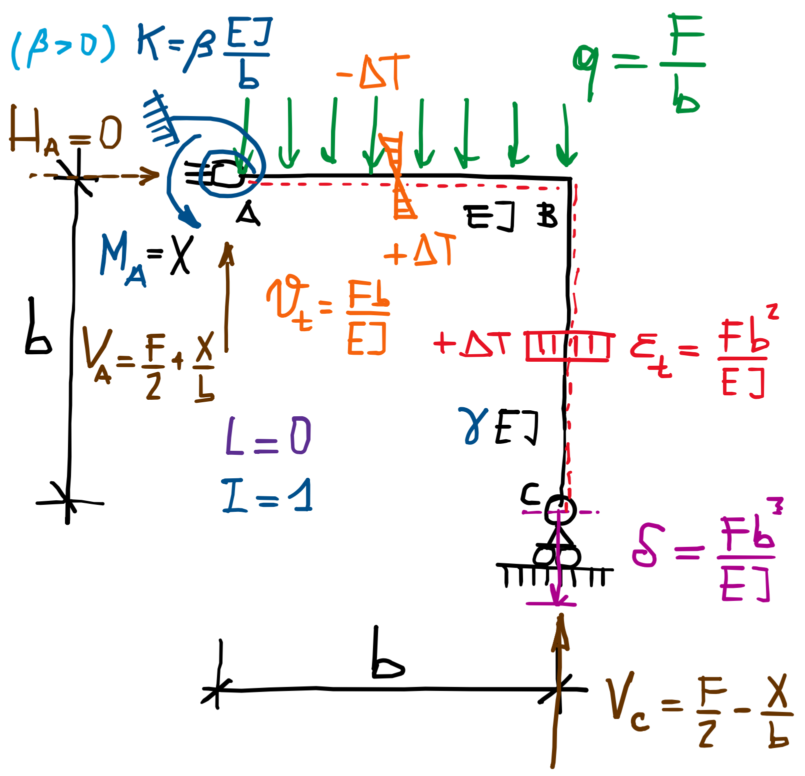
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

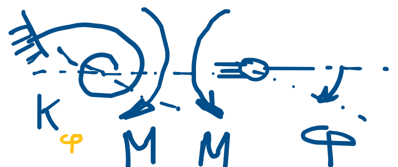
LEZIONE 08

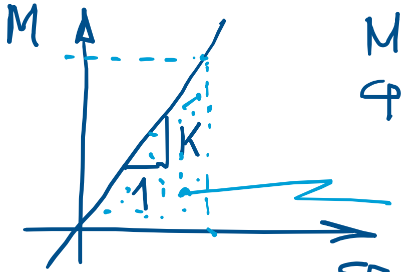
Soluzione di strutture staticamente indeterminate (tramite PLV ⇒ PFV, CS di congruenza)



Dati:

- carico uniformemente ripartito $[q]=\frac{[F]}{[L]}$ $\quad q\sim\frac{F}{b}$
- molla elastica (lineare) rotazionale ⇒ vincolo cedevole elastic.



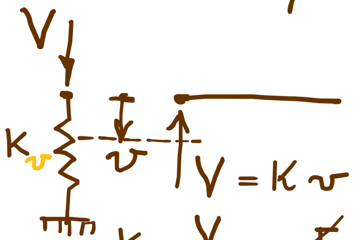


$M=K\varphi$ Legge di Hooke

$\varphi=\frac{1}{K}M$

$\mathcal{E}=\frac{1}{2}M\varphi=\begin{cases}\frac{1}{2}K\varphi^2\\ \frac{1}{2}\frac{1}{K}M^2\end{cases}>0$ energia elastica

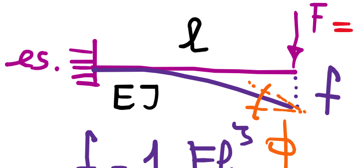
similmente per molla elongazionale



$V=Kv$

$K=\frac{V}{v}\sim\frac{\cancel{F}}{\frac{\cancel{F}b^3}{EJ}}=\frac{EJ}{b^3}$

es.



$f_1=\frac{1}{3}\frac{F\ell^3}{EJ}$ coeff. di influenza

$\phi_1=\frac{1}{2}\frac{F\ell^2}{EJ}$

$K=\frac{M}{\varphi}\sim\frac{\cancel{Fb}}{\frac{\cancel{Fb}^2}{EJ}}=\frac{EJ}{b}$

rigidezza elastica >0

- cedimento vincolare (permanente, anelastico) $\delta\sim\frac{Fb^3}{EJ}$
- deformazione termica uniforme $\varepsilon_t\sim\frac{Fb^2}{EJ}$
- curvatura termica // (lungo AB) $\vartheta_t\sim\frac{Fb}{EJ}$ come per $\chi_e=\frac{M}{EJ}$

Equazioni di equilibrio:

$\sum F_x=0 \Rightarrow H_A=0$

$\sum M_c=0 \Rightarrow V_A=\frac{F}{2}+\frac{M_A}{b}$

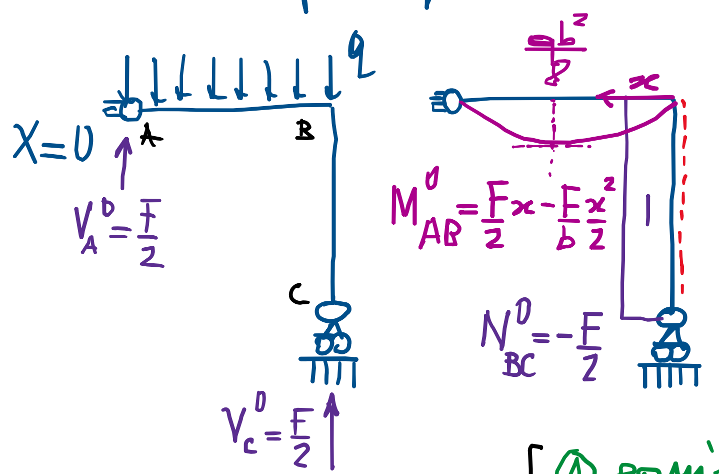
$\sum M_A=0 \Rightarrow V_c=\frac{F}{2}-\frac{M_A}{b}$

$RV=RV(X)$

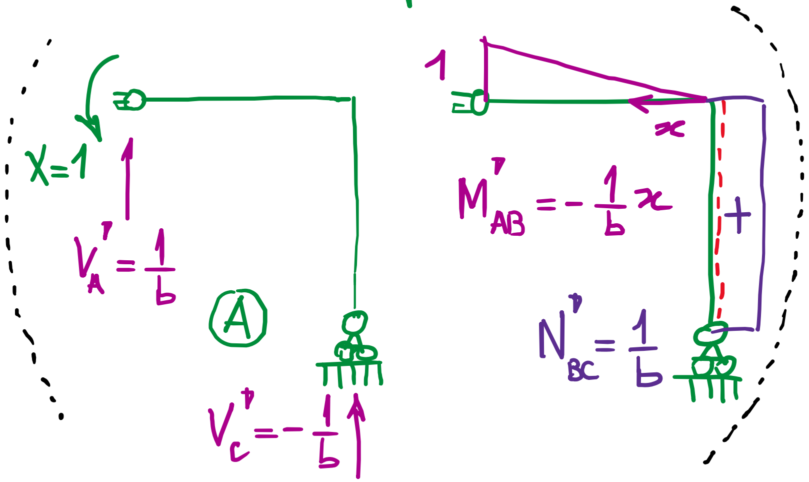
$(\sum F_y=0 \checkmark \; V_A+V_c=F)$ ↑ scelta inc. iperstatica X (metodo delle forze) ⇒ eq.ne di congruenza $\varphi_A=X/K$

Soluzione mediante PLV (PFV)

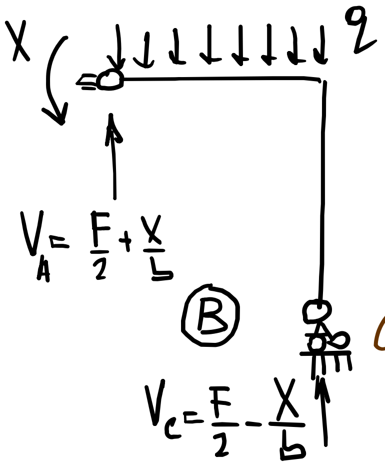
• Struttura principale isostatica • Struttura fittizia • Struttura reale



$+X$



$=$



PSE

$$\begin{cases} RV = RV^0 + X\,RV^1 \\ AI = AI^0 + X\,AI^1 \end{cases}$$ (quantità statiche)

• Scrittura del PFV: $\left\{\begin{array}{l} \text{(A) equil.} \\ d_e^{AB} = d_i^{AB} \end{array}\right. \Rightarrow$ (B) congruente

$$\underbrace{\frac{1}{b}\cancel{v_A}^{\,0} + \left(-\frac{1}{b}\right)(-\delta) + 1\left(-\frac{X}{K}\right)}_{\text{cedimenti vincolari}} = \int_{Str} M^1 \underbrace{\frac{(M^0+XM^1)\,ds}{EJ}}_{d\varphi_e \text{ reale}} + \underbrace{\int_B^C N^1 \varepsilon_t\,ds + \int_A^B M^1 \vartheta_t\,ds}_{\text{effetti termici}}$$

⇝ eq.ne di congruenza in X

$$X = -\frac{\int_{Str}\frac{M^1M^0ds}{EJ} - \frac{\delta}{b} + \int_B^C N^1\varepsilon_t ds + \int_A^B M^1\vartheta_t ds}{\int_{Str}\frac{M^{1\,2}ds}{EJ} + \frac{1}{K}} = -\frac{-\frac{1}{24}\frac{Fb^2}{EJ} - \cancel{\frac{Fb^2}{EJ}} + \cancel{\frac{1}{b}\frac{Fb^2}{EJ}X} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{b}}b^{\cancel{2}}\frac{Fb}{EJ}\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\frac{b}{EJ} + \frac{1}{\beta}\frac{b}{EJ}} =$$

$\beta \to 0$, $X \to 0$

$\beta \to \infty$, $X \to \frac{13}{8}Fb$

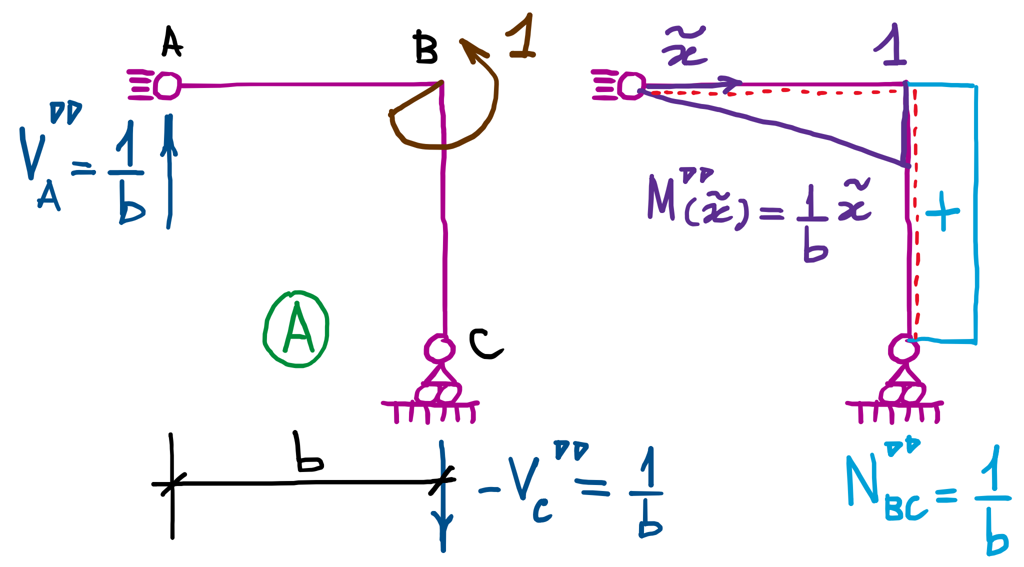
$$= \frac{\frac{13}{24}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{\beta}}\;\frac{\frac{Fb^{\cancel{2}}}{\cancel{EJ}}}{\frac{\cancel{b}}{\cancel{EJ}}} = \frac{13}{\cancel{24}\,8}\,\frac{\cancel{3}\beta}{3+\beta}Fb = \boxed{\frac{13}{8}\,\frac{\beta}{3+\beta}Fb = X}$$

$\rightarrow V_A = \frac{1}{8}\frac{12+17\beta}{3+\beta}F$, $V_C = \frac{3}{8}\frac{4-3\beta}{3+\beta}F$ ⇝ N.B.: $V_C \le 0$ per $\beta \ge \frac{4}{3}$

- <u>Calcolo di componenti di spostamento</u>, a valle del calcolo dell'incognita iperstatica X e avendo quindi note $RV = RV(X)$ e $AI = AI(X)$ finali, per il valore di X trovato, tale da imporre la congruenza, in corrispondenza del gdv ritenuto iperstatico, mediante scrittura del PLV (PFV, quale CS di congruenza).

<u>Esempio</u>: calcolo di φ_B (utile a rappresentare la deformata qualitativa; si noti che B risulta nodo "fisso", cioè con $u_B = v_B = 0$)

- Nuova scrittura del PLV, con ulteriore struttura fittizia (o ausiliaria, virtuale), avente solo una coppia unitaria in B:



PFV (B str. reale): M finale, $M(\tilde{x}) = -X + V_A \tilde{x} - \frac{q\tilde{x}^2}{2}$ con X, V_A finali

$$1\,\varphi_B + \frac{1}{b}\,\delta = \int_{str} M^{\triangleright\triangleright}\,\frac{\overbrace{(M^0 + X M^{\triangleright})}^{\text{M finale}}}{EJ}\,ds + \int_A^B M^{\triangleright\triangleright}\,\vartheta_t\,ds + \int_B^C N^{\triangleright\triangleright}\,\varepsilon_t\,ds$$

Risulta: $\varphi_B = \frac{13}{48}\,\frac{6+\beta}{3+\beta}\,\frac{Fb^2}{EJ}$ (rotazione antioraria)

Mentre: $\varphi_A = -\frac{X}{K} = -\frac{13}{6\cdot 8}\,\frac{6\cdot 1}{3+\beta}\,\frac{Fb^2}{EJ}$ (" oraria, $\varphi_B > |\varphi_A|$ $(\beta > 0)$)

Quindi, per moto rigido BC $(+\Delta\ell_t^{BC})$: $u_C = \varphi_B\, b$, $v_C = -\delta$