

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 20

## Esempio 3DOF - Deformate critiche

Eq. ni di equil. (de staz. stell'EPT  $\nabla_2(\vartheta)$ ),  $|V_i| \ll 1 \sim V_i^2$

$$(1) \begin{cases} (3-p)V_1 - V_2 = 0 \\ -V_1 + (2-p)V_2 - V_3 = 0 \\ -V_2 + (1-\frac{p}{2})V_3 = 0 \end{cases}$$

lineariz.  
 $V_i^2$

$$q_i = \dot{\vartheta}_i$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix}$$

$$K_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, K_G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P = p \frac{K}{l}$$

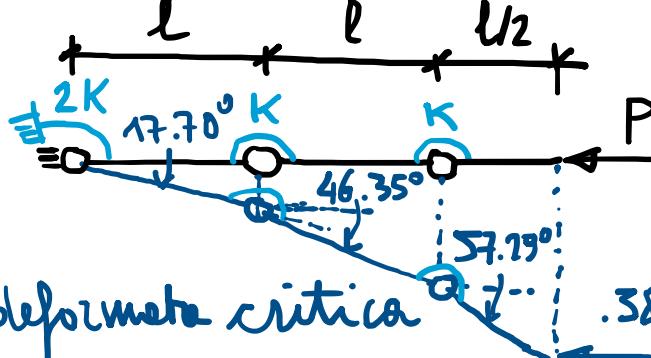
carichi critici:  $\det(K) = 0 \Rightarrow p_i^*$

Deformate critiche associate ai  $p_i^*$   $\Rightarrow \delta q_i^* = q_i^* - q_0$

$$\text{Dalla (1)} \Rightarrow V_1 = \frac{V_2}{3-p} = \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} V_3$$

$$\text{Dalla (3)} \Rightarrow V_2 = (1-\frac{p}{2})V_3 \div \frac{2-p}{2} V_3$$

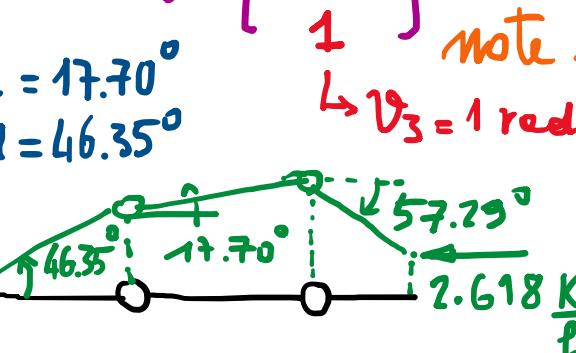
• 1° carico critico ( $p_1^* = .3820$ ):  $V_1 = .3090 \text{ rad} = 17.70^\circ$   
 $V_2 = .8090 \text{ rad} = 46.35^\circ$



N.B.  $\dot{\vartheta}_1 \approx 0$   
 el 1° ord.  
 $(\cos \vartheta_i \approx 1)$   
 $\sin \vartheta_i \approx \dot{\vartheta}_i$

$$.3820 \frac{K}{l} = P_{cr,E}$$

$$\delta q_i^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} \\ \frac{2-p}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$



Alternativamente:  $K \delta q_i = 0$

$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*$$

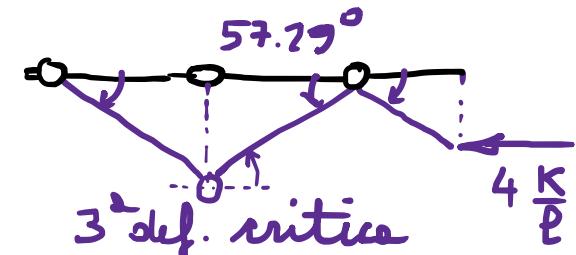
• agli autovetori generalizzati  
 $\Rightarrow p_i^*$  autovetori

$\delta q_i^*$  autovettori

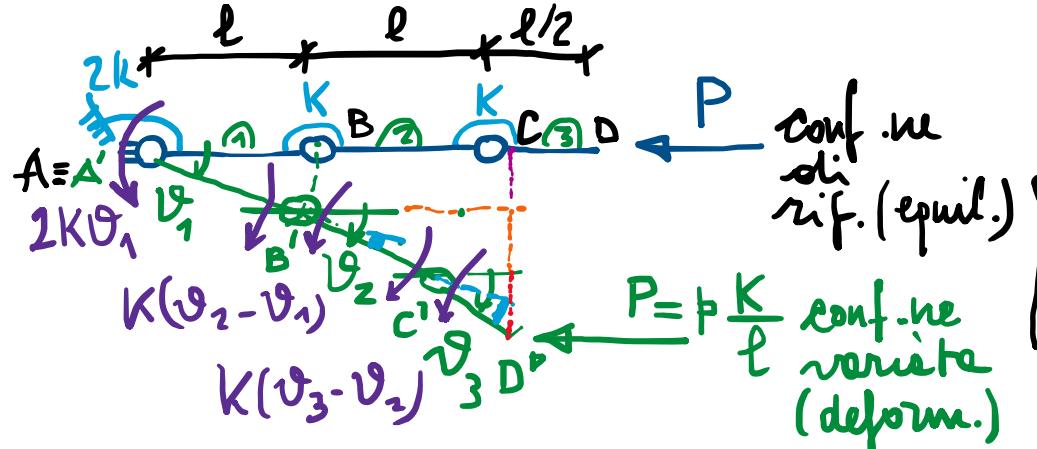
note a mani di sost. arbitraria

$$\hookrightarrow V_3 = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ$$

• Analogam. per  $p_2^* = p_3^*$ :



Approccio statico: scritture dirette delle eq.m di equilibrio varietà (nelle conf. h def.)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_C^3 = 0 \Rightarrow K(v_3 - v_2) - P \frac{l}{2} \sin v_3 = 0 \\ \sum M_B^{3+2} = 0 \Rightarrow K(v_2 - v_1) - P \left( \frac{l}{2} \sin v_3 + l \sin v_2 \right) = 0 \\ \sum M_A^{3+2+1} = 0 \Rightarrow 2Kv_1 - P \left( \frac{l}{2} \sin v_3 + l \sin v_2 + l \sin v_1 \right) = 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$  3 eq.  
 $\Leftrightarrow$  2 + 3 eq.  
 $\Leftrightarrow$  1 + 2 + 3 eq.

eq.m di equil. non-lineari (non-lin. geometriche)

Spost. "geometricamente piccoli"  $|v_i| \ll 1 \Rightarrow \sin v_i \approx v_i$ : eq.m linearizzate

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_2 + (1-p) v_3 = 0 \\ -v_1 + (1-p) v_2 - p v_3 = 0 \\ (2-p)v_1 - p v_2 - p v_3 = 0 \end{array} \right.$$

conf. ne di rif. equil.

$$\tilde{\mathbf{K}} \delta q = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{K}}_E - p \tilde{\mathbf{K}}_G$$

N.B.: bracci di leva di P  
non nulli al 1° ordine  
( $\sin v_i \approx v_i$ )

Criteri critici:

$$- \det(\tilde{\mathbf{K}}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$- \tilde{\mathbf{K}}_E \delta q_i^* = p_i^* \tilde{\mathbf{K}}_G \delta q_L^* \Rightarrow \text{autovel. autovett.}$$

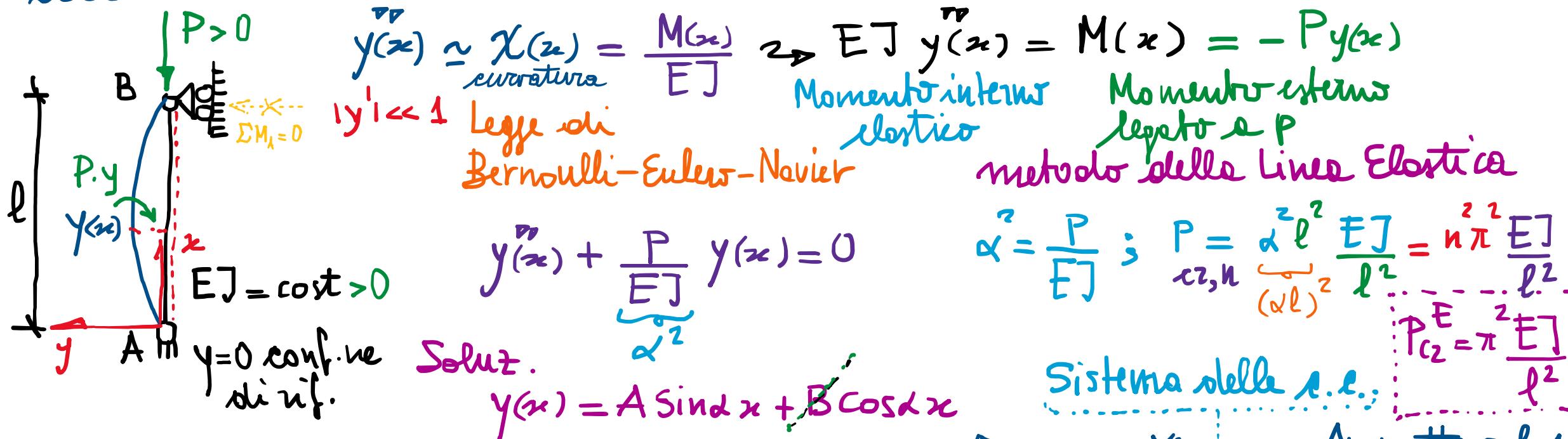
coh identici risultati

N.B.  $\tilde{\mathbf{K}}$  de approccio statico può differire da  $\mathbf{K}$  de approccio energetico (sim.) ma con le stesse proprietà algebriche sottostanti.

# Sistemi continui (aste semplicemente compresse deformabili elasticamente flessionali.)

Aste di Euler (~1750) - Approssimazione statica

nelle conf. ne def.



r.e. (scrittura e impostazione)

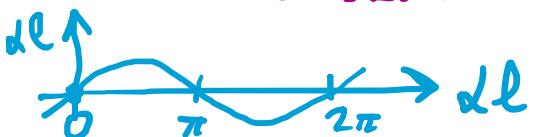
$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow \\ y(l) = 0 \rightarrow A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0 \end{cases}$$

$$(A \sin \alpha l) A = 0 \quad \text{and} \quad \sin \alpha l \neq 0 \rightarrow A = 0 \quad (\gamma \equiv 0)$$

$$\sin \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = n\pi; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$\det D = -\sin \alpha l = 0$$



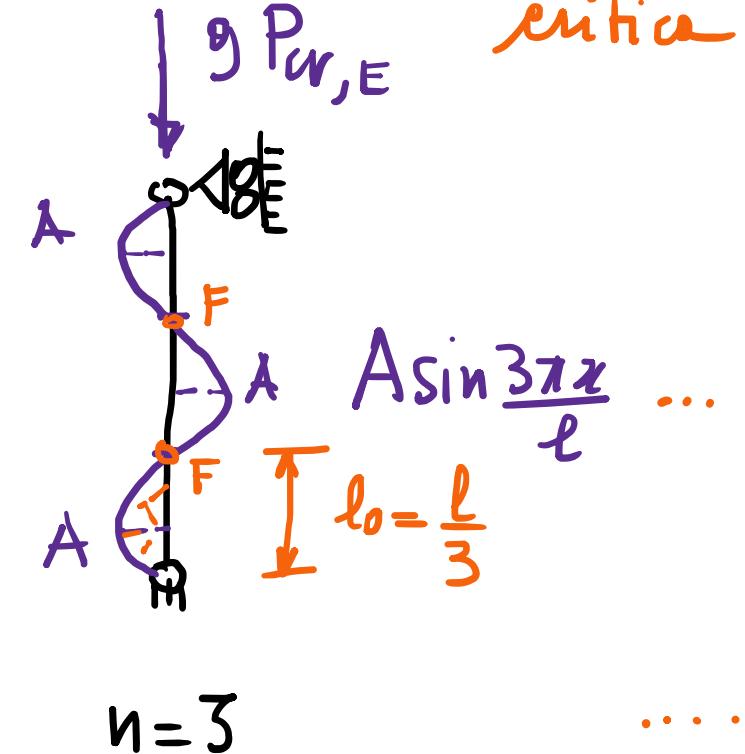
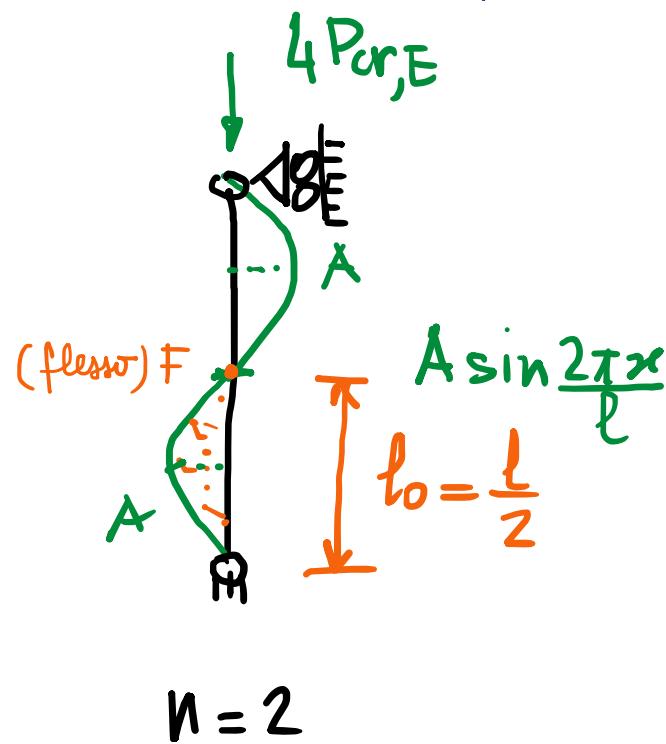
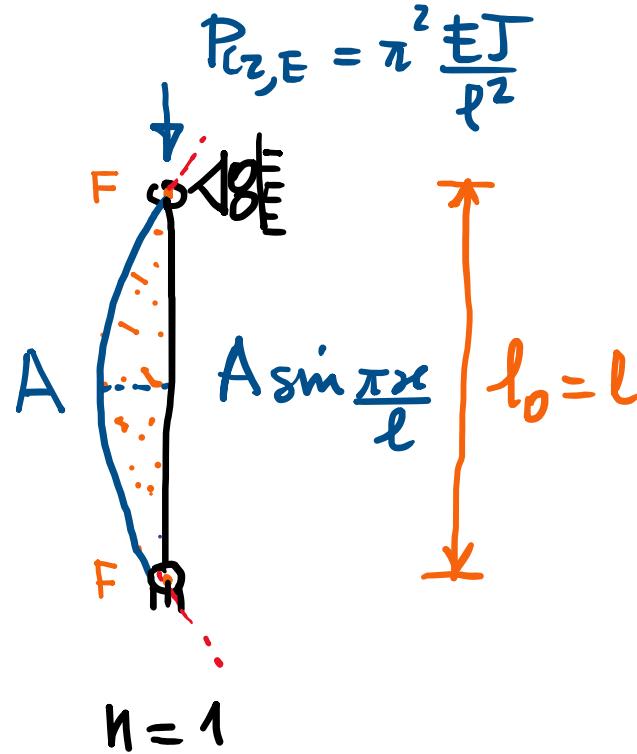
Ammette soluz. non banali

$\alpha \neq 0$   
se  $D$  sing.

carichi critici

$$P_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 E J}{l^2} = \pi^2 E J \frac{1}{\left(\frac{l}{n}\right)^2}$$

$\simeq 10$



$$l_{0,n} = \frac{l}{n}$$

lunghezza di libere inflessione

$y_{cr,n}(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$  defomate critiche

distanze tra due punti  
di flesso consecutivi  
delle deform.  
critica

- Successive generalizzazioni per altre condizioni di vincolo (el. contorno).

## Concetti fondamentali :

- Esempio 3-DOF :

- determinazione delle deformate critiche  $\delta q_i^*$

da soluzione del sistema omogeneo

$K \delta q = 0$ , in presenza di singolarità di  $K$  per  $p = p_i^+$ .

da soluzione del ps. generalizzato agli autovalori

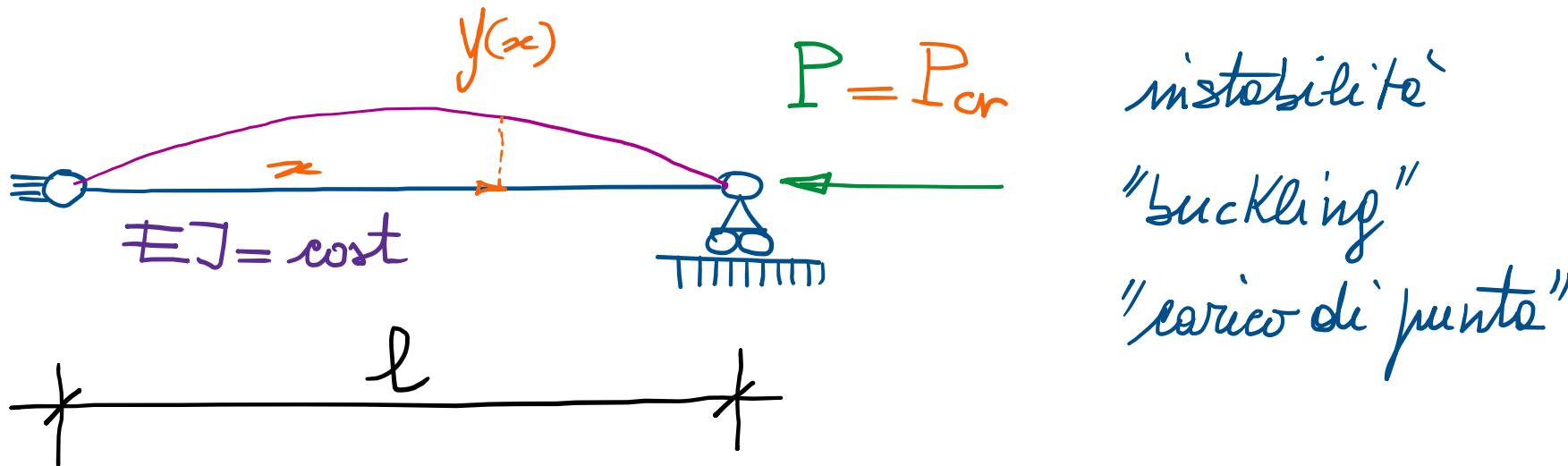
$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*.$$

- analisi tramite approccio statico:

scrittura diretta delle equazioni di equilibrio, nello stato di deformazione, con linearizzazione per spostamenti "geometricamente piccoli" (coerentemente con l'analisi al 2° ordine per  $V_1 \approx V_2$ ) e studio delle proprietà algebriche del sistema ottenuto.

- L'approccio statico appare concettualmente il più semplice, e conveniente, anche dal punto di vista metodologico, in quanto contempla la (sola) scrittura delle eq. ni di equilibrio (nella configurazione deformata, in particolare per spostamenti "geometricamente piccoli", tali da indurre ad eq. ni lineari, di immediata analisi dal punto di vista algebrico), individuando i cari critici quali punti di biforcazione dei percorsi di equilibrio.
- L'esistenza di soluzioni biforcate segnala poi la perdita di stabilità della conf. ne di riferimento, la quale definisce le condizioni di lavoro ordinarie del sistema strutturale, definendo così i livelli tollerabili dei carichi (pre-critici) ai fini pratici.

- Sistemi continui ( $\Rightarrow$  Aste di Euler) :
- sistemi elastici, deformabili flessionalmente, soggetti a carichi di compressione (aste semplicemente compresse).



instabilità'

"buckling"

"carico di punta"

$$P_{\text{cr}} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$\uparrow$   
 $\downarrow$

$\approx 10$

$J_0$  generizz.

- analisi tramite "approssimazione statica" (equilibrio nelle confe. deformato).

## SOMMARIO (Lec. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approssimazione statica: scrittura diretta delle eq. di equilibrio nella configurazione deformata.
  - non-lineari per spost. finiti.
  - lineari per spost. geometricamente piccoli ( $\sin \theta_i \approx \nu_i$ ).
  - Eq. di risultato comb. lineare di quelle dei staz. di EPT<sub>2</sub>, con matrice di rigidezze  $\bar{K}$  con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Asta di Euler (con approssimazione statica) [eq. ne LT nelle conf. ne deform.].
- Carichi critici, deformate critiche, lunghezza di libera inflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, se non si telai, formule di Newmark, verifica di stabilità.