

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

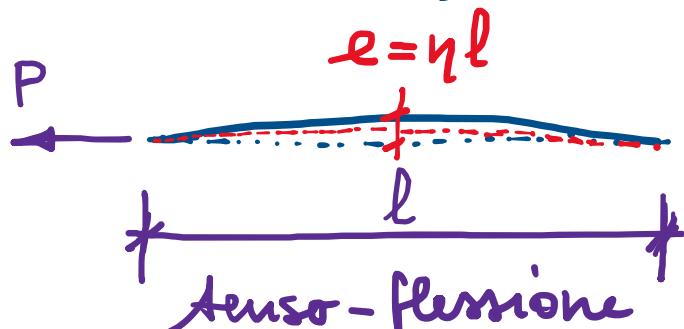
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

Instabilità di sistemi reali (effetto delle imperfezioni)

- Sistemi reali possono generalmente manifestare imperfezioni: astre non perfettamente rettilinee, sezione trasversale non omogenee, materiale con difetti e disomogeneità, carico non perfett. centrato, vincoli cedevoli, ecc.



tensio-flessione



(tende a rittificare)

.... non sensibile

$$\eta = \frac{e}{l} \ll 1$$

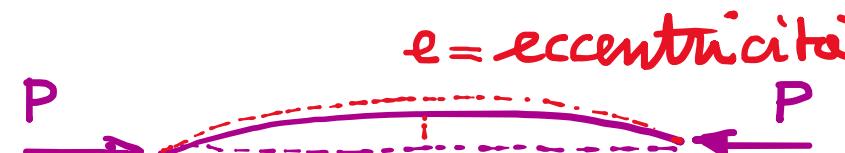
$\sim 1\%, 5\%$

(es. curvatura)

parametro di imperf.
geometrica

Sistema reale
con

condizione di
carico



presso-flessione



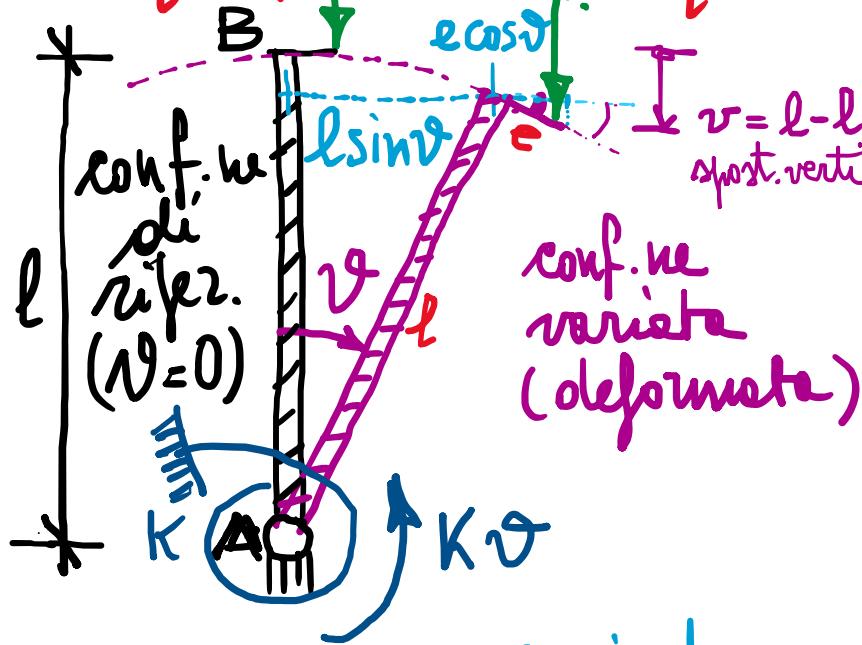
$$M = Pe$$

(tende ad esaltare l'imp.)

..... che può risultare sensibile
alle presenze di imperfezioni
e consigliare la stabilità

Esempio SDOF con imperfezione (eccentricità del carico di compressione).

$$e = \eta l + P > 0$$



$$P = p \frac{K}{l}$$

l moltiplicatore
del carico

(caso partic.)

$$\eta = 0 \rightarrow \text{sist. ideale}$$

$$p(v) = \frac{v}{\sin v}$$

Approssimazione statica: scrittura dell'equilibrio nelle configuratione deformata.

$$e = 0 \text{ sist. ideale}$$

$$P(l \sin \vartheta + e \cos \vartheta) = K v$$

effetto oleostabilizz. effetto stabilizz.
(momento ribaltante) (momento elastico)

N.B. Se $e \neq 0$ ($\eta \neq 0$), $\vartheta = 0$ è conf. ne di equil.
solo per $P=0$ ($P_e=0$).

$$\frac{Pl}{K} (\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta) = \vartheta$$

equazione di equilibrio
non-lineare, in ϑ

$$p(v) = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

risposta $P-\Delta$ non-lineare
(non-linearità geometrica)

- Mappa dei percorsi di equilibrio:

ramo secondario sist. reale

Analisi per spost. "geom. piccoli" $|V| \ll 1$
 $\sin V \approx V, \cos V \approx 1$

$p(V) = \frac{V}{V+\eta}$
 $= 0, V = -\eta - \pi - \text{atan} \eta$

$V \rightarrow \pm \infty, p \rightarrow 1$

Cerco critico sist. ideale è tracciato da analisi in piccoli spost. di sist. con imperfezioni.

p.t. di stazionarietà ($p(V)=0$)

$p = \frac{1 \cdot (\sin V + \eta \cos V) - V(\cos V - \eta \sin V)}{(\tan V)^2} = 0 \Rightarrow \tan V + \eta = V(1 - \eta \tan V)$

$(1 + \eta V) \tan V = V - \eta \Rightarrow \frac{\eta = 5\%}{V = -0.562} \Rightarrow \frac{V = 1.14}{\bar{V} = 1.14}$

ramo primario sist. reale $\eta = 0$ $p(V) = \frac{V}{\sin V}$

$\eta \neq 0$ $p(V) = \frac{V}{\sin V + \eta \cos V}$
 $(\eta = 5\%)$

$= 0, \tan V = -\eta$

$V = -\text{atan} \eta (\pm \pi)$

N.B. Il sist. reale avrà un de subito delle cond. di rif. $V=0$, non appena $p > 0$, restando iniz. vicino al poi approssimare il ramo biforcuto del sistema reale (no p.t. di biforcazione)

Approccio energetico

EPT $V(v) = \frac{1}{2} K v^2 - P(l - l \cos \vartheta + e \sin \vartheta)$ $\xrightarrow{\text{spost. verticale } z, e = \eta l} V_e = \frac{1}{2} K v^2 - P(l - l \cos \vartheta + \eta l \sin \vartheta) = K\left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{P}{K} l (1 - \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta)\right)$

Energia $\tilde{V} = \frac{1}{2} K v^2 > 0$

Potenziale elastico $\tilde{V}_e = \frac{1}{2} K v^2$

Totale $\frac{d}{dv} \tilde{V}$

v

$$V_e = \frac{1}{2} K v^2$$

$$V_f = -L_e$$

forze esterne conservative

condiz. staz. (CN di equil.)

$$\tilde{V}(v) = K\left(\frac{1}{2} v^2 - P(\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta)\right) = 0$$

eq. non-lineare
in v (lin. in P)

$\frac{d}{dv}$

$$\tilde{V}'(v) = K(1 - P(\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta))$$

nelle config. equil. $\tilde{V}'(v) = K\left(1 - \frac{v}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta} (\cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)\right)$

$$P = \bar{P}$$

$$= K\left(1 - v \frac{1 - \eta \tan \vartheta}{\tan \vartheta + \eta}\right)$$

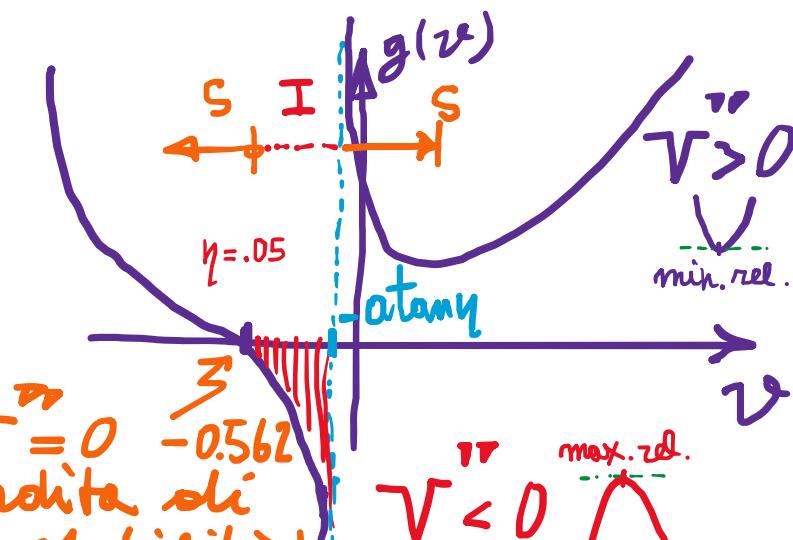
$g(v)$

$$\tilde{V}' = 0 \Rightarrow g(v) = 0 \Rightarrow \tan \vartheta + \eta = v(1 - \eta \tan \vartheta)$$

$$(1 + \eta v) \tan \vartheta = v - \eta$$

$$P(v) = \frac{v}{\sin \vartheta + \eta \cos \vartheta}$$

config. equilibrate



$\tilde{V}' = 0$
(perdita di stabilità)

Studio del segno di \tilde{V}'

$\tilde{V}' > 0$ max. zd.

$\tilde{V}' < 0$ min. rel.

(Th. di Dirichlet, CS di stabilità)

- Anelini in spostamenti "geometricamente piccoli":

$$V \approx V_2(v) = \frac{1}{2} K v^2 - P \left(l - l \left(\underbrace{1 - \frac{v^2}{2} + \dots}_{\text{cos } v} \right) + e \left(\underbrace{v + \dots}_{\text{sin } v} \right) \right)$$

"quadraticizzazione"

di V

opp.zx.

$$\text{al 2° ord.} = \frac{1}{2} K v^2 - P l \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) = K \left(\frac{1}{2} v^2 - p \left(\frac{v^2}{2} + \gamma v \right) \right)$$

$$V_2(v) = K \left(v - p(v + \gamma) \right) = 0 \Rightarrow p(v) = \frac{v}{v + \gamma}$$

"linearizzazione"

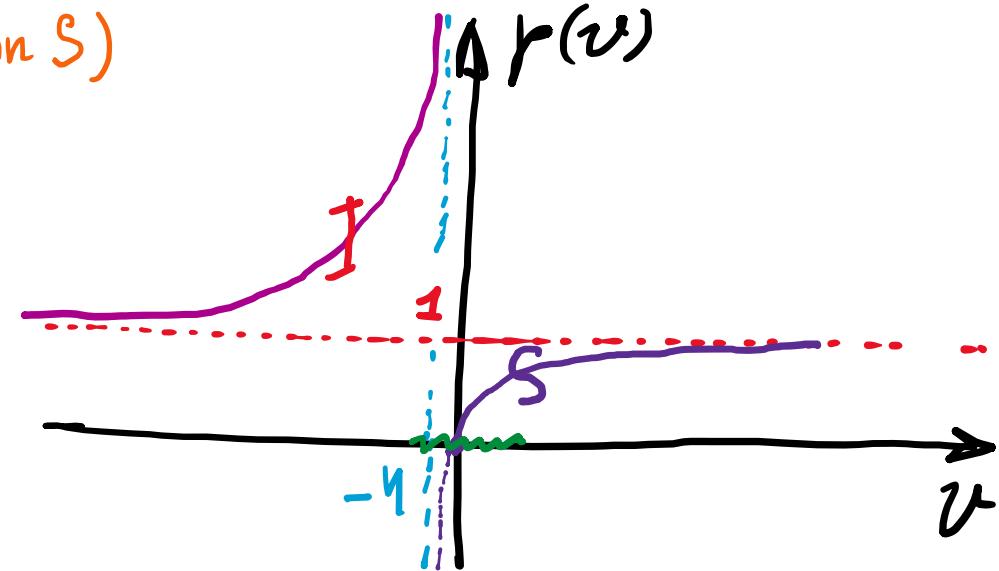
delle eq.ni di equilibrio

$$V_2''(v) = K \left(1 - p \right)$$

$\begin{cases} > 0 & p < 1 \ S \\ = 0 & p = 1 \ \text{condiz. critica di pericolosità di stabilità} \\ < 0 & p > 1 \ I \ (\text{non } S) \end{cases}$		$p(v)$
---	--	--------

Come per anelini di rist.
ideale privo di imperf.

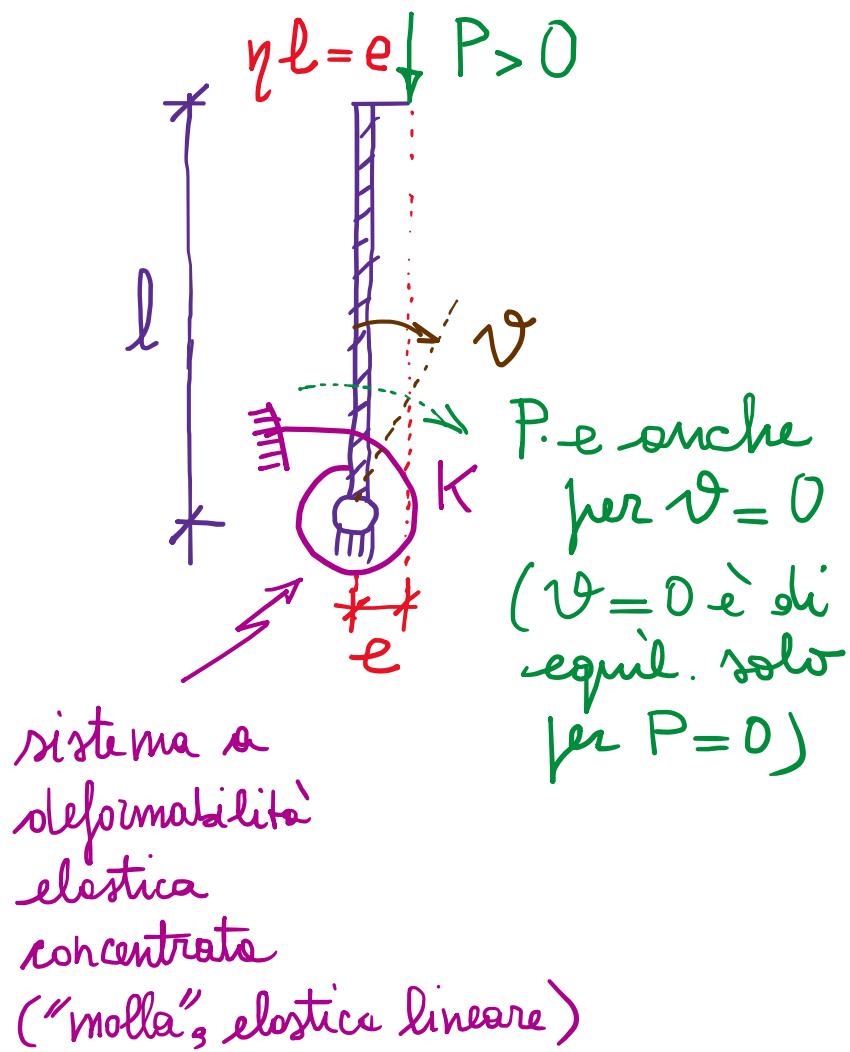
(derivate seconde di V_2 costante,
a dato valore del carico P)



Concetti fondamentali :

- Sistemi ideali: improvvisa perdita di stabilità (della configurazione di equilibrio) per $P = P_{cr}$ (sistema stabile per $P < P_{cr}$) \Rightarrow p.to di "biforcazione" dei percorsi di equilibrio, alias transizione discontinua stabile/instabile (al crescere del carico P).
- Sistemi reali: dotati di imperfezioni \Rightarrow ottese una transizione continua del sistema al crescere del carico, con deformazione "pendente" della perte dell'imperfezione presente, non appena $P \neq 0$ ($P > 0$), e di entità crescente, al crescere del carico P stesso \Rightarrow assenza di un punto di biforcazione.

- Analisi per esempio SDOF:



- approccio statico: equazione di equilibrio nella configurazione deformata.
- approccio energetico: scrivere dell'EPT V e applicazione delle CS di stabilità (th. di Dirichlet)

[per spostamenti "geometricamente" "granoli" e "piccoli"]

→ eq. m. di equilibrio linearizzate + EPT "quadraticizzato", $V \approx V_2$

SOMMARIO (Lec. 18)

- Instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) [vs. sistemi ideali: privi di imp.]
 - transitione continua vs. ramo bifurcati
 - bifurcazione per $P = P_{cr}$ del sistema ideale.
- Approccio statico per spost. "geom. grandi" e mappe dei percorsi di equilibrio.
 - validità delle stime di P_{cr} .
- " " " " " piccoli" \Rightarrow tendenza asintotica per P_{cr} .
 - P_{cr} trovato solo trend asintotico di sist. reale resto di signif. ingegnerist.
- Approccio energetico, per spost. di entità come sopra (grandi/piccoli).
 - Individua, oltre alle stesse confini di equilibrio, le nature stabile o non stabile di esse (stabile per il ramo primario-deviato della perte dell'imperfezione).

Next step: pb. euleriani di stabilità - Quadro generale ed esempi discreti MDOF.