Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problemi euleriani di stabilità (Teoria del 2° ordine – Sistemi discreti MDOF)

n gdl

Hp. • Sono conf.ni di equilibrio dipendenti linearmente dai carichi:

$$\mathbb{P} = p\,\mathbb{P}_0$$

$\mathbb{P}_0$ … vettore dei carichi base

p … moltiplicatore dei carichi (adimensionale, ≥ 0)

• Linearità pre-critica:

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{q}_0$$

$\mathbf{q}_0$ … conf.ne equilibrata corrispondente ai carichi base (q: coordinate lagrangiane)

• Si assume una forma lineare in p per la variazione 2^a dell'EPT:

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \frac{1}{2}\delta\mathbf{q}^T \mathbb{K}\,\delta\mathbf{q} = \underbrace{\omega(\delta q)}_{} - p\,\underbrace{w(\delta q)}_{}$$

$\omega = \frac{1}{2}\delta\mathbf{q}^T \mathbb{K}_E\,\delta\mathbf{q}$ ← energia potenz. elastica > 0

$\mathbb{K}_E$: matrice di rigidezza elastica

$w = \frac{1}{2}\delta\mathbf{q}^T \mathbb{K}_G\,\delta\mathbf{q}$ ← lavoro del 2° ordine dei carichi esterni conservativi $> 0 \;\forall \delta q \neq 0$

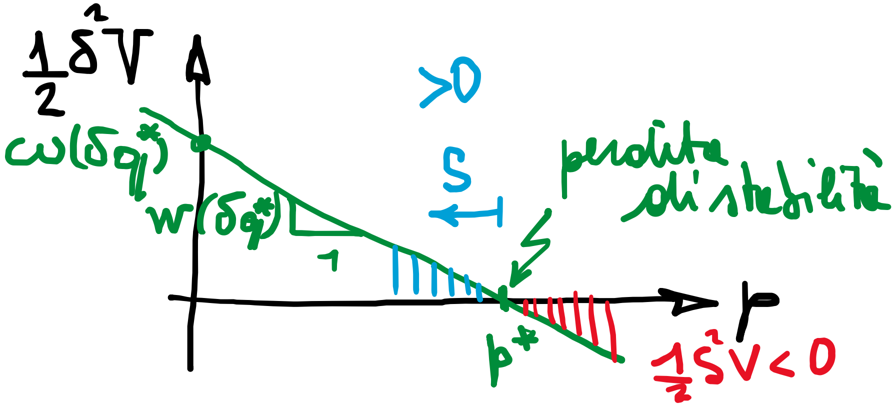
$\mathbb{K}_G$: matrice di rigidezza geometrica

Matrice di rigidezza

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$$ (cost. in q, lin. in p)

coerentemente figlia di due contributi, con p che, per livelli crescenti, porta a "negativizzare" $\mathbb{K}$

n { p_i^*: moltiplicatori critici; $\delta\mathbf{q}_i^*$: deformate critiche



- Condizione di perdita di stabilità ⇒ carichi critici:

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \omega(\delta q^*) - p^* w(\delta q^*) = 0 \Rightarrow p_i^*(\delta q_i^*) = \frac{\omega(\delta q^*)}{w(\delta q^*)} = \frac{\frac{1}{2}\delta q^{*T}\mathbb{K}_E \delta q^*}{\frac{1}{2}\delta q^{*T}\mathbb{K}_G \delta q^*} = R(\delta q^*)$$

"rapporto di Rayleigh"
in instabilità
(v. analogia in dinam.)

- Il minimo valore dei moltiplicatori critici si dice moltipl. critico euleriano:

$$p_{cr}^E = \min\{p_i^*\} \Rightarrow \mathbb{P}_{cr}^E = p_{cr}^E \mathbb{P}_0$$

(prima condiz. di perdita di stabilità al crescere di p).

- Per $p = p_{cr}^E$, $\mathbb{K}$ diviene semidef. pos. (perde per la prima volta la sua def. pos.)

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \omega(\delta q) - p_{cr}^E w(\delta q) = \frac{1}{2}\delta q^T(\mathbb{K}_E - p_{cr}^E \mathbb{K}_G)\delta q \geq 0 \quad \forall \delta q \neq 0$$

- Det. dei molt. critici (p_i^*):
  - Studio propr. algebriche di $\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\mathbb{K}_G$
    - \+ min. princ.
    - \+ singolarità, $\det \mathbb{K} = 0 \Rightarrow p_i^*$
  - Studio pb. agli autov. associato a $\mathbb{K}_E, \mathbb{K}_G$

$$\mathbb{K}\,\delta q = (\mathbb{K}_E - p\mathbb{K}_G)\delta q = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{K}_E\,\delta q = p\,\mathbb{K}_G\,\delta q} \Rightarrow \begin{cases} p_i^* & \text{autovalori} \\ \delta q_i^* & \text{autovettori (deform. critiche)} \end{cases}$$

$$\underbrace{p_{cr}^E}_{\sim p_i^*} \leq \frac{\omega(\delta q)}{w(\delta q)} = \underbrace{R(\delta q)}_{\sim \delta q^*}$$

vedi analogia con Dinamica

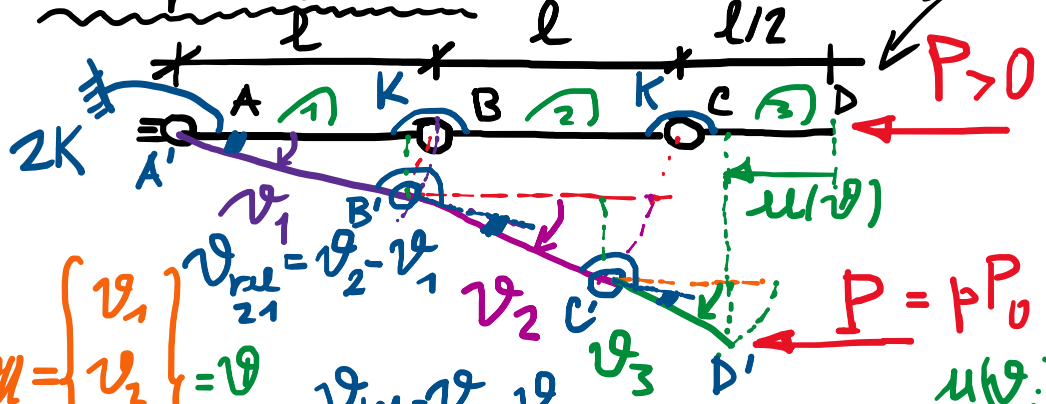
- Rapporto di Rayleigh fornisce stime per eccesso del moltip. cr.
- R è stazionario nelle conf. ni equilibrate e minimo per p_{cr}^E (dim.)

Esempio (3-DOF) $\quad K>0$

conf.ne di riferimento $\vartheta_i = 0$ ($\bar{q}_0 = 0$ di equil.)

Approccio energetico

$\Rightarrow \delta q = q - q_0 = q$



$$q = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \vartheta$$

conf.ne variata (discosta dalla conf.ne di rif.)

$$\text{EPT}: \ V(\underset{\vartheta}{q}) = \underbrace{\frac{1}{2} K \left[2\vartheta_1^2 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + (\vartheta_3 - \vartheta_2)^2 \right]}_{\text{energia potenziale elastica}} \underbrace{- P u}_{V_f \ \text{EP carichi esterni conservat.}}$$

$$u(\vartheta_i) = \frac{5}{2}\ell - \ell\cos\vartheta_1 - \ell\cos\vartheta_2 - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta_3$$

$$p = \frac{P\ell}{K} = \frac{P}{K/\ell} \Rightarrow P = p \underbrace{\frac{K}{\ell}}_{P_0} = p P_0$$

$$\tilde{V} = \frac{V(q)}{K} = \left[\frac{1}{2}\left(3\vartheta_1^2 + 2\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 - 2\vartheta_2\vartheta_3\right) - p\left(\frac{5}{2} - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_3\right)\right]$$

$$\cos\vartheta_i = \left(1 - \frac{\vartheta_i^2}{2}\right) \Rightarrow \tilde{V}_2(q) = \frac{\omega}{K} - p\,\frac{1}{2}\left(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_3^2\right)$$

$\tilde{V}_{2,\vartheta_i}$

– equaz. di equil. (da staz.) $\quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} = 0$

$$\begin{cases} \tilde{V}_{,\vartheta_1} = 3\vartheta_1 - \vartheta_2 \quad 0 \quad - p\sin\vartheta_1 = 0 \\ \tilde{V}_{,\vartheta_2} = -\vartheta_1 + 2\vartheta_2 - \vartheta_3 - p\sin\vartheta_2 = 0 \\ \tilde{V}_{,\vartheta_3} = 0 \quad - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \frac{p}{2}\sin\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow |\vartheta_i| \ll 1$ "geom. piccoli" $\sin\vartheta_i \simeq \vartheta_i$

$$\begin{cases} (3-p)\vartheta_1 - \vartheta_2 \quad 0 = 0 \\ -\vartheta_1 + (2-p)\vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \\ 0 \quad - \vartheta_2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$

Derivate prime $\Rightarrow$ vett. gradiente $\quad$ eq. di equil. non lineari

eq. di equil. linearizz., da staz. di $\tilde{V}_2$

• Derivate seconde (matrice hessiana):

$$[\tilde{V}_{,\vartheta_i\vartheta_j}] = \begin{bmatrix} 3-p\cos\vartheta_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-p\cos\vartheta_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2}\cos\vartheta_3 \end{bmatrix} \Rightarrow |\vartheta_i| \ll 1 \Rightarrow \overset{\tilde{V}_{2,\vartheta_i\vartheta_j}}{\begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix}} = \tilde{\mathbb{K}}$$

$$\tilde{\mathbb{K}}_E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \tilde{\mathbb{K}}_G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{3\times 3}{\tilde{\mathbb{K}}} = \tilde{\mathbb{K}}_E - p\,\tilde{\mathbb{K}}_G$$

matrice di rigidezza elast. matrice di rigid. geom

matrice di rigidezza di V_2 (cost. in ϑ_i, lineare in p)

• Carichi critici (da singolarità di $\mathbb{K}$):

$$\det(\tilde{\mathbb{K}}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$p^3 - 7p^2 + 13p - 4 = 0 \Rightarrow (p-4)(p^2-3p+1) = 0$$

eq.ne caratteristica (3° grado $\Rightarrow$ 3 radici)

$$\begin{cases} p^*_{1,2} = \dfrac{3 \mp \sqrt{5}}{2} < \begin{matrix} .3820 = p^E_{cr} \\ 2.618 \end{matrix} \\ p^*_3 = 4 \end{cases}$$

min. dei p_i^*

$$P^E_{cr} = .3820 \frac{K}{\ell}$$

SOMMARIO (Lez. 19)

- Pb. euleriani di stabilità secondo teorie del 2° ordine, sistemi discreti MDOF.
- Condizione di perdita di stabilità ($\frac{1}{2}\delta^2 V = 0$) $\Rightarrow$ carichi critici.
- Matrice di rigidezza elastica e geometrica: $\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$ (lin. in p, cost. in q)
- Rapporto di Rayleigh e pb. agli autovalori generalizzato $\Leftrightarrow$ analogia con Dinamica.
- Esempio 3-DOF:
  - Scrittura dell'EPT (per spost. "geometricamente grandi").
  - Valutazione derivate prime e seconde.
  - Scrittura dell'EPT al 2° ord. (" " " piccoli") $\sim q_i^2$
  - Conseguenti valutaz. derivate prime ($\sim q_i$ lin.) e seconde ($\sim q_i^0 = 1$ cost.).
  - Calcolo dei carichi critici da condit. di singolarità di $\mathbb{K}$ ($\det \mathbb{K} = 0$).

Next step: Deformate critiche; approccio statico (equil. nella conf.ne deformata).
Sistemi continui (asta di Eulero).