

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

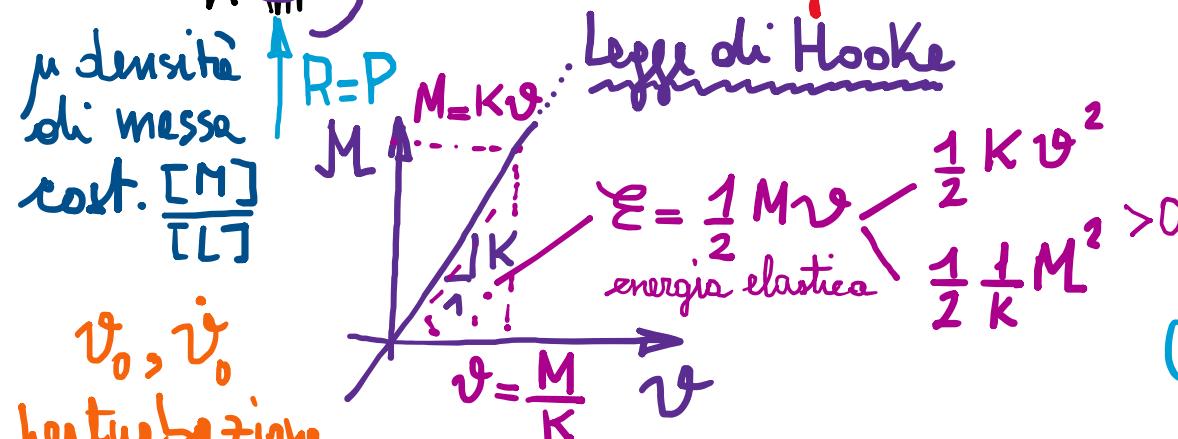
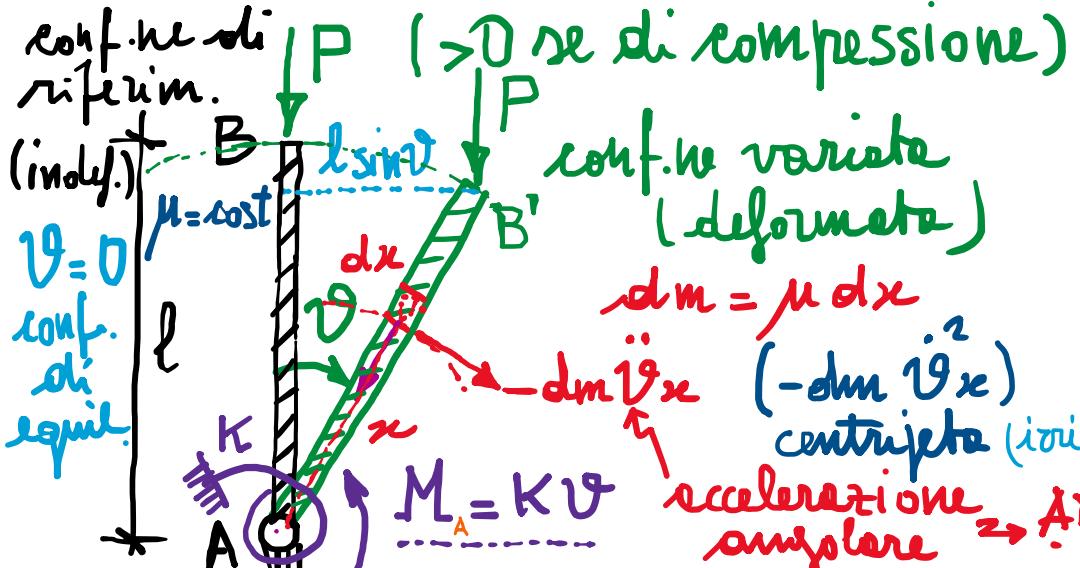
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

II - Instabilità delle Strutture



$$\ddot{\vartheta} = \frac{1}{I} M \ddot{x} = \frac{1}{I} K \vartheta \ddot{x} = \frac{1}{I} K \vartheta \ddot{\vartheta}$$

eq. del moto: $P l \sin \vartheta = K \vartheta + \mu \int_0^l x^2 dx \ddot{\vartheta}$

(Introduzione ai sistemi discreti - SDOF)

- Sistemi e deformabilità elastica concentrate
- Forze conservative (campo gravitazionale):
P se direz. verticale costante (no forze "follower")
di intensità costante (ovverosia invariabile in misura
"quasi-statico") $\Rightarrow P = p P_0 > 0$
- carico base
L moltiplicatore del carico
 $p = \frac{P}{P_0}$

Eq. ne di "equilibrio dinamico" (ella
rotazione rispetto alle
momento ribalt. mom. 0 momento iniziale A)
 $P l \sin \vartheta = K \vartheta - \int_0^l (-dm \dot{\vartheta} x) x$

effetto stabilizzante

$$I = \frac{1}{3} \mu l^3 \text{ momento d'inerzia}$$

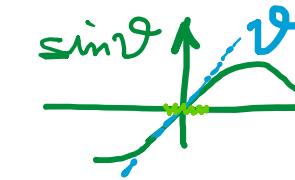
Eq. del moto:

$$Pl \sin\vartheta = I\ddot{\vartheta} + K\vartheta$$

eq. del moto non-lin.

$$(I\ddot{\vartheta} + K\vartheta - Pl \sin\vartheta = 0)$$

lin. non-lin.



$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$$

Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" ($|\vartheta| \ll 1$) $\Rightarrow \sin\vartheta \approx \vartheta$

$$I\ddot{\vartheta} + (K - Pl) \vartheta = 0 \quad \xrightarrow{\text{eq. ne lineare}} \quad \ddot{\vartheta} + \frac{K - Pl}{I} \vartheta(t) = 0 \quad \begin{matrix} \text{linearizzazione} \\ (\text{dell'eq. del moto}) \end{matrix}$$

mom.

d'inerzia $I > 0$ rigidezza totale: $K_{\text{elast}} - K_g$ rigidezze "geometriche" (sottrae rigidezze al sistema, al crescere del carico P)

$$1) K - Pl > 0 ; \quad P < \frac{K}{l} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta(t) = 0 \quad \omega_1^2 = \frac{K - Pl}{I} \quad \begin{matrix} \text{(dip. del valore} \\ \text{di } P) \downarrow \text{per } P \end{matrix}$$

(caso sub-critico) eq. dei moti armonici

Sistema stabile (secondo criterio di stabilità

dinamico di LIAPUNOV).

il sistema non tende ad

abbondare le conf. di rif. (di equil.),
oscillando di poco intorno ad esse (+ smorz.)

$$\text{c.i. } \begin{cases} \dot{\vartheta}_0 = A \\ \ddot{\vartheta}_0 = \omega_1 B \end{cases}$$

$$\vartheta(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t = \dot{\vartheta}_0 \cos \omega_1 t + \frac{\ddot{\vartheta}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

moto armonico

- di pulsaz. $\omega_1(P)$

- di ampiezza $\sqrt{\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{\ddot{\vartheta}_0^2}{\omega_1^2}}$ (piccole)

attorno alle conf. di riferimento
che attenua progressivamente l'oscillazione

$$2) K - Pl = 0; P = \frac{K}{l} \Rightarrow I \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \dot{\vartheta}(t) = A + Bt$$

Perdita di stabilità delle conf. ne
di equil. $\dot{\vartheta} = 0$: sistema tende a
divergere, cioè ad abbandonarla

Condizione di transizione $P_{cr} = \frac{K}{l}$
carico critico

$$3) K - Pl < 0; P > \frac{K}{l} \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \alpha^2 \vartheta = 0$$

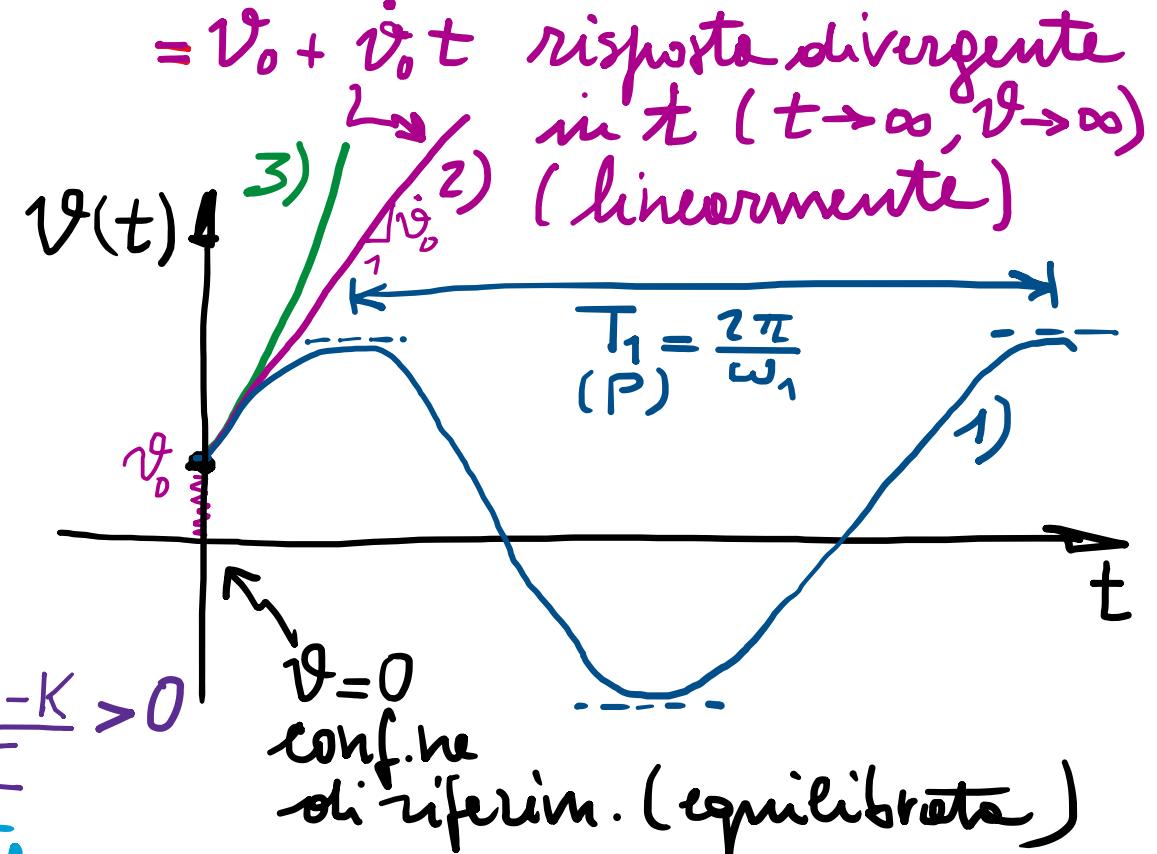
eq. ne corrett. ($e^{\lambda t}$)

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha \Rightarrow e^{\pm \alpha t}$$

$$\vartheta(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}$$

caso supercritico



In sintesi:
- Stabile $P < P_{cr} = \frac{K}{l}$ ($p < 1$)
- Instabile $P \geq P_{cr} = \frac{K}{l}$ ($p \geq 1$)

- Stabile $P < P_{cr} = \frac{K}{l}$ ($p < 1$)
- Instabile $P \geq P_{cr} = \frac{K}{l}$ ($p \geq 1$)

Approssimazione Statico

eq. di equil.

$$P_l \sin \vartheta = K \vartheta$$

eq. non-lineare in ϑ

$$\sin \vartheta = \frac{K}{P_l} \vartheta$$

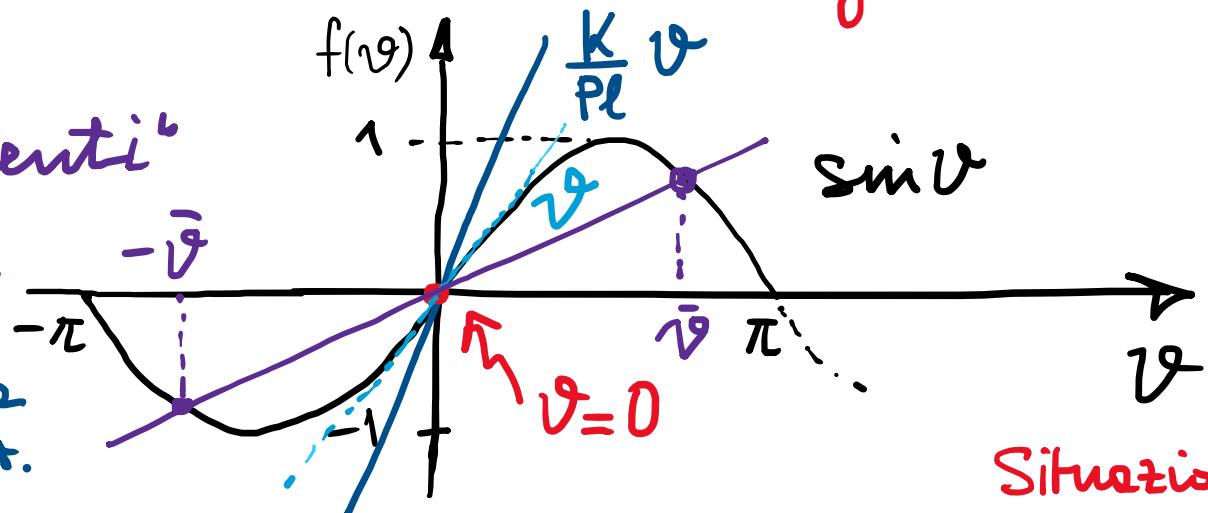
($\vartheta=0$ è una conf. ne di equil.)

nelle conf. ne deformate (gli spostamenti sono tali da influenzare l'eq. ne di equilibrio):

- analisi in "grandi spostamenti"
- non-linearietà geometrica

$$1) \frac{K}{P_l} > 1; P_l < \frac{K}{l}$$

$$\vartheta = 0 \text{ unica solut.}$$



2) $\frac{K}{P_l} = 1; P_l = \frac{K}{l} = P_{cr}$ infinite soluzioni nell'intorno di $\vartheta = 0$ transizione (critica): si

3) $\frac{K}{P_l} < 1; P_l > \frac{K}{l}$ più soluz. equil. $\begin{cases} \vartheta = 0 \\ \vartheta = \pm \bar{\vartheta} \end{cases}$

$$\beta = \frac{P_l}{K}; \beta = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

$$I = I_{cr} = \frac{K}{l} \text{ perdita di stabilità -}$$

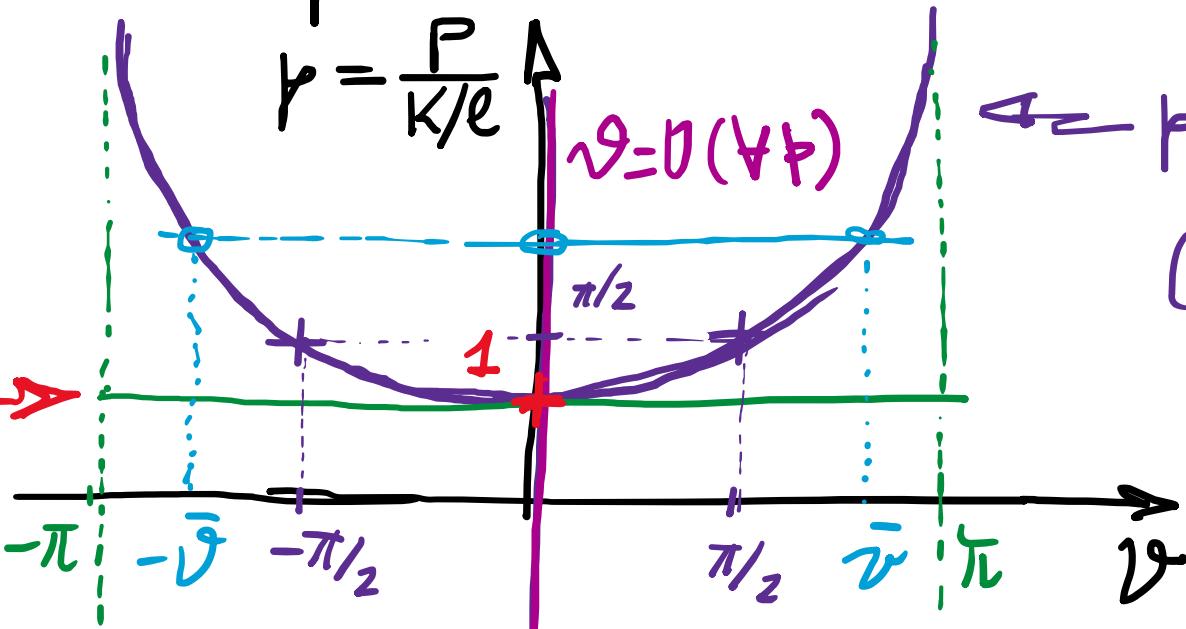
$$(P = \beta \frac{K}{l} = \beta P_{cr}; P_{cr} = 1)$$

Situazione di produzione per lo stesso valore $P_{cr} = \frac{K}{l}$ preced. det. con LIA+UNOV

- Mappe dei percorsi di equilibrio:

$$P = P_{cr} = \frac{K}{\ell} \quad (p=1)$$

p.t. di biforcazione \Rightarrow
dei percorsi di equilibrio



(f.n. "pari" $P(\theta) = P(-\theta)$)

$$P = \frac{\theta}{\sin \theta}$$

(effetto P-Δ)

curva forza-spost.
non lineare

- Il carico critico viene dedotto in base alle presenti di un p.t. di biforcazione dei percorsi di equilibrio (perdita di unicità della solut.)

- Idem per analisi in spostamenti "geometricamente friccoli": (resta utile $|v| \ll 1 \Rightarrow \sin v \approx v \Rightarrow (K - Pl)v = 0$)

$$\begin{cases} K - Pl \neq 0 \Rightarrow v = 0 \text{ a determinare} \\ K - Pl = 0 \Rightarrow v = v_{cr} \end{cases}$$

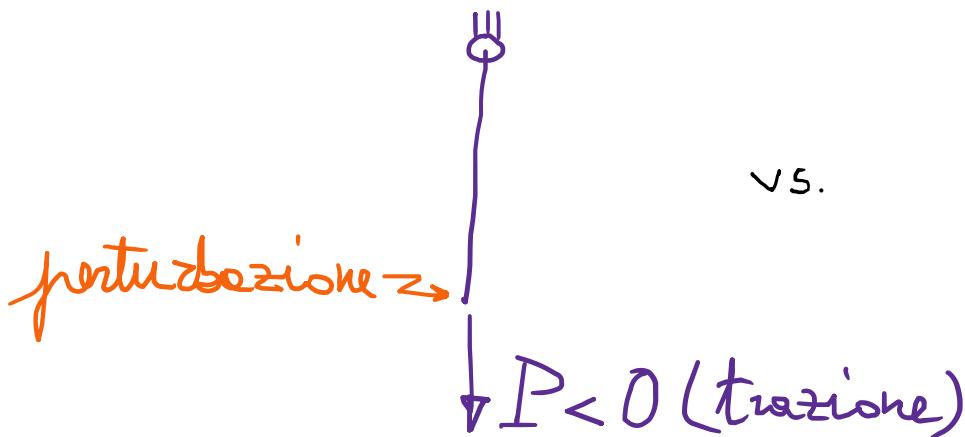
p.t. di biforc. per $P = \frac{K}{\ell} = P_{cr}$

Concetti fondamentali:

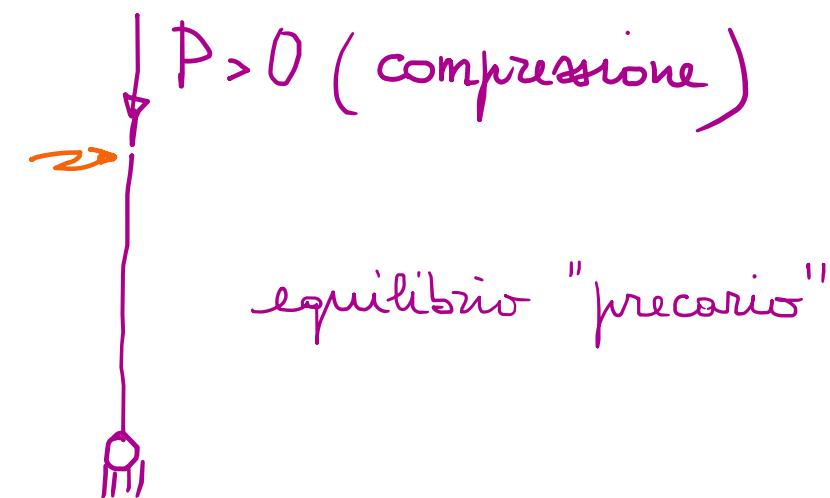
- Dalle Dinamica alle Instabilità delle Strutture:

Tornando ad un ambito "statico" (carichi lentamente variabili nel tempo), si mira ad indagare se le configurazioni di equilibrio risultino stabile oppure no.

- Per stabile, con criterio di stabilità "dinamico" (alla Liapunov), si intende la possibilità che piccole perturbazioni della configurazione non vengano ad alterarla, nel senso di far tendere il sistema ad abbandonarla.
- Due esempi intuitivi:



vs.

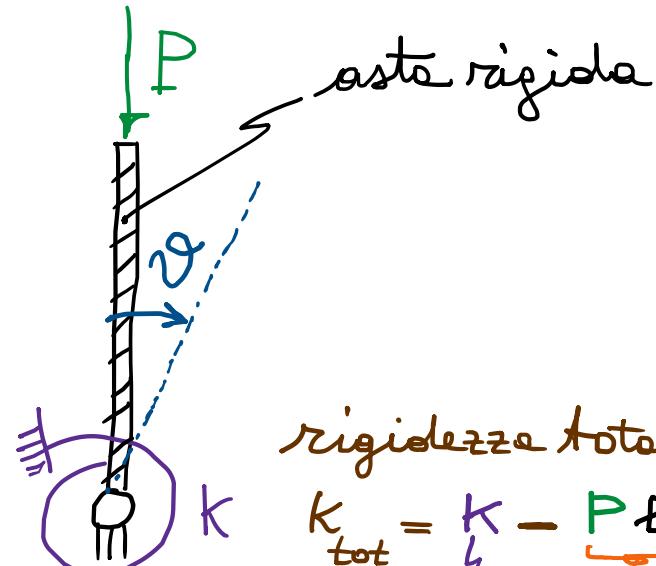


- L'analisi potrà richiedere di abbandonare l'ambito lineare, indagando effetti di non-linearietà (geometrica) nella relazione tra carichi e spostamenti, ritenendo cioè gli spostamenti "grandi", vale a dire tali da influenzare le condizioni di equilibrio.

- Carico "critico": condizione "spontanea" stabilità/instabilità.

esempio
discreto
SDOF

sistema a deformabilità
elastica concentrata
→ molla (elastica lineare)



rigidezza totale

$$K_{\text{tot}} = \frac{K}{l} - \frac{P \cdot l}{\xi}$$

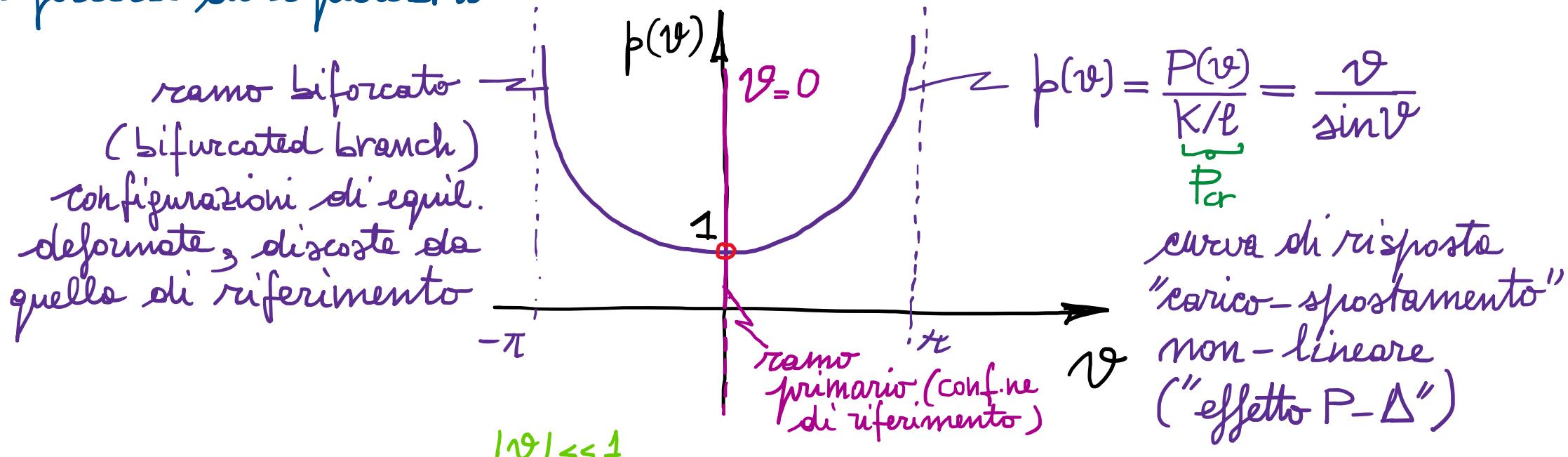
elasticità geometrica (sottrae rigidezza)

$$P_{\text{cr}} = \frac{K}{l}$$

parametro di
rigidezza
(elastico lineare)

parametro
geometrico del
sistema

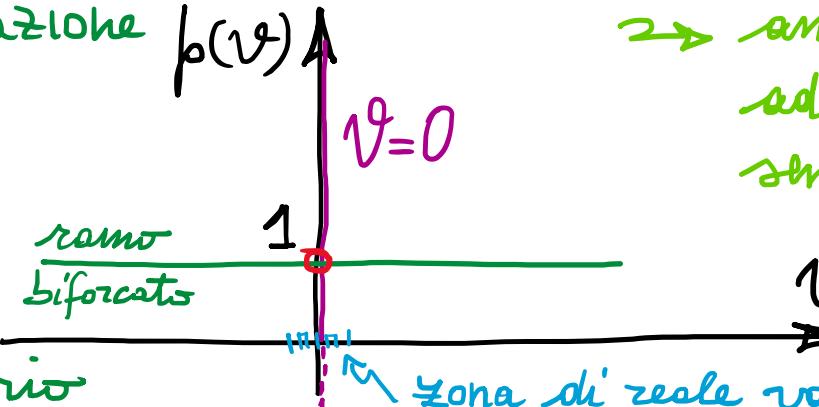
- Approccio statico: carico critico olesotto come punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio



- Per spostamenti "geometricamente piccoli": linearizzazione dell'eq. di equilibrio e medesimo p.to di biforcazione per $p=1$:

$$(K - Pl)\vartheta = 0$$

$\begin{cases} p \neq 1, \vartheta = 0 \\ p = 1, \vartheta \text{ arbitrario} \end{cases}$



→ analisi comunque utile
ad individuare (più
semplicemente) il carico
critico $P_{cr} = \frac{K}{l}$

ϑ

zona di reale validità per ϑ piccoli, $|\vartheta| \ll 1$

SOMMARIO (Lez. 16)

- Dalle Dinamica all'Instabilità delle strutture \Rightarrow criterio dinamico di stabilità secondo LIAPUNOV.
- Carico critico: valore caratteristico che segnala la perdita di stabilità del sistema (piccole perturbazioni non restano più confinate a risposte limitate).
- Transizione dinamica (verso il collasso).

Instabilità delle strutture

- Approccio statico: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate (perdite di unicità della soluzione).
- Non-linearità geometrica carico/spostamento.
- Carico critico: p.t. di biforcazione nelle mappe dei percorsi di equilibrio.
- Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" (con stesso $P(r)$).

Next step: Approccio energetico per indagare la natura (stabile/instabile) delle configurazioni di equilibrio.