

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Componenti Volumetrica e Deviatorica

$$v = I_1 \quad \text{deformazione volumetrica}$$

Deformazione: $\epsilon = \epsilon_v + \epsilon_D = \frac{\text{tr } \epsilon}{3} I + \epsilon = \frac{v}{3} I + \epsilon \Rightarrow \epsilon = \epsilon - \frac{\text{tr } \epsilon}{3} I$ di deformaz.

Sforzo : $\sigma = \sigma_v + \sigma_D = \frac{\text{tr } \sigma}{3} I + \sigma = p I + \sigma \Rightarrow \sigma = \sigma - \frac{\text{tr } \sigma}{3} I$ di sforzo

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad \text{I tensore identità del 2° ord.} \quad (I_{ij} = \delta_{ij} \underset{i \neq j}{=} 0)$$

$$\text{tr } I = I : I = \delta_{ij} \delta_{ij} = 3$$

Invarianti del deviatore di deformazione o di sforzo:

$$J_1 = \text{tr } \epsilon = S_{ii} = I : \epsilon = \text{tr } \sigma - \frac{\text{tr } \sigma}{3} \text{tr } I = 0 \quad \text{per definizione}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr } \sigma^2 = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma \cdot \sigma) = \frac{1}{2} \delta_{ij} S_{ik} S_{kj} = \frac{1}{2} S_{jk} S_{kj} = \frac{1}{2} S_{jk} S_{jk} = \frac{1}{2} \sigma : \sigma = J_2$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma^3$$

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\text{tr } \sigma}{3} = \frac{I : \sigma}{3} = \frac{I_1}{3} \quad \text{"traceless tensors"}$$

tensione media

$$\text{tr } \sigma = I_{ij} \sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii}$$

N.B.: $a_v : b_D = a_D : b_v = 0$

$$\frac{\text{tr } I}{3} : b_D = a_D : \frac{\text{tr } b}{3} I = 0$$

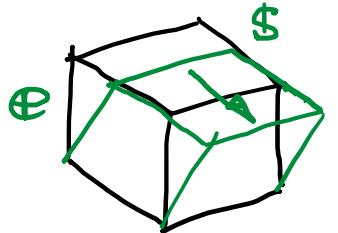
$$\text{tr } b_D = \text{tr } a_D = 0$$



$$\boxed{\frac{1}{2} \sigma : \sigma = J_2}$$

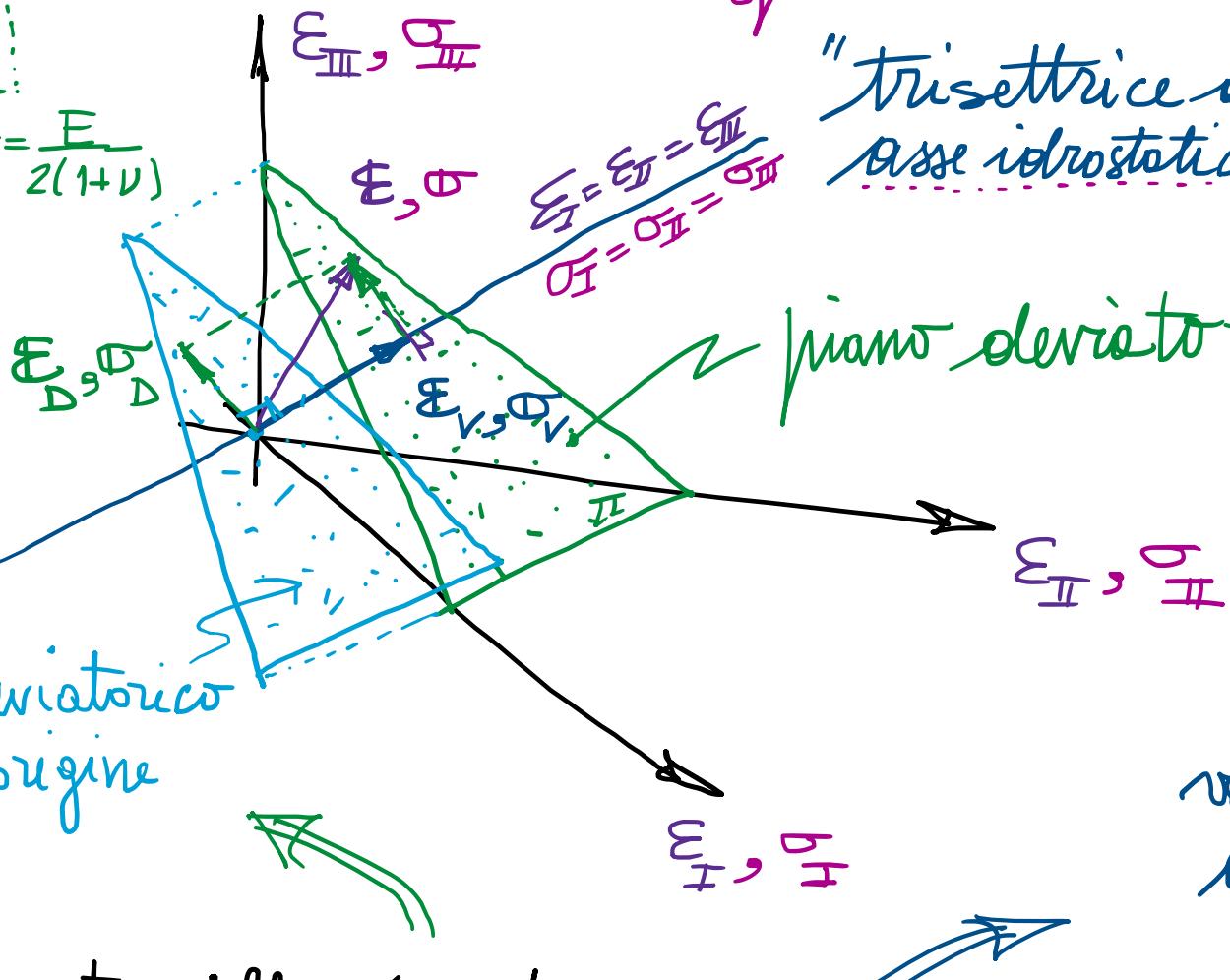
Rappresentazione nello "spazio principale" (spazio delle deformazioni principali) spazio delle tensioni principali

$$\epsilon = \frac{\sigma}{2G}; \quad \sigma = 2G\epsilon$$



("deviazione") variazione di forma a volume costante

piano deviatorico per l'origine

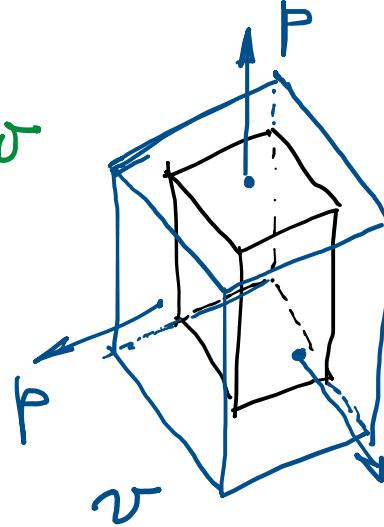


Disaccoppiamento delle risposte volumetrica e deviatorica per materiale isotropo

$$\epsilon_V \leftrightarrow \sigma_V$$

$$\epsilon \leftrightarrow \sigma$$

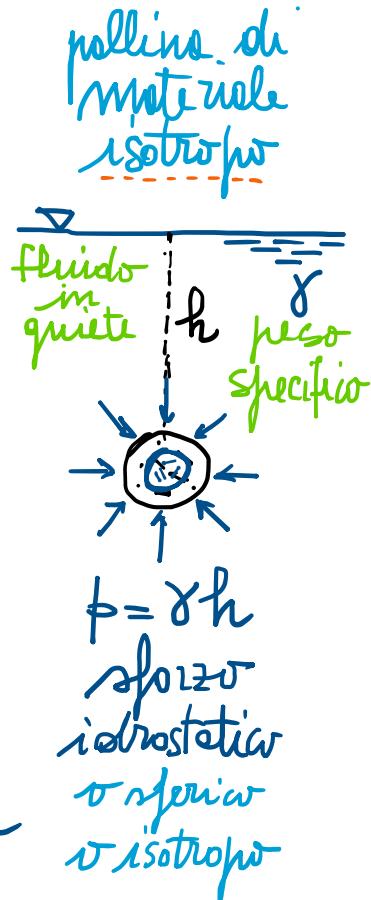
"trisettore del 1° ottante"
asse idrostatico ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$)



variazione di volume a forma costante (omotetico)

$$v = \frac{1}{K} p; \quad p = K v$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{modulo di volume}$$



Risposte deviatorica $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\sigma}})$ legge di Hooke generalizzata (materiale elastico, lineare, isotropo)

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_0 - \frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \underline{\underline{I}} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \underline{\underline{I}}$$

$$E, \nu \quad [K, G]$$

$$e = E - \frac{\text{tr} \sigma}{3} I = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma I + \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} I$$

$$= \frac{1+\nu}{E} Q - \frac{\text{tr } \phi}{3} \frac{I}{E} \left(3\nu + 1 - 2\nu \right)$$

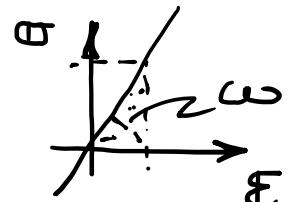
$$\frac{V}{3} = \frac{1}{K} P_3 = \frac{3(1-2v)}{E_3} \frac{\text{tr } \Phi}{3}$$

$$2E = \frac{1}{4} G \cdot s \quad S = G \cdot 2E \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{2E} \left(G - \frac{\text{tr } \theta}{3} \mathbb{I} \right) = \boxed{\frac{1}{2G} \mathbf{S} = \mathbf{e}; \quad \mathbf{S} = 2G \mathbf{e}}$$

$\rho \leftrightarrow \$$
disaccoppiate delle
risposte volumetriche

Energie di deformazione:



$$\omega = \frac{1}{2} \sigma : \epsilon = \frac{1}{2} (\sigma_v + \sigma_d) : (\epsilon_v + \epsilon_d) =$$

$$\left[\frac{\Theta_V : \xi_D}{\Theta_D : \xi_V} = 0 \right] = \underbrace{\frac{1}{2} \Theta_V : \xi_V}_{\omega_V} + \underbrace{\frac{1}{2} \Theta_D : \xi_D}_{\omega_D}$$

energia volumetrica energie deviatorica

$$\bullet \omega_v = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{tr \Theta}{3}}_{\text{I: } \cancel{\frac{tr \Theta}{3}}} \cancel{\text{I: } \frac{tr \Phi}{3}} \quad = \langle$$

$$\bullet \omega_D = \frac{1}{2} \$: €$$

$$\frac{1}{2} K v^2 = \frac{1}{2} K I_1^2 > 0$$

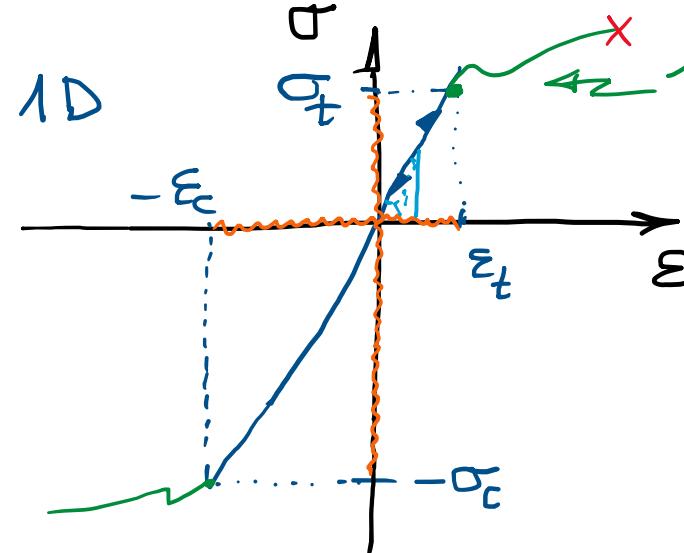
$$\frac{1}{2} \frac{1}{K} p^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{9K} I_1^2$$

$\frac{1}{2} G e : e = 2G J_2^2 > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{\$:\$}{2G} = \frac{1}{2G} J_2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\$: \$}{2G} = \frac{1}{2G} J_2 > 0$$

Verifica di resistenza (elastica)



es. comportamento assimmetrico
tensione/compressione

• Verifica di resistenza:

$$G.I.P.(\sigma, \epsilon) \leq R$$

"Grandezza indice del pericolo" Resistenza (elastica)

• Nel dominio degli sforzi:

$$\sigma_{eq}(\sigma, \epsilon) \leq \sigma_0$$

"tensione equivalente" Tensione ammissibile
(quantità scalare)

sforzo di snervamento

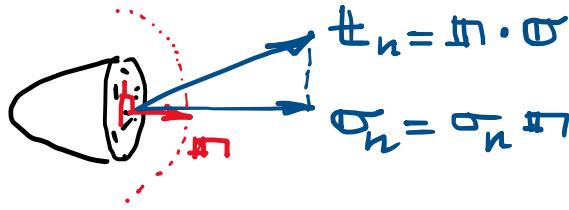
$$\sigma_t = \frac{\sigma_y}{f} \rightarrow \sigma_0$$

fattore di sicurezza 1÷5 (10)

- Un dato materiale, in relazione alle proprie natura e allo stato tensio-deformativo cui è sottoposto, può manifestare determinate risorse di "resistenza" (ad es., "elastica", cioè rispetto all'uscita del campo elastico, fer giungere poi a "rotture"), definite tramite opportuni "criteri di resistenza", istituiti allo scopo.

1) Criterio di Galileo - Rankine - Navier (vedi "mensole di Galileo")

Assume come G.I.P. lo sforzo normale (max, min)



$$-\sigma_c \leq \sigma_n^{\min} ; \sigma_n^{\max} \leq \sigma_t$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

tensioni principali

6 diseguaglianze

$$-\sigma_c \leq \sigma_I \leq \sigma_t$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_{II} \leq \sigma_t$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_{III} \leq \sigma_t$$

?

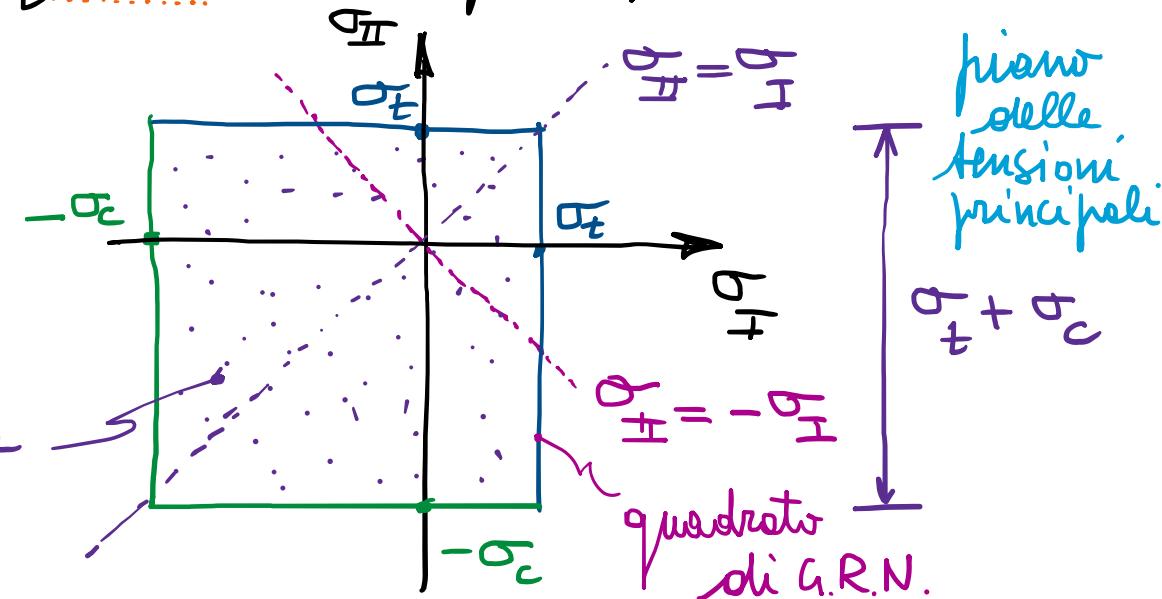
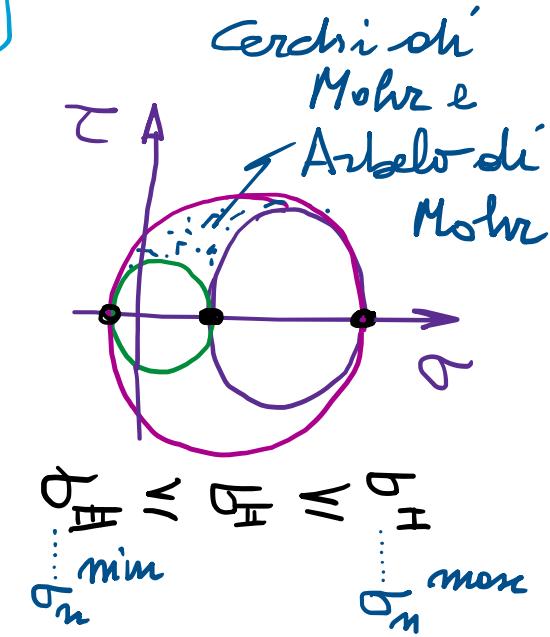
"cubo" di G.R.N.
(nello spazio delle tensioni principali)

$$-\sigma_c \leq \sigma_I \leq \sigma_t$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_I \leq \sigma_t$$

4 diseguaglianze
per sforzo normale
 $(\sigma_{III} = 0)$

dominio
di resistenza
di G.R.N.



- Ioloneo per materiali e comportamento non simmetrico e trazione/compressione
(in particolare su stati di prevalente trazione, in materiali lapidei)
 - Per materiali a comportamento simmetrico t/c, non ioloneo e distinguere il diverso livello di pericolosità di stati A ($\sigma_I = \sigma_{II}$) e B ($\sigma_{II} = -\sigma_I$)

$$b_t = b_c = b_0$$

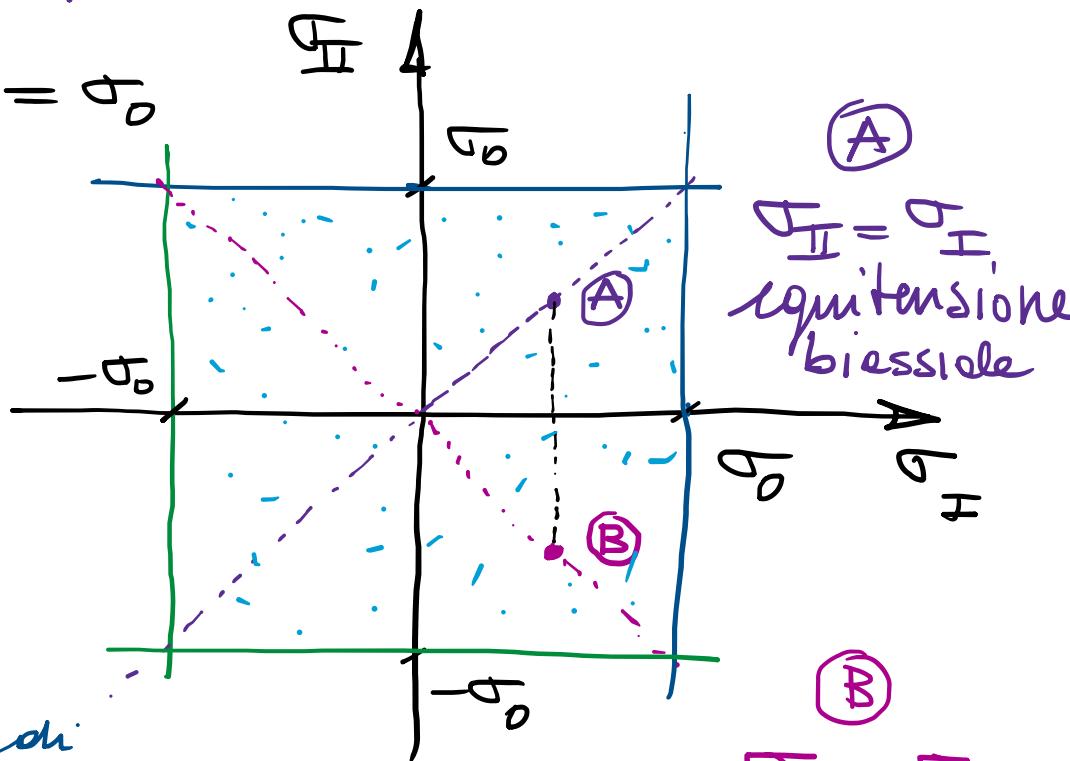
materiale "lospideo"
(come CLS)

zeale ✓

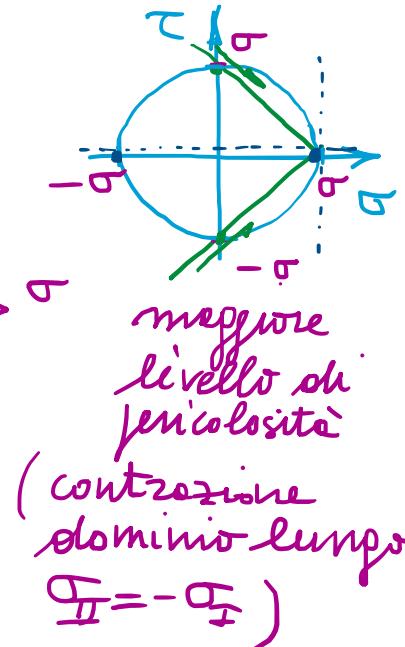
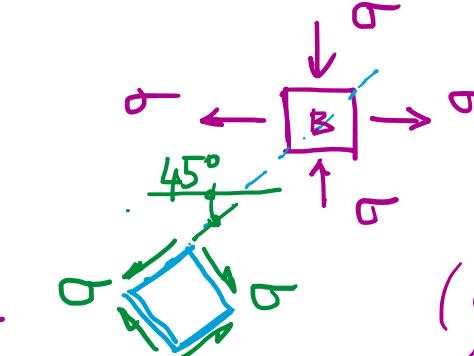
The diagram illustrates a cylinder rotating about its central vertical axis. A horizontal force b_H acts at the top edge of the cylinder. A green curve represents the path of a point on the cylinder's surface. A dashed line connects the center of rotation to a point on the cylinder's surface. A blue arrow labeled G_1 indicates the direction of gravity.

"here" delle tensioni

stati di
pericolante
tensione



$$+ \quad \textcircled{B} \quad b = -b \\ H \quad + \\ \text{taglio fuori}$$



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze
Attinenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Così una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.



IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

