Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

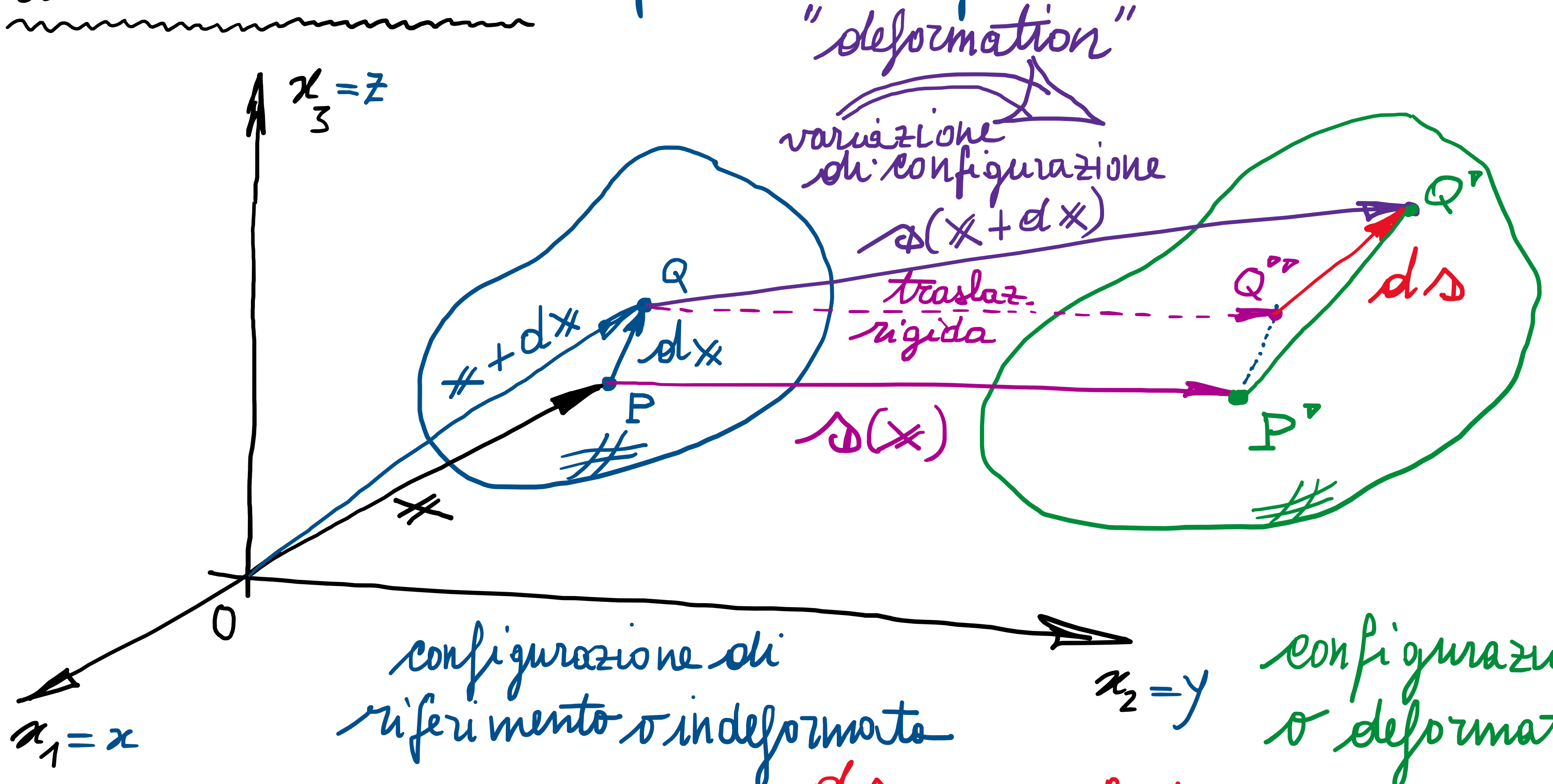
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

Cinematica dei continui: spostamento e deformazione in ambito 3D (regime di piccole deformazioni)



$\underline{s}(\underline{x})$ vettore spostamento (campo vettoriale)

$s_i(x_k)$

(contiene componenti di traslazione rigida)

$$\underline{s}(\underline{x}+d\underline{x}) = \underline{s}(\underline{x}) + \overbrace{\frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \cdot d\underline{x}}^{d\underline{s}} + \dots \rightarrow |\ 1^\circ \text{ord.}$$

$$\Rightarrow \quad d\underline{s} = \overbrace{\frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}}^{\underline{\underline{\Psi}}(\underline{x})} \cdot d\underline{x}$$

$$ds_i = s_{i,j}\, dx_j$$

piccoli gradienti di spostamento

$|\Psi_{ij}| \ll 1$

~1‰, 1%

tensore gradiente di spostamento (2° ordine)

$$\underline{\underline{\Psi}}(\underline{x}) = \nabla \underline{s}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{s}(\underline{x}) \iff \Psi_{ij}(x_k) = \frac{\partial s_i(x_k)}{\partial x_j} = s_{i,j}$$

9 componenti

Decomposizione additiva di Ψ :

(sempre possibile) $\underline{\Psi = \mathcal{E} + \vartheta}$

definizioni

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$$ parte simmetrica $\Leftrightarrow$ tensore di deformazione ("piccola")

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$$

$$\mathcal{E}^T = \frac{1}{2}(\Psi^T + \Psi) = \mathcal{E} \Leftrightarrow \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} \quad 6$$

$+$

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T)$$ parte emisimmetrica $\Leftrightarrow$ tensore di rotazione infinitesima

$$\vartheta^T = \frac{1}{2}(\Psi^T - \Psi) = -\vartheta \Leftrightarrow \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} \quad 3$$

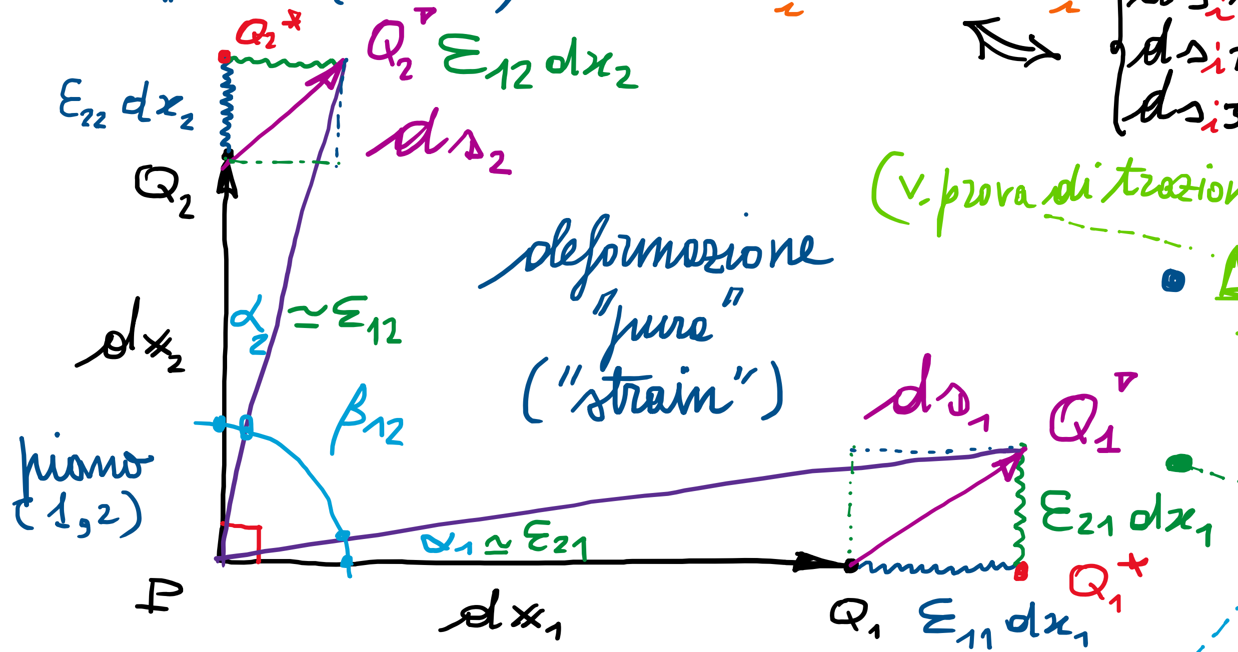
$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})$$

- Significato fisico delle componenti ε_{ij}

$\Psi = \mathcal{E}\ (\vartheta = 0) \Rightarrow ds_i = \mathcal{E} \cdot dx_i$

stato piano di def.

$$\begin{Bmatrix} ds_{i1} \\ ds_{i2} \\ ds_{i3} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdot \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{[\mathcal{E}]} \cdot \begin{Bmatrix} dx_{i1} \\ dx_{i2} \\ \cancel{dx_{i3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}dx_{i1} + \varepsilon_{12}dx_{i2} \\ \varepsilon_{21}dx_{i1} + \varepsilon_{22}dx_{i2} \\ \cdot \end{Bmatrix}$$



$\overline{PQ_i} = dx_i$ $\quad \alpha_i \simeq \tan\alpha_i$

(v. prova di trazione)

- $$\frac{\Delta l}{l_0} \simeq \frac{\overline{PQ_i^*} - \overline{PQ_i}}{\overline{PQ_i}} = \frac{(\cancel{1} + \varepsilon_{ii})\cancel{dx_i} - \cancel{dx_i}}{\cancel{dx_i}} = \varepsilon_{ii} \quad \sim 1‰, 1\%$$

allungamenti specifici di fibre // x_i

- $$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \beta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 \simeq \frac{\varepsilon_{21}\cancel{dx_1}}{(1+\cancel{\varepsilon_{11}})\cancel{dx_1}} + \frac{\varepsilon_{12}\cancel{dx_2}}{(1+\cancel{\varepsilon_{22}})\cancel{dx_2}} = 2\varepsilon_{12}$$

scorrimento angolare

(v. prova di torsione)

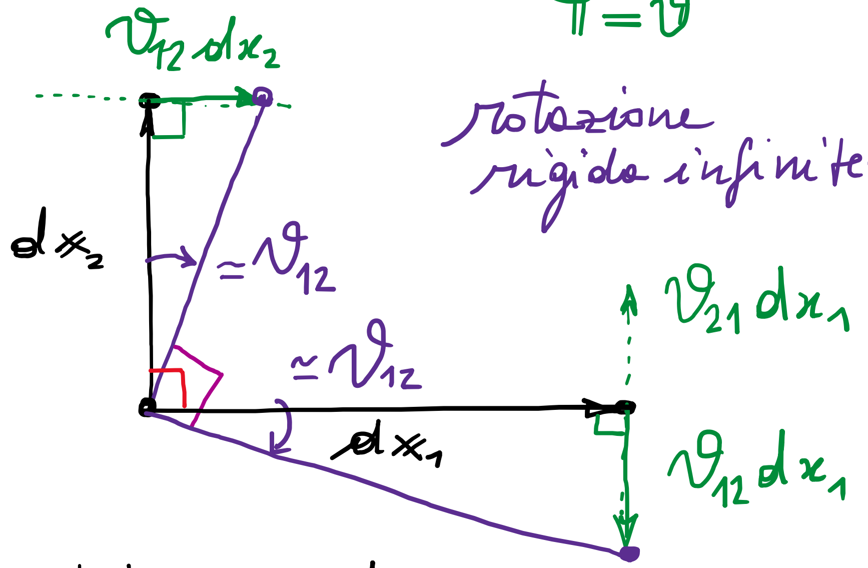
$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}\ ; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$$ deformazioni taglianti

• Significato fisico delle ϑ_{ij} : $\vartheta_{ii} \equiv 0$ per $i=j$

$\Psi = \vartheta$

$\vartheta_{ij} = -\vartheta_{ij}$ $i \neq j$

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \cdot \\ \vartheta_{21} = -\vartheta_{12} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$



rotazione rigida infinitesima

velocità angolare

$-\dot{\vartheta}_3 = \omega_3$

$$\vartheta_{12} \simeq \tan \vartheta_{12} = \frac{\vartheta_{12} \cancel{dx_1}}{\cancel{dx_1}}$$ (rotazione negativa rispetto all'asse x_3)

• Riassumendo:

– il campo di spostamento contiene componenti di traslazione rigida e può rappresentare la deformazione pura ("strain") tramite il suo gradiente.

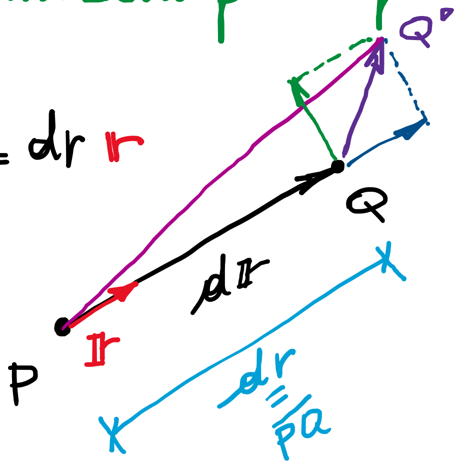
– il gradiente di spostamento, nella sua parte emisimmetrica, può contenere una componente di rotazione rigida (infinitesima).

– depurando il gradiente di spostamento della sua parte emisimmetrica, la sua parte simmetrica rappresenta l'effettiva deformazione pura infinitesima. Quindi, ε, tensore del secondo ordine simmetrico, rappresenta la misura intensiva cercata.

• Proprietà del tensore delle piccole deformazioni $\mathbb{E}$ (tensore doppio simmetrico) ⇒ vedi analisi svolta per il tensore sforzo di Cauchy σ, in statica dei continui.

• Deformazioni principali e direzioni principali di deformazione:

$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{r}$



$d\mathbf{s} = \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} \nparallel d\mathbf{r},\ \mathbf{r}$, in generale

Direzione principale di deformazione:

$d\mathbf{s}_r = \underbrace{ds_r}\,\mathbf{r}_1 \quad // \ d\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_1$

$\mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} = \varepsilon_r \underbrace{dr\,\mathbf{r}}_{d\mathbf{r}}$

$\mathbb{E}\cdot \cancel{dr}\,\mathbf{r} = \varepsilon_r \cancel{dr}\,\mathbf{r}$

$\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}\ ;\ \mathbf{r}_I, \mathbf{r}_{II}, \mathbf{r}_{III} \ldots (\mathbf{r}_1 = \mathbf{n}_1^\circ)$

ε_r deformazioni principali ⇒ autovalori

$\mathbf{r}$ direzioni principali ⇒ autovettori

problema agli autovalori associato al tensore $\mathbb{E}$ ... $\boxed{\mathbb{E}\cdot\mathbf{r} = \varepsilon_r\,\mathbf{r}} \Leftrightarrow (\mathbb{E}-\varepsilon_r\mathbb{I})\cdot\mathbf{r} = 0$

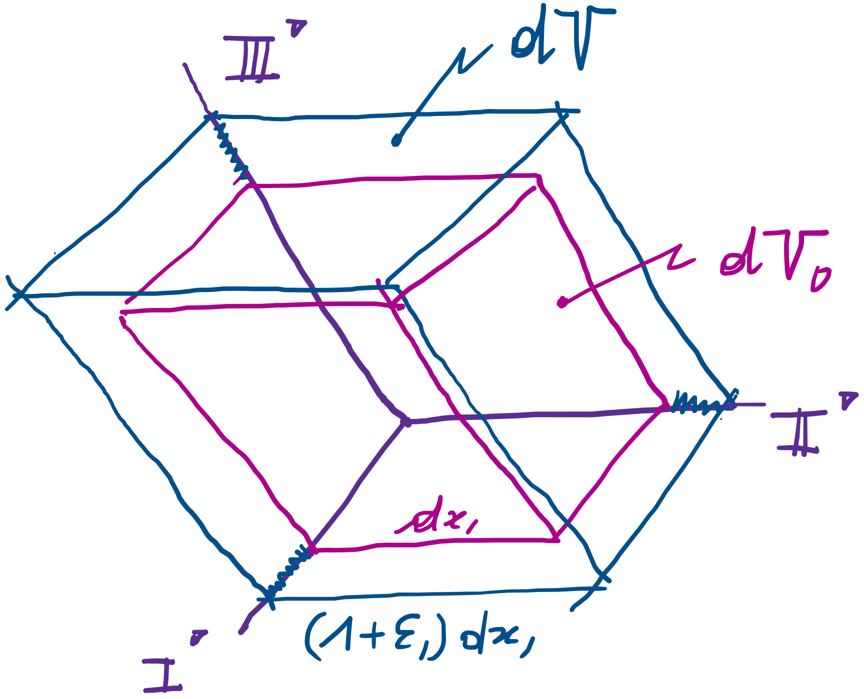
Soluzioni non banali ($\mathbf{r}\neq 0$) sse: $-\det(\mathbb{E}-\varepsilon_r\mathbb{I}) = \overbrace{\varepsilon_r^3 - I_1^\circ\,\varepsilon_r^2 - I_2^\circ\,\varepsilon_r - I_3^\circ}^{\text{polinomio caratteristico}} \overset{\text{eq.ne caratt.}}{=} 0$

Invarianti di deformazione
(indip. dal sistema di riferimento)

primo: $I_1^\circ = \mathrm{tr}\,\mathbb{E}$

secondo: $I_2^\circ = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right)$

terzo: $I_3^\circ = \det\mathbb{E} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^3 - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbb{E}}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right)$



direzioni principali di deformazione (terna principale)

Variazione di volume, senza variazioni di forma

(no scorrimenti angolari)

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sim\varepsilon \\ \sim\varepsilon^2 \\ \sim\varepsilon^3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} I_1^\circ = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} \\ I_2^\circ = -(\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III}) \\ I_3^\circ = \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} \end{array} \right.$$

Deformazione volumetrica: variazione specifica di volume

$$\vartheta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1$$

produttoria

$$= \frac{\prod_i (1+\varepsilon_i)\, dx_i}{dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}} - 1$$

$$= (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III}) - 1$$

$$= \cancel{1} + \underbrace{\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}_{I_1^\circ} + \underbrace{\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III}}_{-I_2^\circ} + \underbrace{\varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}}_{I_3^\circ} - \cancel{1}$$

$o(\varepsilon^2)$ $o(\varepsilon^3)$

$$\vartheta \cong I_1^\circ = \mathrm{tr}\, \mathcal{E}$$

(la traccia di $\mathcal{E}$ rappresenta la deformazione volumetrica infinitesima)

significato fisico dell'invariante primo (deformazione infinitesima)