Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

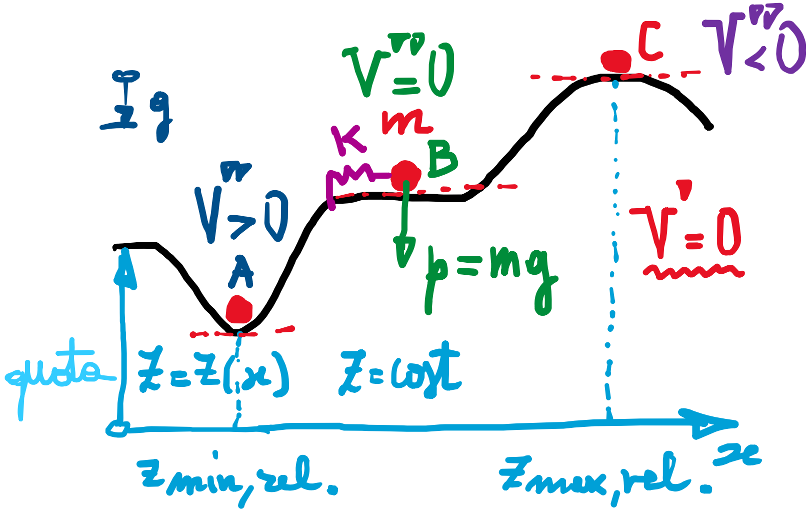
Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Approccio energetico ai problemi di *in*stabilità delle strutture

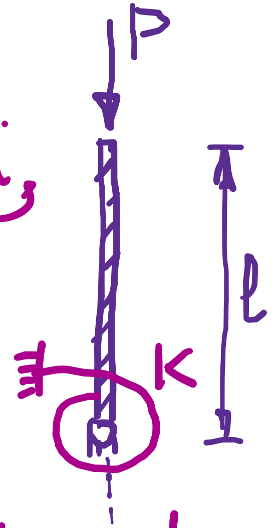


Problema puramente posizionale (governato da Energia Potenziale $V(z(x)) = \underbrace{mg}_{P}\, z(x)$ dipendente dalla sola coord. posizionale z): (concetto)

configuraz. di equilibrio

- A: buca dell'EP ove V è <u>min</u> ⇒ equil. STABILE
  In seguito a (piccola) perturbazione, il sistema tende a ritornarvi (non la abbandona).
- B: valore costante dell'EP ⇒ equil. INDIFFERENTE
  Il sistema non tende a restare né ad abbandonare la configurazione. separa A da C
- C: massimo dell'EP ⇒ equil. INSTABILE
  Il sistema tende ad abbandonare la conf.ne, e produrre energia cinetica, alla ricerca di una altra conf.ne di equilibrio stabile.

In generale, sono presenti anche elementi elastici, utili alla stabilizzazione



⇒ EPT (totale): $V = \underbrace{V_e}_{\mathcal{E}} + \underbrace{V_f}$

En. elastica $\mathcal{E}$ E.P. forze esterne conserv.

Th. di Dirichlet (sulla stabilità dell'equilibrio)

Una conf.ne di equil., di un sistema olonomo (legge intera), con vincoli ideali, conservativo, è stabile, se ivi l'Energia Potenziale Totale (EPT) del sistema è minima (minimo locale / rel.): CS di stabilità

$V(q)$

sistema discreto MDOF $\longleftrightarrow$ (q conf.ne variabili generalizzate)

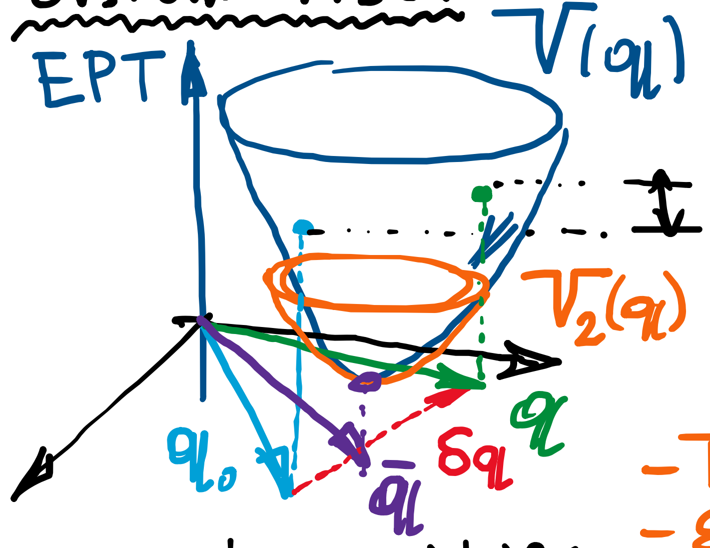
$\left.\begin{array}{l} \bar{q} \text{ equil.} \\ \text{e } V(\bar{q}) \text{ è min. rel.} \end{array}\right] \Rightarrow \bar{q}$ è stabile

- Naturalmente, CN per avere una conf.ne di equilibrio con min. rel. dell'EPT, ivi l'EPT deve risultare <u>stazionaria</u> $\Rightarrow$ $\delta V = 0$. (variaz. prima)

Condiz. di staz. dell'EPT è CN di equilibrio $\Rightarrow$ fornisce le eq.ni di equilibrio (in generale non-lineari).

- Dal p.to di vista della CS di stabilità, possiamo definire stabile un sistema cui si applica e non stabile (stab. non garantita) se non $\Rightarrow$ Instabile.

Sistemi MDOF



q_i: spazio variabili generalizzate ad n dimensioni

- q_0: conf.ne di riferimento (in genere equil.) [spesso $q_0 = 0$]
- $\bar{q}$: conf.ne equilibrata (se di min. $\Rightarrow$ stabile)
- q: conf.ne variata

Inquadramento

$q = q_0 + \delta q$: $\delta q = q - q_0$ (variazione di q)

differenza

$$\Delta V = V(q) - V(q_0) = \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}^T \delta q}_{\delta V} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\delta q^T \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q\,\partial q}\right|_{q_0} \delta q}_{\frac{1}{2}\delta^2 V} + \dots$$

sviluppo in serie di Taylor (arrestato al 2° ordine)

- Teoria del 2° ordine
- Effetti del 2° ordine

δV: variaz. prima $\sim q$

$\frac{1}{2}\delta^2 V$: variaz. seconda $\sim q^2$

$V_2(q)$

$$\left(V(q) = V_e(q) + \underbrace{V_f(q)}_{-\mathcal{L}_{ef}}\right) = -P^T \delta q + \frac{1}{2}\,\delta q^T K\,\delta q$$

$$P = -\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0}$$

vettore dei carichi esterni conservativi

$$K = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q\,\partial q}\right|_{q_0}$$

matrice di rigidezza (Hessiana)

NB: per min. rel., $\Delta V > 0 \ \forall \delta q$, è necessario (CN) $\delta V = 0$, in modo da non avere dip. dal segno di δq.

- Condizione di stazionarietà di $\underline{V_2(q)}$: Analisi al 2° ordine

$$\frac{\partial V_2}{\partial q} = -\mathbb{P} + \mathbb{K}\,\delta q = 0 \Rightarrow \underset{\sim\sim\sim}{\mathbb{K}\,\delta q} = \mathbb{P} \Rightarrow \bar{q} \text{ di equil.}$$

$\delta q = q - q_0$

(CN di equil.) eq. di equil. $\underline{\text{lineari}}$ in q — eq.ni di equil. (lineari)

- CS di stabilità (Dirichlet) – $\bar{q}$ è min. rel. $\frac{1}{2}\delta^2 V_{\bar{q}} = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_{\bar{q}}\,\delta q > 0 \quad \forall \delta q \neq 0$

$\mathbb{K}_{\bar{q}}$ è matrice def. pos.

Proprietà algebriche di $\mathbb{K}$, valutata nelle conf.ni di equil., condiz. la stabilità.
- minori princ. > 0
- autovalori (reali) > 0
- det > 0 (det $= 0 \Rightarrow$ perdita di stabilità)

- Se $q_0 = \bar{q}$ (conf.ne di rif. è equil.) in genere

$$\mathbb{P} = -\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0 = \bar{q}} \equiv 0 \Rightarrow \delta q = 0 \quad (\bar{q} = q_0)$$

- Nelle conf.ni equilibrate $\bar{q}$:

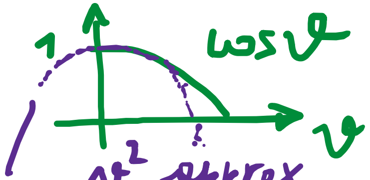
$$\delta V_{\bar{q}} = \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{\bar{q}}^T \delta q = 0 \Rightarrow \Delta V_2 = \cancel{\delta V} + \frac{1}{2}\delta^2 V + \dots$$

variaz. prima nulla — con segno legato alla variazione seconde

>0 STABILITÀ

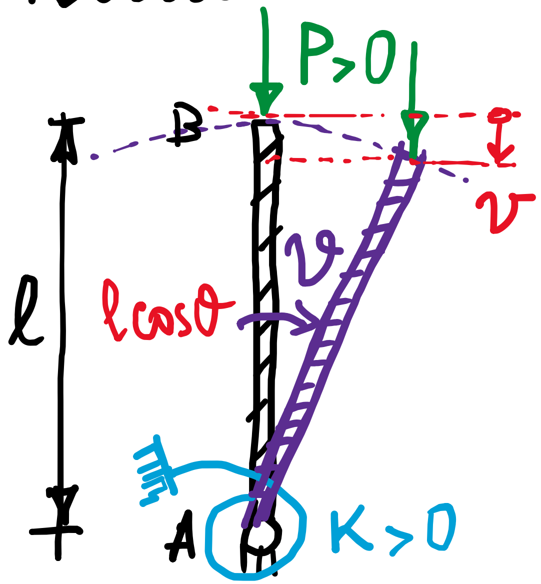
Esempio SDOF ($q_1 = \vartheta$)

$V_e = \mathcal{E} = U$ $\qquad$ $V_f = -\mathcal{L}_{ef}$ ← $P \cdot v$



$1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ approx quadratica $|\vartheta| << 1$

carico base P_0



$$\underset{\text{EPT}}{V(\vartheta)} = \underbrace{\frac{1}{2} K \vartheta^2}_{V_e} \underbrace{- P \cdot \underbrace{l(1-\cos\vartheta)}_{v}}_{V_f}$$

$$= \underset{>0}{K}\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - p(1-\cos\vartheta)\right) \qquad p = \frac{Pl}{K} = \frac{P}{K/l} \Rightarrow P = p\,\frac{K}{l}$$

moltiplicatore del carico

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = K\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\vartheta - p\sin\vartheta\right) \overset{\checkmark}{=} 0$$

come per approccio statico

Condiz. di staz. (CN di equil.) ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} K\bar\vartheta &= Pl\sin\bar\vartheta \\ \bar\vartheta &= p\sin\bar\vartheta \\ p(\bar\vartheta) &= \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \quad (\vartheta \neq 0) \end{aligned}}$$

eq.ne di equil. non lin.

$\vartheta_0 = 0$, conf.ne di riferimento è di equil.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = K(1 - p\cos\vartheta)$$

da valutare nelle $\bar\vartheta$ di equil. =

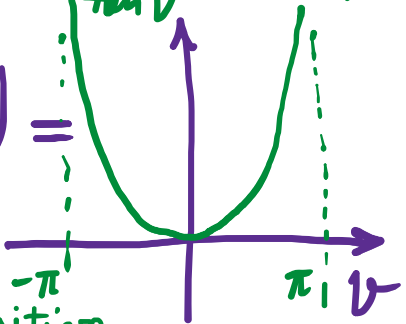
$\bar\vartheta = 0$ $\quad K(1-p) \gtreqless 0$

- $p < 1$ ∪ S
- $= 1$ — I
- > 1 ∩

$\bar\vartheta$: $p(\bar\vartheta) = \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \rightarrow V''(\bar\vartheta) = K\left(1 - \frac{\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\vartheta\right) =$

$\underset{>0}{}$ $\qquad = K\left(1 - \frac{\vartheta}{\tan\vartheta}\right)$ è positiva

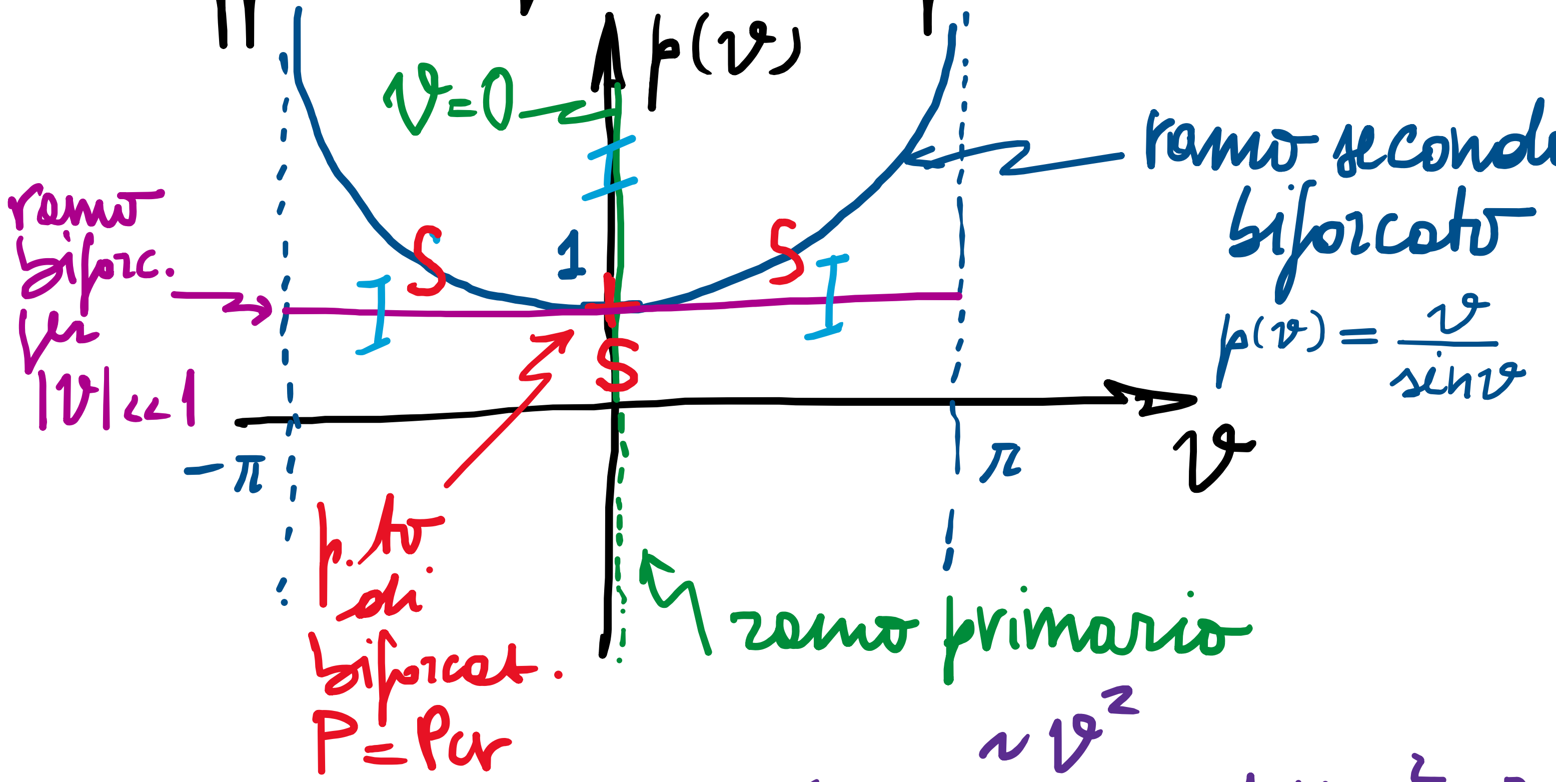
$1 - \frac{\vartheta}{\tan\vartheta} > 0 \ \forall \vartheta \neq 0$



conf.ni stabili ($\bar\vartheta \neq 0$)

(studio del segno di $\frac{1}{2}\delta^2 V$)

Mappa dei percorsi di equilibrio:



N.B.: perdita di stabilità della conf.ne di equil. indef. $\vartheta=0$ per $p=1 \Rightarrow P=P_{cr}=\dfrac{K}{\ell}$

(come da analisi con approccio statico)

Analisi al 2° ordine: $V(\vartheta)\simeq V_2(\vartheta)=\frac{1}{2}K\vartheta^2-P\ell\,\overbrace{\Big(\cancel{1}-\underbrace{\big(\cancel{1}-\tfrac{\vartheta^2}{2}\big)}_{\sim\cos\vartheta}\Big)}^{\sim\vartheta^2}$ "quadraticizzazione" di V

$$=\frac{1}{2}K\vartheta^2-P\ell\frac{\vartheta^2}{2}=\frac{1}{2}(K-P\ell)\vartheta^2$$

$\cos\vartheta=1-\dfrac{\vartheta^2}{2}+\dots$

spost. "geom. piccoli"

"linearizzazione" di V

$$V'(\vartheta)=\cancel{\tfrac{1}{2}}(K-P\ell)\cancel{2}\vartheta=0 \Rightarrow \underbrace{(K-P\ell)\vartheta=0}_{\text{eq.ne di equil. lin.}} \begin{cases} K\neq P\ell,\ \vartheta=0 \\ K=P\ell,\ \vartheta\ \text{arb.}\end{cases}$$

$$\underbrace{V''(\vartheta)=K-P\ell}_{\text{deriv. 2ª costante}}\ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\ 0 \quad \begin{matrix} K>P\ell \\ \boxed{K=P\ell} \\ K<P\ell \end{matrix}$$

perdita di stabilità ($P=P_{cr}$)

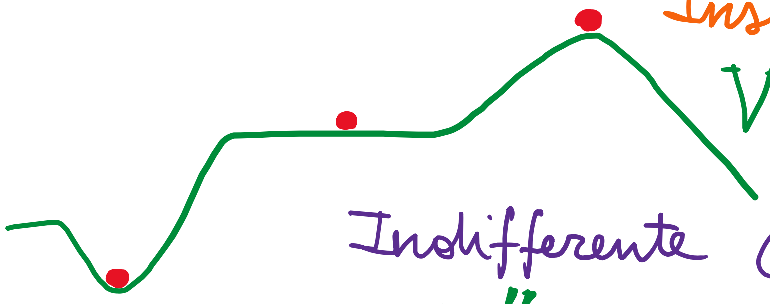
- Concetti fondamentali :

- Approccio energetico ai pb. di instabilità delle strutture -

- Concetto intuitivo per pb. puramente posizionale: V en. potenz.

pallina pesante (massante)

$g \downarrow$



Instabile (picco di energia potenziale)

$V'' < 0$ max. rel.

Indifferente (plateau di energia potenziale)

$V'' = 0$ en. pot. costante

Stabile (buca di energia potenziale)

min. rel.

$V'' > 0$

z

Condiz. di equilibrio $V' = 0$

stazionarietà della E.P.

- Generalizzazione per pb. strutturali, in primis "discreti" MDOF -

– Energia Potenziale Totale (EPT): $V = V(q) = V_e(q) + V_f(q)$.

di più variabili (sistemi MDOF) ⇒ funzione delle coordinate lagrangiane q

$q = \{q_i\}$ $i = 1, n$ gdl del sist.

V_e: Energia Potenziale elastica (sistema strutturale elastico lineare)

V_f: Energia Potenziale forze esterne conservative (es. campo gravitazionale)

con $V_f = -U_f = -L_{ef}$

"la" EP, "il" potenziale, lavoro forze esterne conserv.

– Condizione Sufficiente di stabilità: minimo locale dell'EPT (Th. di Dirichlet).

(garantisce la stabilità/esclude l'instabilità).

↑ visione strutturale

– Teoria del 2° ordine: $V(q) \simeq V_2(q) \sim q^2$ quadratica → V' lin., V'' cost.

– Esempio SDOF, prec. visto con approccio statico ⇒ mostra natura S/I delle configurazioni di equilibrio.

SOMMARIO (Lez. 17)

- Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture $\Rightarrow$ EPT(V).
- Th. di Dirichlet (CS di stabilità $\Rightarrow$ EPT min. rel.).
  mentre CN di equil. $\Rightarrow$ EPT stazionaria.
- Teoria del 2° ordine $\Rightarrow V \simeq V_2$:
  - Eq.ni di equil., da stazionarietà, linearizzate.
  - Segno variazione seconda (se $>0 \Rightarrow$ stabile).
- Esempio SDOF:
  - Scrittura dell'EPT.
  - Equil. per condiz. di stazionarietà.
  - Analisi di stabilità per studio segno variaz. 2ª.

spost. "grandi" "geom."	spost "piccoli" "geom."
non-lineari	lineari
funzione	cost.

Next step: Cenno all'instabilità di sistemi reali (con imperfezioni)
$\Rightarrow$ transizione continua, senza p.to di biforcazione.