Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 12

Modi principali di vibrare e oscillazioni libere (di sistemi dinamici MDOF)

Eq.ni del moto ("eq. dinamico" o eq.ni di Lagrange): [n eq.ni accoppiate] n: n° di gdl

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\,\ddot{\mathbf{q}} + \underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underset{n\times 1}{\mathbf{q}(t)} = \underset{n\times 1}{\underline{\mathbf{Q} = \mathbf{0}}} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 \end{bmatrix} \text{c.i.}$$

$\mathbf{q}(t)$: coordinate lagrangiane (gdl "fisici" del sistema dinamico)

Soluzioni in termini di moto armonico:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi}_i \sin(\omega_i t + \psi) = \boldsymbol{\phi} \cos(\omega t - \varphi) = \boldsymbol{\phi}\,(A \sin\omega t + B \cos\omega t)$$

ω: pulsazione

$\boldsymbol{\phi}$: vettore di ampiezze

$$\dot{\mathbf{q}} = \omega\,\boldsymbol{\phi}\cos(\omega t + \psi)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \underbrace{\boldsymbol{\phi}\sin(\omega t + \psi)}_{\mathbf{q}(t)} = -\omega^2\,\mathbf{q}(t)$$

$\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbb{B}\mathbf{x}$ < λ autovalore, $\mathbf{x}$ autovettore

Problema agli autovalori (generalizzato)

Sostituendo nelle eq.ni del moto:

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M})\,\boldsymbol{\phi}\,\cancel{\sin(\omega t + \psi)} \overset{\forall t}{=} \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M})\,\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}\ ; \quad \boxed{\mathbb{K}\,\boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\boldsymbol{\phi}_i}$$

ω_i^2 autovalore

$\boldsymbol{\phi}_i$ autovettore

$\Downarrow$

soluz. non banali sse: $\boldsymbol{\phi} \neq \mathbf{0}$

$$0 = \det(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = \underbrace{a_n(\omega^2)^n + a_{n-1}(\omega^2)^{n-1} + \ldots + a_2\omega^2 + a_1}_{\text{polinomio caratteristico associato a } \mathbb{K} \text{ e } \mathbb{M}} = 0$$

$\uparrow$ eq.ne caratteristica

grado n

n soluz. ω_i^2: $\omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \ldots \le \omega_i^2 \le \ldots \le \omega_n^2$ (1° modo ... n° modo; $\omega \uparrow$)

ω_i pulsazione propria o naturali del sistema; periodo proprio $T_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i} = \dfrac{1}{f_i}$

Proprietà delle autosoluzioni:

- ω_i^2 reali e positivi $\Rightarrow \omega_i = \sqrt{\omega_i^2} > 0$ reali (in genere distinti per sistemi strutturali)

  $\mathbb{K}, \mathbb{M}$ (reali) e definite positive simmetriche

- a due autovalori distinti corrisp. due autovettori mutuamente perpendicolari rispetto alle matrici $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$: $\sum_i \phi_{ri} \phi_{si} = \phi_r^T \mathbb{I} \phi_s = 0$

$$\omega_r : \phi_s^T (\mathbb{K} \phi_r = \omega_r^2 \mathbb{M} \phi_r)$$
$$\omega_r \neq \omega_s : \phi_r^T (\mathbb{K} \phi_s = \omega_s^2 \mathbb{M} \phi_s)$$
$$-$$

$$\phi_s^T \mathbb{K} \phi_r - \phi_r^T \mathbb{K} \phi_s = \omega_r^2 \phi_s^T \mathbb{M} \phi_r - \omega_s^2 \phi_r^T \mathbb{M} \phi_s$$

$$0 = \phi_r^T \mathbb{K}^{(T)} \phi_s - \text{"} = \omega_r^2 \phi_r^T \mathbb{M}^{(T)} \phi_s - \text{"} = \underbrace{(\omega_r^2 - \omega_s^2)}_{\neq 0 \text{ per ip.}} \boxed{\phi_r^T \mathbb{M} \phi_s = 0}$$

$$\boxed{\phi_r^T K \phi_s = 0}$$

- quindi, presi due autovettori ϕ_r, ϕ_s:

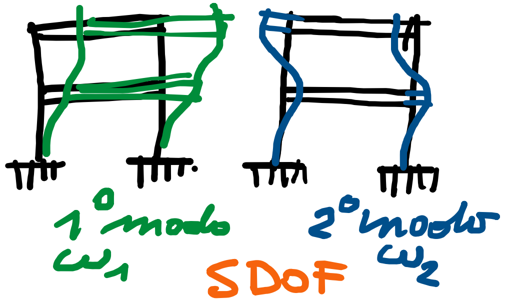
$$\phi_r^T \mathbb{M} \phi_s = \delta_{rs} M_r \begin{cases} r = s & M_r = \phi_r^T \mathbb{M} \phi_r > 0 \\ r \neq s & 0 \end{cases}$$

delta di Kronecker; massa modale

$$\phi_r^T \mathbb{K} \phi_s = \delta_{rs} K_r \begin{cases} r = s & K_r = \phi_r^T \mathbb{K} \phi_r > 0 \\ r \neq s & 0 \end{cases}$$

rigidezza modale

– Pertanto: ϕ_i autovettori $\Rightarrow$ forme modali



$$\phi_i^T \left(\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i \right) \Rightarrow \underbrace{\phi_i^T \mathbb{K}\phi_i}_{K_i} = \omega_i^2 \underbrace{\phi_i^T \mathbb{M}\phi_i}_{M_i}$$

MDOF

$$\tilde{\omega}_i^2 = \frac{\frac{1}{2}\tilde{\phi}_i^T \mathbb{K}\tilde{\phi}_i}{\frac{1}{2}\tilde{\phi}_i^T \mathbb{M}\tilde{\phi}_i} = \frac{\mathcal{E}_i^*}{T_i^*} = \frac{K_i}{M_i} \Rightarrow \underset{m}{\omega_i} = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \leftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

SDOF

Rapporto di Rayleigh (in dinamica)

$\dfrac{\text{En. elastica}}{\text{En. cinetica}}$ modo i

stime degli autovettori $\tilde{\phi}_i$ (buona stima delle pulsaz.)

– Autovettori: $(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i$, noti gli ω_i^2

– Forme standard: $(\mathbb{A}x = \lambda \mathbb{I} x)$

$$\underbrace{\mathbb{K}^{-1}\mathbb{M}}_{\mathbb{G}}\phi_i = \frac{1}{\omega_i^2}\phi_i$$

$\mathbb{G} = \mathbb{H}^{-1}$; $\mathbb{H} = \mathbb{G}^{-1}$ (def. pos. ma non simm.)

$$\underbrace{\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}}_{\mathbb{H}}\phi_i = \omega_i^2 \phi_i$$

(comunque autov. reali, poiché matrici sorgenti simmetriche)

- Normalizzazione degli autovettori $\phi_i \Rightarrow \alpha\phi_i$ è autov. (definiti a meno di cost. arb.)

- $1 = \|\phi_i\| = \sqrt{\phi_i^T \mathbb{I}\, \phi_i} = \sqrt{\sum_k \phi_{ik}^2} = 1$, $\phi_i \Rightarrow \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}$ $\qquad \frac{\cancel{\alpha}\,\phi_{iz}}{\cancel{\alpha}\,\phi_{is}}$ invariante

- $1 = M_i = \phi_i^T \mathbb{M}\, \phi_i$ massa modale unitaria versore

- $1 = K_i = \phi_i^T \mathbb{K}\, \phi_i$ rigidezza " "

- sistemi tipici $\phi_{ik} = 1$ < es. k ultimo piano $k = n$; primo $k = 1$

- Notazione matriciale

$$\Phi = [\phi_1 \,\vdots\, \phi_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_i \,\vdots\, \cdots \,\phi_n]$$ matrice degli autovettori (per colonne)

$\Phi_{ki} = \phi_{ik}$ comp. k di autov. ϕ_i

$$\Omega^2 = \mathrm{diag}[\omega_i^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

matrice degli autovalori

- $\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i = \mathbb{M}\phi_i\,\omega_i^2 \Rightarrow \Phi^T\left(\mathbb{K}\Phi = \mathbb{M}\Phi\,\Omega^2\right)$

$$\underbrace{\Phi^T \mathbb{K}\,\Phi}_{\mathcal{K} = \mathrm{diag}[K_i]} = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M}\,\Phi}_{\mathcal{M} = \mathrm{diag}[M_i]}\,\Omega^2$$

$$\Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} = \mathrm{diag}\left[\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}\right]$$

- Coordinate principali (significato matematico)

$$\underset{\text{comb. lineare}}{q = \sum_i \phi_i\, p_i} = \Phi\, p \qquad (p = \Phi^{-1} q) \quad \Phi \text{ invert. se autov. distinti}$$

p (comp. di q nelle base degli autovett.) (autov. lin. indip.)

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q = Q \Rightarrow \Phi^T\left(\mathbb{M}\Phi\ddot{p} + \mathbb{K}\Phi p = Q\right) \quad \underline{n \text{ eq.ni disaccopp.}}$$

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathrm{diag}[M_i]}\ddot{p} + \underbrace{\mathcal{K}}_{\mathrm{diag}[K_i]} p = \Phi^T Q = \mathbb{P} \longleftrightarrow M_i\ddot{p}_i + K_i p_i = \phi_i^T Q = P_i(t)$$

• Oscillazioni libere $\quad q_0 ; \dot{q}_0 \quad$ (composizione di n moti armonici)

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q = 0 \Rightarrow q(t) = \sum_i \phi_i (A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t)$$

$$q(0) = \sum_i \phi_i B_i = \underbrace{\Phi \mathbb{B}}_{\{B_i\}} \Rightarrow \mathbb{B} = \Phi^{-1} q_0$$

$$\Phi^T \mathbb{M} q_0 = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{m} \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} = m^{-1} \Phi^T \mathbb{M} q_0$$

$$B_i = \frac{\phi_i^T \mathbb{M} q_0}{\underbrace{\phi_i^T \mathbb{M} \phi_i}_{M_i}}$$

Analogamente:

$$\dot{q}_0 = \sum_i \phi_i \omega_i A_i = \underbrace{\Phi \Omega \mathbb{A}}_{\{A_i\}}$$

$$\mathbb{A} = (\Phi\Omega)^{-1} \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \Phi^{-1} \dot{q}_0$$

$$\Phi^T \mathbb{M} \dot{q}_0 = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{m} \Omega \mathbb{A}$$

$$\mathbb{A} = (m\Omega)^{-1} \underbrace{\Phi^T \mathbb{M}}_{} \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \underbrace{m^{-1} \Phi^T \mathbb{M}}_{\Phi^{-1}} \dot{q}_0$$

N.B.: $q_0 = \phi_j < \begin{matrix} B_j = 1 & i = j \\ B_i = 0 & i \neq j \end{matrix}$

Il sistema, rilasciato ($\dot{q}_0 = 0$) dal modo j, vibra solo secondo tale modo (selezione del generico modo di vibrare).

SOMMARIO (Lez. 12)

- Modi principali di vibrare
  - pulsazioni naturali^2 $\leftrightarrow$ autovalori.
  - forme modali $\leftrightarrow$ autovettori.
- Ortogonalità e normalizzazione degli autovettori.
- Autovalori da rapporto di Rayleigh (in dinamica) $\Rightarrow$ generaliz. SDOF.
- Scrittura compatta del pb. agli autovalori tramite matrici degli autovettori e degli autovalori.
- Trasformazione in coordinate principali $\Rightarrow$ disaccoppiamento delle eq.ni del moto (analisi dinamica modale).
- Oscillazioni libere (sovrapposizione di n moti armonici).

Next step: esempio 2DOF; smorzamento; Azioni Interne.