

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

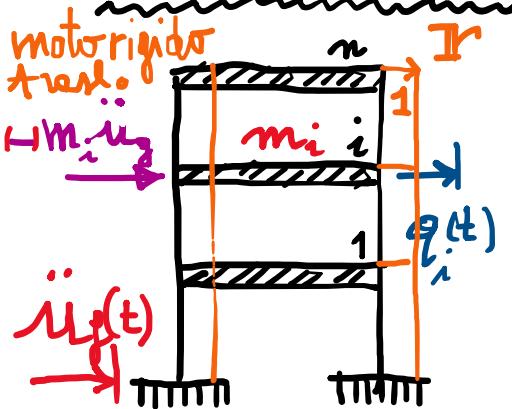
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 15

Azione sismica su sistemi MDOF (telaio multiplano "shear-type")

Generata per
irruzione in
sequito al



$$Q(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \ddot{u} = H(t)R - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{R^T}$$

Telaio shear-type :

- elementi ossistm. rigidi $\frac{EA}{l} \rightarrow \infty$
- travi infinitamente rigide anche fless. $\frac{EI}{l} \rightarrow \infty$
- colonne flessionalmente elastiche, $\frac{EI_c}{l_c} \text{ finita}$
- masse concentrate ai piani m_i

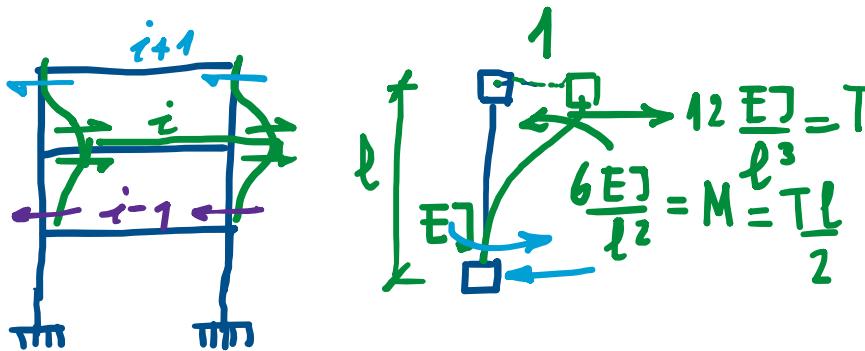
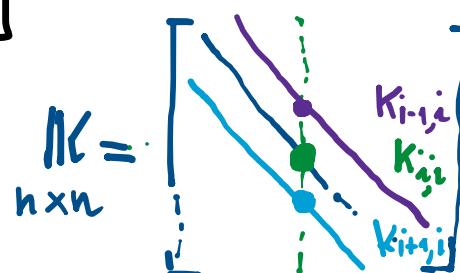
Moto del terreno.
→ dist. di orion
d'altz. profoz. ad m.i
e naturalm.-i_y(t)]

(spost. totale:
 $q_{t,i} = \ddot{u}_y + \ddot{q}_i$)

geli dinamici : spet. dei piani, relativi al terreno

• Matrice di masse: $M = \text{diag}[m_i]$
 $n \times n$

• Matrice di rigidezza tridiagonale



• Matrice di smorzamento (diagonalizzabile):

- alle Rayleigh o "classico" $C = \alpha M + \beta K$ (α, β det. fissando ζ_1, ζ_2 per i primi due modi)

- $C = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}]$, definendo i fattori dei smorz. modali

• Pb. agli autoveloci: $K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i \Rightarrow \frac{\omega_i^2}{\Phi_i} = \frac{K_i}{M_i} \Leftrightarrow K \Phi_i = M \Phi_i \omega_i^2$

↳ 5%
 $\left\{ \begin{array}{l} K_i: \text{rigidezza} \\ M_i: \text{massa} \\ \Phi_i: \text{autovettore} \\ M_i = \Phi_i^T M \Phi_i \end{array} \right.$

• Eq. m. del moto:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq^{\text{lt}} = (-) M\ddot{r} \quad \ddot{u}_g(t) \rightarrow M\ddot{r} + C\dot{r} + K_r(t) = -\Phi^T M \ddot{r} \quad \ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

n eq. m. discr.
(per i vari modi)

$$M_i \ddot{p}_i + C_i \dot{p}_i + K_i p_i(t) = -\lambda_i \ddot{u}_g(t)$$

modi i

$$M_i \ddot{p}_i + \frac{C_i}{M_i} \dot{p}_i + \frac{K_i}{M_i} p_i(t) = -\frac{\lambda_i}{M_i} \ddot{u}_g(t)$$

$$\sum_i^2 \ddot{p}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i(t) = -\Gamma_i \ddot{u}_g(t)$$

$$\Gamma = \{\Gamma_i\}$$

vettore dei fattori
di partecipazione
modale

[1]
è numero
puro
(rapporto di
massa)

es. ultimo
piano

$$\Gamma_i = \frac{\lambda_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T M \ddot{r}}{\Phi_i^T M \ddot{r}}$$

fattore di
partecipazione
modale (alla
stessa norma)

$$\Gamma_i = \sum_j \Phi_{ij} \Gamma_j \quad \left(\begin{array}{l} \Phi_{ij} = 1 \\ \sum_j \Gamma_j = 1 \end{array} \right)$$

N.B.: $M_i, \lambda_i; \Gamma_i$ assoc. a Φ_i
dip. de norme di Φ_i

$$M^{-1} \rightarrow \ddot{p} + M^{-1} C \dot{p} + M^{-1} K p(t) = -M^{-1} \Lambda \ddot{u}_g(t)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Gamma &= M^{-1} \Lambda \\ &= (\Phi^T M \Phi)^{-1} \Phi^T M \ddot{r} \\ &= \Phi^{-1} M^{-1} \Phi^{-T} \Phi^T M \ddot{r} = \Phi^{-1} \ddot{r} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma}$$

$$\boxed{\ddot{r} = \Phi \Gamma}$$

$$\Rightarrow \Gamma_j = \sum_i \Phi_{ij} \Gamma_i$$

$$\left(\begin{array}{l} \Phi_{ij} = 1 \\ \sum_i \Gamma_i = 1 \end{array} \right)$$

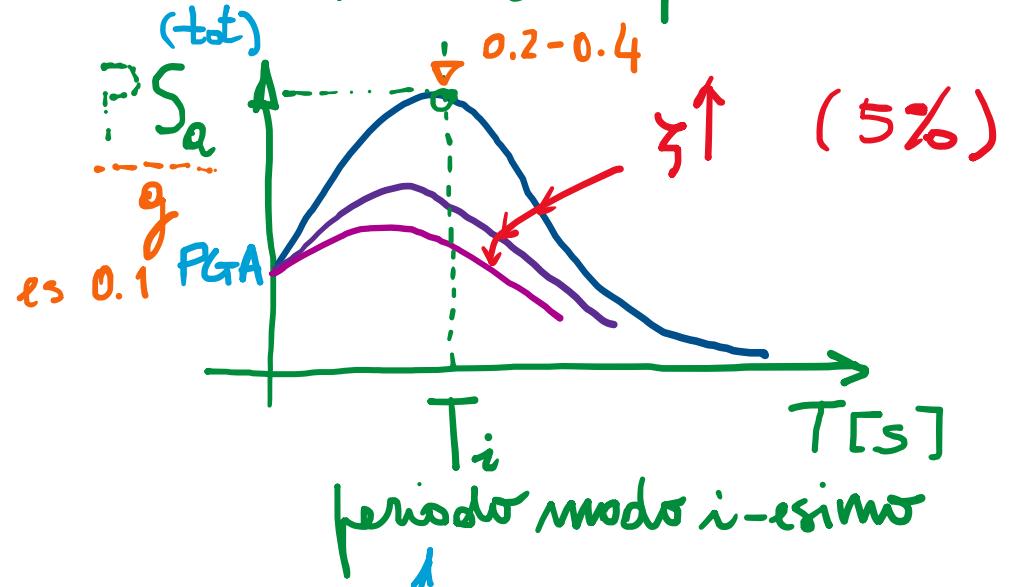
Risposta all'azione sismica:

- Tramite Int. di Duhamel

Metodo di Newmark

$$u_j(t) \rightarrow \psi_i(t) \rightarrow q_i(t) = \sum_j \phi_{ij} \psi_i(t)$$

- Tramite Spettro di risposta (ev. di progetto, in base a zonazione sismica)



Si "entra" nello spettro di risposta col periodo proprio del modo i -esimo
grado di libertà j -esimo

$$\begin{aligned} S_{di} &= \max_t \{p_i\} \Rightarrow PS_{ir} = \omega_i S_d \Rightarrow PS_a = \omega_i^2 S_d \\ S_{di} &= \frac{PS_{ei}}{\omega_i^2} \quad \text{L'pseudo ...} \\ \text{modi} \quad \psi_i^{\text{modo}} &= |\Gamma_i| \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} \quad \text{ruolo di "amplificazione", del fattore di partecipazione modale } \Gamma_i \\ &\quad \text{(che si registreranno in istanti di tempo diversi)} \end{aligned}$$

Stime spostamento complessivo \dot{q}_j^{modo}

$$= \sum_i |\phi_{ij}| \psi_i^{\text{modo}} \quad \text{(in genere eccess. conserv.)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_i |\phi_{ij}| \Gamma_i \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} \\ &= \sqrt{\sum_i (\phi_{ij} \Gamma_i \frac{S_{ei}}{\omega_i^2})^2} \end{aligned}$$

Square Root of Sum of Squares
SRSS (efficece maggiore.)

- Azioni interne (a partire da quelle modelli $\bar{A}_i(s)$)

$$A_{\text{max}}^{\text{RSS}} = \sqrt{\sum_i \left(\bar{A}_i(s_{ik}) \Gamma_i \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} \right)^2}$$

sez. caratteristiche
(vedi calcolo dei telai
col metodo degli sforzi.)
- Togli modelli alla base (N non nota nelle travi)

$$\begin{array}{c} j \\ | \\ | \\ | \\ \hline \end{array} \rightarrow \bar{E}_i = K \Phi_i = \omega_i^2 N \Phi_i = F_{I,i}$$

$$\bar{E}_{ij} \rightarrow \bar{E}_i = \sum_j \bar{E}_{ij} = \bar{E}_i^T r = \omega_i^2 |\Phi_i^T M^T r| = \lambda_i |\omega_i^2| = \tau_i \quad (\tau = \omega^2 N)$$

τ_i : somma di tutte le forze d'inerzia ripartite

$$\lambda_i \text{ dip. delle normalizz. di } \Phi_i$$

- Togli modelli max:

$$\tau_i^{\text{max}} = \tau_i \Phi_i^{\text{max}} = |\lambda_i| \omega_i^2 |\Gamma_i| \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} = \frac{\lambda_i}{M_i} S_{ei}$$

$$M_{eff,i}^2 = \frac{M_{eff,i} S_{ei}}{\lambda_i^2} = \tau_i^{\text{max}} \frac{S_{ei}}{\omega_i^2}$$

$$M_{eff,i} = \frac{\lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T M^T r)^2}{\Phi_i^T M^T M \Phi_i}$$

massa modelli efficienti
(indip. da norm. di Φ_i)

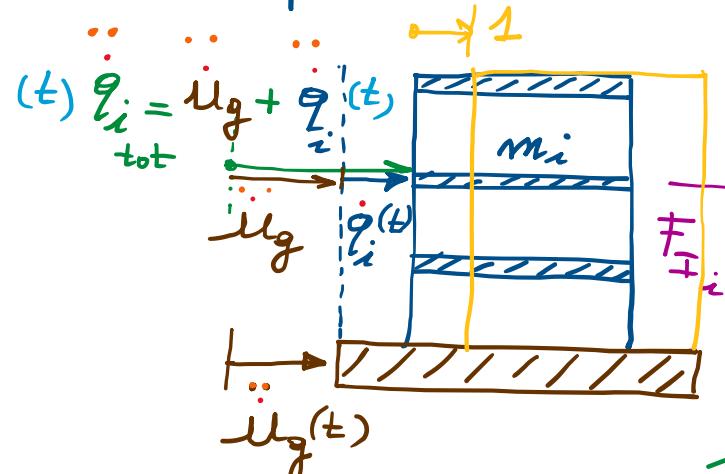
$$\begin{aligned} m_{tot} &= \sum_i m_i = \|r^T M r\| = \Gamma^T \underbrace{M^T M}_{m} \Gamma \underbrace{\Gamma^T \Gamma}_{m^{-1} \Gamma} \\ &= \Gamma^T \Gamma = \sum_i \Gamma_i \lambda_i = \sum_i \frac{\lambda_i^2}{M_i} = \sum_i M_{eff,i} \end{aligned}$$

proprietà "fisica" delle masse modelli efficienti

[M]
dim.
di
masse

Concetti fondamentali:

- Risposte sismica (con specifico rif. ai "telesi shear-type") :



Eq. ni del moto:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = - \left\{ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{array} \right\} \ddot{u}_g(t)$$

$$M \ddot{q} = \text{diag}[m_i]$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_i & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

analisi dinamica
modale

$$\Phi^T (- \dots = \dots)$$

$$q = \Phi^T p$$

matrice
degli autovettori

$$(K \Phi_j = \omega_j^2 M \Phi_j)$$

r : rigid body
motion vector
di ampiezza
unitaria

$$\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{M \ddot{q}} \ddot{q} + \underbrace{\Phi^T C \Phi}_{C} \dot{q} + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{K} q = - \underbrace{\Phi^T M \ddot{u}_g}_{n \times 1} \ddot{u}_g(t)$$

$$\text{diag}[M_i = \Phi_i^T M \Phi_i]$$

$$\text{hyp. diag}[C_i = \Phi_i^T C \Phi_i]$$

$$\text{diag}[K_i = \Phi_i^T K \Phi_i]$$

vettore delle
mosse per i punti
modelli:

$$\underbrace{\Lambda_i = \Phi_i^T M \ddot{u}_g}_{n \times 1}$$

(spostamento
traslazionale)

- Premoltiplicando per ω_n^{-1} :

$$\ddot{\mathbf{P}} + \omega_n^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}} + \omega_n^{-1} \mathbf{K} \mathbf{P} = -\omega_n^{-1} \underbrace{\mathbf{L}}_{\Gamma} \ddot{\mathbf{r}}_g(t)$$

$$\Gamma = \Phi^T M L r$$

$$ML = \text{diag} [m_i] \text{ di massi dei primi modelli}$$

$$\omega_n = \text{diag} [M_i] \text{ messe modelli}$$

$$M_i = \Phi_i^T M L \Phi_i \quad \dots$$

A modo i

$$\ddot{\mathbf{p}}_i(t) + \frac{c_i}{M_i} \dot{\mathbf{p}}_i(t) + \omega_i^2 \mathbf{p}_i(t) = -\underbrace{\Gamma_i}_{\frac{K_i}{M_i}} \ddot{\mathbf{r}}_g(t)$$

"amplifica"
 $\ddot{\mathbf{r}}_g$ per il modo i -esimo

$$\Gamma_i = \left\{ \Gamma_i = \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T M L r}{\Phi_i^T M L \Phi_i} \right\}$$

N.B. M_i, Λ_i, Γ_i
dipendono dalla
normalizzazione
degli autovet. Φ_i .

fattori di partecipazione modele:

coeff. moltiplicativo di $\ddot{\mathbf{r}}_g(t)$
per il generico modo i

L SDOF $\frac{m}{M} = 1$

- Proprietà:

$$\Gamma = \omega_n^{-1} \mathbf{L}$$

$$= (\Phi^T M L \Phi)^{-1} \cdot \underbrace{\Phi^T M L r}_{\Gamma}$$

$$= \underbrace{\Phi^{-1} M^{-1} \Phi^{-T}}_{\text{II}} \underbrace{\Phi^T M L r}_{\text{II}} = \Phi^{-1} r \Rightarrow r = \Phi \Gamma$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{se } j=n \\ \sum \Gamma_i = 1 \end{array} \right)$$

$$q_i = \Phi P$$

$$r = \Phi \Gamma$$

$$1 = r_j = \sum_i \Phi_{ij} \Gamma_i$$

modo i

Γ_i sono le componenti
di r nelle base degli
autovettori
 $r = \sum_i \Phi_i \Gamma_i$

- Massa moduli efficaci :

$$M_{\text{eff},i} = \Lambda_i \Gamma_i = \Lambda_i \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\Lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^\top M \mathbf{I})^2}{\Phi_i^\top M \Phi_i} > 0$$

$\sim \frac{M^2}{M}$ è una massa
 $\sim \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 \Phi_i^2}$ [M] indipendente
 $\cancel{\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 \Phi_i^2}}$ da come è normalizzato
 Φ_i

- Esprimono il taglio modale alla base massimo secondo i vari modi :

$$\Sigma_i^{\text{max}} = M_{\text{eff},i} S_{a,i} \leftrightarrow \text{relazione tipo } F = m \frac{\overset{\text{forza}}{a}}{\underset{\text{massa}}{m}} \text{ accelerazione}$$

↑ è la massa strutturale coinvolta nel modo i a dare il taglio alla base massimo.

- Proprietà "fisica": $\sum_i M_{\text{eff},i} = m_{\text{tot}} = \sum_j m_j$ masse totale del telaio
 (in genere i primi due/tre modi rubano una larga percentuale (anche ~90%) della massa totale dell'edificio).

SOMMARIO (Lec. 15)

- Risposta sismica di strutture MDOF (telsi "shear-type").
- Equazioni del moto con azione sismica per effetto di trascinamento.
- Analisi dinamica modale con disaccoppiamento in N equi. & moduli.
- Determinazione delle risposte tramite spettro di risposta.
- Stime (SRSS) degli indici di risposta sismica (spost., AI, teglio alla base).
- Parametri di partecipazione modale (masse, fattori) e masse modali efficaci (legate alle stime del teglio modale alla base massimo).

Next step: (Dinamica dei sistemi continui).

II: Instabilità delle strutture (di partendo dall'analisi dinamica) -