

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

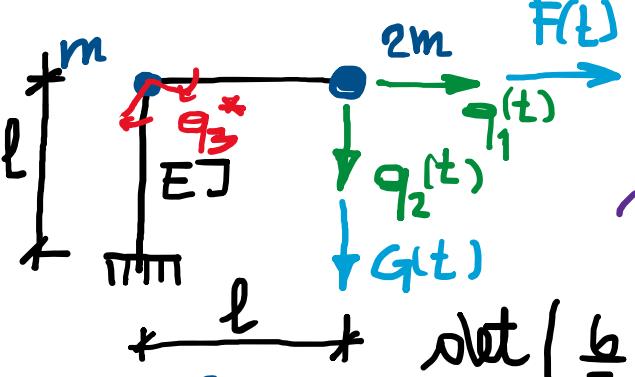
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 13

Esempio 2DOF \Rightarrow Modi principali di vibrazione : $K\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i$



$$M = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; K = \frac{6}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrice di massa matrice di rigidezza

ω_i : pulsazione naturale

ϕ_i : forma modale

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0$$

$$\det \left(\frac{6}{l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \omega_i^2 m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{se} \Leftrightarrow \text{pb. agli autovettori generali.}$$

$$\lambda_i = \omega_i^2 \frac{ml^3}{EJ}$$

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i \end{bmatrix} \right) = (\frac{48}{7} - 3\lambda_i)(\frac{12}{7} - 2\lambda_i) - \frac{18^2}{7^2} = 0$$

eq. ne caratteristica (2° grado)

$$7\lambda_i^2 - 22\lambda_i + 6 = 0$$

$$(48-21\lambda_i)(12-14\lambda_i) - 18^2 = 0$$

$$15(16-7\lambda_i)2(6-7\lambda_i) - 18 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$\cancel{15} \cdot \cancel{7} \lambda_i^2 - \cancel{4}(16+6)\lambda_i + \cancel{16 \cdot 6} - \cancel{18 \cdot 3} = 0$$

$$\text{soltuzione analitica } \lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-42}}{7}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{79}}{7} =$$

$$\lambda_1 = .3017$$

$$\lambda_2 = 2.841$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = .5493 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} & \text{I modo di vibrare} \\ \omega_2 = 1.686 & \text{II modo , ,} \end{cases}$$

pulsazioni proprie (freq. proprie $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ [Hz])

Autovettori:

$$\begin{bmatrix} \frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{cases} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

N.B.: due eq. m. linearmente dipendenti per $\lambda = \lambda_i$ ($i=1,2$)

$$-\frac{18}{7}\phi_{i1} + 2\left(\frac{6}{7} - \lambda_i\right)\phi_{i2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi_{i1}}{\phi_{i2}} = \left(\frac{\frac{9}{7}}{6 - 7\lambda_i}\right) = \frac{-1}{\frac{6 - 7\lambda_i}{7}}$$

$$i=1, \lambda_1 \Rightarrow \frac{\phi_{11}}{\phi_{12}} = .4320$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_1 = \begin{cases} .4320 \\ 1 \end{cases}$$

$$i=2, \lambda_2 \Rightarrow \frac{\phi_{21}}{\phi_{22}} = -1.543$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} -1.543 \\ 1 \end{cases}$$

Altre normalizzazioni:

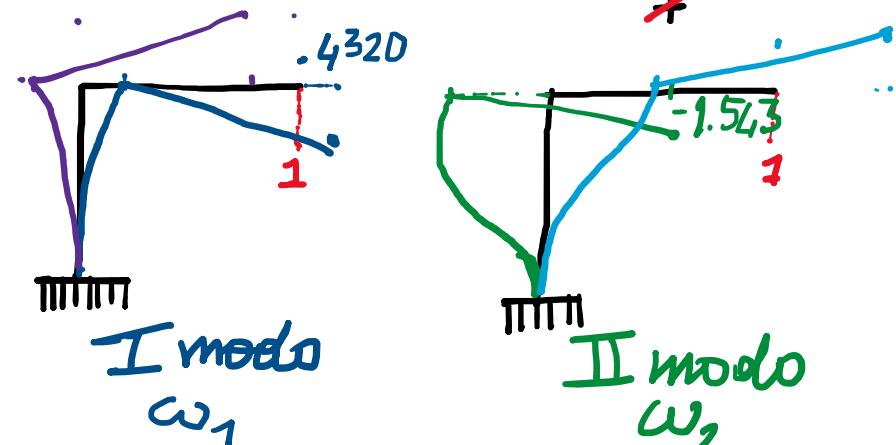
- $\|\Phi_i\| = 1$ $\Phi_i = \alpha_i \begin{cases} \phi_{i1} \\ 1 \end{cases}$, $\alpha_i = \frac{1}{\|\Phi_i\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_{i1}^2}} \left(\phi_{i1} \frac{\phi_{i1}}{\|\Phi_i\|} \right)$ (definite a meno di un fattore di proporzionalità arbitrario)

norme unitarie

$$\Phi_i^T M \Phi_i = M_i = \sum_m \beta_i \left\{ \Phi_{i1}, 1 \right\} m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \beta_i \left\{ \Phi_{i1} \right\}$$

merse modali unitarie

$$\beta_i^2 \left\{ \Phi_{i1}, 1 \right\} m \left\{ \frac{3\Phi_{i1}}{2} \right\} = m \beta_i^2 (3\Phi_{i1}^2 + 2)$$



$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} .2700 \\ .6250 \end{cases}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} -.5103 \\ .3307 \end{cases}$$

Coordinate principali:

$$q = \Phi p = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \sum \phi_i p_i = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} .2700 & -.5103 \\ .6250 & .3307 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_1 = .2700 p_1 - .5103 p_2 \\ q_2 = .6250 p_1 + .3307 p_2 \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} = \frac{I}{2 \times 2}$$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} .8101 & 1.250 \\ -1.531 & .6614 \end{bmatrix}$$

Relaz. inversa:

$$p = \Phi^{-1} q = (\cancel{\Phi^T M \Phi})^{-1} \cancel{\Phi^T M} q \Rightarrow p_i = \frac{\phi_i^T M q_i}{M_{ii}} \rightarrow \begin{cases} p_1 = .8101 q_1 + 1.250 q_2 \\ p_2 = -1.531 q_1 + .6614 q_2 \end{cases}$$

Disaccoppiamento delle eq.m. del moto:

$$\cancel{m\ddot{\omega}} = m\ddot{\Phi}; K = \ddot{\Phi}^T K \ddot{\Phi} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} .3017 & 0 \\ 0 & 2.841 \end{bmatrix}$$

$$K\ddot{\Phi} = M\ddot{\Phi}\Omega^2 \Rightarrow \Omega^2 = \cancel{m\ddot{\omega}}^{-1} K$$

$$\begin{cases} m\ddot{p}_1 + \frac{EJ}{l^3} .3017 p_1(t) = .2700 F(t) + .6250 G(t) = P_1(t) \\ m\ddot{p}_2 + \frac{EJ}{l^3} 2.841 p_2(t) = -.5103 F(t) + .3307 G(t) = P_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(t) \Rightarrow q(t) = \Phi p(t)$$

risposta finale

(fisich.)
coordin.
lagrang. ↓

coord.
principali
(metametiche)

Determinazione numerica delle autosoluzioni (metodo iterazione vettoriale inversa)

Forme standard : $\begin{cases} G\phi_i = \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i, \quad G = K^{-1} M \\ H\phi_i = \omega_i^2 \phi_i, \quad H = M^{-1} K \end{cases}$

$\phi_i^{(0)} \rightarrow \hat{\phi}_i^{(1)} = G\phi_i^{(0)} \rightarrow \text{conv. a } \phi_1 \text{ (prima autor.)} \quad \text{iter. 1}$
 $\hat{\phi}_i^{(1)} \leftarrow H\phi_i^{(0)} \rightarrow \text{conv. a } \phi_n \text{ (ultimo iterativo) }$
 processo iterativo

Orthogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT (de miserie ad ogni iterazione per ritirare di convergere sugli autovettori già precedentemente determinati).

Algoritmo iterativo (pseudo-code)

- $\phi^{(0)}$ trial vector
- $\hat{\phi}^{(1)} = G\phi^{(0)}$
- $\phi^{(1)} \leftarrow \hat{\phi}^{(1)}$ tramite normalizzazione
- $\omega_{i,1}^2 = \frac{\phi^{(1),T} K \phi^{(1)}}{\phi^{(1),T} M \phi^{(1)}}$ stima dell'autovaleore da rapporto di Rayleigh (successiva)
- $\left| \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega_{i,i}^2}{\omega_{i,i}^2} \right| \leq \text{tol} \approx 10^{-4} - 10^{-6} \rightarrow \text{end}$

SOMMARIO (Lec. 13)

- Esempio 2DOF: modi principali di vibrazione.
- Soluzione (analitica) dell'eqn. caratteristica \Rightarrow autovettori.
- Determinazione degli autovettori (del pd. egli autovol. originario), a meno di costante arbitraria.
- Normalizzazione degli autovettori.
- Trasformazione in coordinate principali e diagonalizzazione delle eq.m del moto.
- Calcolo numerico delle autosoluzioni (metodo dell'iterazione vettoriale inversa).

Next step: introduzione dello smorzamento ; sezioni interne (modelli).