Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

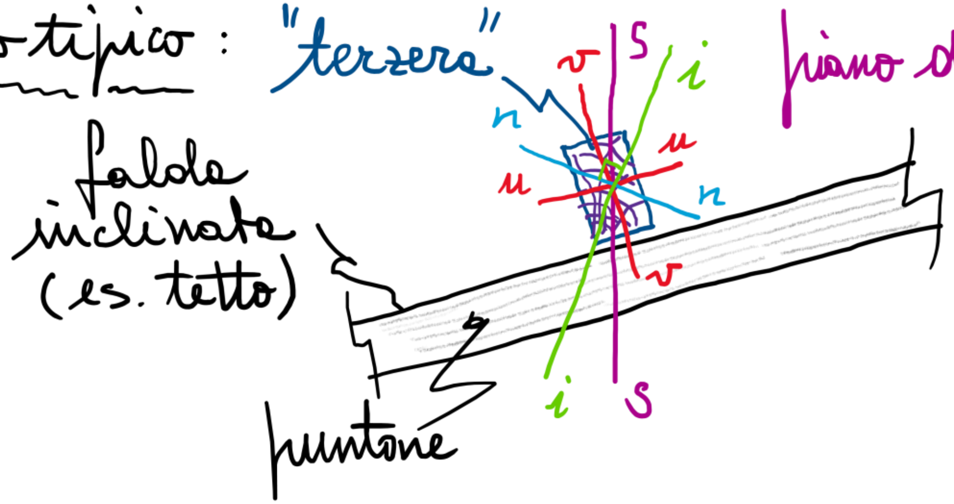
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

- DSV – Sollecitazioni composte (N, M):
  - flessione (deviata) ⇝ come composizione di due flessioni rette, M_x e M_y.
  - tenso-flessione (retta o deviata) ⇝ " " " azione assiale e flessione, N e M_x (e M_y)

- Flessione deviata: in generale, l'asse di sollecitazione (asse s–s), traccia del piano di sollecitazione (contenente le coppie flettenti agenti sulle basi del prisma di DSV) sul piano della sezione, non coincide con un asse principale d'inerzia della sezione (eventualità che condurrebbe al caso visto di flessione retta).

Esempio tipico: "terzera"

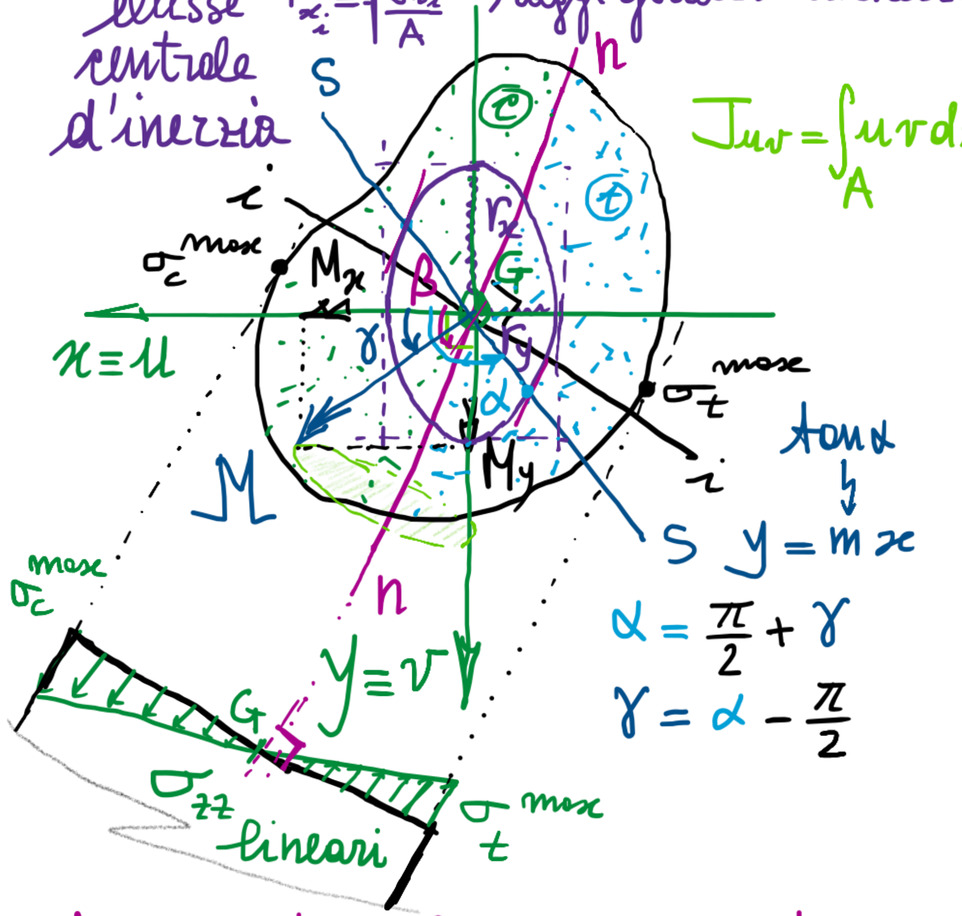


piano di sollecitazione verticale (carichi gravitazionali)

piano di inflessione (dell'asse inflesso della trave) atteso in generale discosto dal piano s–s: quindi con asse di inflessione i–i distinto da asse di sollecitazione s–s.

Ellisse centrale d'inerzia $r_{x_i} = \sqrt{\frac{J_{x_i}}{A}}$ raggi giratori d'inerzia

$J_{uv} = \int_A uv\,dA = 0$



$\alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma$

$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$

- Vettore coppia M, ortogonale a s-s, generalmente inclinato nel piano, di componenti M_x e M_y rispetto agli assi principali d'inerzia della sezione:

$$\begin{cases} M_x = M\cos\gamma \\ M_y = M\sin\gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{M_y}{M_x} = \frac{\cancel{M}\sin\gamma}{\cancel{M}\cos\gamma} = \tan\gamma = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

- Sforzo normale per sovrapposizione degli effetti di due flessioni rette:

$$\sigma_{zz}(x,y) = +\frac{M_x}{J_x}\,y - \frac{M_y}{J_y}\,x$$

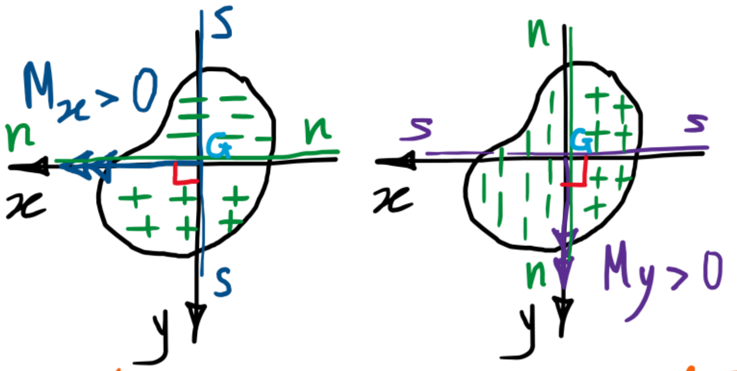
lineare in x e y

Asse neutro: luogo dei punti x, y con $\sigma_{zz} = 0$

$$y = \frac{M_y}{M_x}\frac{J_x}{J_y}\,x$$ (retta per G, di inclinazione β ris. a x)

$$= \underbrace{\tan\gamma\,\frac{\cancel{A}\,r_x^2}{\cancel{A}\,r_y^2}}_{m'}\,x = \underbrace{\tan\beta}_{m'}\,x$$

$$\boxed{\tan\beta = \tan\gamma\,\frac{r_x^2}{r_y^2}}$$



($\sigma_{zz} = 0$ in $x = y = 0$, cioè in G)

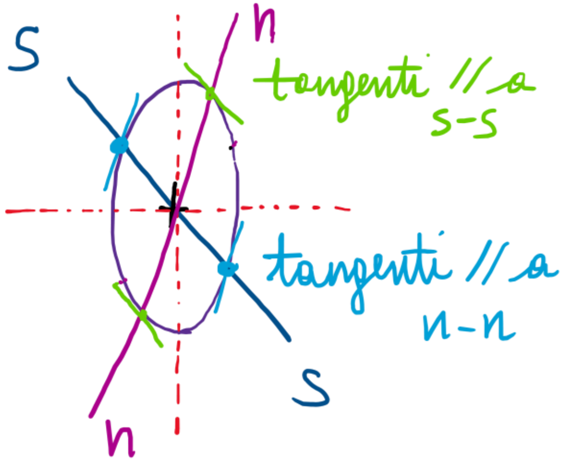
asse n-n baricentrico

(per avere 0, con + e −, n-n nel I e III quadrante)

$$\underbrace{\tan\beta}_{>0} = \underbrace{\tan\gamma}_{>0}\, \underbrace{\frac{r_x^2}{r_y^2}}_{>1\ (>0)} \qquad \gamma < \beta < \frac{\pi}{2}:$$

n-n compreso nel cono tra il vettore coppia M e l'asse con inerzia minore (y)

$$= -\frac{1}{\tan\alpha}\,\frac{r_x^2}{r_y^2} \Rightarrow \boxed{m\, m' = \tan\alpha \tan\beta = -\frac{r_x^2}{r_y^2}}$$



Significato in geometria proiettiva:

L'asse neutro è il coniugato dell'asse di sollecitazione in una relazione di polarità avente come conica fondamentale l'ellisse centrale d'inerzia della sezione. ⇒ Polarità d'inerzia o involuzione dei diametri coniugati dell'ellisse centrale d'inerzia. (v. es. Belluzzi)

N.B.: in generale n-n non è ortogonale a s-s; quindi i-i, ortogonale a n-n, non coincide con s-s (piano di inflessione devia dal piano di sollecitazione).

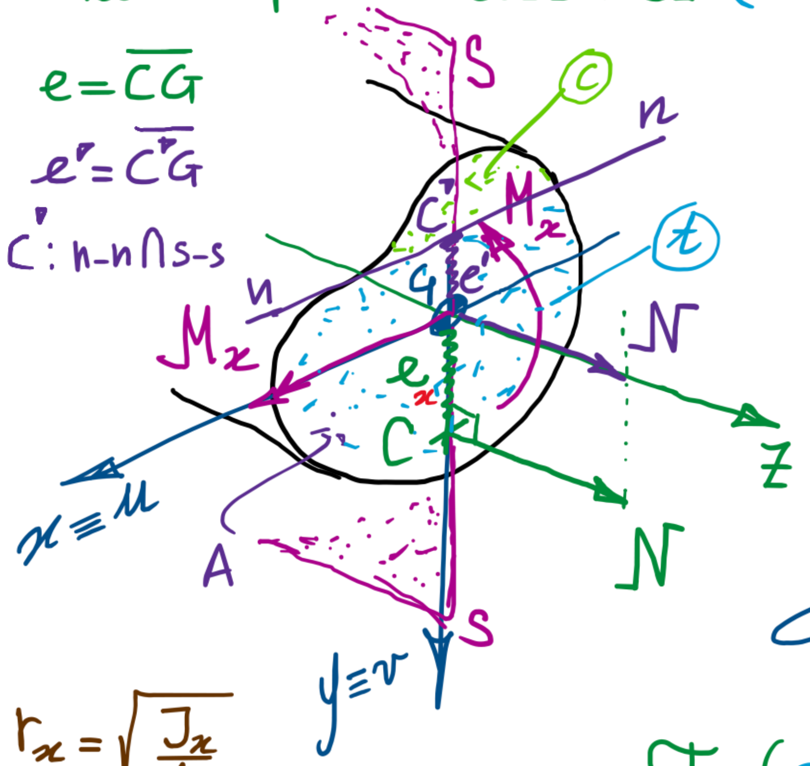
$$\text{n-n coniugato di s-s} \overset{\text{CNS}}{\Longleftrightarrow} J_{ns} = \int_A n\, s\, dA \equiv 0$$

• Tenso (presso) – flessione (retta): N centrata in G (assiale) + M_x (x asse principale)
azione assiale o normale — flessione retta

$e = \overline{CG}$

$e' = \overline{C'G}$

C' : $n\text{-}n \cap s\text{-}s$



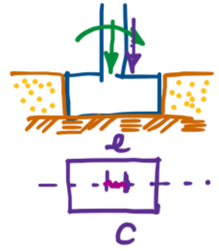
$r_x = \sqrt{\dfrac{J_x}{A}}$

• staticamente equivalente a N centrata in C (centro di sollecitazione), eccentrico (di eccentricità e) rispetto a G:
azione normale

$e = \overline{CG}$

$$M_x = N\, e_x \; ; \quad e_x = \frac{M_x}{N}$$

esempio (di presso-flessione): plinto di fondazione



Campo di sforzo per sovrapposizione degli effetti:

$$\sigma_{zz}(x, y) = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\text{cost}} + \underbrace{\frac{M_x}{J_x}\, y}_{\text{lineare}} \left(- \frac{M_y}{J_y}\, x \right) \quad \text{lineare}$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N e}{A r_x^2}\, y = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e}{r_x^2}\, y\right)$$

Asse neutro: $\sigma_{zz} = 0$

$$1 + \frac{e}{r_x^2}\, y = 0 \Rightarrow y = -\frac{r_x^2}{e} = -e'$$

$$e' = \frac{r_x^2}{e} \; ; \quad \boxed{e\, e' = r_x^2}$$

Asse n-n non più baricentrico, bensì parallelo all'asse x ma a sua volta eccentrico di e' dalla parte opposta di C rispetto a G

$e \cdot e^{\triangledown} = r_x^2$; $\sqrt{e \cdot e^{\triangledown}} = r_x$ (r_x è medio geometrico tra e ed $e^{\triangledown}$)

- Relazione con significati in geometria proiettiva:

- l'asse neutro n-n è l'antipolare del centro di sollecitazione C rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione (antipolarità d'inerzia).

antipolare ⇒ simmetrica della polare rispetto al centro della conica (baricentro G)

- $C^{\triangledown}$ e C sono punti coniugati in una involuzione relativa all'ellisse d'inerzia.

- Osservazioni:

- L'asse neutro, parallelo all'asse x (ortogonale all'asse $s-s \equiv y-y$), eccentrico di $e^{\triangledown}$ rispetto a G, dalla parte opposta di C, può tagliare (sezione parzializzata, cioè parzialmente tesa/compressa) o meno (sezione completamente tesa/compressa) la sezione. ⇒ rilevante per materiali a comportamento non simmetrico a traz./compr. (es. materiali lapidei; CLS, suolo)

- Dalla relazione $e^{\triangledown} = r_x^2 / e$, è come se n-n e C tendessero a respingersi, ciascuno da parti opposte rispetto a G.

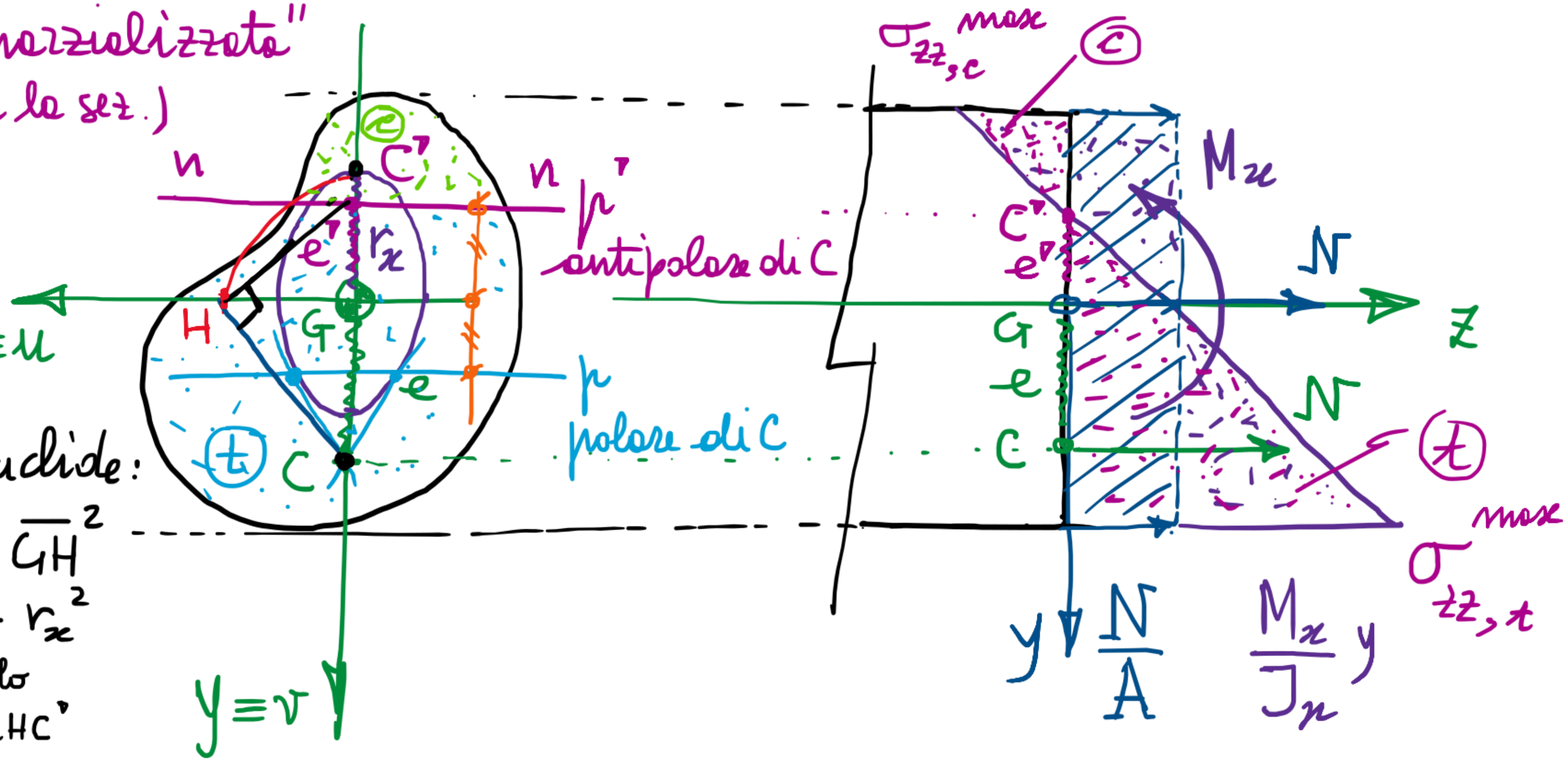
– $e = 0$ ($M_x = 0$, solo N) → $e' \to \infty$ (non c'è asse n-n) $\sigma_{zz} = \frac{N}{A} = \text{cost}$

– $e \to \infty$ ($N = 0$, solo M_x) → $e' = 0$ (asse n-n baricentrico) $\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x}\, y$

$$e\, e' = r_x^2 \qquad e' = \frac{r_x^2}{e}$$

– Quindi, avvicinando C, centro di sollecitazione, dall'∞, verso G, baricentro, l'asse n-n (e quindi C', coniugato di C) viene respinto, spostandosi dall'asse x (C' da G) dalla parte opposta, "schizzando" all'∞, se $C \equiv G$ ($e = 0$).

sezione "parzializzata" (n-n taglia la sez.)



II Th. di Euclide:

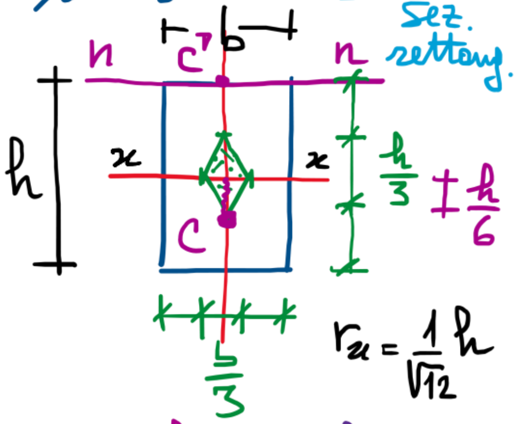
$$\overline{CG} \cdot \overline{C'G} = \overline{GH}^2$$

$$e \cdot e' = r_x^2$$

per triangolo rettangolo CHC'

Nocciolo centrale d'inerzia: luogo dei C aventi n-n esterni alla sezione.

Es. sez. rettang.



$r_x = \frac{1}{\sqrt{12}}\, h$

$e = \frac{h}{6}$, $e' = \frac{h}{2}$

(C interno al terzo medio)

Tenso-flessione deviata (formulazione unificante matriciale)

- Campo di sforzo (lineare): $$\sigma_{zz}(x,y) = K\cdot 1 - K_y\, x + K_x\, y = \overbrace{\{1\ \ x\ \ y\}}^{\boldsymbol{x}^T} \cdot \overbrace{\{K\ \ {-K_y}\ \ K_x\}^T}^{\mathbb{K}^T} = \boldsymbol{x}^T \cdot \mathbb{K}$$
  vettore "posizione" (ai fini del calcolo di $\mathbb{J}$)

- Equivalenza statica (tra σ_{zz} e N, M_x, M_y):

$\mathbb{K}$ vettore delle costanti

$$\mathbb{M} = \begin{Bmatrix} N \\ -M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \int_A \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} \underbrace{\sigma_{zz}}_{\boldsymbol{x}^T\mathbb{K}}\, dA = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \cdot \{1\ \ x\ \ y\} \cdot \overbrace{\begin{Bmatrix} K \\ -K_y \\ K_x \end{Bmatrix}}^{\mathbb{K}} dA = \underbrace{\int_A \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & yx & y^2 \end{bmatrix} dA}_{\mathbb{J}} \cdot \mathbb{K}$$

vettore delle risultanti o delle A.I.

$$= \mathbb{J} \cdot \mathbb{K} \quad \text{con} \quad \mathbb{J} = \int_A \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^T dA = \begin{bmatrix} A & S_y & S_x \\ S_y & J_y & J_{xy} \\ S_x & J_{xy} & J_x \end{bmatrix}$$

matrice delle inerzie o delle caratteristiche geometriche ($\mathbb{J}^T = \mathbb{J}$, def. pos.)

- Risolvendo rispetto a $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{M}}$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = \boldsymbol{x}^T \cdot \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{M}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{K} = \left\{ \frac{N}{A}\ \ {-\frac{M_y}{J_y}}\ \ \frac{M_x}{J_x} \right\}^T$$

negli assi principali

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y}\, x + \frac{M_x}{J_x}\, y$$

$$\mathbb{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & & \\ & \frac{1}{J_x J_y - J_{xy}^2} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- Se $G \in x, y$: $S_x = S_y = 0$
- Se x, y coniugati: $J_{xy} = 0$

assi principali d'inerzia: $\mathbb{J}^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{A}\ \ \frac{1}{J_y}\ \ \frac{1}{J_x}\right]$