

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

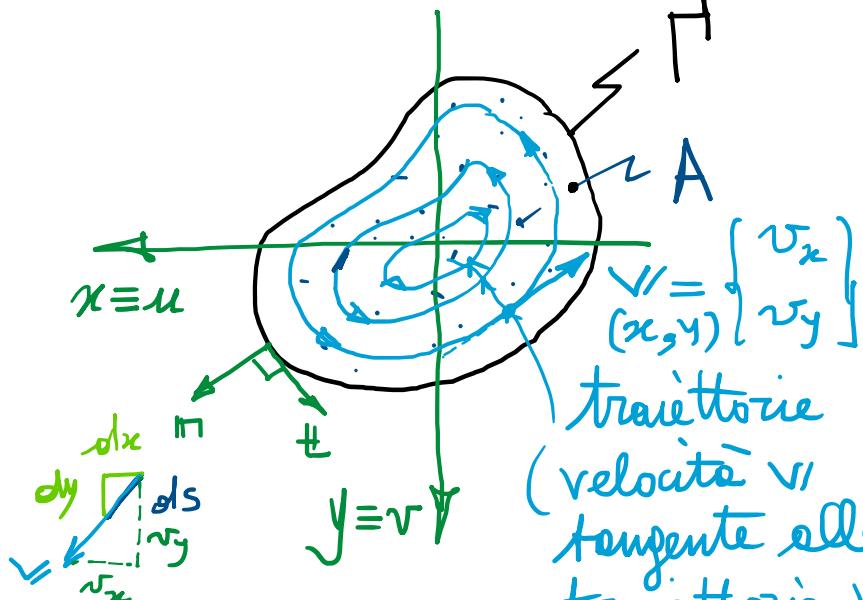
[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 20

Analogie fisiche (del pb. della torsione con altri fenomeni fisici retti da equazioni governanti formalmente simili).

- Esse possono risultare utili a:
  - cercare ed interpretare le soluzioni cercate del pb. in esame;
  - concepire eventuali approcci sperimentali utili ad osservazione qualitativa e/o quantitativa;
  - individuare le caratteristiche salienti del pb. e delle risposte, a fini ingegneristici, in particolare riguardo la definizione delle capacità portanti e del comportamento a torsione.
- Meccanica dei Solidi
- Si presentano due analogie principali, in ambito "Meccanica":
  - analogia idrodinamica (Lord Kelvin ~1869) " dei Fluidi"
  - analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~1903) " delle Strutture"

## Analogie idrodinamiche (Lord Kelvin, 1869)



- Si presenta le seguenti analogie formule (stesse eq. in governanti):

$$\tau_z = \begin{cases} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{cases} \leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{cases} v_x \\ v_y \end{cases}$$

$$\Phi = \Phi(x, y) \leftrightarrow \Phi = \Phi(x, y)$$

f.n. di spostamento di Airy f.n. di flusso ("stream function")

$$\tau_{zx} = \Phi_{,y}; \tau_{zy} = -\Phi_{,x} \leftrightarrow v_x = \Phi_{,y}; v_y = -\Phi_{,x}$$

- Moto puro di fluido perfetto (non viscoso) incompressibile all'interno di un recipiente di contorno  $\Gamma$ , con vorticità (velocità angolare) costante.

Equazioni idrodinamiche governanti:

- eq. di continuità (scalare)

$$\Phi = \text{cost}: \text{linee di flusso}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ in } A$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ in } A$$

(densità  $\rho = \text{cost}$ )

campo di velocità solenoidale

$$v_{x,x} + v_{y,y} = 0$$

- vorticità costante (rettoriale)

$$2\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \text{cost in } A \quad \omega \perp (x, y)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = K(v_{y,x} - v_{x,y})$$

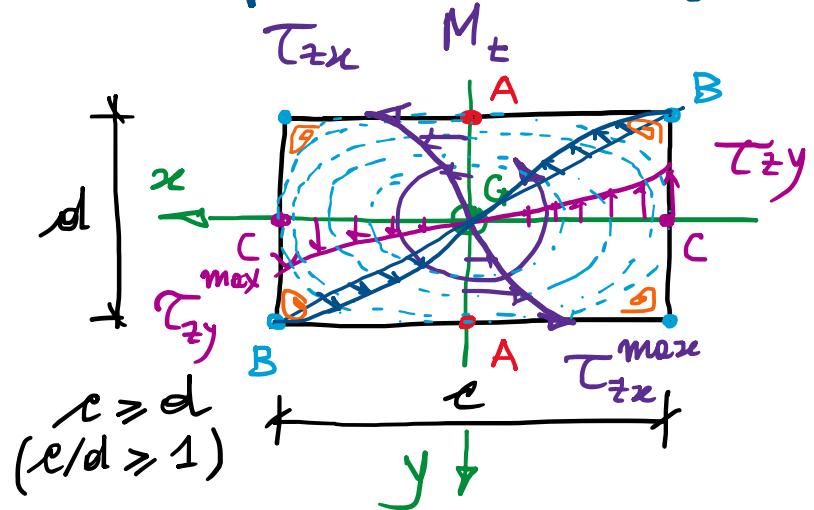
$$2\omega_z = \underbrace{v_{x,y} - v_{y,x}}_{2\omega_z} = -C \quad \text{costante}$$

relazione scalare

$$-2\omega_z = v_{x,y} - v_{y,x} = -C$$

- c.c. ....  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_x n_x + v_y n_y = 0$  su  $\Gamma$

- L'analogia idrostatica risulta utile a "visualizzare" il campo delle tens. tangenziali -
- Per es. per sezione rettangolare (soluzione per sviluppi in serie):



equazione di continuità: portate  $Q = V A = \text{cost}$

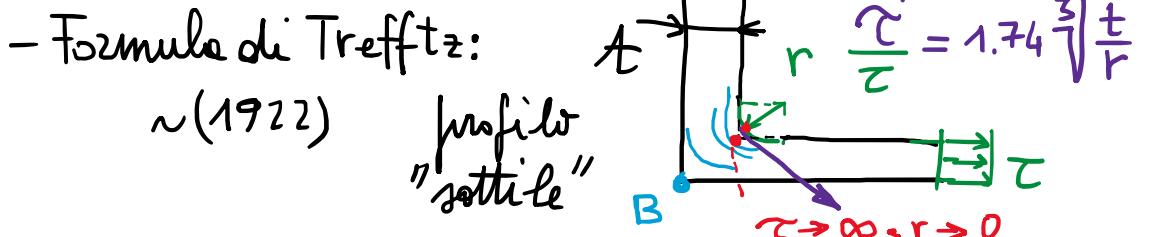
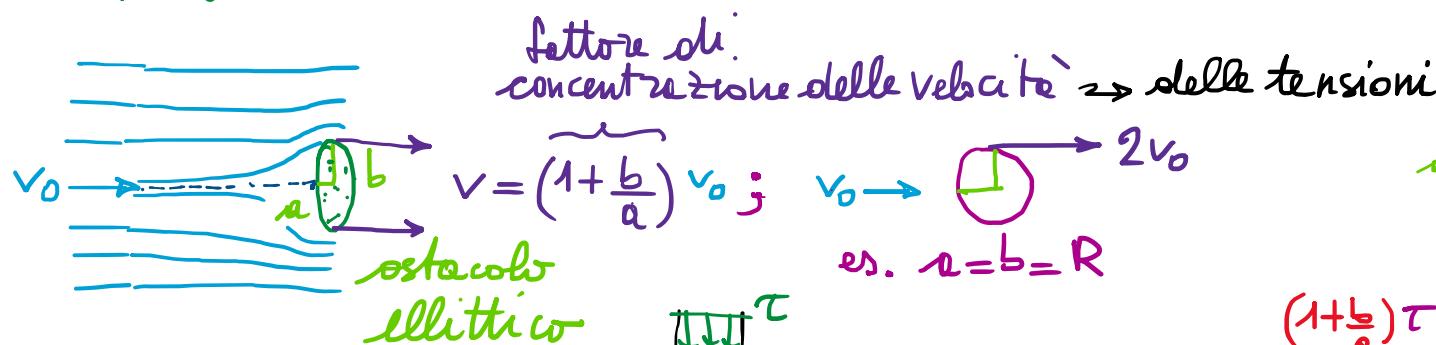
- $\bar{\tau}^A > \bar{\tau}^C$  ( $\bar{\tau}^{\max}$  nei p.ti medi dei lati maggiori)
- $\bar{\tau}^B \approx 0$  (zone di ristagno di fluido) (spigoli sporgenti)

$$\bar{\tau}^{\max} = K \frac{M_t}{cd^2}; J = \alpha c d^3$$

profilo rettangolare  
sottile

$c/d$	$K$	$\alpha$
1	4.80	0.141
2	~4	~0.23
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	3	$0.333 = 1/3$

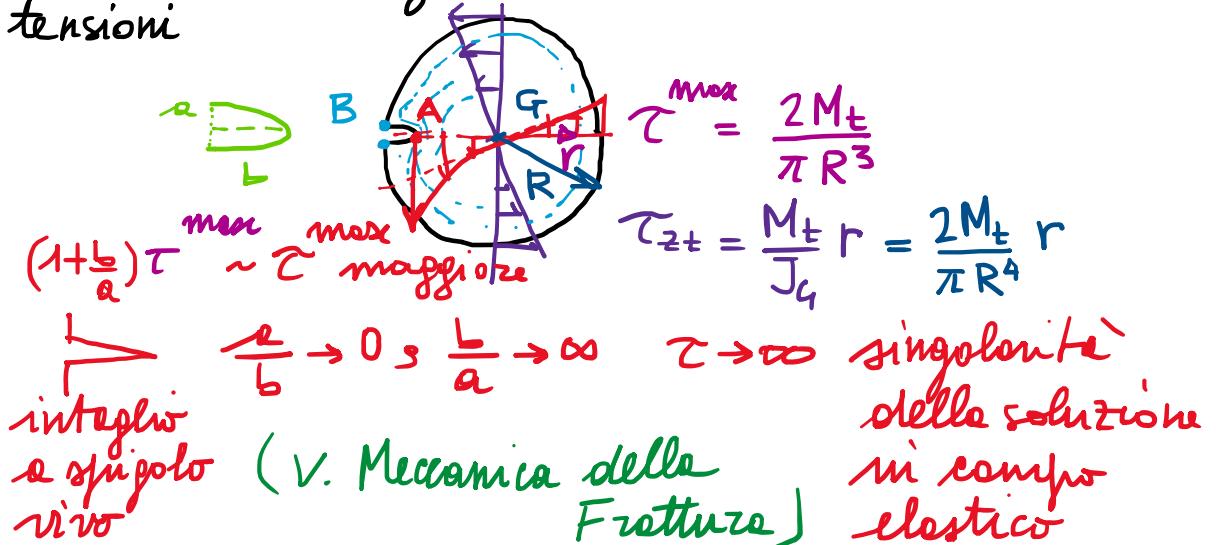
### Concentrazione delle tensioni:



$$\frac{\tau}{\tau} = 1.74 \sqrt[3]{\frac{t}{r}}$$

$\tau \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$

### Integlio (in sezione circolare)



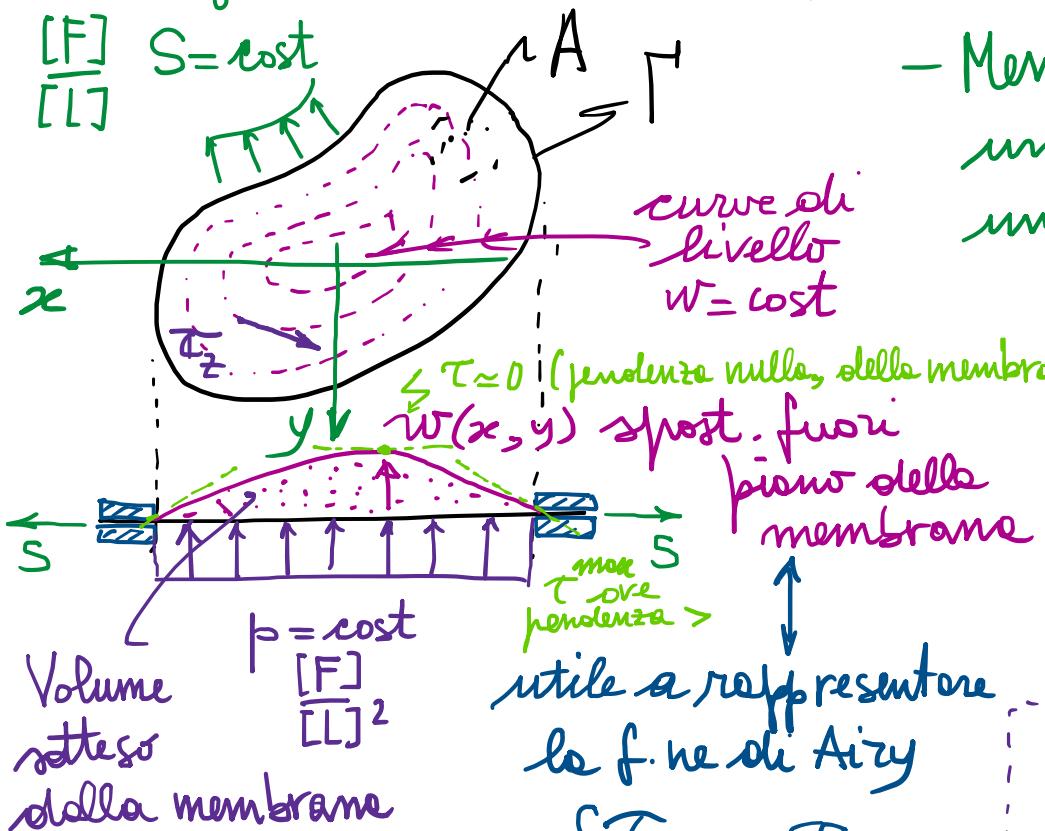
$$\frac{(1+\frac{b}{a})\tau}{\tau} \sim \frac{\tau^{\max}}{\tau^{\max, \text{maggiori}}} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}$$

$$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_4} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$$

$\frac{r}{b} \rightarrow 0$ ,  $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  singolarità delle soluzioni in campo elastico

integlio e spigolo vivo (v. Meccanica delle Frazture)

- Analogie delle membrane (Prandtl, 1903) (es. bolle di sapone, tens. superficiale cost.)



$$\varphi = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \partial F = \varphi_{,x} dx + \varphi_{sy} dy &= 0 \\ -T_{zy} dx + T_{zx} dy &= 0 \end{aligned}$$

$$-\tau_{zy}dx + \tau_{zx}dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$T_2$  tangente alle  $\varphi = \text{const}$   
 $(w = \text{const})$

$$\begin{cases} T_{zx} = \varphi_{,y} \\ T_{zy} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

$$T_{xy} = -\varphi_{,x}$$

sin ~  
ten ~  
angolo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) dx = \frac{\partial w}{\partial x}$$

eg. elle tra  
m<sup>2</sup>:

$$\text{Solvendo: } \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -p = \text{cost}$$

con anche curv. in y  $\Rightarrow$   $w_{xx} = -p$

$$\text{Solvendo: } \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -p = \text{cost}$$

con anche curv. in y  $\Rightarrow$   $w_{xx} = -p$

$$\text{Solvendo: } \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -p = \text{cost}$$

con anche curv. in y  $\Rightarrow$   $w_{xx} = -p$