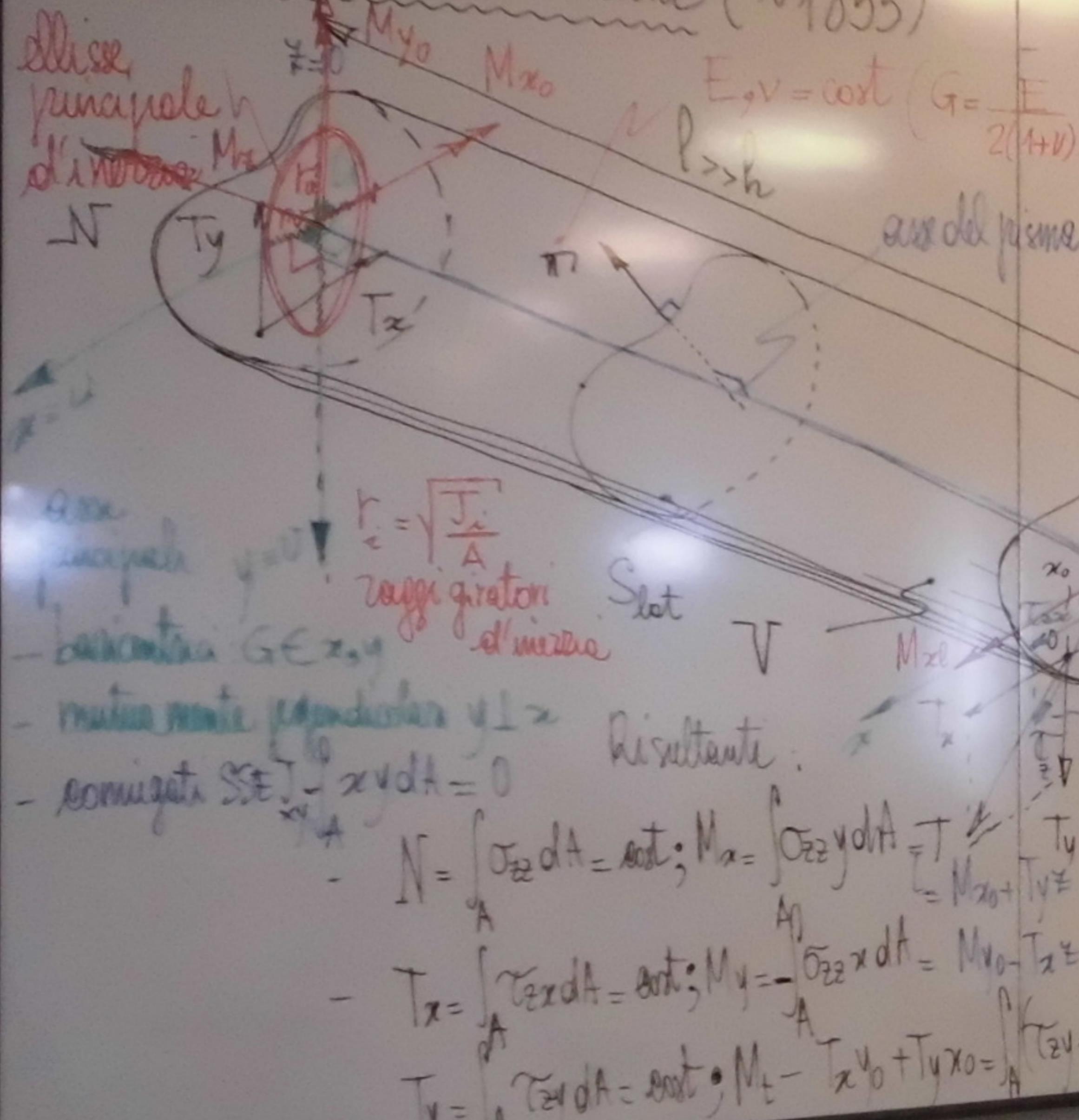


Pb. di de Saint Venant (~1855)



Analisi di un problema elastico lineare riferito ad un solido di forma cilindrica, di sezione A cost., ad assi rettilinei, allungata (cilindro o fascia di DSV).

- Privo di forze di volume ($\mathbf{f} = \emptyset$ in V)

- Privo di forze di superficie sulle sp. laterali ($\mathbf{f}_s = \emptyset$ in S_{lat})

- Privo di vincoli esterni ($S_g = \emptyset$) [soluz. nota a monodi]

[moti rigid]

- Costituito da materiale omogeneo, elastico

lineare isotropo di caratteristiche note (E, v)

- Soggetto solo ad azioni agenti sulla base ($z=0, z=l$)

Note solo in termini di risultanti e applicate secondo distribuzione

\rightarrow non esiste soluz. univoca se fini dell'analisi \rightarrow Postulato di DSV

[la reale distribuzione di tali azioni può alterare la soluz. locale]

il più gli effetti di bordo si fanno sentire in prossimità delle basi stesse

tali da formare un sistema di forze autoequilibrio

• Soluzione mediante approssimazione

- Hp fondamentale di DSV

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \text{ in } V$$

$$\tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{xy}$$

- Equazione mdc di equil. in V

$$div \sigma + F = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ij,j} + F_j = 0 \text{ in } V$$

- Equazione mdc di equil. in V

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \tau_{xz} + N_y \tau_{yz} + N_z \tau_{xz} = 0 \\ N_y \tau_{yz} + N_z \tau_{xy} + N_x \tau_{xy} = 0 \\ N_z \tau_{xz} + N_y \tau_{xy} + N_x \tau_{xz} = 0 \end{array} \right.$$

$$2(\tau_{xz} + \tau_{yz}) + 2\tau_{xy} = 0$$

$$2(\tau_{xz} + \tau_{yz}) + 2\tau_{xy} = 0$$

$$2\tau_{xy} = -2(\tau_{xz} + \tau_{yz})$$

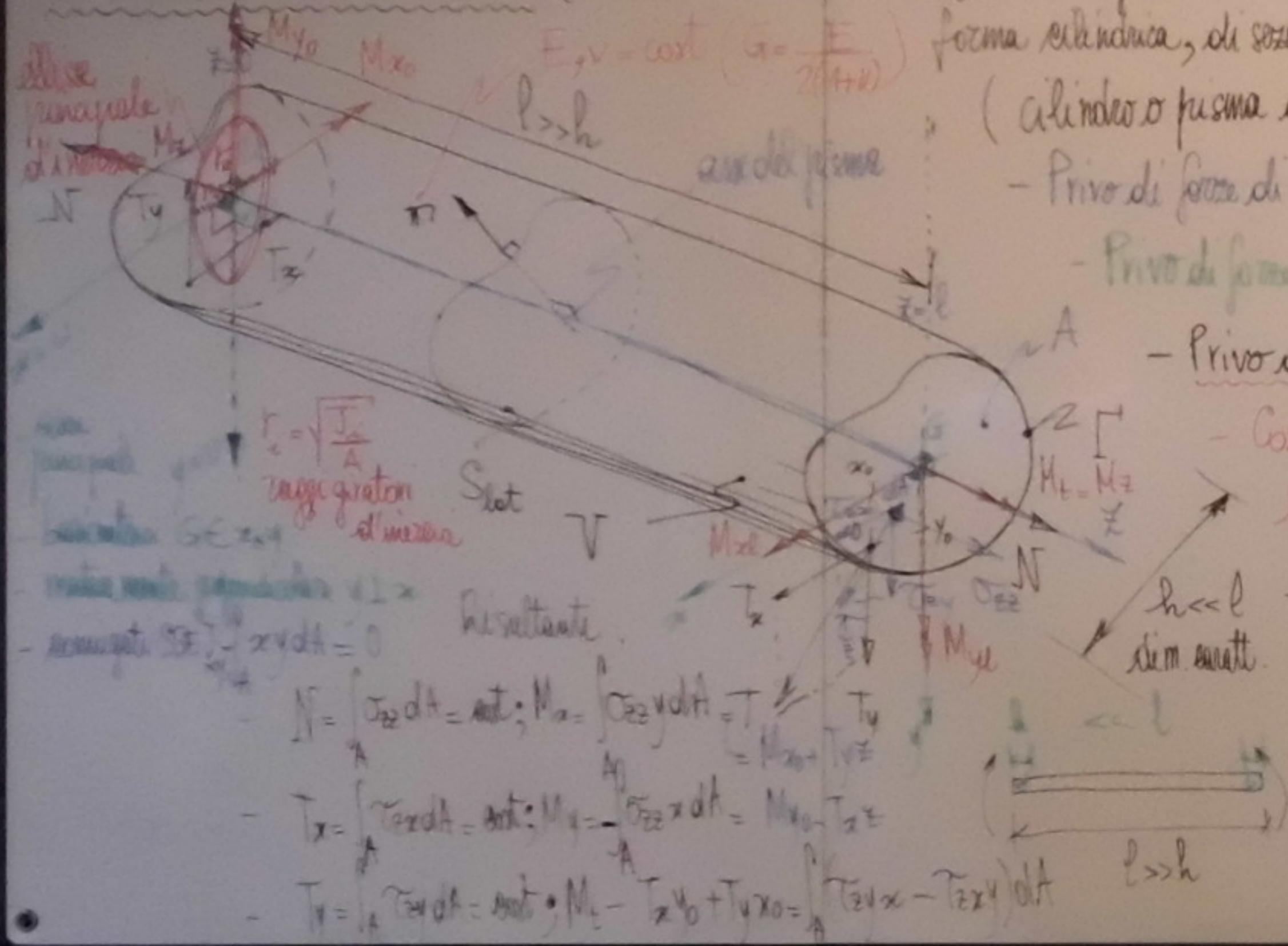
$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}(\tau_{xz} + \tau_{yz})$$

$$E_y = \frac{\tau_{xy}}{v} = \frac{N_x}{E}$$

$$E_y = \frac{N_x}{E}$$

<math display="

Problema di Saint Venant (~1855)



Analisi di un problema elastico lineare riferito ad un solido di forma cilindrica, di sezione A cost., ad asse rettilineo, allungato (cilindro o fusina di DSV).

- Privo di forze di volume ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in V)

- Privo di forze di superficie sulla cap. laterale ($\mathbf{f}_l = \mathbf{0}$ su Slat)

- Privo di vincoli interni ($S_3 = \emptyset$) [Sola nota a meno di mat. rigidi]

- Costituito da materiale omogeneo, elastico

lineare isotropo di caratteristiche noti (E, v)

- Soggetto solo ad azioni agenti sulle basi ($z=0, z=l$)

non solo in termini di risultanti e applicate secondo distribuzione

+ non regolare (influenza dei punti dell'asse) \Rightarrow Postulato di DSV

[la sola distribuzione di tali azioni può ottenere la soluzione locale
e più in effetti di bordo esistente in prossimità delle basi stesse]
tali da fornire un risultato di forze uniformemente

• Soluzione mediante approccio seminormo

- Hp fondamentale di DSV.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \text{ in } V$$

$$\sigma_{zz}, \tau_{xz} = \{\tau_{zy}\}$$

- Equazioni indef. di equil. in V

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sigma_{ij,i} + f_j = 0 \text{ in } V$$

$$\times \begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} = 0 & \Rightarrow \text{Teorema di} \\ j=y & \text{distribuz.} \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} = 0 & \Rightarrow \text{Teorema di} \\ j=z & \text{distribuz.} \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 & \Rightarrow \text{Teorema di} \\ j=x & \text{distribuz.} \end{cases}$$

- Legame costitutivo

$$E_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx,ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{xy,xy} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{yy,yy}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{xz,xz} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{zz,zz}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{yz,yz} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{xy,xy}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{xz,xz} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{yy,yy}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{yz,yz} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{zz,zz}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{xy,xy} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{yy,yy}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2\nu}{E} \sigma_{xy,xy} + \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_{yy,yy}$$

- Eq. di congruenza $\epsilon_{ij,ki} + \epsilon_{ki,j} = \epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{il,jk}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx,yy} + \epsilon_{yy,xx} = 2\epsilon_{xy,xy} \\ \epsilon_{yy,zz} + \epsilon_{zz,yy} = 2\epsilon_{yz,yz} \rightarrow \epsilon_{zz} \text{ alias } \sigma_{zz} \text{ lungo } y \\ \epsilon_{zz,xx} + \epsilon_{xx,zz} = 2\epsilon_{xz,xz} \rightarrow " \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx,yz} + \epsilon_{yz,xx} = \epsilon_{xy,xz} + \epsilon_{xz,xy} \\ \epsilon_{yz,zz} + \epsilon_{zx,yy} = \epsilon_{yz,yx} + \epsilon_{xy,yz} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{zz,xy} + \epsilon_{xy,zz} = \epsilon_{zx,zx} + \epsilon_{zy,zy} \rightarrow \epsilon_{zz} \text{ alias } \sigma_{zz} \text{ lungo } xy \end{array} \right.$$

Risultante:

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = \text{cost}; M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = M_{x0} + T_y z$$

$$J_y = \int_A x^2 dA$$

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA = \text{cost}; M_y = - \int_A \tau_{zx} x dA = M_{y0} - T_x z$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA = \text{cost}; M_z = T_x y_0 + T_y x_0 = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

- Pertanto, il campo σ_{zz} può essere scritto come:

$$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)$$

$$= a - bz + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$$

- Equivalenze statiche tra σ_{zz} e le az. applicate

$$\bullet N = \int_A \sigma_{zz} dA = (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)Sy + (a_2 - b_2 z)S_x = \text{cost}$$

$$a = \frac{N}{A}, b = 0$$

$$\bullet M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = (a_2 - b_2 z)J_x \rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} \text{ b A = 0} \Rightarrow b = 0$$

$$= g_2 J_x - b_2 J_x z \rightarrow a_2 = \frac{M_{x0}}{J_x}, b_2 = -\frac{T_y}{J_x}$$

$$\bullet M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = -(a_1 - b_1 z)J_y \rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$$

$$= -a_1 J_y + b_1 J_y z \rightarrow a_1 = -\frac{M_{y0}}{J_y}, b_1 = -\frac{I_x}{J_y}$$

Vedi tensione flessione data da PSE

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_x y}{J_y} + \frac{M_y z}{J_x}$$

Eq. di equil.

$$\text{div } \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y$$

$$M_{x0} - (M_x)_0 = \tau_{zx,0} - \tau_{zy,0} = -\frac{T_x}{J_x} z + \frac{T_y}{J_y} y$$

$$\frac{1+v}{E} (\tau_{zx,yy} - \tau_{zy,zz}) = -\frac{v}{E} \tau_{zz,yy}$$

$$\frac{1+v}{E} (\tau_{zx,yy} - \tau_{zy,yy}) = +\frac{v}{E} \tau_{zz,yy}$$

$$\frac{1+v}{E} (\tau_{xy,yy} - \tau_{xy,yy}) = 0$$

$$- \text{Eq di congruenza} \quad \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ikj} + \varepsilon_{ikj}$$

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,zz} = 2\varepsilon_{xy,zy}$$

$$\varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\varepsilon_{yz,yz} \rightarrow \text{Eq di congruenza}$$

$$\varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xz,xz} = 2\varepsilon_{xz,xz} \rightarrow$$

$$\varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \varepsilon_{xy,zx} + \varepsilon_{xz,xy}$$

$$\varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,zy}$$

$$\varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} = \varepsilon_{xz,zy} + \varepsilon_{yz,xz}$$

Risultante:

$$J_x = \int_A y \, dA$$

$$J_y = \int_A x^2 \, dA$$

$$- T_x = \int_A \tau_{xz} \, dA = M_{xz}; \quad M_{xz} = \int_A \tau_{xz} y \, dA = M_{xz} J_z z$$

$$- T_y = \int_A \tau_{yz} \, dA = M_{yz}; \quad M_{yz} = \int_A \tau_{yz} x \, dA = M_{yz} J_z z$$

$$- T_z = \int_A \tau_{xy} \, dA = M_{xy}; \quad M_{xy} = \int_A \tau_{xy} (x - T_{xz}) \, dA$$

- Pertanto, il campo σ_{zz} può essere scritto come:

$$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)$$

$$= a - bz + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y \quad \text{e}$$

- Equivalenze statiche tra σ_{zz} e leq. applicate

- $N = \int_A \sigma_{zz} \, dA - (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)S_y + (a_2 - b_2 z)S_{xz} = \text{cost}$
- $a = \frac{N}{A}, \quad b = 0$
- $\int_A \text{div } \tau_z \, dA = \int_A (n \cdot \tau_z) \, dF$

- $M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA = (a_2 - b_2 z)J_x \rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} \quad b = 0 \rightarrow b = 0$
- $= a_2 J_x - b_2 J_{xz} \rightarrow a_2 = \frac{M_{xz}}{J_x}, \quad b_2 = -\frac{T_y}{J_x}$

- $M_y = - \int_A \sigma_{zz} x \, dA = -(a_1 - b_1 z)J_y \rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$
- $= -a_1 J_y + b_1 J_y \rightarrow a_1 = \frac{M_{yz}}{J_y}, \quad b_1 = -\frac{T_x}{J_y}$

Vedi tensoflessione deviata per PSE

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N}{A} - \frac{My}{J_y} z + \frac{Mx}{J_x} y$$

Eq. di equil.

$$\text{div } \tau_z = \tau_{xz,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y$$

Se rimanente 2 eq. di congruenza poniamo:

$$\frac{1+V}{E} (\tau_{xz,xy} - \tau_{zy,zx}) = -\frac{V}{E} \sigma_{zz,xy}$$

$$\frac{1+V}{E} (\tau_{xz,yy} - \tau_{zy,yx}) = +\frac{V}{E} \sigma_{zz,yy}$$

- Abbiamo risolto analiticamente il campo $\sigma_{zz}(x, y, z)$

- Resta da risolvere il pb. nella T_{xz}, T_{zy}

$$\begin{cases} \text{equil. dir. } \tau_z = \tau_{xz,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y \\ \text{congr. (rot } \tau_z) = \tau_{xz,y} - \tau_{zy,x} - V \left(-\frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y \right) \end{cases}$$

$$\text{sol. } T_z = T_{xz} n_x + T_{zy} n_y = 0$$

est. di integraz. de formule

ad M , trascr.

eq. statica (*)

- Abbiamo risolto analiticamente il campo $\sigma_{zz}(x, y; z)$

- Resta da risolvere il pb. nelle τ_{zx}, τ_{zy}

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equil. div } \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{I_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y \\ \text{congr. } (\text{rot } \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{V} \left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{I_x}{J_y} y \right) \end{array} \right.$$

$$\text{con } \epsilon \epsilon \quad \tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$$

\Rightarrow cost. di integraz. da forze in relaz.

ed M_t tramite l'equ. statica (*)

$$\begin{aligned} & \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{V} (b_2 x - b_1 y) - c \text{ eq. ne di congruenza} \\ & = \bar{V} \left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{I_x}{J_y} y \right) - c \end{aligned}$$

Vedi tensione deviata per PSE

- Però, a esempio σ_{zz} fu scritto così:

$$\sigma_{zz} = Q + Q_1 x + Q_2 y - Z(b + b_1 x + b_2 y)$$

$$= Q - b_2 z + (Q_1 - b_1 z)x + (Q_2 - b_2 z)y$$

- Equivalenze statiche tra σ_{zz} e le se azionate

$$\cdot \int \sigma_{zz} dt = (Q - b_2 z)A + (Q_1 - b_1 z)S_y + (Q_2 - b_2 z)S_x = 0$$

$$\cdot \int \sigma_{zz} dt = \frac{N}{A}, \quad b = 0$$

$$\int \sigma_{zz} dt = \int \frac{N}{A} dt = \frac{Nt}{A}$$

$$\cdot \int \sigma_{zz} dt = (Q - b_2 z)J_x \rightarrow Q - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} b A = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$= \frac{Q_2 J_x - b_2 J_x z}{J_x} \rightarrow b_2 = \frac{M_{x0}}{J_x}, \quad b_2 = -\frac{T_y}{J_x}$$

$$\cdot M_{x0} - \int \tau_{zx} x dt = -(Q_1 - b_1 z)J_y \rightarrow Q_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$$

$$= -\frac{Q_1 J_y + b_1 J_y z}{J_y} \rightarrow b_1 = -\frac{M_{y0}}{J_y}, \quad b_1 = -\frac{I_x}{J_y}$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{J_y} x + \frac{M_x z}{J_x} y$$

Eq. di equil.

$$\text{div } \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{I_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y$$

- Le rimanenti 2 eq. di congr. a porg.

$$\frac{1+\nu}{E} (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz,xy}$$

$$\frac{1+\nu}{E} (\tau_{zx,yy} - \tau_{zy,yx}) = +\frac{\nu}{E} \sigma_{zz,yy}$$

$$f = f(x, y) \quad (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})^x, y = \bar{V}$$

$$\int \tau_{zx,y} dx + \tau_{zy,x} dy + \text{cost.}$$

$$\bar{V} = \frac{Y}{1+\nu}$$

$$(\text{rot } \tau_z)_z$$

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{V} (b_2 x - b_1 y) - c$$

$$= \bar{V} \left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{I_x}{J_y} y \right) - c$$