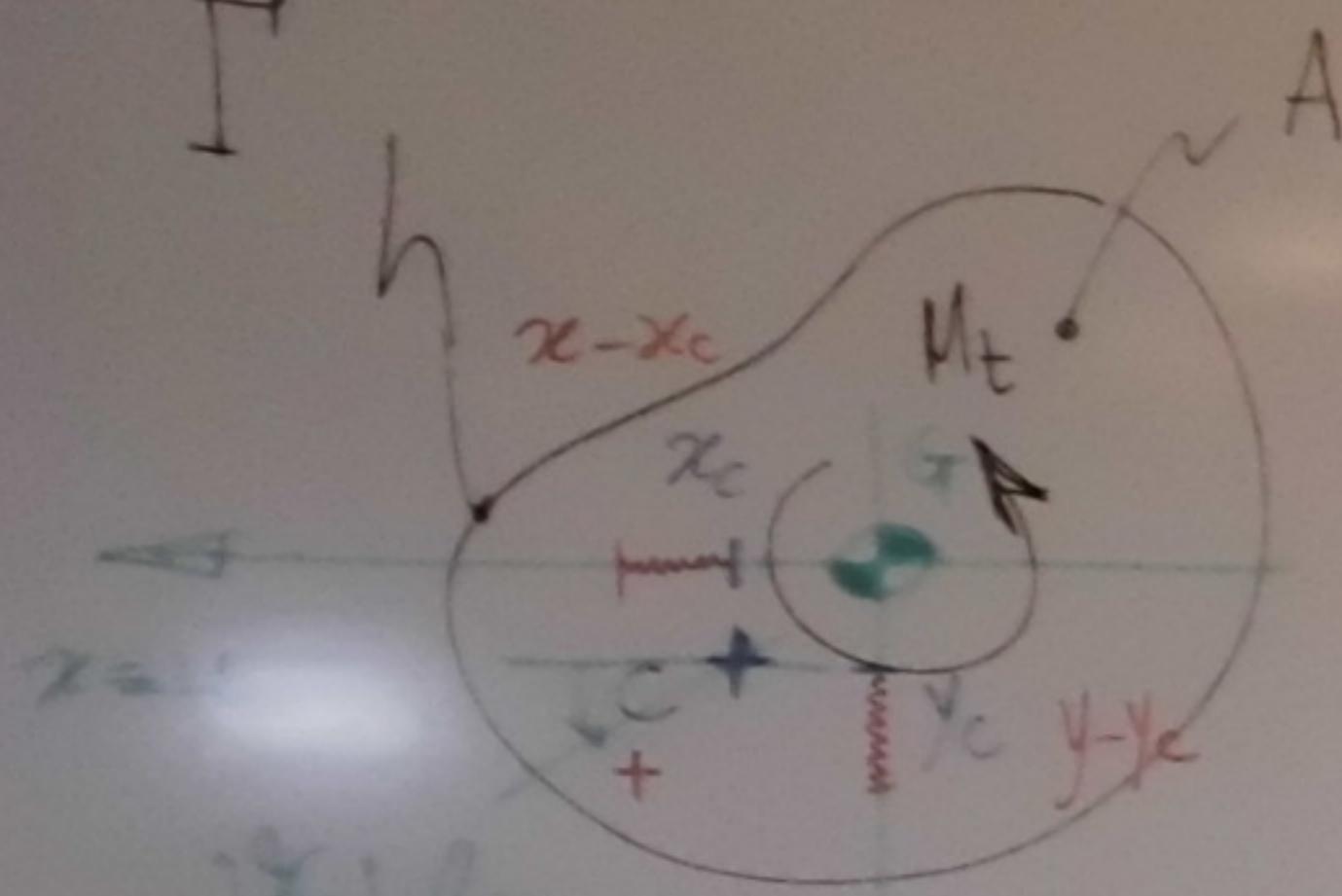


## Centro di torsione (C)

- Inizialmente abbiamo considerato  $C \in G_T, \Psi_G(x, y)$



Campo di spostamenti

$$\begin{cases} \zeta_x = -\beta z (y - y_c) \\ \zeta_y = \beta z (x - x_c) \\ \zeta_z = \beta \Psi_C(x, y) \end{cases}$$

- In generale attendo che  $\Psi_C \neq \Psi_G$  e che possano differire per un campo di moto dei punti.

In tal senso, visto che non sono impostati i moti rigidi, è opportuno ancora spost. medi fuori piano (per bloccare la trasf. rigida in dir. z)

$$\int_S \zeta_z dA = 0$$

$$(x_c = y_c = 0)$$

Campo delle  $\tau_{zi}$ ,  $\tau_{zi} = G \gamma_{zi} = G(\alpha_{zi} + \beta_{iz})$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G \beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G \beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{cases}$$

- Eq. di congr.:

$$\tau_{zx} - \tau_{zy} = -e \Rightarrow G \beta (\Psi_{c,xy} - 1 - \Psi_{c,yx} - 1) = -2G\beta = -e$$

$$e = 2GB$$

- Eq. di equil.

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow G \beta (\Psi_{c,xx} + \Psi_{c,yy}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi_c = 0 \text{ in } A \quad (\nabla^2 = 0 \text{ in } A)$$

Eq. di Laplace

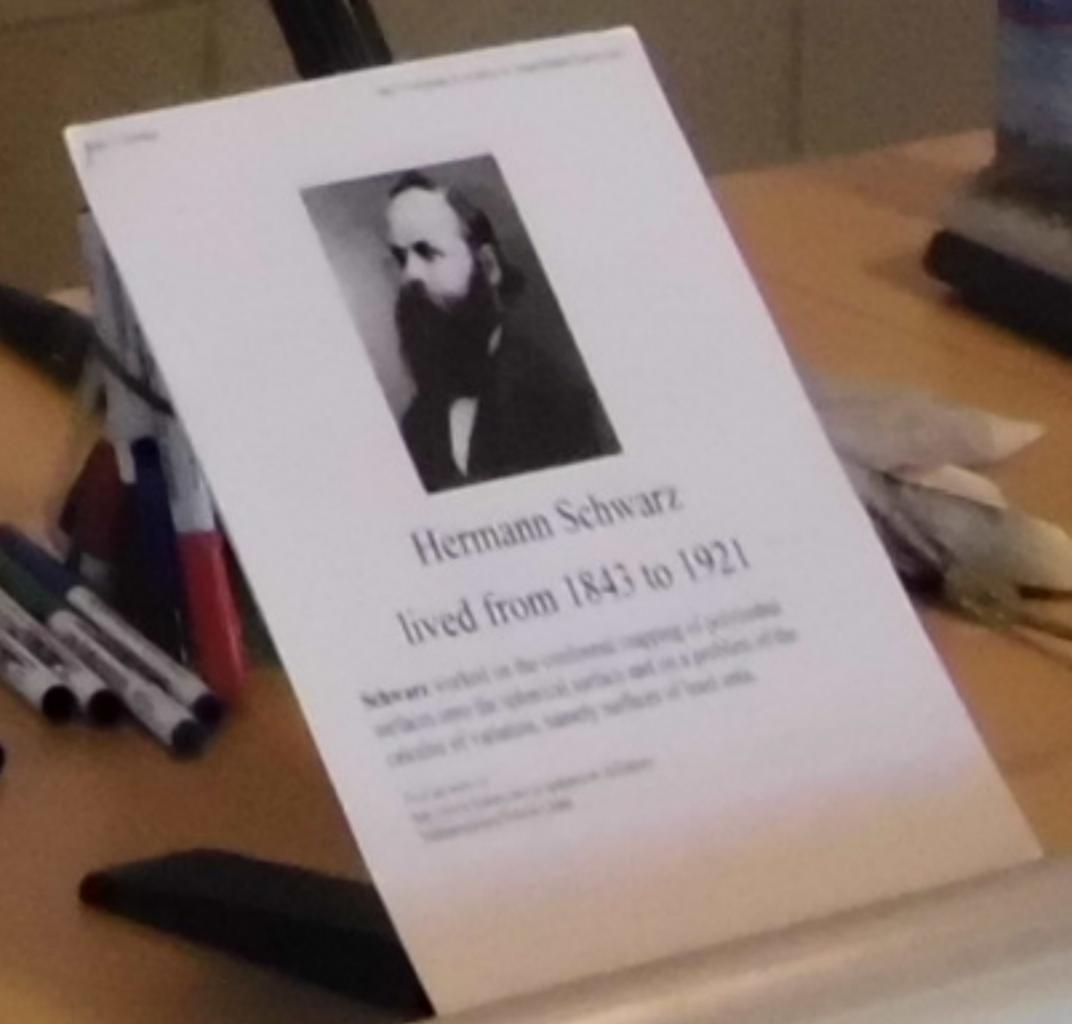
- Equil. al contorno:  $\tau_z \perp \text{in } \partial A$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \Rightarrow G \beta (\Psi_{c,x} n_x - y n_x + y_c n_x + \Psi_{c,y} n_y + x n_y - x_c n_y) = 0 \text{ in } \partial A$$

$$\Psi_{c,n} + y_c n_x - x_c n_y = y n_x - x n_y$$

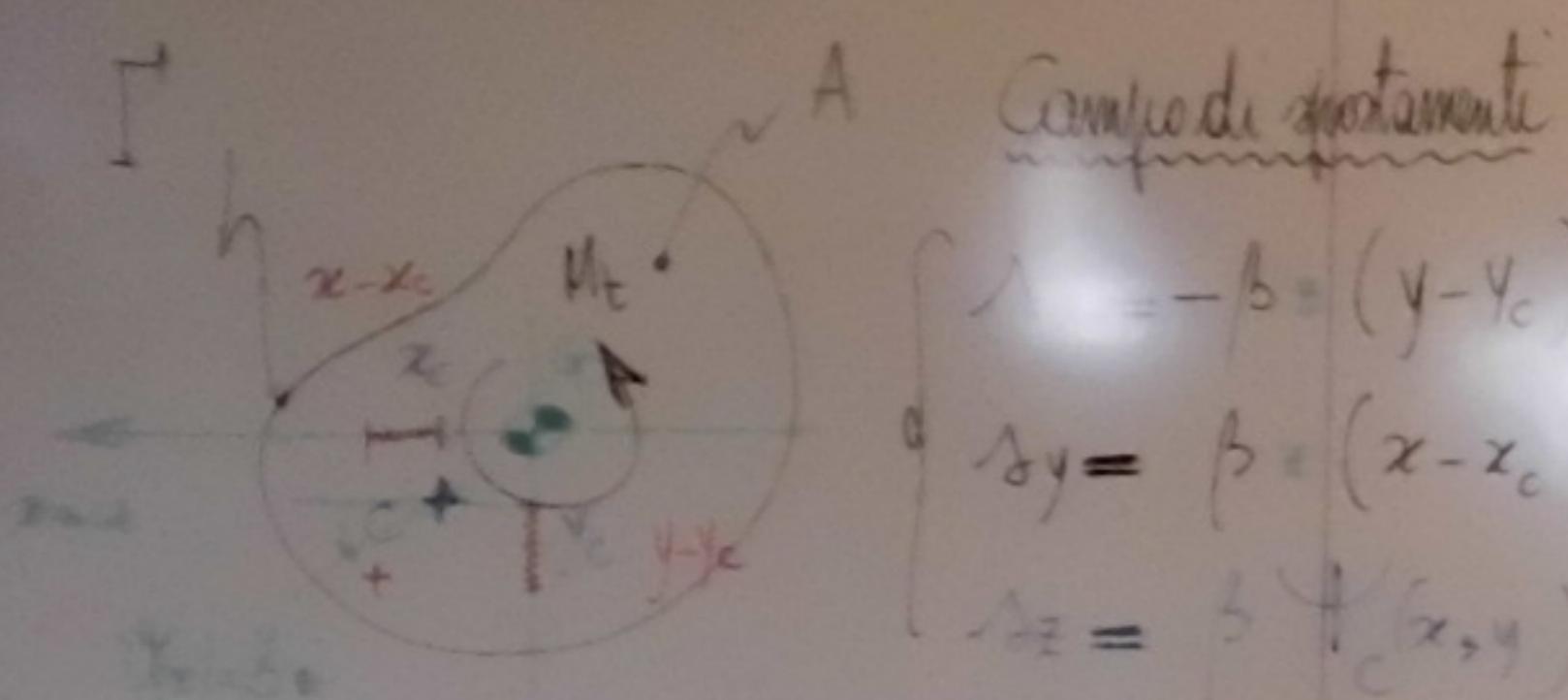
$$\Psi^* = \Psi_G + K \leftarrow \Psi^*_{,n} = (\Psi^* + y_c x - x_c y)_{,n} = y n_x - x n_y \quad \text{e.c. di Neumann-Dirichlet}$$

Si definisce centro di torsione, il punto rispetto al quale le posizioni dei punti di una linea retta di torsione sono in relazione simmetrica rispetto ad esso.



### Centro di torsione (C)

- Inizialmente abbiamo considerato  $C = G$ ,  $\Psi_G(x, y)$



Campo di spostamenti

$$\begin{cases} \delta_x = -\beta \cdot (y - y_c) \\ \delta_y = \beta \cdot (x - x_c) \\ \delta_z = \beta \Psi_G(x, y) \end{cases}$$

- In genere attende che  $\Psi_C + \Psi$  e che possano differire per un termine di rotazione.

- In tal senso, si tratta di un campo di spostamenti assunto rigido, ma non piano nello spazio (rigido in direzione z).

$$\int_A \delta_x dA = 0$$

$$\int_A \delta_y dA = 0$$



Hermann Schwarz  
Lived from 1843 to 1921

Campo delle  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zx} = G \gamma_{zx} = G(\alpha_{z,x} + \beta_{z,z})$  Si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta(\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta(\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{cases} \quad \int_A \Psi_C dA = 0$$

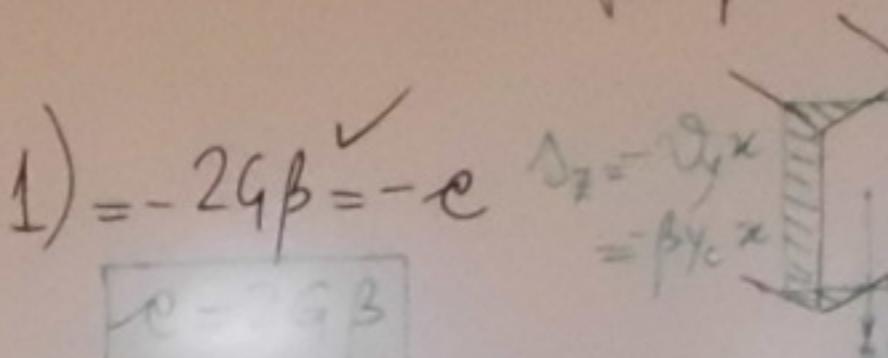
- Eq. di congr.:

$$\tau_{zx} - \tau_{zy} = -c \Rightarrow G\beta(\Psi_{c,x} - y + y_c - \Psi_{c,y} - x + x_c) = -2G\beta = -c$$

- Eq. di equal.

$$\tau_{zx} + \tau_{zy} = 0 \Rightarrow G\beta(\Psi_{c,x} + \Psi_{c,y}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi_C = 0 \text{ in } A (\nabla^2 \Psi = 0 \text{ in } A)$$

- Equal. al contorno:  $\tau_C \perp \Gamma$  su  $\Gamma$



Eq. di Laplace

Si definisce centro di torsione, il punto C rispetto al quale la funzione di spostamento possiede rotazione nulla.

coord. del

$$\int_A (\Psi_{c,y} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_x$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(y - y_c)xy + x_c y) dA = 0$$

Analogo per  $\tau_y$ .

$$\int_A (\Psi_{c,x} + K(x - x_c)xy + y_c x) dA = 0$$

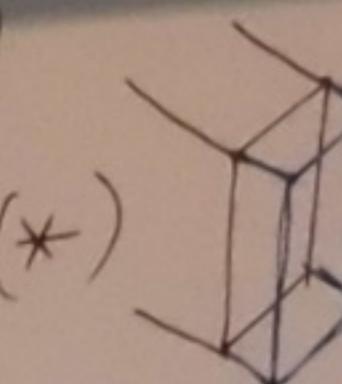
Analogo per  $\tau_x$ .

$$\text{imposto delle } T_{xx}, T_{yy} = G \tau_{xx} = G(\sigma_{xx} + \beta \sigma_{yy})$$

$$S_z = \beta \psi_c \Leftrightarrow \psi_c = \psi_g + K - y_c x + x_c y$$

$$\int_A \psi_c dA = 0$$

comp. di moto rigido  
fuori piano



fluenza  $\bar{\psi}_x$

$$\bar{\psi}_x = \int_A \sigma_{zz} dA \frac{s_z}{J_x}$$

$$\text{Torsione} = \int_A \frac{M_x}{J_x} y s_z dA$$

$$T_{xy} = G \beta (\psi_{c,xy} - y_c)$$

$$T_{xy} = G \beta (\psi_{c,xy} + x - x_c)$$

$$T_{xx} = -G \beta (\psi_{c,xy} - 1) = -2G\beta = -c$$

$$T_{yy} = -G \beta (\psi_{c,xy} - 1 - \psi_{c,yx} - 1) = -2G\beta = -c$$

$$T_{xy} + T_{yx} = 0 \Rightarrow G \beta (\psi_{c,xx} + \psi_{c,yy}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi_c = 0 \text{ in } A$$

$$\text{Eq. di Laplace}$$

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \Rightarrow G \beta (\psi_{c,xx} - y_c n_x + y_c n_y + x_c n_y - x_c n_x) = 0 \text{ in } A$$

$$\psi_c = \psi_g + K \quad \psi_{c,n} = \underbrace{\psi_g + K}_{\psi^*} - \underbrace{x_c n_x - y_c n_y}_{y n_x - x n_y} = y n_x - x n_y$$

$$\psi_{c,n} = \underbrace{\psi_g + K - x_c n_x - y_c n_y}_{\psi^*} = y n_x - x n_y \quad \text{l.e. di Neumann-Dirichlet}$$

$$\int_A (\psi_g y + K y - y_c x y + x_c y) dA = 0$$

$$\text{coord. del C.T.}$$

$$\text{Analogamente: C.T.}$$

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_g(x, y) y dA$$

$$y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_g(x, y) x dA$$

$$\text{Nota f. def. pb. di N. D. per l'eq. di Laplace}$$

$$\text{e note } x_c, y_c \text{ si ottiene } \psi_c \text{ dalla (*)}$$

$$\text{media pesata di } \frac{s_z}{y} \text{ con peso } J_y$$

$$\text{e quindi } \bar{\psi}_x = \int_A \sigma_{zz} dA \frac{s_z}{J_x}$$

$$\text{e quindi } \bar{\psi}_y = \int_A \sigma_{zz} dA \frac{s_z}{J_y}$$

- + Appross. agli sforzi (pago a fuori l'equil, impongo la cond.)
- Hp sul campo di forza: ( $\Phi$  funzione potenziale di sforzo o di AIRY)

$$\tau_{zx} = \Phi_{x,y},_y ; \tau_{zy} = -\Phi_{x,y},_x$$

- Equaz. di equil.

$$\tau_{zx,z} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow \Phi_{yy,x} + \Phi_{xx,y} = 0$$

Th. di Schwarz

- Equaz. di comp.

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \Rightarrow \Phi_{yy,x} + \Phi_{xx,y} = -c$$

- Equil. sul contorno:

$$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ sul } \Gamma \Rightarrow \Phi_{yy,nx} - \Phi_{xx,ny} = 0$$

Th. di Green

$$\Phi_{ys} = \Phi_{yt} = \Phi_{x,tz} + \Phi_{y,ty} = 0$$

$$\Phi_{east} = 0 \text{ su } \Gamma$$

$\Phi \leftrightarrow M_t$ , c. trainto equiv. statico

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

$$= \int_A (-\Phi_{y,x} - \Phi_{x,y}) dA = \\ = - \int_A [(\Phi_{x,y} + \Phi_{y,x})] dA + 2 \int_A \Phi dA$$

Poisson (con termini noto cost.)

$$= - \int_0^2 \Phi (x n_x + y n_y) dT$$

$$+ 2 \int_A \Phi dA = M_t$$

#### • Metodi analitici:

- Soluz. in forma elisistica, esatte  
(a.zt. ellittica) o appross (a. proporzionale)

- Soluz. per soluzioni in serie (appross per  
tremamento)

Quadro rispetto forzante alle TSV

Appross. agli spostamenti

$$\text{in } \beta, \psi(x,y)$$

$$\text{pb. di N.D. } \nabla^2 \psi = 0 \text{ in } A$$

$$\text{di Laplace } \psi_{x,y} = h \cdot x - n_x x + n_y y$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} ; J = \frac{\pi}{16} L^4$$

$$e = 248$$

- Approssimazione delle forze (poco a poco l'equil, impongo la cond.)
- H.p. sul campo di forza ( $\Phi$  funzione potenziale di Hooke e di AIRY)

$$T_{xx} = \Phi_{x,y},_y ; T_{xy} = -\Phi_{x,y},_x$$

Equazione di equilibrio:

$$T_{xx,z} + T_{xy,y} = 0 \Rightarrow T_{xx,z} + \Phi_{xy,y} = 0$$

Equazione di comp.

$$T_{xy,z} + T_{xz,y} = 0 \Rightarrow \Phi_{xy,z} + \Phi_{xz,y} = -c \Rightarrow \nabla^2 \Phi_{xy} = -c \text{ m/mA}$$

Equilibrio al contorno:

$$T_z \cdot n = T_{xz} n_x + T_{yz} n_y = 0 \Rightarrow \Phi_{xy,nz} - \Phi_{xz,ny} = 0$$

+  $\Phi_{xy,y} = 0 \text{ m/m}^\Gamma$  \*

A.A. di Dirichlet

Soltanto sui p.p. di Dirichlet per l'equazione di Poisson

$\Phi \leftrightarrow M_t$ , e tramite equiv. statica

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (T_{xy} z - T_{xz} y) dA \\ &= \int_A (-\Phi_{xy,x} z - \Phi_{xy,y} y) dA = \\ &= - \int_A [(\Phi_{xy,x} + \Phi_{xy,y})] dA + 2 \int_A \Phi dA \\ &\quad | \text{ (f.f. Div.)} \\ &= - \int_0^l \Phi (x n_x + y n_y) d\Gamma \\ &\quad | \text{ (f.f. Div.)} \\ &+ 2 \int_A \Phi dA = M_t \end{aligned}$$

Quadro sintetico (torsione alla DSV -  $M_t = M_E$ )

Approssimazione spaziale

$$\text{m.c. } \beta_3 + t_a(x,y)$$

$$\text{pb. di N-D } \nabla^2 \Phi_0 = 0 \text{ m A}$$

$$\text{p.e. legge di Laplace } \Phi_{0,n} = h \cdot x + n_x y + n_y x$$

Approssimazione spaziale

$$\text{m.c. } c_3 \Phi(x,y)$$

$$\nabla^2 \Phi = -c \text{ m A}$$

$$\Phi = 0 \text{ m } \Gamma$$

$$c = \frac{2 \Phi dA}{A}$$

Metodi analitici:

- Soluz. in forme chiuse, esatte

(a.v.t. ellittica) o appross (es. profilattico)

- Soluz. per sviluppi in serie (appross per truncamento)

$$e = 2G\beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{xy} = G\beta (\Phi_{0,x} - y) \\ \Phi_{0,x} = -G\beta (\Phi_{0,y} + x) \end{array} \right.$$

$$\Phi_{0,y} = \frac{1}{G\beta} \Phi_{0,x} + x$$

Metodi numerici

- Metodo delle differenze finite

- Metodo degli elementi finiti

Finite Element - FEM (2, MGS, Method)

Quadro sinottico (torsione alla DSV -  $M_t = M_z$ )

Appross agli spazi

mic.  $c_s(\Phi(x,y))$

$$\text{pb. di D} \quad \nabla^2 \Phi = -c \text{ in } A \\ \text{in l'eqne} \\ \text{di Poisson} \quad \Phi = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$c = \int_A 2\Phi dA$$

Appross agli spaziantemente  
mic.  $\beta_s(\Phi_s(x,y))$

$$\text{pb. di NB} \quad \nabla^2 \Psi_g = 0 \text{ in } A \\ \text{soluz.} \quad \Psi_{g,n} = t \cdot x = -nyx \quad \text{su } \Gamma$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; J = \frac{I_a}{\eta} > 1$$

• Metodi analitici:

- Soluz. in forma chiusa, esatte (a st. ellittica) o appross (es. profilisottri)
- Soluz. in sviluppo in serie (appross per truncamento)

$$e = 2G\beta$$

$$\begin{cases} \Phi_{g,y} = G\beta (\Psi_{g,x} - y) \\ \Phi_{g,x} = -G\beta (\Psi_{g,y} + x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_{g,x} = \frac{1}{G\beta} \Phi_{g,y} + y \\ \Psi_{g,y} = -\frac{1}{G\beta} \Phi_{g,x} + x \end{cases}$$

• Metodi numerici

- Metodo delle differenze finite
- Metodo degli elementi finiti (Finite Element - FEM)  $\rightarrow$  MCSS Method