

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

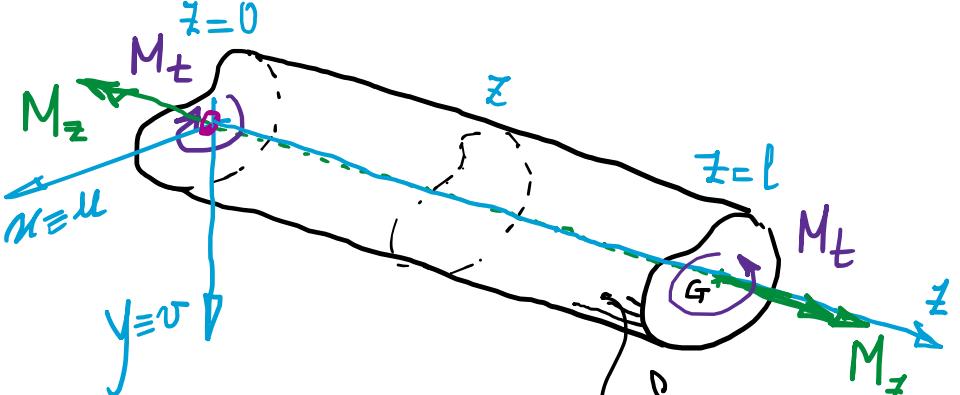
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

- Caso di DSV delle torsione:  $N = T_x = T_y = 0; M_x = M_y = 0$  ( $\sigma_{zz} \equiv 0$ )



Equiv. statica:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

$$\tau_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}$$

vettore delle

tensioni tangenziali  $\tau_z = \tau_z(x, y)$

- Presente solo un momento torcente, nel piano della sezione, costante:  $M_t = M_z = \text{cost}$

- Equazioni governanti: (differenziali lineari)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \quad \dots \text{equilibrio} \\ \operatorname{div}(\cdot) = \nabla \cdot (\cdot) \end{array} \right.$$

$$-(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \quad \dots \text{congruenza}$$

rotore  
gradienti

$$\operatorname{rot} \tau_z = \nabla \wedge \tau_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = K (\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y})$$

cost

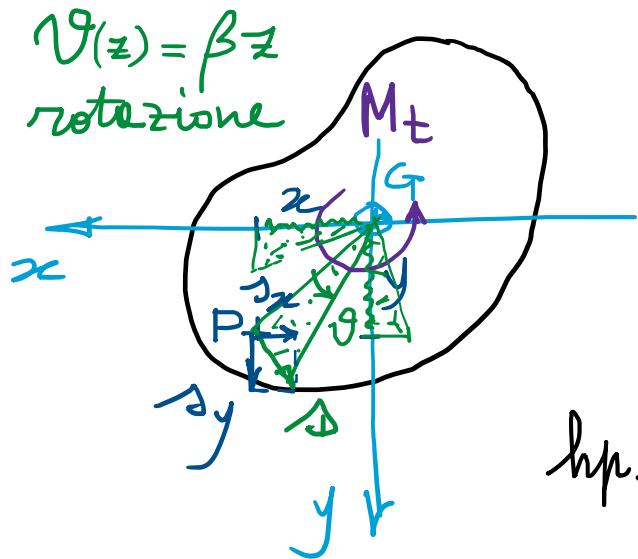
prodotto  
vettoriale

( $\tau_z$  tangente al contorno su  $\Gamma'$ )

$(\operatorname{rot} \tau_z)_z$

c.c.:  $\tau_z \cdot \pi = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$  su  $\Gamma'$  condizione  
hp. Slot scarico

- Approccio agli spostamenti (preghiamo a priori la congruenza; imponiamo l'equilibrio):



$$\text{cost} = \beta = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} > 0 \quad \begin{array}{l} \text{angolo unitario di torsione (rotazione per unità di} \\ \text{lunghezza)} \end{array}$$

( $\vartheta$  "torsione")

rotazione rigida delle sezione nel suo piano. ( $\partial \vartheta = \beta \partial z$ )

[1] [L]

Campo di spostamenti: (osservazione sperimentale)

$$\text{hp. } \left\{ \begin{array}{l} \Delta_x(y, z) = -\beta z y \\ \Delta_y(x, z) = \beta z x \\ \Delta_z(x, y) = \beta \underbrace{\Psi_G(x, y)}_{\text{spostamento fuori piano}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{atto di moto piano} \\ \text{rotatorio} \\ (\text{rispetto a } G) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{incognite} \\ \beta, \Psi_G(x, y) \end{array}$$

- Sezione inconfondibile nel piano:

$$\begin{cases} \Sigma x = \Delta x, x = 0 \\ \Sigma y = \Delta y, y = 0 \\ \Sigma xy = \Delta x, y + \Delta y, x = -\beta z + \beta z = 0 \end{cases}$$

- Inoltre:

$$\Sigma z = \Delta z, z = 0 \quad (\Psi_G \text{ f.n. solo di } x \text{ e } y) \iff \bar{\sigma}_{zz} = 0$$

funzione di ingombro (riferita a G)  
noto a meno di moti rigidi

In genere si impone  $\bar{\sigma}_z = \frac{1}{A} \int_A \Psi_G dA = 0$

(spostamento medio fuori piano nullo)

- Campo di sollefazione: (scorrimenti angolari)  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  modulo di taglio

$$\gamma_z \leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{zx} = \alpha_{z,x} + \alpha_{x,z} = \beta (\psi_{G,x} - y) \\ \gamma_{zy} = \alpha_{z,y} + \alpha_{y,z} = \beta (\psi_{G,y} + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \gamma_z &= \frac{\tau_z}{G} \\ \tau_z &= G\gamma_z \end{aligned}$$

legge cost.

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta (\psi_{G,x} - y) \\ \tau_{zy} = G\beta (\psi_{G,y} + z) \end{cases}$$

campo delle tensioni tangenziali

- Eq. di congruenza: Th. Schwarz

$y_{yy}$

$x_{xx}$

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = G\beta (\cancel{\psi_{G,xy}} - 1 - \cancel{\psi_{G,yx}} - 1) = -2G\beta \stackrel{v}{=} -e$$

$$\frac{e}{2G} = \beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad \frac{e}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$$

$$e = 2G\beta$$

significato fisico

- Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = G\beta (\underbrace{\psi_{G,xx} - 0 + \psi_{G,yy} - 0}_{\nabla^2 \psi_G}) = G\beta (\psi_{G,xx} + \psi_{G,yy})$$

$\nabla^2 \psi_G$   
laplaciano

$$= G\beta \boxed{\nabla^2 \psi_G(x,y) = 0}$$

equazione di Laplace in A (derivate seconde)

(le f.m. di ingessamento dove soddisfare l'eq. di Laplace in A)

- c.c. di equilibrio:

$$0 = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = \cancel{G\beta} \left[ (\psi_{G,x} - y) n_x + (\psi_{G,y} + x) n_y \right] = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$\frac{\partial \psi_G}{\partial n} = \psi_{G,n} = \psi_{G,x} n_x + \psi_{G,y} n_y = y \overset{ty}{n_x} - x \overset{-tx}{n_y}$$

derivate direzionali nelle  
direzione  $\vec{n}$  ( $\perp$  al contorno  $\Gamma$ ):  $\nabla \psi_G \cdot \vec{n}$

$$\begin{aligned} &= \vec{x} \cdot \vec{t} = x t_x + y t_y \\ &= r(s) \vec{r}(s) \quad (*) \end{aligned}$$

"flusso" di  $\psi_G$   
nelle direzioni  $n$   
assegnato:

c.c. di Neumann-Dini

- Si ottiene pertanto un pb. di Neumann-Dini per

l'eq. di Laplace:

$$\nabla^2 \psi_G(x, y) = 0 \quad \text{in } A$$

$$\psi_{G,n} = \vec{x} \cdot \vec{t} \text{ su } \Gamma$$

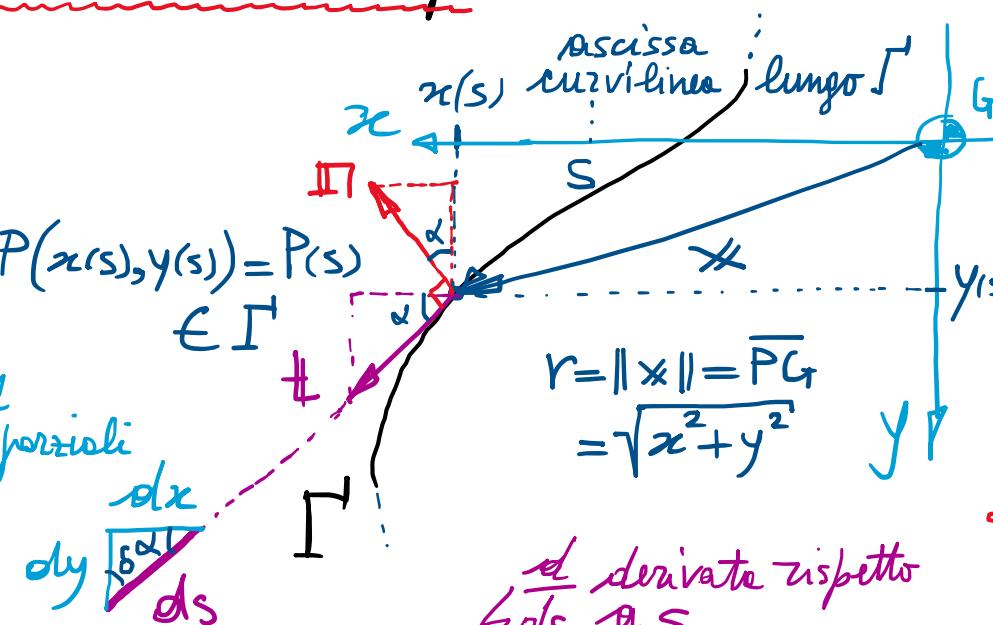
$$(*) \quad x t_x + y t_y = \begin{array}{l} \text{p.b. differenziale del} \\ \text{2° ord. alle derivate parziali} \end{array}$$

$$x x'' + y y'' =$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} (2x x' + 2y y')$$

$$\psi_{G,n} = \frac{1}{2} \frac{d r(s)}{ds} = r(s) \vec{r}(s)$$

$\neq 0$  se distanza variabile



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = x'(s) = t_x \\ \cos \beta &= \frac{dy}{ds} = y'(s) = t_y \end{aligned}$$

derivate rispetto  
a s

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} &= \frac{ds}{ds} = 1 \\ \vec{t} &= \frac{d\vec{x}}{ds} = \begin{cases} x'(s) \\ y'(s) \end{cases} = \begin{cases} t_x \\ t_y \end{cases} \end{aligned} \quad (\vec{n} \cdot \vec{t} = 0)$$

Sezione circolare

$$\begin{array}{l} \text{Sezione circolare} \\ \text{R} \quad \vec{t} \quad \nabla^2 \psi_G = 0 \Rightarrow \psi_G = 0 \\ \vec{r} = R = \text{cost} \quad \vec{r} = R \vec{t} \\ \Rightarrow \vec{r} = 0 \end{array}$$

in q.b.m.

- Da equivalenza statica:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$
$$= \int_A [\underbrace{G\beta(\psi_{G,y} + x)}_{\tau_{zy}} x - \underbrace{G\beta(\psi_{G,x} - y)}_{\tau_{zx}} y] dA$$

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \underbrace{\int_A (x^2 + y^2) dA}_{\text{momento d'inerzia torsionale}} - \underbrace{\int_A (\psi_{G,x} y - \psi_{G,y} x) dA}_{\text{inerzia legata all'ingobbamento fuori piano}} = J_G - J_{\psi_{G,x}}^* > 0$$

momento d'inerzia polare rispetto a G

$$J_G = \int_A r^2 dA$$

$$d\vartheta = \beta dz = \frac{M_t}{GJ} dz$$

rigidezza torsionale

fattore di torsione  $\geq 1$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \gamma \frac{M_t}{GJ_G}; \quad \gamma = \frac{J_G}{J} = \frac{J_G}{J_G - J^*} = \frac{1}{1 - J^*/J_G} \geq 1$$

proprietà geometrica della sezione trasversale

$J_G > J_{\psi_{G,x}}^* \geq 0$   
inerzia legata all'ingobbamento fuori piano

•  $J_{\psi_{G,x}}^* = \int_A [(\psi_{G,x})^2 + (\psi_{G,y})^2] dA \geq 0$   
 $(\times 2^{\text{th. div.}})$  si può dim.  
(con  $\nabla^2 \psi_G = 0$  in A)

•  $J = \frac{M_t}{G\beta} = \frac{1}{(G\beta)^2} \int_A (\underbrace{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}_{\tau_z^2}) dA$  (via PLV)  
 $= \left(\frac{2}{c}\right)^2 \int_A \tau_z^2 dA > 0$