Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

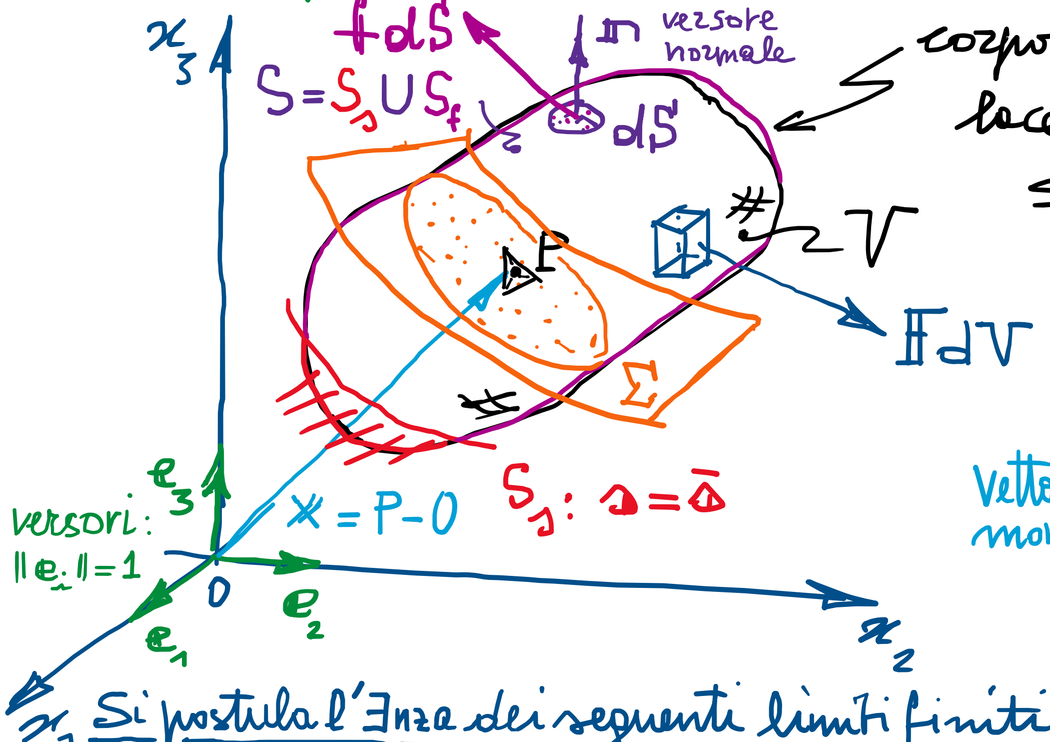
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 12

Meccanica dei Solidi – Continuo di Cauchy (Statica dei Continui)

Generalizzazione del concetto di sforzo, visto in ambito monodimensionale (prove di trazione; prova di torsione), al contesto tridimensionale generico.

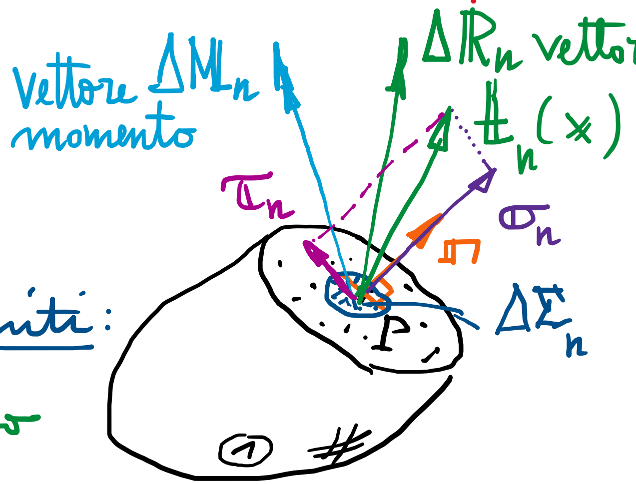


corpo solido: mezzo continuo (privo di vuoti interni, lacerazioni, cricche) ⇒ ogni $P\in V$ è un punto materiale

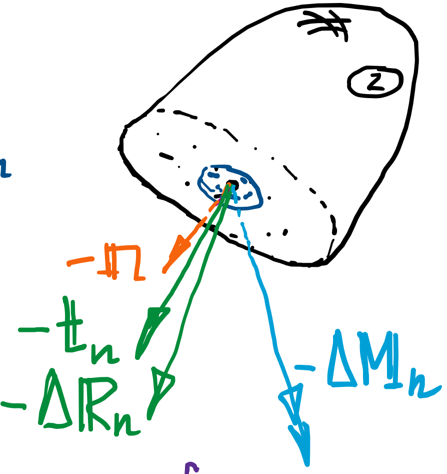
Soggetto a: forze di volume $\mathbb{F}$ (es. peso proprio) in V

(su S_f) forze di superficie $\mathbb{f}$ (es. pressione di un fluido)

spostamenti assegnati su contorno vincol. (S_s)



Risultanti su $\Delta\Sigma_n$ trasmesse dalla parte rimossa (effetti di ② su ①):



N.B.:

+ $\mathbb{t}_n(\mathbb{x})$ fornisce sforzo in P su faccia di normale uscente $\mathbb{n}$
+ $\mathbb{t}_{-n}(\mathbb{x}) = -\mathbb{t}_n(\mathbb{x})$
+ $\mathbb{t}_n \not\parallel \mathbb{n}$

sforzo normale — sforzo tagliante

$$\mathbb{t}_n = \sigma_n + \tau_n$$

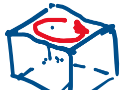
Si postula l'∃nza dei seguenti limiti finiti:

$$\lim_{\Delta\Sigma_n\to 0}\frac{\Delta\mathbb{R}_n}{\Delta\Sigma_n} = \mathbb{t}_n(\mathbb{x}) \quad \text{vettore sforzo di Cauchy}$$

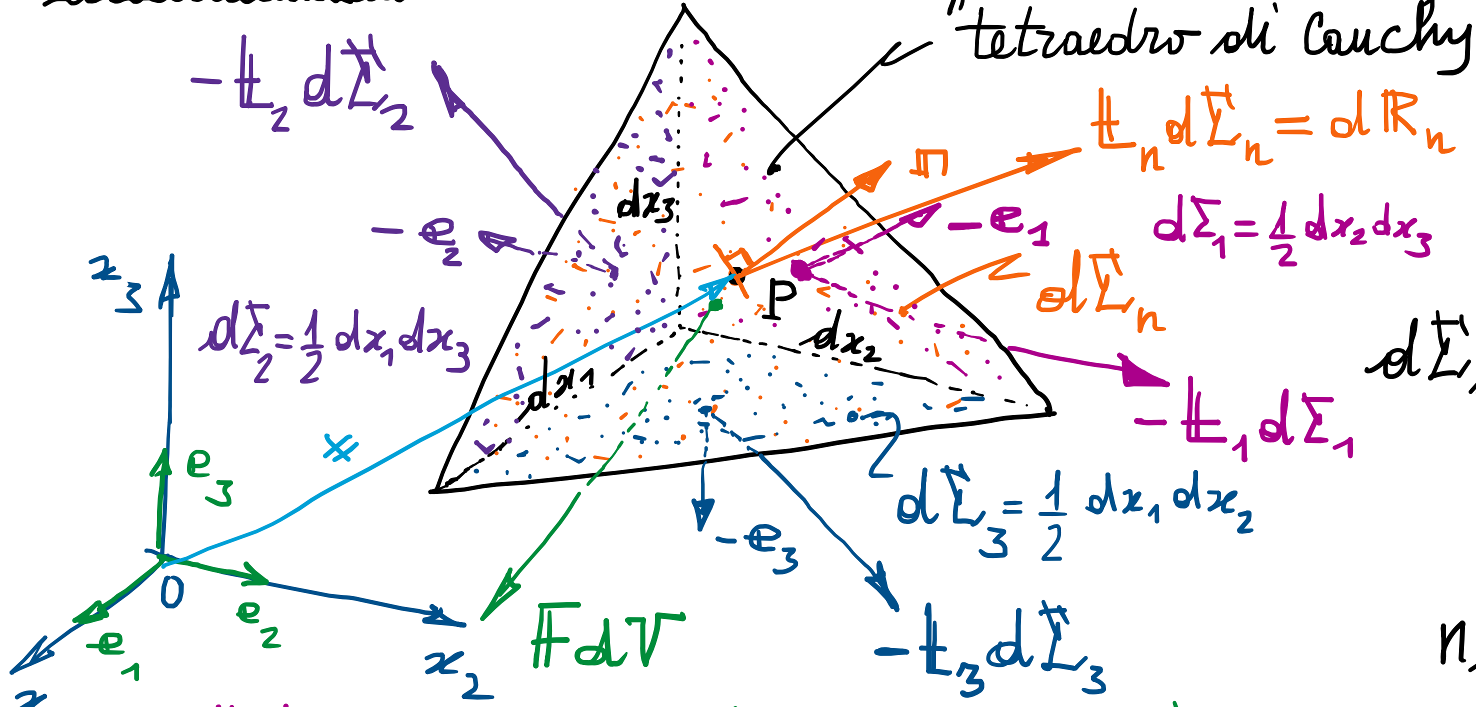
$[\mathbb{t}_n] = \dfrac{[F]}{[L]^2}$ (forza fratto area)

$$\lim_{\Delta\Sigma_n\to 0}\frac{\Delta\mathbb{M}_n}{\Delta\Sigma_n} = 0 \quad \text{(continuo non polare di Cauchy)}$$

"m_n" "microcoppie" nulla



Relazione di Cauchy (~ 1822): come individuare $\mathbf{t}_n$, su faccia di normale $\mathbf{n}$, in base a sforzo in $\mathbf{x}$



"tetraedro di Cauchy": con risultanti trasmesse dal mondo esterno attraverso le quattro facce, una inclinata e tre // ai piani coordinati

$$d\Sigma_i = \frac{1}{2} dx_j\, dx_k \qquad (i,\ j,\ k)$$
$$= n_i\, d\Sigma_n$$

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$n_i = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i = \cos(\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_i})$$

coseno direttore del versore normale $\mathbf{n}$

$$n_i = \frac{d\Sigma_i}{d\Sigma_n} = \dots$$

$dV = \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{3} d\Sigma_i\, dx_i$

n_i scalari (coseni direttori) $\left(\sum_i n_i^2 = 1\right)$

vettoriale

Equazione di equil. alla traslazione:

$$\underbrace{\mathbf{t}_n\, \cancel{d\Sigma_n}}_{\sim dx_i^2} - \sum_i \mathbf{t}_i\, \underbrace{\frac{d\Sigma_i}{d\Sigma_n}}_{n_i} + \underbrace{\cancel{\mathbf{F}\, dV}}_{\sim dx_i^3} = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbf{t}_i\, n_i}$$

vettore sforzo di Cauchy su faccia inclinata di normale uscente $\mathbf{n}$

vettori sforzo di Cauchy agenti su facce parallele ai piani coordinati

Quindi, data $\mathbf{n}$ (cioè i coseni direttori n_i), il vettore sforzo $\mathbf{t}_n$ è noto una volta noti i tre vettori sforzo $\mathbf{t}_i$ agenti su facce // piani coordinati. $\Rightarrow$ essi definiscono pertanto lo stato di sforzo locale in $\mathbf{x}$

Relazione in termini di componenti: $(j = 1,2,3)$ componenti: $t_{nj} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{e}_j$; $t_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbf{t}_i n_i$$

$\sigma_{ij} = t_{ij}$ = comp. di $\mathbf{t}_i$ nella direz. j

$$\begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \end{Bmatrix} n_1 + \begin{Bmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{Bmatrix} n_2 + \begin{Bmatrix} t_{31} \\ t_{32} \\ t_{33} \end{Bmatrix} n_3 \Rightarrow \begin{cases} t_{n1} = t_{11} n_1 + t_{21} n_2 + t_{31} n_3 \\ t_{n2} = t_{12} n_1 + t_{22} n_2 + t_{32} n_3 \\ t_{n3} = t_{13} n_1 + t_{23} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases}$$

$$t_{nj} = n_i \sigma_{ij} = \sigma^T_{ji} n_i$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(T)} \cdot \mathbf{n} \leftarrow$$

noto σ, data $\mathbf{n}$, è noto $\mathbf{t}_n$

$\mathbf{t}_n$ è la "proiezione" di σ nella direzione $\mathbf{n}$

$$\begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \\ \quad \mathbf{t}_1 \quad\; \mathbf{t}_2 \quad\; \mathbf{t}_3 \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

└ tensore sforzo di Cauchy (del 2° ordine)

(trasformazione lineare di $\mathbf{n}$ in $\mathbf{t}_n$)

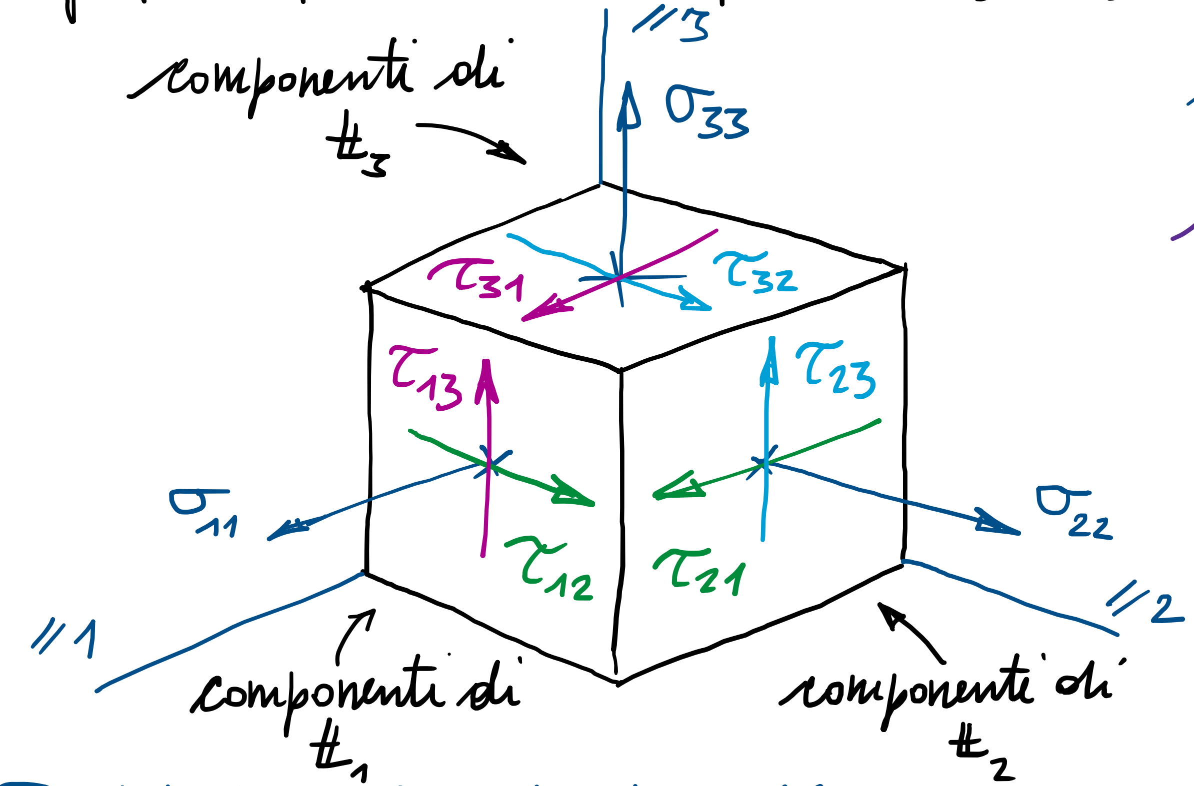
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

σ_{ij}

matrice sforzo di Cauchy: componenti del tensore sforzo di Cauchy (9)

- tensore: oggetto fisico-matematico atto a rappresentare grandezze fisiche
- indipendente dal sistema di riferimento ma con componenti variabili con leggi di trasformaz. particolari. ⇒ vedi CdSdC

Significato fisico delle componenti $\sigma_{ij} = t_{ij}$ del tensore sforzo di Cauchy:



$i=j$ $\quad \sigma_{ii}$ sforzi normali (alle faccie) (3)

$i \neq j$ $\quad \sigma_{ij} = \tau_{ij}$ sforzi tangenziali (alle faccie) (6)
taglianti

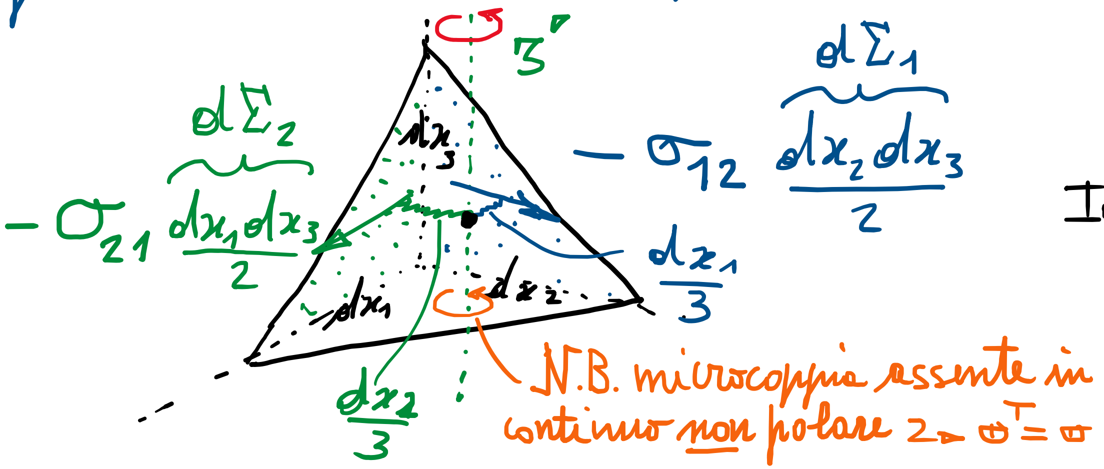
(9)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

6 componenti indipendenti: ($3\ \sigma_{ii}$ e $3\ \sigma_{ij}$)

tensore del 2° ordine simmetrico

Equilibrio alla rotazione del tetraedro: $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ $\quad (\sigma^T = \sigma)$



$$3^r:\ -\sigma_{21}\,\overbrace{\frac{dx_1 dx_3}{2}\,\frac{dx_2}{3}}^{dV} + \sigma_{12}\,\overbrace{\frac{dx_2 dx_3}{2}\,\frac{dx_1}{3}}^{dV} = 0$$

Idem: $\qquad \Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{12}$

1^r: $\qquad \Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23}$

2^r: $\qquad \Rightarrow \sigma_{31} = \sigma_{13}$

3 componenti taglianti