Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

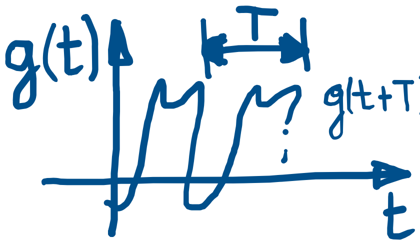
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Analisi nel dominio delle frequenze



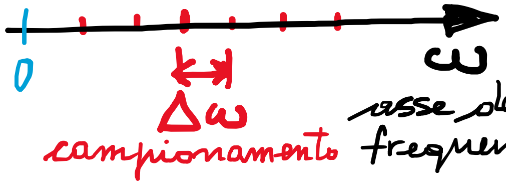
f.ne periodica di periodo T, $g \in P_T$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \leftarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$$

pulsazione fondam.

$$\omega_n = n\,\omega = n\,\Delta\omega$$

$$g(t) \cong \sum_{n=(-\infty)\ -\bar{n}}^{(+\infty)\ \bar{n}} \underbrace{C_n}\, e^{+i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{-i\omega_n t}\, dt}\; e^{+i\omega_n t}$$

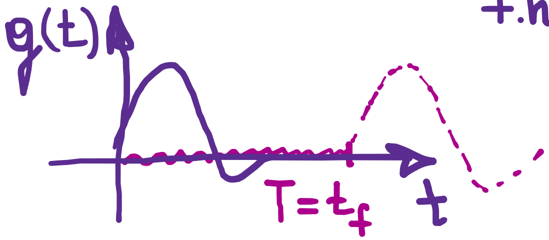


forzante del sistema in TD

Time Domain

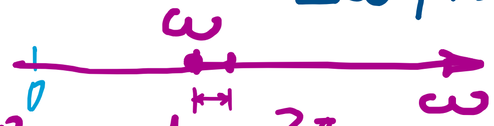
Sviluppo in serie di Fourier: sovrapposizione di ∞ componenti armoniche a pulsazioni discrete, separate da Δω finita

f.ne aperiodica $g \in P_\infty$ ($T \to \infty$)



$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}\; e^{+i\omega t}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi} \leftarrow d\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Trasformata di Fourier: $G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

Antitrasform. di F.: $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega$

trasf. inversa

Time Domain

$\mathcal{F}$ ↓ ↑ $\mathcal{F}^{-1}$

Frequency Domain

CS di Dirichlet:

per ∃nza $\mathcal{F}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < +\infty \Rightarrow g(t) \in P_\infty$

sovrapposizione di ∞ componenti armoniche, di ampiezza $G(\omega)$, a pulsazioni continue, separate da $d\omega$ infinitesime.

nel dominio delle frequenze

Proprietà di $\mathcal{F}$ (di differenziaz.)

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{i\omega t}\right) = (i\omega)^n e^{i\omega t}$$

proprietà di differenziazione della f.ne esponenziale (autosomiglianza della derivata)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n}(g(t))\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)(i\omega)^n e^{i\omega t}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}\left((i\omega)^n \overbrace{G(\omega)}^{\mathcal{F}(g(t))}\right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n}g(t)\right) = (i\omega)^n \mathcal{F}(g(t))}$$

Equazione del moto (SDOF): $g(t) \to u(t)$ TD

$G(\omega) \to U(\omega)$ FD

$Ku = F_e \qquad u = K^{-1}F_e$

$F_e = Ku \to \underbrace{K^{-1}}_{\text{cedevolezza}} F_e = u$

$$\mathcal{F}\big(\underbrace{m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku(t) = g(t)}_{\text{equazione differenziale}}\big)$$

equazione algebrica

$$m(i\omega)^2 U(\omega) + c(i\omega)U(\omega) + K\,U(\omega) = G(\omega)$$

proprietà sistema dinamico

relaz. algebrica con prodotto

$i^2 = -1$

$$\underbrace{(K - m\omega^2 + ic\omega)}_{\text{rigidezza in FD}} \cdot U(\omega) = G(\omega) \Rightarrow U(\omega) = \underbrace{(K - m\omega^2 + ic\omega)^{-1}}_{H(\omega)} \cdot G(\omega) = \boxed{H(\omega)\cdot G(\omega) = U(\omega)}$$

$H(\omega)$ Funzione di risposta in frequenza (FRF) — Frequency Response Function

"cedevolezza" nel dominio delle frequenze (FD) — è f.ne complessa

$\omega_1^2 = K/m$

$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_1$

$$K\left(1 - \frac{m}{K}\omega^2 + i\frac{c}{K}\omega\right)$$

$$K\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + i\,2\zeta\omega_1\frac{m}{K}\omega\right)$$

$$K\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + i\,2\zeta\frac{\omega}{\omega_1}\right) \Rightarrow \boxed{H(\omega) = \underbrace{\frac{1}{K}}_{u_{st}=\frac{F=1}{K}} \underbrace{\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + i\,2\zeta\frac{\omega}{\omega_1}}}_{\sim N\left(\beta=\frac{\omega}{\omega_1}\right)}}$$

N è il modulo di H

frequency ratio $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

ampiezza in FD della risposta a forzante armonica di ampiezza unitaria

$u(t) = H(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$

$g(t) = 1\, e^{i\omega_0 t}$

(come visto per forzante armonica, di puls. $\omega = \omega_0$ e ampiezza 1)

INPUT

"filtro"

OUTPUT

$g(t)$ delta di Dirac

$u(t)$ f.ne risposta ad impulso unitario

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Integrale di D.

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

integrale di convoluzione (Duhamel)

Dominio del tempo

TD

$$g(t)=1\,e^{i\omega_0 t}$$

$$g(t)=\delta(t)$$

$$u(t)=H(\omega_0)\,e^{i\omega_0 t}$$

$$u(t)=h(t)=\frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$\mathcal{F}$

SISTEMA DINAMICO STRUTTURALE

$\mathcal{F}^{-1}$

Dominio delle frequenze

FD

$$G(\omega)=1$$

$$G(\omega)=2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

trasf. di Fourier della $h(t)$

$$U(\omega)=H(\omega)$$

$$U(\omega)=2\pi\,H(\omega)\,\delta(\omega-\omega_0)$$

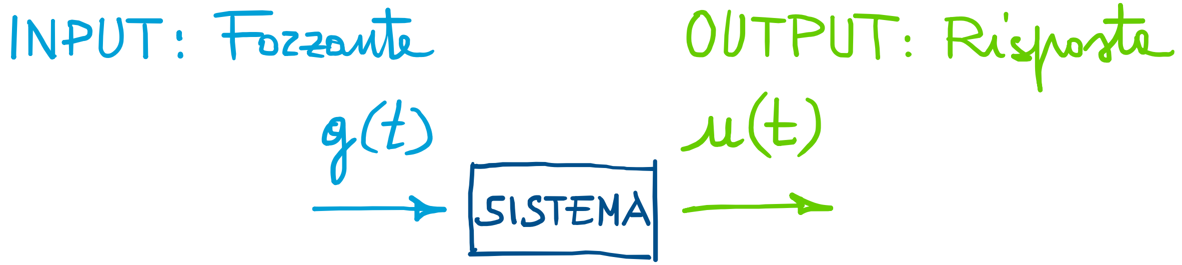
$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \qquad U(\omega)=H(\omega)\cdot G(\omega) \qquad U(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$H(\omega)=\frac{U(\omega)}{G(\omega)}$$

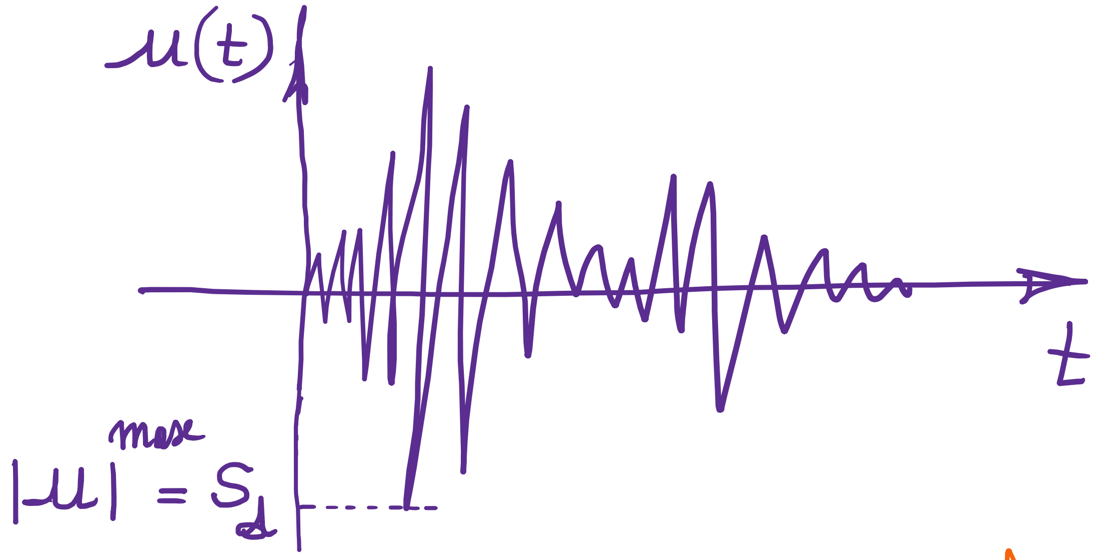
FRF (trasf. di Fourier di $h(t)$)

"cedevolezza" nel dominio delle frequenze

Concetti fondamentali:

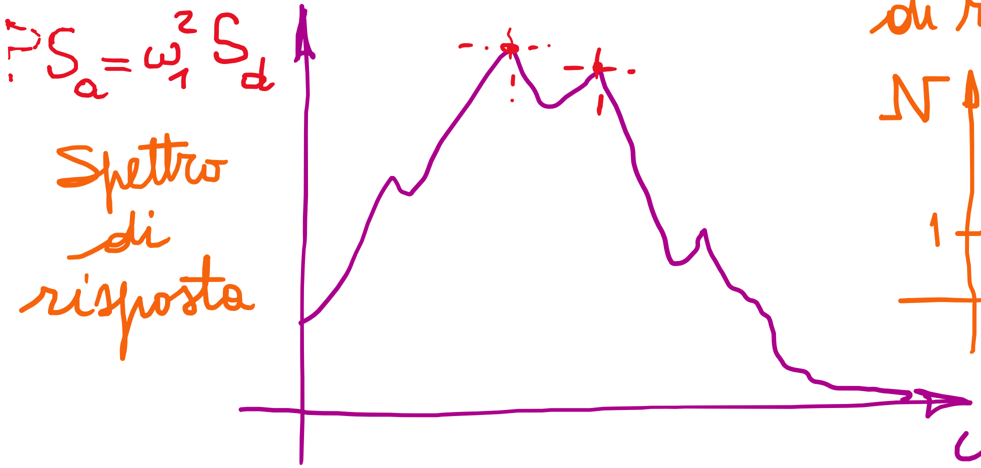


- **Analisi della risposta dinamica:**

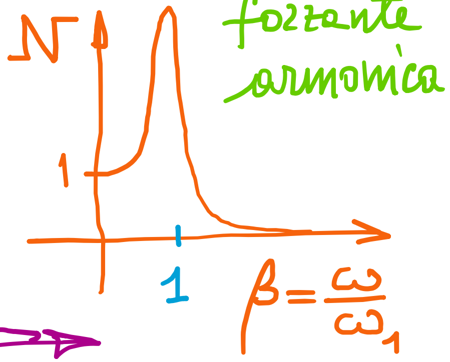


  - Nel dominio del tempo:

  - Nel dominio delle frequenze:
    - freq. angolari, pulsaz. $\omega = 2\pi f$ [rad/s]
    - " cicliche, $f = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz]



v. anche curve di risonanza per forzante armonica



Dominio del Tempo | | Dominio delle Frequenze

$$g(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} G(\omega)$$

diretta

Trasformata di Fourier della funzione $g(t)$: $$G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Trasformata inversa o antitrasformata di Fourier : $$g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega$$

Proprietà di differenziazione: (della funzione esponenziale)

$$\frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = i\omega\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\quad \right) = \frac{d}{dt}\left(i\omega e^{i\omega t}\right) = (i\omega)^2 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\left(\quad \right) = \frac{d}{dt}\left((i\omega)^2 e^{i\omega t}\right) = (i\omega)^3 e^{i\omega t}$$

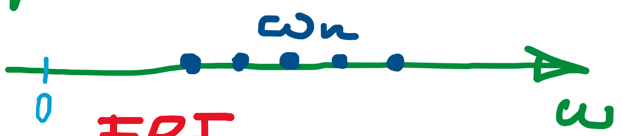
$$\mathcal{F}^{-1}: \; g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{i\omega t}\right) = (i\omega)^n e^{i\omega t}} \xrightarrow[\text{conseguenze}]{\text{per}} \boxed{\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n}(g(t))\right) = (i\omega)^n \underbrace{\mathcal{F}(g(t))}_{G(\omega)}}$$

$$\mathcal{F}: \; G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

SOMMARIO (Lez. 10)

- Analisi nel dominio delle frequenze (FD).
- Trasformata di Fourier (generalizzazione di sviluppo in serie di Fourier, tramite intero asse reale delle frequenze).



- Trasformata di F. dell'eq.ne del moto $\Rightarrow$ $U(\omega) = \overbrace{H(\omega)}^{FRF} \cdot G(\omega)$ risposta in FD tramite prodotto algebrico.
- Schema interpretativo di analisi, tra i livelli TD e FD, coi legami tra le f.ni presenti. In particolare, $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) \cong N(\omega)$.

Next step: Sistemi dinamici a più gdl (MDOF)
(generalizzazione dei sistemi SDOF).