

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 01

Inquadramento delle tematiche del corso { Dinamica  
Instabilità  
Anelasticità .... delle strutture

(con riferimento alle Scienze delle Costruzioni - SdC)

[propedeuticità]

SdC

Dinamica

NON-LINEARITÀ

Instabilità

Anelasticità

Mecanica dei  
Solidi/Strutture

3 equaz. fondam.  
(LINEARI)

- equilibrio  
(statica)

- congruenza  
(legge deform./spost.)

- legame  
costitutivo  
(legge spzzi/deform.)

(LINEARI)  
- equazioni del  
moto  
(masse; spost.  $u(t)$ ,  
velocità  $\dot{u}(t)$ , accel.  $\ddot{u}(t)$ )

"

"

(equil. nello conf. deformato)  
- non-lin. geometrica  
con effetto P-Δ  
grandi spostamenti  
carico critico

"

- non-linearità di  
matereiale

"

"

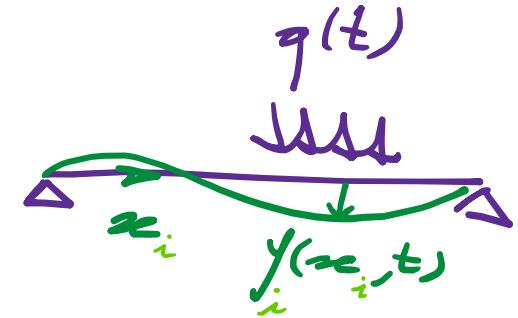
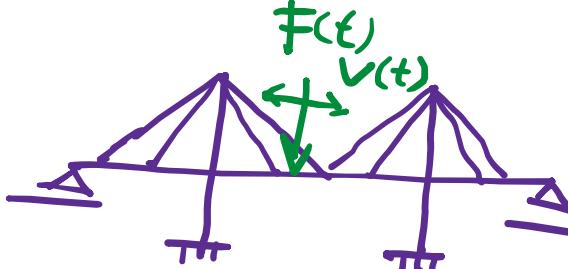
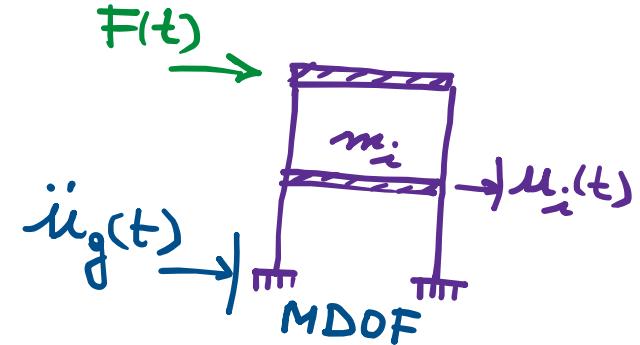
Esempi

Caratteristiche soliente

Programme del corso

Elaborati

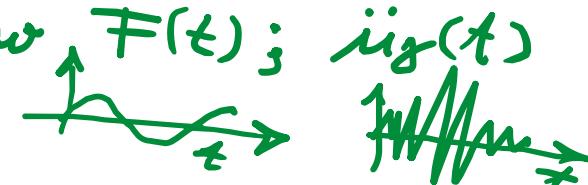
# Dinamica delle Strutture



effetti inerziali: distribuzione delle masse  
spostamenti dip. dal tempo ( $t$ ), velocità, accelerazioni  
 $u(t)$   $ii(t)$   $ii_g(t)$

forzanti dipendenti dal tempo  $F(t)$ ;  $ii_g(t)$

equazione del moto



Sistemi discreti

(n. finito di gradi)

Sistemi SDOF

„ MDOF

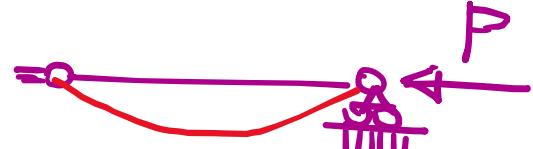


~ 2/3

Sistemi SDOF + MDOF, soggetto a forzanti dip. dal tempo e ad azione sismica

## Esempi

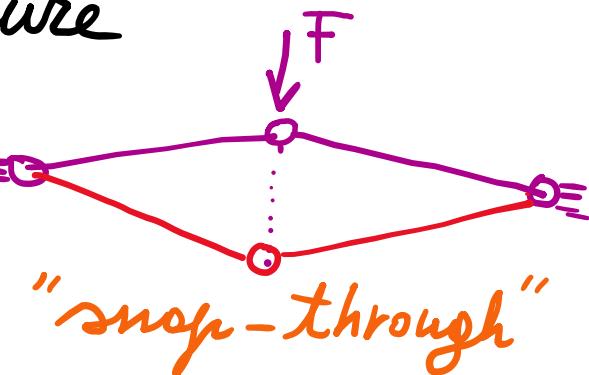
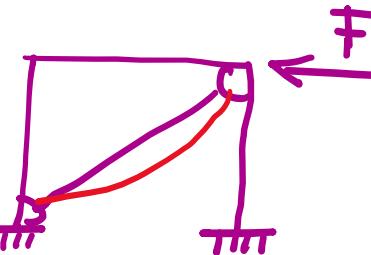
### Instabilità



"Buckling"



### delle Strutture



"snap-through"

## Caratteristiche soliente

carichi quasi-statici

$$P = \beta P_0$$

$P_0$  carico base

carico critico  $P_{cr}$ ,  $\lambda_{cr}$

moltiplicatore dei carichi

equil. nelle confine deformate

approccio

effetti del 2° ordine

statico/energetico

## Programma del corso

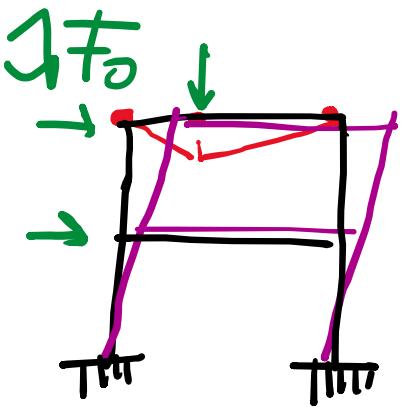
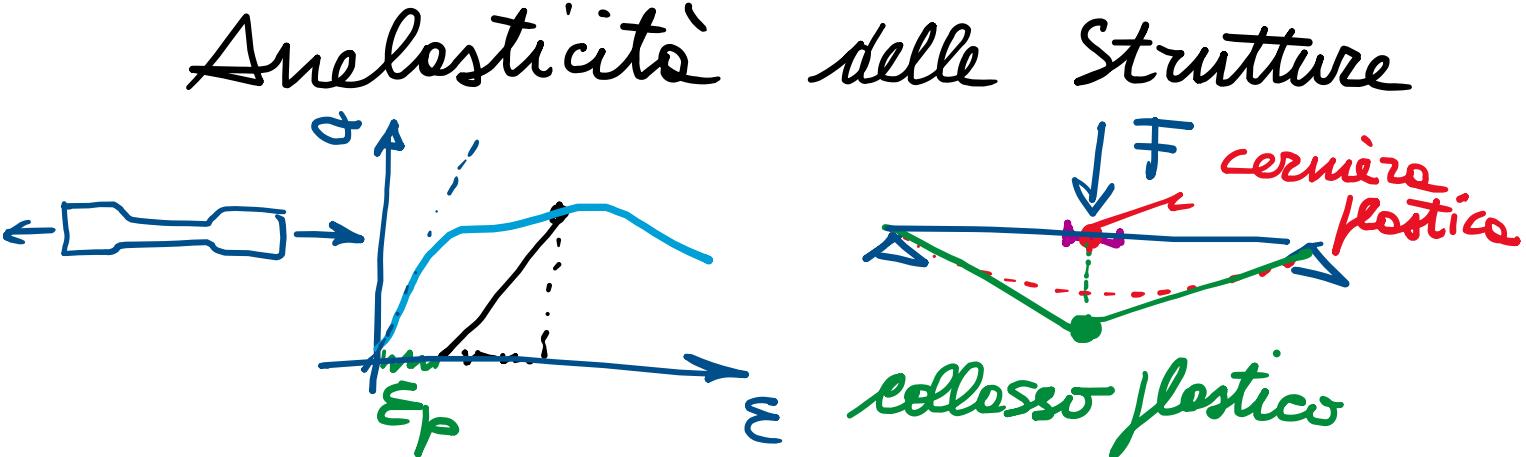
sistemi discreti MDOF; sistemi continui  
(statico/energetico)

## Elaborati

Sistema discreto MDOF + continuo  
con det. di  $P_{cr}$ , deform. critiche, verifica di instabilità

$\sim 1/3$

Esempi



Caratteristiche salienti

Cariichi quasi-statici  $F = \lambda F_0$

$\lambda$  moltiplicatore di collasso

Comportamento anelastico (in particolare plastico)

Dissipazione di energie (comportamento irrevers.)

"Calcolo e Rotta" dei telai, uso dei th. fondamentali dell'Analisi Limite

Programma del corso

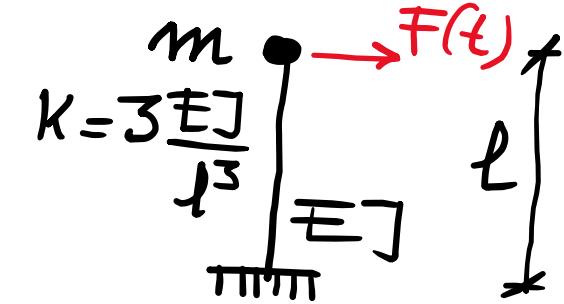
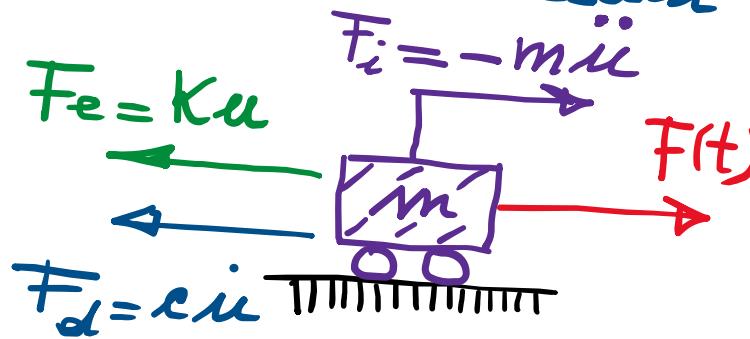
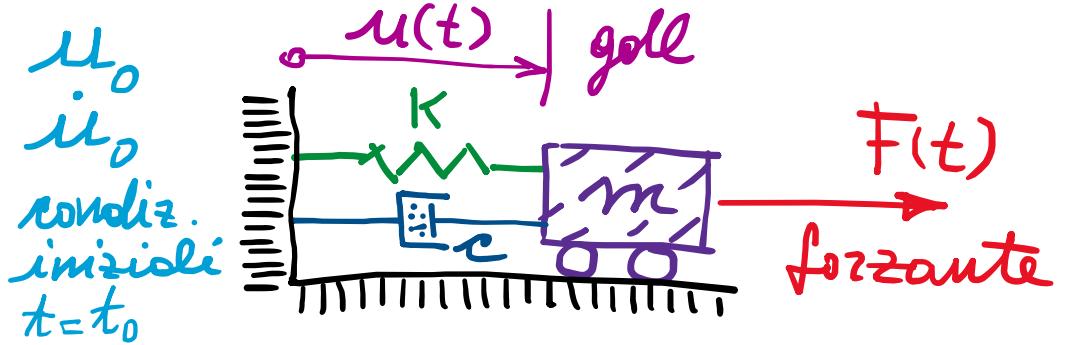
Elaborati

Calcolo e collasso di strutture a telai ~ 1/5<sup>+</sup>

# I) Dinamica delle Strutture

Sistemi  
Single  
Degree  
of  
Freedom

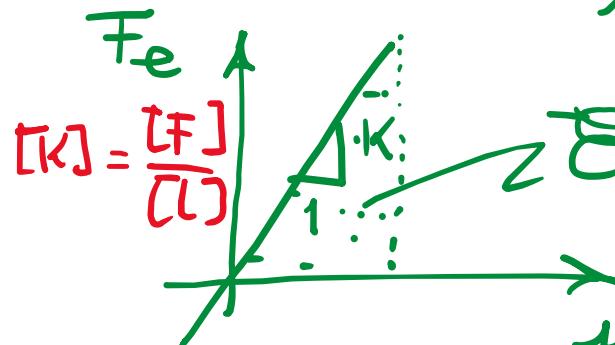
$$(i) = \frac{d}{dt} (\ )$$



Molla elastico lineare

"spring"   $\rightarrow F_e = K u$   
 $K$

legge di Hooke  
 $u = \frac{1}{K} F_e$

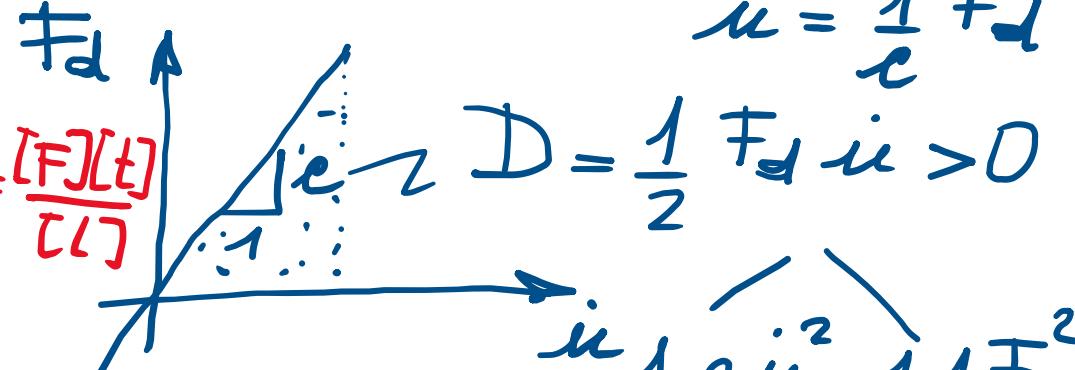


$K > 0$  costante di rigidezza

$\frac{1}{2} K u^2$   
 $\frac{1}{2} \frac{1}{K} F_e^2$   
energia elastica

Smorzatore Viscoso lineare

"dash-pot"   
 $C$   
 $F_d = c \dot{u}$   
 $\dot{u} = \frac{1}{c} F_d$



$c > 0$   
coeff. di smorzamento o di Rayleigh  
f. ne di dissipazione

# Equilibrio dinamico (Principio di D'Alembert)

$\sum F_i$ : forze d'inerzia

Regge fondamentale delle dinamiche  $F = m\ddot{u} \Rightarrow F - m\ddot{u} = 0$

equazione del moto  $\leftarrow$  equazione di "equilibrio dinamico"  $\sum F_i = 0$

SDDOF  $q_1 = u$

sist. tempo invarianti  $m, c, k$  cost.

$$\boxed{m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = F(t)} \quad \begin{matrix} t \\ K=1, \dots, N \end{matrix}$$

eq. differenziale del 2° ordine e coeff. cost.

- Altrimenti, tramite equazioni di Lagrange:  $L = T - V$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_K} = Q_K^* = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_K^*} \quad \begin{matrix} * \\ \text{forze generalizzate} \end{matrix} \quad = L(q_K, \dot{q}_K)$$

coordinate

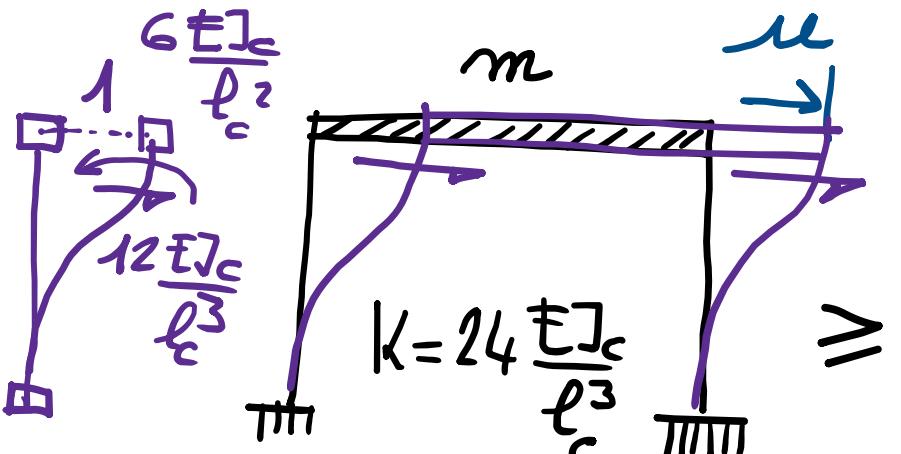
lagrangiana

$$Q_{kf}^* = - \frac{\partial V_f}{\partial q_K}$$

$$Q_{kd}^* = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_K} = - F_d = - \dot{e} \dot{u}$$

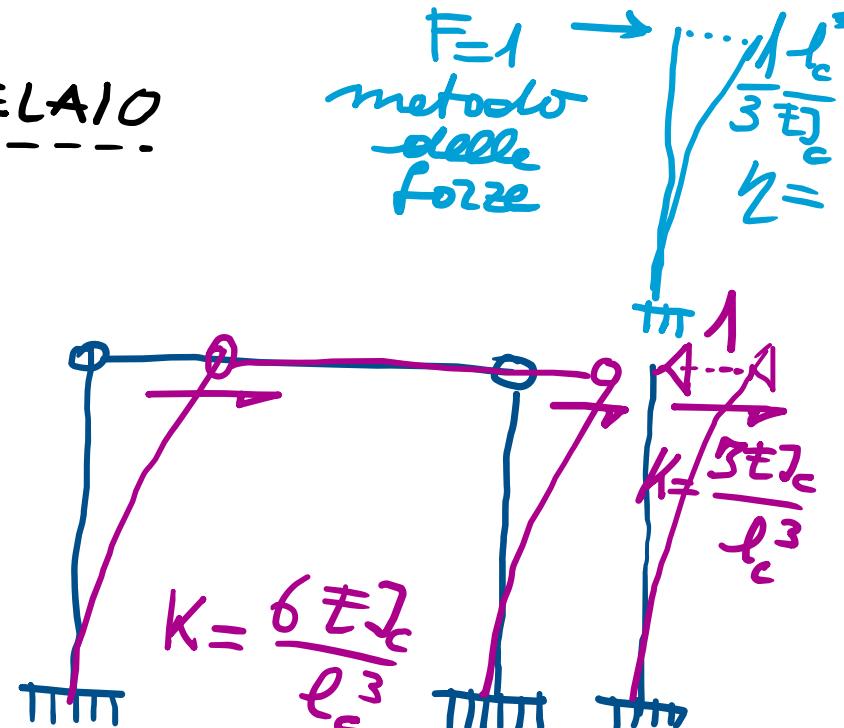
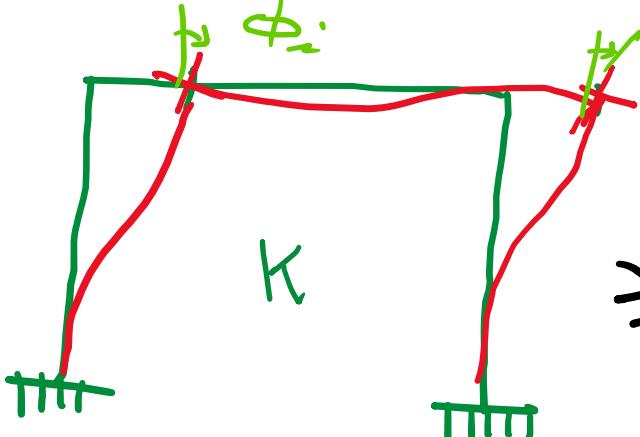
$$\begin{aligned} - T &= \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \\ \text{energia cinetica} \\ - V &= \frac{1}{2} K u^2 \\ \text{energia pot. elastica} \end{aligned}$$

## Esempi di strutture



e: fatto di rigidezza  
trave-colonna

TELAI



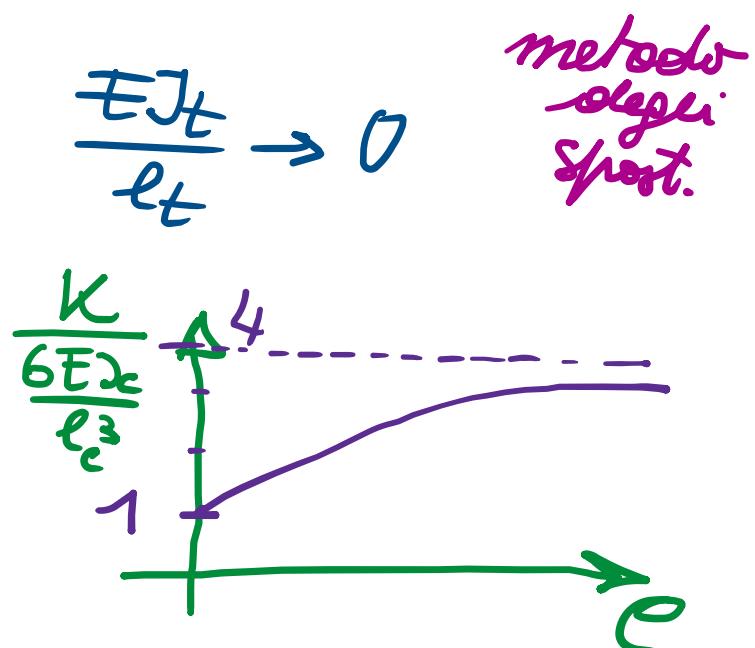
Telai "shear-type"

- $\frac{EI_t}{lt} \rightarrow \infty$  (impermeabile rigido)
- $\frac{EA_c}{lc} \rightarrow \infty$  (colonne assialm. rigide)
- $m$  concentrata al piano

$$\rho = \frac{\sum \frac{EI_t}{lt}}{\sum \frac{EI_c}{lc}}$$

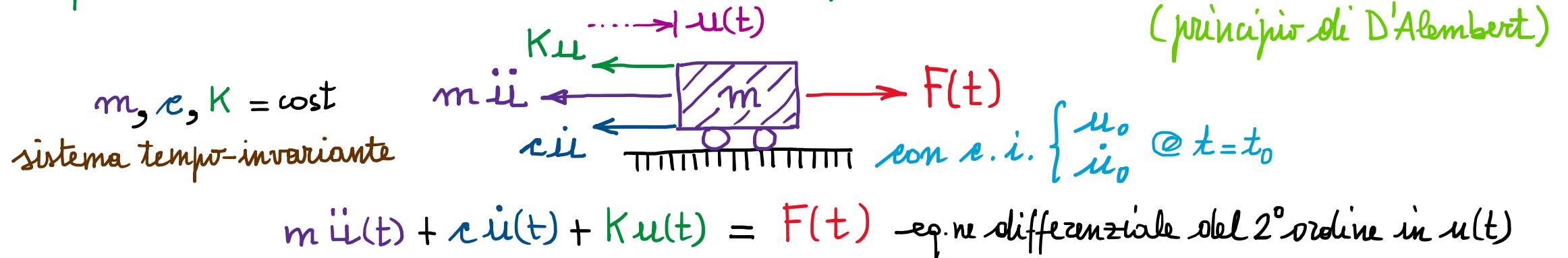
$$K = \frac{6 EI_c}{l_c^3} \frac{12\rho + 1}{3\rho + 1}$$

(tramite "condensazione statica"  
dei gradi rotazionali si modifica)

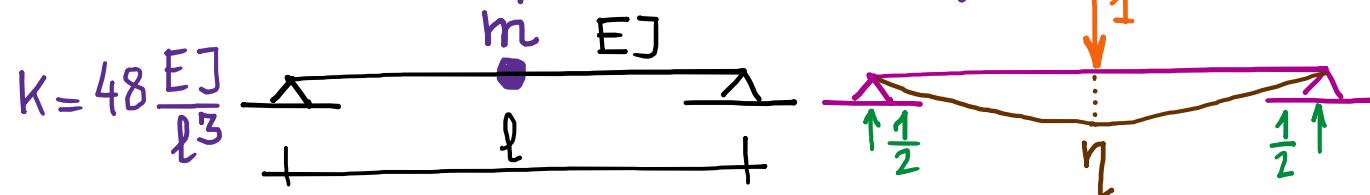


## Concetti fondamentali :

- La struttura fornisce supporto (elastico; dissipativo visco per sistemi reali smorzati) alle masse, delle stesse o di quantità sostenute.
- L'equazione del moto del sistema dinamico si può esprimere per "equilibrio dinamico":



- Se costante di rigidezza  $K$ , che rappresenta la struttura (elastica lineare), si determina in ambito statico con metodi noti (vedi metodo delle forze  $\Rightarrow$  cedevolezza  $\eta = K^{-1}$ ; metodo degli spostamenti  $\Rightarrow$  rigidezza  $K = \eta^{-1}$ ). Es.:



$$N(x) = \frac{1}{2} x$$

$$\eta = 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{1}{2} x\right)^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{8} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\text{PLV(PFV)} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EJ}$$

# SOMMARIO (Lec. 01)

- Le tematiche della Dinamica, della Instabilità e della Anelasticità delle Strutture: aspetti specifici e interagenti.
- Posizionamento vs. SeC; equazioni; caratteristiche; programma.

## + Parte 1 - Dinamica delle Strutture

- Sistemi dinamici ad un gdl (SDOF). L'oscillatore semplice.
- Equazione del moto  equilibrio dinamico (principio di d'Alembert).  
equazioni di Lagrange.
- Esempi di sistemi strutturali SDOF, con determinazione delle costante di rigidezza.
- Telaio a portale; fattore di rigidezza trave/colonna; telaio "shear-type".