Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

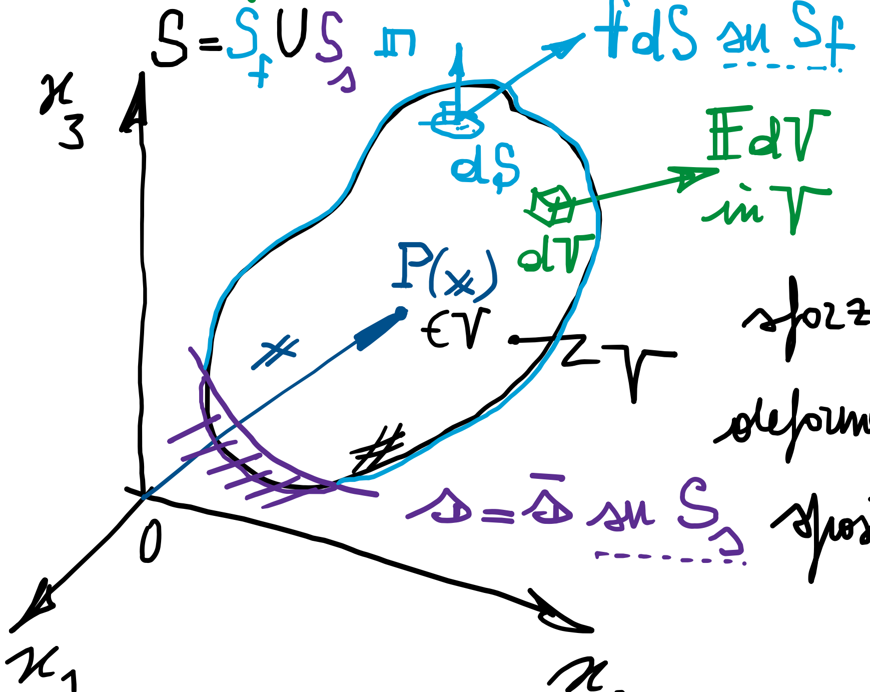
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

Legame costitutivo (legge sforzi-deformazioni) $\Rightarrow$ comportamento meccanico del materiale

- Sinora visti lo sforzo (statica dei continui) e la deformazione (cinematica dei continui), nel rispetto dell'equilibrio e della congruenza, indipendenti l'uno dall'altro $\Rightarrow$ ora saranno da correlare, in ragione del comportamento meccanico del materiale di cui è composto il solido.

$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{f}$



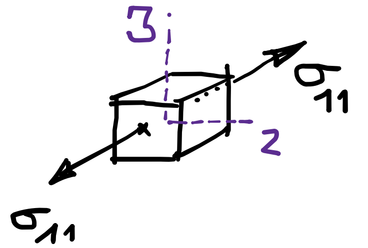
Risposta tenso-deformativa (incognite)		Descrizione del problema fisico (problema elastico lineare) (equazioni governanti)	
sforzo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \sigma_{ij}(x_k)$	6	equil. $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{F}=\mathbf{0} \leftrightarrow \sigma_{ij,i}+F_j=0$;	3
deformaz. $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varepsilon_{ij}(x_k)$	6	congr. $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s}+\nabla\mathbf{s}^T) \leftrightarrow \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(s_{i,j}+s_{j,i})$	6
spost. $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \leftrightarrow s_i(x_k)$	3	legame costitutivo (elastico lineare) $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}),\ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \leftrightarrow \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}),\ \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$	6
	15		15

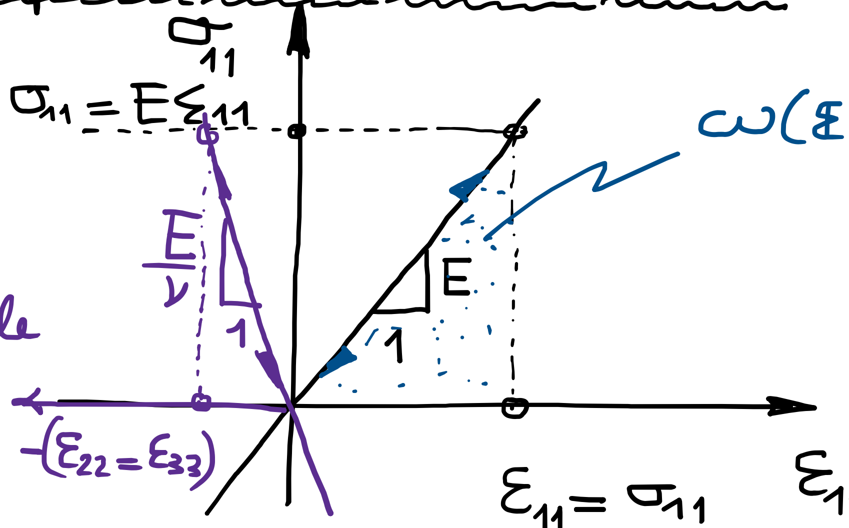
- Le (6) equazioni costitutive $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$, $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ completano il bilancio equazioni/incognite, ponendo in relazione, localmente ($\forall\mathbf{x}$), lo sforzo e la deformazione.

Materiale elastico lineare (isotropo)

- **elastico**: comportamento perfettamente reversibile (senza dissipazione di energia $\Rightarrow$ assenza di deformazioni irreversibili [plastiche] allo scarico)
- **lineare**: relazione lineare di proporzionalità tra sforzi e deformazioni
- **isotropo**: comportamento (meccanico) indipendente dalla direzione

Introduzione tramite prova monoassiale di trazione





legge di Hooke del materiale (1D)

$$\sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11}$$

$w(\varepsilon)$ energia di deformazione $>0 \ \forall \varepsilon \neq 0$ (definita positiva)

$$= \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} < \begin{matrix} \frac{1}{2}E\varepsilon_{11}^2 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{E}\sigma_{11}^2 \end{matrix}$$

Contrazione trasversale

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{\sigma_{11}}{\frac{E}{\nu}}$$

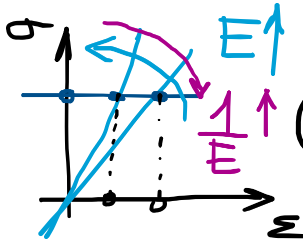
$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}$$

ν: coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson [1]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$\frac{1}{E}$ cedevolezza

E: modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young



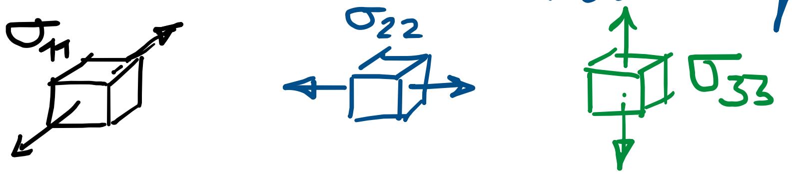
E↑ $\frac{1}{E}$↑ (rigidezza del materiale)

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \text{cost} > 0$$

$$[E] = \frac{[F]}{[L]^2}$$

Generalizzazione al triassiale (tramite Principio di Sovrapposizione degli Effetti – PSE)

valido per la linearità assunta



σ_{11} $\qquad$ σ_{22} $\qquad$ σ_{33}

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} \\[2mm]
\varepsilon_{22} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} + \dfrac{1}{E}\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} \\[2mm]
\varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} + \dfrac{1}{E}\sigma_{33}
\end{cases}
$$

leggi deformazioni/sforzi normali

scorrim. angolari

$$
\left.\begin{cases}
2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \dfrac{\tau_{12}}{G} = \dfrac{\sigma_{12}}{G} \\[2mm]
2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \dfrac{\tau_{23}}{G} = \dfrac{\sigma_{23}}{G} \\[2mm]
2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \dfrac{\tau_{13}}{G} = \dfrac{\sigma_{13}}{G}
\end{cases}\right\} \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}
$$

leggi deformazioni/sforzi tangenziali o taglianti

G modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio $G = \dfrac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \text{cost} > 0$

scrittura in notazione matriciale

risposte normali/taglianti disaccoppiate

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\
-\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\
-\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\
 & & & \frac{1}{G} & & \\
 & 0 & & & \frac{1}{G} & \\
 & & & & & \frac{1}{G}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}
$$

$$
\underset{6\times 1}{\{\varepsilon\}} = \underset{6\times 6}{[C]} \cdot \underset{6\times 1}{\{\sigma\}}
$$

matrice di cedevolezza del materiale (simmetrica)

Ipotesi di elasticità ($\exists$nza di energia di deformazione, definita positiva) $\Rightarrow$ implica delle delimitazioni sui parametri elastici $[E, \nu; G]$

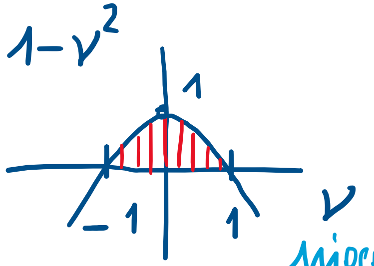
$$\omega = \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot \underbrace{[\mathbb{C}]\cdot\{\sigma\}}_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\cdot\{\varepsilon\} > 0 \quad \forall \begin{cases} \sigma \neq 0 \\ \{\sigma\} \neq 0 \end{cases}$$

forma quadratica associata alla matrice $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ def. pos.
(matrice di cedevolezza)

CNS di def. pos. di $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ tutti i minori principali positivi

- 1×1 $\quad \dfrac{1}{E} > 0 \Rightarrow \boxed{E > 0}$

- 2×2 $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{E^2} - \dfrac{\nu^2}{E^2} = \dfrac{1}{E^2}(1-\nu^2) = \dfrac{1}{E}(1+\nu)(1-\nu) > 0 \Rightarrow$



$-1 < \nu < 1$

materiali ingegneristici $0 \le \nu < 1/2$

- 3×3 $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{E}\dfrac{1}{E^2}(1-\nu^2) + \dfrac{\nu}{E}\dfrac{1}{E^2}\overbrace{(-\nu-\nu^2)}^{\nu(1+\nu)} - \dfrac{\nu}{E}\dfrac{1}{E^2}\overbrace{(\nu^2+\nu)}^{\nu(1+\nu)}$

$$= \frac{1}{E^3}(1+\nu)\left[1-\nu-2\nu^2\right] = \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1}{E^2}\underbrace{(1+\nu)(1-2\nu)}_{1-2\nu+\nu-2\nu^2} = \frac{1}{E}\,\overbrace{\frac{(1+\nu)^2}{E^2}}^{>0}(1-2\nu) > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

- 4×4 (1×1) $\quad \dfrac{1}{G} > 0 \Rightarrow \boxed{G > 0}$

Richiamo ora una scrittura compatta tensoriale per la legge costitutiva $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$

Riprendendo le leggi viste:

$$(*)\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{\nu}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} + \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \end{cases}$$

$$(\triangledown)\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \boxed{\frac{\tau_{ij}}{2G}} \qquad \sigma_{ij}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\sigma = \sigma_{kk}$$

relazione unificante

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E}\sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{jj}+\sigma_{kk}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{ii} + \frac{\nu}{E}\sigma_{ii} = -\frac{\nu}{E}\underbrace{(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})}_{I_1=\mathrm{tr}\,\sigma=\sigma_{kk}}1 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$$

Affinché sussista coerenza tra le $(*)$ e le $(\triangledown)$, espressa da un'unica legge $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$:

Legge di Hooke generalizzata

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\underbrace{\mathbb{I}}_{\text{tensore identità del 2° ordine}} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}}$$

$i=j$: $\varepsilon_{ii} = -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\sigma\ 1 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$

$i\neq j$: $\varepsilon_{ij} = \quad " \quad 0 + \boxed{\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}}$

materiale indeformabile a taglio

$G\to\infty,\ \nu\to -1$

coerente se $\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2G} \Rightarrow \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$

oppure: $E = 2(1+\nu)G$; $\nu = \frac{E}{2G} - 1$

due parametri indip.!

$$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i\neq j \end{cases}$$

$\mathrm{tr}\,\mathbb{I} = 1+1+1 = 3$

Risposta volumetrica:

notazione tensoriale

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\;\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

Legge di Hooke generalizzata (materiale elastico, lineare, isotropo)

deformazione volumetrica (variazione specifica di volume)

$$v = \underbrace{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}}_{I_1^{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\;\overbrace{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{I}}}^{3} + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

$$= \frac{1}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\left(1+\underbrace{\nu-3\nu}_{-2\nu}\right)$$

$$= \underbrace{3\,\frac{1-2\nu}{E}}_{\frac{1}{K}}\;\frac{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}}{3}$$

$$p = \frac{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$ tensione media

$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \leftrightarrow \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}$

$I_1^{\varepsilon} \leftrightarrow I_1$

disaccoppiamento (per materiali isotropi)

$$\boxed{v = \frac{1}{K}\,p\;;\quad p = K\,v}$$

risposta volumetrica

(relazioni di proporzionalità tra p e v, diretta e inversa)

ove $$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0$$

modulo di comprimibilità volumetrica o modulo di volume ("bulk modulus")

$K \to \infty$, $\nu \to \frac{1}{2}$

materiale elasticamente incomprimibile