Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

# Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

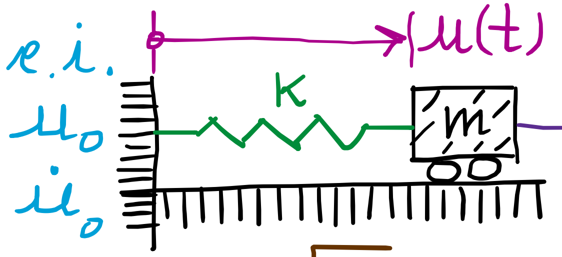
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

## LEZIONE 04

# Risposta a forzante armonica

$F(t) = \begin{matrix} F\sin\omega t \\ F\cos\omega t \end{matrix} \Rightarrow F e^{i\omega t}$ $\quad \cos\omega t + i \sin\omega t$ (non smorzato; $\xi = 0$)



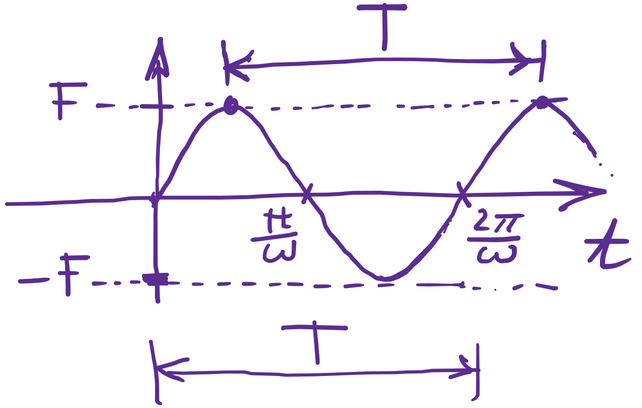

$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

pulsazione naturale del sistema non smorzato

$F(t) = F\underbrace{\sin\omega t}_{f(t)}$

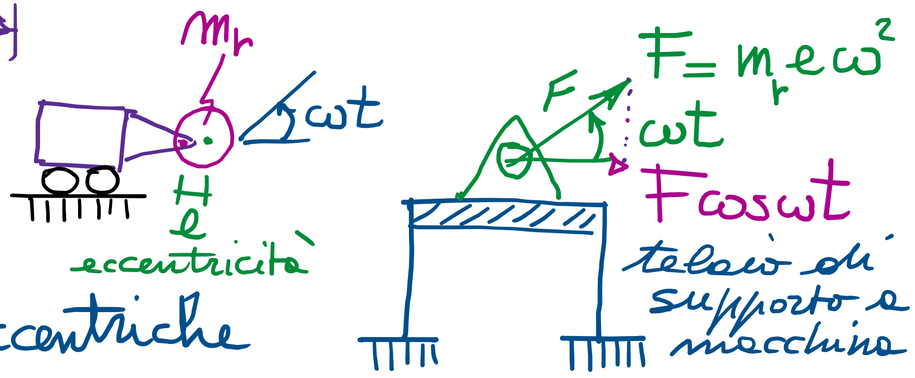
F intensità o ampiezza

$\omega$ pulsazione della forzante




f.ne periodica, di periodo

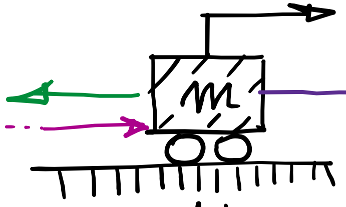
$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ $\qquad \omega = 2\pi f$ $\qquad f = \dfrac{\omega}{2\pi}$




## Interesse:

- casi pratici, ad es. in presenza di masse rotanti eccentriche
- "madre" di tutte le forzanti periodiche $\Rightarrow$ sviluppo in serie di Fourier
- primo passo fondamentale di forzante dinamica $F(t) = \underbrace{F}_{[N]}\ \underbrace{f(t)}_{\text{f.ne adimensionale}}$
- consente di introdurre concetti fondamentali sulla risposta dinamica dei sistemi forzati (amplificazione e sfasamento della risposta)
- passibile di trattazione analitica

- Eq. del moto: $F_i = -m\ddot{u}$




$$\cancel{m}\ddot{u} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2} u = \frac{K}{K}\overbrace{\frac{F}{\cancel{m}}}^{u_{st}}\sin\omega t \qquad (\tfrac{K}{m} = \omega_1^2)$$

$u_{st} = \frac{F}{K}$ spostamento "statico"

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_1^2 u(t) = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t}$$

$\omega_1$; $\omega$; $u_{st}$ → dirett. propor.

- Integrale "particolare" (risposta del sistema a termine noto non nullo):

$u_p(t) = U\sin\omega t$ moto armonico di pulsazione $\omega$ (della forzante) di ampiezza $U$ da determinare

$\dot{u}_p(t) = \omega U\cos\omega t$

$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 \underbrace{U\sin\omega t}_{u_p} = -\omega^2 u_p$

rapporto di frequenze

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{f}{f_1}$ "frequency ratio"

$\beta \neq 1$

$$U = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega^2}u_{st} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}u_{st} = \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}$$

- Sostituendo nell'eq.ne del moto:

$$-\omega^2 U\cancel{\sin\omega t} + \omega_1^2 U\cancel{\sin\omega t} \overset{\forall t}{=} \omega_1^2 u_{st}\cancel{\sin\omega t} \Rightarrow \Big(\cancel{\omega_1^2} - \underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}_{\beta^2}\Big)U = \cancel{\omega_1^2}\, u_{st}$$

$u_p(t) = U \sin\omega t$

$= \pm N u_{st} \sin\omega t$ — $\beta < 1$ / $\beta > 1$

$\cos\xi \, N u_{st}$

$\frac{|U|}{u_{st}} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$

f.ne pari in $\pm\beta$

$\to 0$ per $\beta \to \infty$

$\to \pm\infty$ " $\beta \to 1$

$\beta \neq 1$

curva di risonanza

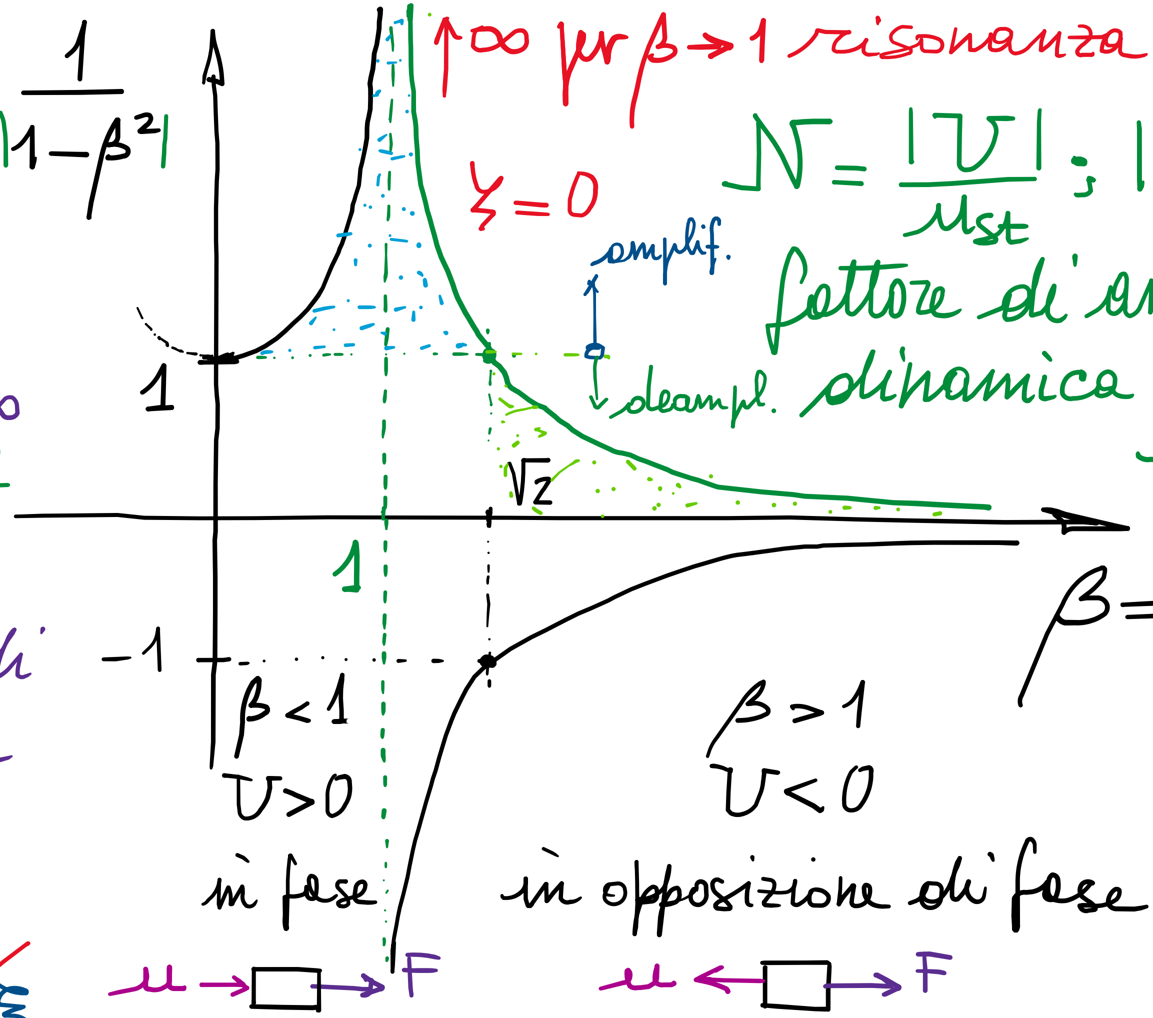
$\uparrow \infty$ per $\beta \to 1$ risonanza (ampiezza illimitata per $\omega \to \omega_1$)

$\zeta = 0$

$N = \frac{|U|}{u_{st}}$ ; $|U| = N u_{st}$

fattore di amplificazione dinamica

$N = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$




$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

$N \geq 1, \; 0 \leq \beta \leq \sqrt{2}$

$N \leq 1, \; \beta \geq \sqrt{2}$

$u_p(t) = N u_{st} \underbrace{\sin(\omega t - \xi)}$

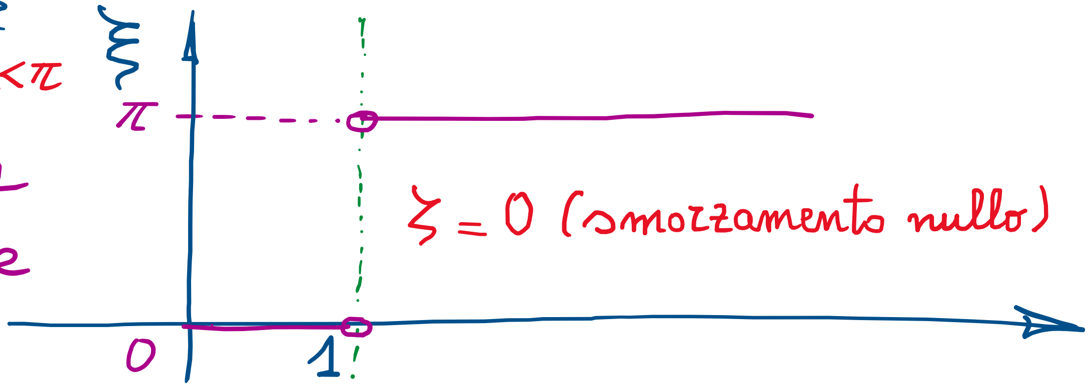
$\boxed{\sin\omega t} \cos\xi - \cos\omega t \cancel{\sin\xi}$

$\cos\xi$: $1$ → $\xi = 0$ ; $-1$ → $\xi = \pi$

$\xi = 0 + k\pi$

$\xi$ angolo di fase o fase

curva di fase




$\zeta = 0$ (smorzamento nullo)

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

– Risposta complessiva del sistema: $\left.\begin{matrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{matrix}\right\}$ c.i.

$$u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$$

integrale generale — $F=0$ int. gen. omogen. ass. — $F\neq 0$ int. part.

$$= A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

$$\dot{u}(t) = \omega_1 A\cos\omega_1 t + - \omega_1 B\sin\omega_1 t + + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\,\omega\cos\omega t$$

N.B.: composizione di due moti armonici di pulsazioni differenti ($\omega_1$ e $\omega$) $\Rightarrow$ non un moto armonico

– Imponendo le c.i.:

$$\begin{cases} u(0) = \boxed{B = u_0} \\ \dot{u}(0) = \omega_1 A + \dfrac{\omega}{1-\beta^2}u_{st} = \dot{u}_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}}$$

– Integrale generale finale:

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1} - \frac{\beta}{1-\beta^2}u_{st}\right)\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{u_{st}}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

comp. di moto armonico di puls. $\omega_1$ (risposta "transiente", per $c\neq 0$)

comp. di moto armonico di puls. $\omega$ (risposta a "regime", "steady-state") ← per $\zeta\neq 0$

$$= \frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{1-\beta^2}u_{st}\left(\sin\omega t - \beta\sin\omega_1 t\right)$$

termine spesso mancante ⇐ risposta armonica alle sole c.i. e $F=0$

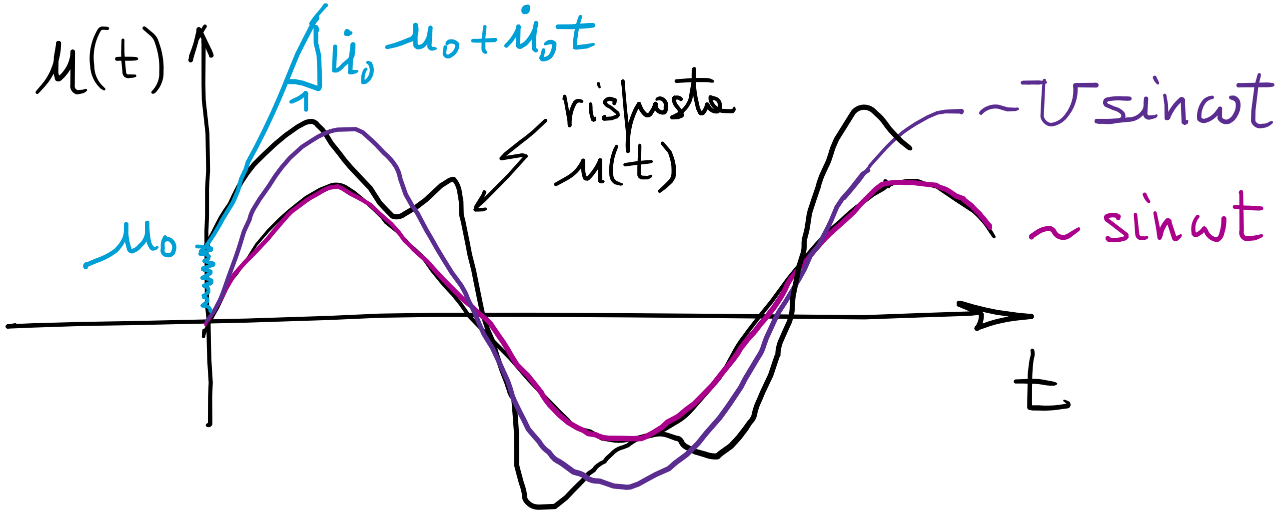
risposta a F armonica per c.i. omogenee ($u_0=0$, $\dot{u}_0=0$)

– Risposta dinamica

$\beta < 1$

$(\omega < \omega_1)$

forz. $\omega$ $\omega_1$ sist.




– Attenzione ai "battimenti" ⇒ preludio alla risonanza

effetto di composizione di moti armonici di pulsazioni simili

per $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} \simeq 1$ $(\omega \simeq \omega_1)$

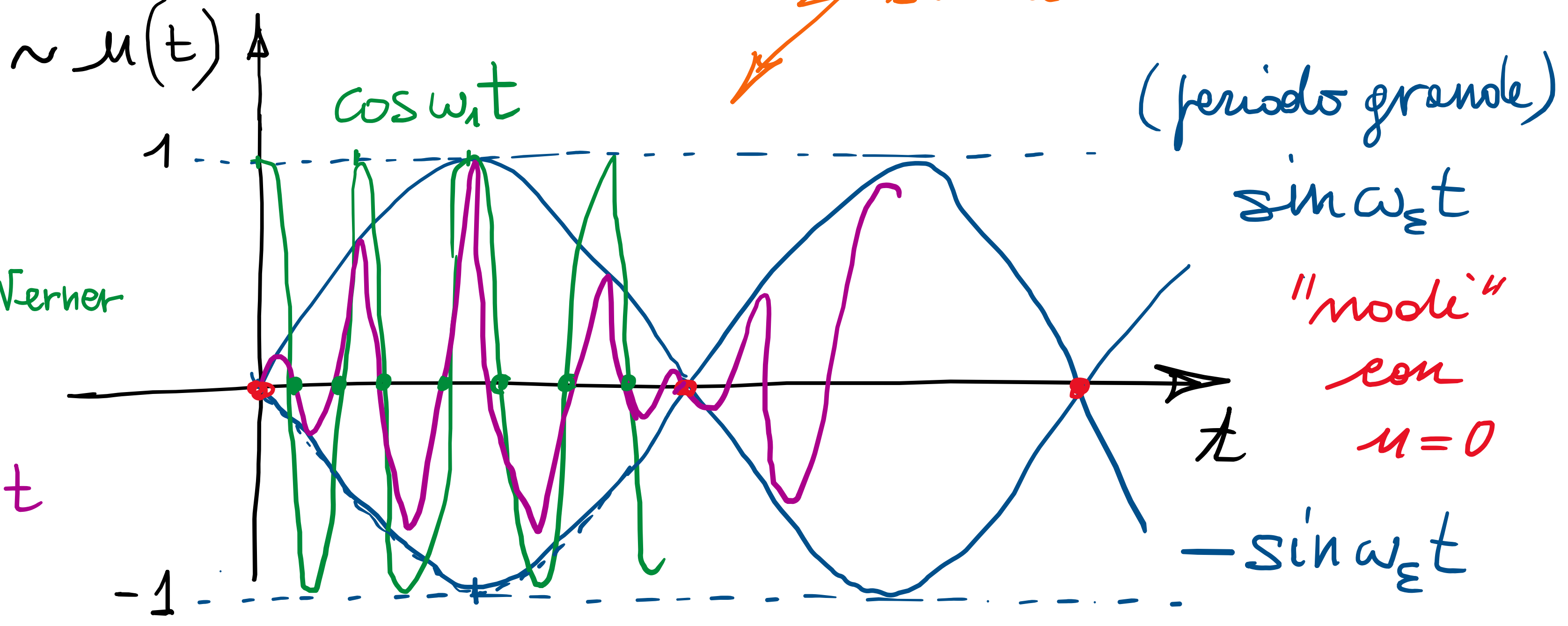
$(\sin \omega t - \beta \sin \omega_1 t)$

$\simeq \sin \omega t - \sin \omega_1 t$

formule di prostaferesi o di Werner

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\simeq 2 \sin \underbrace{\frac{\omega - \omega_1}{2}}_{\text{piccola} \sim \omega_\varepsilon} t \cdot \cos \underbrace{\frac{\omega + \omega_1}{2}}_{\sim \omega_1} t$



- Condizioni di risonanza ($\beta=1$) $\Rightarrow$ $\omega=\omega_1$. Nuovo integrale particolare:

$$u_p(t) = U\,t\cos\omega_1 t \quad \dashrightarrow \quad u_p(t) = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}\, t\cos\omega_1 t$$

$$\dot{u}_p(t) = U\cos\omega_1 t + U\,t\,\omega_1(-\sin\omega_1 t)$$

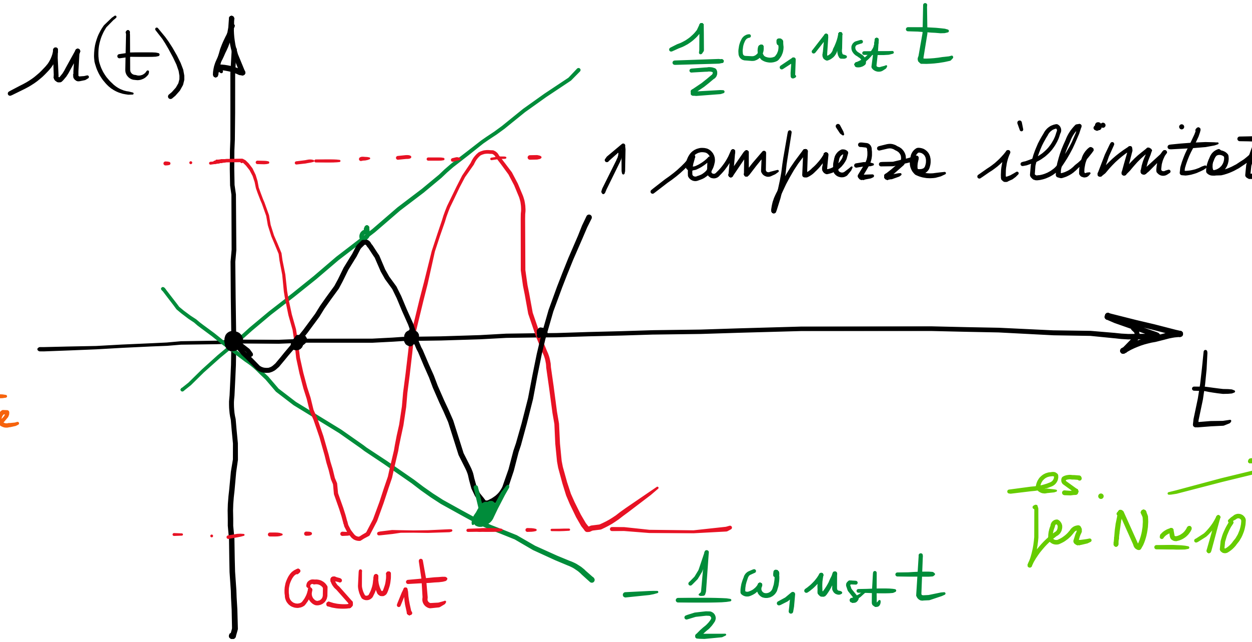
$$\ddot{u}_p(t) = \underbrace{-\omega_1 U\sin\omega_1 t - U\omega_1\sin\omega_1 t}\, - U\,t\,\omega_1^2\cos\omega_1 t$$

ampiezza lineare (divergente) in $t$

$\Rightarrow$ eq. del moto

$$-2\omega_1 U\sin\omega_1 t - \cancel{U t\omega_1^2\cos\omega_1 t} + \cancel{\omega_1^2 U t\cos\omega_1 t} = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega_1 t$$

$$-2\cancel{\omega_1}U = \omega_1^{\cancel{2}} u_{st} \Rightarrow U = -\frac{1}{2}\omega_1 u_{st}$$




ampiezza illimitata per $t\to\infty$

(può portare alla uscita dal campo elastico, e al collasso)

es. per $N \simeq 10$

come se fosse moto armonico di pulsaz. $\omega=\omega_1$ ma con ampiezza linearmente divergente in $t$

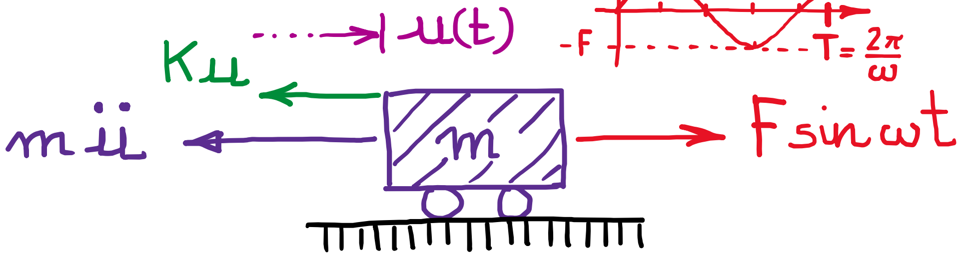
# Concetti fondamentali :

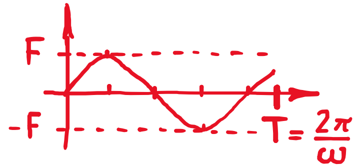
- Risposta non smorzata a forzante armonica ($F(t) = F \sin \omega t$)
  ($c = 0$, $\zeta = 0$)

$m$, $K = \text{cost}$

sistema tempo-invariante

con c.i. $\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{array} \right.$ @ $t = t_0$




$$m\ddot{u}(t) + Ku(t) = F \sin \omega t$$

$$\Downarrow$$

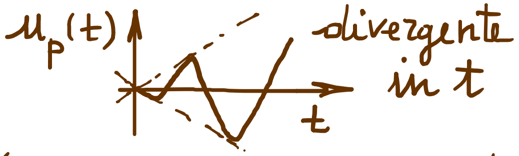
$$\ddot{u}(t) + \underbrace{\omega_1^2}_{\frac{K}{m}} u(t) = \omega_1^2 \underbrace{u_{st}}_{\frac{F}{K}} \sin \omega t \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Integrale particolare ($\beta \neq 1$):

$$u_p(t) = N u_{st} \sin(\omega t - \xi)$$

$\xi$ — fase (sfasamento in ritardo tra risposta e forzante)

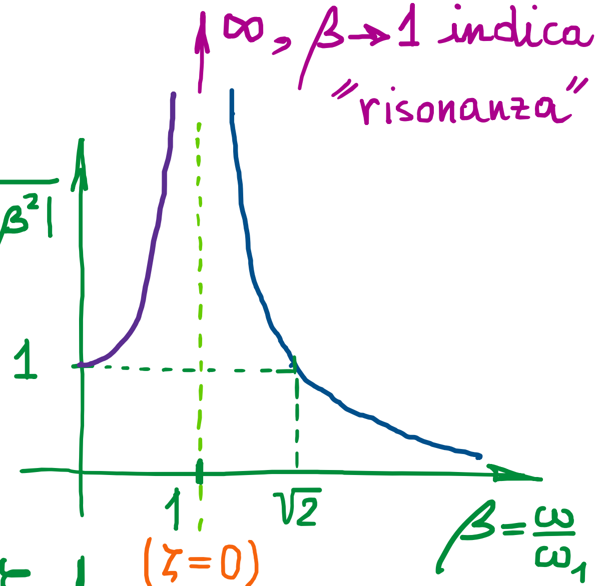
$N$ — fattore di amplificazione dinamica (rispetto a $u_{st} = F/K$)

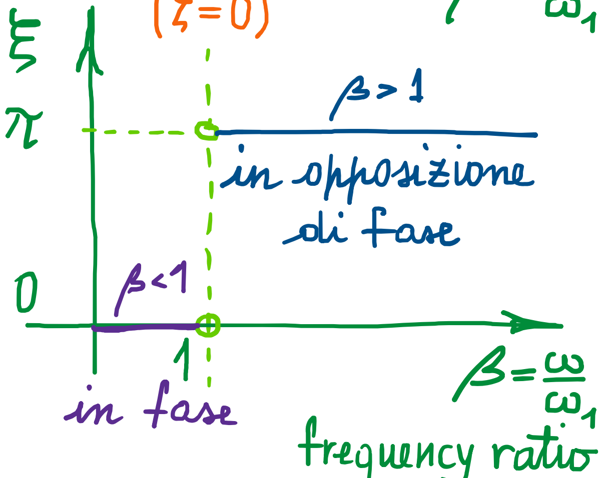



In risonanza [$\beta = 1$]:

$$u_p(t) = -\frac{1}{2} \omega_1 u_{st} t \cos \omega t$$

$N = \frac{1}{|1-\beta^2|}$



# SOMMARIO (Lez. 04)

- Risposta forzata (forzante armonica $F(t) = F \sin \omega t$).
- Amplificazione dinamica $N(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}}$ ($U \simeq N u_{st}$).

pulsaz. forzante

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$ frequency ratio

pulsazione sistema

- Sfasamento della risposta
  - in fase ($\xi = 0$), $\beta < 1$;
  - in opposiz. di fase ($\xi = \pi$), $\beta > 1$.
- Integrale generale: $u(t) = u_{go}(t) + u_p(t)$.
- Risonanza ($\beta = 1$; $\omega = \omega_1$): risposta divergente in $t$ (ampiezza illimitata). $u \to \infty$
- Next step: caso smorzato (risposta "steady-state"), con picco di risonanza di entità limitata, dipendente dal fattore di smorzamento $\zeta$. ⇐ pur elevata, per $\zeta$ piccoli ($\zeta \ll 1$)