Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica(, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

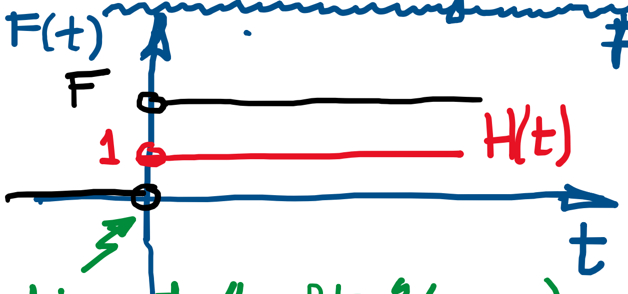
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Risposta a forzante impulsiva (in vista della det.ne di risposta a forzante generica)

- Forzante "a gradino"



discont. "salto" ($\tau = 0$)

gradino unitario

$F(t) = F\,H(t)$

Heaviside function: 0 per $t<0$; 1 per $t>0$

$\xrightarrow[F(t)]{\text{input}}$ $\boxed{\text{Sistema}}$ $\xrightarrow{\text{output}}$ $u(t) = u_g(t) + u_p(t)$

integrale generale della omogenea associata (u_g); integrale particolare (legato a $F(t)$) (u_p)

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \leq \omega_1 \simeq \omega_1$ ($|\zeta| \ll 1$)

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right) + \underbrace{\frac{F}{K}}_{u_{st}} \qquad t>0$$

N.B.: le c.i. u_0, $\dot{u}_0$ vanno imposte sullo integrale generale.

Imponendo le c.i.:

- $u_0 = B + \dfrac{F}{K} \Rightarrow \boxed{B = u_0 - \dfrac{F}{K}}$
- $\dot{u}_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \Rightarrow A = \dfrac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 B}{\omega_d} = \boxed{\dfrac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d} - \zeta\underbrace{\dfrac{\omega_1}{\omega_d}}_{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\dfrac{F}{K} = A}$

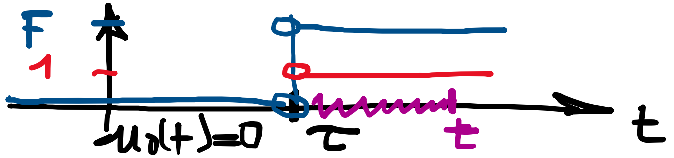
$H(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow A(t)$

$A(t)$ funzione risposta a gradino unitario (risposta a $H(t)$)

Integrale generale:

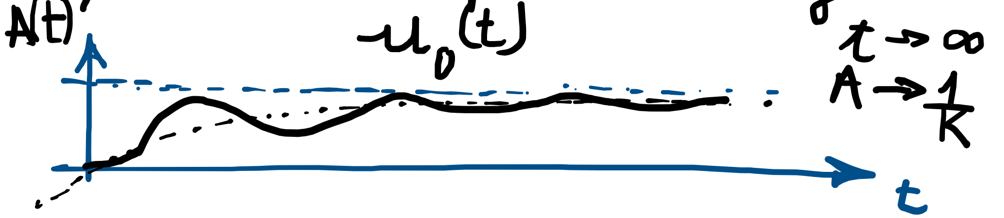
$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right)}_{\text{risposta a sole c.i. non omogenee (nulle)}} + \underbrace{F\,\overbrace{\frac{1}{K}\left(1 - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right)}^{A(t)}}_{\text{risposta a } F(t) \text{ per c.i. omogenee } u_0(t)}$$

- Per "salto" collocato in $\tau \neq 0$:

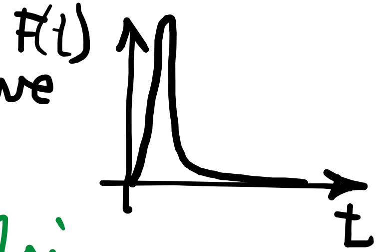


$$u(t) = F\,A(t-\tau) = F\,A(t,\tau)$$

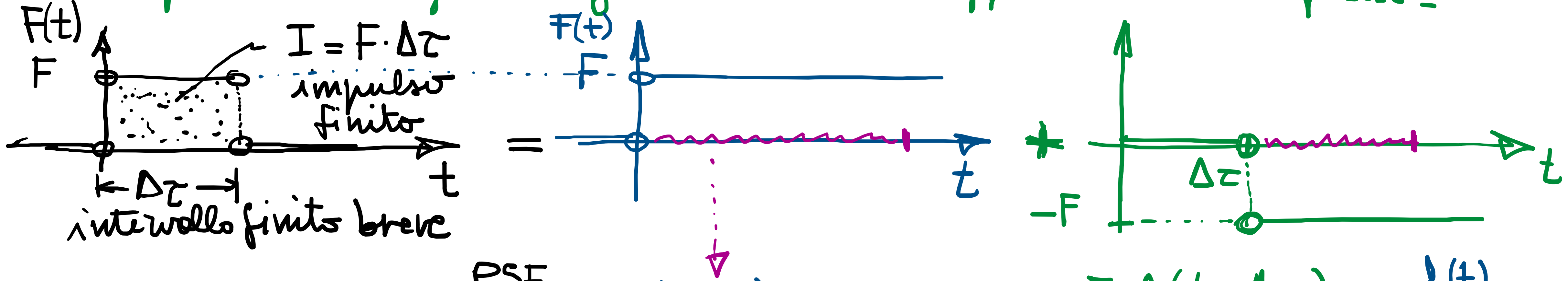
t di risp. (t); t di apparizione salto (τ)



Forzante impulsiva: forzante di entità elevata, agente per un tempo breve



- urti, impatti, esplosioni
- interpretazione di forzante generica come sovrapposizione di impulsi -



$$u_0(t) \overset{PSE}{=} F\,A(t-0) - F\,A(t-\Delta\tau)$$

$$= F\Delta\tau\,\frac{A(t)-A(t-\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \underbrace{F\Delta\tau}_{I}\,\underbrace{\frac{\Delta A(t)}{\Delta\tau}}_{\text{rapporto incrementale}} \xrightarrow[\Delta\tau\to 0]{\lim} I\,\underbrace{\dot{A}(t)}_{h(t)} = I\,h(t)$$

funzione risposta a impulso unitario

$$h(t) = \dot{A}(t) = \frac{1}{K}\left(\zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\frac{\omega_1}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cancel{\cos\omega_d t}\right) + \right.$$

$$\left. - e^{-\zeta\omega_1 t}\left(\zeta\omega_1\cancel{\cos\omega_d t} - \omega_d\sin\omega_d t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{K}\left(\frac{\zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2}{\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t = \frac{1}{K}\frac{\omega_1^2}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t = \boxed{\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t = h(t)}$$

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

$\omega_d^2 = \omega_1^2 - \zeta^2\omega_1^2$

$\zeta^2\omega_1^2 + \omega_d^2 = \omega_1^2$

$\omega_1^2 = \frac{K}{m}$

Significato fisico della risposta impulsiva.

- Legge fondamentale della dinamica $F_t = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \overbrace{F\,dt}^{dI} = m\,dv = d(mv)$ — $\overbrace{}^{q \text{ quantità di moto}}$

sist. tempo invariante ($m = cost$)

(teorema dell'impulso: la variazione $dq = dI$ della quantità di moto eguaglia l'impulso).

Su $\Delta\tau$ finito, integrando $dq = dI$, nel tempo, tra 0 e $\Delta\tau$ — $\Delta\tau \to 0$

$$\Delta q = q(\Delta\tau) - q(0) = m\underbrace{\dot{u}(\Delta\tau)}_{} - \cancel{m\dot{u}(0)} = \int_0^{\Delta\tau} [F - (F_e + F_d)]\,dt = I - \int_0^{\Delta\tau} (F_e + F_d)\,dt \Rightarrow 0$$

$\Delta\tau \to 0$ — limitate

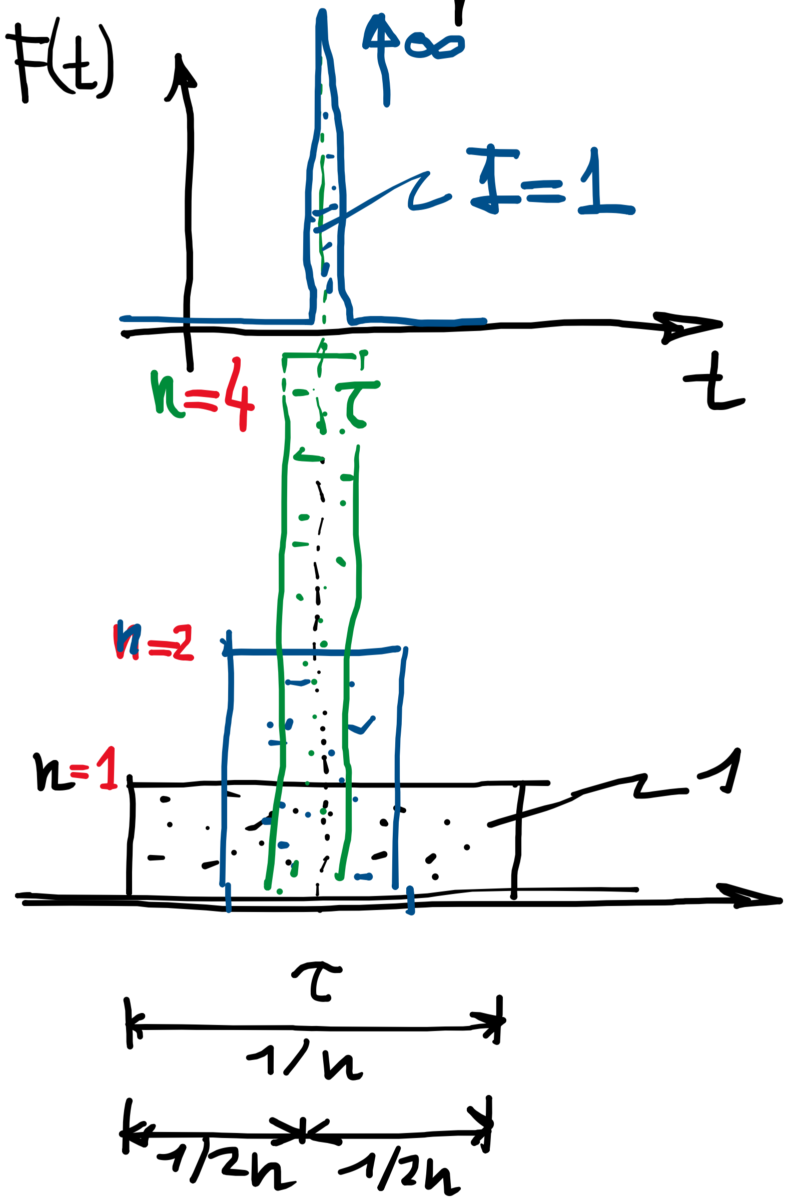
$$m\dot{u}_0 = I \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_{0^+} = \frac{I}{m} \qquad \frac{\cancel{[F]}\cancel{[t]}}{\frac{\cancel{[F]}[t]^2}{[L]}} = \frac{[L]}{[t]}$$

(sperim. l'entità dell'impulso: $I = m\dot{u}_{0^+}$)

Pertanto, trattasi di oscillazione libera, in risposta a velocità iniziale immediatamente successiva all'applicazione dell'impulso:

$$u_0(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_1 t}}{\omega_d}\frac{I}{m}\sin\omega_d t = I\,\underbrace{\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t}_{h(t)} = I\,h(t)$$

Forzante impulsiva: (tale da produrre impulso unitario)



$F(t) \begin{cases} = 0 \quad \forall t \neq \tau \\ \to \infty \quad t = \tau \end{cases} = \delta(t)$ Delta di Dirac

distribuzione

Essa è il limite, per $n \to \infty$, della successione

$$\delta_n(t,\tau) = \begin{cases} 0 \text{ se } |t-\tau| > \frac{1}{2n} \\ n \text{ se } |t-\tau| < \frac{1}{2n} \end{cases} \quad n \to \infty \quad \delta(t,\tau)$$

Proprietà:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,\tau)\, d\tau = 1$

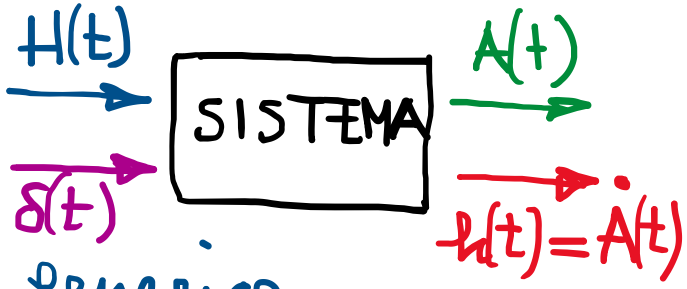
- $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\, \delta(t,\tau)\, d\tau = F(t) \Rightarrow$ Interpretazione della forzante come una sequenza di impulsi $F(\tau)\, d\tau$

$\delta(t,\tau) \to$ Sist. $\to h(t)$

$\delta(t,\tau)$ delta di Dirac

$h(t)$ f.ne risposta ad impulso 1

SOMMARIO (Lez. 07)



- Verso la determinazione della risposta a forzante generica
- Funzione risposta a gradino unitario : $A(t)$
- " " " impulso " : $h(t) = \dot{A}(t)$
- Da th. dell'impulso, come per oscillazioni libere smorzate da velocità iniziale al tempo 0^+ pari $\frac{I=1}{m}$
- Rappresentazione ideale (matematica) di forzante impulsiva unitaria : Delta di Dirac $\delta(t,\tau)$
- Next step: forzante generica per sovrapposizione di impulsi e conseguente risposta per sovr. di risposte impulsive (integrale di convoluzione o di Duhamel)