

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

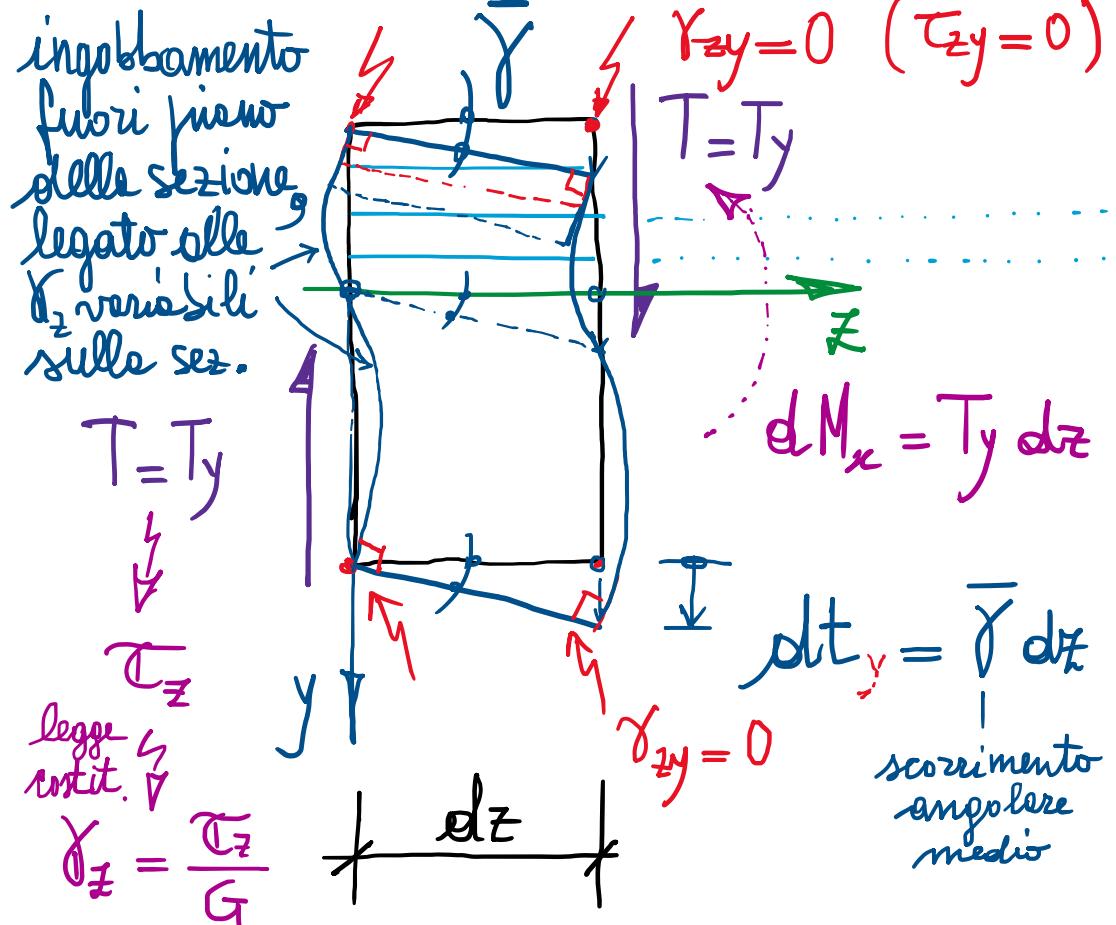
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 23

- Deformazione del concio di trave dovuta al taglio



G: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

materiale:  
 - elastico  
 - lineare  
 - isotropo  $\rightarrow$  2 parametri es. E, ν

variazione di angolo retto tra fibre iniziali. I

$$\gamma_{zy}(y) = \frac{\pi}{2} - \beta_{zy} \quad \beta_{zy} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$$

- Se  $\gamma_{zy}$  fosse costante in y, la deformazione del concio sarebbe "autosomigliante" a quella, costante, di ogni "striscioline" ideale, e si verrebbe a produrre solo uno scorrimento relativo dt delle facce di destra rispetto a quelle di sinistra.

- Poiché  $\gamma_{zy} = \gamma_{zy}(y)$  risulta variabile lungo la sezione, da  $\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \rightarrow$  con  $\tau_{zy}(y)$ , secondo ad es., le formule di Jourawsky, si valuta  $\bar{\gamma}_{zy}$



• Valutazione dello scorrimento medio via PLV: [effetti taglienti]

$$\frac{d\bar{v}_e}{dz} = T_y \frac{dt}{dz} = \int_A \underbrace{\tau_z}_{\tau_{zx} + \tau_{zy}} \cdot \gamma_z dA \cancel{=} \frac{d\bar{v}_i}{dz} \quad \tau_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}; \quad \gamma_z = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \frac{\tau_{zy}}{G} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy} \Leftrightarrow \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \Phi : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{G} \tau_z$$

$$\bar{\gamma} = \frac{T_y}{GA^*} = \frac{dt}{dz}$$

Solu. di Jourawsky

$$\frac{1}{G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \frac{\tau_z^2}{G}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \tau_{zy}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} \right)^2 \right] dA$$

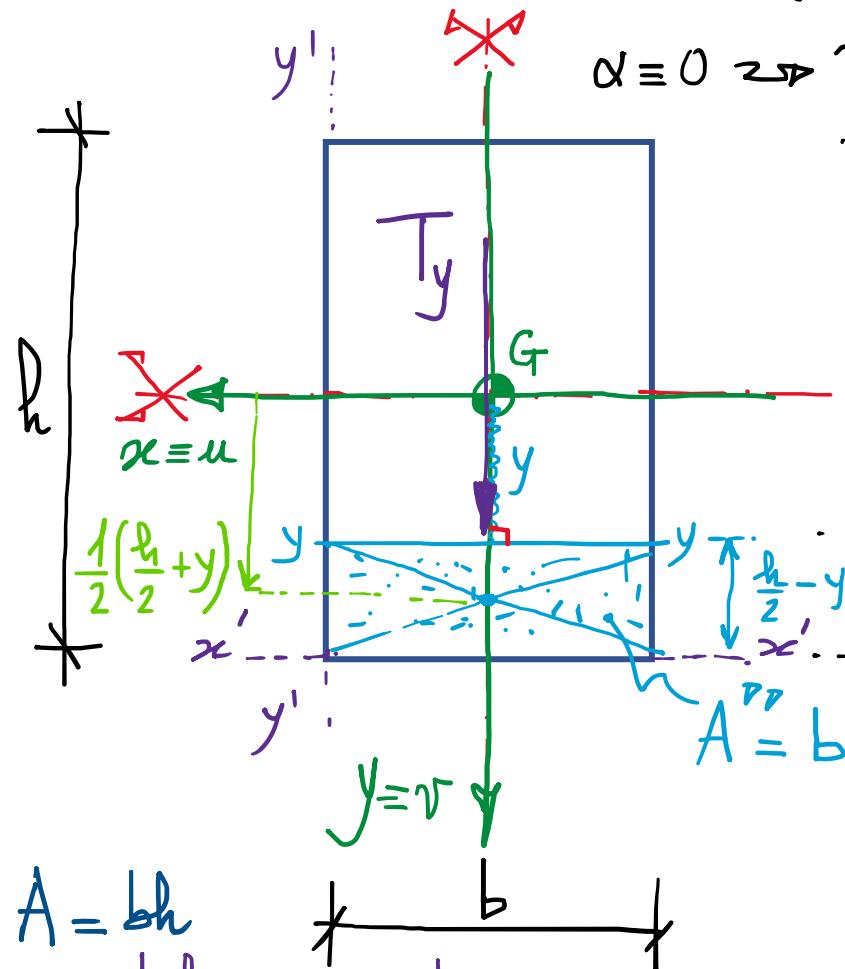
$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \frac{T_y}{A} \int_x A \frac{S_x''(y)}{b(y)^2} \left( 1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b(y)^2} x^2 \right) dA$$

$$\bar{\gamma} = \frac{dt}{dz} = \mu \frac{T_y}{GA} \quad \mu: \text{fattore di taglio delle sez. trasv.} \geq 1$$

$$\text{rigidezza tagliente} \rightarrow A^* = \frac{A}{\mu} \quad \text{area ridotta} \Rightarrow dt = \frac{T_y}{GA^*} dz \quad \Delta t = \frac{T_y l}{GA^*} \bar{\gamma}$$

$$\begin{cases} \tau_{zy}(y) = \frac{T_y S_x''(y)}{J_x b(y)} & \text{formula di Jourawsky} \\ \tau_{zx}(x; y) = -\frac{2 \tan \alpha(y)}{b(y)} \cdot x \end{cases}$$

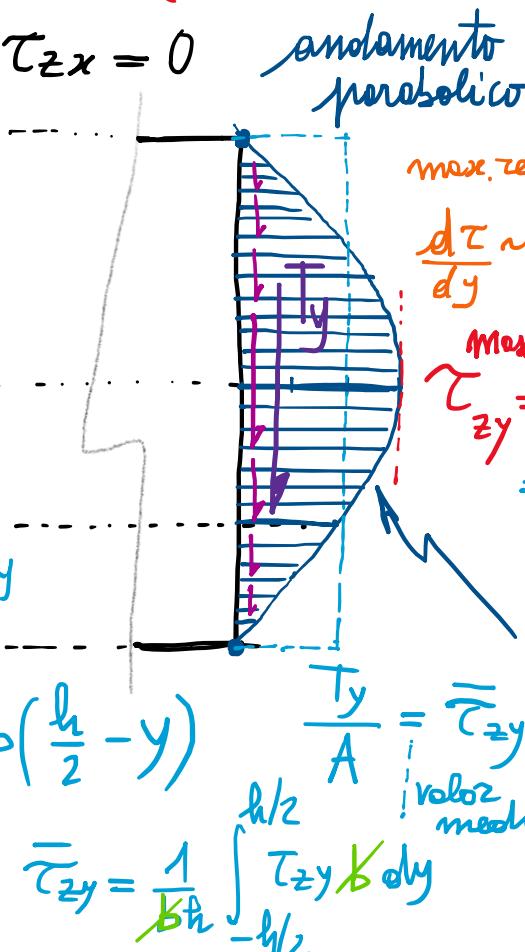
- Caso delle sezioni rettangolari: (sez. strettamente simmetrica)



$$J_x' = \int_0^h y'^2 dA = \int_0^h \frac{y'^3}{3} \Big|_0^h dx' \quad J_x = \frac{1}{12} bh^3$$

$$= \frac{1}{3} bh^3$$

$$J_x = J_x' - Ad_e^2 = \frac{1}{3} bh^3 - bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) bh^3 = \frac{1}{12} bh^3$$



$$\bar{x}_e = \frac{1}{bh} \int_{-h/2}^{h/2} T_{xy} y dy$$

$$M = \frac{6}{5} = 1.2$$

fattore di taglio

$$T_{zy}(y) = \frac{T_y S_x''(y)}{J_x b} = \frac{T_y}{J_x b} S_x''(y)$$

$$S_x''(y) = A \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\text{parabolico}$$

$$(0 \text{ per } y = \pm \frac{h}{2}, \text{ f.n.e peri in } y, \text{ max. per } y = 0: \frac{bh^2}{8})$$

$$T_{zy}(y) = \frac{T_y}{\frac{1}{12} bh^3} \frac{\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b}$$

$$= \frac{6 Ty}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \underbrace{\left(\frac{y}{h/2}\right)^2}_{(y/h/2)^2}$$

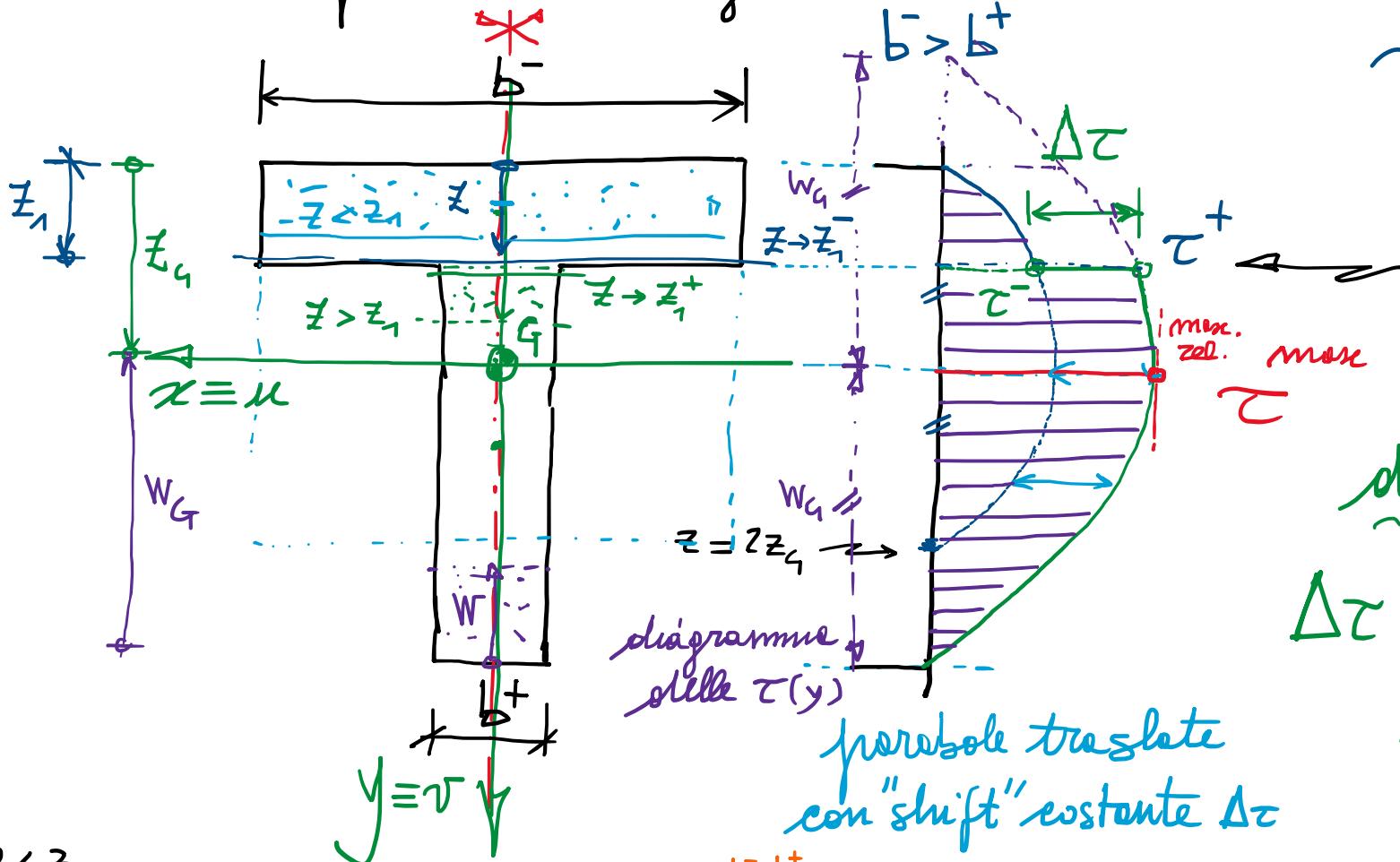
$$= \frac{6 Ty}{bh^3} \frac{h^2}{4} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{Ty}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

$$A \frac{dy}{dy} = -4 \cdot \frac{2y}{h^2} \text{ lin.}$$

$$S_x'' = bh \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

- Sezioni composte da rettangoli elementari:



$$\tau^- = \frac{TS_1}{Jb^-} \quad ; \quad \tau^+ = \frac{TS_1}{Jb^+}$$

discontinuità delle larghezze  
delle corde  $\Delta b = b^- - b^+$

discontinuità "salto" delle  $\tau$

$$\Delta\tau = \tau^+ - \tau^- = \frac{TS_1}{J} \left( \frac{1}{b^+} - \frac{1}{b^-} \right)$$

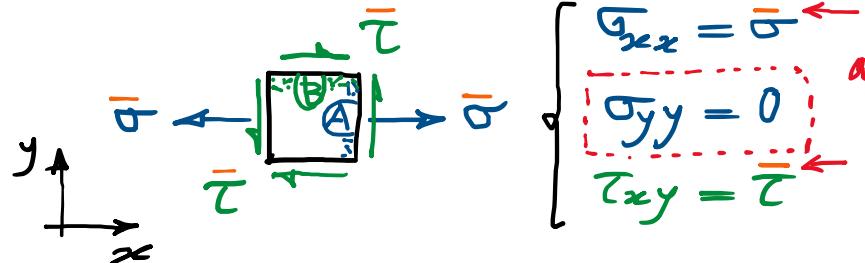
$$= \frac{TS_1}{J} \frac{b^- - b^+}{b^+ b^-} = \frac{TS_1}{J} \frac{\Delta b}{b^+ b^-}$$

$$= \tau^- \frac{\Delta b}{b^+} = \tau^+ \frac{\Delta b}{b^-}$$

$$\tau^- b^- = \tau^+ b^+ ; \quad \frac{\tau^+}{\tau^-} = \frac{b^-}{b^+}$$

$$\tau^+ = \frac{b^-}{b^+} \tau^-$$

- CM per stato di sforzo piano alle de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \bar{\sigma} \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = \bar{\tau} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{valori} \\ \text{assegnati} \end{array}$$

particolare stato di sforzo piano con una componente di sforzo normale nulle

$$\sigma_c = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$= \bar{\tau}^{max}$$

tensioni principali

$$\sigma_{H,II} = \sigma_c \pm R$$

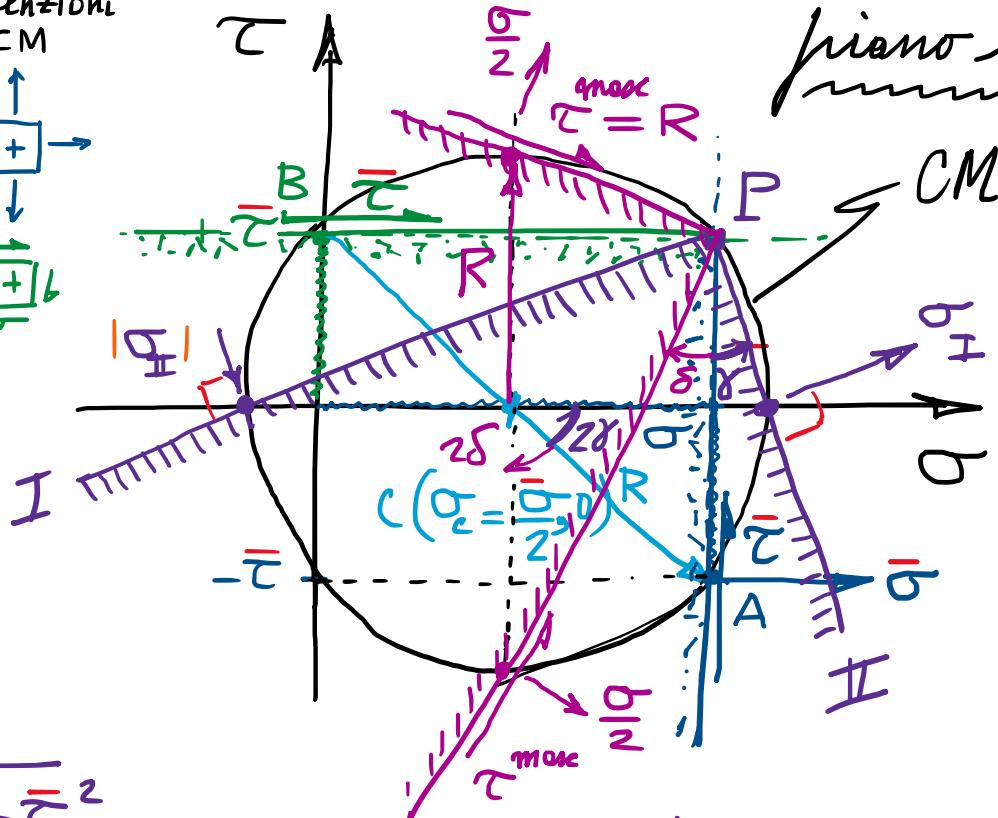
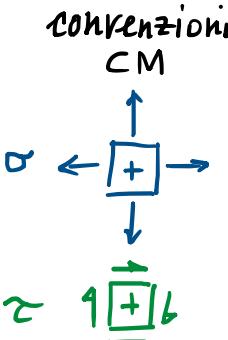
$$= \frac{\bar{\sigma}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 + \bar{\tau}^2}$$

$$\sigma_H \cdot \sigma_{II} = (\sigma_c + R)(\sigma_c - R)$$

$$= \sigma_c^2 - R^2$$

$$= \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{\sigma}}{2}\right)^2 - \bar{\tau}^2 \leq 0$$

$\bar{\tau}^{max}$  nel piano  $\rightarrow$  tensioni principali di segno opposto



$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar{\tau}}{\sigma_H}$$

inclinaz. dirz. princ.  $\gamma = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\bar{\tau}}{\sigma_H} \right)$

inclinaz.  $\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$  ( $2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2}$ )  
dirz. secondo cui agisce le  $\bar{\tau}^{max}$   $\delta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ )

- Formule di verifica per stati di sforzo alle DSV  $\tau$  (parametrizzazione su prova di trazione)

- Criterio di Tresca :  $\tau^{\max} \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 0.5 \sigma_0$   
 (è il più conservativo)  $\tau^{\max} \leq \sigma_0$



$$G_{eq}^T = 2R = |\sigma_H - \sigma_{\bar{H}}| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_0$$

$$D_{eq}^+ = \bar{\sigma} \sqrt{1 + 4 \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \right)^2} \leq \sigma_0$$

$$\text{infatti: } \sigma_I - \sigma_{II} = \sqrt{c} + R - (\sqrt{c} - R) = 2R = 2\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\bar{\tau}^2}$$

- Criterio di von Mises:

$$\sigma_{eq}^M = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} = \sqrt{\sigma^2 + [3]\bar{\sigma}^2} \leq \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0^M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0 \approx .577 \sigma_0$$

$$\text{infatti: } \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = (\sigma_c + R)^2 + (\sigma_c - R)^2 - (\sigma_c + R)(\sigma_c - R) \\ = \sigma_c^2 + R^2 + 2\cancel{\sigma_c R} + \cancel{\sigma_c^2} + R^2 - 2\cancel{\sigma_c R} - \cancel{\sigma_c^2} + \cancel{R^2} \\ = \frac{\bar{\sigma}^2}{4} + 3(\bar{\sigma}^2 + \bar{z}^2) = \bar{\sigma}^2 + 3\bar{z}^2$$

- Critério de Saint Venant:

$$G_{eq} = \max \left\{ \left| \sigma_I - \nu \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} \right|, \left| \sigma_{II} - \nu \sigma_I \right| \right\} \leq \sigma_0 \quad \begin{array}{l} \text{coeff. of control} \\ \text{transverse r} \end{array}$$

- Ordine di conservatività:  $\sigma_{eq}^+ \geq \sigma_{eq}^{vM} \geq \sigma_{eq}^{dSV}$  (dSV è il meno conservativo) di Poisson

