

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

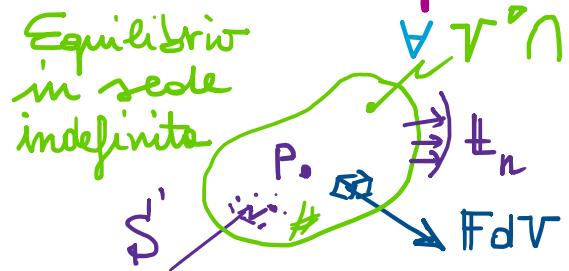
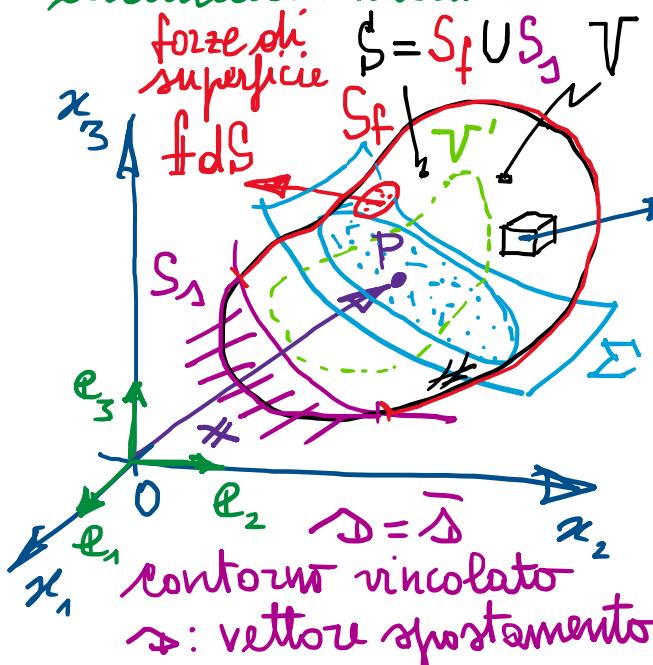
prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 12

## II Meccanica dei Solidi (o dei mezzi continui) $\Rightarrow \forall P \in V$ punto materiale

Statica dei continui: analisi dello stato sforzo o tensione



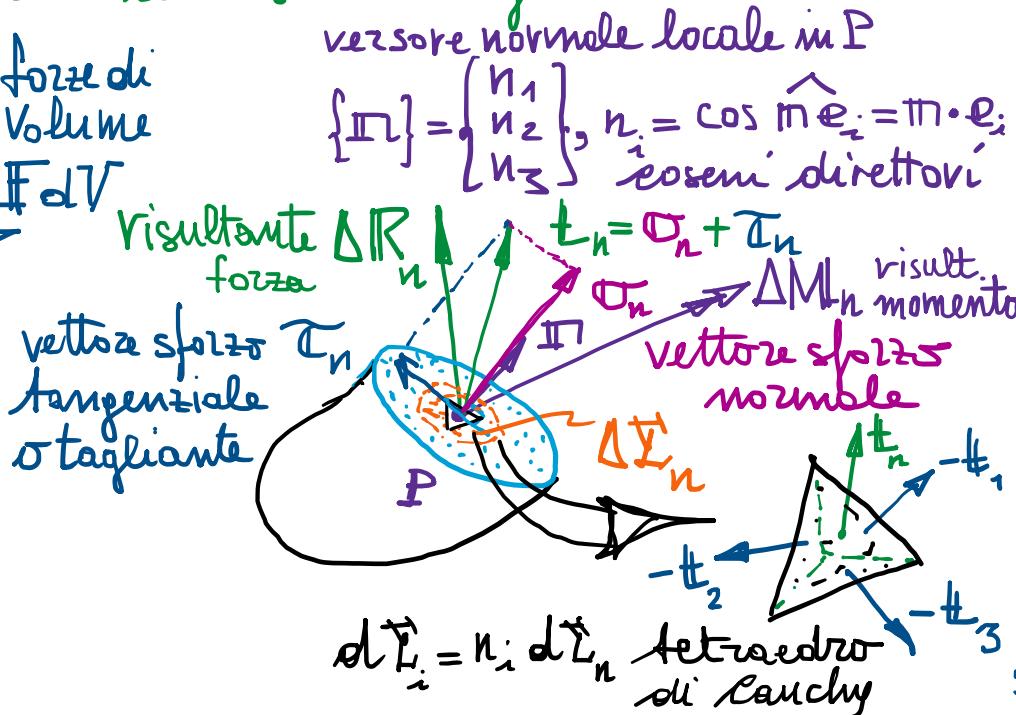
Teorema delle divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} g dV = \int_S m \cdot g dS$$

gradiente

$g$ : campo tensoriale (es.  $g_{ij}$ )

$\operatorname{div} = \nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x} \cdot$



$$\int_V F dV + \int_S t_n dS = 0$$

Th. div.

$\Sigma \cdot \sigma$

$$\int_V F dV + \int_V \operatorname{div} \sigma dV = 0$$

$\int_V (F + \operatorname{div} \sigma) dV = 0, \forall V$

$\operatorname{div} \sigma + F = 0$  in  $V$  ( $\operatorname{div} \sigma = -F$ )

$$t_{-n}(*) = -t_n(*)$$

- $\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta \Sigma_n} = t_n(*)$  vettore sforzo di Cauchy
- $\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0$  (continuo non polare di Cauchy)

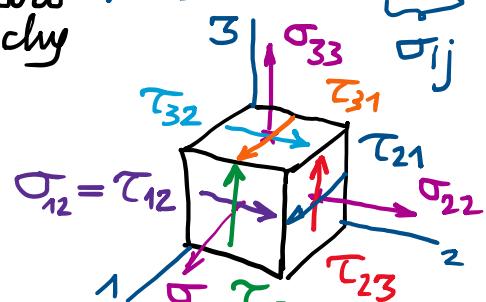
Relazione di Cauchy ( $\approx 1822$ )

e.g. di equil. alle trazioni

$$t_n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 = \sum_i t_i n_i$$

$$t_{ij} = t_{ij} n_i \Leftrightarrow t_n = \sigma^T \cdot n = \sigma \cdot \sigma$$

Ausore sforzo di Cauchy

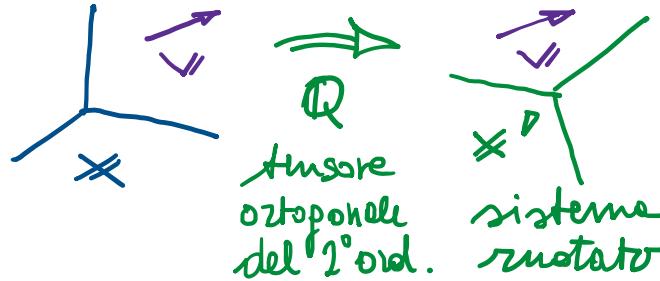


significato fisico delle comp. di sforzo  $\sigma_{ij}$

equil. alle rotazioni: Ausore doppio simmetrico

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

## • Trasformazione delle componenti al vario del sistema di riferimento



$$\left\{ \vec{v} \right\}' = [Q] \cdot \left\{ \vec{v} \right\} \Leftrightarrow v_i' = Q_{ij} v_j \quad (\left\{ \vec{v} \right\} = \overbrace{[Q]}^T^{-1} \left\{ \vec{v} \right\}')$$

$Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = \mathbb{I}$

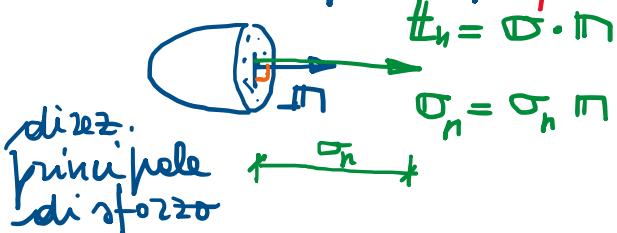
L' tensor identità  $\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$   
Kronecker

$Q_{ji} Q_{jk} = Q_{ij} Q_{kj} = \delta_{ik}$        $(\text{tr } \mathbb{I} = 3)$

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{\tau}_n \right\}' &= [Q] \cdot \left\{ \vec{\tau}_n \right\} \\ &= [Q] \cdot [\Phi^T] \cdot \left\{ \vec{\pi} \right\} \\ &= \underbrace{[Q] \cdot [\Phi^T] \cdot [Q]^T}_{[\Phi^T]'} \cdot \left\{ \vec{\pi} \right\}' = [\Phi^T]' \cdot \left\{ \vec{\pi} \right\}' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \vec{\sigma} \right\}' = \underbrace{[Q] \cdot [\Phi] \cdot [Q^T]}_{\uparrow \uparrow} \Leftrightarrow \sigma_{ij}' = Q_{ik} \sigma_{ke} Q_{je}$$

## • Tensioni principali



$$(\sigma_n = 0)$$

autovetori  
autovettori

$$(\pi \neq 0)$$

$$\sigma \cdot \pi = \sigma_n \pi$$

pb. agli autovetori  
associati a  $\pi$

$$\Leftrightarrow (\Phi - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot \pi = 0 \quad \text{Solv. non banali sse:}$$

$$\det(\Phi - \sigma_n \mathbb{I}) = +\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \text{ radici} \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \downarrow \\ \text{tens. min.} \end{array}$$

N  
A  
R  
I  
A  
N  
T

$$\begin{aligned} \text{primo } I_1 &= \text{tr } \Phi = \sigma_{ii} \\ \text{secondo } I_2 &= \frac{1}{2} (\text{tr } \sigma^2 - \text{tr}^2 \sigma) \quad \sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 \mathbb{I} = 0 \\ \text{terzo } I_3 &= \det \sigma = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma^3 - \frac{1}{2} \text{tr } \sigma \left( \text{tr } \sigma^2 - \frac{1}{3} \text{tr}^2 \sigma \right) \\ &\text{soluz. di Cayley-Hamilton} \end{aligned}$$

L'operatore traccia è invertibile:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\Phi]' &= Q_{ik} \sigma_{ke} Q_{ie} = Q_{ki}^T Q_{ie} \sigma_{ke} = \delta_{ke} \sigma_{ki} = \sigma_{kk} \\ &= \text{tr} [\Phi] \end{aligned}$$

## Componenti volumetrica e deviatorica:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_v + \sigma_d \\ &= p \mathbb{I} + s \Rightarrow s = \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} \mathbb{I} \\ \text{tensione} &\quad \underbrace{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}_{3} \\ \text{media} &\quad \text{deviatore di spazio} \\ &\quad (\text{tr} s = \text{tr} \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} \mathbb{I} = 0)\end{aligned}$$

Problemi agli autovettori:

$$\begin{aligned}\sigma_v \cdot n &= \sigma_v n \quad \text{autoval. } p \\ p \mathbb{I} \cdot n &= p n \quad \text{autovett. } n \\ &\quad \text{arbitrari}\end{aligned}$$

Invarianti del deviatore:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 \equiv \text{tr} s \equiv 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} \text{tr} s^2 \\ J_3 = \frac{1}{3} \text{tr} s^3 \end{array} \right.$$

$$\text{ove} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2 \\ J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{2}{9} I_1^2 + I_2 \right) \end{array} \right.$$

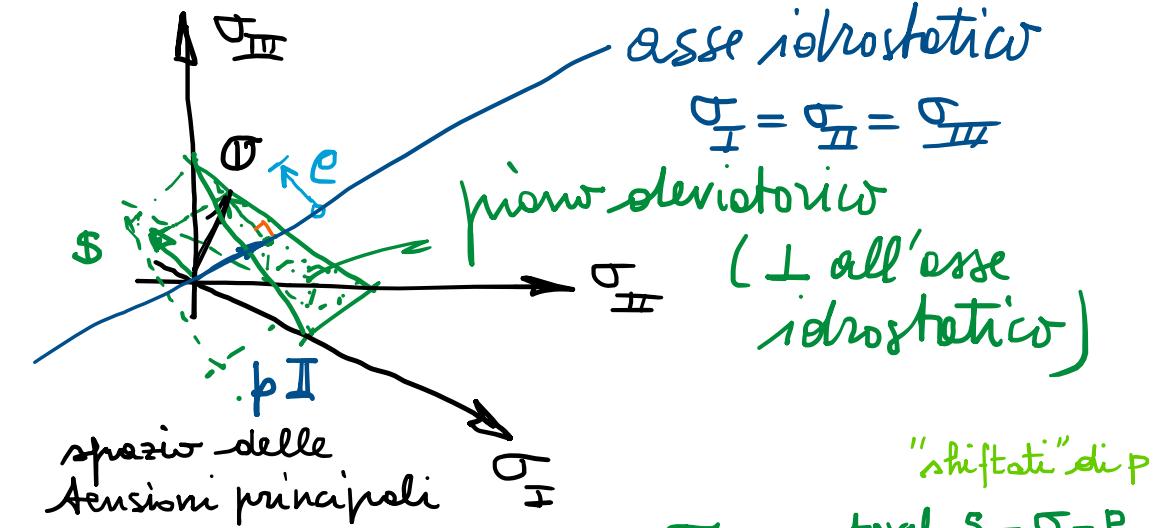
relazioni tra invarianti  $J_i$  e  $I_i$

$$\text{Si cerca soluz. nelle forme: } S_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \alpha_i = \frac{2}{3} \sqrt{3 J_2} \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2 J_2} \cos \alpha$$

$$\text{Sostituendo: } \frac{4 \cdot 2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2} \cos^3 \alpha - J_2 \frac{2 \cdot 3}{3\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \alpha = J_3$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2} \underbrace{\left( 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \right)}_{\cos 3\alpha} = J_3 \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

$$\sigma_i = p + S_i \leftarrow S_i \leftarrow \alpha_i \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_1 = \frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \leq \frac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi \end{array} \right.$$



## Comportamento e resistenza dei materiali:

- **Elastico**: disaccoppiamento di risposte elastiche isotrope volumetrica e deviatorica:

$$p = K v \xrightarrow{\substack{\text{deformazione} \\ \text{volumetrica}}} ; \quad v = 2 G \epsilon \xrightarrow{\substack{\text{deviatore} \\ \text{di deformaz.}}}$$

$$K = \frac{E}{3(1+2\nu)}$$

modulo di volume

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

modulo di taglio

$E$ : modulo di elasticità longitudinale o di Young

$\nu$ : coeff. di contrazione trasversale o di Poisson

- **Plastico**: risposta oltre il campo elastico per diversi materiali (metallici, lapidei)

Teorie delle Plasticità

funzione di snervamento:  $f(\sigma) = f\left(\xi = \frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{3}}, e = \sqrt{2}\bar{J}_2, \vartheta = \alpha\right)$

$\xi = \sqrt{\frac{I_1}{3}}$  coordinate di Haigh - Westergaard

