Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

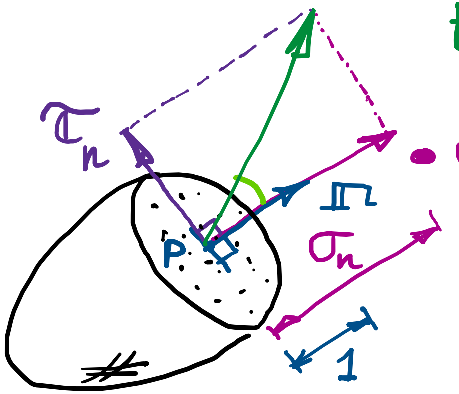
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Tensioni principali e direzioni principali di sforzo



$\underline{t}_n = \underbrace{\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(T)}\cdot\underline{n} =$ vettore sforzo di Cauchy $= \underline{\sigma}_n + \underline{\tau}_n$

• $\underline{\sigma}_n = \sigma_n\,\underline{n}$ ove $\sigma_n = \underline{t}_n\cdot\underline{n} = t_n \cdot 1 \cdot \cos\widehat{t_n n}$ vettore sforzo normale

$= \underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = n_i\,\sigma_{ij}\,n_j$ componente di sforzo normale (scalare)

• $\underline{\tau}_n = \underline{t}_n - \underline{\sigma}_n = \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\underline{n} - \sigma_n\,\underbrace{\underline{\underline{I}}\cdot\underline{n}}_{\underline{n}}$ vettore sforzo tangenziale o tagliante

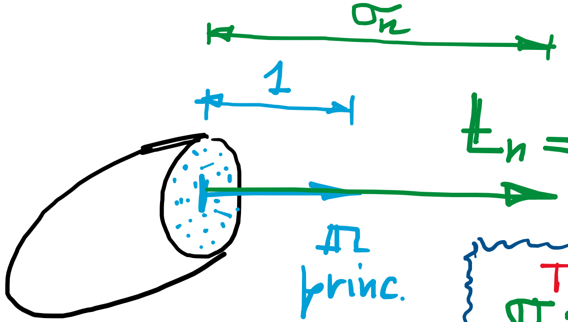
$= (\underline{\underline{\sigma}}^T - \sigma_n\underline{\underline{I}})\cdot\underline{n}$

$\underline{\underline{I}}$: tensore identità del 2° ordine

$[\underline{\underline{I}}]_{3\times3} = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$, $I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases}1 & \text{se } i=j\\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$

Simbolo di Kronecker

Direzione principale di sforzo: (solo sforzo normale, no sforzo tagliante)



$\underline{t}_n = \underline{\sigma}_n = \sigma_n\,\underline{n}$ $(\underline{\tau}_n = \underline{0})$

$(\underline{\underline{\sigma}}^T - \sigma_n\underline{\underline{I}})\cdot\underline{n} = \underline{0}$

$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\underline{n} = \sigma_n\,\underline{n}}$ $= \sigma_n\,\underline{\underline{I}}\cdot\underline{n}$

Problema agli autovalori associato al tensore sforzo $\underline{\underline{\sigma}}$

$\mathbb{A}\cdot\underline{x} = \lambda\,\underline{x}$

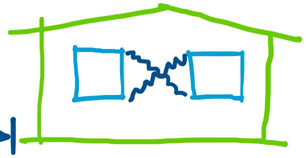
matrice

autovettore => direzioni principali

autovalore => tensioni principali

Valenze pratiche: implicazioni della resistenza dei materiali sul comportamento strutturale (es. materiali lapidei, non resistenti a trazione)

Azione sismica $\ddot{u}_g$



fratture a 45°

Il pb. agli autovalori associato al tensore sforzo di Cauchy ammette soluzioni non banali ($\underline{n} \neq \underline{0}$) sse:

$$\underline{\tau}_n = (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow -\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = - \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{vmatrix} =$$

Coefficienti del polinomio caratteristico I_i :

Invarianti di sforzo (al variare del sistema di riferimento): [poiché σ_n devono esserlo] ∟radici dell'eq.ne

$$= \underbrace{\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3}_{\text{polinomio caratteristico}} = 0$$

eq.ne caratteristica (di 3° grado)

$\Rightarrow$ 3 radici:

autovalori $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ tensioni principali

$\Updownarrow$

autovettori $\underline{n}_I, \underline{n}_{II}, \underline{n}_{III}$ direzioni principali di sforzo

- primo (lineare)

$$I_1 = \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}} \sim \sigma^1$$

$$= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} = \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\sigma}} = \delta_{ij}\sigma_{ij}$$

l'operatore traccia è invariante

- secondo (quadratico)

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) - (\operatorname{tr}^2 \underline{\underline{\sigma}})\right) \sim \sigma^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2\right)$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \right) = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})$$

- terzo (cubico)

$$I_3 = \det \underline{\underline{\sigma}} \sim \sigma^3 \quad \Leftarrow \text{poiché } -\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \underline{\underline{I}}) = -I_3 \text{ per } \sigma_n = 0$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}^3 - \frac{\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}}{2}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tr}^2\underline{\underline{\sigma}}\right)$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - (\sigma_{12}^2\sigma_{33} + \sigma_{23}^2\sigma_{11} + \sigma_{13}^2\sigma_{22})$$

- Poichè σ è reale ($\sigma \in \mathbb{R}$) e simmetrico ($\sigma^T = \sigma$), gli autovalori sono reali: $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \in \mathbb{R}$

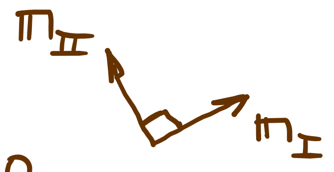
- A due autovalori distinti corrispondono due autovettori mutuamente ortogonali:

$$\sigma_I \neq \sigma_{II} \Rightarrow \begin{array}{l} n_{II}\cdot(\sigma\cdot n_I = \sigma_I\, n_I) \\ n_I\cdot(\sigma\cdot n_{II} = \sigma_{II}\, n_{II}) \end{array} \; -$$

$$n_{II}\cdot\sigma\cdot n_I - n_I\cdot\sigma\cdot n_{II} = \sigma_I\, n_{II}\cdot n_I - \sigma_{II}\, n_I\cdot n_{II}$$

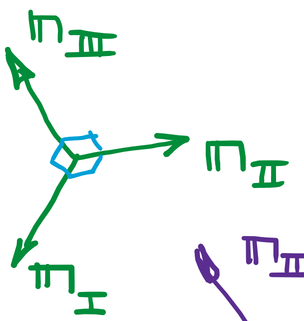
$\sigma^T = \sigma$

$$0 = n_I\cdot\sigma^T\cdot n_{II} - n_I\cdot\sigma\cdot n_{II} = \underbrace{(\sigma_I - \sigma_{II})}_{\neq 0}\, \underbrace{n_I\cdot n_{II}}_{=0} \Rightarrow n_I\cdot n_{II} = 0$$



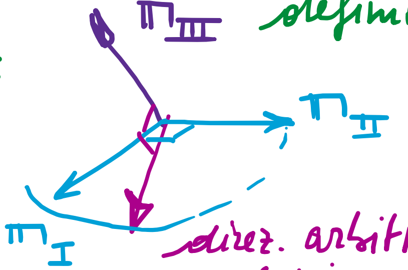
$n_I \perp n_{II}$

- Molteplicità delle radici
  + 3 radici distinte $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ ⇒ 3 dir. princ. mutuam. ⊥



terna principale univocamente definita

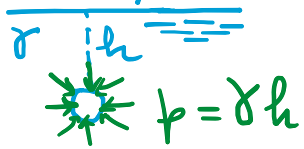
  + 2 radici distinte, es. $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ ⇒ ogni direz. ⊥ a n_{III} è principale nel piano (I, II)
  (" " coincidenti)

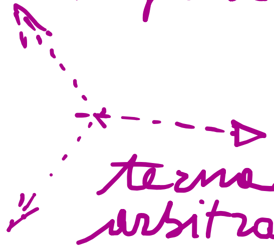


direz. arbitraria nel piano ⊥ n_{III}

  + 3 radici coincidenti $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ ⇒ ogni direz. è principale
  (stato di sforzo sferico o idrostatico)
  "uguale in tutte le direzioni"
  (solo sforzo normale)

es. liquido

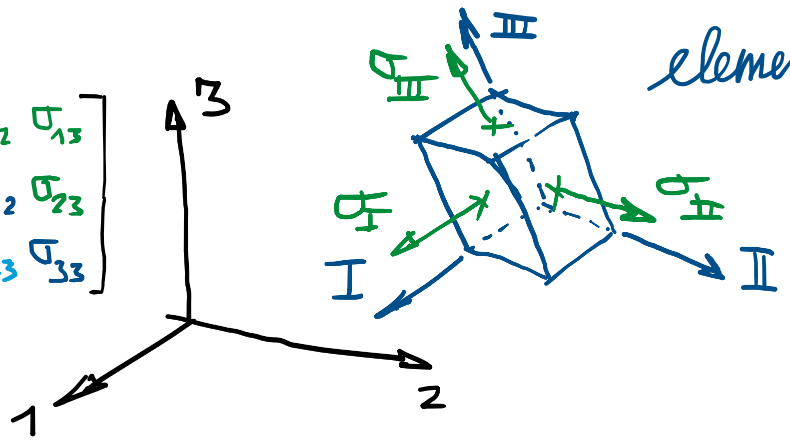




terna arbitraria

– Diagonalizzazione di $[\sigma]$ nelle direzioni principali

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

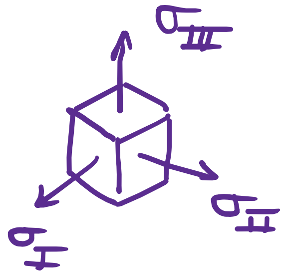


elementino in terna principale

$$[\sigma]_{\substack{\text{rif.}\\ \text{princ.}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_{III} \end{bmatrix}}_{\text{matrice diagonale}} \qquad \underbrace{\begin{cases} I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = -(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III}) \\ I_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}}_{\text{Invarianti espressi nel riferimento principale}}$$

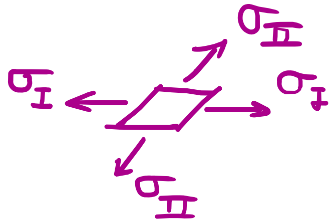
– Classificazione dello stato di sforzo:

+ triassiale (3D): $\sigma_I \neq 0,\ \sigma_{II} \neq 0,\ \sigma_{III} \neq 0$



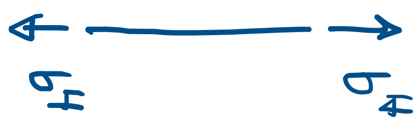
sforzo tridimensionale
(es. diga)

+ biassiale (2D): " " , $\sigma_{III} = 0$



sforzo piano
(es. lastra, trave)

+ monoassiale (1D): " , $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

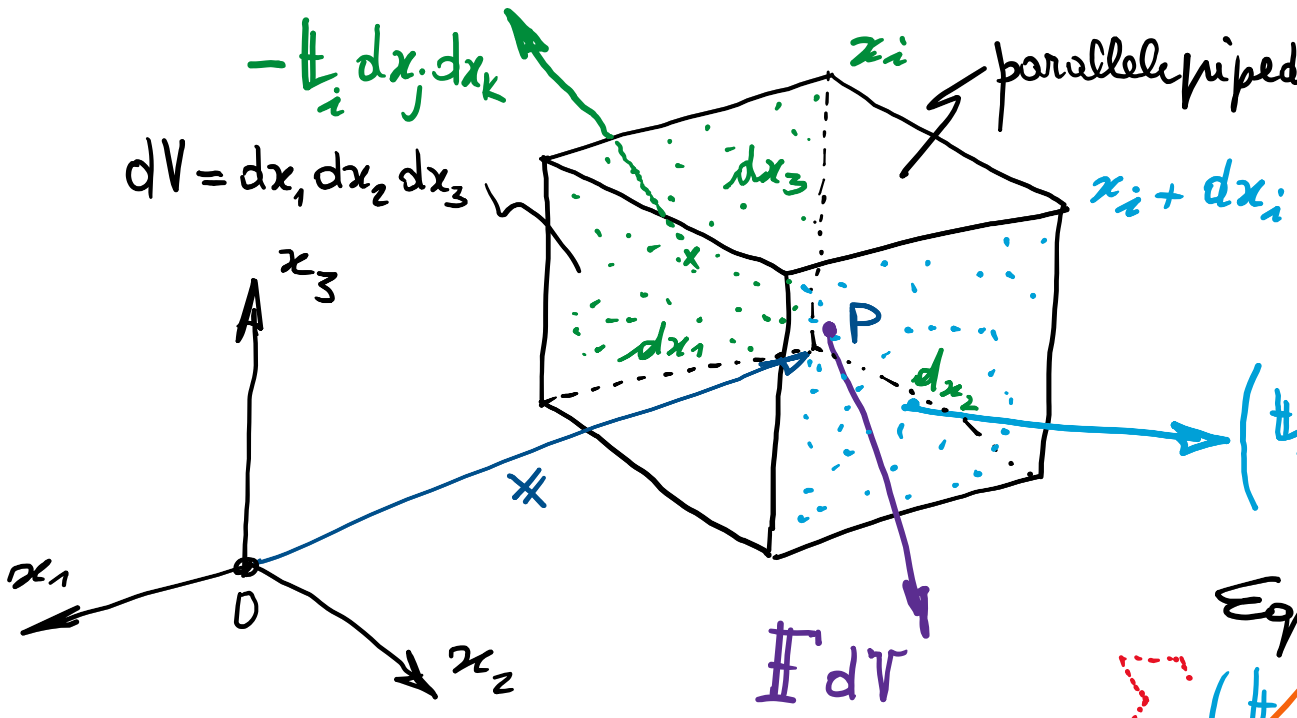


sforzo monodimensionale
(es. filo teso)

(vedi es. stato di sforzo nella prova monoassiale di trazione)

Equazioni indefinite di equilibrio dei continui: $\forall\, \underline{x},\ dV$

sulla variazione spaziale del campo di sforzo
$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}),\ \underline{t}_n(\underline{x})$



$i \to j \to k$

$$\Big(\underbrace{\underline{t}_i + \frac{\partial \underline{t}_i}{\partial x_i}\, dx_i}_{d\underline{t}_i}\Big)\, dx_j\, dx_k$$

es. nelle travi
$N'(x) = -p(x)$
$T'(x) = -q(x)$

Equilibrio alla traslazione:

$$\sum_i \Big(\cancel{\underline{t}_i} + \frac{\partial \underline{t}_i}{\partial x_i}\, \underbrace{dx_i\Big)\, dx_j\, dx_k}_{dV} - \cancel{\underline{t}_i}\, dx_j\, dx_k + \underline{F}\, \cancel{dV} = \underline{0}$$

eq.ne vettoriale $\displaystyle \sum_i \frac{\partial \underline{t}_i}{\partial x_i} + \underline{F} = \underline{0}$ in V

gradiente $\dfrac{\partial}{\partial \underline{x}}$

$\mathrm{div} = \nabla \cdot (\ )$ operatore divergenza

3 eq.ni scalari, $j = 1,2,3 \Rightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = \dfrac{\partial \overbrace{t_{ij}}^{\sigma_{ij}}}{\partial x_i} + F_j = 0_j \iff$ $\boxed{\underbrace{\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}}}_{\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}} + \underline{F} = \underline{0} \ \text{ in } V}$

$\dfrac{\partial (\ )}{\partial x_i} = (\ )_{,i}$

[Equil. alla rotaz. $\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}$]

$\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{F}$

Altrimenti, in maniera diretta:

$$\mathbf{t}_{i,i} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \iff \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial x_i} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

operatore gradiente

$$\nabla(\ ) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\ )$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_i} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

operatore divergenza

$$\mathrm{div}(\ ) = \nabla \cdot (\ )$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

operatori differenziali lineari

equazione vettoriale

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0; \quad j = 1, 2, 3$$

3 eq.ni scalari