

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

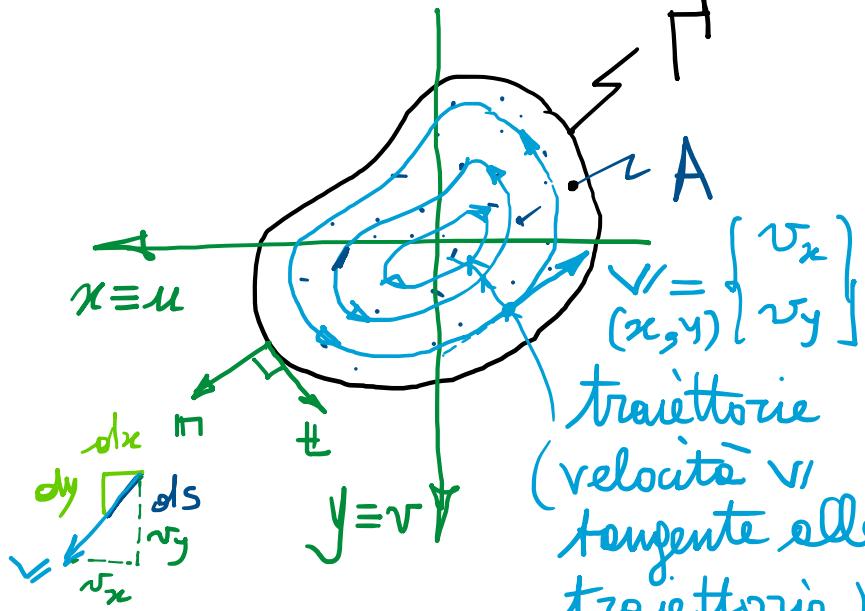
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Analogie fisiche (del pb. della torsione con altri fenomeni fisici retti da equazioni governanti formalmente simili).

- Esse possono risultare utili a:
  - cercare ed interpretare le soluzioni cercate del pb. in esame;
  - concepire eventuali approcci sperimentali utili ad osservazione qualitativa e/o quantitativa;
  - individuare le caratteristiche salienti del pb. e delle risposte, a fini ingegneristici, in particolare riguardo la definizione delle capacità portanti e del comportamento a torsione.
- Meccanica dei Solidi
- Si presentano due analogie principali, in ambito "Meccanica":
  - analogia idrodinamica (Lord Kelvin ~1869) "dei Fluidi"
  - analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~1903) "delle Strutture"

## Analogie idrodinamiche (Lord Kelvin, 1869)



- Si presenta le seguenti analogie formule (stesse eq.m governanti):

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \leftrightarrow v = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \Phi(x, y) \leftrightarrow \phi = \phi(x, y)$$

f.n di spost. di Airy f.n di flusso ("stream function")

$$\tau_{zx} = \Phi_y; \tau_{zy} = -\Phi_{xy} \leftrightarrow v_x = \phi_{,y}; v_y = -\phi_{,x}$$

- Moto puro di fluido perfetto (non visoso) incompressibile all'interno di un recipiente di contorno  $\Gamma$ , con vorticità (velocità angolare) costante.

Equazioni idrodinamiche governanti:

- eq. di continuità (scalare)

$$\Phi = \text{cost.} \rightarrow d\Phi = \underbrace{\phi_{,x}}_{-\omega} dx + \underbrace{\phi_{,y}}_{\omega} dy = 0 \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}$$

- vorticità costante (vettoriale)

$$2\omega = \text{rot } v = \nabla \wedge v = \text{cost. in } A \quad \omega \perp (x, y)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = K(v_{y,x} - v_{x,y})$$

relazione scalare  $-2\omega_z = [v_{x,y} - v_{y,x}] = -c$  costante

- c.c.  $\nabla \cdot n = v_x n_x + v_y n_y = 0$  su  $\Gamma$

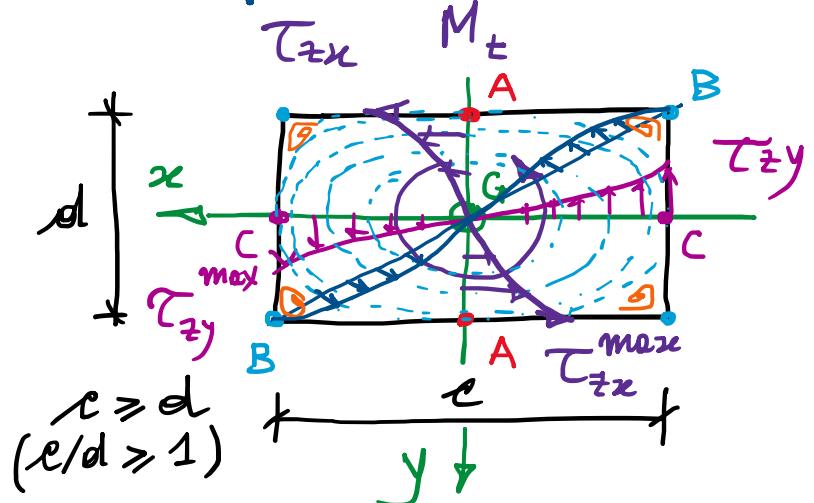
(densità  $\rho = \text{cost.}$ )

$$\cancel{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \text{ in } A}$$

campo di velocità solenoidale

$$[v_{x,x} + v_{y,y}] = 0$$

- L'analogia idrostatica risulta utile a "visualizzare" il campo delle tens. tangenziali -
- Per es., per sezione rettangolare (soluzione per sviluppi in serie):



eq. ne di continuità: portate  $Q = \nabla A = \text{cost}$

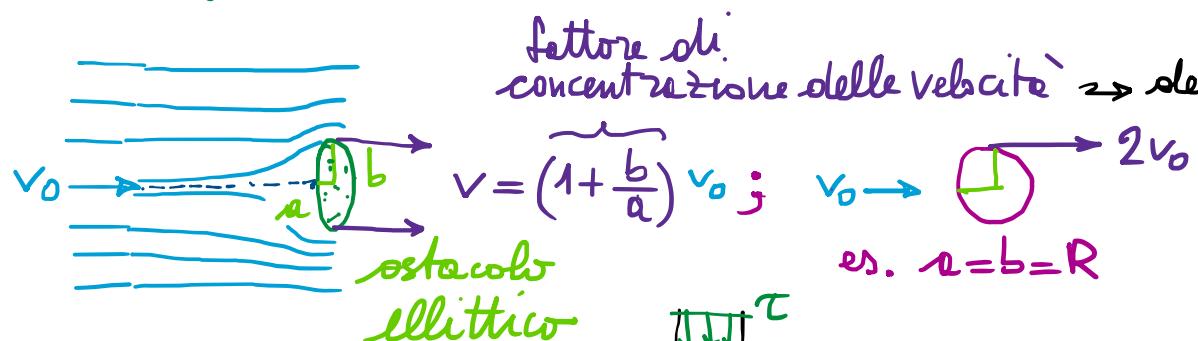
- $\tau^A > \tau^C$  ( $\tau^{\max}$  nei p.ti medi dei lati maggiori)
- $\tau^B \approx 0$  (zone di ristagno di fluido) (spigoli sporgenti)

$$\tau^{\max} = K \frac{M_t}{cd^2} ; J = \alpha c d^3$$

profilo rettangolare  
sottile

$c/d$	$K$	$\alpha$
1	4.80	0.141
2	~4	~0.23
3		0.333 = 1/3

### Concentrazione delle tensioni:



Formule di Trefftz:  
~(1922)

"profilo sottile"  
(s.tubolare) B

$\tau$

$r$

$\frac{\tau^{\max}}{\tau} = 1.74 \sqrt[3]{\frac{r}{l}}$

$\tau \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$

### Integlio (in sezione circolare)

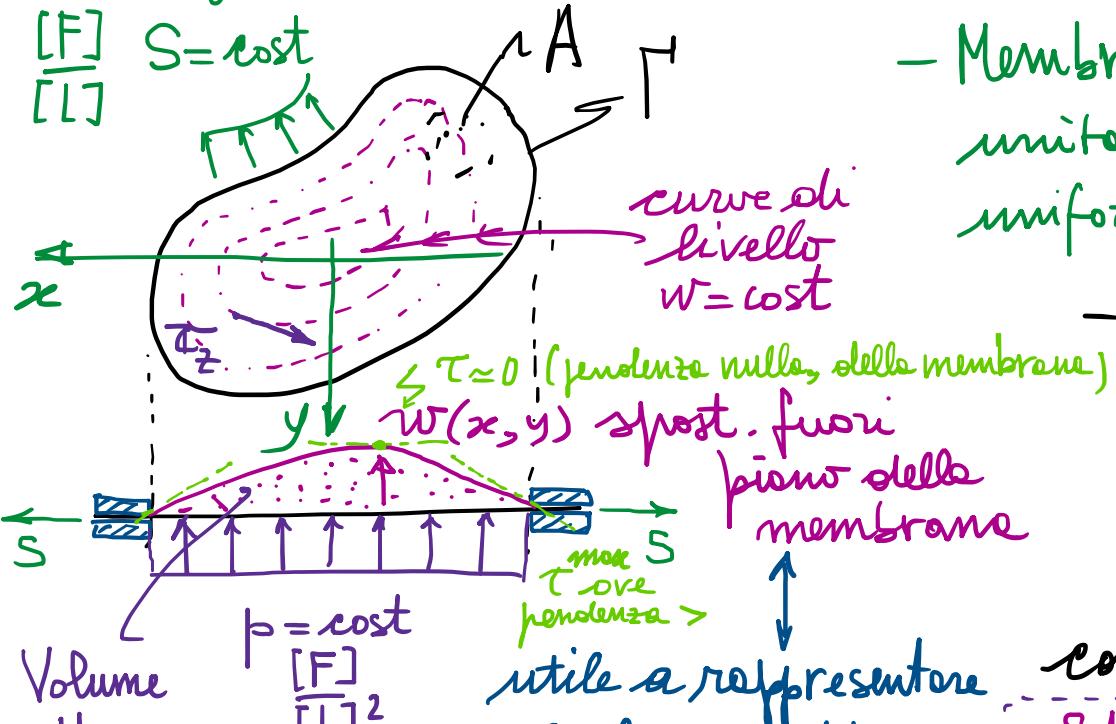
$\tau^{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}$

$\tau_{zt}^{\max} = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$

$\frac{a}{b} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{b}{a} \rightarrow \infty \quad \tau \rightarrow \infty \text{ singolarità delle soluzioni in campo elastico}$

integlio a spigolo vivo (v. Mecanica delle Frazture)

## Analogo delle membrane (Prandtl, 1903) (es. bolle di sapone, tens. superficiale cost.)



$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$$

$$-\tau_{zy} dx + \tau_{zx} dy = 0$$

$$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$\tau_z$  tangente alle  $\varphi = \text{cost}$  ( $w = \text{cost}$ )

- Membrane appoggiate su contorno  $\Gamma$ , con tensione per unità di lunghezza  $S = \text{cost}$ , soggetto a pressione uniforme  $p$ .

- Equazione di equilibrio della membrana in direz. ortogonale al piano:

$$\nabla^2 w(x, y) = -\frac{p}{S} \text{ in } A$$

Torsione

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = -c \text{ in } A$$

$\varphi = 0 \text{ su } \Gamma$

con s.c.  $w = 0$  su  $\Gamma$

$$w \frac{S}{p} = \frac{\varphi}{c} \Rightarrow \varphi = \frac{c}{p} w$$

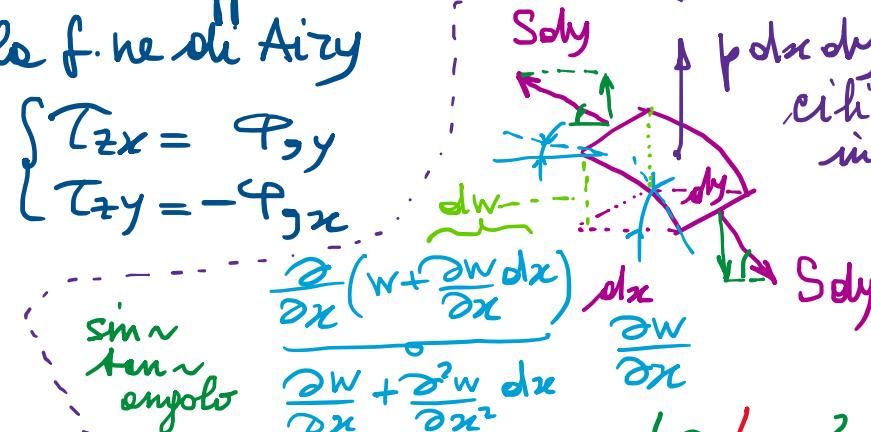
$$\int_A w(x, y) dA = V \Leftrightarrow M_t = 2 \int_A \varphi dA$$

$$M_t = \frac{2cS}{p} V$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w_{yy}^{xx} = -\frac{p}{S} = \text{cost}$$

con anche curv. in  $y \rightarrow \square$



$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$