Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

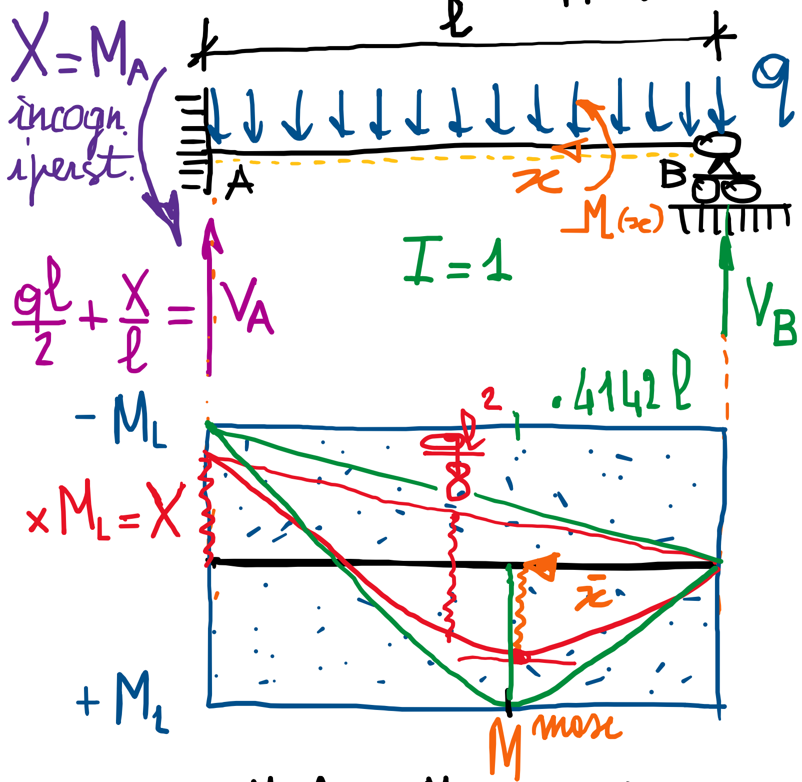
LEZIONE 27

Metodi di calcolo "manuali" (Analisi Limite di travi e telai)

- I Th. fondamentali visti (statico, cinematico; misto) dell'AL, si prestano a definire dei "metodi diretti" di calcolo delle caratteristiche a collasso plastico (rinunciando a ricostruire l'intera risposta evolutiva elastoplastica della struttura mediante sequenza di attivazione delle cerniere plastiche), determinando il moltiplicatore dei carichi di collasso e le relative Azioni Interne ed il meccanismo di collasso ad esso associato.

- Per esempi strutturali semplici, tali "metodi diretti" si predispongono a fornire strumenti di calcolo efficaci, volti all'analisi del caso in esame, con le sue peculiarità (calcolo "manuale"), o anche, in forma generale, mediante metodi di calcolo "automatico", in seguito a codificazione all'interno di opportuni programmi di calcolo (di Programmazione Matematica, atta a risolvere pb. "estremali", di max e min).

• Trave incastro-appoggio con q distribuito (Esempio di calcolo "manuale")



$$q = \lambda \underbrace{\frac{M_L}{\ell^2}}_{q_0} \quad q_0 \text{ carico base}$$

$$V_B = \frac{q\ell}{2} - \frac{X}{\ell}$$

- Metodo statico (massimizzazione dei λ^-)

$$M(x) = \underbrace{\left(\frac{q\ell}{2} - \frac{X}{\ell}\right)}_{V_B = T_B} x - \frac{q x^2}{2}$$

$$T(x) = M'(x) = \left(\frac{q\ell}{2} - \frac{X}{\ell}\right) - q x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{T_B}{q} = \frac{\frac{q\ell}{2} - \frac{X}{\ell}}{q}}$$

$$M^{max} = M(\bar{x}) = \frac{T_B^2}{2q} = \frac{\left(\lambda \frac{M_L}{\cancel{\ell^2}} \frac{\cancel{\ell}}{2} - \frac{x M_L}{\cancel{\ell}}\right)^2}{2\lambda \frac{M_L}{\cancel{\ell^2}}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{2} - x\right)^2 M_L}{2\lambda}$$

$$\boxed{\frac{M^{max}}{M_L} = \frac{(\lambda - 2x)^2}{8\lambda}}$$

- Se $M_A = X = M_L$ $(x = 1)$

$$\frac{M^{max}}{M_L} = \frac{(\lambda-2)^2}{8\lambda} \Rightarrow \text{A collasso } (\max \lambda^-)$$

$$\frac{M^{max}}{M_L} = 1 = \frac{(\lambda-2)^2}{8\lambda}$$

$$(\lambda-2)^2 = 8\lambda \rightarrow \lambda^2 + 4 - 4\lambda - 8\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 6 \pm \sqrt{36-4} = 6 \pm \sqrt{32} = 6 \pm 4\sqrt{2} = 2(3 \pm 2\sqrt{2})$$

$$= 2(3+2\sqrt{2}) = \lambda_L$$

$$= 11.65685424$$

11.657

$$\bar{x} = \frac{\lambda \frac{M_L}{\ell^2}\frac{\ell}{2} - x\frac{M_L}{\ell}}{\lambda \frac{M_L}{\ell^2}} \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\ell} \overset{CP}{=} \frac{\lambda - 2x}{2\lambda} \overset{x=1}{=} \frac{\lambda-2}{2\lambda}$$

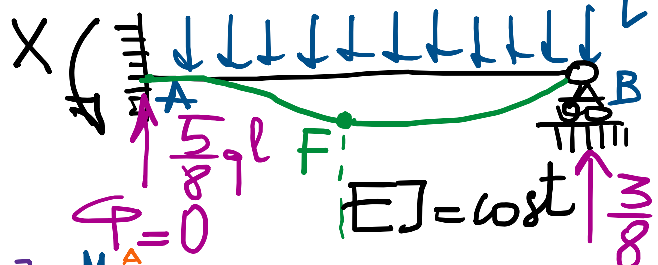
$\lambda = \lambda_L$

$$= \frac{6+4\sqrt{2}-2}{4(3+2\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} =$$

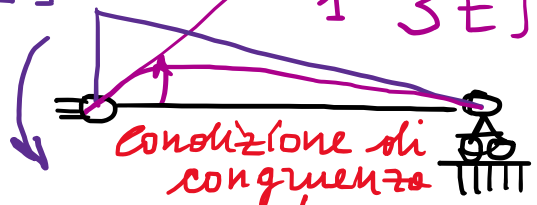
$$= \frac{3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4}{9-8} = \sqrt{2}-1$$

$$= .41421356$$

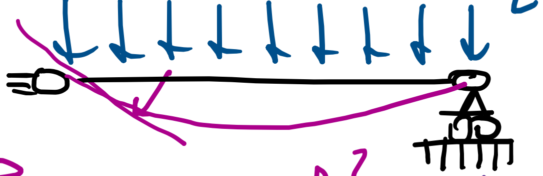
Soluzione elastica



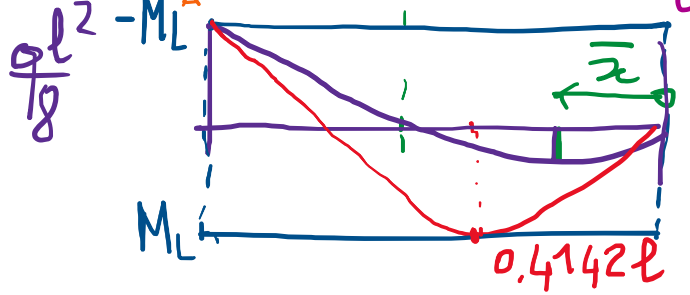
$=$ $X=1$ $\varphi_1 = \frac{1}{3}\frac{\ell}{EJ}$



$+$ $\varphi_q = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EJ}$



$$\varphi_A = \varphi_1 X - \varphi_q \overset{!}{=} 0 \Rightarrow X = \frac{\varphi_q}{\varphi_1} = \frac{3}{24} q\ell^2 = \frac{1}{8} q\ell^2$$



$$M^{max}_{\text{(in campata)}} = \frac{9}{64}\frac{q^2\ell^2}{2q} = \frac{9}{128} q\ell^2 = \frac{1}{\frac{128}{9}} q\ell^2 = \frac{1}{14.2} q\ell^2 < \frac{1}{8} q\ell^2$$

- Nell'hp di CP, la prima plasticizzazione si ottiene per

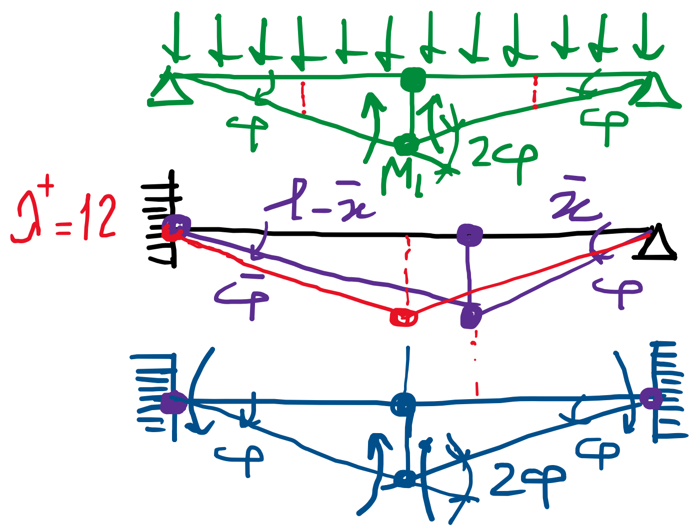
$$X = \frac{q\ell^2}{8} = M_L \Rightarrow \lambda_E \frac{\cancel{M_L}}{\cancel{\ell^2}}\frac{\cancel{\ell^2}}{8} = \cancel{M_L} \Rightarrow \lambda_E = 8$$

ove viene ad attivarsi CP in A. Peraltro, il momento può ancora crescere in campo elastoplastico, sino a raggiungere $M^{max} = M_L$ in campata, come precedentemente determinato, per $\lambda_L = 11.657$

(in genere, analisi elastica utile alla ricostruzione dell'intera risposta evolutiva elastoplastica).

- Metodo cinematico (min. dei λ^+)

$$\lambda_L = \frac{D}{\mathcal{L}_{e0}}$$



$$\mathcal{L}_e = \underbrace{\cancel{2}\frac{ql}{\cancel{2}}\varphi\frac{l}{4}}_{\lambda\mathcal{L}_{e0}} = \mathcal{L}_{ip} = D = M_L 2\varphi \Rightarrow \lambda_L = 8$$

$\wedge$

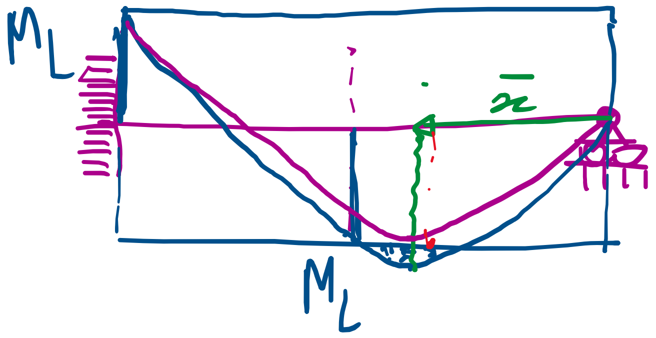
?

λ_L intermedio

$\wedge$

$$\mathcal{L}_e = \text{idem} = \text{''} = M_L 4\varphi \Rightarrow \lambda_L = 16$$

Se $\bar{x} = l/2$ (come per gli altri due mecc.) [stesso $\mathcal{L}_{e0}$] $\Rightarrow D = 3M_L\varphi \Rightarrow \lambda^+ = \dfrac{\overbrace{3M_L\varphi}^{D}}{\underbrace{\frac{1}{4}M_L\varphi}_{\mathcal{L}_{e0}}} = 12$ (è anche un λ^-?)



$$\rho_m = \frac{M^{max}}{M_L} = \frac{(\lambda-2)^2}{8\lambda} = \frac{10^2}{8\cdot 12} = \frac{\cancel{4}\cdot 25}{\cancel{4}\cdot 2\cdot 12} = \frac{25}{24} = 1.041\bar{6}$$

$\lambda^+ = 12$

fattore di violaz. di conformità $\Rightarrow \lambda^+ = 12$ non è un λ^-

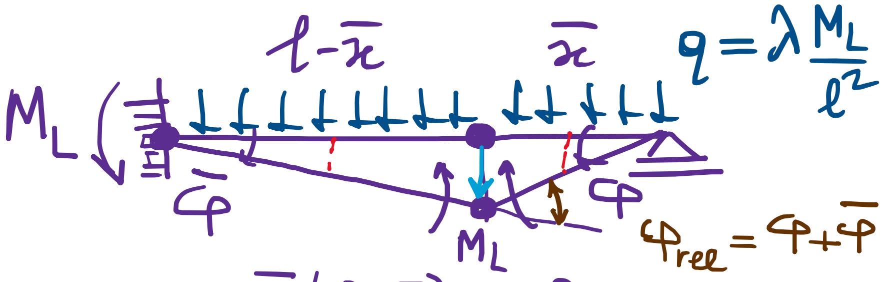
$$\frac{\bar{x}}{l} = \frac{\lambda-2}{2\lambda} = \frac{5}{12} = .41\bar{6}$$

$$\lambda^- = \frac{\lambda^+}{\rho_m} = \frac{12}{25}24 = 12\frac{96}{100} = \frac{1152}{100} = 11.52 < \lambda_L < 12$$

delimitazione bilaterale

– Quindi, possibile procedere in maniera iterativa, ponendo CP in $\bar{x} = \frac{5}{12} l$, etc.

– Ricerca diretta del mecc. di collasso (min. λ^+):



$\bar{\varphi}(l-\bar{x}) = \varphi \bar{x}$

$$\boxed{\bar{\varphi} = \frac{\bar{x}}{l-\bar{x}} \varphi}$$

$$\mathcal{L}_{e0} = \frac{M_L}{l^2}(l-\bar{x})\,\bar{\varphi}\,\frac{l-\bar{x}}{2} + \frac{M_L}{l^2}\,\bar{x}\,\varphi\,\frac{\bar{x}}{2}$$
$$= \frac{M_L}{2l^2}\varphi\left[\frac{\bar{x}}{\cancel{l-\bar{x}}}(l-\bar{x})^{\cancel{2}} + \bar{x}^2\right]$$
$$= \frac{M_L}{2l^{\cancel{2}}}\varphi\,\bar{x}\,(\cancel{l} - \cancel{\bar{x}} + \cancel{\bar{x}}) = \frac{M_L \varphi \bar{x}}{2l}$$

$$\mathcal{L}_{ip} = D = M_L \bar{\varphi} + M_L(\bar{\varphi} + \varphi)$$
$$= M_L(2\bar{\varphi} + \varphi)$$
$$= M_L\left(\frac{2\bar{x}}{l-\bar{x}} + 1\right)\varphi = M_L\varphi\left(\frac{2\bar{x} + l - \bar{x}}{l-\bar{x}}\right) = M_L\varphi\,\frac{l+\bar{x}}{l-\bar{x}}$$

$$\lambda^+ = \frac{D}{\mathcal{L}_{e0}} = \cancel{M_L}\cancel{\varphi}\,\frac{l+\bar{x}}{l-\bar{x}}\,\frac{2l}{\cancel{M_L}\cancel{\varphi}\bar{x}} = \boxed{2l\,\frac{l+\bar{x}}{l-\bar{x}}\,\frac{1}{\bar{x}} = 2\,\frac{1+\bar{x}/l}{1-\bar{x}/l}\,\frac{1}{\bar{x}/l} = \lambda^+_{(\bar{x})}}$$

λ_L risulterà quello che minimizza i λ^+, rispetto alla posizione $\bar{x}$.

$$\lambda^+ = 2\ell \, \frac{\ell+\bar{x}}{\ell-\bar{x}} \, \frac{1}{\bar{x}} = 2 \, \frac{1+\bar{x}/\ell}{1-\bar{x}/\ell} \, \frac{1}{\bar{x}/\ell}$$

- se $\bar{x} = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \lambda^+ = 12$
- se $\bar{x} = \frac{5}{12}\ell \Rightarrow \lambda^+ = \frac{408}{35} = 11.65714$
- se $\bar{x} = (\sqrt{2}-1)\ell \Rightarrow \lambda^+ = \lambda_L = 2(3+2\sqrt{2})$ ✓ (come preced. det.)

$\downarrow$ minimizzazione dei λ^+

Infatti:

$$\frac{d\lambda^+}{d\bar{x}} = 2\ell \, \frac{1\cdot(\ell-\bar{x})\bar{x} - (\ell+\bar{x})(\ell-2\bar{x})}{(\ell-\bar{x})^2\bar{x}^2} = 0 \Rightarrow (\ell-\bar{x})\bar{x} = (\ell+\bar{x})(\ell-2\bar{x})$$

condiz. di stazionarietà (min.)

$$\cancel{\ell\bar{x}} - \bar{x}^2 = \ell^2 - 2\ell\bar{x} + \cancel{\ell\bar{x}} - 2\bar{x}^2$$

$$\bar{x}^2 + 2\ell\bar{x} - \ell^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\bar{x}}{\ell}\right)^2 + 2\frac{\bar{x}}{\ell} - 1 = 0}$$

$$\frac{\bar{x}}{\ell} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 + \sqrt{2} \quad (\bar{x} > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}}{\ell} = \sqrt{2} - 1$$

come preced. determinato

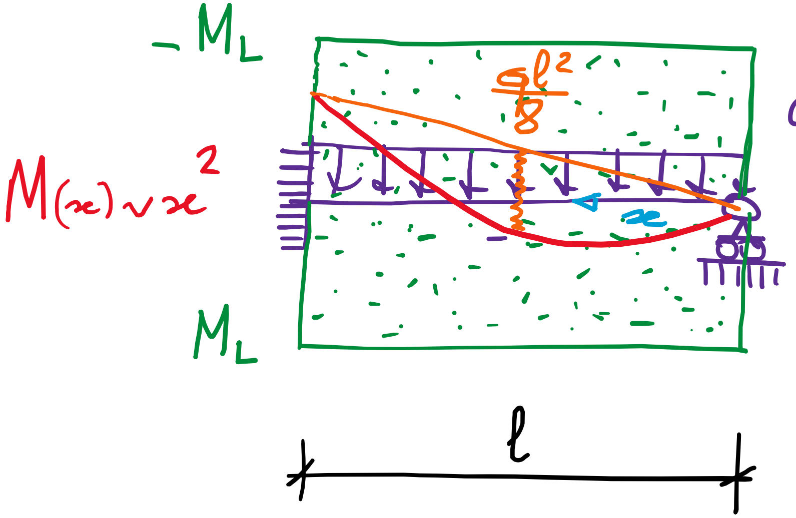
Tale posizione della cerniera in campata è quella che conduce alla minimizzazione del λ^+ e quindi fornisce la posizione della CP nel meccanismo di collasso e il corrisp. λ_L.

Concetti fondamentali :

- Metodi "diretti" ("manuali") per il calcolo (a rottura) delle caratteristiche a collasso plastico (Analisi Limite) -

- Esempio di trave iperstatica incastro-appoggio :

Metodo statico

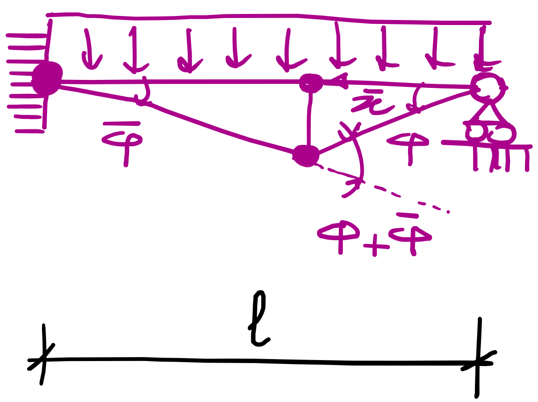


$$q = \lambda^- \overbrace{\frac{M_L}{\ell^2}}^{q_0}$$

$$\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$$

Metodo cinematico

$$q = \lambda^+ \overbrace{\frac{M_L}{\ell^2}}^{q_0}$$



$$\lambda^+ = \frac{D}{\delta_{e0}}$$

SOMMARIO (Lez. 27)

- I Th. fondamentali dell'Analisi Limite divengono "Metodi diretti" di calcolo per la stima del collasso plastico (anche "manuali").
- Operando con metodo statico, si mira ad ottenere una sequenza massimizzante dei λ^- ($\lambda_L = \max\{\lambda^-\}$).
- Operando con metodo cinem., " " " " " " minimizzante dei λ^+, o comunque a fornire delimitazioni bilaterali del moltiplicatore limite $\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$ sufficientemente ristrette. ($\lambda_L = \min\{\lambda^+\}$).
- Laddove λ^+ fosse anche λ^-, da metodo misto, si individua il molt. di collasso $\lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$ (conformità rispettata).
- Esempio di trave incastro-appoggio, con soluzione "esatta".

Next step: Esempio di telaio a portale.