

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 23

Flessione elastoplastica delle travi

Scopi:

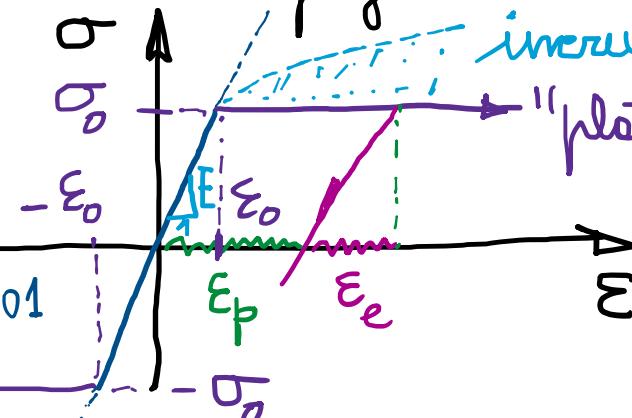
- Descrivere il salto di scala, da materiale a struttura, per cogliere il comportam. dell'elemento strutturale anche oltre l'usato del campo elastico (di quotidiano funzionamento, per condizioni di esercizio regolare), per non-linearietà di materiale (comportamento elastoplastico).
- "Analisi Limite" dei sistemi di travi ("Calcolo e Rotta" dei telai) utile a determinare le possibili condizioni di collasso strutturale (plastico), sia nelle caratteristiche statiche (livello dei carichi \Rightarrow carico di collasso, o moltiplicatore di), che cinematiche (meccanismo di collasso).
- Individuare la relazione tra comportamento locale (elastoplastico) del punto materiale delle trave e comportamento globale dell'intero elemento strutturale - Lo facciamo nell'ambito dell'ipotesi di comportamento perfettamente elastoplastico del materiale (no incrudimento) [da un lato conservativo, dall'altro sotto l'ipotesi di garantire una elevata (illimitata) tollerabilità del materiale].

- Comportamento perfettamente elasto-plastico del materiale

$$\sigma_0 = E \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

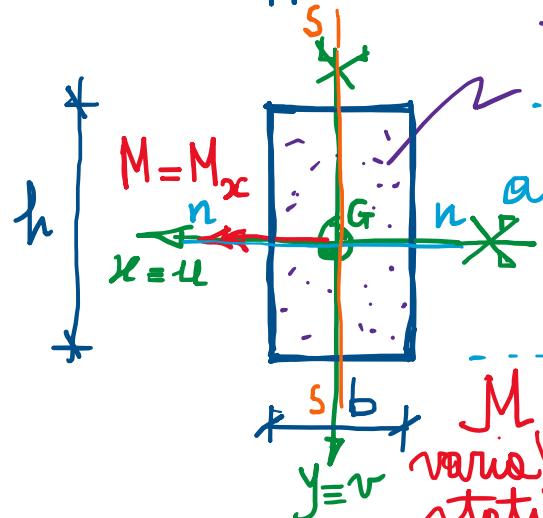
$$\approx 10^{-3} = .001$$



incremento (limite di rientrimento variabile)

"plateau" o spazio costante (flow stress), con sviluppo di deformazioni plastiche illimitate.
(limite elastico fijo)

- Sezione doppialmente simmetrica, rettangolare (flessione rette) (esempio)

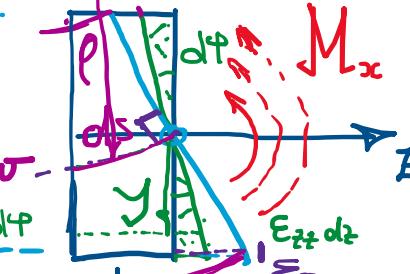


$E, \sigma_0 (\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E})$ cost.

asse neutro (in campo elasto-plastico)

campo di deformazione

$$ds = \rho d\varphi - y d\varphi$$



ρ : raggio di curvatura
asse inflesso (B-E-N)

Ipotesi chi
conservazione
sulle sezioni
piane (e ⊥
all'asse
inflesso)

Campo elastico

lineare

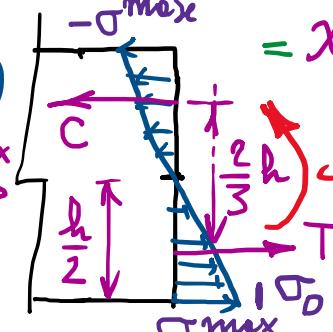
$$\varepsilon_{max} \leq \varepsilon_0$$

$\leftrightarrow \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}$
legge costitutivo (Hooke)
 $= E \chi y$

lineare sulle sezioni

$$\sigma_{zz}(y)$$

$$T = C = \frac{1}{2} \frac{h}{2} \frac{\sigma_{max}}{b}$$



lineari sulle sez. (y)

$$\varepsilon_{max} = \chi \frac{h}{2}$$

equiv.

statica

$$= \frac{bh^3}{42} \frac{\sigma_{max}}{b} = \frac{bh^2}{3} \frac{\sigma_{max}}{b} = \frac{bh}{6} W_e$$

- Quindi, in maniera diretta:

$$M = W_e \sigma_{\max} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M}{W_e}, \quad W_e = \frac{bh^2}{6} \text{ modulo di resistenza (a flessione)} \quad \text{elastico}$$

- Altrettanto, per equivalenza statica (tra M_x e σ_{zz} che ne deriva):

$$M_x = \int_A (\sigma_{zz} dA) y = \int_A \sigma_{zz} y dA = \int_A E \underbrace{\chi}_{\sigma_{zz}} y dA = E \chi \int_A y^2 dA \quad J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

legge di B-E-N: (comp. costitut. delle sez. trasv.)

$$M_x = E J_x \chi_x \Leftrightarrow \chi_x = \frac{M_x}{E J_x} \quad \begin{matrix} \text{delle trave} \\ \text{in campo} \\ \text{elastico} \end{matrix}$$

rigidezza
fessionale (elastica)

momento d'inerzia
delle sezione trasv.
rispetto all'asse x
(asse n-n)

- Formule di Navier: (sforzi lineari sulle sez.)

$$\sigma_{zz} = E \underbrace{\chi_y}_{{\sigma_{zz}}} = E \frac{M}{J_x} y = \frac{M_x}{J_x} y \Rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_{zz}(y = \frac{h}{2}) = \frac{M_x}{J_x \cdot 2} = \frac{M_x}{W_{ex}}$$

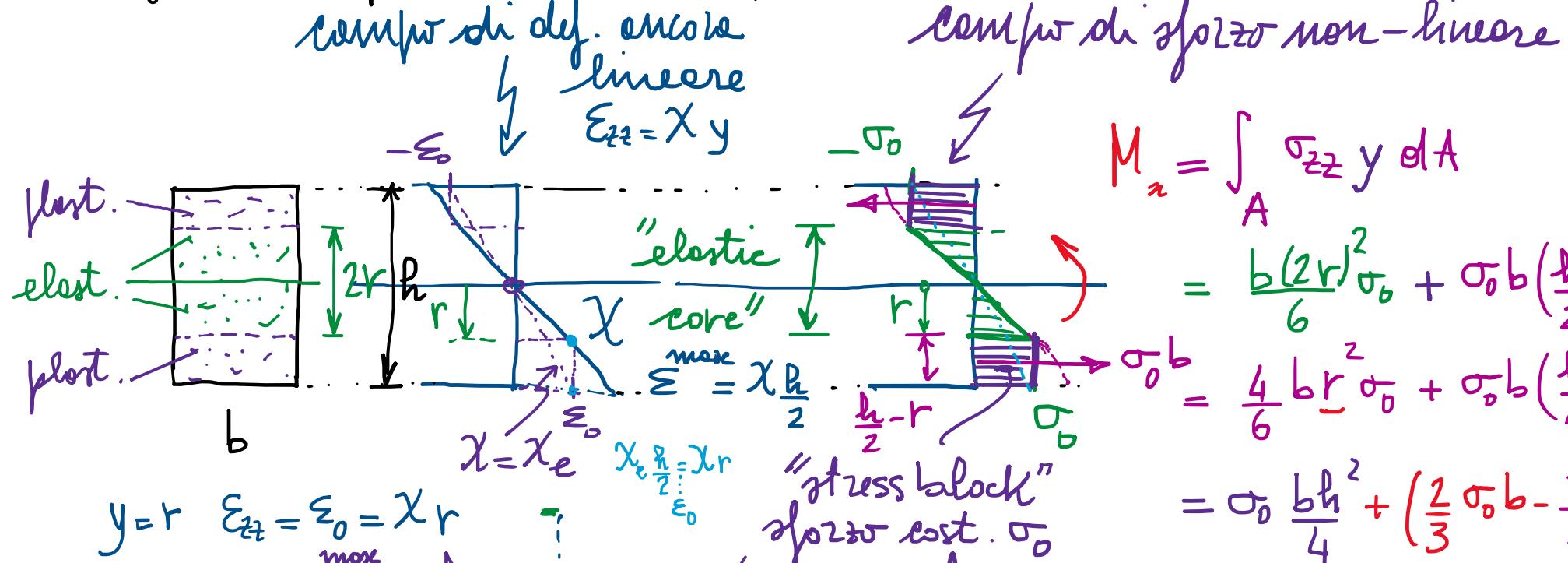
limite elastico

- Regime elastico: $\epsilon_{\max} = \chi \frac{h}{2} \leq \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}; \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_0; \quad \epsilon = \epsilon_0 \Rightarrow \chi_e = \frac{2\epsilon_0}{h}$

$$W_e = \frac{J_x}{h/2} = \frac{1}{12} \frac{bh^3}{\chi/2} = \frac{1}{6} bh^2 \Rightarrow M_e = \sigma_0 W_e$$

Momento al limite
elastico

- Regime elasto-plastico ($\chi \geq \chi_e$) $\Rightarrow (M \geq M_e)$



$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA$$

$$= \frac{b(2r)^2}{6} \sigma_0 + \sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - r \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + r \right)$$

$$\sigma_0 b = \frac{4}{6} b r^2 \sigma_0 + \sigma_0 b \left(\frac{h^2}{4} - r^2 \right)$$

$$= \sigma_0 \frac{bh^2}{4} + \left(\frac{2}{3} \sigma_0 b - \frac{3}{3} \sigma_0 b \right) r^2$$

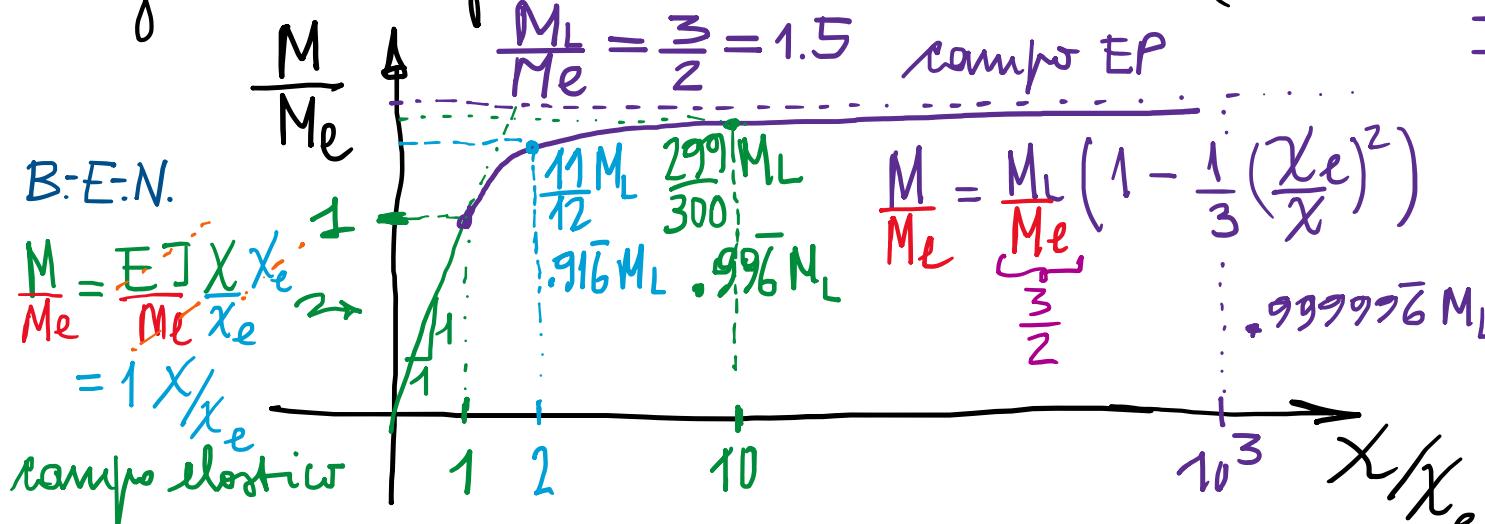
$$= \sigma_0 \frac{bh^2}{4} - \frac{1}{3} \sigma_0 b r^2 \quad r = \frac{\epsilon_0}{\chi} = \frac{\chi_e h/2}{\chi}$$

$$= \underbrace{\sigma_0 \frac{bh^2}{4}}_{\sigma_0 b h^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma_0 b}{\sigma_0 b h^2} 4 r^2 \right) = \frac{h}{2} \frac{\chi_e}{\chi}$$

$$= M_L \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{h/2} \right)^2 \right)$$

$$= M_L \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right) = M(\chi) \quad \text{non-lin.}$$

- legge elastoflessibile delle zet. trass. ($M = M(X)$ non-lineare) con incroci.



- M_L : comp. asintotico per $X \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$)

- Caso limite: (compressione impossibile)

$$\varepsilon_{max} = 1 \Rightarrow X = \frac{2}{h} \Leftrightarrow \varepsilon_{max} = X \frac{h}{2}$$

$$\frac{X}{X_e} = \frac{1}{\varepsilon_0} \approx \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000$$

$\varepsilon \leq 1$

- Caso tipico $\varepsilon = 1\% = 10^{-2} \Rightarrow X = \frac{2}{h} 10^{-2}$

(in campo EP)

defor. che possono

tipicamente manifestarsi in ambito EP.

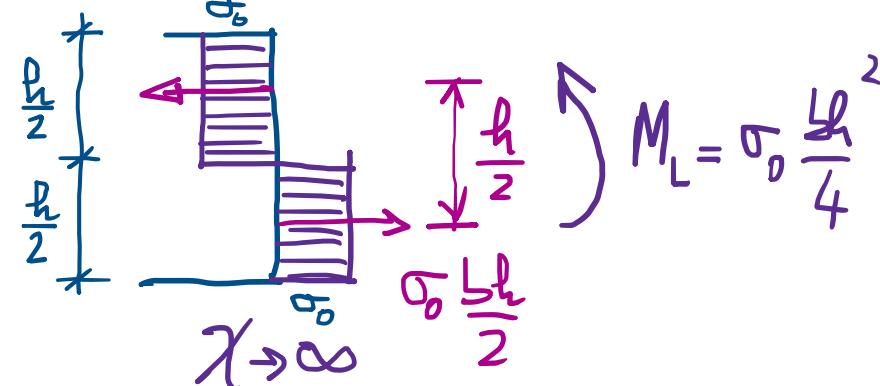
$$\frac{X}{X_e} = \frac{10^{-2}}{\varepsilon_0} \approx 10$$

Fattore di forma:



$$\alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\sigma_0 W_p}{\sigma_0 W_e} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Momento Limite:



Generalizz. ad altre sezioni:



$$\alpha: 1.1-1.2 \quad 1.27 \quad 1.6-1.8 \quad 1.7 \quad 2.0$$

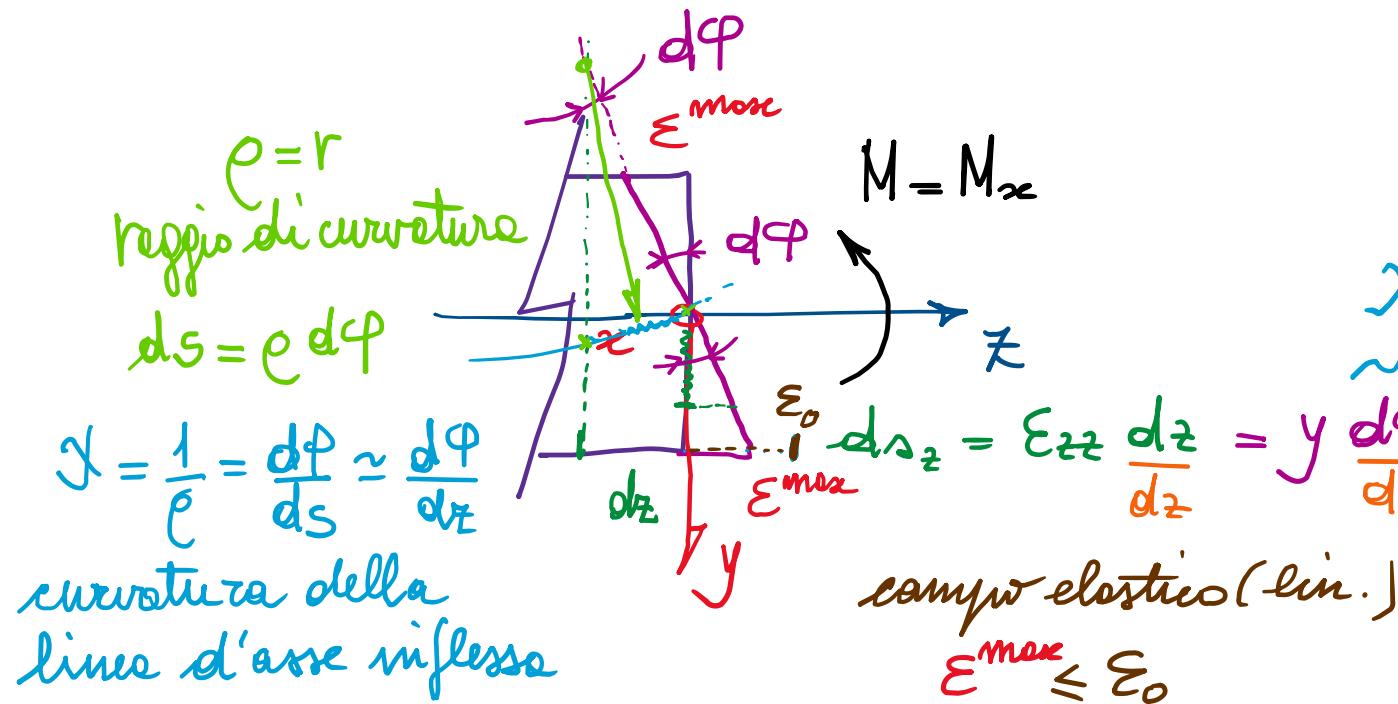
$$\frac{bh^2}{4} = W_p = 2 S_x = \frac{bh}{2} \frac{h}{4} \frac{h}{2}$$

massimizz
il guadagno
plastico

Momento statico parte zet.
sotto asse neutro

Concetti fondamentali :

- Flessione elastoplastica (trave) : da comportamento elastico a comportamento elastoplastico -
- Ipotesi cinematica sul campo di deformazione (conservazione delle sezioni piane) : $\epsilon_{zz} = \chi y$ *valido in campo elastoplastico*



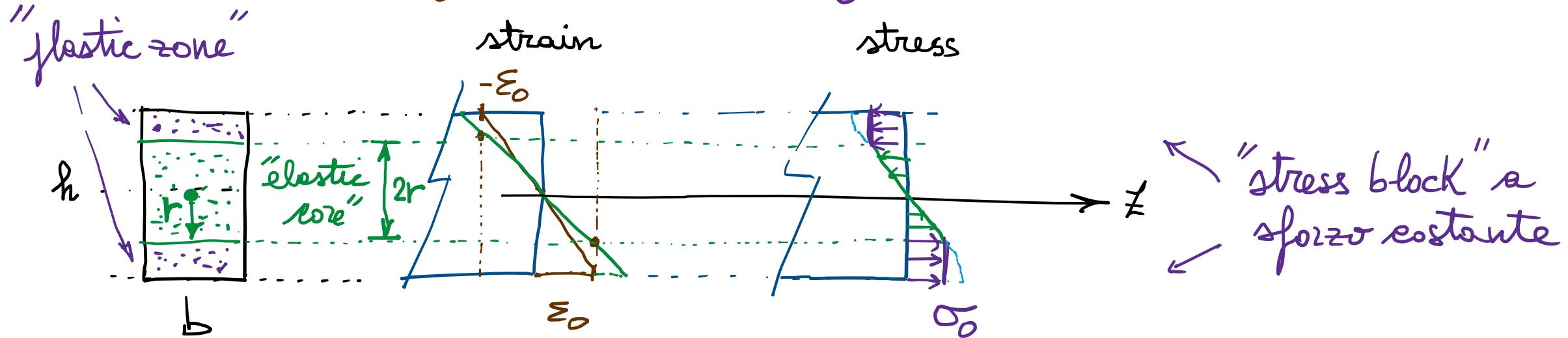
$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}$$

campo elastico

$\epsilon_{zz} = \chi y$ $\rightarrow \sigma_{zz}(y) = E \chi y$

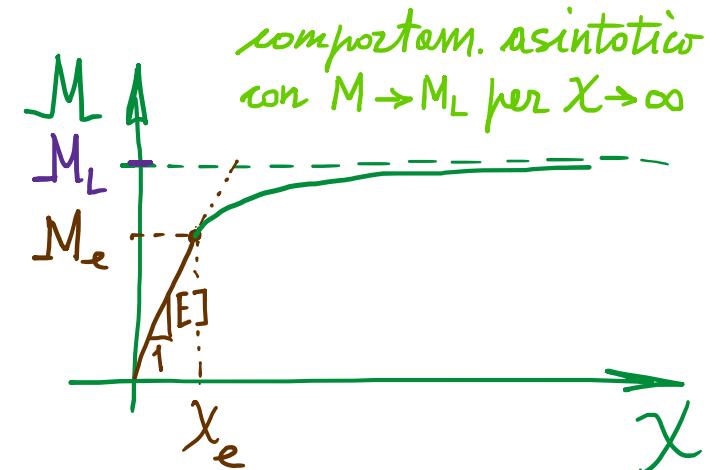
deformazioni lineari sulle sezione *spurzo lin. sulle sezione*

- Campo elastoplastico: $\varepsilon^{\text{max}} \geq \varepsilon_0$
 $\chi = \chi_e$ $\chi \geq \chi_e$

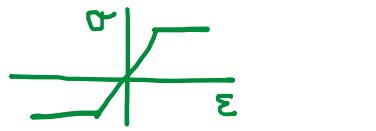


a χ crescente, oltre il campo elastico, r si riduce da $\frac{h}{2}$ ($\chi = \chi_e$)
 a 0 ($\chi \rightarrow \infty$)

- Conduce a legge Momento/Curvature $M = M(\chi)$ non lineare, con incremento macroscopico



SOMMARIO (Lec. 23)



- Flessione elastoplastica (vs. legge costitutiva delle sez. trasversale). [che materiale] [a sezione]
- Hp. di conservazione delle sezioni piane (compo lineare di deformazione).
- Regime elastico (lineare) : modulo di resistenza elastico, momento/curvatura e limite elastico.
- Regime elastoplastico : plasticizzazione con "stress block" che si diffondono, per curvature crescenti, dai lenti vs. l'interno ; legame M/X non-lin. con incrudimento ; modulo (di resistenza) plastico ; momento limite ($X \rightarrow \infty$).

A hand-drawn graph showing bending moment M on the vertical axis and curvature X on the horizontal axis. The curve starts at the origin, rises linearly, and then levels off into a horizontal asymptote, representing a plastic hinge behavior.
- Fattore di forma : guadagno plasticità/elasticità.
- Casi pratici : momento limite quasi raggiunto per deformazioni osservabili in ~1% in regime elastoplastico.

Next step: Comportamento globale delle trave infisse ; ipotesi di cerchiere plastica ; meccanismo di collasso (plastico) delle trave -