Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

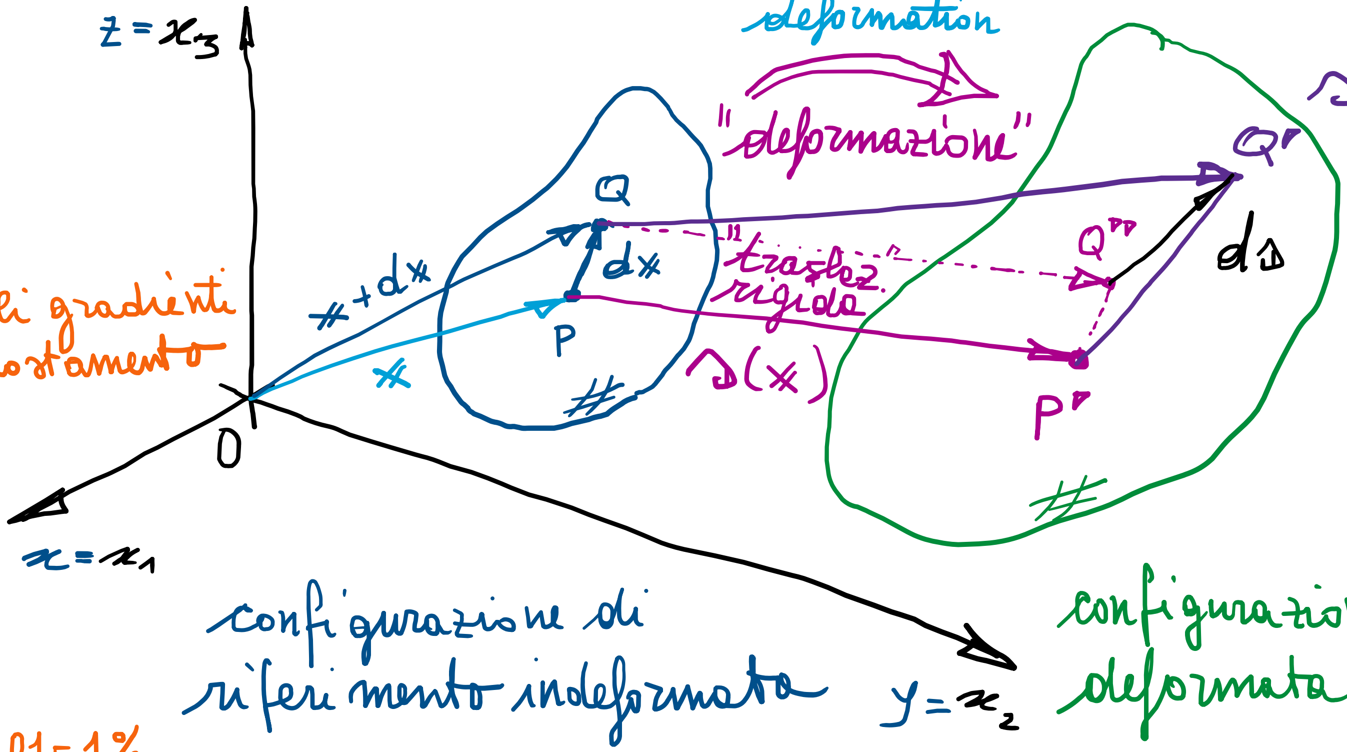
LEZIONE 14

Cinematica dei continui : (definizione di deformazione ; equazioni di congruenza interna)

– Misura (intensiva) della deformazione
(in regime di piccole deformazioni) → piccoli gradienti di spostamento

$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$

vettore spostamento $s_i(x_k)$ — tensore di deformazione $\varepsilon_{ij}(x_k)$



configurazione di riferimento indeformata

configurazione corrente deformata

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + d\mathbf{s}$$

$$d\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \ldots = \underbrace{\nabla \mathbf{s}(\mathbf{x})}_{\boldsymbol{\Psi}} \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \cdot d\mathbf{x}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \; ; \; \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = {}_{,i}$$

gradiente — derivata parziale

$|\Psi_{ij}| \ll 1 \sim 0{,}001 = 1‰ \, ; \, 0{,}01 = 1\%$

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$ tensore gradiente di spostamento (2° ordine) (deve contenere la deformazione pura : "strain")

$$= \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\vartheta}$$ decomposizione additiva di $\boldsymbol{\Psi}$ $\left(\Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j} \, , \, 9 \text{ componenti} \right)$ "strain"

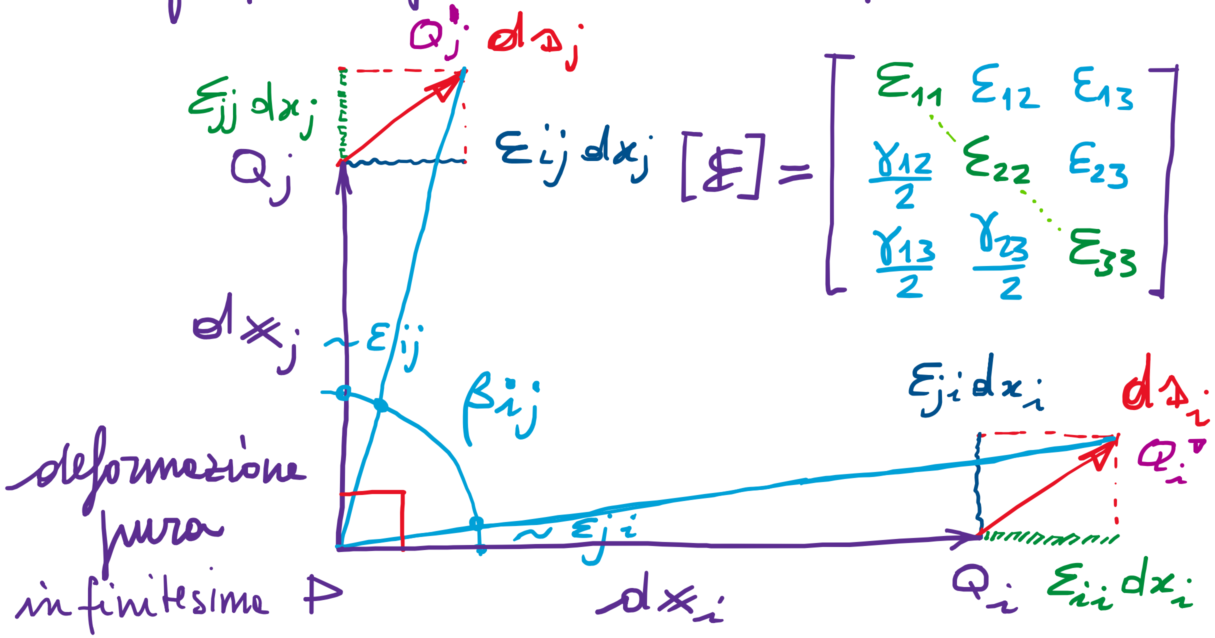
con :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\Psi}^T\right)$$ parte simmetrica $\left[\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon} \; ; \; \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{i,j} + s_{j,i}\right) \right]$ deformazione pura

$\boldsymbol{\Psi} = +$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}^T\right)$$ parte emisimmetrica $\left[\boldsymbol{\vartheta}^T = -\boldsymbol{\vartheta} \; ; \; \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} = -\frac{1}{2}\left(s_{i,j} - s_{j,i}\right) \right]$ rotazione rigida infinitesima

- Significato fisico di $\mathcal{E}$ (componenti ε_{ij}): $\Psi = \mathcal{E} \rightarrow d\mathbf{s} = \Psi \cdot d\mathbf{x} = \mathcal{E} \cdot d\mathbf{x} \Leftrightarrow ds_i = \varepsilon_{ij}\, dx_j$



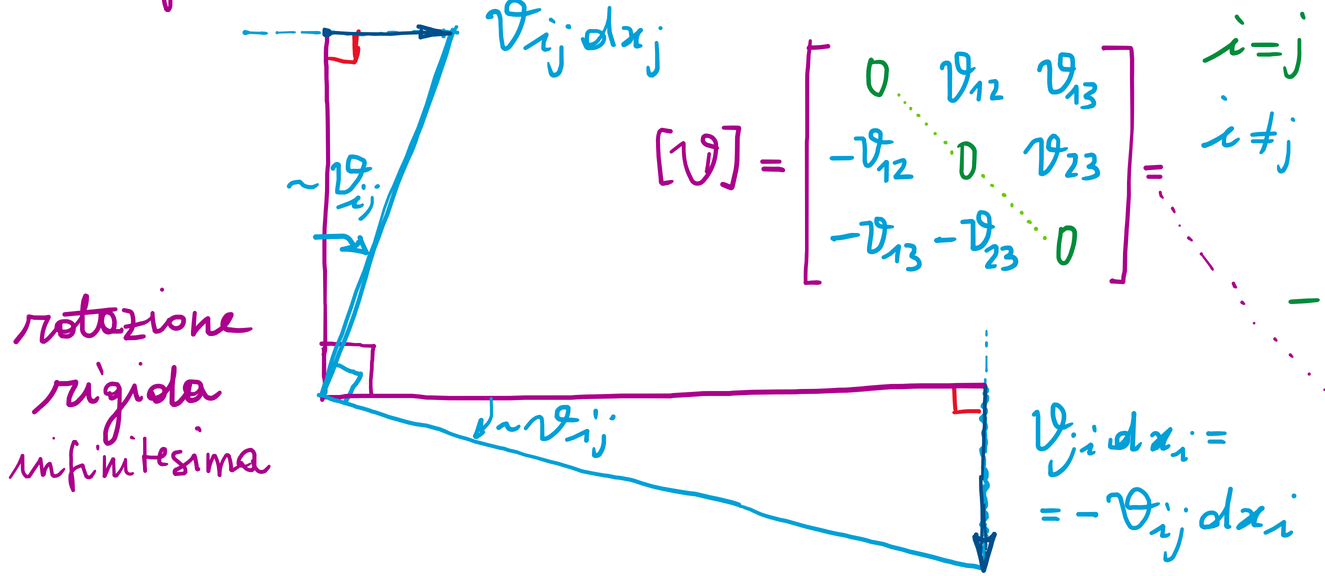
$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$i=j$ ε_{ii} = allungamento specifico nella direzione i $= s_{i,i}$ (vedi $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$)

$i \neq j$ $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ $\quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij}$ scorrimento angolare tra fibre i e j

deformazione tagliante

- Significato fisico di ϑ (componenti ϑ_{ij}): $\Psi = \vartheta$ $\quad (\vartheta^T = -\vartheta\,;\ \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij})$ $\quad [\vartheta_{ii} \equiv 0]$



$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=j$ $\vartheta_{ii} \equiv 0$

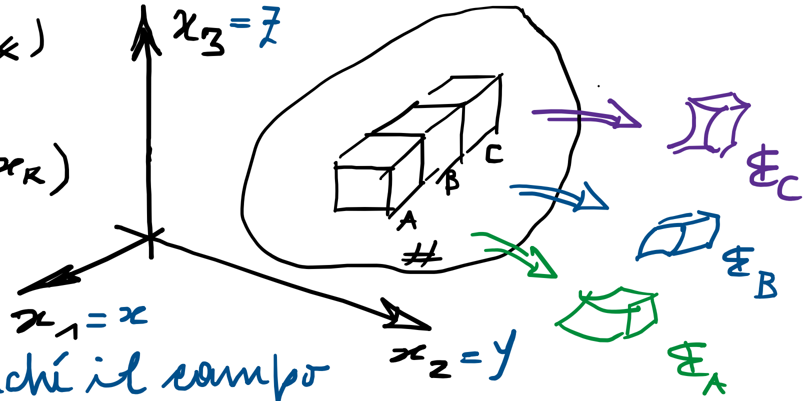
$i \neq j$ ϑ_{ij} rotazione rigida infinitesima delle fibre i,j (rispetto all'asse k)

$$-2\dot{\omega}_k = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{s}_{i,j} - \dot{s}_{j,i} \quad (2\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v})$$

$\dot{\boldsymbol{\omega}}$: velocità angolare

$\wedge$: prodotto vettoriale

Equazioni di congruenza interne (o di compatibilità)



$\mathbb{E}(x) \Updownarrow \varepsilon_{ij}(x_k)$

- CN di congruenza per il campo $\varepsilon_{ij}(x_k)$:

Scarto Residuo

$$3\begin{cases} S_{zz} = R_z = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} = 0 \quad (*) \\ S_{xx} = R_x = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\ S_{yy} = R_y = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0 \end{cases}$$

$$3\begin{cases} S_{yz} = U_x = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} = 0 \\ S_{zx} = U_y = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \\ S_{xy} = U_z = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} = 0 \end{cases}$$

Affinché il campo di deformazione risulti compatibile ("riassemblaggio dei dadini deformati") la variazione spaziale di $\mathbb{E}(x)$ deve soddisfare certe relazioni

Se $\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$:

$$(*) \quad \cancel{s_x}_{,xyy} + \cancel{s_y}_{,yxx} - \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{s_{x,y}} + \cancel{s_{y,x}}\right)_{,xy} = 0$$

per il Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni (se $\mathbb{E}$ è congruente, allora $\Rightarrow$ $=0$)

- Scrittura compatta (de Saint Venant) ~ 1884

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}} \quad 3^4 = 81 \Rightarrow 6 \text{ distinte}$$

(equivalenti a 3 relazioni indipendenti, in quanto valgono le identità di Bianchi seguenti)

(rot $= \nabla\wedge$) $\mathbb{S} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = 0$; $\mathbb{R} = \mathbb{U} = 0$

Identità di Bianchi (3 relazioni): [per Th. di Schwarz]

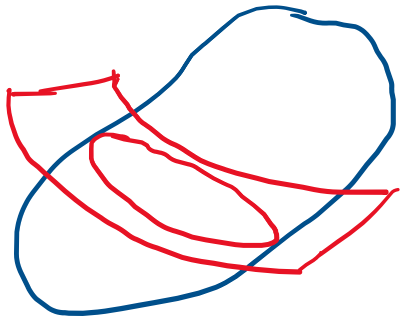
anche per campo $\mathcal{E}(x)$ non congruente

$$\begin{cases} R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} \equiv 0 \\ U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} \equiv 0 \\ U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} \equiv 0 \end{cases} \iff \nabla \cdot S = \operatorname{div} S \equiv 0 \,, \quad S_{ij,i} \equiv 0$$

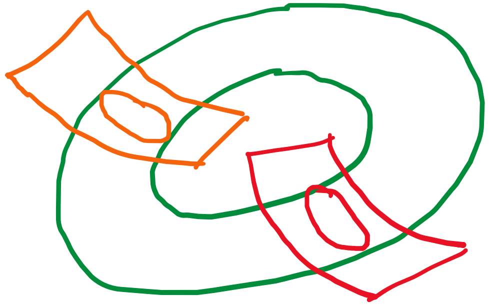
Sono CS di congruenza? (integrando $\mathcal{E}$ si ottiene un campo s compatibile?)

$\Rightarrow \Delta s \neq 0$

Occorre in più una condizione di compatibilità alla interfaccia che giunga ad imporre $\Delta s = 0$



Sì, per corpi monoconnessi (si scindono in due parti con un unico taglio)



No, per corpi pluriconnessi (es. biconnesso)

(per ogni interfaccia aggiuntiva, rispetto a corpo monoconnesso)