Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

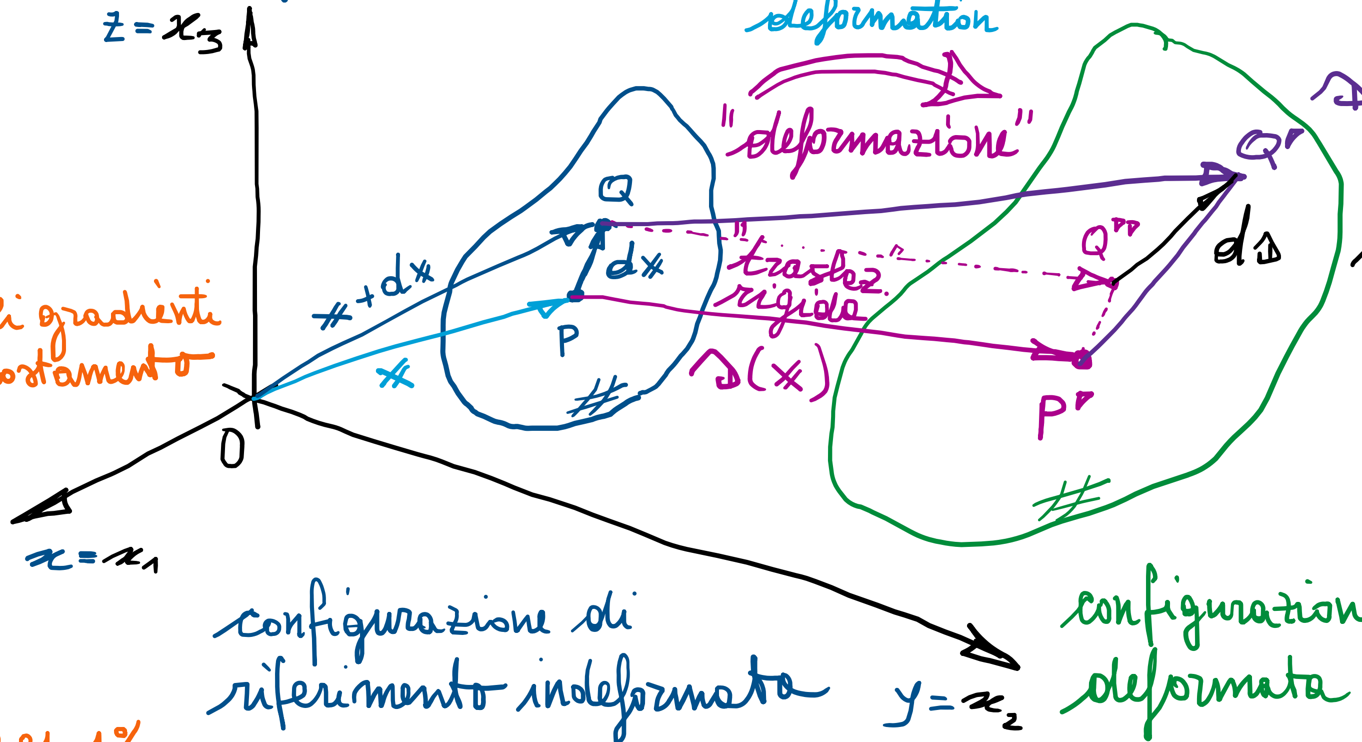
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Cinematica dei continui : (definizione di deformazione ; equazioni di congruenza interna)

– Misura (intensiva) della deformazione
(in regime di piccole deformazioni) → piccoli gradienti di spostamento



$\underline{s}(\underline{x}+d\underline{x}) = \underline{s}(\underline{x}) + d\underline{s}$

$$d\underline{s} = \underline{s}(\underline{x}+d\underline{x}) - \underline{s}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \cdot d\underline{x} + \dots = \underbrace{\nabla \underline{s}(\underline{x})}_{\underline{\underline{\Psi}}} \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot d\underline{x}$$

$\underline{s}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$

vettore spostamento $s_i(x_k)$ — tensore di deformazione $\varepsilon_{ij}(x_k)$

$|\Psi_{ij}| << 1 \sim 0{,}001 = 1‰ ; \ 0.01 = 1\%$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial \underline{x}}$ gradiente ; $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = ,_i$ derivata parziale

$\underline{\underline{\Psi}}(\underline{x}) = \nabla \underline{s}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$ tensore gradiente di spostamento (2° ordine) (deve contenere la deformazione pura : "strain")

$= \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\vartheta}}$ decomposizione additiva di $\underline{\underline{\Psi}}$ $\left(\Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j} \text{ , 9 componenti} \right)$

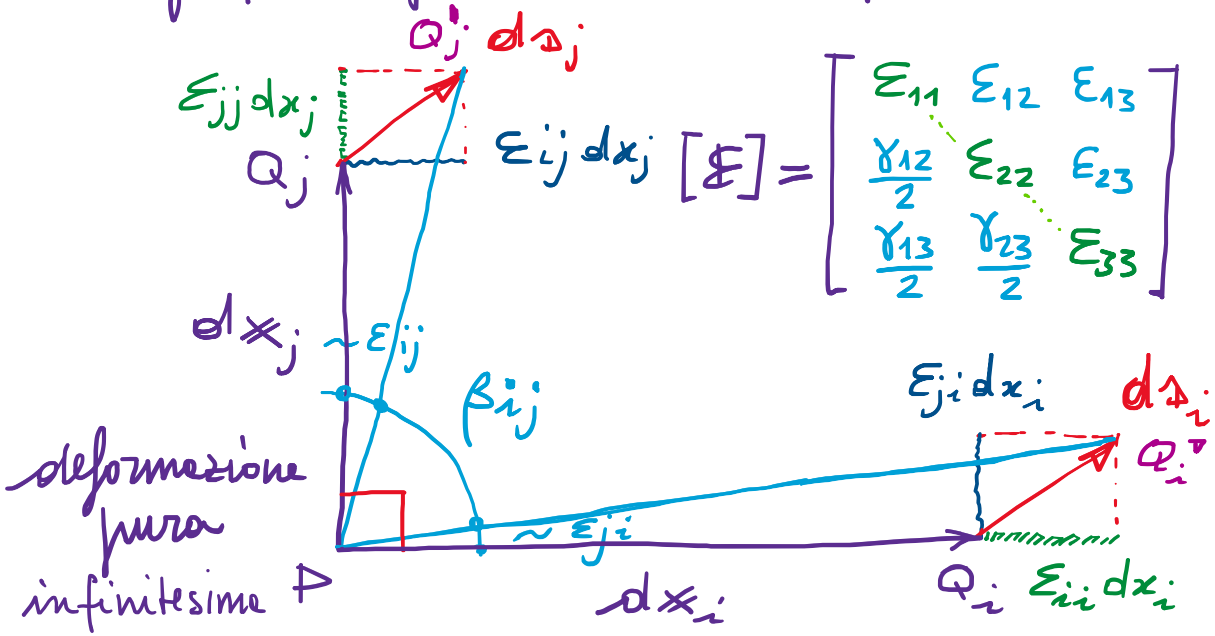
con :

$\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\vartheta}}$

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\Psi}} + \underline{\underline{\Psi}}^T\right)$ parte simmetrica $\left[\underline{\underline{\varepsilon}}^T = \underline{\underline{\varepsilon}} ; \ \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{i,j} + s_{j,i}\right) \right]$ "strain" deformazione pura

$\underline{\underline{\vartheta}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\Psi}} - \underline{\underline{\Psi}}^T\right)$ parte emisimmetrica $\left[\underline{\underline{\vartheta}}^T = -\underline{\underline{\vartheta}} ; \ \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} = -\frac{1}{2}\left(s_{i,j} - s_{j,i}\right) \right]$ rotazione rigida infinitesime

- Significato fisico di $\mathbb{E}$ (componenti ε_{ij}): $\Psi = \mathbb{E} \to ds = \Psi \cdot dx = \mathbb{E} \cdot dx \leftrightarrow ds_i = \varepsilon_{ij}\, dx_j$

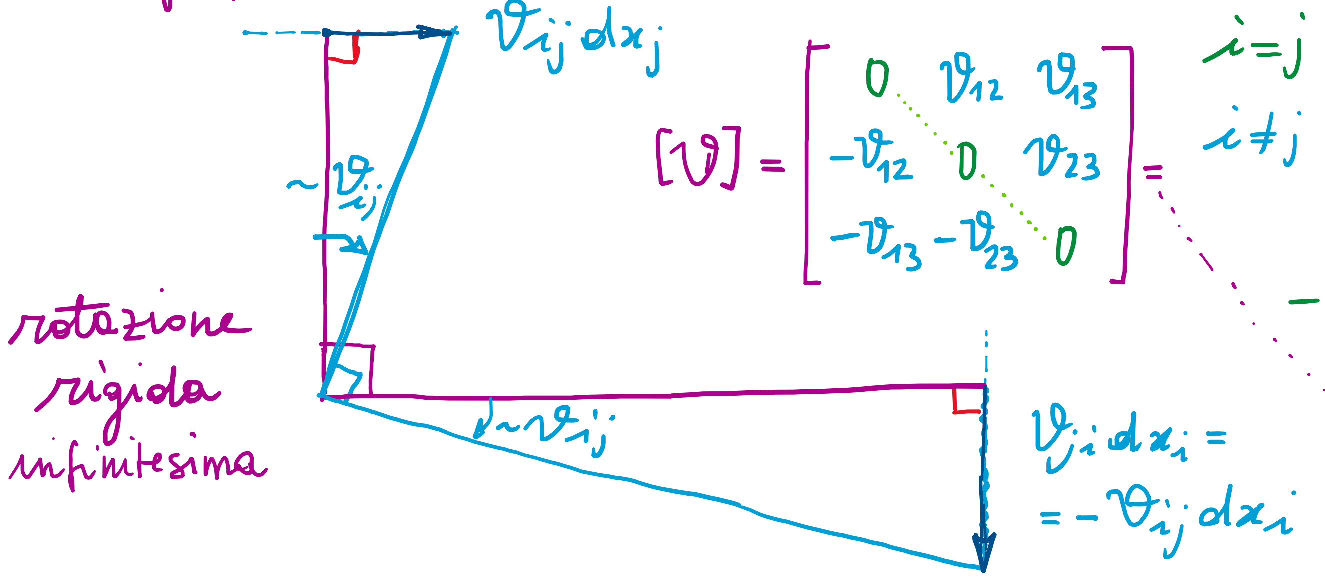


$$[\mathbb{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$i=j$ ε_{ii} = allungamento specifico nella direzione i (vedi $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$)
$= s_{i,i}$

$i \neq j$ $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij}$
scorrimento angolare tra fibre i e j
deformazione tagliante

- Significato fisico di ϑ (componenti ϑ_{ij}): $\Psi = \vartheta$ $(\vartheta^T = -\vartheta\,;\ \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij})$ $[\vartheta_{ii} \equiv 0]$



$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=j$ $\vartheta_{ii} \equiv 0$

$i \neq j$ ϑ_{ij} rotazione rigida infinitesima delle fibre i,j (rispetto all'asse k)

$$-2\dot{\omega}_k = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{s}_{i,j} - \dot{s}_{j,i} \quad (2\dot{\omega} = \mathrm{rot}\, \underset{\dot{s}}{v} = \nabla \wedge v)$$

velocità angolare

prodotto vettoriale

Equazioni di congruenza interne (o di compatibilità)

- CN di congruenza per il campo $\varepsilon_{ij}(x_k)$:

$(i \;\; j \;\; k)$

Scarto Residuo

$$
3\begin{cases}
S_{zz}=R_z=\varepsilon_{xx,yy}+\varepsilon_{yy,xx}-\varepsilon_{xy,xy}-\varepsilon_{xy,xy}=0 \quad (*)\\
S_{xx}=R_x=\varepsilon_{yy,zz}+\varepsilon_{zz,yy}-2\varepsilon_{yz,yz}=0\\
S_{yy}=R_y=\varepsilon_{zz,xx}+\varepsilon_{xx,zz}-2\varepsilon_{zx,zx}=0
\end{cases}
$$

$$
3\begin{cases}
S_{yz}=U_x=-\varepsilon_{xx,yz}-\varepsilon_{yz,xx}+\varepsilon_{xy,xz}+\varepsilon_{xz,xy}=0\\
S_{zx}=U_y=-\varepsilon_{yy,zx}-\varepsilon_{zx,yy}+\varepsilon_{yz,yx}+\varepsilon_{yx,yz}=0\\
S_{xy}=U_z=-\varepsilon_{zz,xy}-\varepsilon_{xy,zz}+\varepsilon_{zx,zy}+\varepsilon_{zy,zx}=0
\end{cases}
$$

- Scrittura compatta (de Saint Venant) ~ 1884

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}=\varepsilon_{ik,jl}+\varepsilon_{il,jk}} \qquad 3^4=81 \Rightarrow 6 \text{ distinte}$$

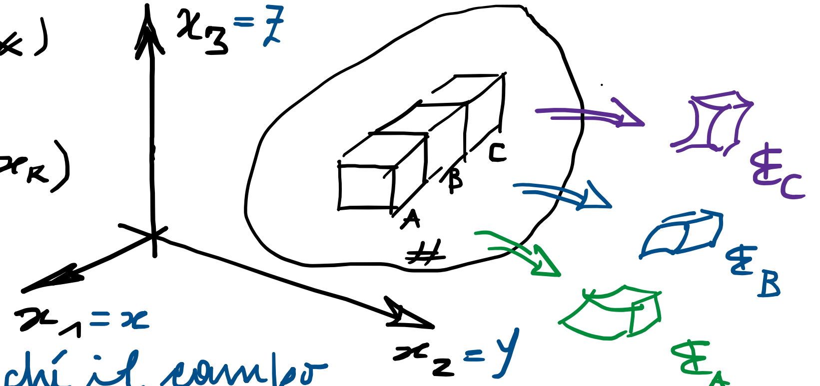
(equivalenti a 3 relazioni indipendenti, in quanto valgono le identità di Bianchi seguenti)

(rot $=\nabla\wedge$) $\mathbb{S}=\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbb{0}$; $\mathbb{R}=\mathbb{U}=\mathbb{0}$

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$

$\Updownarrow$

$\varepsilon_{ij}(x_k)$



Affinché il campo di deformazione risulti compatibile ("riassemblaggio dei dadini deformati") la variazione spaziale di $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ deve soddisfare certe relazioni

Se $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{s}+\nabla\mathbf{s}^T) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(s_{i,j}+s_{j,i})$:

$(*)\ \cancel{s_{x,xyy}}+\cancel{s_{y,yxx}}-\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{s_{x,y}}+\cancel{s_{y,x}})_{,xy}=0$

per il Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni $\Rightarrow$ (se $\boldsymbol{\varepsilon}$ è congruente, allora $=0$)

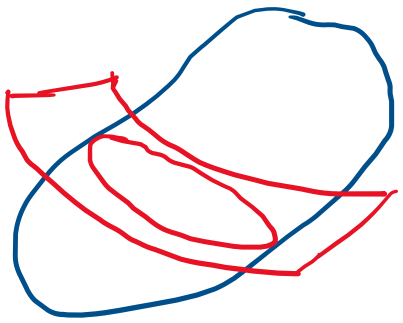
Identità di Bianchi (3 relazioni): [per Th. di Schwarz]

anche per campo $\varepsilon(x)$ non congruente

$$\begin{cases} R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} \equiv 0 \\ U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} \equiv 0 \\ U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} \equiv 0 \end{cases} \iff \nabla \cdot \mathbb{S} = \operatorname{div} \mathbb{S} \equiv \mathbf{0}, \quad S_{ij,i} \equiv 0$$

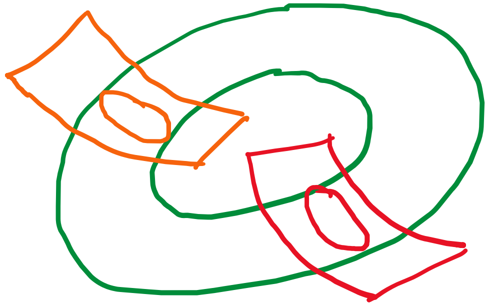
Sono CS di congruenza?

(integrando ε si ottiene un campo s compatibile?)



Sì, per corpi monoconnessi

(si scindono in due parti con un unico taglio)



No, per corpi pluriconnessi

(es. biconnesso)

$\Delta s \neq \mathbf{0}$

Occorre in più una condizione di compatibilità alla interfaccia che giunga ad imporre $\Delta s = \mathbf{0}$

(per ogni interfaccia aggiuntiva, rispetto a corpo monoconnesso)