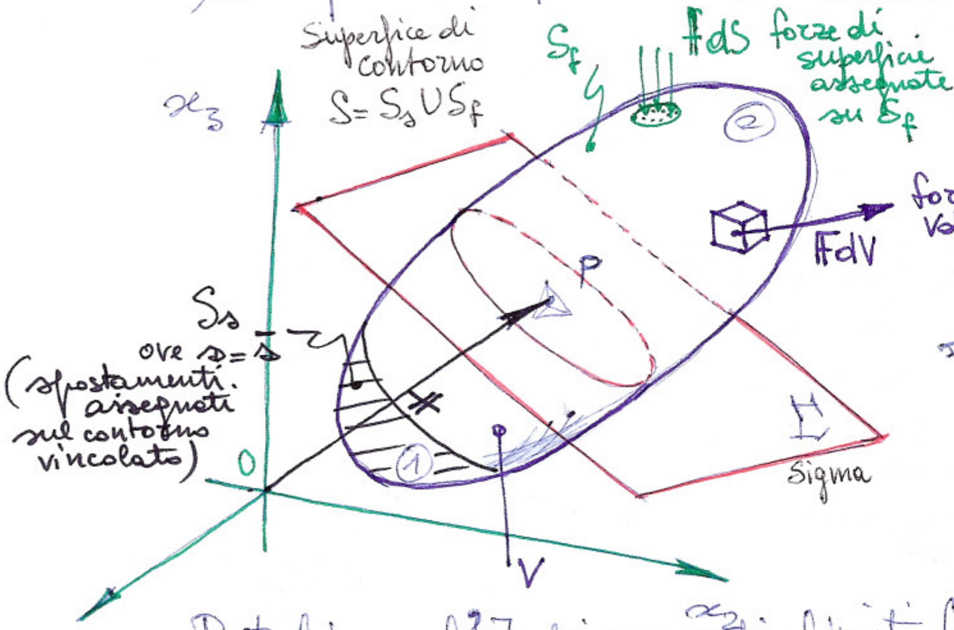
Il continuo di CAUCHY — STATICA DEI MEZZI CONTINUI —

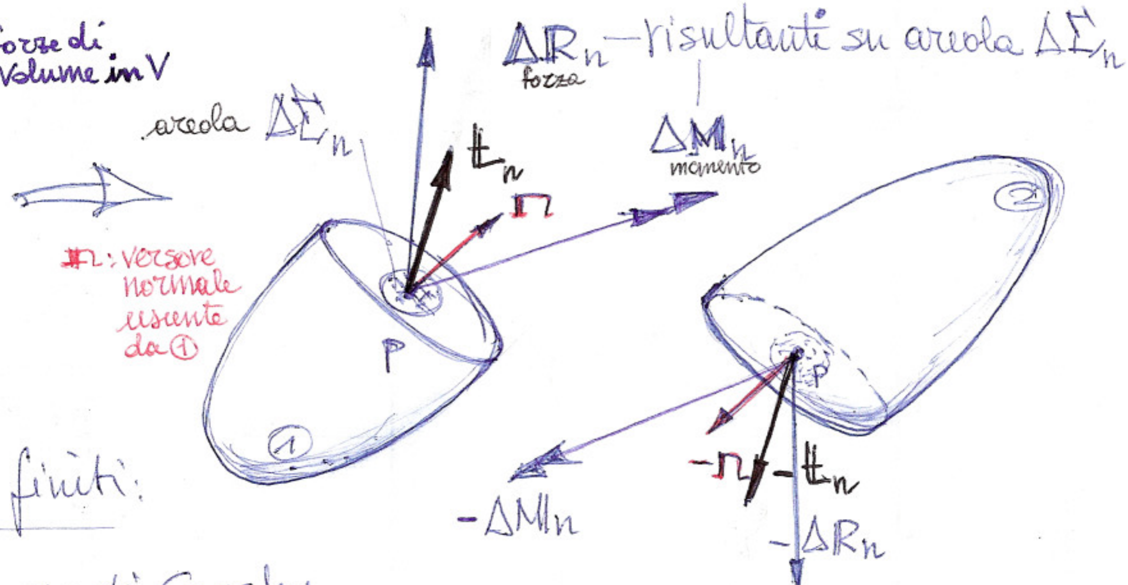
erizzi@unibg.it

- Vogliamo generalizzare in un contesto tridimensionale il concetto di sforzo introdotto nella prova monoassiale di trazione.

- Consideriamo un solido 3D senza vuoti interni, lacerazioni, difetti, cricche, ...
"tutto pieno di punti" $\Rightarrow$ continuo (di superficie di contorno S e volume interno V)

Tagliamo il solido con una superficie Σ per P con normale locale $\mathbf{n}$ in P (uscente dal solido)





- Postuliamo l'$\exists$ dei seguenti limiti finiti:

$$\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_n}{\Delta \Sigma_n} = \mathbf{t}_n$$

vettore sforzo di Cauchy o tensione : è $\frac{\text{forza}}{\text{area}} \Rightarrow [\mathbf{t}_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$

$$\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta \Sigma_n} = \mathbf{0}$$

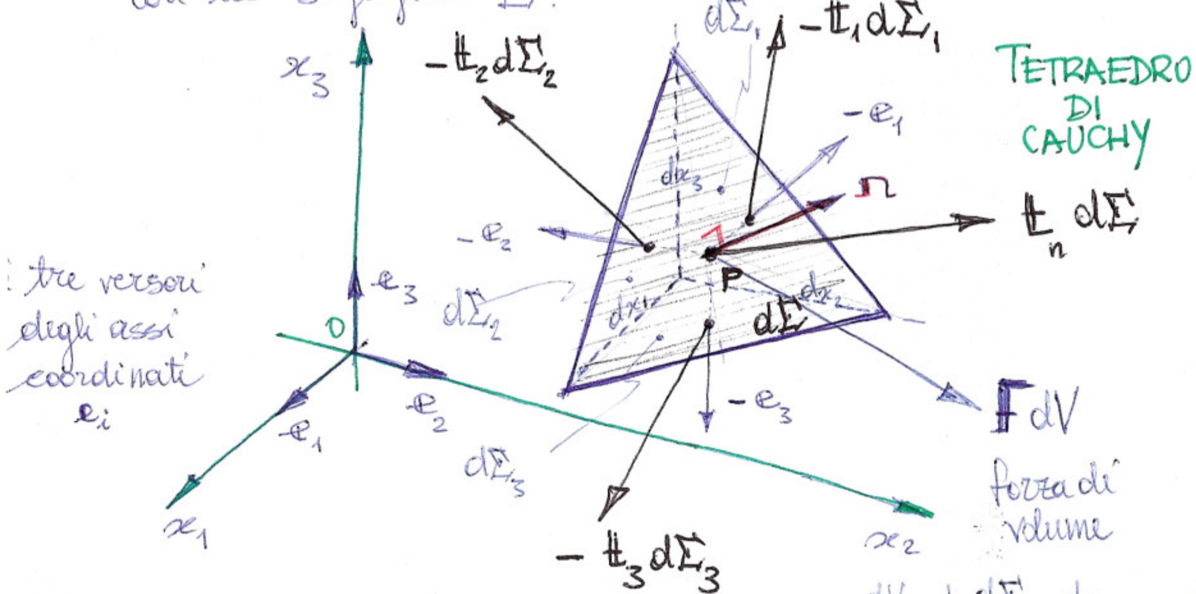
(continuo non polare di Cauchy)

N.B.: le grandezze vettoriali (o tensoriali) vengono indicate con simboli in grassetto

Si noti bene che:

- $\mathbb{t}_n$ non è diretto come $\Delta \mathbb{R}_n$ e, in generale, non è // ad $\mathbb{n}$.
  Se $\mathbb{t}_n$ è // ad $\mathbb{n}$ si tratta di solo sforzo normale in P sulla faccia di normale $\mathbb{n}$
- $\mathbb{t}_n(\mathbf{x})$ caratterizza lo stato di sforzo in P su faccia di normale uscente $\mathbb{n}$.
  è targato $\mathbb{n}$!
- $\mathbb{t}_{-n}(\mathbf{x}) = -\mathbb{t}_n(\mathbf{x})$ (come mostrato dal disegno precedente)

Relazione di Cauchy (~1822): è sufficiente conoscere lo sforzo su tre giaciture ortogonali per conoscere la tensione su qualsiasi giacitura di normale $\mathbb{n}$.
Ritagliamo un elemento tetraedrico cosimo nell'intorno di P dalla faccia che avevamo prodotto con la superficie Σ.



$dV = \frac{1}{3} d\Sigma_{(i)} dx_{(i)} = \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{6}$

Superfici "ombra" di quelle inclinate:

$$d\Sigma_i = n_i \, d\Sigma$$

prodotto scalare

scalari $n_i = \mathbb{n} \cdot e_i$

coseni direttori della normale $\mathbb{n}$ (vettore)

$$\mathbb{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Sono rappresentate tutte le forze agenti sul tetraedro

- **Equilibrio alla traslazione:**

infinitesimo di ordine dx_i^3, superiore al 2° (sparisce rigorosamente in un processo al limite)

$$\mathbf{t}_n\, d\Sigma - \mathbf{t}_1\, d\Sigma_1 - \mathbf{t}_2\, d\Sigma_2 - \mathbf{t}_3\, d\Sigma_3 + \overset{0}{\mathbf{F}\, dV} = \mathbf{0} \qquad \forall\, d\Sigma$$

$$d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma$$

sommatoria spesso sottointesa sugli indici i ripetuti

Relazione di Cauchy

$$\boxed{\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbf{t}_i\, n_i}$$

Noti i 3 $\mathbf{t}_i$ e assegnata la normale $\mathbf{n}$, è noto $\mathbf{t}_n$

N.B.: $\mathbf{t}_i$ vettori, n_i scalari !

equazione vettoriale
↓ componenti

t_{ij}: componente j di $\mathbf{t}_i$

$$\begin{cases} t_{n1} = t_{11} n_1 + t_{21} n_2 + t_{31} n_3 \\ t_{n2} = t_{12} n_1 + t_{22} n_2 + t_{32} n_3 \\ t_{n3} = t_{13} n_1 + t_{23} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

- Si evidenzia di fatto una trasformazione lineare dal vettore $\mathbf{n}$ al vettore $\mathbf{t}_n$ di carattere tensoriale, che possiamo scrivere:

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}^{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

trasposto

indica la contrazione su un indice (somme di prodotti)

somma sottointesa sull'indice i ripetuto

$$\left(t_{nj} = n_i\, \sigma_{ij} \right)$$

ove $\sigma_{ij} = t_{ij}$ sono le componenti cartesiane di $\boldsymbol{\sigma}$

Tensore sforzo di Cauchy (del 2° ordine)

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

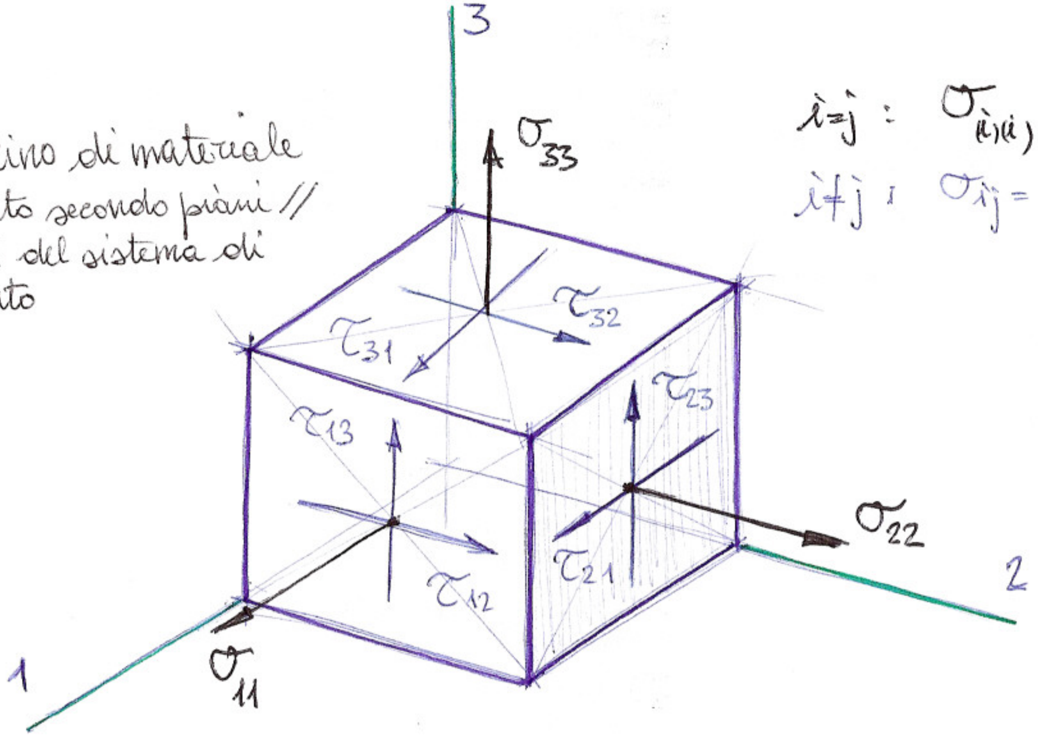
matrice che raccoglie le componenti cartesiane di $\boldsymbol{\sigma}$

N.B.: un vettore è un tensore del I ordine

Tensore:
- ente fisico-matematico che rappresenta particolari grandezze fisiche
- rappresenta proprietà intrinseche (indip. dal sistema di riferimento)
- componenti dip. dal sistema ma variano con leggi particolari al variare del sistema di riferimento.

Significato fisico delle componenti di σ : $\sigma_{ij} = t_{ij}$

dadino di materiale ritagliato secondo piani // ai piani del sistema di riferimento



$i=j$: $\sigma_{(i)(i)}$ sforzi normali

$i \neq j$: $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ sforzi taglianti o di taglio

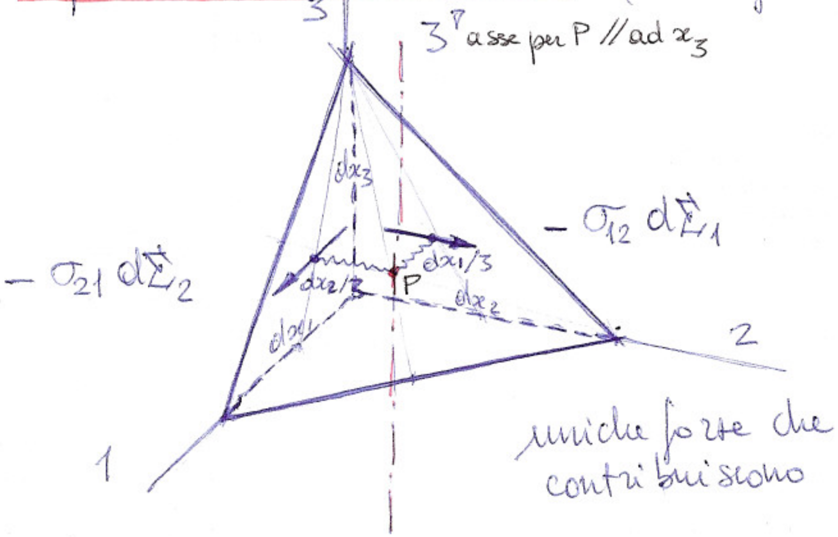
notazione ingegneristica

Equilibrio alla rotazione (es. rispetto a 3^P) :

$$-\sigma_{21}\, d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3} + \sigma_{12}\, d\Sigma_1 \frac{dx_1}{3} = 0$$

$$-\sigma_{21} \frac{dx_1 dx_3}{2} \frac{dx_2}{3} + \sigma_{12} \frac{dx_2 dx_3}{2} \frac{dx_1}{3} = 0$$

$$-\sigma_{21}\, dV + \sigma_{12}\, dV = 0 \qquad \forall\, dV \implies \boxed{\sigma_{21} = \sigma_{12}}$$



uniche forze che contribuiscono

Analogamente :

$\boxed{\sigma_{32} = \sigma_{23}}$

$\boxed{\sigma_{31} = \sigma_{13}}$

Tensore sforzo simmetrico ($\sigma^T = \sigma$; $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \text{simm.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

è definito da 6 componenti:
(3 sforzi normali e 3 sforzi taglianti)

erizzi@unibg.it