Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

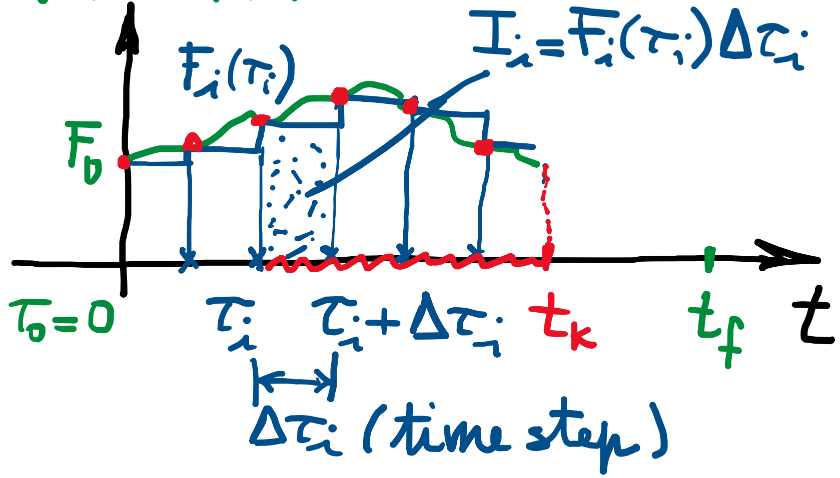
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 08

Risposta a forzante generica $\Rightarrow$ Integrale di Duhamel

$F(t) = F\,f(t)$



"discretizzazione" dell'asse dei t

$$F(t_k) \simeq \sum_{0\,i}^{K-1} \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\; \delta(t_k,\tau_i) \quad \text{(impulso unitario in } \tau_i\text{)}$$

δ: f.ne delta di Dirac

Sovrapposizione di un numero finito (discreto) di impulsi I_i ricevuti dal sistema negli istanti τ_i:

$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$ $\qquad \underbrace{\delta(t-\tau)}$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t,\tau)\,d\tau \quad \text{(proprietà tipica della } \delta\text{)}$$

INPUT $\downarrow \delta(t,\tau)$

$\boxed{\text{SISTEMA}}$

OUTPUT $\downarrow h(t,\tau)$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t}$$

$\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2} \simeq \omega_1,\ |\zeta| \ll 1$

f.ne risposta ad impulso unitario

$$u_0(t_k) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i}\, h(t_k,\tau_i)$$

$\downarrow \lim_{\Delta\tau_i \to 0}$ $\qquad \underbrace{h(t-\tau)}$

("convoglia" in t gli effetti dinamici di impulsi ricevuti in τ) $= \int_0^t F(\tau)\, h(t,\tau)\, d\tau$

Integrale di "convoluzione"

Integrale di Duhamel:

$$u_0(t)=\int_0^t F(\tau)\underbrace{\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\,d\tau$$

τ variabile di integraz.

t istante di lettura della risposta

$\omega_d=\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$

- Fornisce una rappresentazione formale analitica esatta della risposta.
- Raramente determinabile analiticamente:
  - in genere $F(t)$ non è nota in forma analitica, bensì "campionata" ad istanti di tempo discreti;
  - qualora lo fosse, per espressioni generiche della forzante, non soluz. analitica in forma chiusa possibile.
- In genere valutabile mediante integrazione numerica in forma approssimata.

$$F(t)=\int_0^t F(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\delta(t)} \boxed{\text{SISTEMA}} \xrightarrow{h(t)} u_0(t)=\int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Scritture alternative

$\frac{k}{m} = \omega_1^2$, $\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

- $F(t) = \underbrace{F}_{\substack{\text{ampiezza}\\ [F]}}\ \underbrace{f(t)}_{\substack{\text{adimens.}\\ [1]}}$: $u_0(t) = \overbrace{\frac{F}{k}}^{u_{st}} \frac{k}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$

$= N(t)\, u_{st}$; $N(t) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t f(\tau) \frac{e^{\zeta\omega_1\tau}}{e^{\zeta\omega_1 t}} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$

per smorz. piccolo $\zeta \ll 1$: $\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 1$, $\omega_d \simeq \omega_1$

fattore di amplificazione dinamica dipendente dal tempo.

- $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1} \underbrace{\frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau}_{V(t)} = \frac{V(t)}{\omega_1}$ (come per risposta armonica)

$V(t)$ "pseudo-velocità" $\Rightarrow$ vedi, poi, "pseudo-spettri"

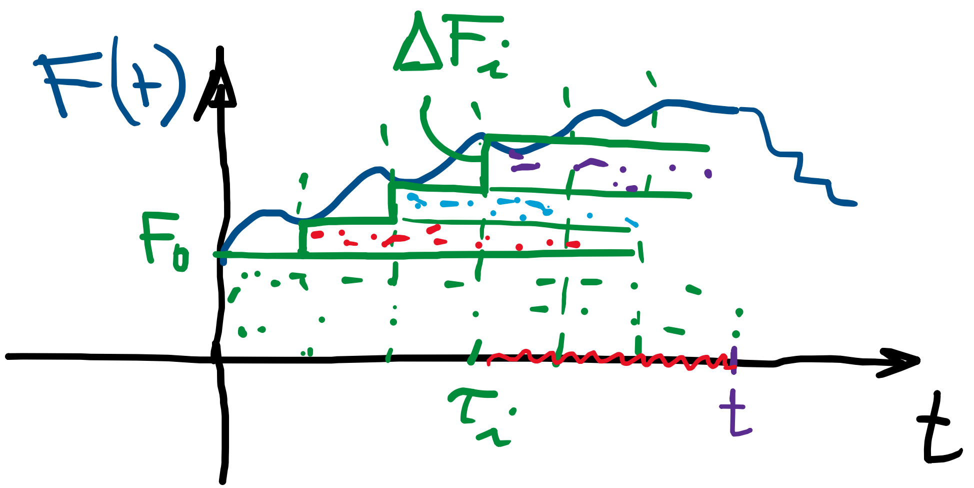
- $\sin\omega_d(t-\tau) = \sin\omega_d t \cos\omega_d\tau - \cos\omega_d t \sin\omega_d\tau \Rightarrow$

$u_0(t) = \underbrace{A(t)}\ \sin\omega_d t - \underbrace{B(t)}\ \cos\omega_d t$

Ampiezze dip.ti dal tempo

$$\begin{cases} A(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t \underbrace{F(\tau) \frac{e^{\zeta\omega_1\tau}}{e^{\zeta\omega_1 t}}}_{y(\tau)} \cos\omega_d\tau\, d\tau \\ B(t) = \quad " \quad \cdots \underbrace{\sin\omega_d\tau}_{z(\tau)} \cdots \end{cases}$$

Visione alternativa:



$F(t) = F_0 + \sum_i \Delta F_i$

Sequenze di forzanti a gradino:

$$u_0(t) = F_0 A(t) + \sum_i \overbrace{\frac{\Delta F_i(\tau_i)}{\Delta \tau_i}}^{\text{rapporto incrementale}} A(t-\tau_i)\,\Delta\tau_i$$

f.ne risposta a gradino unitario

$\lim_{\Delta\tau_i \to 0}$

$$= F_0 A(t) + \int_0^t \dot F(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau$$

$dA = -\dot A\, d\tau$

Integrando per parti:

$$u_0(t) = \cancel{F_0 A(t)} + \underbrace{F(\tau) A(t-\tau)\Big|_0^t}_{F(t)\underbrace{A(t-t)}_{A_0=0} - \cancel{F_0 A(t)}} + \int_0^t F(\tau)\, \underbrace{\dot A(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$\tau = t$ $\quad\quad$ $\tau = 0$

cvd...

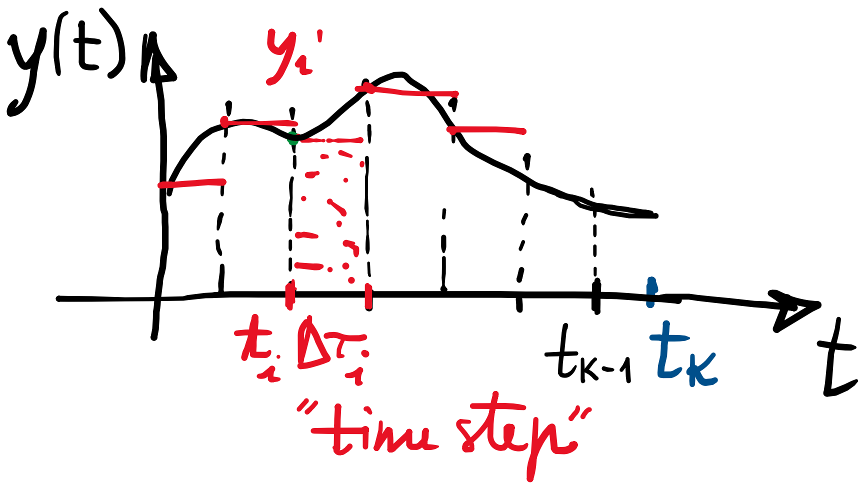
$\dot{(FA)} = \dot F A + F \dot A$ regola di derivazione del prodotto

$\Rightarrow \dot F A = \dot{(FA)} - F\dot A$

Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel $\Rightarrow \int_0^t y(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow$ vedi calcolo numerico.

- **Regola dei rettangoli:**



$$I_{nt} \cong \sum_{i=0}^{K-1} y_i\,\Delta\tau_i$$

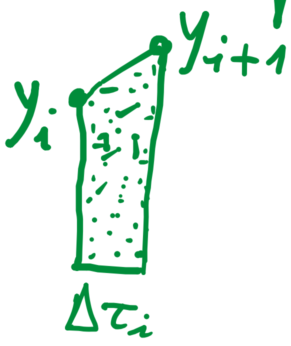
(f.ne costante nel passo temporale)

$\Delta\tau_i = \Delta\tau$ passo costante

$$= \Delta\tau\left(y_0 + y_1 + \dots + y_{K-1}\right)$$

- **Regola dei trapezi:**

$$I \approx \sum_{i=0}^{K-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\,\Delta\tau_i$$



(f.ne lineare nel passo)

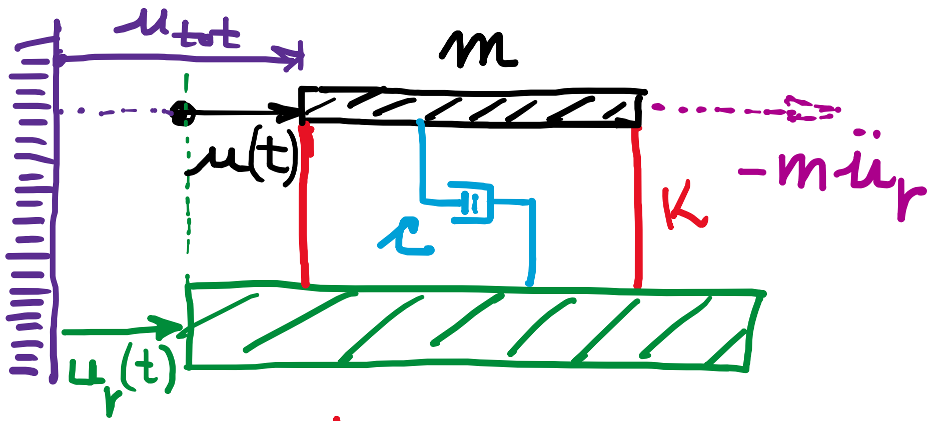
$$= \frac{\Delta\tau}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{K-1} + y_K\right)$$

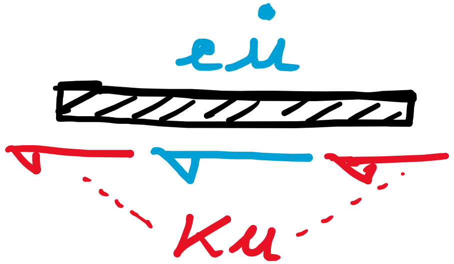
$$= \Delta\tau\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{K-1} + \frac{y_K}{2}\right) \qquad \frac{y_0 + y_K}{2}$$

- **Regola di Simpson, etc.**

(f.ne parabolica nel passo)

Risposta al moto del riferimento (vedi azione sismica) $u_{tot} = u_r + u$



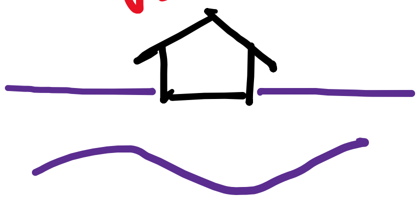


$\longrightarrow F_I = -m\ddot{u}_{tot}$

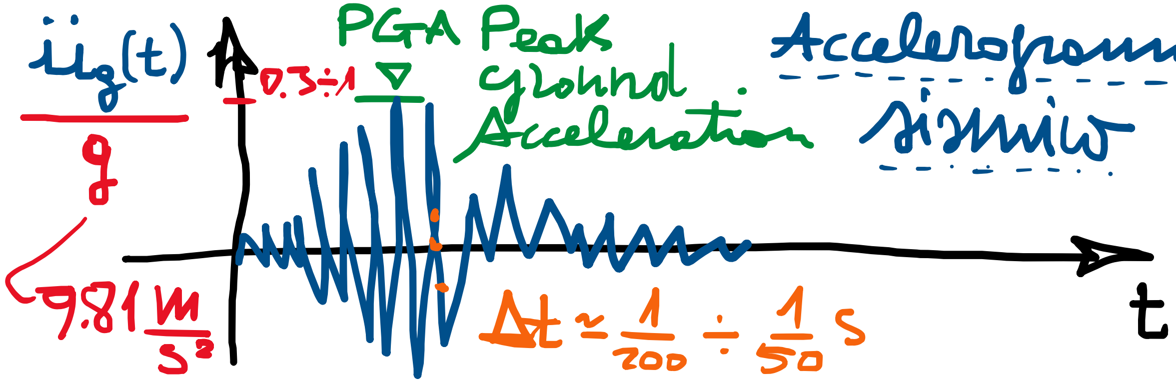
$= -m(\ddot{u}_r + \ddot{u})$

$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = -m\ddot{u}_r(t) \longleftarrow$ Forzante indotta per inerzia quale effetto di trascinamento

{ es. moto del terreno per effetto del terremoto $\ddot{u}_g(t)$
└ ground



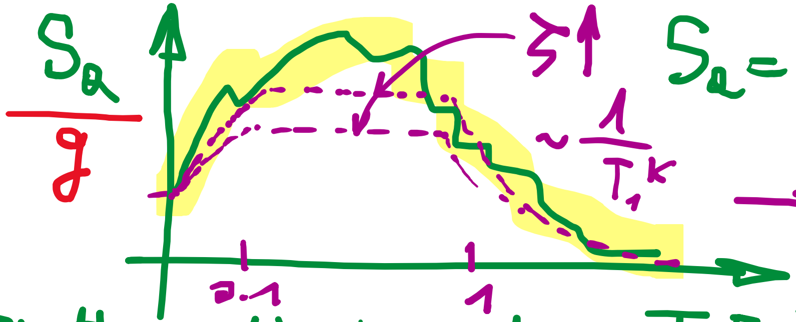
estensione limitata della strutt. di massa contenuta, in modo da non (sisma) – creare interazioni suolo-struttura



PGA Peak Ground Acceleration

Accelerogramma sismico

$\Rightarrow$



$S_a = \max_t \{\ddot{u}_t\}$

$\rightarrow$ Spettro di progetto

Spettro di risposta T_1 [s]

Risposta sismica: $\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u = (-)\,\ddot{u}_g(t) \rightarrow u(t)$ per $\int$ di Duhamel

Spettri di risposta (BIOT, 1932): $\rightarrow$ semplificaz. (singolo spettro) $\rightarrow$ **Pseudo-spettri:**

displacement $S_d =$
velocity $S_v = \max\limits_t \begin{cases} u(t; T_1, \zeta) \\ \dot{u}(t; T_1, \zeta) \\ \ddot{u}_t(t; T_1, \zeta) \end{cases}$
acceleration $S_a =$

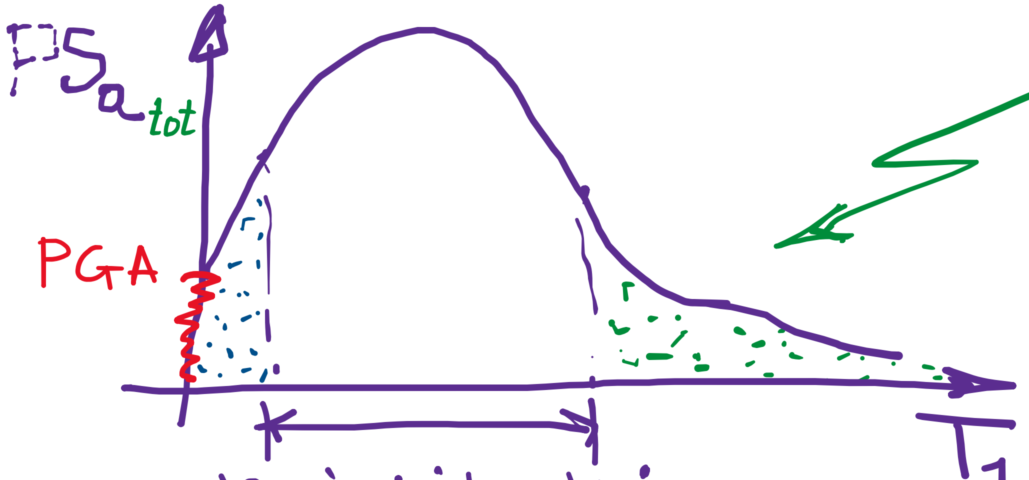
totale

$S_d \rightarrow PS_v = \omega_1 S_d \simeq S_v$

$PS_a = \omega_1 PS_v = \omega_1^2 S_d \simeq S_a$

è V_{max} (come per risposta armonica)

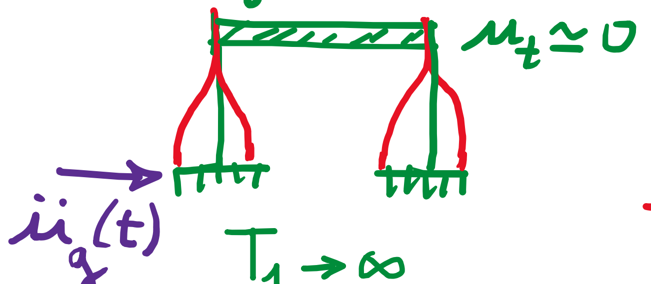
$S_d = \frac{1}{\omega_1} PS_v$: vedi scrittura Duhamel $u_0(t) = \frac{1}{\omega_1} V(t)$ ← pseudo-velocità



periodi propri con amplif. dell'az. sismica

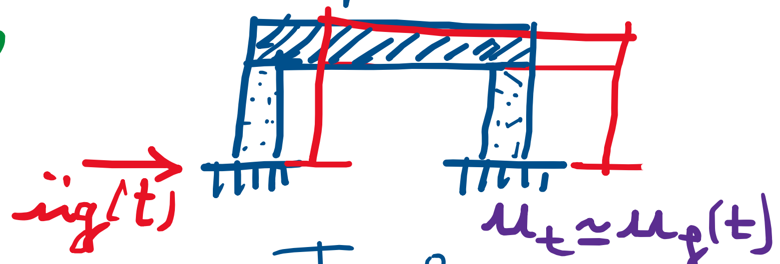
Isolamento sismico (strutt. flessibile) vs. Struttura rigida

T_1 grandi



$T_1 \rightarrow \infty$
$(\omega_1 \rightarrow 0)$

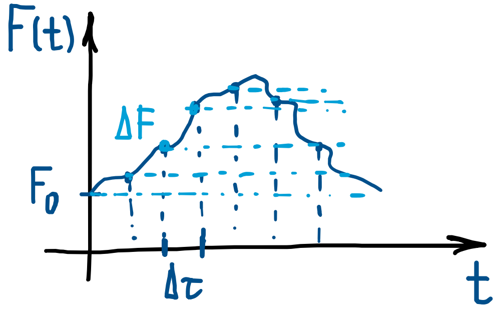
T_1 piccoli



$T_1 \rightarrow 0$
$(\omega_1 \rightarrow \infty)$ $(u \simeq 0)$

Concetti fondamentali:

- **Risposta dinamica del sistema a forzante generica**



$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \quad \text{per impulsi}$$
$$= F_0 + \int_0^t \dot F(\tau)\,d\tau \quad \text{per gradini}$$

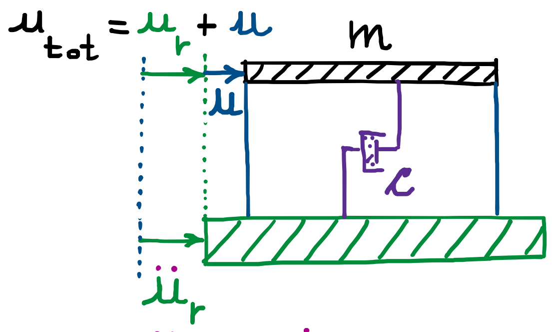
$\longrightarrow$ SIST. $\longrightarrow$

"integrale di convoluzione o di Duhamel"

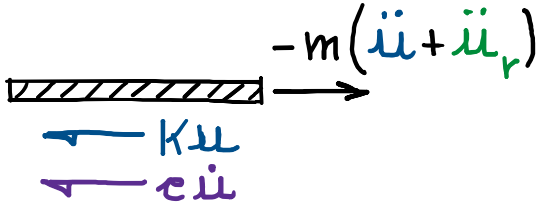
$$u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$
$$= F_0\,A(t) + \int_0^t \dot F(\tau)\,A(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \dot A(t) = \frac{1}{m\omega_d}\,e^{-\zeta\omega_1 t}\sin\omega_d t$$

- **Risposta al moto del riferimento (del supporto)**



es. $\ddot u_g$ (azione sismica)
└ "ground" (terreno)



"effetto di trascinamento"

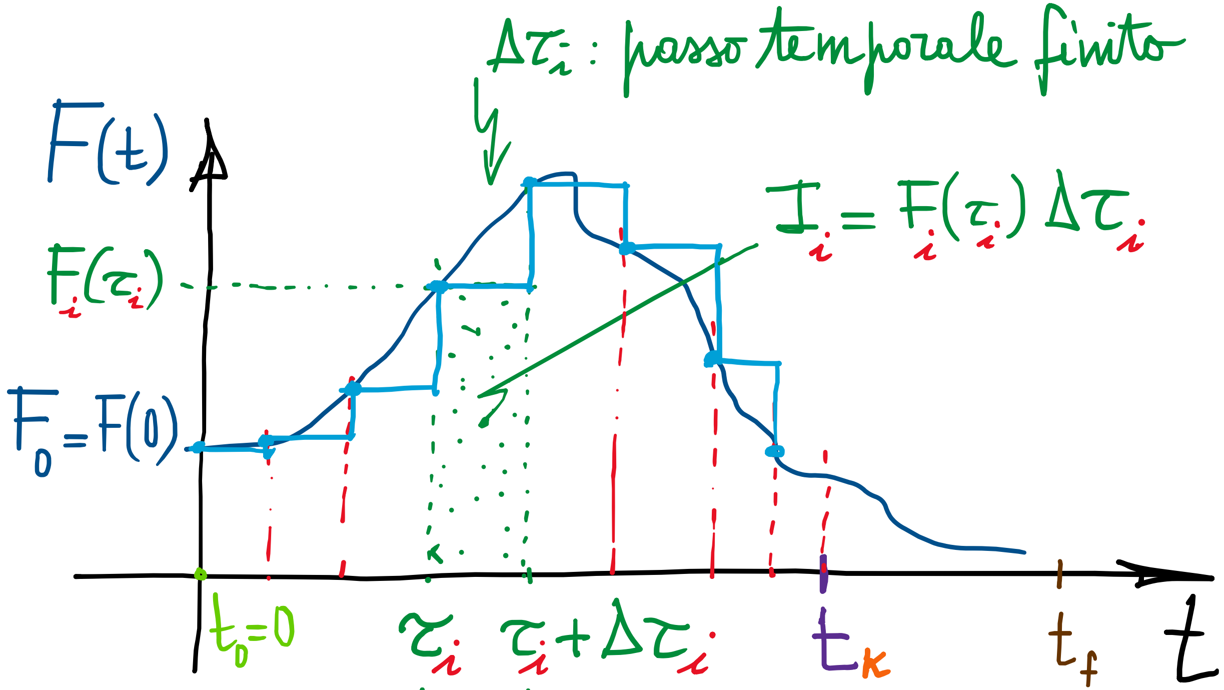
$$\cancel{m}\,\ddot u + \frac{c}{m}\dot u + \frac{K}{m}u = -\cancel{m}\,\ddot u_r(t)$$
$$\ddot u + 2\zeta\omega_1\dot u + \omega_1^2 u = -\ddot u_r(t)$$

$$u_0(t) = \frac{1}{\omega_1}\underbrace{\left[(-)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t \ddot u_g(\tau)\,e^{-\zeta\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)\,d\tau\right]}$$
$$= \frac{1}{\omega_1}\,V(t) \quad \text{"pseudo-velocità"} \quad V^{max} = PS_v \simeq S_v \ \text{"spettro"}$$

• Risposta dinamica del sistema a forzante generica

$\delta(t,\tau) \rightarrow \boxed{\text{SIST.}} \rightarrow h(t,\tau)$

$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_1 t} \sin\omega_d t$



"Concept":
Sovrapposizione di impulsi in τ_i ricevuti sino al tempo t_k

$$F(t_k) \simeq \sum_i \underbrace{F_i(\tau_i)\Delta\tau_i}_{I_i} \; \underbrace{\delta(t_k,\tau_i)}_{\text{Delta di Dirac}}$$

impulso unitario

$\downarrow \lim \Delta\tau_i \to 0$

$$F(t) = \int_0^t F(\tau)\,\delta(t,\tau)\,d\tau$$

τ variabile di integrazione

$$u_0(t_k) \simeq \sum_i F_i(\tau_i)\Delta\tau_i \, h(t_k,\tau_i)$$

f.ne risposta a impulso unitario

$\downarrow \lim \Delta\tau_i \to 0$

"convoluzione" $$u_0(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau$$

Integrale di Duhamel

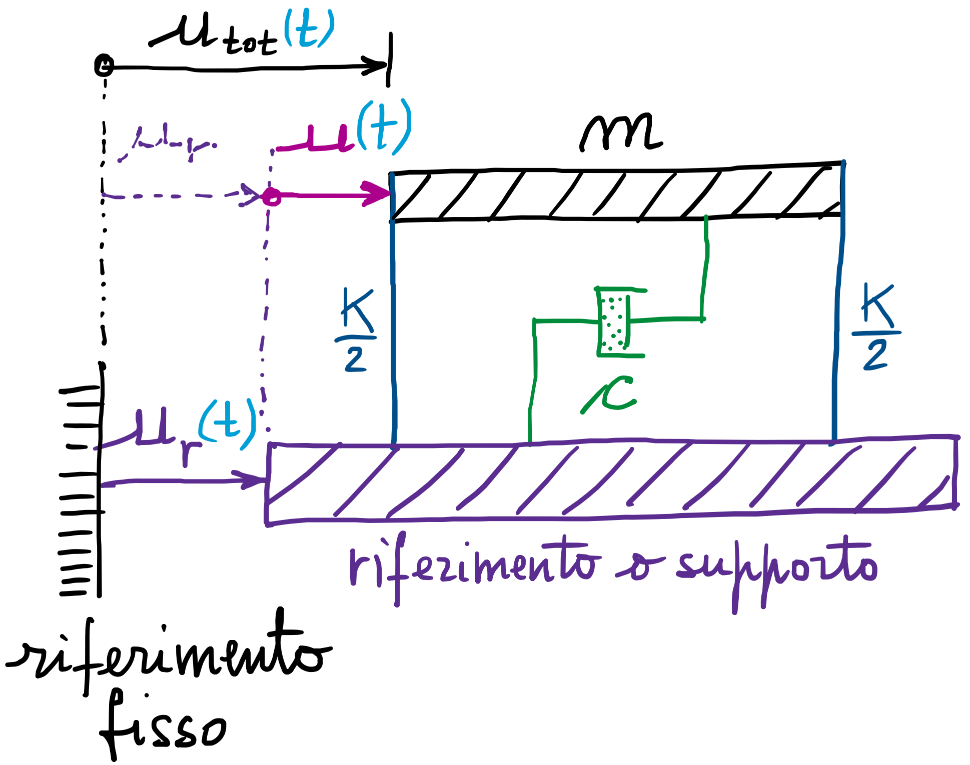
"discretizzazione" dell'asse dei tempi
$t \rightarrow t_i$
τ_i
"campionati" ogni $\Delta\tau_i$

$\Delta\tau_i$
istante di manifestazione dell'impulso
$I_i = F(\tau_i)\,\Delta\tau_i$

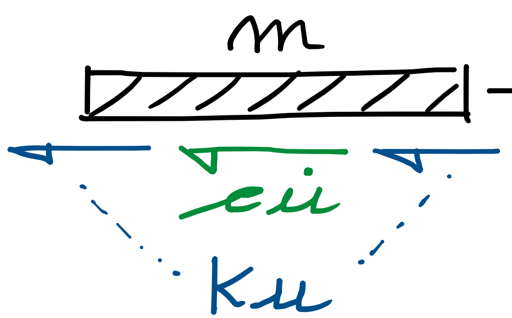
istante di lettura del valore della forzante

- **Risposta al moto del riferimento (del supporto)** $\Rightarrow$ spostamento totale (velocità, accelerazione)

$$\ddot{u}_{tot}(t) = \ddot{u}_r(t) + \ddot{u}(t)$$



"Concept": Effetto di "trascinamento"



$$F_{i_{tot}} = -m\ddot{u}_{tot} = -m\ddot{u}_r + (-m\ddot{u})$$

$$\cancel{m}\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{K}{m}u(t) = \underbrace{(-)\cancel{m}\ddot{u}_r(t)}_{F_{ir}(t)}$$

c: coefficiente di smorzamento

$F_{ir}(t)$ forza d'inerzia legata al moto del supporto

esempio tipico in ing. civile: eccitazione o azione sismica

$$\ddot{u}_r(t) = \ddot{u}_g(t)$$ accelerazione sismica

└ "ground" (terreno)

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u(t) = (-)\ddot{u}_r(t)}$$

ζ: fattore di smorz. $\sim 1\%$, es. 5%

SOMMARIO (Lez. 08)

- Risposta a forzante generica => sequenza di impulsi => Integrale di Duhamel. (di convoluzione)
- Scritture interpretative alternative (come per risposta armonica).
- Valutazione numerica dell'Integrale di Duhamel => calcolo numerico.

— o —

- Risposta al moto del riferimento (es. earthquake azione sismica).
- Forzante apparente indotta per effetto d'inerzia (trascinamento).
- Risposta simbolica via Duhamel (valutabile numericamente).
- Spettri e pseudo-spettri di risposta (ev. di progetto => codificati v. normative).
- Concetto di isolamento sismico delle vibrazioni.

Next step: Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (Metodo di Newmark) -
Risposta nel dominio delle frequenze.