

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

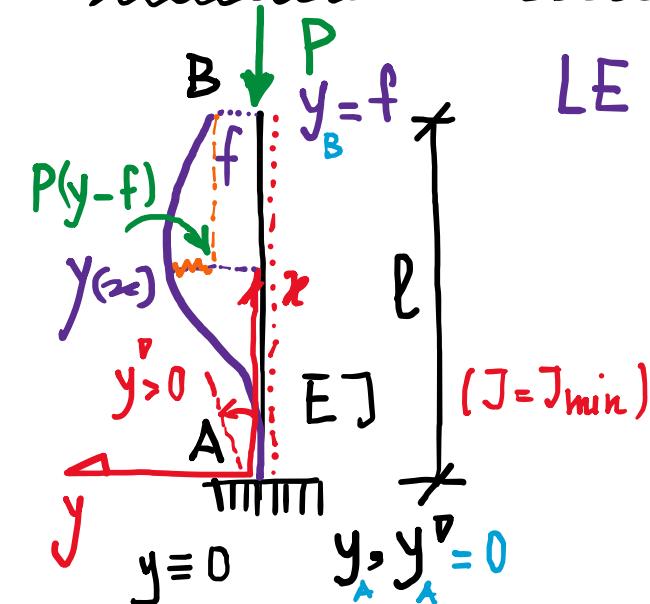
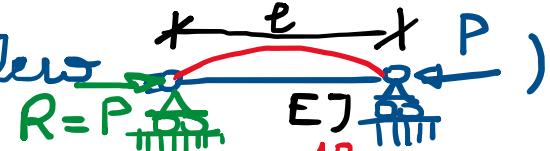
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 21

Altre condizioni di vincolo (generalizzazione dell'asta di Euler)



$$LE : \underbrace{\int_{>0} E y''(\alpha)}_{= -P(y-f)} = + M(\alpha) \text{ (nella config. deform.)} \quad P_{cr} = \pi^* \frac{\int E}{P^2}$$

$$y'' + \frac{P}{EI} y = \frac{P}{EI} f \Rightarrow y = \underbrace{A \sin \alpha x + B \cos \alpha x}_{\text{integ. gen. omog. ans.}} + \underbrace{f}_{\text{integ. part.}}$$

Scrittura e impostazione delle e.e.

$$P = \alpha^2 l^2 \frac{EJ}{l^2} = (\alpha l)^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \Rightarrow B + f = 0 \Rightarrow B = -f \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^2 A = 0 \\ y(l) = f \Rightarrow \sin \alpha l A + \cos \alpha l B + f = f \end{array} \right.$$

Soluzioni non banali
 $y \neq 0$ se

$$\text{takže } D = \cancel{\alpha l} \cos \cancel{\alpha l} = 0$$

$$\alpha l = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Sistema delle condizioni al contorno

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ f \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{3h}{2} \alpha l \rightarrow (\alpha l)^2 = h^2 \frac{\pi^2}{4} \rightarrow P_{cr, n} = h \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$$

$h=1$ $P_{cr}^E = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{1}{4} P_{w,a,E}^E = \pi^2 \frac{EJ}{l_{0,r}^2}$

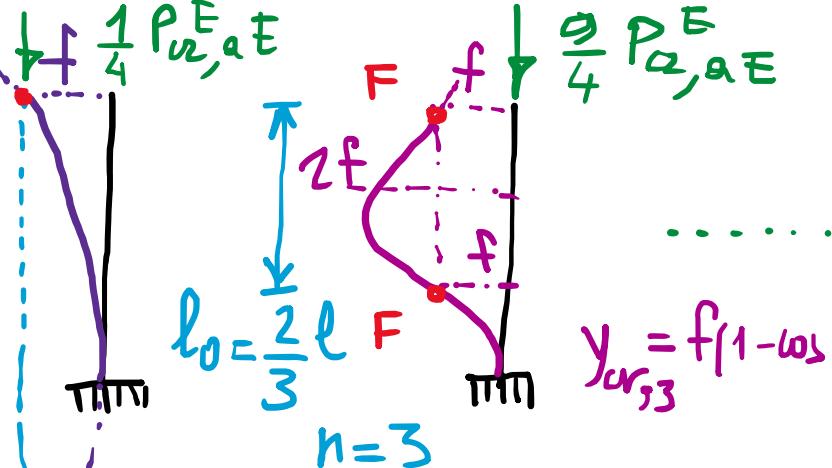
$$P_{cr}^E = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \frac{1}{4} P_{w,a,E}^E = \pi^2 \frac{E J}{l_{0,n}^2}; l_{0,n} = \frac{2}{n} l \text{ lung. di libera inflessione}$$

Soluzione e deformate critiche ($\mu \propto l = n \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} B = -f \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{cr,n} = f \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2l} \right)$$

arbitr.

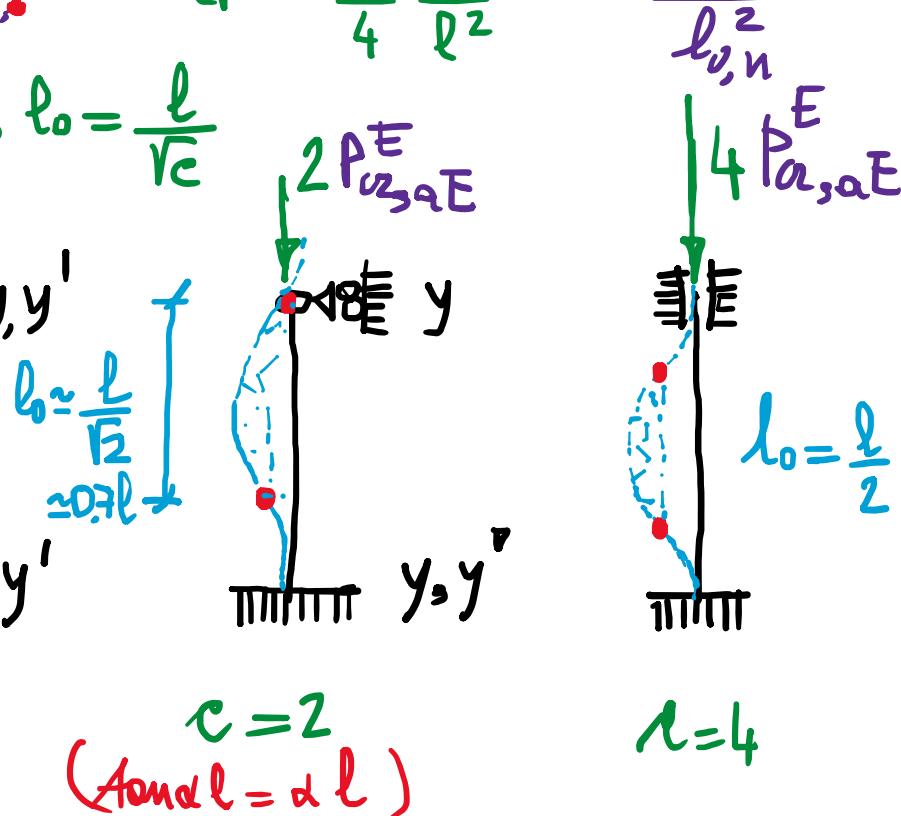
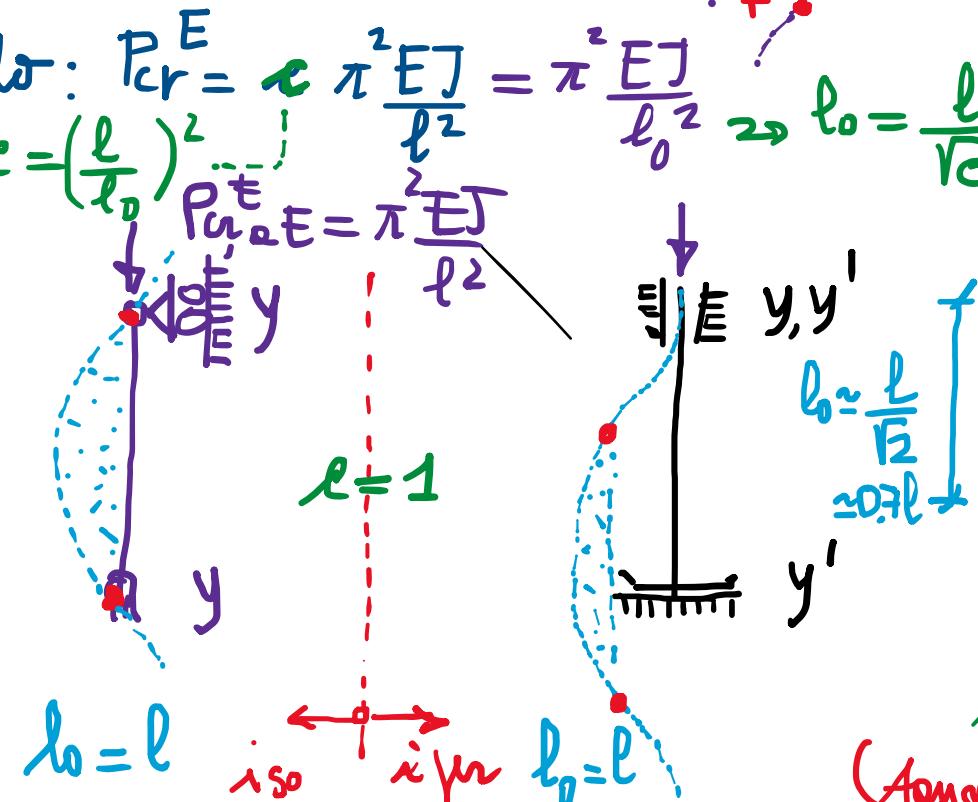
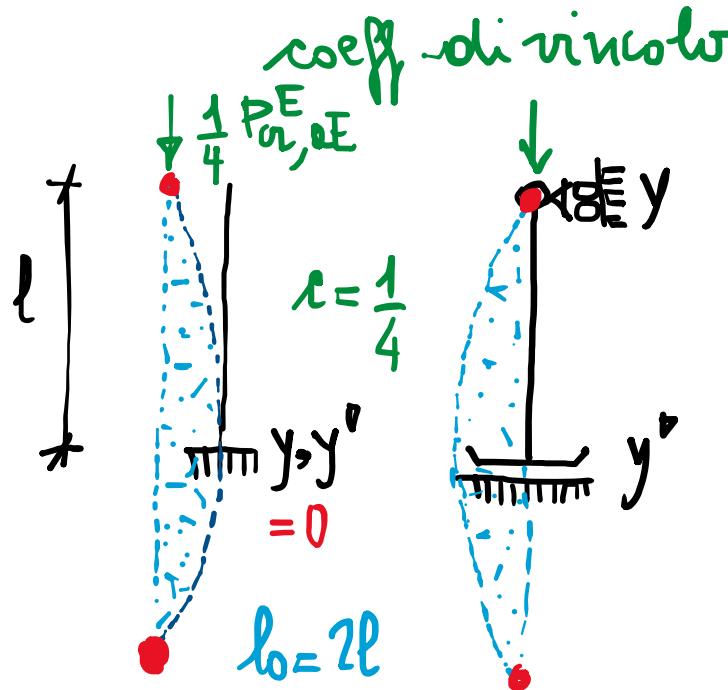
$$l_{0,n} = \frac{2l}{n} \quad y_{cr} = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad l_0 = 2l \quad n=1$$



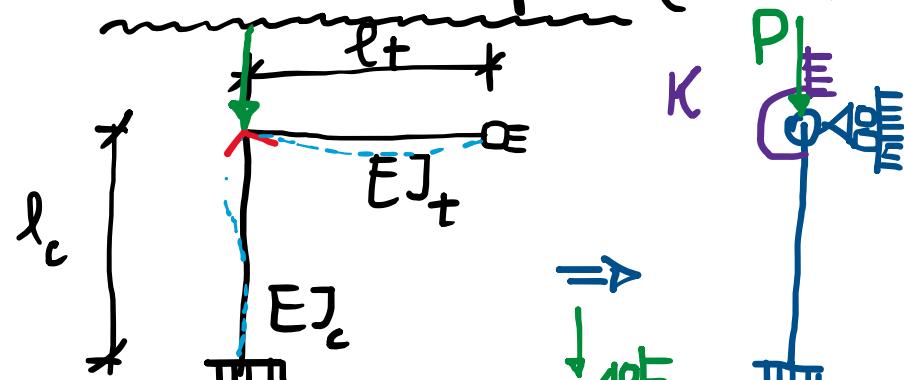
$$y_{cr,3} = f \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right)$$

\rightarrow note le lunghezze di libere inflessione delle deformate critiche è noto il cericorit.

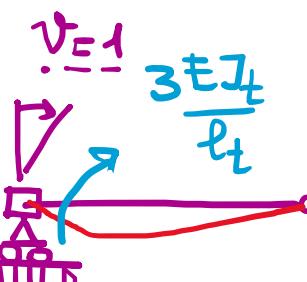
Altre condizioni di vincolo: $P_{cr}^E = c \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \rightarrow l_0 = \frac{l}{\sqrt{c}}$



Telai e modi fissi (solo rotazioni)



$$K = \frac{1}{\mu} \frac{E J_c}{l_c}$$



effetto flessionale delle trave
sulle colonne

$\frac{1}{\mu}$... coeff. di cedevolizza

$$K = \frac{M}{v} = 3 \frac{E J_t}{l_t} \quad \frac{E J_c}{l_c} \frac{l_c}{E J_c} = \frac{1}{\frac{1}{3} \frac{E J_t}{l_t} \frac{l_t}{l_c}} \frac{E J_c}{l_c}$$

$$\ell = 2 \leq \ell \leq \ell = 4$$

$$K=0, \mu \rightarrow \infty$$

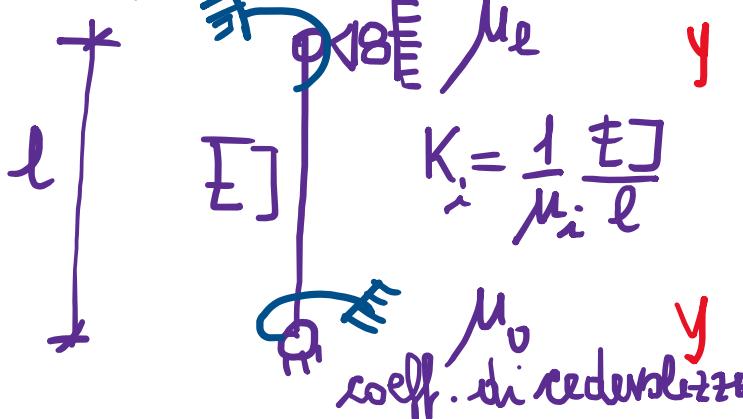
$$K \rightarrow \infty, \mu=0$$

Ese. $\mu_0 \rightarrow 0, \mu_e = \mu$

$$c_N = 2 \frac{0.4 + \mu}{0.2 + \mu}; \quad \frac{E J_t}{l_t} = \frac{E J_c}{l_c}$$

$$= \frac{1}{4} = 2.75$$

Formule di Newmark:



$$K_i = \frac{1}{\mu_i} \frac{E J}{l}$$

μ_0 coeff. di cedevolizza

$$P_{02} \approx c_N \frac{\pi^2 E J}{l^2} \quad (\text{valori approx., irr} < 4\%)$$

$$c_N = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_e)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_e)}$$

- $\mu_i \rightarrow 0 \quad c_N = 4$ (valori esatti in casi particolari)
- $\mu_i \rightarrow \infty \quad c_N = 1$

Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza: $N = P$; $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} < \sigma_0$)

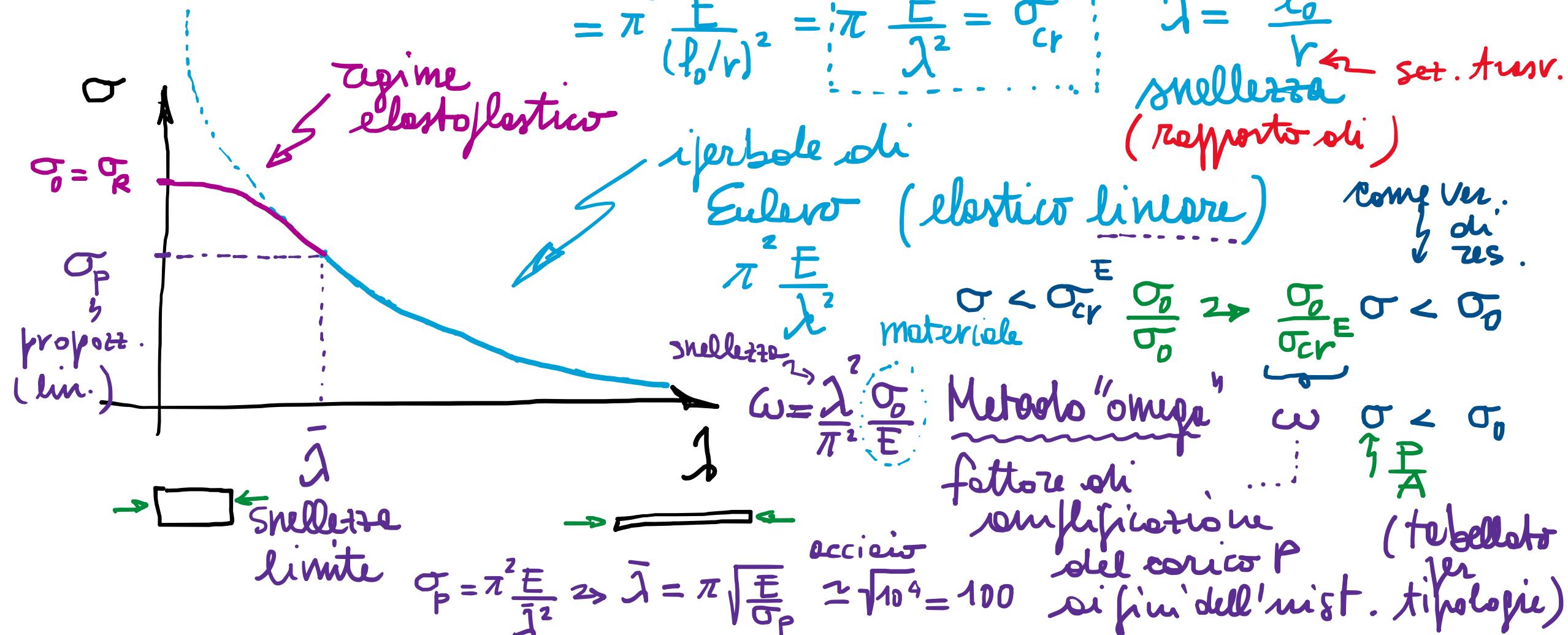
$$\sigma = \frac{P}{A} < \frac{P_{cr}^E}{A} = \sigma_{cr}^E \Rightarrow \sigma_{cr}^E = \pi^2 \frac{E J}{l_0^2 A} r^2 \quad r_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

raggio giretore d'inerzie
e lunghezza e.c.e.

$$= \pi^2 \frac{E}{(l_0/r)^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \sigma_{cr}^E$$

$$\lambda = \frac{l_0}{r}$$

set. trasv.
velocità (rapporto sli)



SOMMARIO (Lec. 21)

- Aste incastrate e generalizzazione ad altre condizioni di vincolo.
- Coefficiente di vincolo, lunghezza di libera inflessione.
- Telei e nodi fissi : effetto flessionale delle travi considerato in molle rotazionali (elementi a deform. elastica concentrata).
- Formule di Newmark per travi appoggiate (errori contenuti).
- Verifica di stabilità (può essere interpretata come verifica di resistenza con esercizio amplificato di fattore $\omega \rightarrow$ "Metodo omega").
- Fine Instabilità delle Strutture - (2^a parte).

Next step: Anelasticità (flessibilità) delle Strutture (3^a parte).
Comportamento elastoflessivo del materiale.