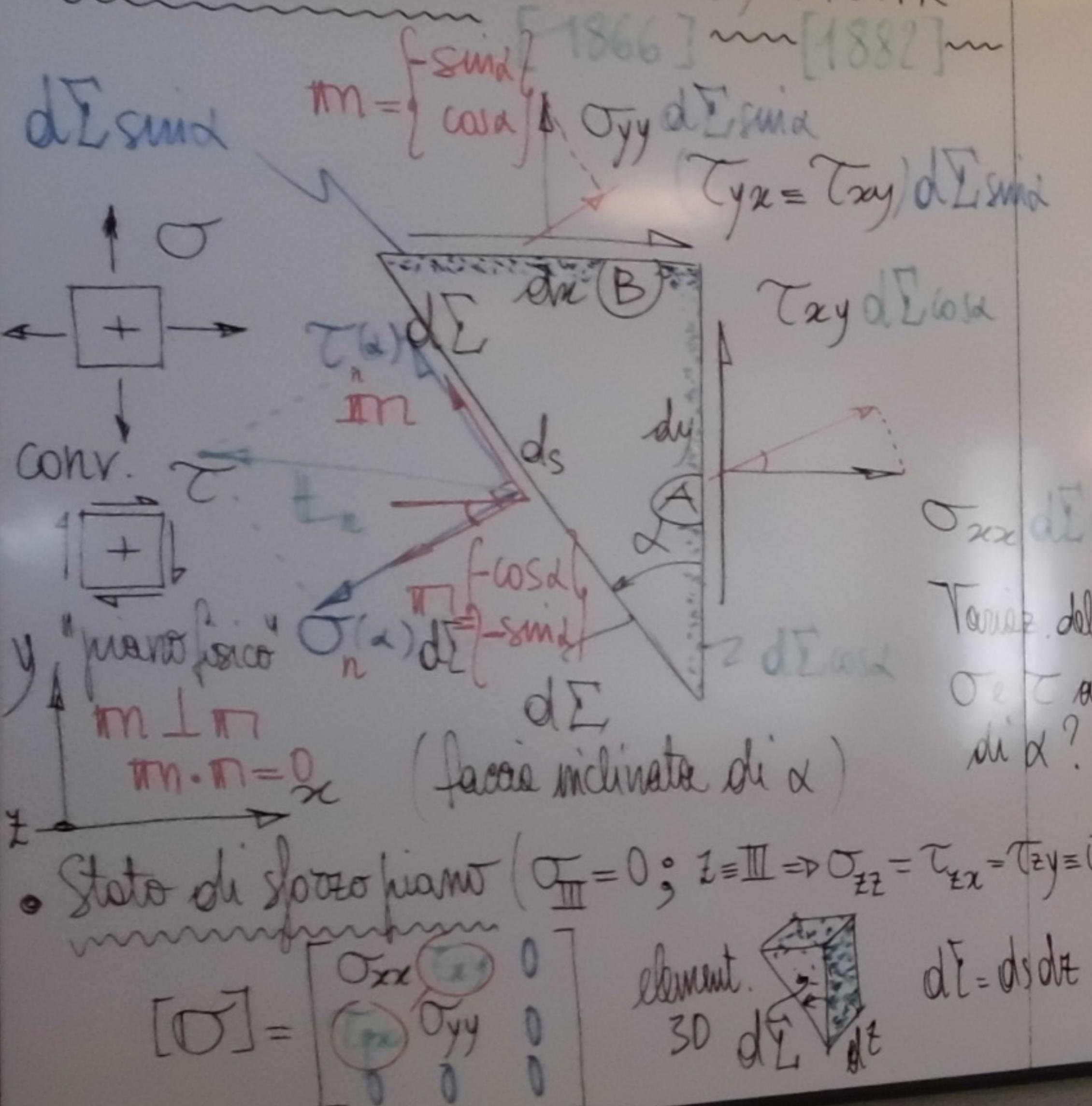


Cerchio di (Gulmann)-MOHR



Equil. alle trascr. (v. relazione di Cauchy), in sede indefinita $\forall d\Sigma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\alpha) d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \cos \alpha + \sigma_{yy} d\Sigma \sin \alpha + \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha + \tau_{yz} d\Sigma \sin \alpha \\ \tau(\alpha) d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \cos^2 \alpha - \sigma_{yy} d\Sigma \sin^2 \alpha - \tau_{xy} d\Sigma \cos \alpha + \tau_{yz} d\Sigma \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\alpha) = \frac{\sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \\ \tau(\alpha) = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) 2 \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ 1 + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

Relazioni (da equil.) che definiscono la variazione delle comp. σ, τ inf. di 2α

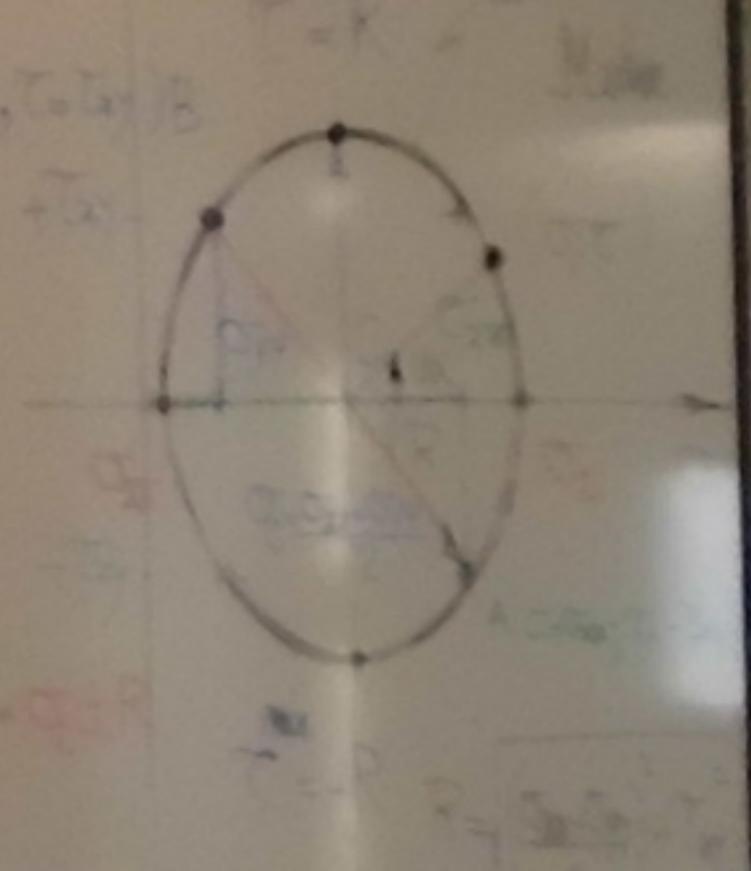
- Tali relazioni esprimono l'eqn parametrica di una circonferenza nel piano (σ, τ) , detto piano di Mohr, come:

- Centro $C = \left(\sigma_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, \tau_c = 0 \right)$

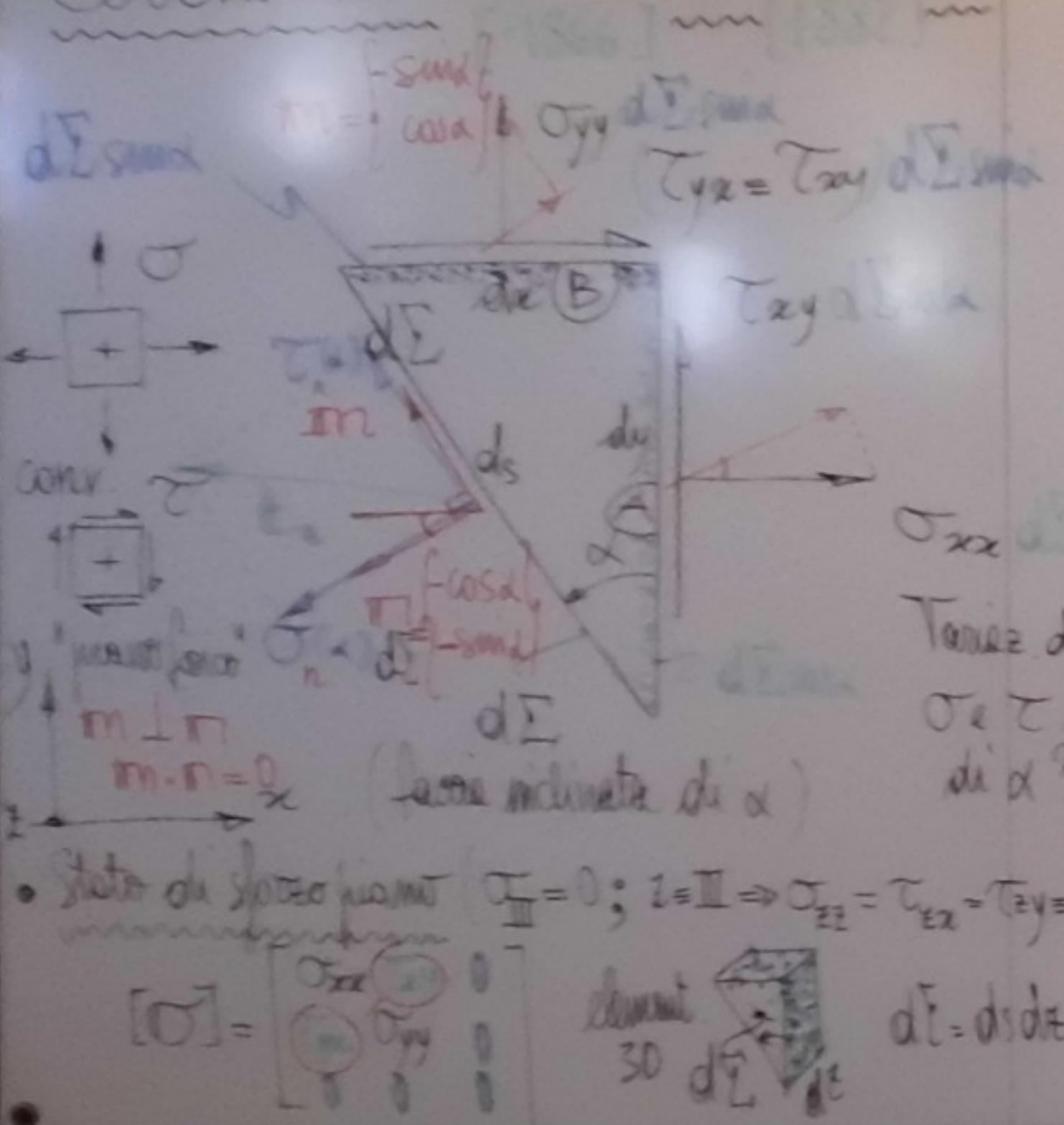
- Raggio $R = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$

Infatti:

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 =$$



Cerchio di (Culmann) - MOHR



Equal alla traslaz. (v. relazione di Cauchy), in sede indipinta $\forall d\Sigma$

$$\left\{ \begin{array}{l} n: \sigma(\alpha)d\Sigma = \sigma_{xx} \cos \alpha d\Sigma + \sigma_{yy} \sin \alpha d\Sigma + \tau_{xy} \cos \alpha d\Sigma \sin \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha d\Sigma \cos \alpha \\ m: \tau(\alpha)d\Sigma = \sigma_{xx} \sin \alpha d\Sigma - \sigma_{yy} \cos \alpha d\Sigma - \tau_{xy} \cos \alpha d\Sigma \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha d\Sigma \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\alpha) = \sigma_{xx} \frac{\cos^2 \alpha}{1-\cos^2 \alpha} + \sigma_{yy} \frac{\sin^2 \alpha}{1-\cos^2 \alpha} + \tau_{xy} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ \tau(\alpha) = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1-2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{2} \\ &\quad \leftarrow 1+2 \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos^2 \alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

Relazioni (da equil.) che definiscono la variazione delle comp. σ, τ in funzione di 2α

Tali relazioni esprimono l'eq. ne parametrica

di una circonferenza, nel piano (σ, τ) ,

detto piano di Mohr, avente:

$$(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - R^2)$$

$$- Centro: C = \left(\sigma_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right)$$

$$- Raggio: R = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

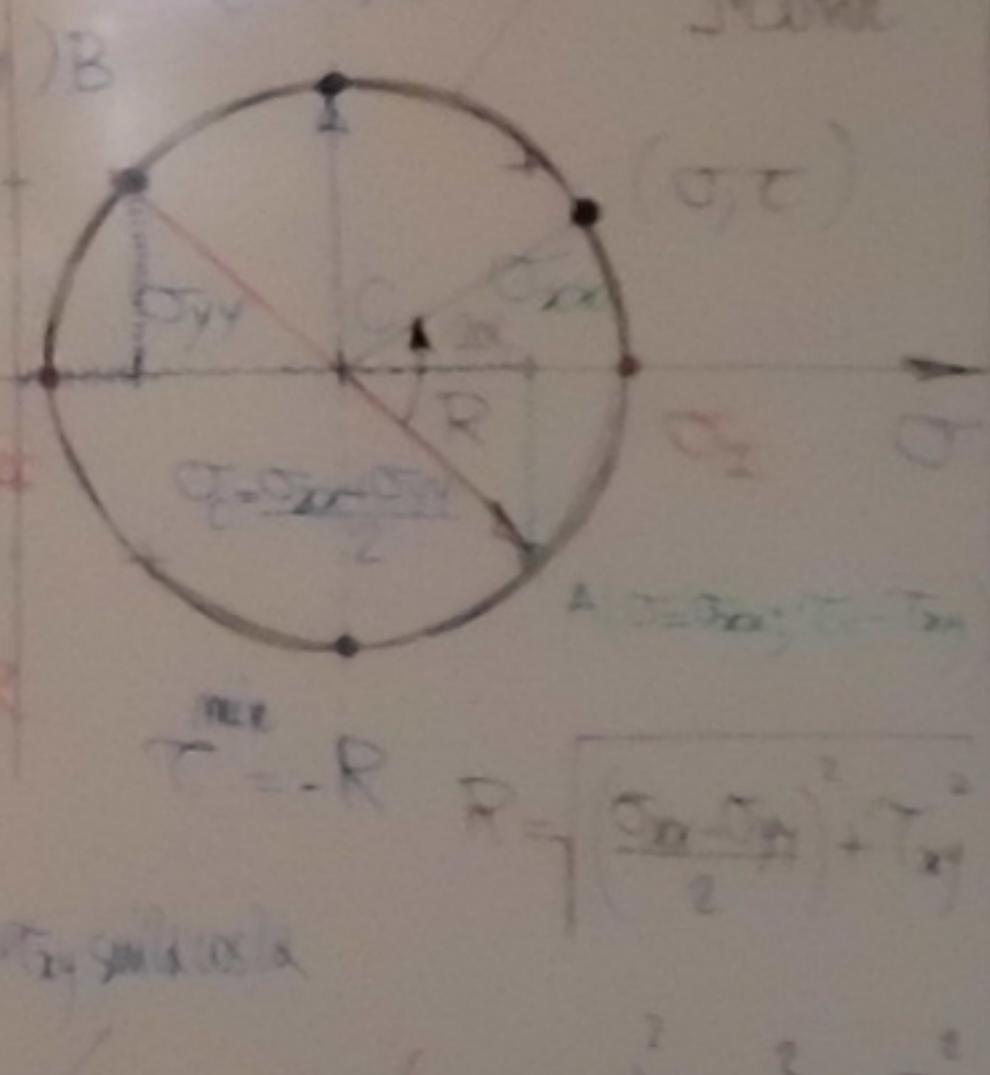
Infatti:

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\alpha$$

$$+ \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} \sin^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha -$$

Piano di Mohr

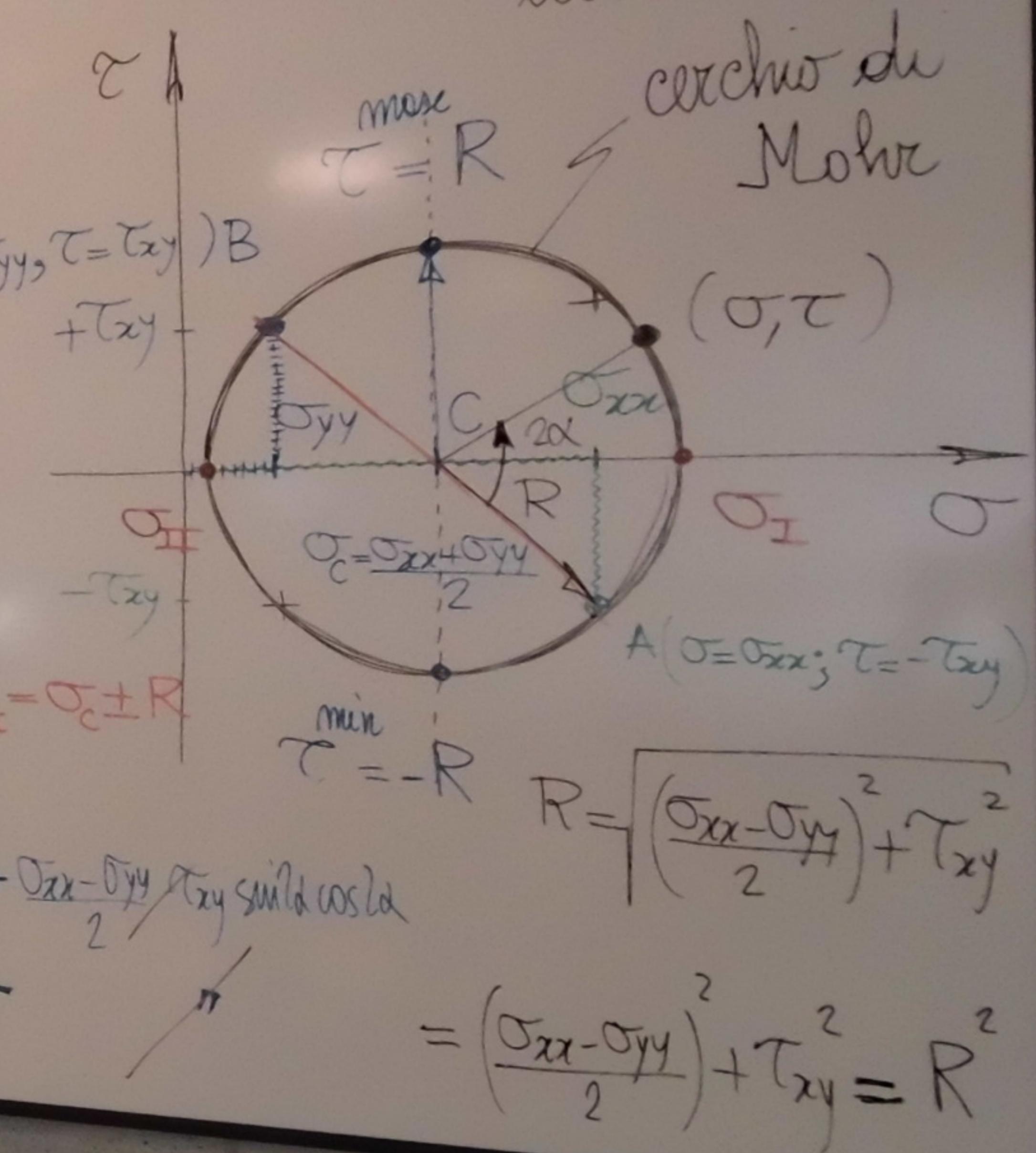
cerchio di Mohr



$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2 = R^2$$

Piano di Mohr



$$\sigma_d = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \cancel{d \Sigma} \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} \cancel{d \Sigma} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_d = \cancel{\sigma_{xx} \sin^2 \alpha - \sigma_{yy} \cos^2 \alpha} + \tau_{xy} \cancel{d \Sigma} \cos \alpha \sin \alpha$$

Eguagliando le trasluzioni (relazioni di Cauchy), in sede indipendente $d\Sigma$

$$\tau: \sigma_d d\Sigma = \tau_{xx} \cancel{\cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha} + \tau_{xy} \cancel{d \Sigma} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$m: \tau_d d\Sigma = \tau_{xx} \cancel{\sin^2 \alpha - \sigma_{yy} \cos^2 \alpha} - \tau_{xy} \cancel{d \Sigma} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\begin{cases} \sigma_d = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ \tau_d = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} - \tau_{xy} \left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2 \alpha &\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ 1 + 2 \cos^2 \alpha &\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma_d = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_d = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Relazione (di equal) che definisce la variazione delle comp. σ, τ in funzione di 2α

- Tali relazioni esprimono l'eq. ne parametrica ($\sigma = \sigma_{yy}, \tau = \tau_{xy}$) di una circonferenza, nel piano (σ, τ) ,

detto piano di Mohr, ovante: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

$$\text{- Centro } C = \left(\sigma_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right)$$

$$\text{- Raggio } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Inoltre:

$$\begin{aligned} (\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 &= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 + \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \tau_{xy} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &+ \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 - \end{aligned}$$

$$\text{tens. } \sigma_{\pm} = \sigma_c \pm R$$

Commenti

- Rotazioni α nel piano fisico corrispondono a rotazioni 2α (angolo al centro) nel piano di Mohr
- Le componenti σ, τ si fanno mutuamente perpendicolari come le A e B ($\alpha = 90^\circ$) sono rappresentate da punti diametralmente opposti sul cerchio di Mohr
- Le tensioni principali nel piano sono facilmente individuate dall' \cap del CM con l'asse $\tau=0$ e rapp. il max e min valore di τ salvo che di tutte le giaciture nel piano e sono espressi da:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

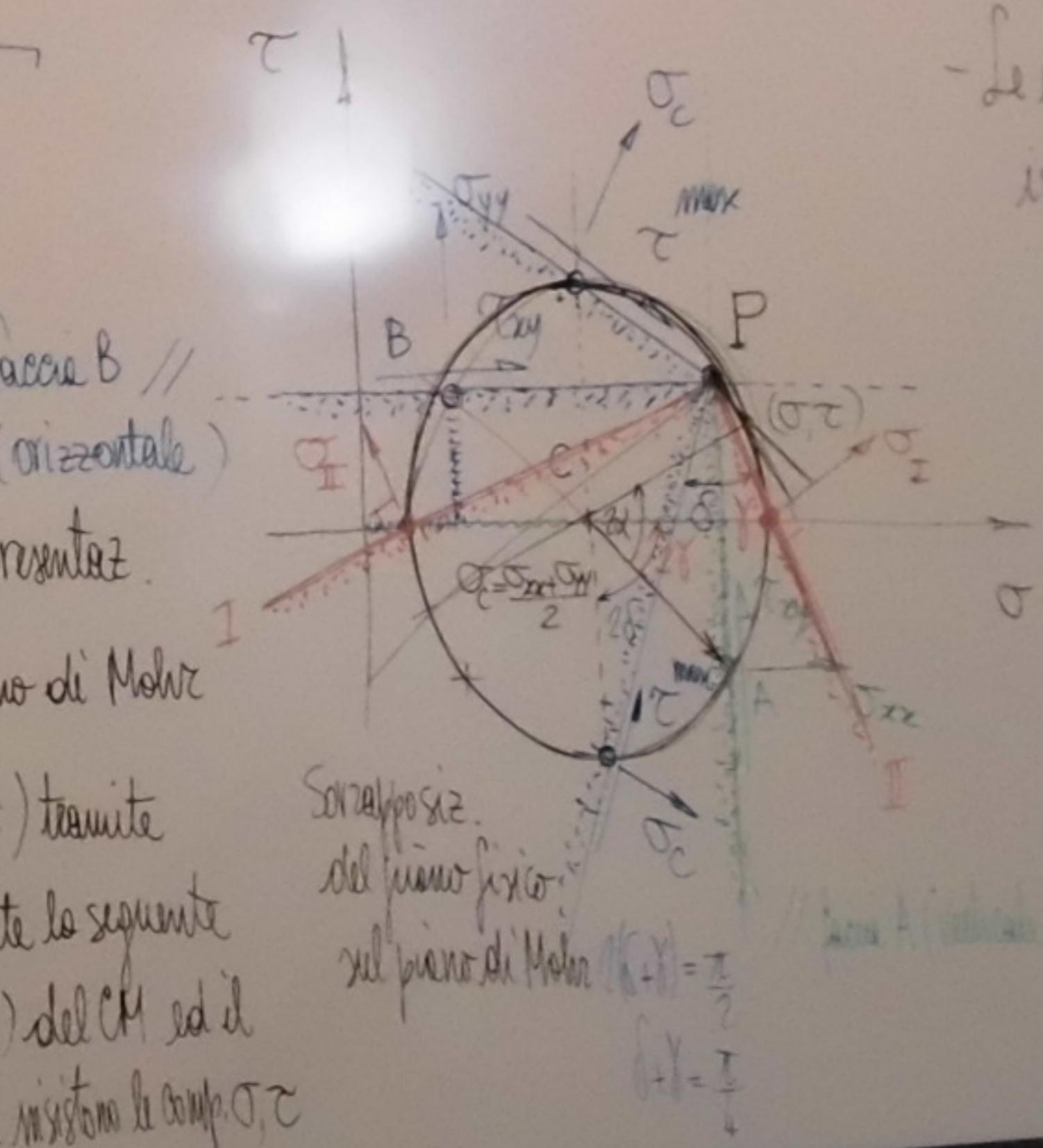
- Analogamente si individua la

$$\tau = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

che si accompagna a tensione normale

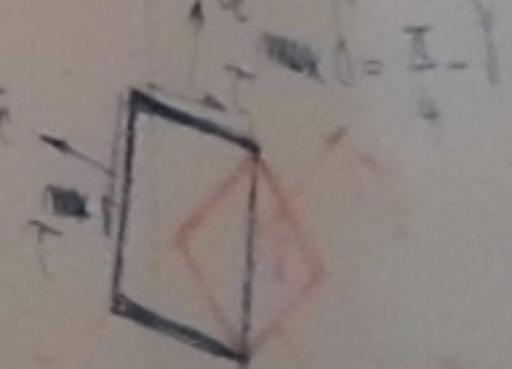
$$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

- È possibile "sovrapporre" in un'unica rappresentazione il piano fisico (elementi) e il piano di Mohr (cerchio di Mohr che rappresenta le comp. σ, τ) tramite il cosiddetto Polo del Cerchio di Mohr, avente le seguenti proprietà: tracciando la retta tra il pto (σ_c, τ) del CM ed il polo P si ottiene la giacitura delle facce sulla quale rischia la comp. σ_c



$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} \Rightarrow \tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_c}$$

- Le direzioni parallele sono evidentemente invariate, mentre i valori:



Cominciamo

- Rotazioni: i piani fissi corrispondono a rotazioni ω_x (angolo al centro) nel piano di Mohr
- Le componenti σ_{xy} su facce perpendicolari all'asse $\omega_x = \theta$ ($d=90^\circ$) sono rappresentate da piani simmetricamente opposti sul centro di Mohr.
- Le tensioni piane puri nel piano sono facilmente individuate nell'1° del CM con l'asse $\tau=0$: il max e min valore di rotazione di tutte le facce nel piano e sono raggiunti rispettivamente da:

$$\sigma_{\max} = \sigma_x + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

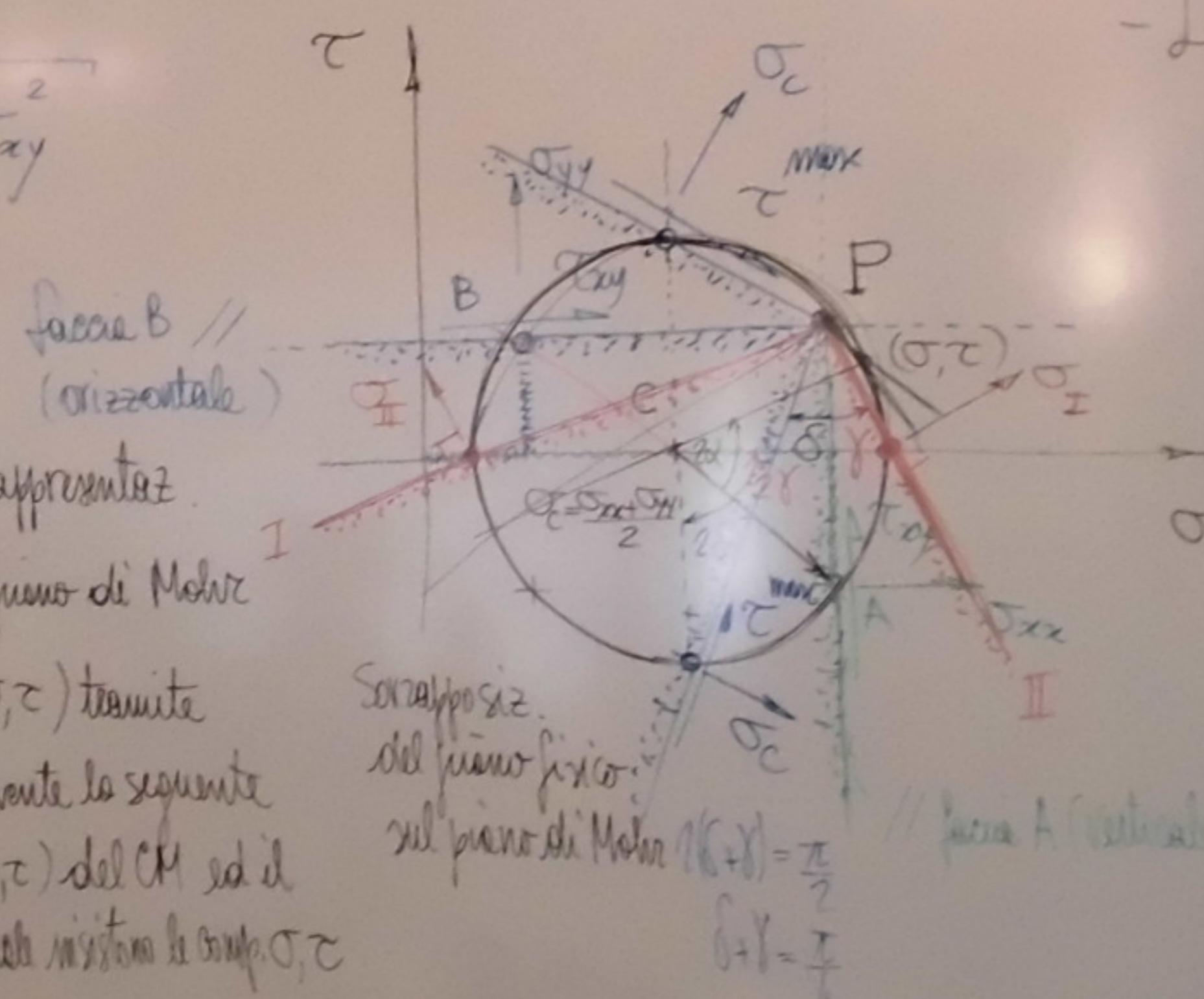
Analogamente si individua la

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

che si accompagna a tensione normale

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

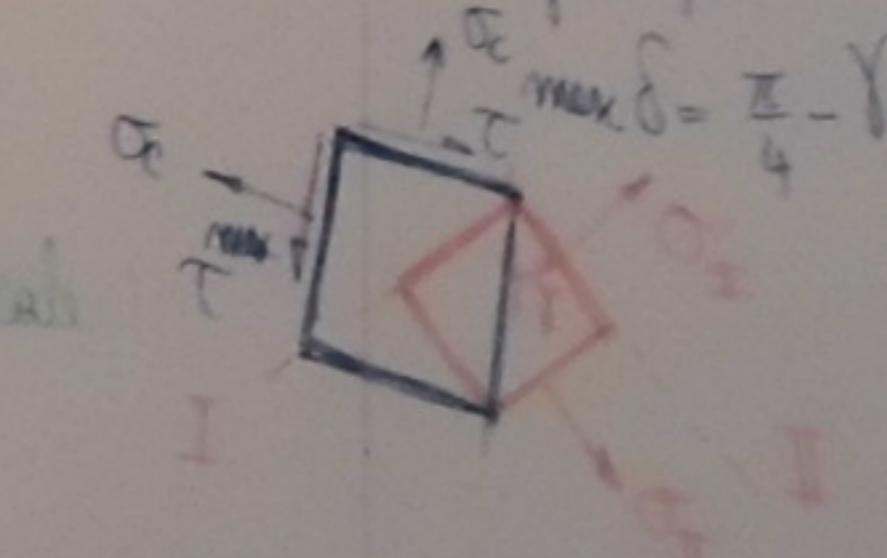
- È possibile "sovrapporre" in un'unica rappresentazione il piano fisico (elementi I) e il piano di Mohr (cerchio di Mohr che rappresenta le comp. σ, τ) tramite il cosiddetto Polo del Cerchio di Mohr, avente le seguenti proprietà: tracciando la retta tra il pt. (σ_c, τ) del CM ed il polo P si ottiene la giacitura delle facce sulle quali risiedono le comp. σ, τ



- Le direzioni principali sono formalmente individuate, per rotare di 45° che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Le direzioni secondo cui agisce la τ_{\max} (insieme a σ_c) risultano a 45° rispetto alle direzioni principali.



- Già che i due piani fanno componenti
verso la diagonale del piano di Mohr
che è parallela al piano normale
possiamo scrivere

$$\tau = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

Allungando in orizzontale

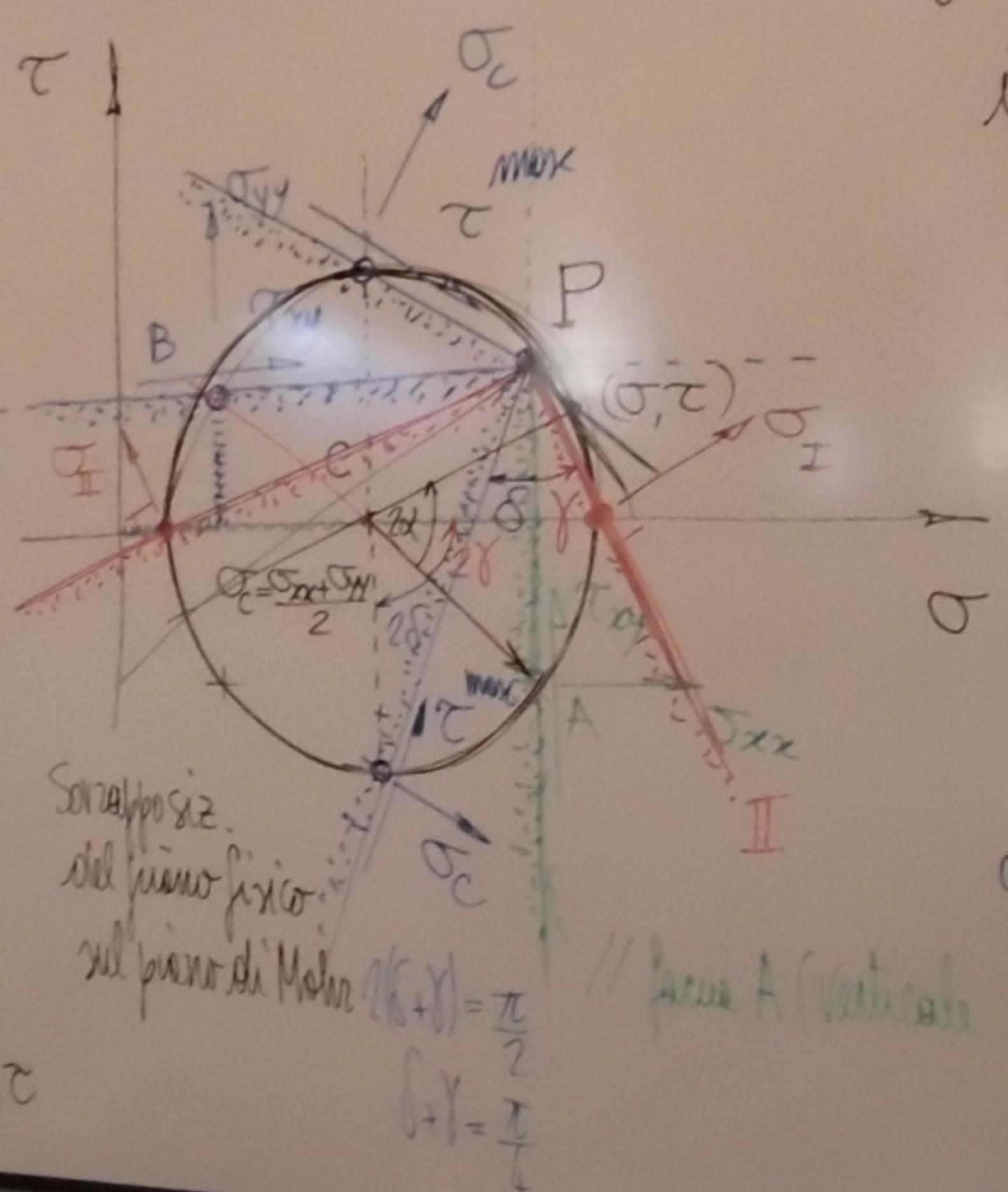
$$\tau = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

che è parallela al piano normale

$$\tau = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

facce B // (orizzontale)

- E' possibile sovrapporre un immagine rappresentante
insieme il piano fisico (elementi) e il piano di Mohr
nel piano di Mohr che rappresenta le componenti σ_c tramite
il cosiddetto Punto del piano di Mohr, eseguire la seguente
operazione: tracciando la retta tra il pt. (σ_c) del CM ed il
pt. P si ottiene la tangente alla cerchia nella quale insiste la comp. σ_c



- Le direzioni principali sono frontalmente
individuate, per zeta. γ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

- Le direzioni secondo cui agisce la τ_{max}
(insieme a σ_c) risultano a 45° rispetto alle
direzioni principali:

