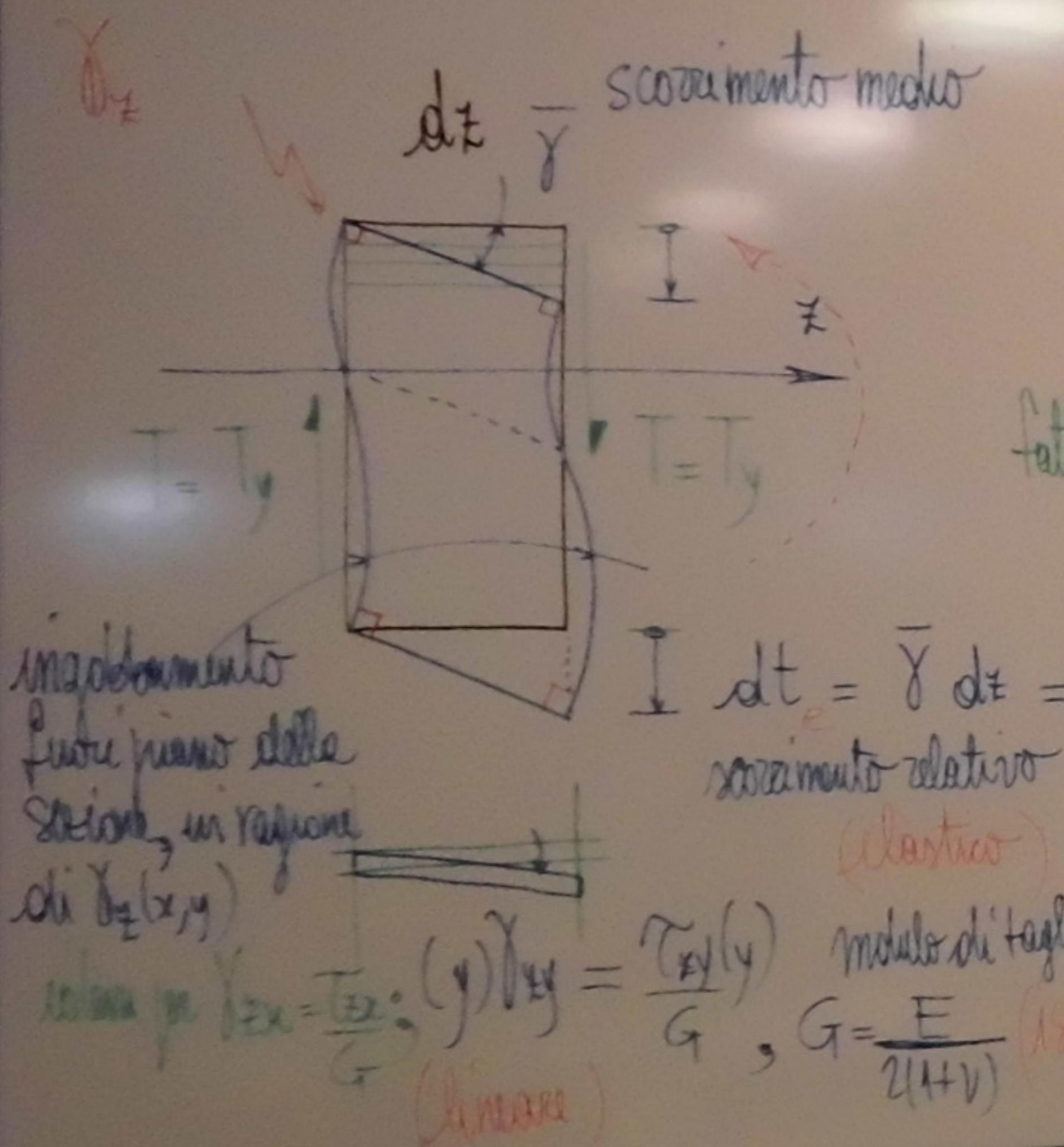


## Deformazione a taglio



- Tale scorrimento medio, determinabile a partire dalle deformazioni taglienti variabili lungo la sezione, può essere determinato tramite PLV.

$$d\delta_e = T_y dt = \int_A \underbrace{T_z \cdot \gamma_z}_{A' \cdot \gamma_{xy}} dA dz = d\delta_e$$

fattore di taglio

$$\frac{T_y}{G A} \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \underbrace{T_{xy}^2(y)}_{T_{xy} S_x(y)} \left( 1 + \left( \frac{T_{zx}}{T_{xy}} \right)^2 \right) dA - \text{Scorrimento totale tagliato}$$

$$= \frac{T_y}{G A^*} \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \underbrace{\frac{T_y S_x(y)}{J_x^2 b(y)}}_{A^* = \frac{A}{\mu}} \left( 1 + \frac{4 \tan^2(y)}{b(y)^2} \right) dA$$

$$= \frac{1}{G} \frac{T_y}{J_x^2 A} \int_A \underbrace{\frac{S_x(y)}{b^2(y)}}_{\text{area ridotta}} \left( 1 + \frac{4 \tan^2(y)}{b(y)^2} \right) dA$$

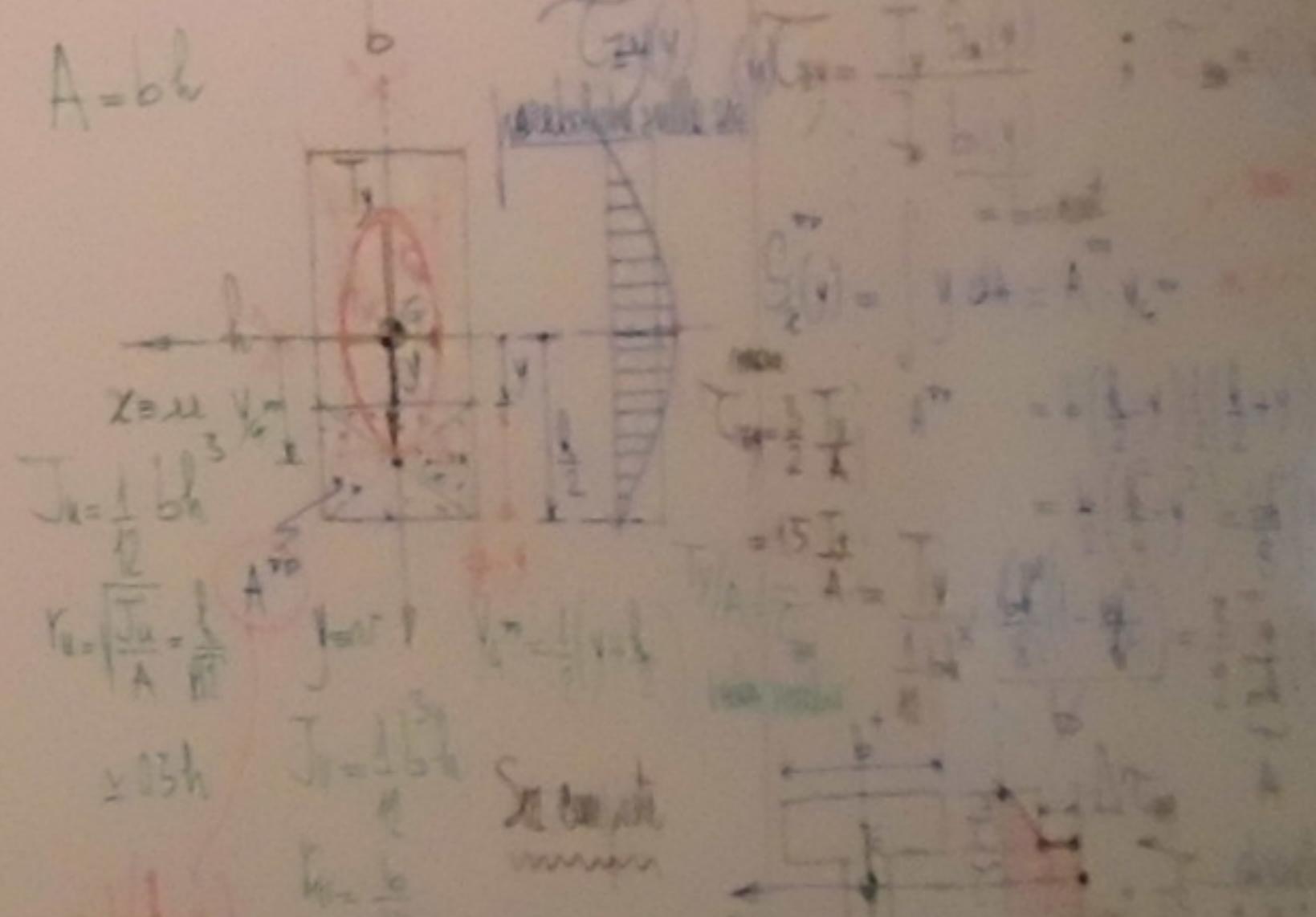
Fattore di taglio

$$\mu = \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x(y)}{b(y)^2} \left( 1 + \frac{4 \tan^2(y)}{b(y)^2} \right) dt > 1$$

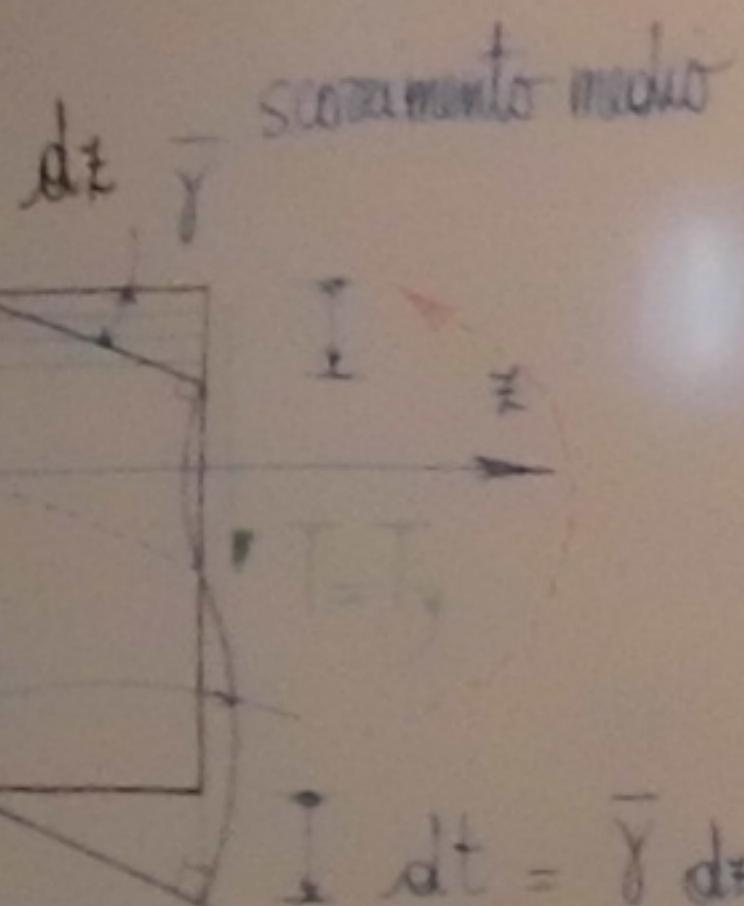
pura propria geometria della sezione trasversale, con  $\mu > 1$

(es. per sezione rettangolare  $\mu = \frac{b}{3}$ )

Caso della sezione a tangone (tubo rettangolare con incastri)



## Deformazione a taglio



- Tale scorrimento medio, determinabile a partire da deformazioni tagliente variabili lungo la sezione, può essere determinato tramite PLV.

$$d\Delta_t = T_y \frac{dt}{dz} = \int_A T_{zy}(y) dy \frac{dt}{dz} = d\Delta_t$$

fattore di taglio

$$\begin{aligned} T_y \frac{dt}{dz} &= \frac{1}{G} \int_A T_{zy}^2(y) \left(1 + \left(\frac{T_{zx}}{T_{zy}}\right)^2\right) dA \\ &= \frac{T_y}{GA^*} dt = \frac{1}{G} \int_A \left(\frac{T_y S_x(y)}{J_x b(y)}\right)^2 \left(1 + 4 \tan^2(y)\right) dA \end{aligned}$$

$$A^* = \frac{A}{\mu}$$

$$\begin{aligned} dt &= \bar{Y} dz = \mu \\ &\text{scorrimento relativo} \\ &\text{(estero)} \end{aligned}$$

$$\frac{T_y}{G} = \frac{T_{zy}(y)}{G}, G = \frac{E}{1+V}$$

Fattore di taglio

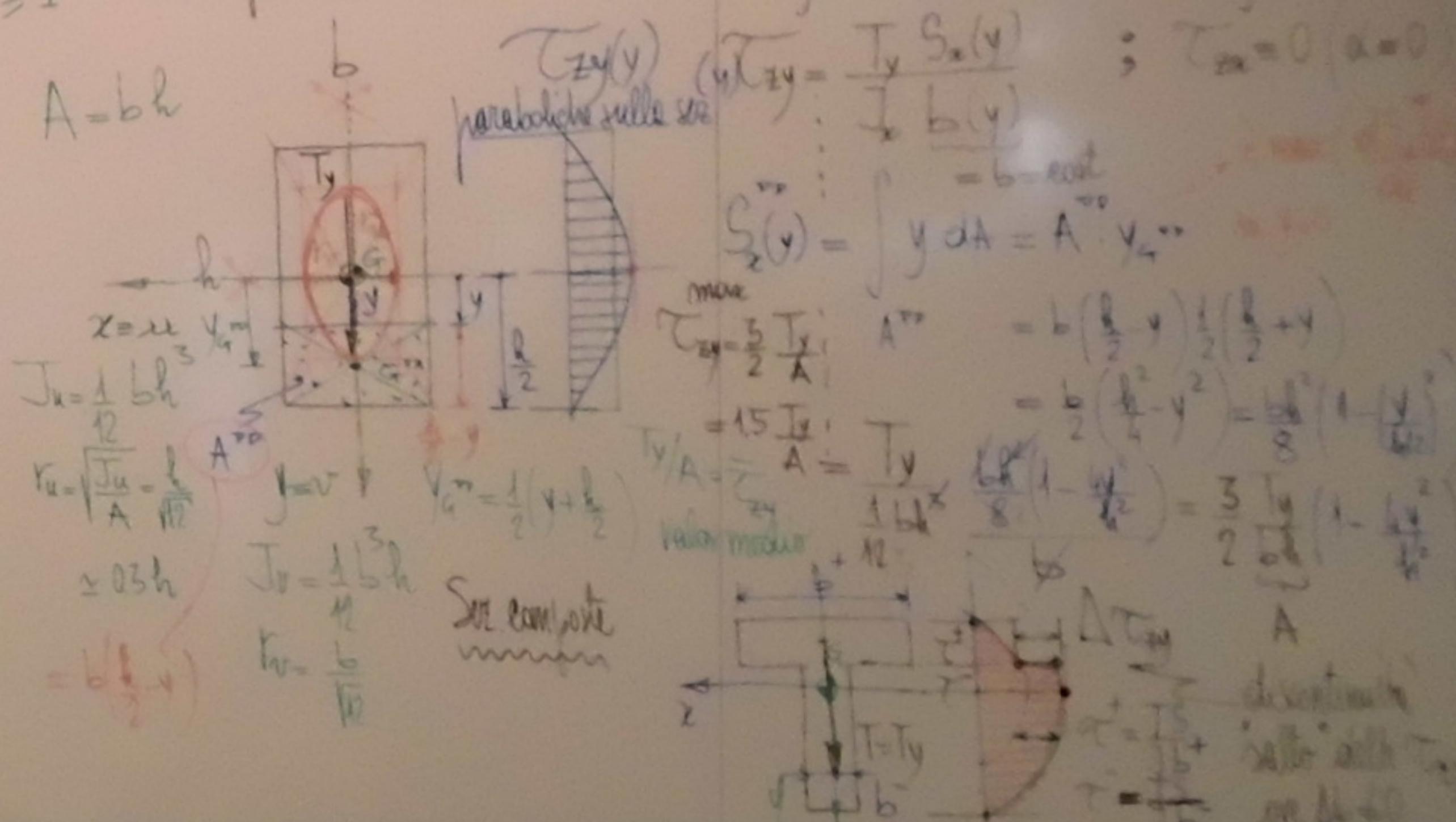
$$\mu = \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x''(y)^2}{b(y)^2} \left(1 + 4 \tan^2(y)\right) dA \geq 1$$

pura proprietà geometrica della sezione trasversale, con  $\mu \geq 1$   
(es. per sezione rettangolare  $\mu = \frac{b}{3}$ )

- Scorrimento totale tra le barre

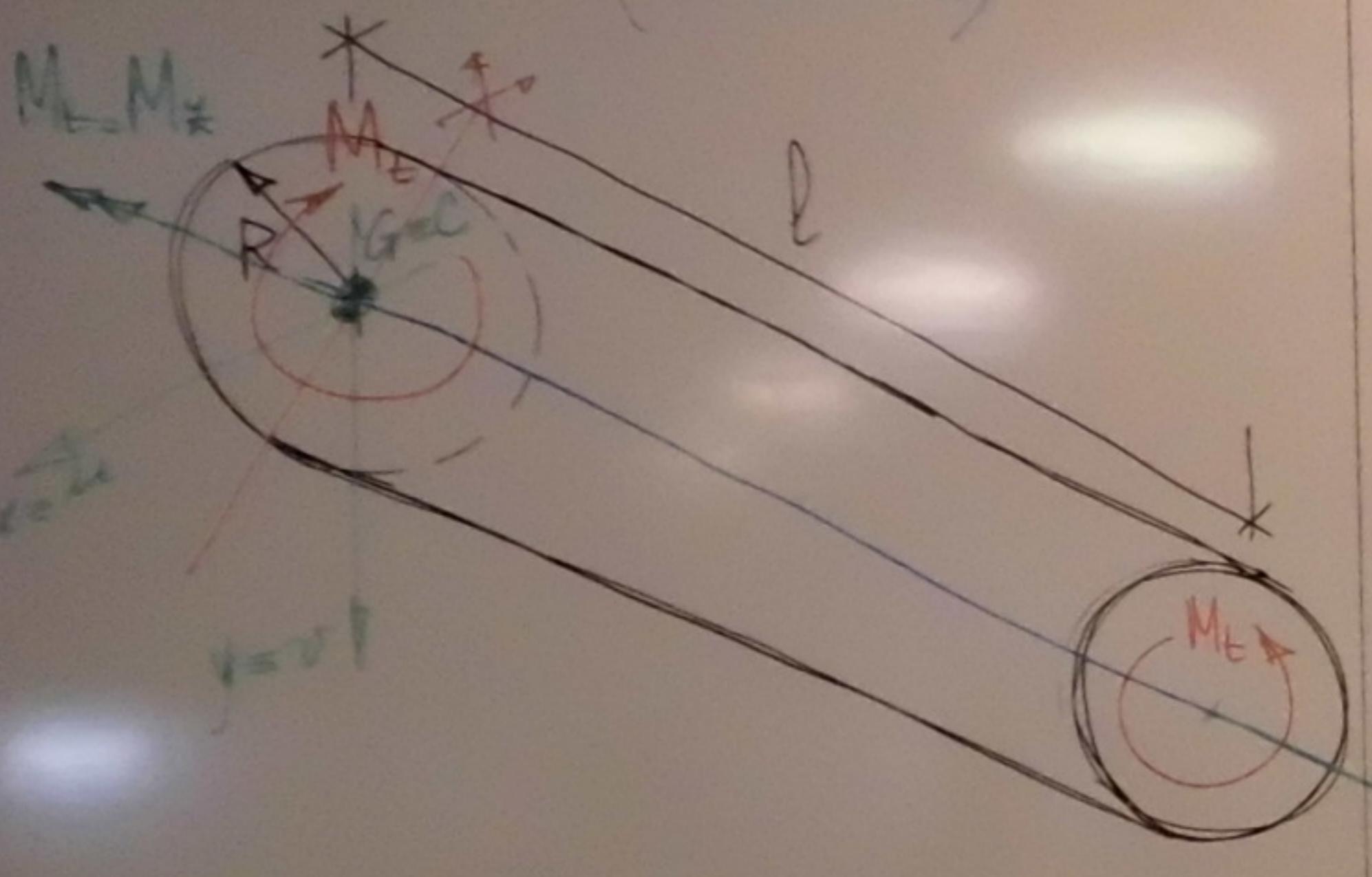
$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_0^l dt = \int_0^l \mu \frac{T_y dz}{GA} \\ &= \mu \frac{T_y l}{GA} \end{aligned}$$

- Caso delle sezioni rettangolari (utile per sezioni "composte" formate dalla composizione di sezioni elementari)





4) Torsione ( circolare )



- Le azioni sulle basi del prisma di DSV sono equivalenti a due coppie toranti (gicanti nel piano delle sponde) sulle due basi, uguali e contrarie

- Con approccio seminarrativo agli sforzi, ipotizzò:

$$\sigma_{ij} = 0 ; \tau_{zr} = 0 , \tau_{zt} = Kr = \frac{M_t}{J} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$$

## - Deformabilità

Si verifica che tutte le q.m.  $T_{zt} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$

governante risultano soddisfatte =  $\frac{M_t}{W_t} \geq \frac{T_{st}}{G}$

$$M_t = \int_A \left( \sum_z z dA \right) r \quad M_t = \frac{\pi R^3}{2}$$

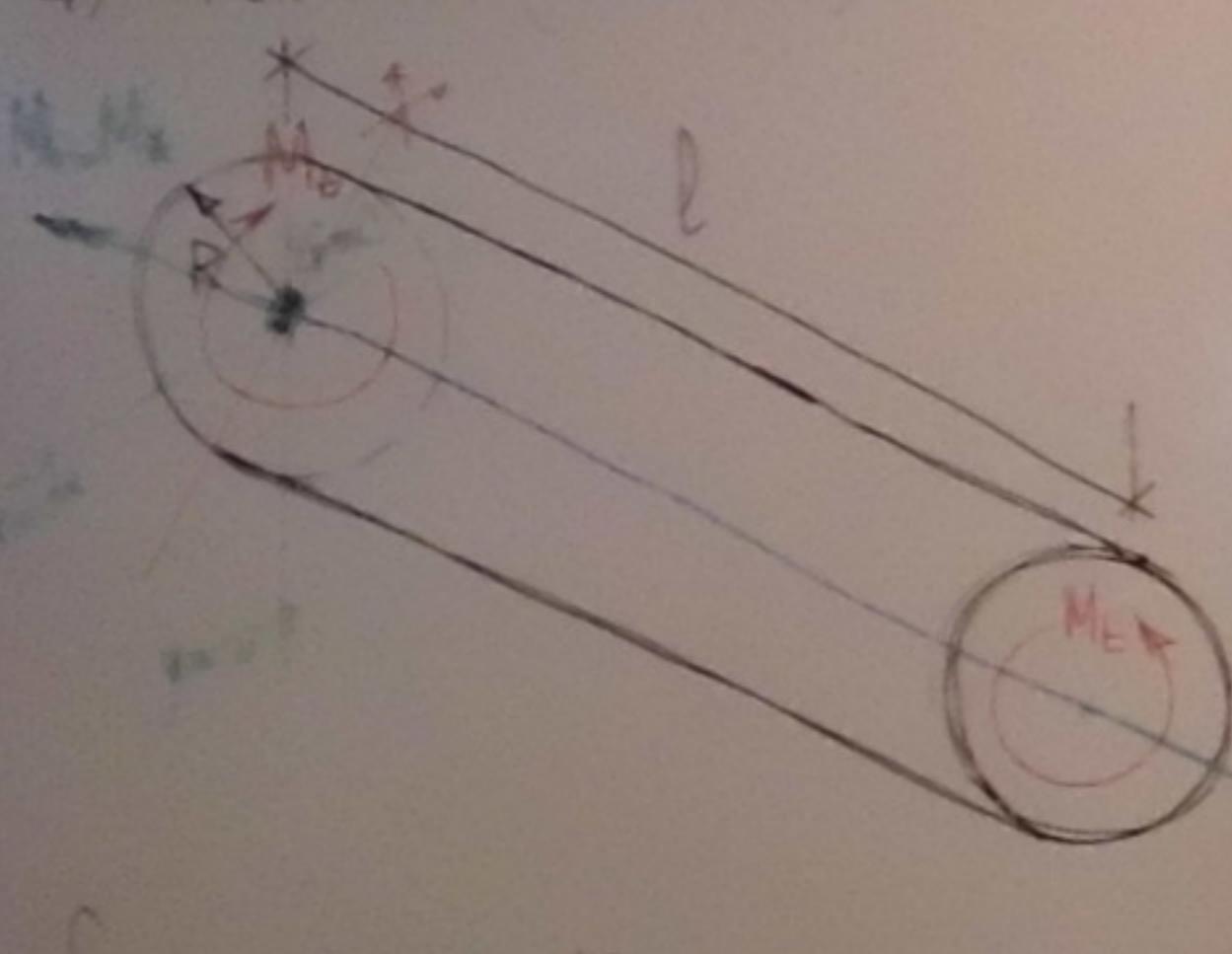
$$\text{Yield} = r \cdot t$$

$0 \leq r \leq R$   
 $r = R$   
 $M_t = M_z$   
 $dA = r dr d\theta$   
 $R = \frac{D}{2}$   
 $v_r = r \omega$   
 $T_{zt}$  lineare in  $r$  (a feralle)

$$(flessione) J_x = J_y = \frac{J_q}{2} = \pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{D^4}{64}$$

$\therefore M = M_t = M_z \rightarrow T_{st}$

#### 4) Torsione circolare



Le azioni sulle barre del prisma di DSV sono equivalenti a due coppie torcenti (giranti nel piano della sezione) nelle due barre, rispetto al centro

- Con approccio seminormo agli sforzi, ipotizziamo:

$$\sigma_{rz} = 0 \quad ; \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{zt} = Kr = \frac{M_t}{J_g} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$$

$$r = R$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$dA = r dr d\theta$$

$\tau_{zt}$  lineare in  $r$  (a farfalle)

lungo cgn

$\tau_{zt} \propto r$

diametro

(flexione)  $J_x = J_y = \frac{J_g}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$

(torsione)  $J_g = \int_A r^2 r dr d\theta = \frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{\pi D^4}{32}$

$\therefore M = M_t = M_z \rightarrow \tau_{zt}$

- Resta da det. la costante  $K$  (per modulo di equivalenza statica tra  $M_t$  e  $\tau_{zt}$ ): resistenza a torsione

$$M_t = \int_A (\tau_{zt} dA) r$$

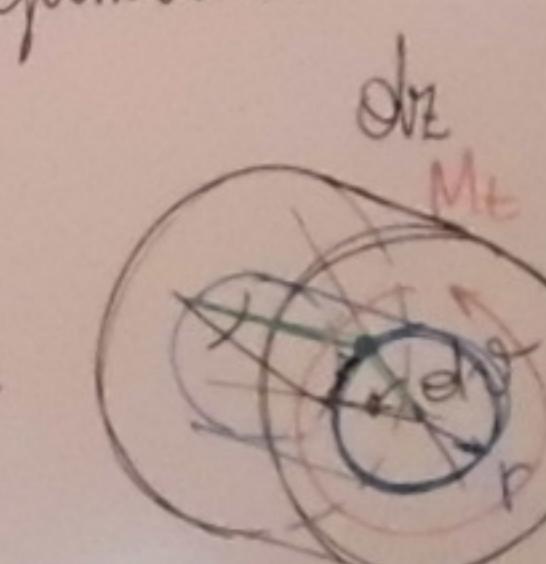
$$= K \int_A r^2 r dr d\theta = K J_g$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_t}{J_g}$$

$$J_g = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{4}$$

$$J_g = C \text{ momento di inerzia polare rispetto al centro}$$

#### - Deformabilità



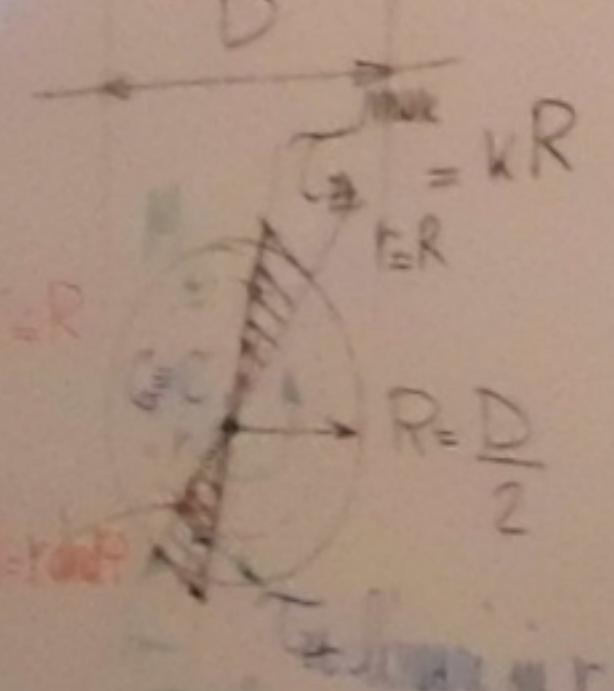
$$\tau_{zt} dr = r d\theta$$

$$\frac{M_t}{J_g} r dr = r d\theta$$

$$d\theta = \frac{M_t dr}{G J_g}$$

- impostazione analitica:

$$J_g = 0; \quad T_z = 0, \quad \tau_z = kr = \frac{M_t}{J_g} r = \frac{2 M_t r}{\pi R^4}$$



- Resta da det. la costante  $K$  (per equivalenza statica tra  $M_t$  e  $\tau_{zt}$ ):

modulo di resistenza a torsione

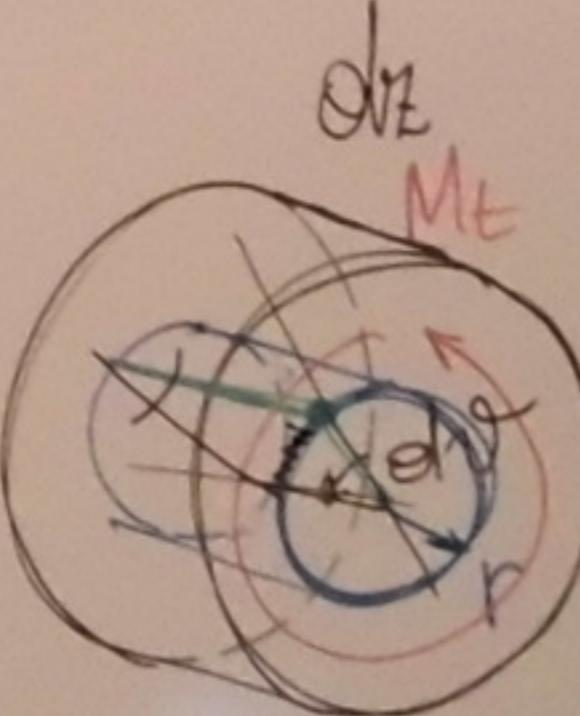
$$M_t = \int_A (\tau_{zt} dA) r$$

$$W_t = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zt} &= \frac{K r}{J_g} \\ K &= \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi R^3}{2}} \end{aligned}$$

momento d'inerzia  
polare rispetto al centro

- Deformabilità



$dV$  rotaz. relativa

$$\gamma_{zt} dz = r dV$$

$$\frac{M_t}{J_g G} dz = r dV$$

s.t. generiche

$$dV = \frac{M_t dz}{G J_g} \quad \downarrow \quad \frac{M_t dz}{G J_t}$$

Rigidità torsionale

- Rotaz. relativa tra le basi a distanza relativa  $l$ :

$$\Delta \theta = \int_0^l dV$$

$$-\int_0^l \frac{M_t dz}{G J_g}$$

$$\Delta \theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

momento d'inerzia torsionale

$$J_t = \frac{J_g}{\eta^2} \text{ fattore di torsione} \geq 1$$