Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

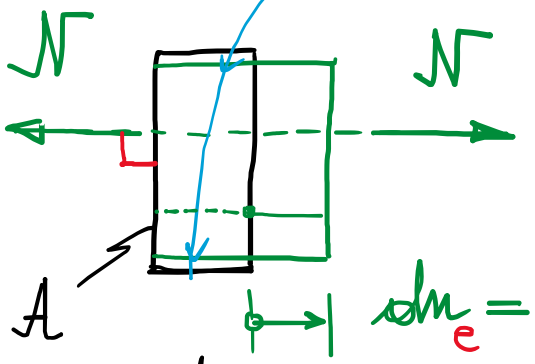
LEZIONE 09

Analisi dei sistemi di travi deformabili : comp. di spostamento di strutt., risoluz. strutt. iperstatiche

Deformazioni elastiche elementari del concio di trave (vedi casi di de Saint Venant):

$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ legge costitutiva (elastica lineare) costanti

$\sigma = \dfrac{N}{A}$ (contraz. trasv. ν)



$d\lambda_e = \varepsilon\, dx$

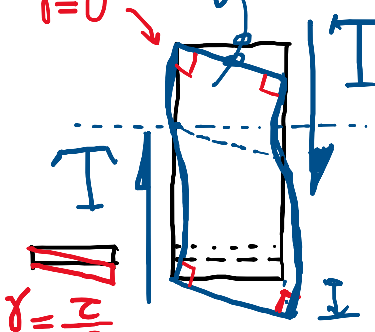
$= \dfrac{N\, dx}{E \cdot A}$

[F] rigidezza assiale $E \cdot A$ — $EA \to \infty$ inesten.

E : modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young $\dfrac{[F]}{[L]^2}$

A : area della sezione trasversale $[L]^2$

ingobbamento fuori piano (legato alla distribuzione non uniforme delle deform. tangenziali)



$\gamma = \dfrac{\tau}{G}$

$\tau = \dfrac{T}{A}$

$dt_e = \bar{\gamma}\, dx$

$= \mu \dfrac{T\, dx}{G \cdot A}$

[F] rigidezza tagliante $G \cdot A$ — $GA \to \infty$ indeform. a taglio

$\dfrac{E}{2(1+\nu)} = G$: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio (isotropo)

A : idem — propr. geom. sez. trasv.

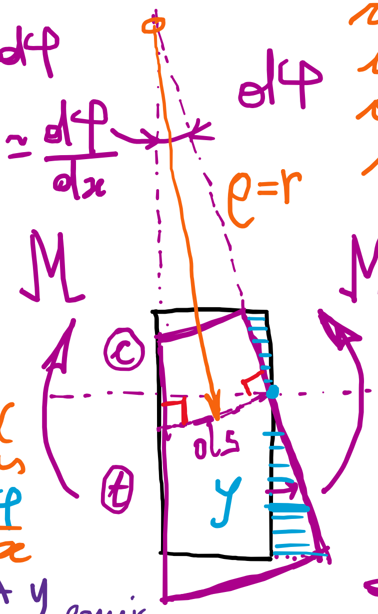
$\mu \geq 1$: fattore di taglio

$ds = \rho\, d\varphi$

$\chi = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\varphi}{ds} \simeq \dfrac{d\varphi}{dx}$ curvatura

raggio di curvatura della linea d'asse inflessa

$\rho = r$



rotazione relativa con conservazione della sezione piana

$\sigma = E\varepsilon$

$\underset{\sim}{\chi}$

$\varepsilon \cancel{dx} = y \dfrac{d\varphi}{\cancel{dx}}$

$M = \int_A \sigma\, dA\, y$ equiv. statica

$= E\chi \underbrace{\int_A y^2\, dA}_{J>0}$

$[F][L]^2$ rigidezza flessionale $E \cdot J$ — $EJ \to \infty$ indeform. flession.

$d\varphi_e = \chi\, dx$

$= \dfrac{M\, dx}{E\, J}$

$\chi = \dfrac{M}{EJ}$

E : idem

J : momento d'inerzia della sezione trasversale $[L]^4$

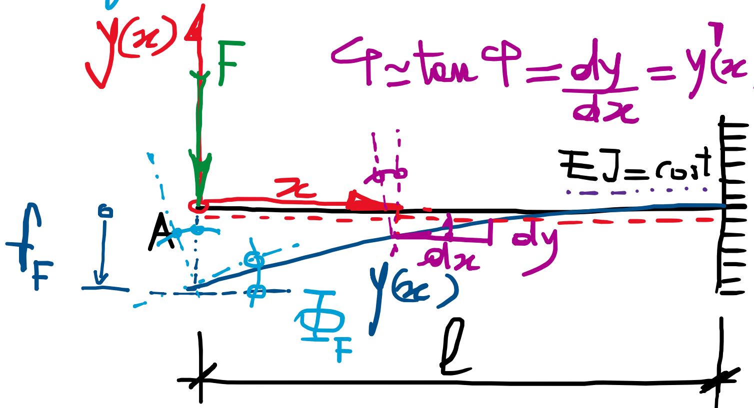
Metodo della Linea Elastica (deformazione di strutture inflesse con effetti flessionali predominanti)

$[\, dn \to 0 \; ; \; dt \to 0 \; ; \; EA \to \infty \; ; \; GA \to \infty \,]$

curvatura $\chi_e = \dfrac{M}{EJ}$ $\iff$ $M = EJ\,\chi_e$ legge "costitutiva" della trave (Eulero-Bernoulli-Navier)

$0 <$ rigidezza flessionale EJ

$\varphi \simeq \tan\varphi = \dfrac{dy}{dx} = y'(x)$



Curvatura di linea piana di eq.ne $y = y(x)$

$$\chi(x) = \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} \simeq y''(x)$$

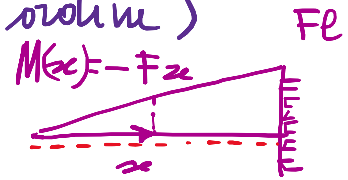
$|y'(x)| << 1$ piccole deformazioni (gradienti di spostamento)

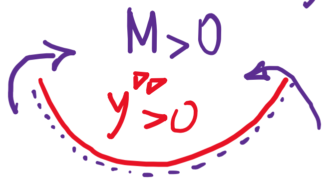
$$\varphi(x) = y'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = y''(x) = \chi(x)$$

$y(x)$: spost. trasversale (Linea Elastica)

Equazione differenziale della LE (del 2° ordine)

- $EJ\, y''(x) = +M(x) \overset{\text{equil.}}{=} -Fx$





$\int dx$

- $EJ\, y'(x) = -F\dfrac{x^2}{2} + A_1$

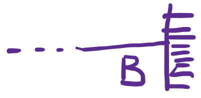
A_1, A_2 : costanti di integrazione

$\int dx$

- $EJ\, y(x) = -F\dfrac{x^3}{6} + \underline{A_1 x + A_2}$

componente di moto rigido rototraslatorio legata alla scelta del sistema di riferimento

Condizioni al contorno (c.c.)



$v_B = 0$, $\varphi_B = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y(\ell) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$

Imposizione delle c.c.

$EJ\, y''(l) = 0 \Rightarrow -\frac{Fl^2}{2} + A_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{Fl^2}{2}}$

$EJ\, y(l) = 0 \Rightarrow -\frac{Fl^3}{6} + A_1 l + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{Fl^3}{6} - A_1 l = \frac{Fl^3}{6} - \frac{3}{3}\frac{Fl^2}{2} l = \boxed{-\frac{1}{3} Fl^3 = A_2}$

Equazione finale della LE:

$$y(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Fx^3}{6} + \frac{Fl^2}{2}x - \frac{Fl^3}{3}\right]$$

$$y'(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Fx^2}{2} + \frac{Fl^2}{2}\right]$$

$$y''(x) = \frac{1}{EJ}\left[-Fx\right] = \frac{M(x)}{EJ}$$

$y(0) = \frac{A_2}{EJ} = -f_F \rightarrow f_F = \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EJ}$

$y'(0) = \frac{A_1}{EJ} = \Phi_F \rightarrow \Phi_F = \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EJ}$

Significato fisico delle costanti di integrazione

coefficienti di influenza

$(F = 1)\quad f_1 = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ} = \frac{f_F}{F}$

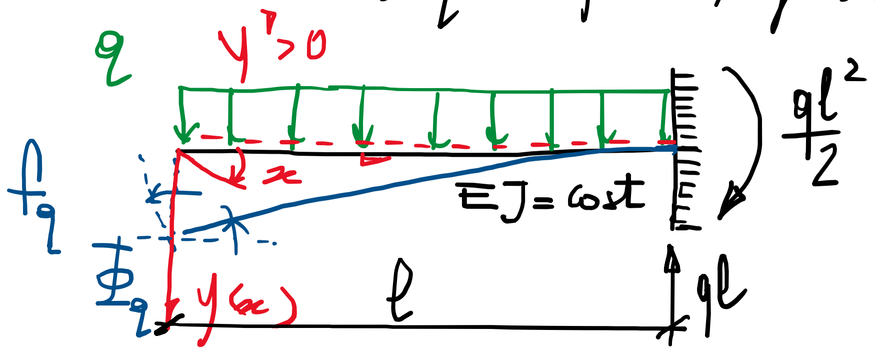
N.B.:

- Il gruppo dimensionale $\frac{Fl^3}{EJ}$ rappresenta spostamenti elastici flessionali
- Il gruppo dimensionale $\frac{Fl^2}{EJ}$ rappresenta rotazioni elastiche flessionali

Infatti: $\left[\frac{Fl^3}{EJ}\right] = \frac{\cancel{[F]}[L]^{\cancel{3}}}{\frac{\cancel{[F]}}{\cancel{[L]^2}}\,\cancel{[L]^{4}}^{2}} = [L]$ lunghezze

$\left[\frac{Fl^2}{EJ}\right] = \ldots\ldots\ldots = \frac{[L]}{[L]} = [1]$ numero puro

Caso con q uniform. ripartito



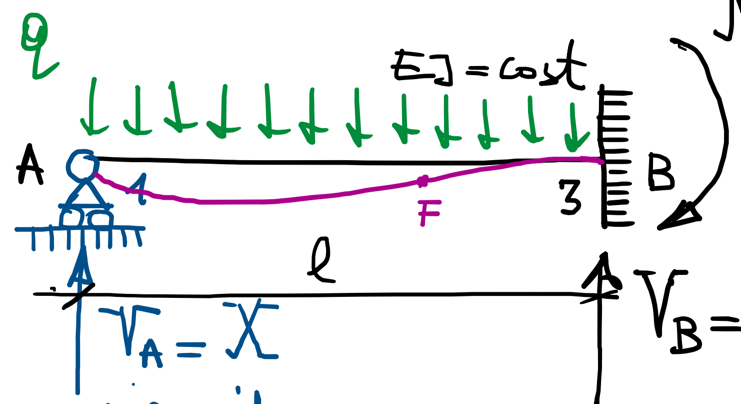
$$\begin{cases} EJ\, y''(x) = +M(x) = \frac{qx^2}{2} \\ EJ\, y'(x) = \frac{qx^3}{6} + A_1 \\ EJ\, y(x) = \frac{qx^4}{24} + A_1 x + A_2 = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3}{6}x + \frac{ql^4}{8} \end{cases}$$

c.c. $EJ\, y'(l) = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{ql^3}{6} \Rightarrow \Phi_q = \frac{1}{6}\frac{ql^3}{EJ}$

$EJ\, y(l) = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{ql^4}{24} - A_1 x = -\frac{ql^4}{24} + \frac{4ql^3}{4\,6} l = \frac{ql^4}{8} \Rightarrow f_q = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EJ}$

Struttura iperstatica (staticamente indeterminata) – Metodo delle forze

$M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl$



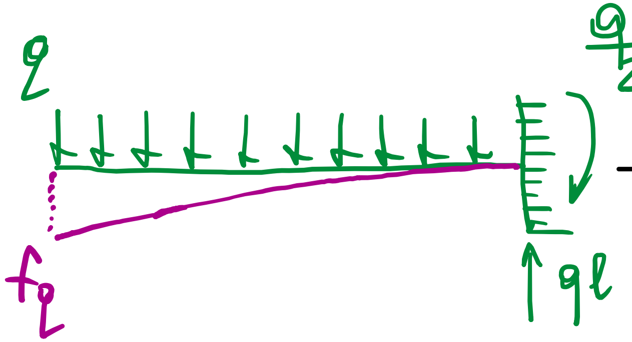
$V_B = ql - X$

$V_A = X$

incognita iperstatica
(in corrisp. di gdv ritenuto iperstatico)

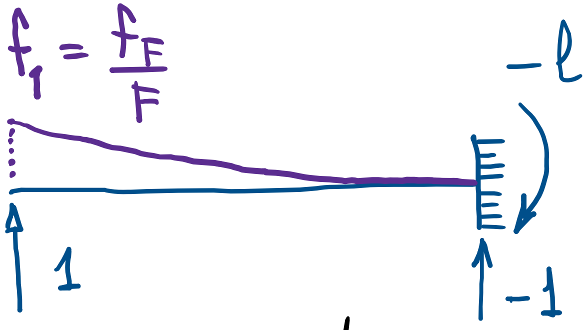
$RV = RV(q, X)$

$=$



$+ X$

$f_1 = \frac{f_F}{F}$



$v_A = -f_q + X f_1 = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{f_1} = \frac{\frac{1}{8}\frac{ql^4}{\cancel{EJ}}}{\frac{1}{3}\frac{1\, l^3}{\cancel{EJ}}} = \frac{3}{8} ql$

condizione di congruenza
rispetto del carrello in A