Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

Risposta a forzante armonica $Fe^{i\omega t}$ (trattazione in variabili complesse) $\left(u_{st} = \frac{F}{K}\right)$

$\ddot{v} + 2\zeta\omega_1\dot{v} + \omega_1^2 v(t) = \omega_1^2 u_{st}\cos\omega t \leftarrow F(t) = F\cos\omega t$; $v(t)$ risposta a $F\cos\omega t$

$i\left(\ddot{u} + 2\zeta\omega_1\dot{u} + \omega_1^2 u(t) = \omega_1^2 u_{st}\sin\omega t \leftarrow F(t) = F\sin\omega t\right.$; $u(t)$ " " $\left.F\sin\omega t\right)$

$\ddot{z} + 2\zeta\omega_1\dot{z} + \omega_1^2 z(t) = \omega_1^2 u_{st}e^{i\omega t} \leftarrow F(t) = F\underbrace{e^{i\omega t}}_{\cos\omega t + i\sin\omega t}$; $z(t) = \underbrace{v(t)}_{Re\{z(t)\}} + i\underbrace{u(t)}_{Im\{z(t)\}}$ variabili complesse

Integrale particolare: $\mathcal{N}u_{st}$

fase

$z_p(t) = Ze^{i\omega t} = Z^* e^{i(\omega t - \xi)}$ (ritardo della risposta $z_p(t)$ rispetto alla forz. $Fe^{i\omega t}$)

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\dot{z}_p(t) = i\omega Ze^{i\omega t} = \omega Z e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow$ velocità in quadratura in anticipo rispetto alla risposta $z_p(t)$

ampiezza ωZ

$\ddot{z}_p(t) = -\omega^2 \underbrace{Ze^{i\omega t}}_{z_p(t)} \Rightarrow$ accelerazione in opposizione di fase

ampiezza $\omega^2 Z$

Z: variabile complessa; Z^* variabile reale $(Z^* = \mathcal{N}u_{st})$ fattore di amplificazione dinamica

Evidentemente:

$$Z = Z^* e^{-i\xi} = Z^*(\cos\xi - i\sin\xi) = \underbrace{Z^*\cos\xi}_{Z_1} - i\underbrace{Z^*\sin\xi}_{Z_2} = Z_1 - iZ_2$$

$$\begin{cases} Re\{Z\} = Z_1 = Z^*\cos\xi \\ Im\{Z\} = -Z_2 = -Z^*\sin\xi \end{cases}$$

$$\left(\frac{\cancel{\omega_1^2}}{\cancel{\omega_1^2}} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + 2\zeta\frac{\cancel{\omega_1}}{\cancel{\omega_1}}\frac{\omega}{\omega_1} i\right) Z \cancel{e^{i\omega t}} \overset{\forall t}{=} \frac{\cancel{\omega_1^2}}{\cancel{\omega_1^2}} u_{st}\, \cancel{e^{i\omega t}}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{f}{f_1}$ rapporto di frequenze ("frequency ratio")

$$\boxed{(1-\beta^2 + i\,2\zeta\beta)\, Z = u_{st}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{1-\beta^2 + i\,2\zeta\beta} u_{st}} \cdot \frac{1-\beta^2 - i\,2\zeta\beta}{1-\beta^2 - i\,2\zeta\beta}$$

$i^2 = -1$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{Z}{u_{st}} = \frac{1-\beta^2 - i\,2\zeta\beta}{\underbrace{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}_{D}} = \underbrace{\frac{1-\beta^2}{D}} - i\underbrace{\frac{2\zeta\beta}{D}} = \frac{Z_1}{u_{st}} - i\frac{Z_2}{u_{st}} \ (*)$$

D (denominatore)

$\frac{Z_1}{u_{st}} = \underbrace{\frac{Z^*}{u_{st}}}_{N = \frac{1}{\sqrt{D}}} \cos\xi \qquad \frac{Z_2}{u_{st}} = \underbrace{\frac{Z^*}{u_{st}}}_{N = \frac{1}{\sqrt{D}}} \sin\xi$

$\frac{1-\beta^2}{D} = \frac{1}{\sqrt{D}}\cos\xi$

$\frac{2\zeta\beta}{D} = \frac{1}{\sqrt{D}}\sin\xi$

Quindi: $\cos\xi = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{D}}$; $\sin\xi = \frac{2\zeta\beta}{\sqrt{D}}$

$$\tan\xi = \frac{\sin\xi}{\cos\xi} = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \Rightarrow \boxed{\xi = \operatorname{atan}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}}$$

(*) Inoltre:

$$|Z| = Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}{D} u_{st} = \frac{\sqrt{D}}{D} u_{st} = \frac{1}{\sqrt{D}} u_{st} = N u_{st} \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}}$$

Relazioni come precedentemente determinato per solo $F \sin\omega t$

– Pertanto, si ottiene:

$$z_p(t) = Z e^{i\omega t} = \overset{N u_{st}}{Z^*} e^{i(\omega t - \xi)}$$

$$= (Z_1 - i Z_2)(\cos\omega t + i \sin\omega t)$$

$$= \underbrace{Z_1 \cos\omega t + Z_2 \sin\omega t}_{v_p(t)} + i\,(\underbrace{Z_1 \sin\omega t - Z_2 \cos\omega t}_{u_p(t)})$$

$v_p(t)$ risp. a $F\cos\omega t$ $\qquad$ $u_p(t)$ risp. a $F\sin\omega t$

$$\Longrightarrow \quad z_p(t) = (Z_1 - i Z_2) e^{i\omega t} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$Z_1 e^{i\omega t}$: in fase con la forzante

$Z_2 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$: in quadratura in ritardo rispetto alla forzante

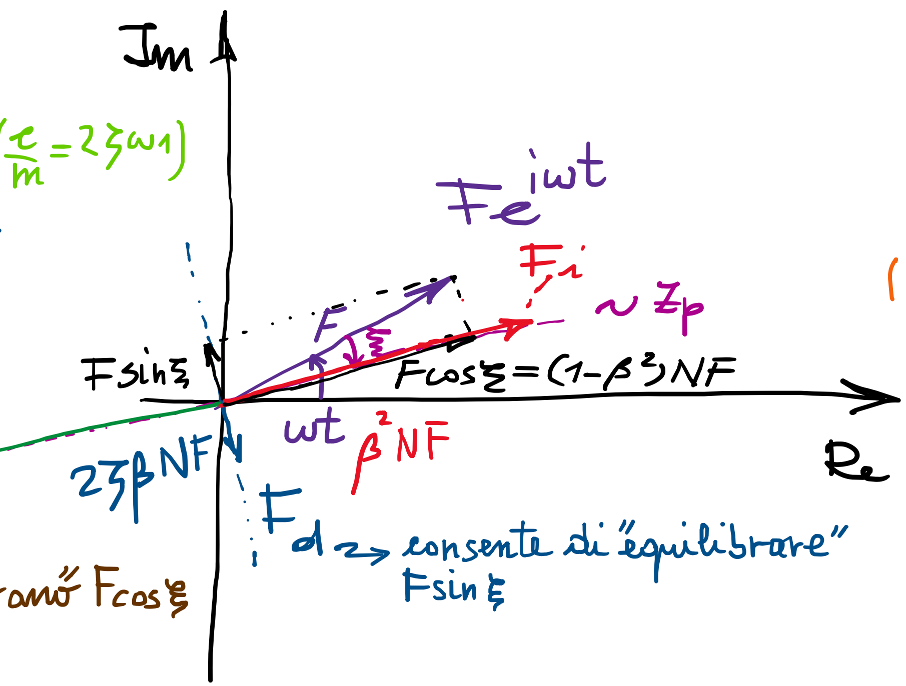
Rappresentazioni nel piano di Argand (vettori rotanti)

Forze:

$$F_e = \cancel{K} N \underbrace{\frac{F}{\cancel{K}}}_{u_{st}}$$

$$F_d = c\,\omega N \frac{F}{K} = 2\xi m \omega_1 \omega N \frac{F}{k} = \underbrace{2\xi\beta}_{\sin\xi} N F \qquad \left(\frac{c}{m} = 2\xi\omega_1\right)$$

$$F_i = m\,\omega^2 N \frac{F}{K} = \beta^2 N F$$



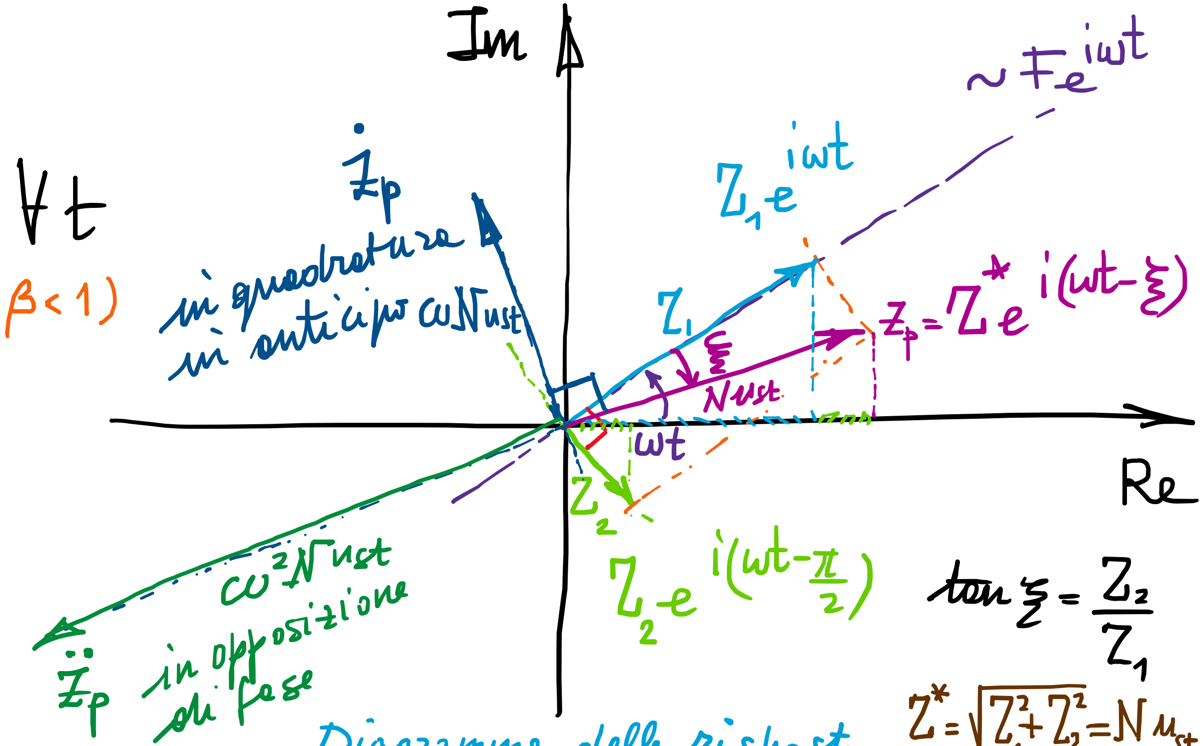
$F_d \Rightarrow$ consente di "equilibrare" $F\sin\xi$

$F_e \Rightarrow$ e F_i "equilibrano" $F\cos\xi$

Diagramma delle forze ("equilibrio dinamico")

$\forall t$

$(\beta < 1)$

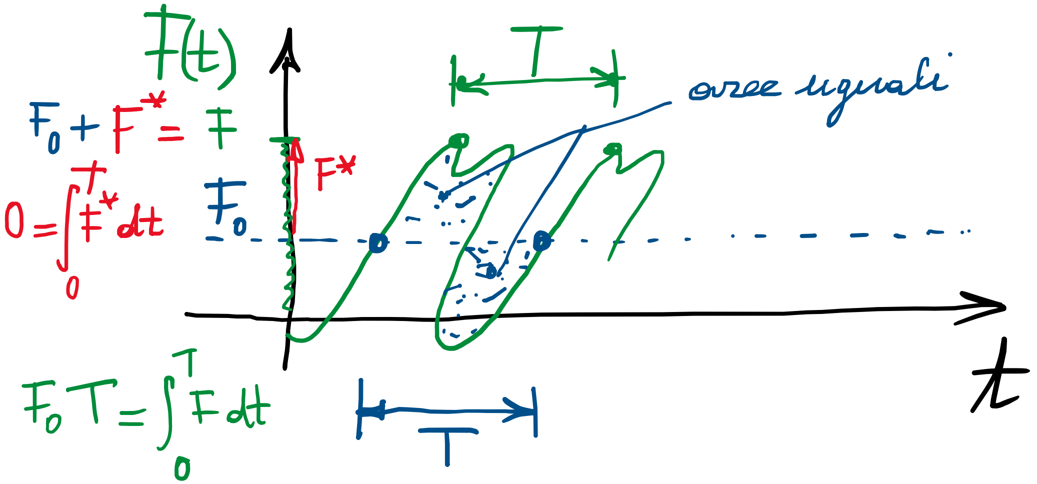


$$\tan\xi = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$Z^* = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = N u_{st}$$

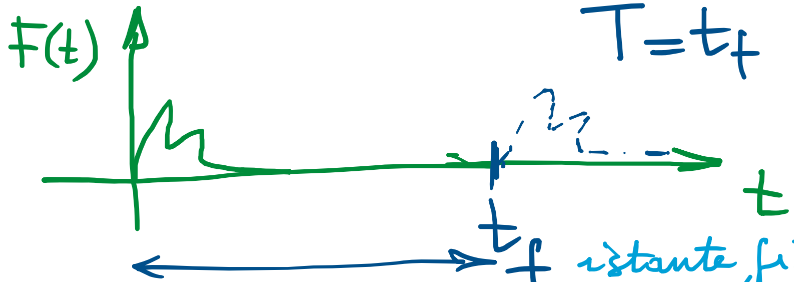
Diagramma delle risposte

• **Risposta a forzante periodica:** $F(t+T)=F(t)$ T: periodo della forzante



— casi pratici con forzanti periodiche

— forzanti "rese periodiche" ai fini dell'analisi



istante finale di interesse per l'analisi dinamica

Sviluppo in serie di Fourièr:

troncam. $(\bar{n})$

approx.

$$F(t) \overset{\sim}{=} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\cos\omega_n t}_{\frac{e^{i\omega_n t}+e^{-i\omega_n t}}{2}} + B_n \underbrace{\sin\omega_n t}_{\frac{e^{i\omega_n t}-e^{-i\omega_n t}}{2i}} =$$

con $\omega_n = n\omega$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione fondamentale

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt \quad \text{valor medio}$$

notaz. esponenziale

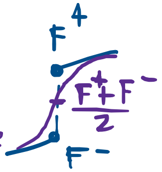
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

coeff. serie di F.

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\omega_n t\,dt$$

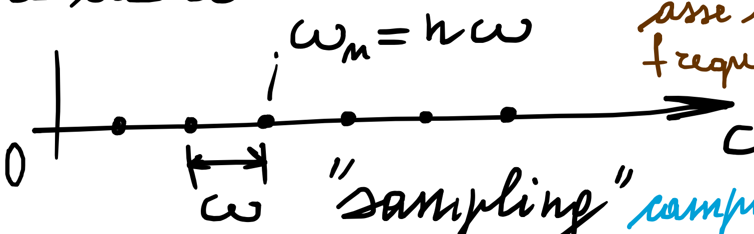
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\omega_n t\,dt$$

$$C_n = \frac{A_n - iB_n}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,e^{-i\omega_n t}\,dt$$



f.ni generalmente continue

"treno" di infinite componenti armoniche di pulsazioni ω_n discrete separate da ω



"sampling" campionamento

Risposta :

$$u_{st} = \frac{F}{K} \Rightarrow F = K u_{st}$$

$\beta_n = \frac{\omega_n}{\omega_1} = n\frac{\omega}{\omega_1} = n\beta$

$\frac{Z_{1n}}{u_{st}} = \frac{1-\beta_n^2}{D_n}$

$\frac{Z_{2n}}{u_{st}} = \frac{2\zeta\beta_n}{D_n}$

$D_n = (1-\beta_n^2)^2 + (2\zeta\beta_n)^2$

risposta a $A_n \cos\omega_n t$ — risposta a $B_n \sin\omega_n t$

$$u_p(t) = \frac{A_0}{K} + \sum_{1}^{\infty}{}_n\, A_n\left(\frac{Z_{1n}}{F}\cos\omega_n t + \frac{Z_{2n}}{F}\sin\omega_n t\right) + B_n\left(\frac{Z_{1n}}{F}\sin\omega_n t - \frac{Z_{2n}}{F}\cos\omega_n t\right)$$

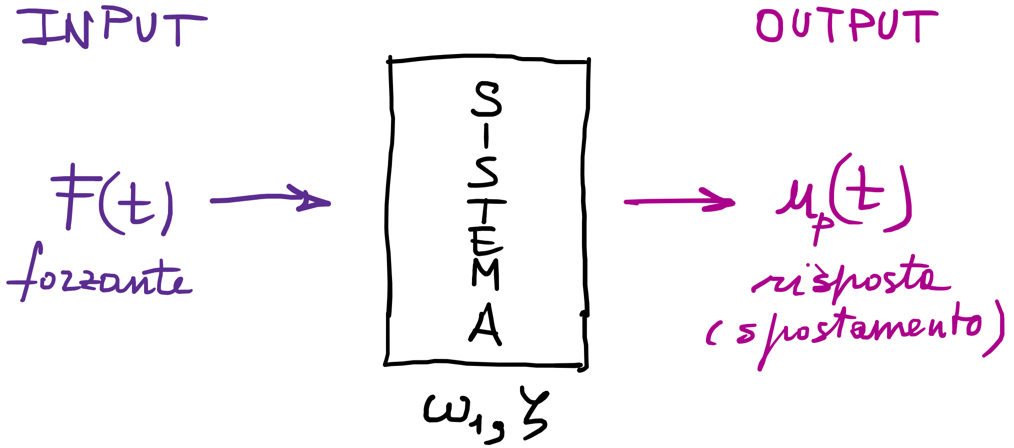
$F \Rightarrow K u_{st}$

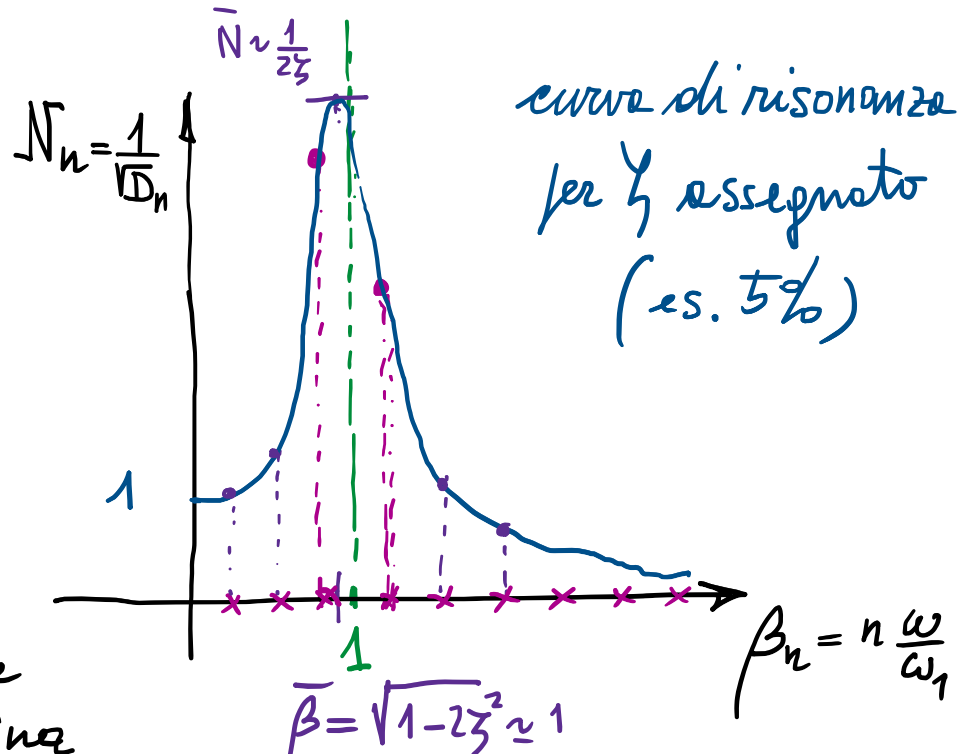
(per sovrapposizione degli effetti di ogni componente armonica)

$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{1}^{\infty}{}_n\, \frac{A_n}{K}\left(\frac{Z_{1n}}{u_{st}}\cos\omega_n t + \frac{Z_{2n}}{u_{st}}\sin\omega_n t\right) + \frac{B_n}{K}\left(\frac{Z_{1n}}{u_{st}}\sin\omega_n t - \frac{Z_{2n}}{u_{st}}\cos\omega_n t\right)$$

$$= \frac{A_0}{K} + \sum_{1}^{\infty}{}_n\, \frac{A_n'}{K}\cos\omega_n t + \frac{B_n'}{K}\sin\omega_n t$$

$A_n' = A_n\frac{Z_{1n}}{u_{st}} - B_n\frac{Z_{2n}}{u_{st}}$ $\qquad$ $B_n' = A_n\frac{Z_{2n}}{u_{st}} + B_n\frac{Z_{1n}}{u_{st}}$





curva di risonanza per ζ assegnato (es. 5%)

contenuto in frequenza della forzante ⇒ Funge da "filtro" selezionando, esaltando, le componenti armoniche con pulsazione più vicina a quella naturale del sistema. ⇒ visione nel dominio delle frequenze

Concetti fondamentali :

– Forzante armonica in variabili complesse : $\overset{\text{ampiezza}}{F}\, e^{i\overset{\text{pulsazione}}{\omega} t} = F\cos\omega t + i\, F\sin\omega t$

(trattazione unificata)

$$z_p(t) = v_p(t) + i\, u_p(t)$$

– Risposta del sistema : (m, ζ, K)

(integrale particolare)

$$z_p(t) = \underbrace{Z}_{Z_1 - iZ_2} e^{i\omega t} = \underbrace{Z^*}_{N u_{st}} e^{i(\omega t - \xi)} = Z_1 e^{i\omega t} + Z_2 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \underbrace{Z_1 \cos\omega t + Z_2 \sin\omega t}_{v_p(t)} + i\underbrace{\left(Z_1 \sin\omega t - Z_2 \cos\omega t\right)}_{u_p(t)}$$

$$u_{st} = \frac{F}{K} \; ; \qquad N(\beta;\zeta) = \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \, , \qquad \xi = \operatorname{atan} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \qquad \left(\beta = \frac{\omega}{\underbrace{\omega_1}_{\sqrt{\frac{K}{m}}}} \text{ rapporto di frequenze}\right)$$

spost. statico (risposta statica)

fattore di amplificazione dinamica (rispetto a risposta statica)

fase (sfasamento tra forzante e risposta)

$Z \to$ rappresentazione nel piano di Argand, delle risposte ($z_p, \dot{z}_p, \ddot{z}_p$) e delle forze ($F; F_e, F_d, F_i$).

- Generalizzazione ⇒ forzante periodica (da singola componente armonica a sovrapposizione di infinite componenti armoniche ⇒ Fourier)

di periodo T

$F(t+T) = F(t)$

Forzante (input)

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{i\omega_n t}$$

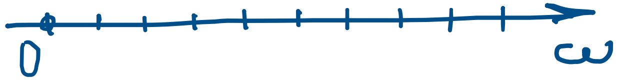
$$\Rightarrow$$

per Sovrapposiz. degli Effetti

Risposta (output)

$$z_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n'}{K} \, e^{i\omega_n t}$$

$\omega_n = n\,\omega \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

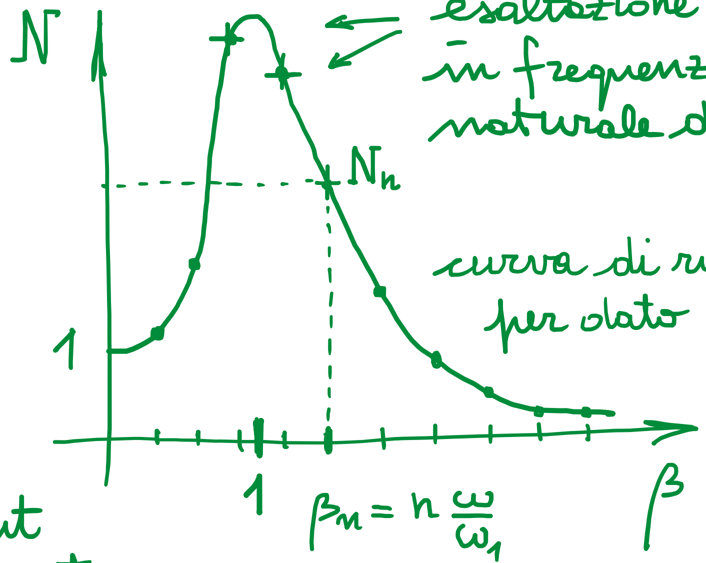


infinite componenti armoniche, con frequenze a passo $\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}$ (discretizzazione dell'asse delle frequenze)

e ampiezze ad esse associate

→ SISTEMA STRUTTURALE ω_1, ζ →

input esogeno — DNA del sistema — output di risposta



esaltazione delle componenti in frequenza prossime a quella naturale del sistema $\left(\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}\right)$

curva di risonanza per dato ζ

"filtra" l'input esogeno (contenuto in frequenza) in base a caratteristiche endogene ⇒ vedi analisi nel dominio delle frequenze

SOMMARIO (Lez. 06)

- Trattazione in variabili complesse ⇒ $Fe^{i\omega t} = F\cos\omega t + iF\sin\omega t$.
- Derivazione delle relazioni caratteristiche par. determinate.
- Risposta simultanea alle comp.ti armoniche $\cos\omega t$ e $\sin\omega t$.
- Rappresentazione nel piano di Argand
  - diagramma delle risposte.
  - diagramma delle forze.
- Generalizzazione: forzante periodica (treno di infinite armoniche).
- Effetto "filtro" del sistema vs. le comp. armoniche della forzante vicine a quelle corrispondenti alla pulsazione naturale del sistema.
- Next step: risposta a forzante generica (a partire da forzante impulsiva)