Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

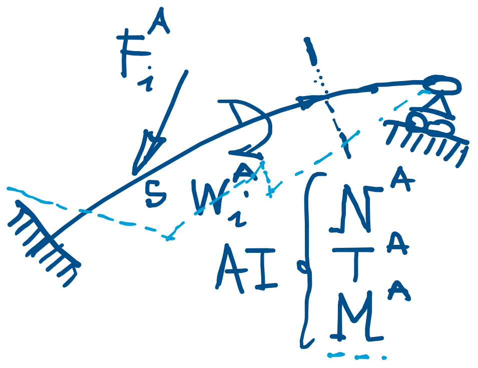
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 11

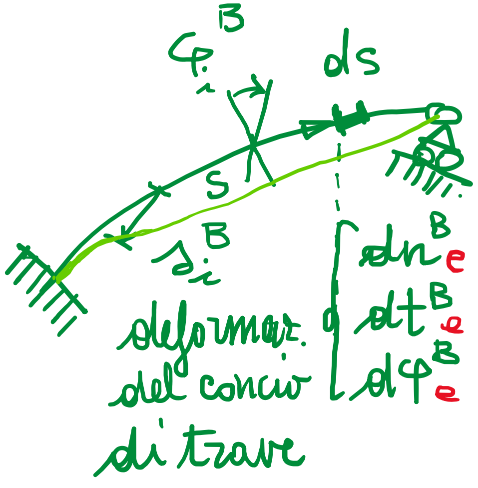
Principio dei Lavori Virtuali (PLV) [Analisi dei sistemi di travi]

Ai fini dell'enunciato, si pongano le seguenti definizioni:

Ⓐ Sistema staticamente ammissibile: famiglie di quantità statiche (forze, coppie; Azioni Interne: N, T, M) equilibrate



Ⓑ Sistema cinematicamente ammissibile: famiglie di quantità cinematiche (spostamenti, rotazioni; deformazioni elementari dn, dt, dφ) congruenti o compatibili



↔ legate a corrispondenti AI^B: N^B, T^B, M^B (EA, GA, EJ)

EA → ∞, GA → ∞

NB: Sono le classi all'interno delle quali potremo definire ammissibili dei sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema reale

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza):

$\forall$ coppia di sistemi (anche "virtuali") Ⓐ e Ⓑ, rispettivamente *staticamente* e *cinematicamente* ammissibili, vale la seguente identità dei Lavori (Virtuali) mutui esterno ed interno:

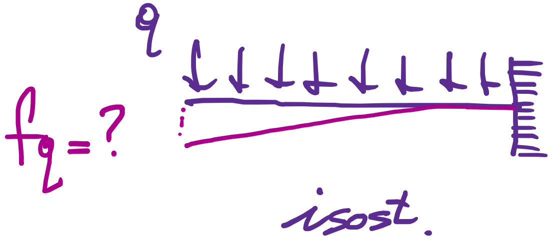
$$\mathcal{L}_e^{AB} = \sum_i F_i^A s_i^B + W_i^A \varphi_i^B = \int_{\text{Struttura}} \cancel{N^A d\lambda^B} + \cancel{T^A dt^B} + M^A d\varphi^B = \mathcal{L}_i^{AB}$$

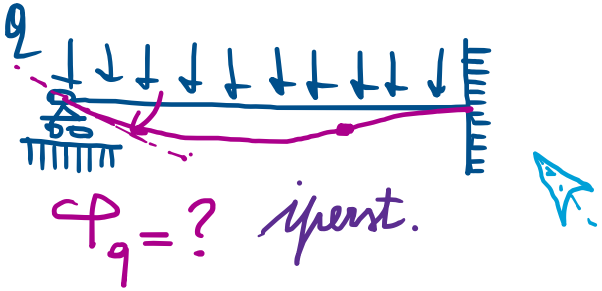
- I sistemi Ⓐ e Ⓑ non sono necessariamente coincidenti col sistema reale ma possono essere "virtuali", cioè del tutto indipendenti e in particolare non legati a delle relazioni di causa-effetto (se pur associabili nel senso dei lavori virtuali).
- Enunciato valido indipendentemente dal comportamento del materiale (in particolare elastico o anelastico).
- In genere si ritengono trascurabili i contributi assiali e taglianti a fronte di quelli flessionali (predominanti nei sistemi di travi snelle). Per corpi rigidi $\mathcal{L}_i^{AB} = 0$, quindi: $\mathcal{L}_e^{AB} = 0$
- Si tratta di un teorema dimostrabile (oltre un assunto, un principio) $\Rightarrow$ vedi dim. nella meccanica dei continui (CdSdC).
- Manifestazioni del PLV: PSV (CS di equilibrio), PFV (CS di congruenza) $\Rightarrow$ CdSdC

Utilizzi del PLV, come metodo di analisi dei sistemi di travi (deformabili):

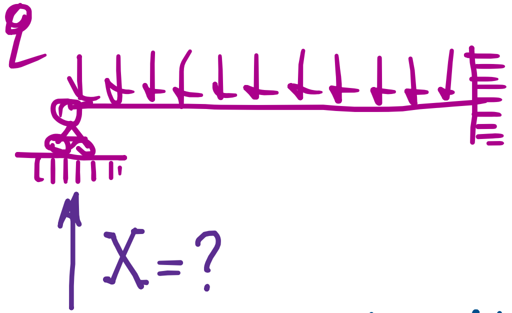
PFV

- Determinazione di componenti di spostamento (in particolare elastico) di strutture deformabili:





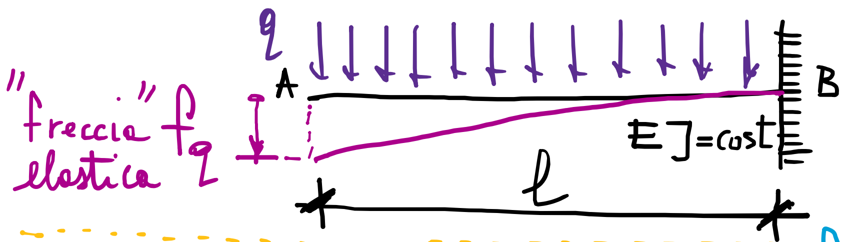
- Risoluzione di strutture staticamente indeterminate, cioè iperstatiche:



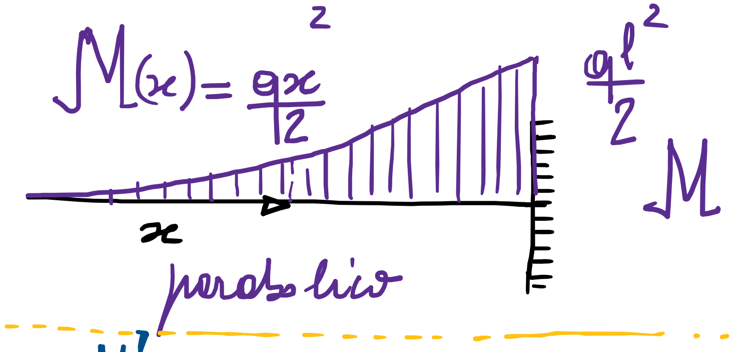
PSV

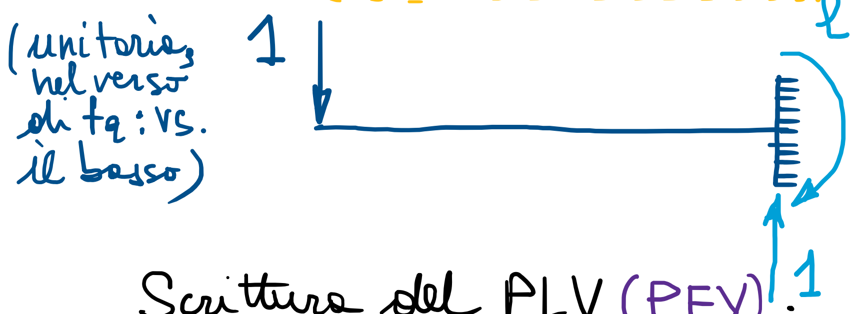
- Calcolo di RV e AI tramite PLV nei sistemi articolati di corpi rigidi ($\mathcal{L}_e^{AB} = 0$) [CdSdC]

Calcolo di componenti di spostamento di travi deformabili:

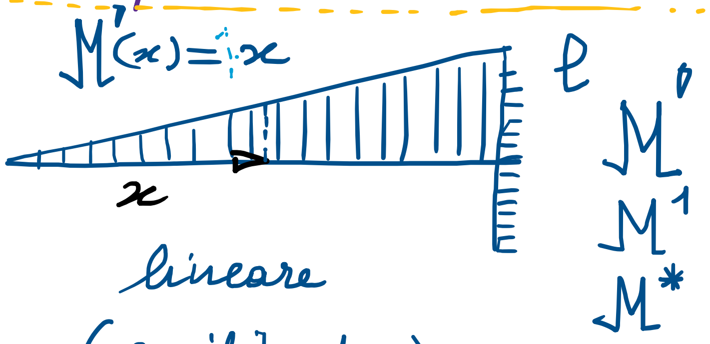


Ⓑ Struttura reale
(2→ congruente)





Ⓐ Struttura virtuale
(fittizia, ausiliaria)
avente solo forza unitaria
in corrispondenza della
componente di spost. da calcolare (equilibrata)



Scrittura del PLV (PFV):

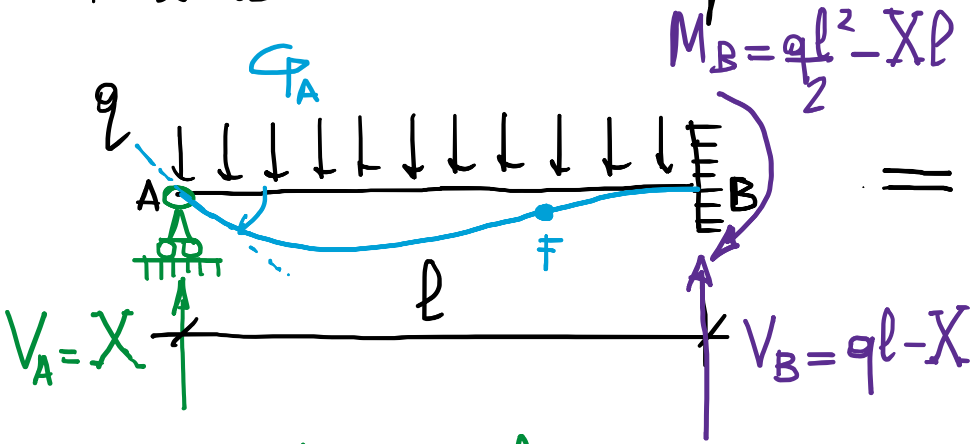
$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1\, f_q + 1\, \cancel{v_B}^{\,0} + l\, \cancel{\varphi_B}^{\,0} = \int_{Str.} M'\, d\varphi_e = \int_{Str.} M' \frac{M\, dx}{EJ} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

vincoli perfetti
(non cedevoli)

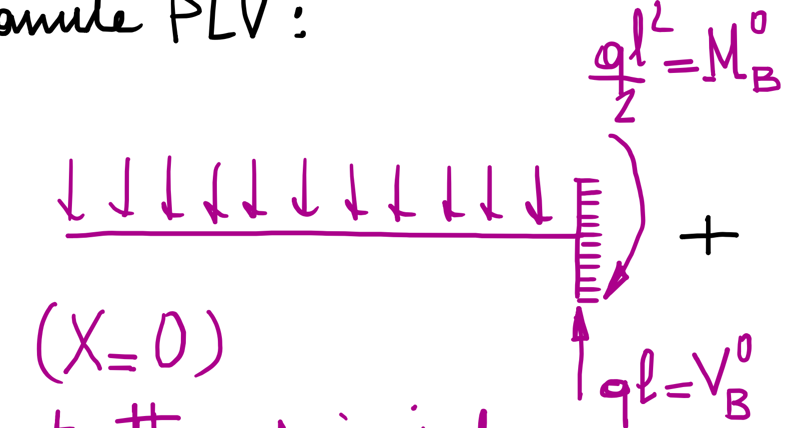
$$f_q = \int_0^l M'(x)\, M(x) \frac{dx}{EJ} = \int_0^l x \frac{qx^2}{2} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{2}\frac{q}{EJ} \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^l = \boxed{\frac{1}{8}\frac{ql^4}{EJ} = f_q}$$

- Il PLV, come metodo di calcolo, consente di calcolare "chirurgicamente" le sole quantità di specifico interesse.
- Di fatto, si è resa necessaria la risoluzione "statica" di un'altra struttura (due strutture isostatiche)

Risoluzione di strutture iperstatiche tramite PLV:



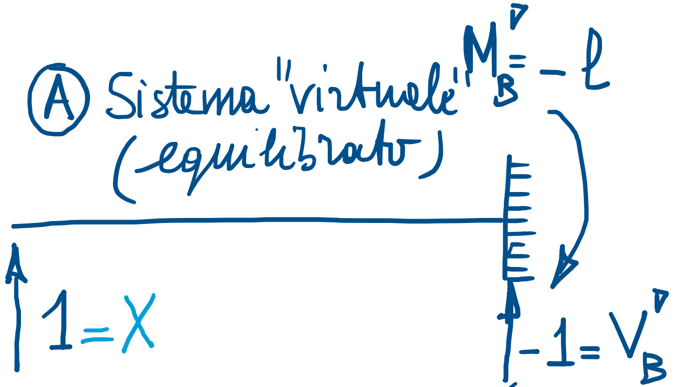
=



struttura principale isostatica

+

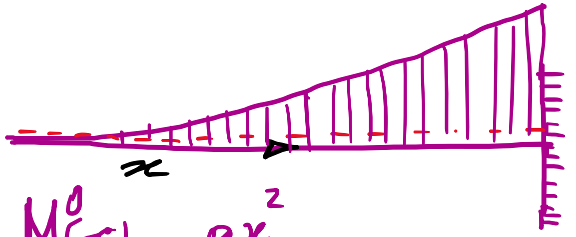
Ⓐ Sistema "virtuale" (equilibrato)



struttura fittizia (con l'iperstatica posta uguale a 1)

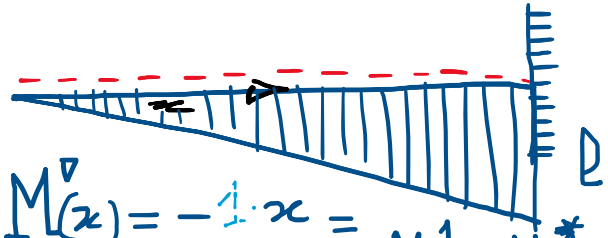
Ⓑ Sistema reale (⇒ congruente)

$$RV(X) = RV^0 + X\,RV^v$$



$M^0(x) = \frac{qx^2}{2}$

+



$M^v(x) = -1 \cdot x = M^1 = M^*$, ecc.

$$M(X, x) = M^0(x) + X\,M^v(x)$$

Scrittura del PLV:

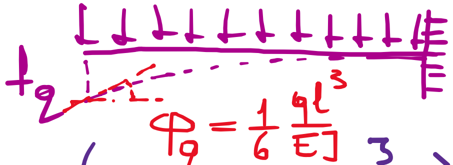
$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1\,\cancel{v_A} - 1\,\cancel{v_B} - \ell\,\cancel{\varphi_B} = \int_{str} M^v \underbrace{\frac{M^0 + XM^v}{EJ}}_{d\varphi_e} ds = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow 0 = \int_{str} M^v M^0 \frac{ds}{EJ} + X \int_{str} M^{v2} \frac{ds}{EJ}$$

$\{v_A = 0\}$

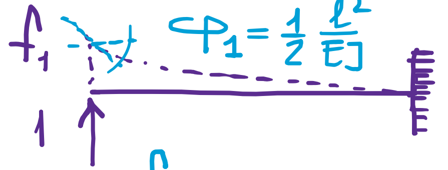
condizione di congruenza

$$X = -\frac{\int_{str} M^v M^0 \frac{ds}{EJ}}{\int_{str} M^{v2} \frac{ds}{EJ}}$$

- $\int_0^\ell M^{\triangledown}_{(x)} M^0_{(x)} \frac{dx}{EJ} = \int_0^\ell (-x)\, \frac{q x^2}{2}\, \frac{dx}{EJ} = -\frac{1}{2}\frac{q}{EJ}\frac{x^4}{4}\Big|_0^\ell = \boxed{-\frac{1}{8}\frac{q\ell^4}{EJ}} = \boxed{-f_q}$



- $\int_0^\ell M^{\triangledown 2}_{(x)} \frac{dx}{EJ} = \int_0^\ell (-x)^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\frac{x^3}{3}\Big|_0^\ell = \frac{1}{3}\frac{\ell^3}{EJ} = f_1 = \frac{f_F}{F}$ $\left(f_F = \frac{1}{3}\frac{F\ell^3}{EJ}\right)$



$$X = -\frac{-\frac{1}{8}\frac{q\ell^4}{EJ}}{\frac{1}{3}\frac{\ell^3}{EJ}} = \frac{3}{8}q\ell \iff v_A = -f_q + X f_1 = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{f_1}$$

condizione di congruenza

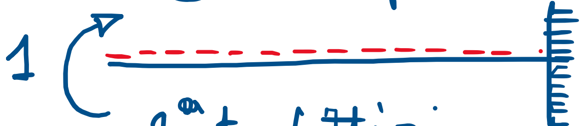
metodo delle "forze"

coefficienti di influenza

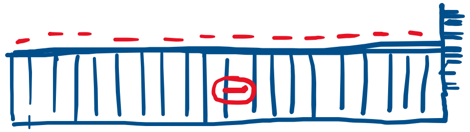
- Sostituendo in RV(X), M(X, x) => RV finali, M finale (idem per N e T)

- A valle, calcolo di componenti di "spostamento" di interesse, per ulteriori scritture del PLV:

Ⓐ Strutt. fittizia



2ª str. fittizia



$M^{\triangledown\triangledown} = -1$

M^{2}

M^{**}

Ⓑ Sist. reale

$$1\,\varphi_A = \int_0^\ell M^{\triangledown\triangledown}_{(x)} \Big(M^0_{(x)} + \overbrace{X}^{\frac{3}{8}q\ell} M^{\triangledown}_{(x)}\Big)\frac{dx}{EJ}$$

$$= \int_0^\ell M^{\triangledown\triangledown}_{(x)} M^0_{(x)}\frac{dx}{EJ} + X\int_0^\ell M^{\triangledown\triangledown}_{(x)} M^{\triangledown}_{(x)}\frac{dx}{EJ}$$

$$= -\varphi_q + X\varphi_1$$

sovrapposizione degli effetti

$-\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\frac{1}{2} = \frac{-8+9}{48}$

$\varphi_A = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EJ}$