Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

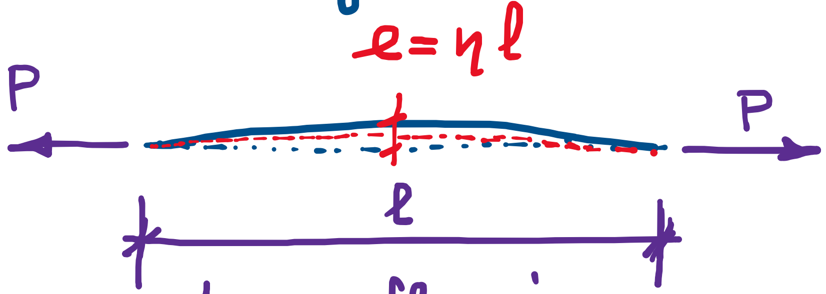
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

Instabilità di sistemi reali (effetto delle imperfezioni)

- Sistemi reali possono generalmente manifestare imperfezioni: aste non perfettamente rettilinee, sezione trasversale non omogenea, materiale con difetti e disomogeneità, carico non perfett. centrato, vincoli cedevoli, ecc.



tenso-flessione

$M = Pe$

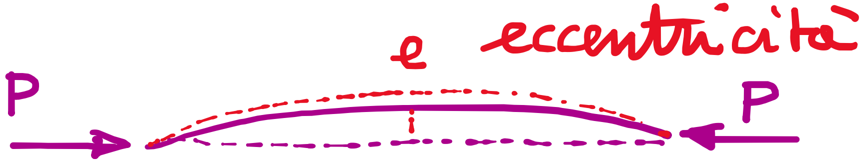
(tende a rettificare)

$\eta = \dfrac{e}{\ell} \ll 1$

$\sim 1\%, 5\%$

(ss. curvatura)

parametro di imperf. geometrica



presso-flessione

$M = Pe$

(tende ad esaltare l'imp.)

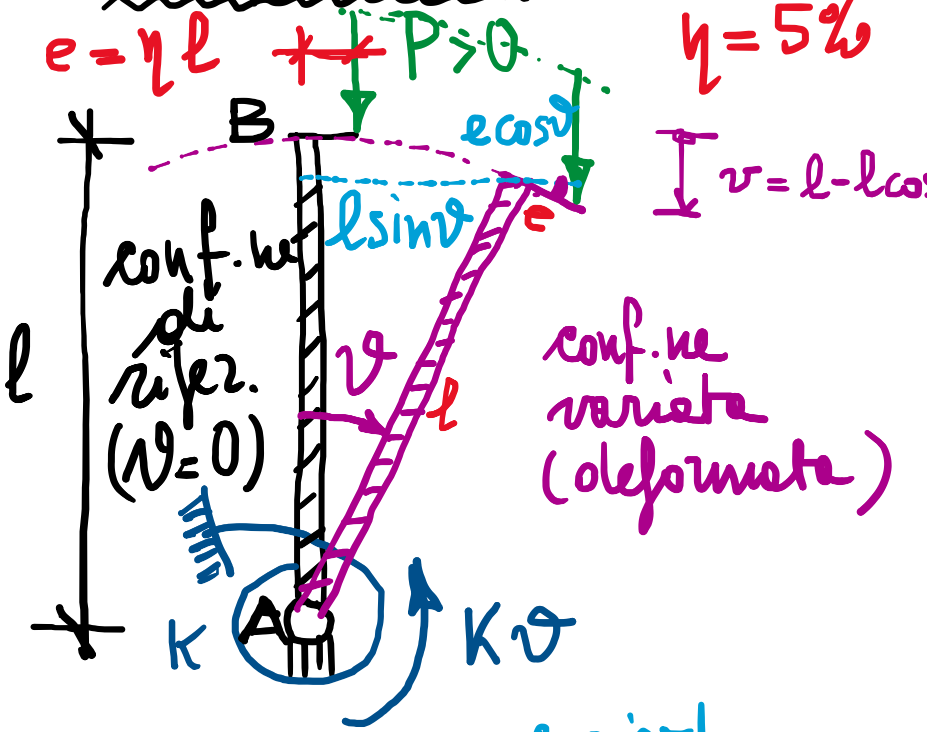
Sistema reale con

.... non sensibile .... condizione di carico ...... che può risultare sensibile alla presenza di imperfezioni e condizionare la stabilità

....

Esempio SDOF con imperfezione (eccentricità del carico di compressione).

$e = \eta\, l \qquad \eta = 5\%$



$v = l - l\cos\vartheta + e\sin\vartheta$

Approccio statico: scrittura dell'equilibrio nella configurazione deformata.

$e=0$ sist. ideale

$$P(l\sin\vartheta + e\cos\vartheta) = K\vartheta$$

effetto destabilizz. (momento ribaltante) — effetto stabilizz. (momento elastico)

N.B. Se $e \neq 0$ ($\eta \neq 0$), $\vartheta = 0$ è conf.ne di equil. solo per $P=0$ ($Pe=0$)

$P = p\,\frac{K}{l}$ — carico base $P_0 = P_{cr}$; p moltiplicatore del carico

$$\underbrace{\frac{Pl}{K}}_{p}(\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta) = \vartheta$$

$$\boxed{p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta}}$$

risposta P-Δ non-lineare (non-linearità geometrica)

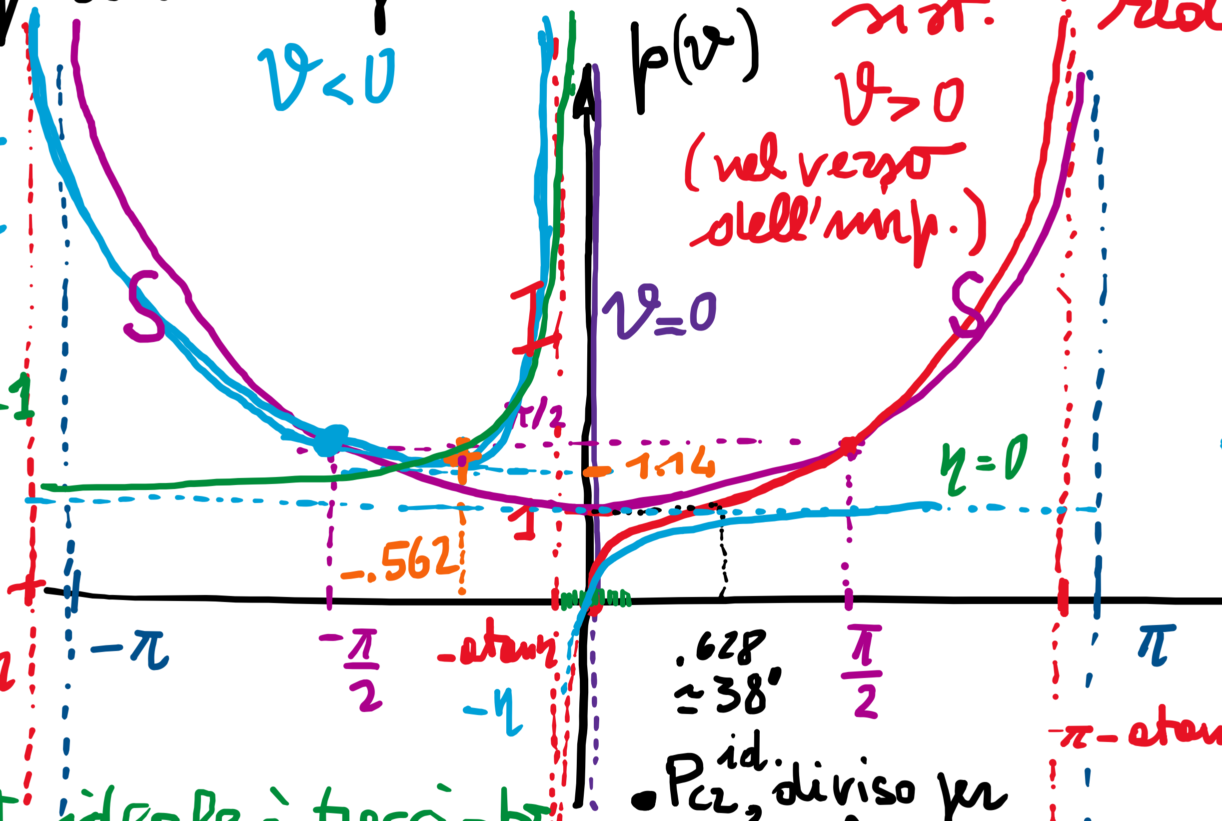
(caso partic.) $\eta = 0 \Rightarrow$ sist. ideale $\quad p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin\vartheta}$

Mappa dei percorsi di equilibrio

ramo secondario sist. reale

ramo primario sist. reale

$\vartheta > 0$ (nel verso dell'imp.)

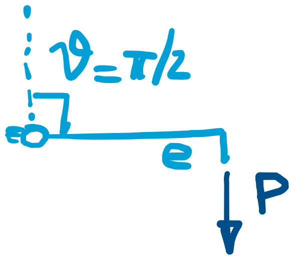


$\eta = 0 \quad p(\vartheta) = \dfrac{\vartheta}{\sin\vartheta}$

$\eta \neq 0$ $(\eta = 5\%)$ $\quad p(\vartheta) = \dfrac{\vartheta}{\underbrace{\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta}_{=0}}$

$= 0 \quad \tan\vartheta = -\eta$

$\vartheta = -\text{atan}\,\eta \pm \pi$



N.B. Il sist. reale devia sin da subito dalla config.ne di rif. $\vartheta = 0$, non appena $p > 0$, restando iniz. vicino per poi approcciare il ramo biforcato del sistema ideale (no p.to di biforcazione).

Analisi per spost. "geom. piccoli" $|\vartheta| << 1$

$\sin\vartheta \simeq \vartheta$, $\cos\vartheta \simeq 1$

$p(\vartheta) = \dfrac{\vartheta}{\underbrace{\vartheta + \eta}_{=0,\ \vartheta = -\eta}}$

$\vartheta \to \pm\infty \quad p \to 1$

Carico critico sist. ideale è tracciato da analisi in piccoli spost. di sist. con imperfezioni.

• $P_{cr}^{id.}$, diviso per opport. fattore di sicurezza f resta utile a definire ove possiamo spingerci con p (e ϑ).

p.to di stazionarietà $(p'(\vartheta) = 0)$

$$p' = \frac{1 \cdot (\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta) - \vartheta(\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta)}{(\text{den})^2} = 0 \Rightarrow \tan\vartheta + \eta = \vartheta(1 - \eta\tan\vartheta)$$

$$\tan\vartheta\,(1 + \eta\vartheta) = \vartheta - \eta \Rightarrow \frac{\eta = 5\%}{\begin{array}{l}\bar{\vartheta} = -.562 \\ \bar{p} = 1.14\end{array}}$$

Approccio energetico

EPT $\quad V(\vartheta) = \underbrace{\frac{1}{2} K \vartheta^2}_{V_e = \mathcal{E} \text{ elastica}} \underbrace{- P\,(\overbrace{\ell - \ell\cos\vartheta + e\sin\vartheta}^{v})}_{V_f = -\mathcal{L}_e^f \text{ forze esterne conservative}} = K\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - \overbrace{\frac{P\ell}{K}}^{p}(1-\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta)\right)$

$e = \eta\,\ell$

Energia Potenziale Totale $\tilde{V} =: \frac{\tilde{V}}{K}$, $K > 0$

$\frac{d}{d\vartheta}$

$V'(\vartheta) = K\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\vartheta - p(\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta)\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta}$

condiz. staz. (CN di equil.)

conf.ni equilibrate

$\frac{d}{d\vartheta}$

$V''(\vartheta) = K(1 - p(\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta))$

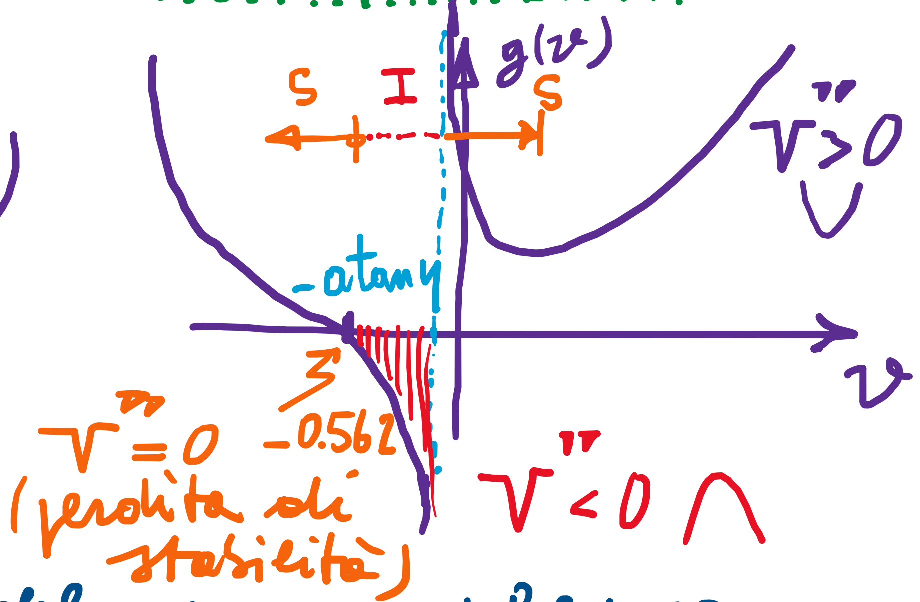
nelle conf.ni equil.

$= K\left(1 - \frac{\vartheta}{\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta}(\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta)\right)$

$= K\left(\underbrace{1 - \vartheta\,\frac{1-\eta\tan\vartheta}{\tan\vartheta + \eta}}_{g(\vartheta)}\right)$

$V'' = 0 \Rightarrow g(\vartheta) = 0 \Rightarrow \tan\vartheta + \eta = \vartheta(1 - \eta\tan\vartheta)$

$(1 + \eta\vartheta)\tan\vartheta = \vartheta - \eta$



Studio del segno (Th di Dirichlet, CS di stabilità)

Analisi in spostamenti "geometricamente piccoli"

"quadraticizzazione" di V

$$V_2(\vartheta) = \frac{1}{2}K\vartheta^2 - P\left(\cancel{l} - l\left(\cancel{1} - \frac{\vartheta^2}{2} + \dots\right) + e\,\vartheta + \dots\right) \leftarrow S$$

approx. al 2° ord.

$$= \frac{1}{2}K\vartheta^2 - Pl\left(\frac{\vartheta^2}{2} + \eta\,\vartheta\right) = K\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - p\left(\frac{\vartheta^2}{2} + \eta\,\vartheta\right)\right)$$

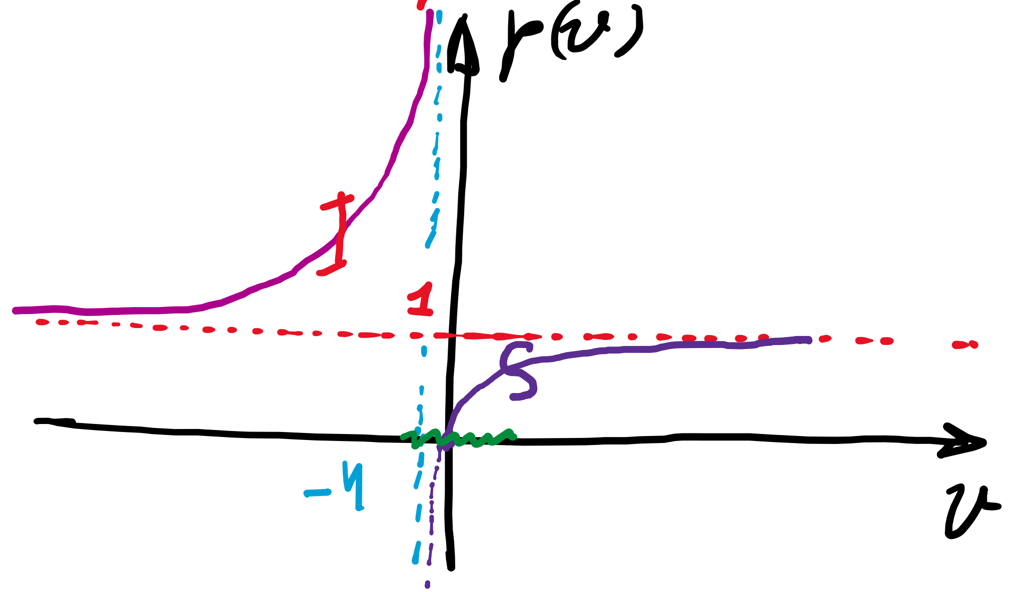
"linearizzazione" delle eq.ni di equilibrio

$$V_2'(\vartheta) = K\left(\vartheta - p(\vartheta + \eta)\right) = 0 \Rightarrow p(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta + \eta} \leftarrow S$$

$$V_2''(\vartheta) = K(1-p) \begin{cases} > 0 & p < 1 \quad S \\ = 0 & p = 1 \quad \text{condiz. critica di perdita di stabilità} \\ < 0 & p > 1 \quad I \end{cases}$$

Come per analisi di sist. ideale privo di imperfezioni

(derivata seconda di V_2 costante, a dato valore del carico P)



SOMMARIO (Lez. 18)

- Instabilità di sistemi reali (con imperfezioni) [vs. sistemi ideali: privi di imp.]

  transizione continua vs. ramo biforcato del sistema ideale. — biforcazione per $P = P_{cr}$.

- Approccio statico per spost. "geom. grandi" e mappa dei percorsi di equilibrio.
  - validità della stima di P_{cr}.
- " " " " " piccoli" ⇒ tendenza asintotica per P_{cr}.
  - P_{cr} trovato da trend asintotico di sist. reale resta di signif. ingegnerist.
- Approccio energetico, per spost. di entità come sopra (grandi/piccoli). (V / V_2)
  - Individua, oltre alle stesse conf.ni di equilibrio la natura stabile o non stabile di esse (stabile per il ramo primario deviato dalla parte dell'imperfezione).

Next step: pb. euleriani di stabilità. Quadro generale e esempi discreti MDOF