Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

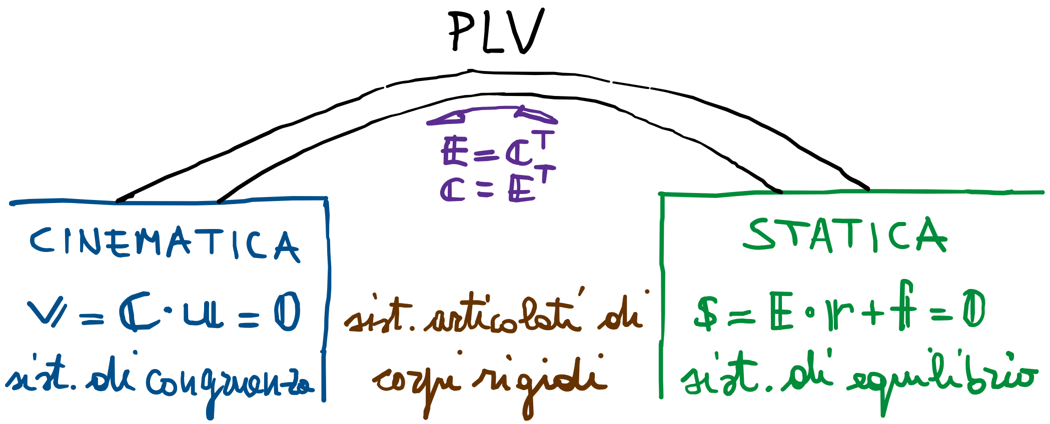
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) – Meccanica delle Strutture (sistemi di travi)



- PLV: "ponte" tra le sponde della cinematica e della statica.
- non aggiunge eq.ni governanti al problema ma consente di mettere in comunicazione le due "sponde".
- riferito potenzialmente a sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema reale (peraltro associabili tramite lavori mutui), quindi indip. dal comportamento del materiale.
- principio ⇒ teorema dimostrabile (Meccanica dei continui)

Definizioni:

Ⓐ sistema di quantità statiche equilibrate, forze e azioni interne, staticamente ammissibili

Ⓑ sistema di quantità cinematiche congruenti, spostamenti e deformaz., cinematicamente ammissibili

PLV: CN di equilibrio e di congruenza

$$\forall \text{ Ⓐ}, \text{Ⓑ} \Rightarrow \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

ove

$$\mathcal{L}_e^{AB} = \sum_i F_i^A \cdot s_i^B + W_i^A \cdot \varphi_i^B + R_i^A \cdot \bar{s}_i^B$$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_{str} N^A \cdot dn^B + T^A \cdot dt^B + M^A \cdot d\varphi^B$$

$\neq 0$ per sistemi deformabili

Manifestazioni operative (Princ. Spostamenti/Forze Virtuali):

PSV: CS di equilibrio

Ⓑ, $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow$ Ⓐ equil.

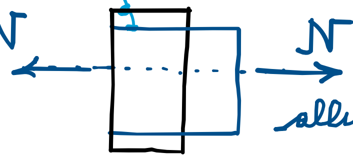
- calcolo di RV e AI nei sist. articolati di corpi rigidi ($\mathcal{L}_i = 0$)

PFV: CS di congruenza

Ⓐ, $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow$ Ⓑ congruente

- calcolo di componenti di spost. e soluzione di strutture iperst.

– Deformazioni elementari del concio di trave: (elastiche + anelastiche) ⇒ ad es. termiche (coazioni impresse di natura termica)

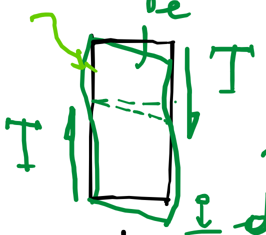


contraz. trasv. legata a ν, coeff. di Poisson

$$dn_e = \varepsilon_e\, ds = \frac{N\, ds}{\underline{EA}}$$ rigidezza assiale

E: modulo di elast. longitudinale

A: area sezione trasv. $(EA \to \infty)$



ingobbamento fuori piano della sez.

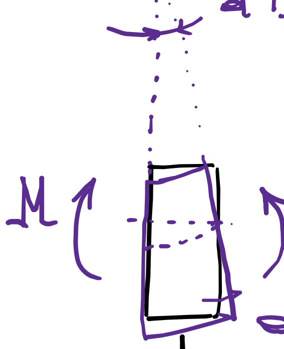
$\mu \geq 1$ fattore di taglio

$$d\bar{t}_e = \bar{\gamma}_e\, ds = \mu \frac{T\, ds}{\underline{GA}}$$ rigidezza tagliante

G: modulo di elast. tangenz.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$(GA \to \infty)$



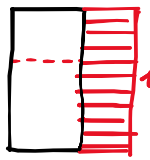
$$d\varphi_e = \chi_e\, ds = \frac{M\, ds}{\underline{EJ}}$$ rigidezza flessionale

J: momento d'inerzia sezione trasversale

prevalenti nei sist. di travi

$+\Delta T$ incremento di temp. uniforme

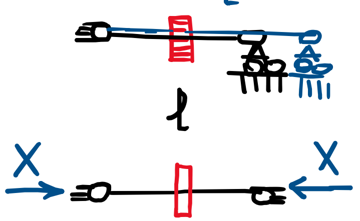
α: coeff. di dilatazione termica $\sim 10^{-5} \div 10^{-6}\ {}^{\circ}C^{-1}$



cost. $\varepsilon_t = \alpha \Delta T$ def. termica

$$dn_t = \varepsilon_t\, ds$$

$\Delta l_t = \varepsilon_t\, l$



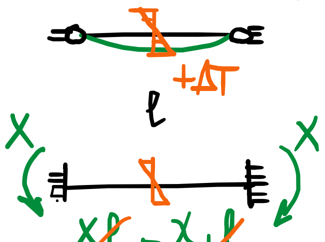
def. sì sforzo NO

def. NO sforzo SÌ

$$\frac{X\cancel{l}}{EA} = \varepsilon_t \cancel{l}$$

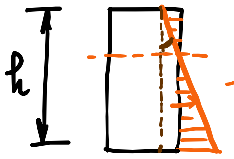
$$X = \alpha \Delta T E A$$

$-\Delta T$ $\quad \Delta\varphi_t = \chi_t\, l$



$$\frac{X\cancel{l}}{EJ} = \chi_t \cancel{l}$$

$$X = \chi_t EJ = \frac{2\alpha\Delta T}{h} EJ$$



$-\Delta T_2$

lin.

$+\Delta T_1$

$$\chi_t = \alpha \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{h} = \vartheta_t$$ curvatura termica

$$d\varphi_t = \chi_t\, ds$$

• Dualità (via PSV): AB

(A) reale: $\mathbb{r}, \mathbb{f}$

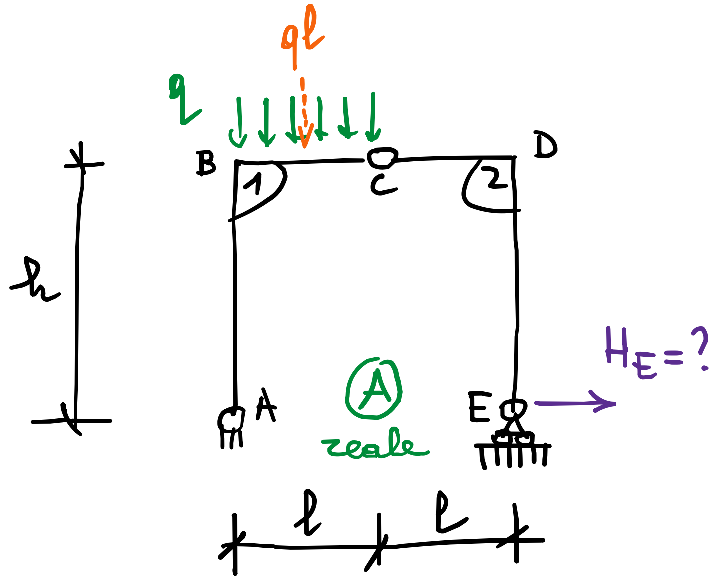
(B) virtuale: $\mathbb{v} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{u}$ congr.

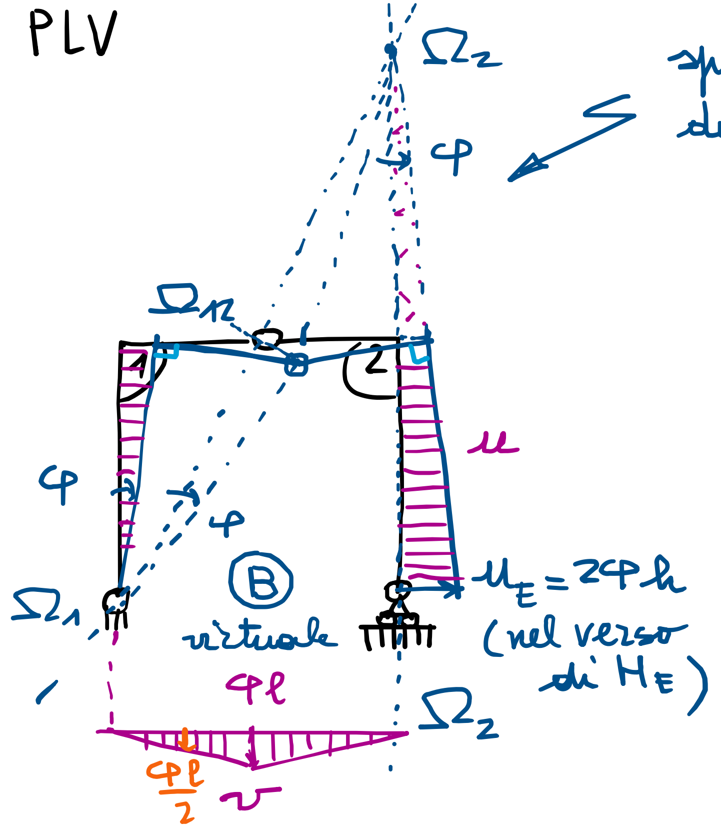
$$\Rightarrow \mathcal{L}_e = 0 \text{ equil.}$$

$$= \mathbb{r} \cdot \mathbb{v} + \mathbb{f} \cdot \mathbb{u}$$

$$= \mathbb{r} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{u} + \mathbb{f} \cdot \mathbb{u} = (\mathbb{C}^T \cdot \mathbb{r} + \mathbb{f}) \cdot \mathbb{u} \overset{\forall \mathbb{u}}{=} 0 \Rightarrow \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{r} + \mathbb{f} = \mathbb{0} \text{ equil.} \Leftrightarrow \mathbb{s} = \mathbb{E} \cdot \mathbb{r} + \mathbb{f} = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{C}^T;\ \mathbb{C} = \mathbb{E}^T$$

- Calcolo di RV e AI tramite PLV (PSV, CS di equilibrio):





spostata che si produrrebbe in assenza del gdv associato ad H_E

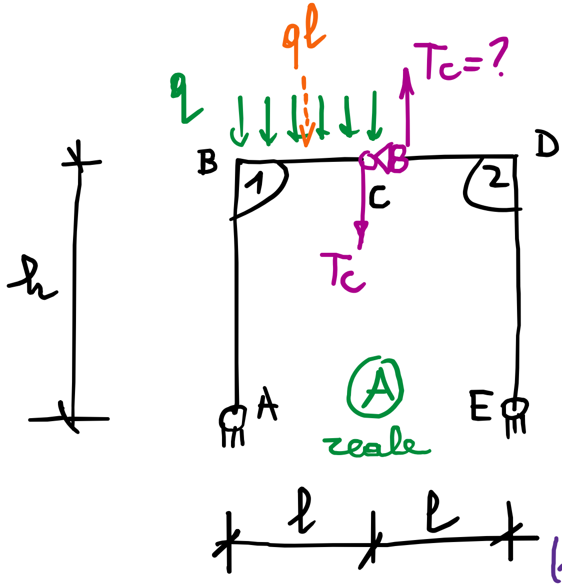
calcolo selettivo di H_E:

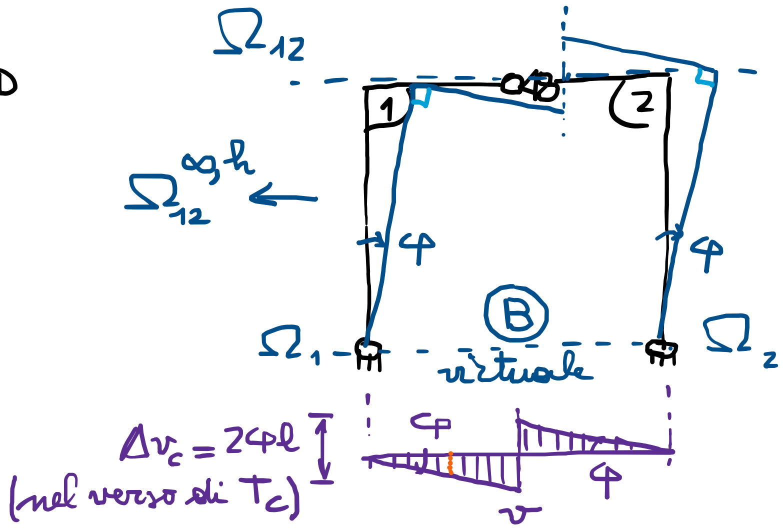
unica eq.ne nella sola incognita H_E

$$\mathcal{L}_e^{AB} = \overbrace{H_E \, 2\varphi h}^{>0\ (es.)} + \overbrace{q\ell \, \frac{\varphi\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}\ \text{è} >0\ \forall\varphi} = 0$$

$$\boxed{H_E = -\frac{q\ell^2}{4h}}$$

(segno meno: H_E risulta opposta ad u_E, spostata che produce lavoro positivo per q)





$$\mathcal{L}_e^{AB} = T_c \, \overbrace{(\varphi\ell + \varphi\ell)}^{\Delta v_c = 2\varphi\ell} + \overbrace{q\ell \, \frac{\varphi\ell}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}\ \text{è} >0\ \forall\varphi} = 0$$

$$\boxed{T_c = -\frac{q\ell}{4}}$$

(idem: T_c finale opposto a Δv_c)