

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

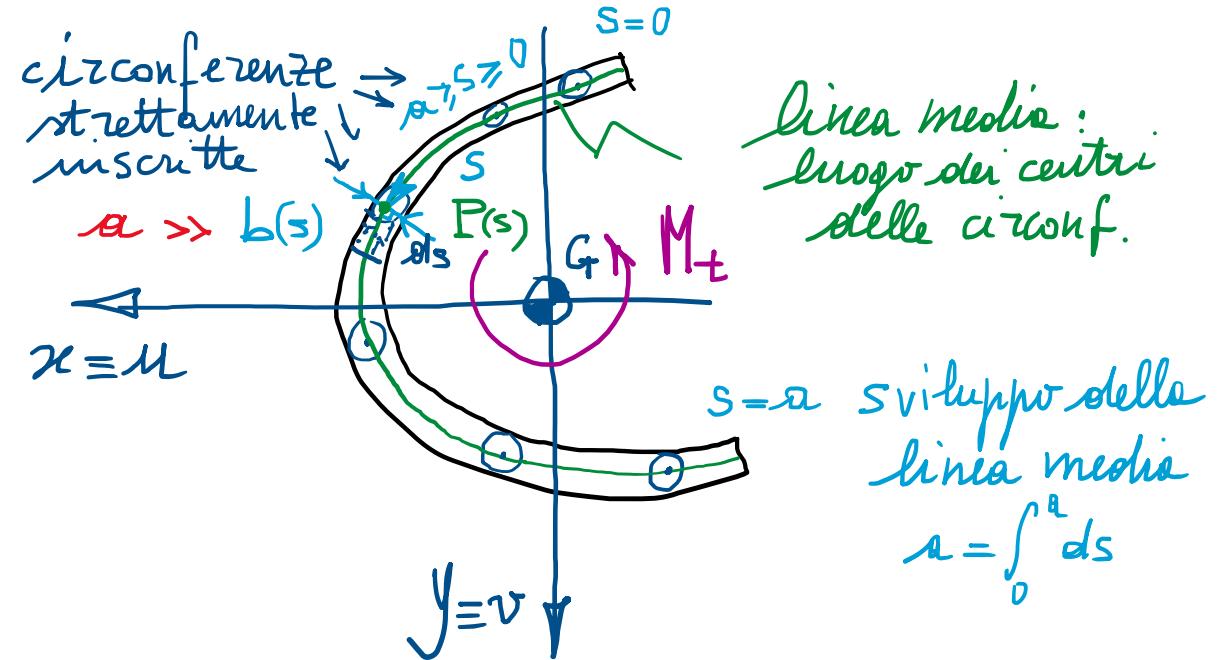
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

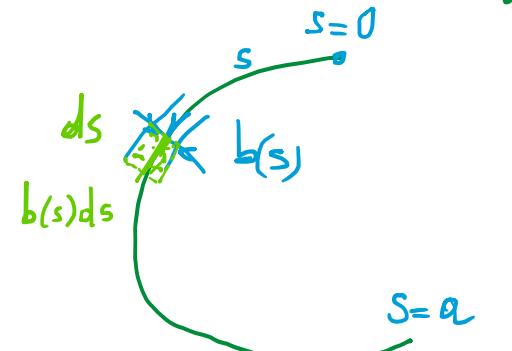
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 22

Torsione nei profili sottili aperti (\rightarrow generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile) "ripiegato" \longleftrightarrow



Caratteristiche geometriche: (riferite alla linea media)

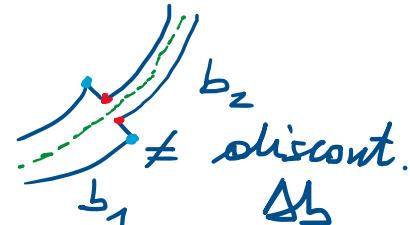


$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

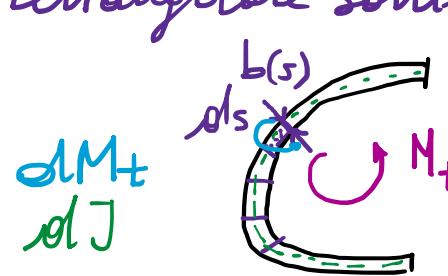
$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore $b(s)$, anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).
- Variazione ammessa, seppur con $b(s) \ll a$:
 con continuità: non discontin.

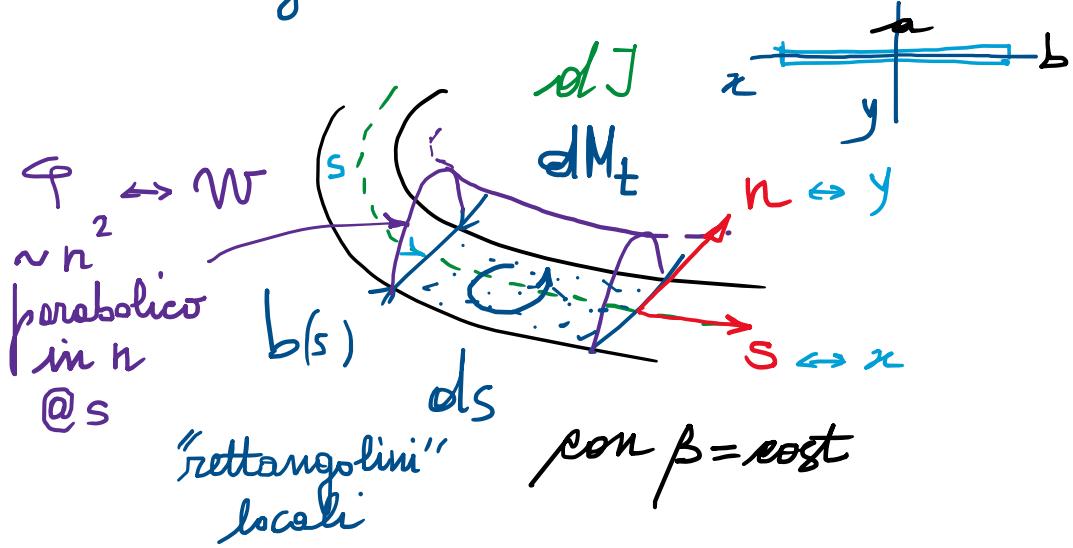


- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo $b(s) ds$ si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione

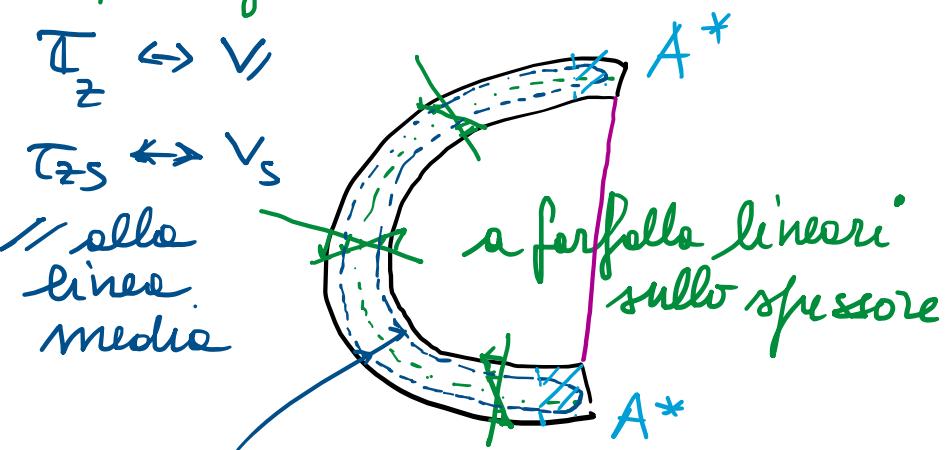


a ferita di torsione
 $\beta = \text{cost}$

- Analogie delle membrane:



- Analgie idrodinamica:



traiettorie che si
 richiudono all'interno
 dello spessore

"tracci di leva" delle T_{zs}
 dell'ordine dello spessore $b(s)$
 quindi piccoli \Rightarrow scarse capacità portante
 e torsione

- f. ne di Airy:

$$\Phi(s, n) = K \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right)$$

locale

$$\frac{M_t}{J}$$

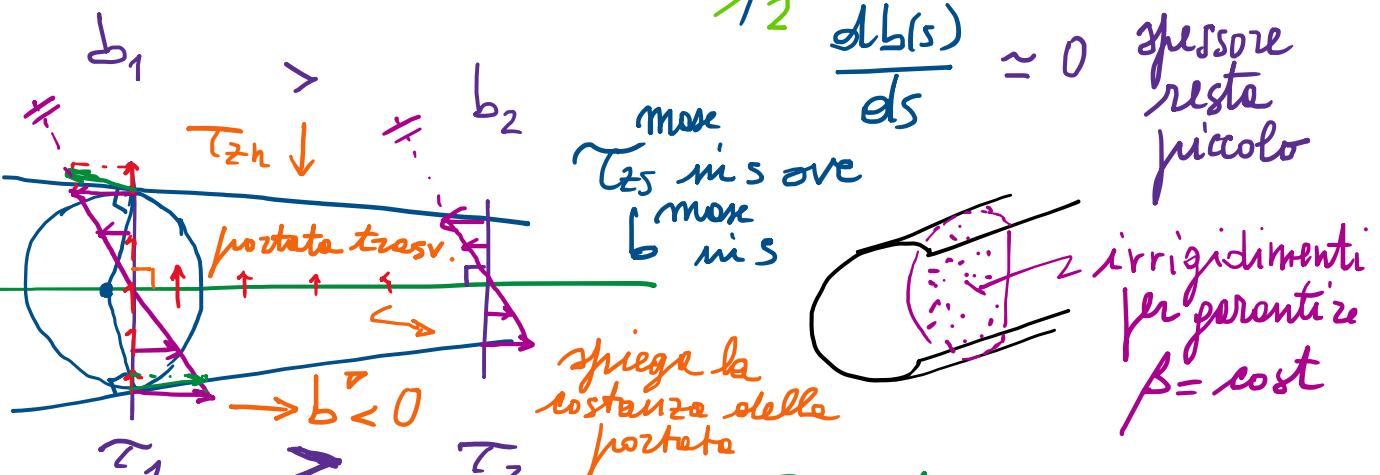
$$T_{zs}(s) = \frac{M_t b(s)}{J}$$

$M = \pm \frac{b}{2}$
 $G\beta$
 $T_{zs}(s) = \frac{M_t b(s)}{J}$

- tensioni tangenziali:

$$\begin{cases} T_{zs}(n; s) = \Phi_{, n} = G\beta (-2n) = -2G\beta n = -2 \frac{M_t n}{J} \\ T_{zn}(s) = -\Phi_{, s} = K \frac{2b(s)}{J^2} b(s) \simeq 0 \end{cases}$$

trascurabili
 in senso
 ingegneristico



T_z tangente al
 contorno
 T_{zs} (fluido uscibile dal
 profilo)

- \bar{J} determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle T_{2S} e il momento torcente M_t):

$$M_t = 2 \int_A \sigma \tau dA = 2 G \beta \int_0^a \int_{-\frac{b(s)/2}{2}}^{\frac{b(s)/2}{2}} \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) dn ds$$

$$\begin{aligned} &= 2 G \beta \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \\ &\quad \text{d}\bar{J} \xrightarrow{\text{b}(s) \cdot ds} \\ &= G \beta \bar{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \frac{\frac{b(s)^2}{4} b(s) - \frac{n^3}{3}}{b/2} \right|_{-b/2}^{b/2} = b(s) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{2^1}{8} \right) = \frac{1}{4} b(s) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{b(s)^3}{3} \\ &\text{b} = \text{cost} \Rightarrow \bar{J} = \frac{1}{3} ab^3 \\ &\bar{J} = \int_0^a d\bar{J} = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \quad \text{"piccolo"} \\ &\sim b(s)^3 \end{aligned}$$

momento d'inerzia torsionale

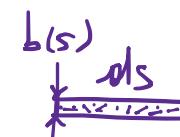
\downarrow
torsione

$$\beta = \frac{M_t}{G\bar{J}} ; \quad G\beta = \frac{M_t}{\bar{J}} = \frac{dM_t}{d\bar{J}} \quad \Rightarrow \quad dM_t = \frac{d\bar{J}}{\bar{J}} M_t$$

cost. per tutti i $b(s) \cdot ds$

rigidezza torsionale

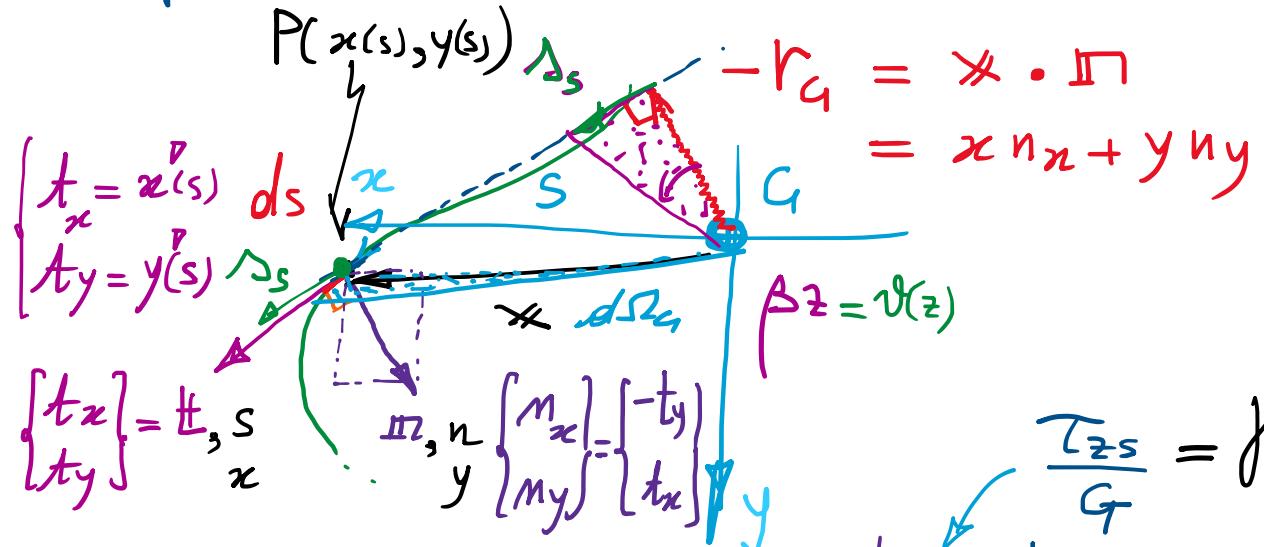
$$T_{2S}^{max}(s) = G\beta b(s) = \frac{M_t}{\bar{J}} b(s) = \frac{dM_t}{d\bar{J}} b(s)$$



- Ingombro fuori piano (riferito alla linea media) $[\Psi_G(s) \neq 0, \Psi_c(s) \neq 0]$

campo
di
spostamenti
(rif. a G)

$$\begin{cases} \Delta_x = -\beta z y \\ \Delta_y = \beta z x \\ \Delta_z = \beta \Psi_G(x(s), y(s)) \end{cases}$$



$d\Psi_g = -2 d\Omega_g \quad \bar{\Psi}_g = 0$

$\Psi_g(s) = -2(\bar{\Omega}_g(s) - \bar{\bar{\Omega}}_g(s))$

$\bar{\bar{\Omega}}_g = \frac{1}{A} \int_0^a \bar{\Omega}_g(s) b(s) ds$

Veloc.
media

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \Delta \cdot \underline{t} = \Delta_x t_x + \Delta_y t_y \\ &= \beta z (-y t_x + x t_y) \\ &= \beta z (-y n_y - x n_x) \\ &= -\beta z (x n_x + y n_y) \end{aligned}$$

$$= \beta z r_g = \Delta_s$$

vedi mappe di
spostamento
spostamento nelle direzioni s

$$\frac{T_{zs}}{G} = f_{zs} = \Delta_{z,s} + \Delta_{s,z} = \beta (\Psi_{g,s}(s) + r_g(s))$$

$$\frac{d\Psi_g}{ds} = \Psi_{g,s} = \frac{T_{zs}(s)}{G \beta} - r_g(s)$$

$$d\Psi_g = \frac{T_{zs}(s)}{G \beta} ds - 2 \underbrace{\frac{1}{2} r_g(s) ds}_{\text{profili aperti: qui } T_{zs}(s) = 0 \text{ sulla linea media}}$$

Per i profili rottigliati aperti,
le funzioni di ingombro
sono definite dalle f. ne aree
settoriale

$\Psi_g(s) \rightarrow x_c, y_c$
coordinate
del centro di
torsione

$\bar{\Omega}_g(s)$: area settoriale
funzione

- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili (caso frequente nella pratica):
- smissi per abbattere concentraz.*
- di tensione max ove max b_i*
- α_i
- M_t
- T_{2s_i}
- $\Sigma_i b_i = \text{cost} \ll \alpha_i \ll \alpha = \sum \alpha_i$
- $(T_{2s_i})_{\text{max}} = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M_t i}{J_i} b_i$
-
- $$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum_i a_i b_i \\ J_x = \sum_i J_{x_i} \\ J_y = \sum_i J_{y_i} \\ J = \sum_i J_i \\ = \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3 \end{array} \right.$$
- $J_{\Sigma_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \approx 0$
- $J_y = \frac{1}{12} a_i b_i^3$
- trasf. per rotazione d'assi (con $J_{\Sigma_i} = 0$)
- $J_{x_i} = J_{y_i} \sin^2 \alpha_i$
- $J_{y_i} = J_{y_i} \cos^2 \alpha_i$
- $J_{xy_i} = \frac{J_{y_i}}{2} \sin 2\alpha_i$
- vedi Cerchiori, Mohr (sulle inerzie)
- Funzione di ingombro: $\psi_{g_i}(s_i) \sim \Omega_{g_i}(s_i)$ con $r_{g_i} = \text{cost}_i + \text{tutto } i$
- lineare a tratti nelle s_i
- Profili "a stella"
- particolarmente deboli a torsione
-
- $r_{g_i} \neq 0$
- $r_c = 0 \Rightarrow \Omega_{c_i} = 0 \Rightarrow \psi_c = 0$
- $\int_A \psi_c dA = 0 \quad \checkmark$
- $\int_A t_{cx} dA = 0 \quad \checkmark$
- $\int_A t_{cy} dA = 0 \quad \checkmark$
- f. ne di ingombro riferita al centro delle stelle identic nulle
- Esempio:
-
- $\frac{1}{2} ds r_{g_i} = d\Omega_{g_i}$
- $\psi_c(s)$
- ingombro riferito al centro di torsione
- profilo a Σ