

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

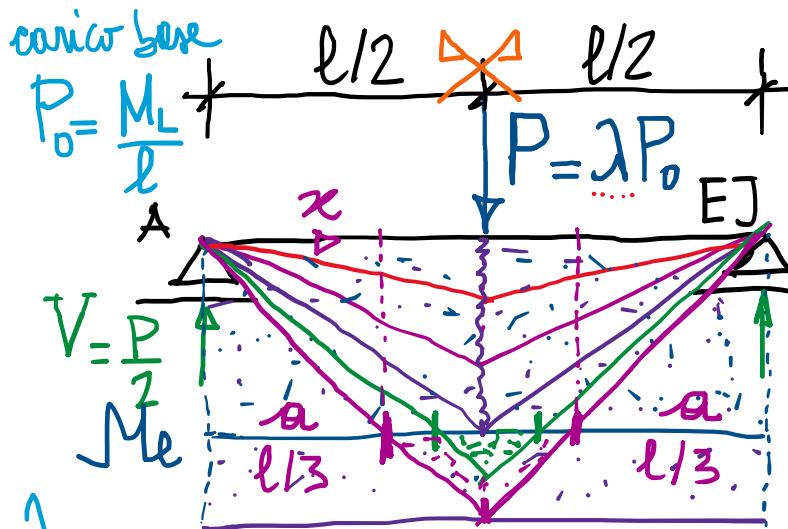
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@uni.bg.it

LEZIONE 24

Risposta elastoplastica delle travi sino a collasso plastico



1:
 moltiplicatore
 del carico

$$M_{\max} = \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

$$= \frac{1}{4} M_L$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_L}{M_e} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_e}{x}\right)^2\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_e}{x}\right)^2$$

Scheme isostatico (staticamente determinato),
 con distribuzione di M governata dal solo equilibrio.

$$M(x) = \frac{P}{2} x = \frac{1}{2} M_L \frac{x}{l}$$

$$M_L = \alpha M_e$$

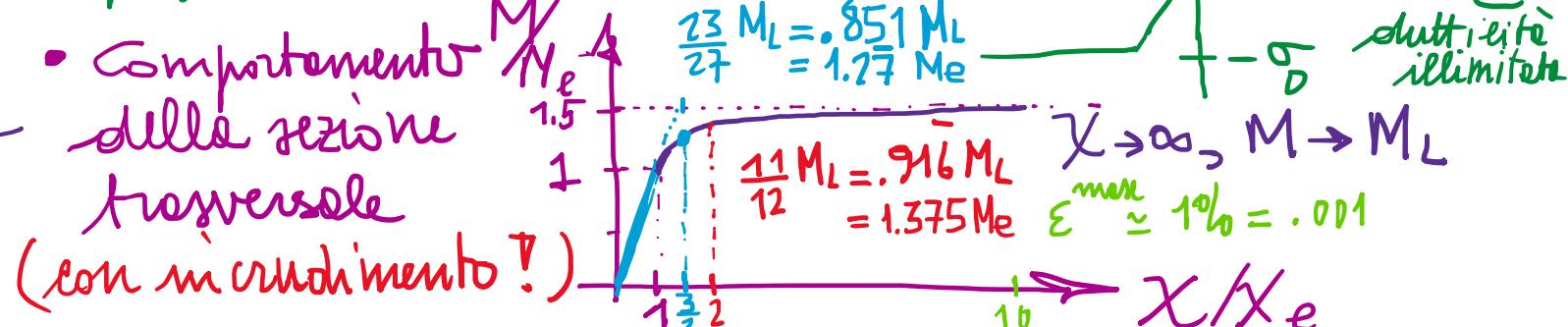
$$= \frac{3}{2} M_e$$



$$\alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\sigma_0 W_p}{\sigma_0 W_e} = \frac{\frac{b h^2}{4}}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

fattore di forma della sezione trasversale ("shape factor")

- Comportamento del materiale perfettamente elastoplastico



- Regime elastico: $M(x) \leq M^{\max} \leq M_e = \frac{2}{3} M_L$

$$\frac{1}{4} M_L \leq \frac{2}{3} M_L \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq \lambda_e = \frac{8}{3}$$

limite elastico

- Regime elasto-plastico:

$$M_e \leq M \leq M_L$$

limitato da condizione di collasso plastico $\lambda = \lambda_L = 4$, oltre la quale non è più possibile far crescere il carico esterno (e quindi M^{\max} oltre M_L). (plastico)

$$\frac{1}{4} M_L \leq M_L \Rightarrow 2 \cdot \frac{8}{3} \leq \lambda \leq \lambda_L = 4$$

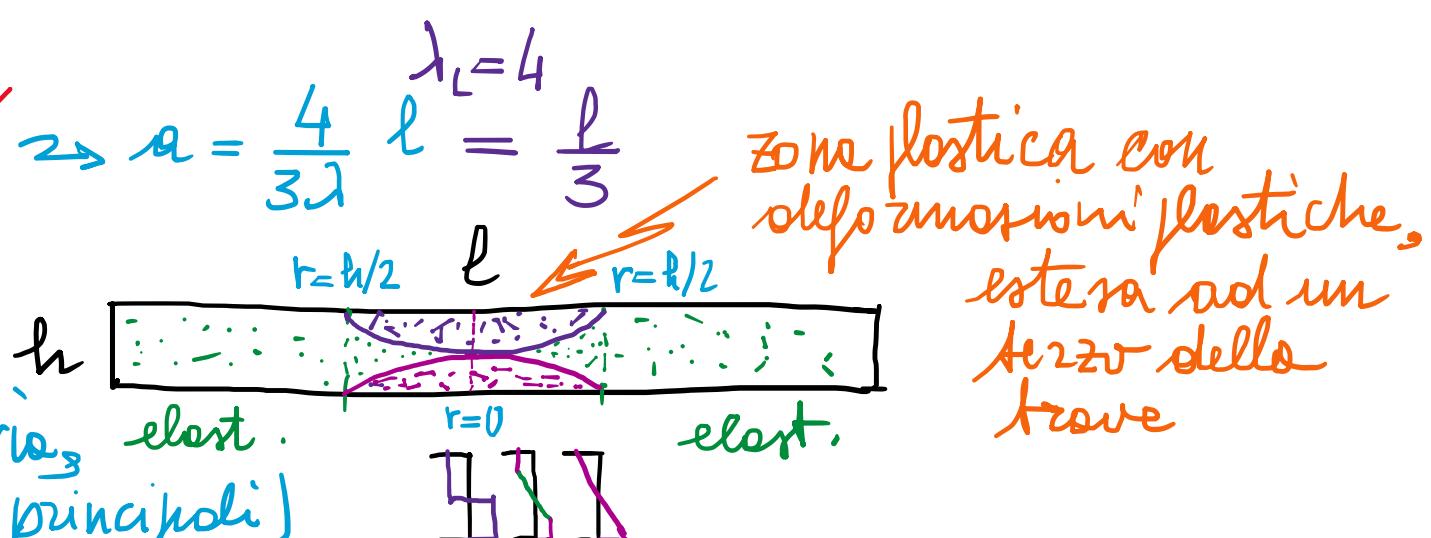
moltiplicatore limite di collasso

- Estensione zone plasticizzate:

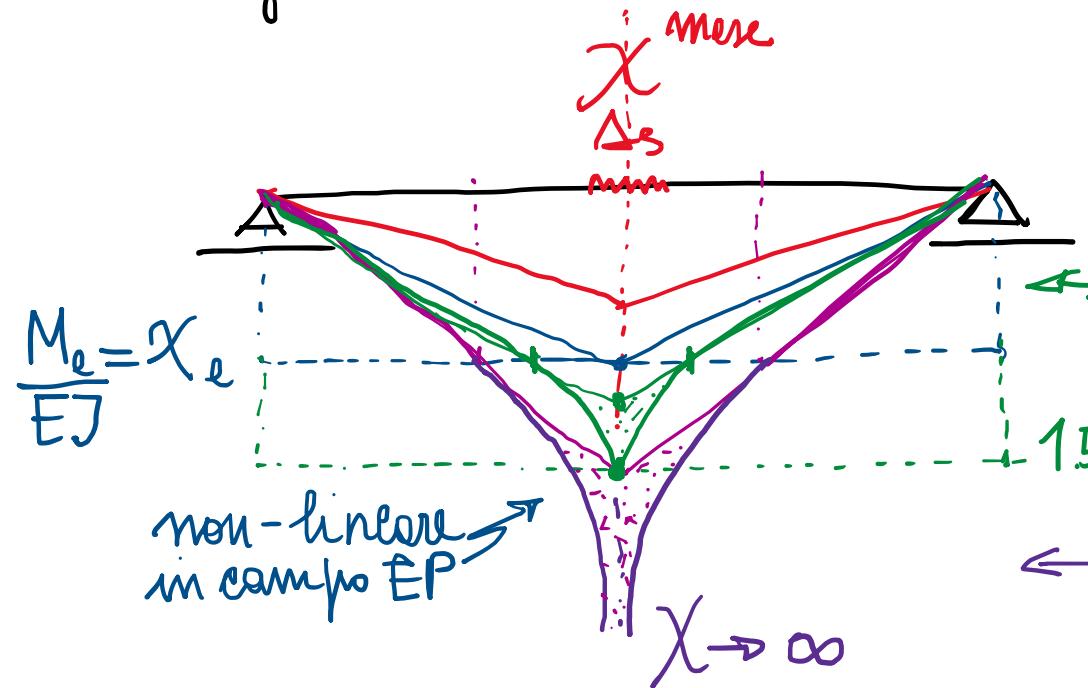
$$\frac{P}{2} a = M_e \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \frac{M_L}{l} a = \frac{2}{3} M_L \Rightarrow a = \frac{4}{3\lambda} l$$

(in realtà $r \rightarrow 0$ solo per sezioni molto vicine alle sezioni di meraviglia, dove si localizzano i fenomeni plasticci principali)

r : semialtezza del "core" elastico



- Diagramme di curvatura $\chi(x)$: A limite elastico $M_{\max}^{\text{max}} = M_e \Rightarrow \lambda = \lambda_e = \frac{8}{3}$



χ lineare in campo elastico $\lambda \leq \frac{8}{3}$

$$M = \frac{23}{27} M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} = \frac{3}{2}$$

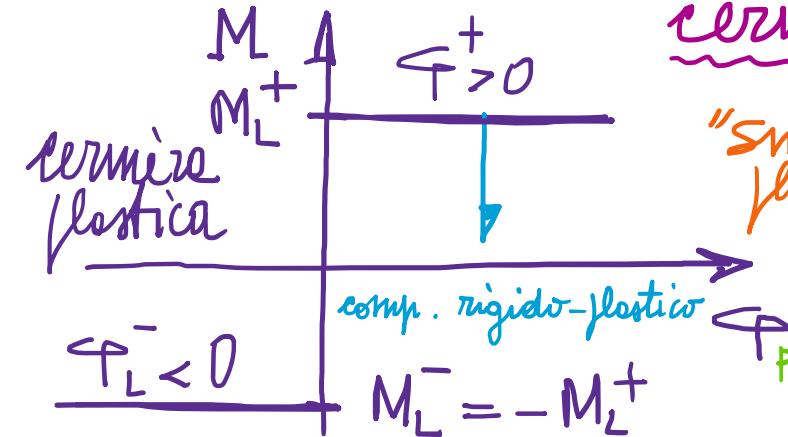
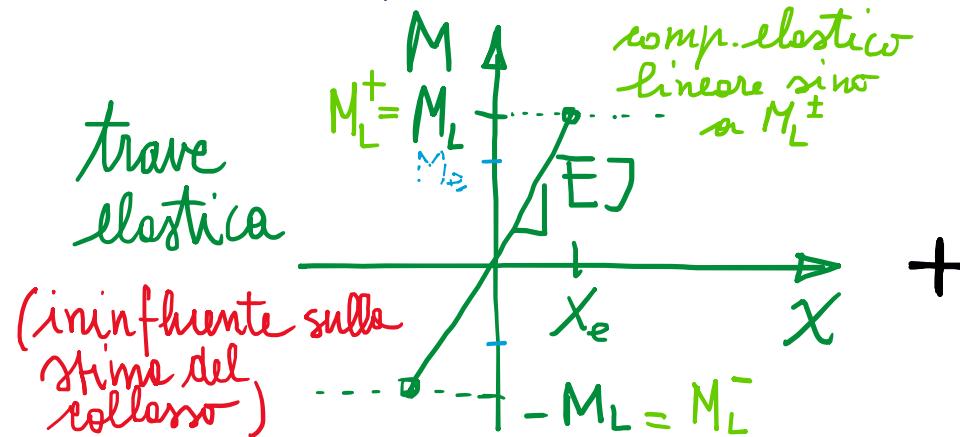
$$\Leftarrow M = M_L \Rightarrow \frac{\chi}{\chi_e} \rightarrow \infty$$

$$\chi_{\max} = \chi_e = \frac{M_e}{EJ}$$

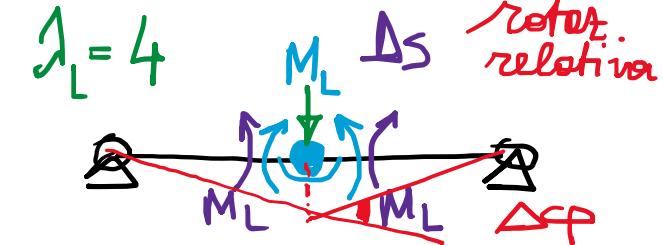
Ai fini di cogliere la situazione di collasso (λ_L)

N.B. Le sezioni che producono elevate curvature (plastiche) risultano concentrate in prossimità delle mezzerie delle trave \Rightarrow Ipotesi semplificativa di

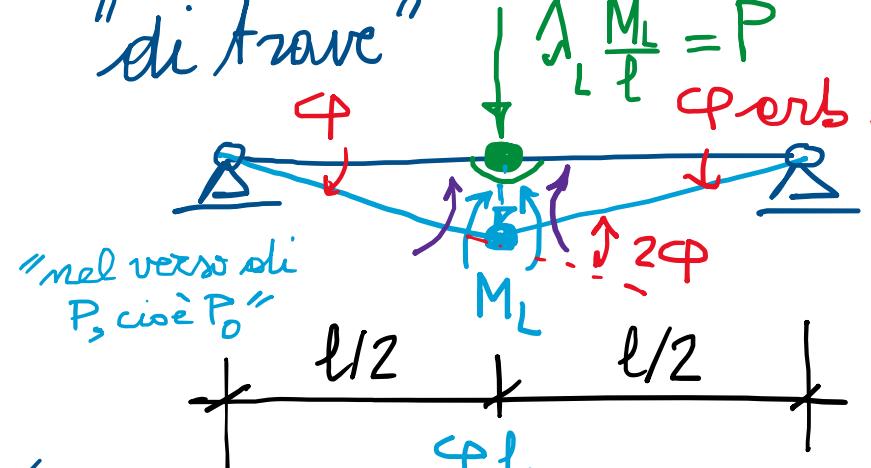
termine plastiche: χ



$$\Delta \varphi = \int \frac{d\varphi}{dx} dx$$



Mecanismo di collasso (plastico): situazione di collasso vicinante
 "di trave" | $\sum \frac{M_L}{P} = P$ (equilibrio limite) A



$$\left(\text{erwe}\right. \\ \text{tre} \\ \text{ermeele} \\ \text{ellineste} \left. \right)$$
$$T = \frac{D}{f_{\text{el}} D} = 4$$

$$\left(L_{\text{el}} = P_0 \cdot \varphi \frac{l}{2} > 0 \right)$$

lavoro esterno del pericolo base

bilancio energetico

$$\text{PLV: } \mathcal{L}_e = \mathcal{I}_L \frac{M_L}{l} \cdot \cancel{\varphi} \frac{l}{Z} - M_L \cancel{2\varphi} = 0$$

lontan
 + 
 P 
 Z 
 spost. vert.
 nel vers. di P

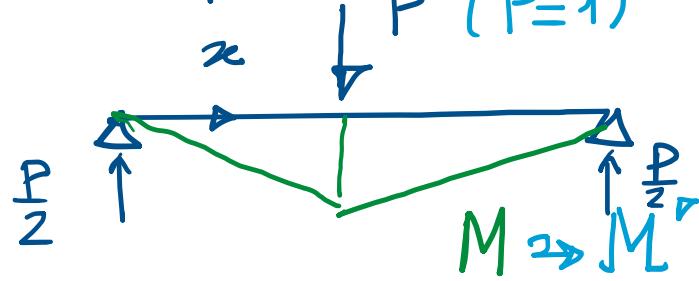
$\mathcal{I}_L = 4$

plastico interno
sulla ceramica plastico

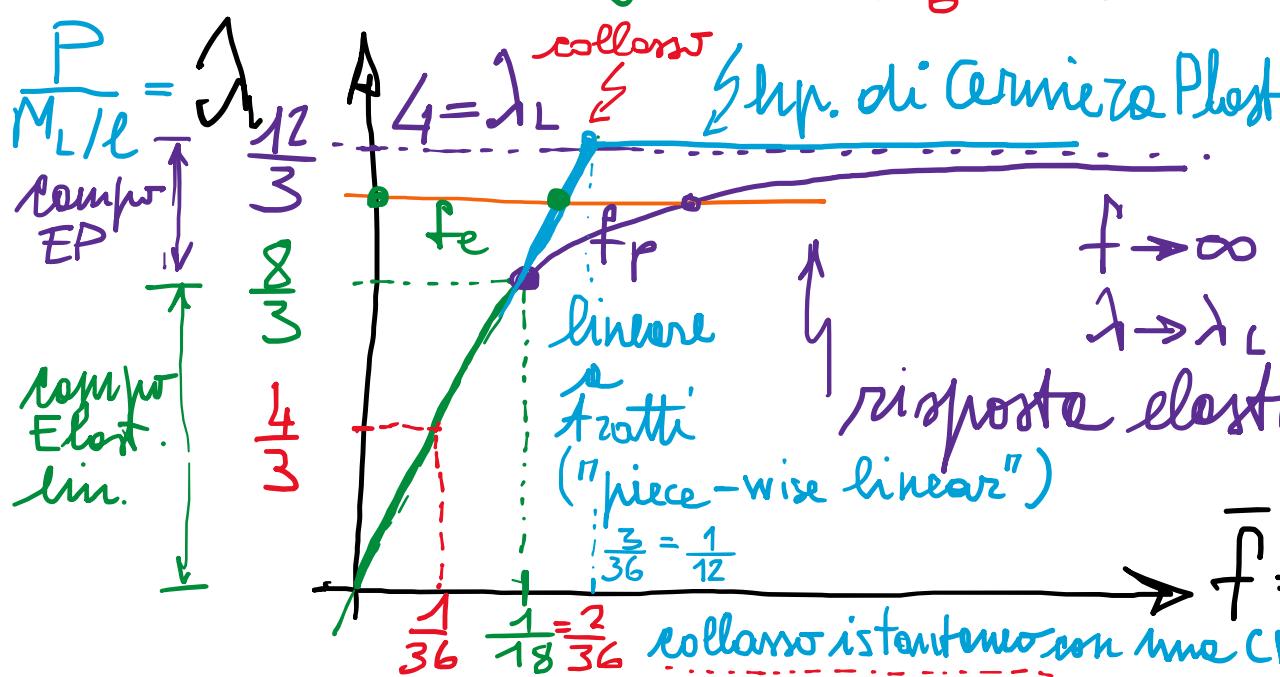
NB: Nell'ip. di cerniere plastiche, il moltiplicatore di collasso risulta facilmente individuabile tramite PLV, coerentemente col meccanismo di collasso plastico che si viene a manifestare -

Risposte elasto-plastiche effettive delle trave (non-lin.):

- Campo elastico:



$$f_e^{\text{norm}} = \frac{f_e^{\text{max}}}{M_L l^2} = \frac{P^{\text{max}}}{M_L l^2} = \frac{8}{3} \frac{1}{48} = \frac{1}{18}$$



f_e freccia elastica (spost. in mezzeria)

$$\text{PLV: } 1 f_e = \int M^\Delta M dx$$

$$\text{campo elastico} \quad \lambda \leq \frac{8}{3}$$

$$= \frac{P}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx$$

$$= \frac{P}{EJ} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$\text{spost. max EJ} \\ f_e = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$= \frac{1}{42} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{48} \left(\frac{M_L l^2}{EJ} \right)$$

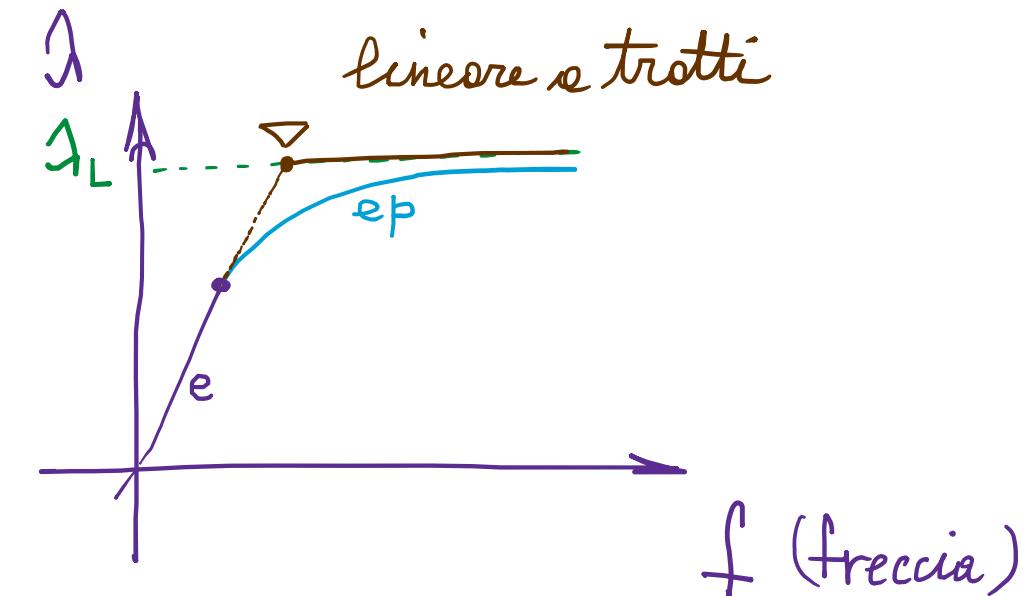
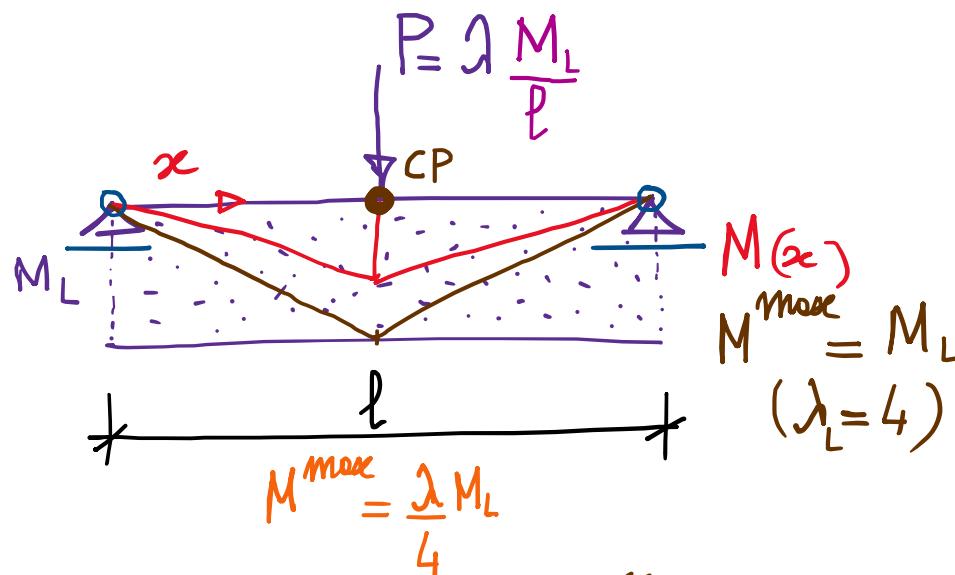
Diagramma forze/spostamento alle trave ($P-\Delta$) [moltiplicatore/frecce]

risposta elasto-plastica non-lineare

NB: Con cerchiere plastiche, sottostime delle deformazioni globali molto esatte. corrette di λ_L .

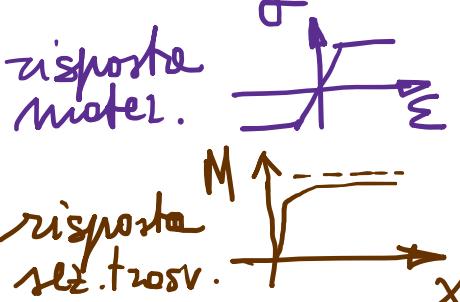
Concetti fondamentali :

- Passaggio alle scale strutturale dell'intera trave \Rightarrow curva forza/spostamento, in campo elastoplastico delle strutture
- Riferimento a caso semplice, di trave isostatica appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria :



- Ipotesi di formazione di "cerniere plastica" in determinate sezione ovve si registra una "localizzazione delle deformazioni plastiche"

SOMMARIO (Lec. 24)

- Risposte elasto-plastiche delle trave (fino al collasso plastico) - Dopo:  risposta elastostat.
- Analisi di sistemi isostatici (trave appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzeria).
- Momento nato per puro equilibrio \Rightarrow curvatura da legge costitutiva.
- Concentrazione curvatura (plastiche) in mezzeria \Rightarrow ipotesi di cerniere plastiche e schematizzazione semplificata per stime del collasso.
- Meccanismo di collasso plastico e stime del moltiplicatore di collasso J_L da bilancio energetico (P_{LV}).
- Curva $P-\Delta_s$ forze/spostamento (moltiplicatore/frecce) non-lineare da reale risposta elasto-plastica, con approssimazione lineare a tratti (piece-wise linear) nell'ip. di cerniere plastiche (utile alle stime di J_L).

Next step: Schema iperstatico (trave incostrata) \Rightarrow ulteriori risorse elasto-plastiche da ridistribuzione di spazio, con sviluppo di deformazioni plastiche - Risposte evolutive (lineare e tratti) con sequenza di attivazione delle cern. plast.

