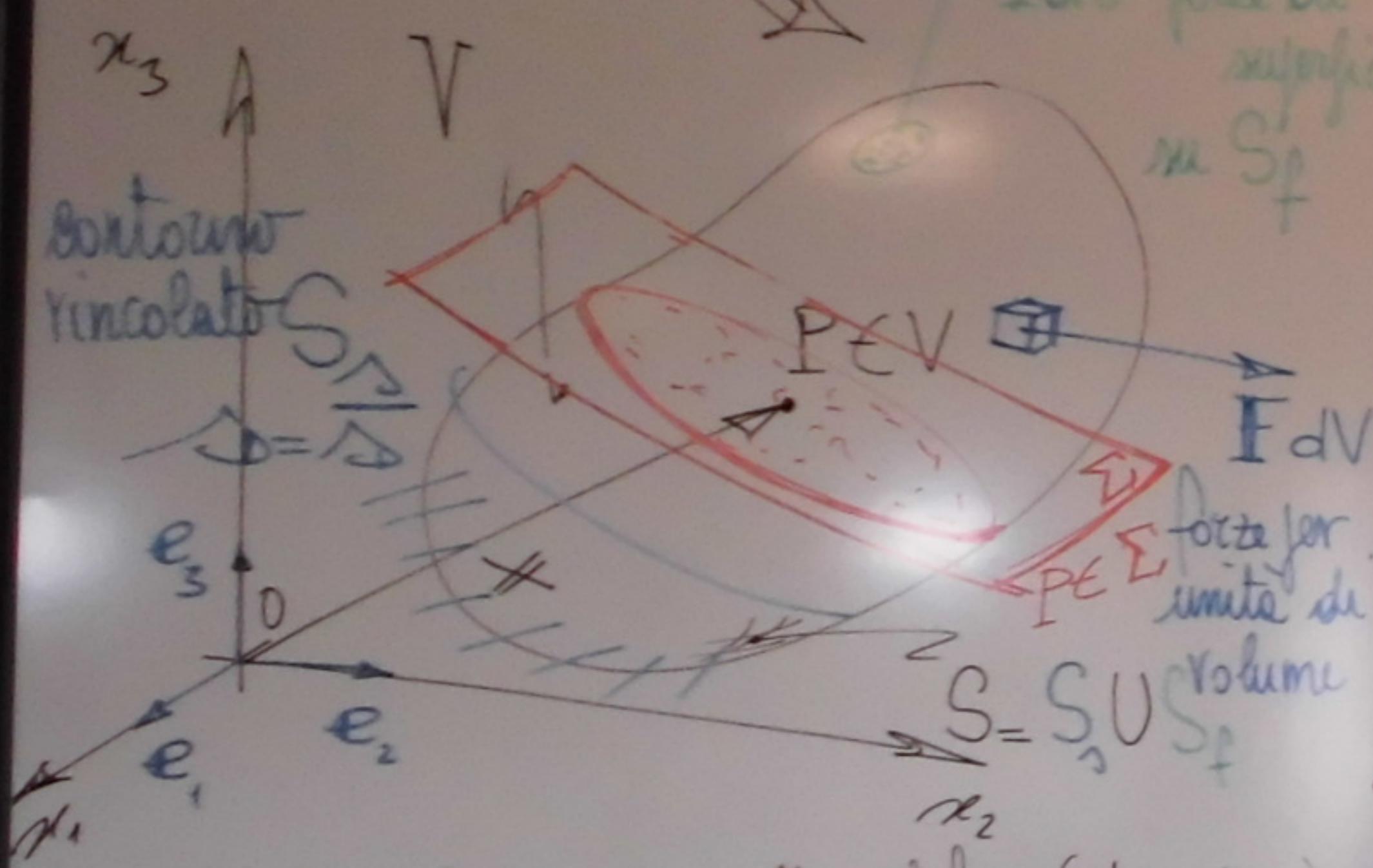
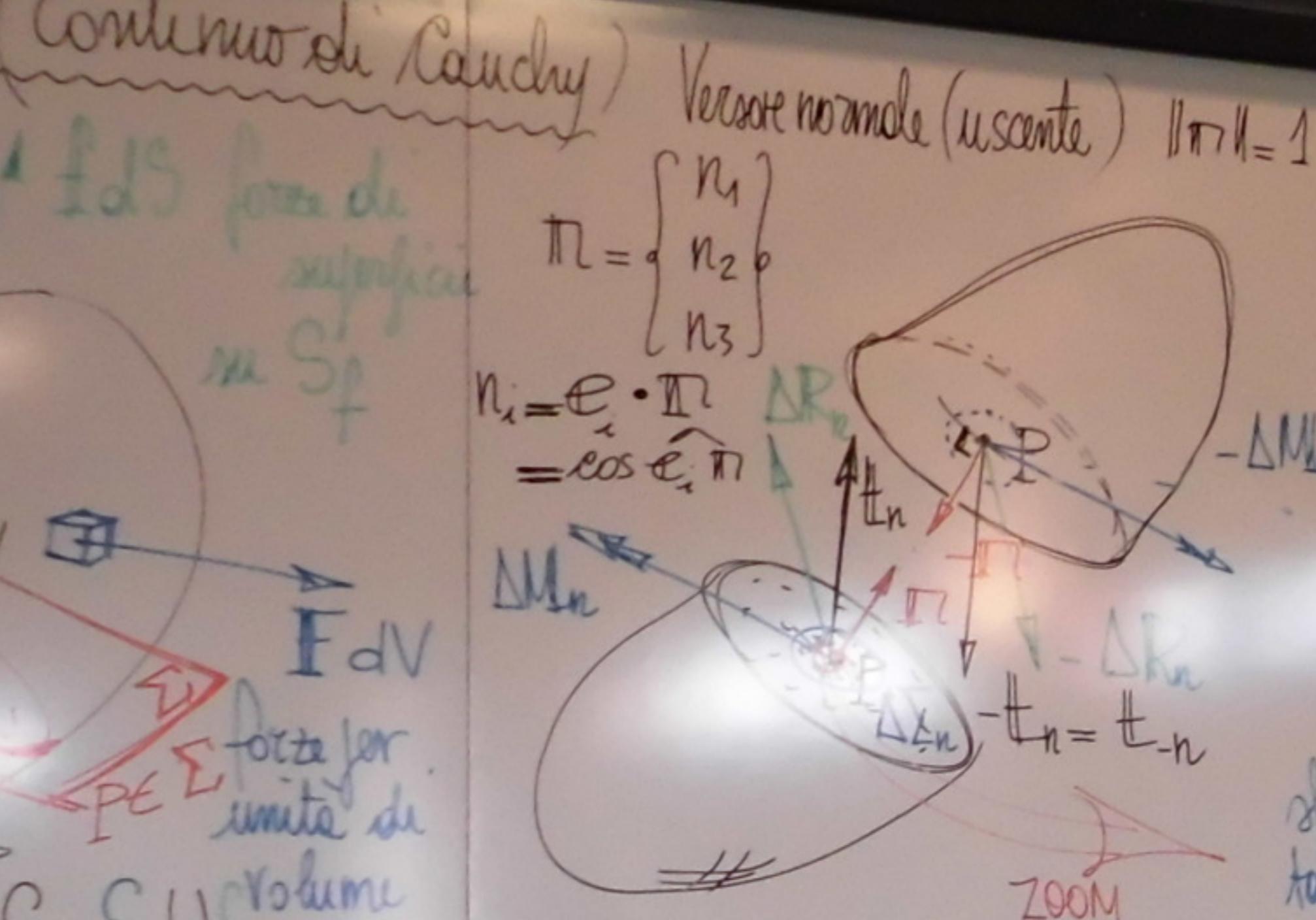


# Statica dei continui (Continuo di Cauchy)

Mezzo continuo 3D



- Generalizzazione del concetto di spazio (tensione), introdotto in 1D nell'approccio germentile (testo ( prova di flessione, prova di torsione), al caso 3D, con definizione opportuna quantitativa  $\rightarrow$  tensore spazio di Cauchy



- Si ipotizza l'esistenza dei seguenti limiti finiti
  - $\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta \Sigma_n} = t_n$  vettore forza di Cauchy
  - $\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0$  (continuo non polarizzato Cauchy)

$$n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$n_i = e_i \cdot \Pi$$

$$= \cos e_i \cdot \Pi$$

$$\Delta R_n = -t_n \Delta \Sigma_n$$

$$\Delta M_n = -t_n \Delta \Sigma_n$$

ZOOM

Commenti:

- $t_n(x)$  rappresenta forza di spazio locale in  $P(x)$ , superficie di normale

Tetraedro di Cauchy  $\rightarrow$  teoria di Cauchy (~1827)

$$d\Sigma = \frac{1}{2} dx_1 dx_2$$

- $t_n$  rappresenta misura di forza come forza/area  $[t_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$

- $t_n$  in generale non è  $\parallel \Pi$ :

$$t_n = t_n \text{ spazio tangente}$$

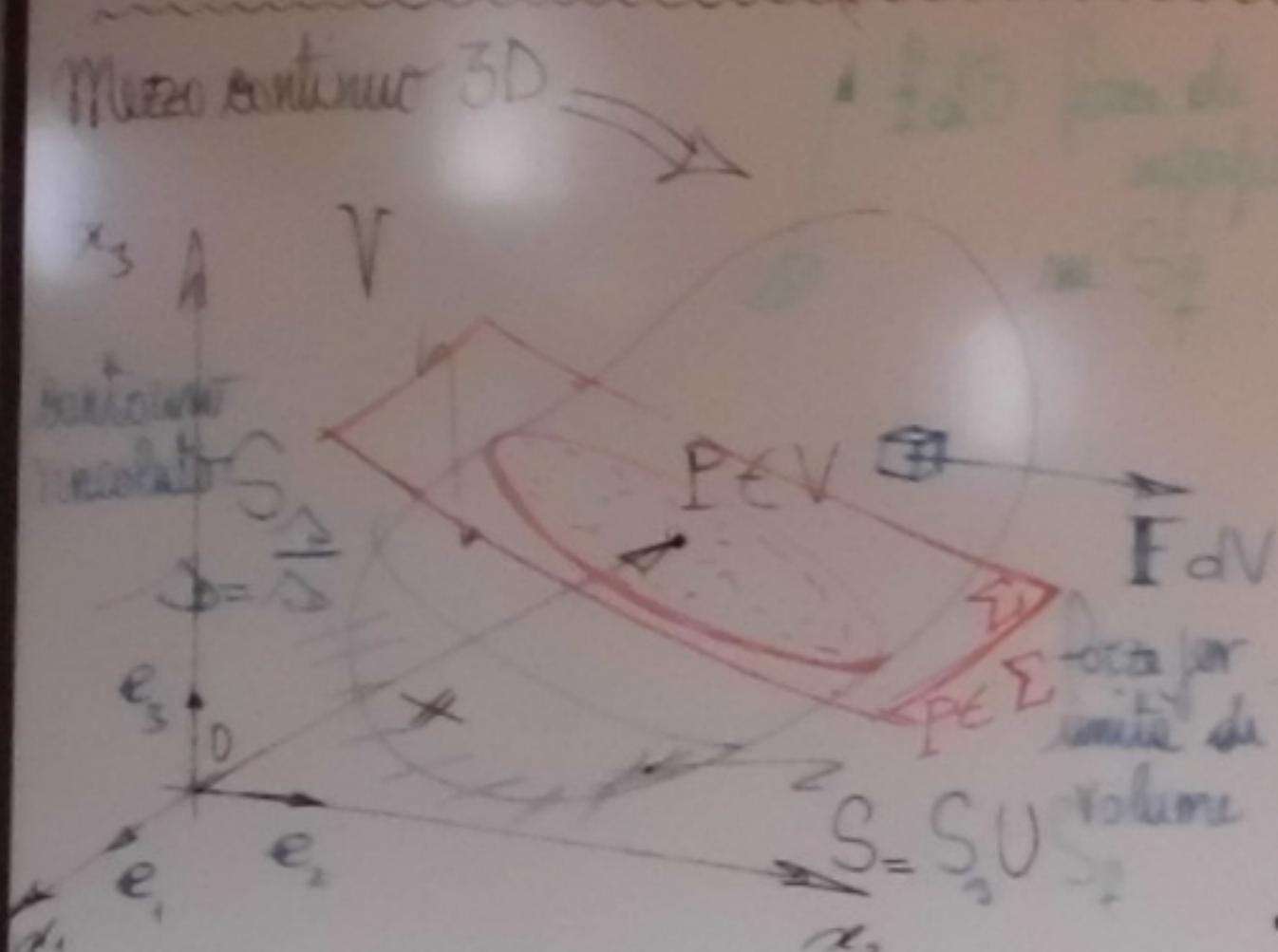
$$t_n = t_n \text{ spazio normale}$$

$$= (t_n \cdot n) n = \sigma_n \Pi$$

$$t_n = t_n + t_n$$

$$t_n = t_n - \sigma_n n$$

Statica dei continui (Continuo di Cauchy) Verso normale (uscente)  $\|n\|=1$



$$\Pi = \begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases}$$

$$n_i = \hat{e}_i \cdot \hat{n}$$

~~✓~~

$$+ \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{A_i}{\Delta x_i}$$

$$+ \lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n}$$

- Generalizzazione del concetto di spazio (estensione), introdotto in 1D nell'approccio elementale esteso (prova di trazione, prova di torsione), al caso 3D, con definizione opportuna quantitativa  $\rightarrow$  tensor spazio di Cauchy

- Si ipotizza l'Energia dei seguenti limiti finiti
    - +  $\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta E_n}{\Delta \Sigma_n} = \frac{1}{\epsilon_n}$  visto con d'Cauchy
    - +  $\lim_{\Delta \Sigma_n \rightarrow 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0$  (continuità non possibile al Cauchy)

### Comments

- $\tau_n(x)$  rappresenta lo stato di sforzo locale in  $P(x)$ , superficie di normale  $n$
  - $\tau_n$  rappresenta misura di sforzo come forza/area:  $[\tau_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$
  - $\tau_n$  in generale non è  $\parallel n$ :

Diagram illustrating the decomposition of a force  $T_n$  into a normal component  $\sigma_n$  and a tangential component  $T_{n\parallel}$ .

$$T_n = \sigma_n + T_{n\parallel}$$

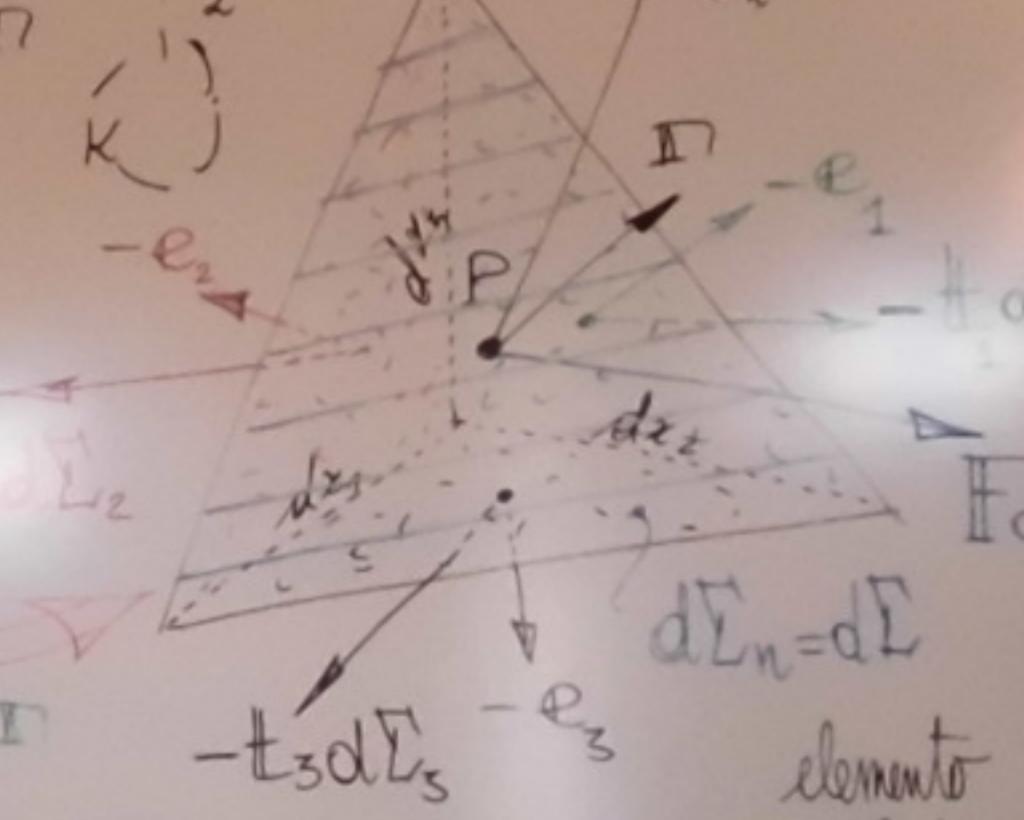
$$\begin{aligned} T_n &= t_n - \sigma_n \mathbb{E} \\ &= t_n - \left( \sum_i t_{n+i} p_i \right) \end{aligned}$$

$$\cdot \mathbb{E}_{-n} = -t$$

$$\bullet \mathbb{E}_{-n} = -t$$

Tetraedro di Cauchy  $\rightarrow$  teoria del Cauchy  
H. d'  $\rightarrow$  (~1822)

$$d\Sigma = \frac{1}{2} dx_j dx_k$$



$$dV = \frac{1}{3} d\Sigma_{(4)} dx_1 dx_2 dx_3 \quad \text{infinitesimo di forme tetraedrice}$$

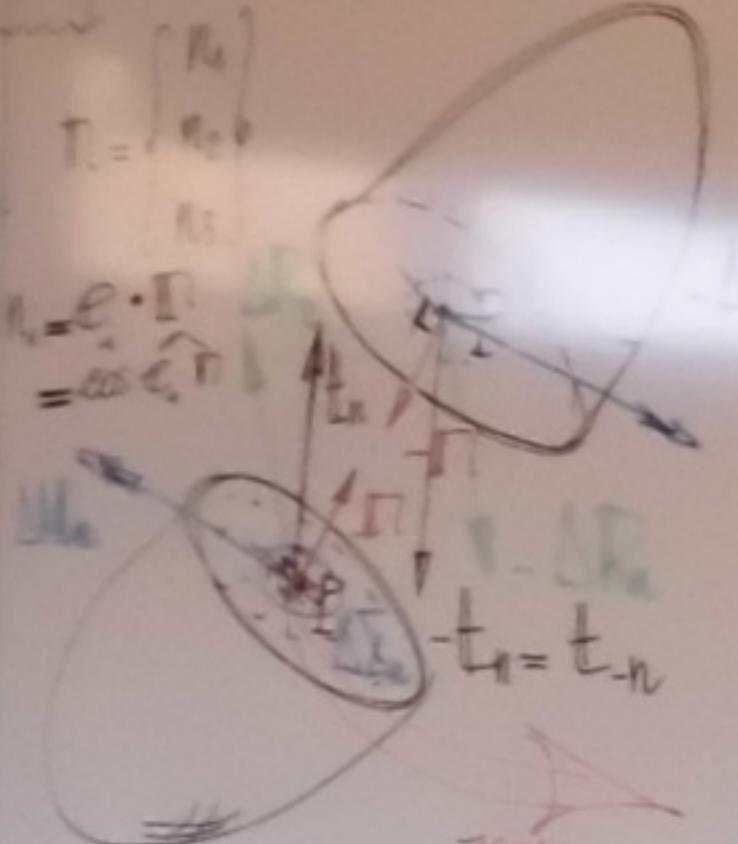
$$d\ell_i = n_i d\ell$$

Misteme di riferimento.

Eq di equilibrio nella traduzione (in sede  
indefinita,  $T^*$ , dVod{)

$$t_n d\Sigma - t_1 d\Sigma - t_2 d\Sigma - t_3 d\Sigma + F_{\alpha} = 0$$

- $\vec{t}_n = \vec{t}_1 n_1 + \vec{t}_2 n_2 + \vec{t}_3 n_3$  rettoreale
  - Pertanto, noti i 3  $\vec{t}_i$  su facce /a/ ai piani coordinate e assegnate le normali  $\vec{n}_i$ , di componenti  $n_i = \vec{e}_i \cdot \vec{n}$  (cosimi diretti), risulta noto il vettore spazio  $\vec{t}_n$  agente su facce di normale  $\vec{n}$ .
  - L'insieme dei tre vettori dorso  $\vec{t}_i$  definisce automaticamente il vettore spazio  $\vec{t}_n$  su qualsiasi faccia incidente di normali  $\vec{n}$  e quindi si detta sempre lo stesso (vettore spazio) indipendentemente dalla faccia nel punto  $P(x)$ .



Comments

- $t_n(x)$  rappresenta lo stato di sforzo  
locale in  $P(x)$ , superficie di normale  $n$
  - $t_n$  rappresenta misura di sforzo  
come forza/area:  $[t_n] = \frac{[F]}{[L]^2}$
  - $t_n$  in generale non è  $\parallel n$ :

$$\begin{aligned} T_n &= t_n - \sigma_n D \\ &= t_n - (t_{n_0} n_0) D \end{aligned}$$

$$E_n = -t_n$$

Tetraedro di Cauchy  $\rightarrow$  relazione di Cauchy  
 $(\sim 1822)$

$$dV = \frac{1}{3} d\Sigma_{(1)} dx_{(1)} = \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 \text{ infinitesimali di forma tetraedrica}$$

$d\Sigma = n_i d\Sigma$  forme rettangolari rifugiate, dalle facce inclinate con fasci // ai fasci ortogonali del sistema di riferimento.

Eq di equilibrio alla traslazione (in sede  
indefinita,  $V^*$ ,  $dV \neq d\Sigma$ )

$$\text{indefinite, fix, a value } \int dV = 0$$

$$\sum t_1 dE_1 - t_2 d\Gamma_2 - t_3 d\Gamma_3 + \cancel{\int dV} = 0$$

$$\text{on } d\Gamma_i = n_i d\Sigma$$

$$L_n = L_1 n_1 + L_2 n_2 + L_3 n_3 \quad \text{rettangoli}$$

- Pertanto, noti i 3  $t_i$  su facce // ai punti coordinati e assegnate la normale  $\mathbf{n}$ , di componenti  $n_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}$  (coseni direttori), risulta noto il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  agente su faccia di normale  $\mathbf{n}$ .

- L'insieme dei tre vettori forza  $\mathbf{t}_i$  definisce univocamente il vettore spazio  $\mathbf{t}_n$  su qualche fascia indinata di normale  $\mathbf{n}$  e quindi si definisce lo stato di spalto (sollecitazione interna) locale nel punto  $P(x)$ .

## Tensore sforzo di Cauchy (da relaz. di Cauchy: $t_n = \sum_j t_j n_j = t_j n_j$ )

$$\begin{cases} t_{n_1} = t_{11} n_1 + t_{12} n_2 + t_{13} n_3 \\ t_{n_2} = t_{21} n_1 + t_{22} n_2 + t_{23} n_3 \\ t_{n_3} = t_{31} n_1 + t_{32} n_2 + t_{33} n_3 \end{cases}$$

componenti cartesiane del vettore  $t_n$

$$t_{ni} = e_i \cdot t_n$$

$$t_n = \begin{pmatrix} t_{n_1} \\ t_{n_2} \\ t_{n_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

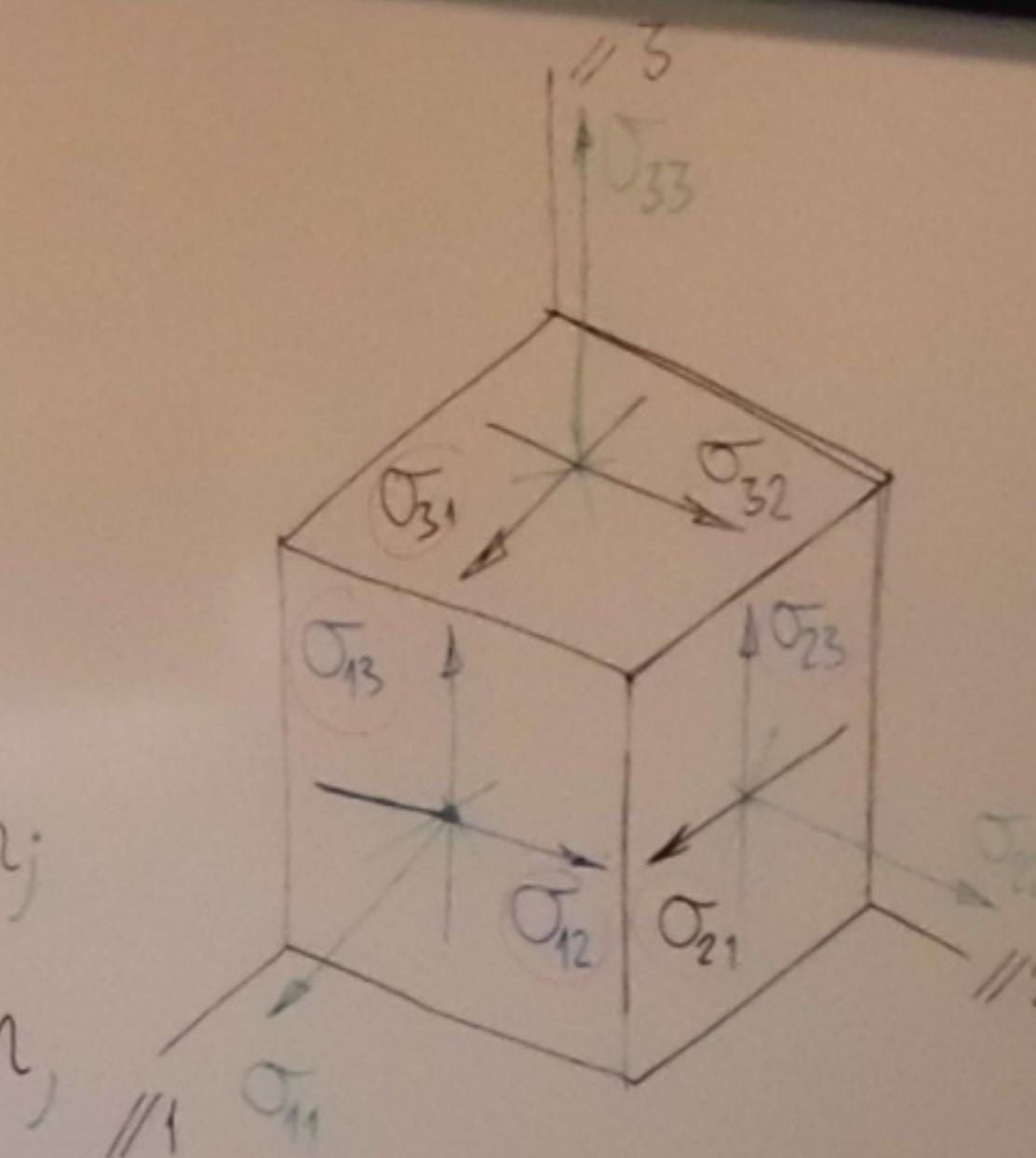
(matrice delle componenti normali)

- Ciò conduce di fatto ad una trasformazione lineare di  $\Pi$  in  $t_n$  tramite il tensore sforzo di Cauchy  $\Omega$ , di componenti cartesiane  $\Omega_{ij} = t_{ji}$ , tale in cui:

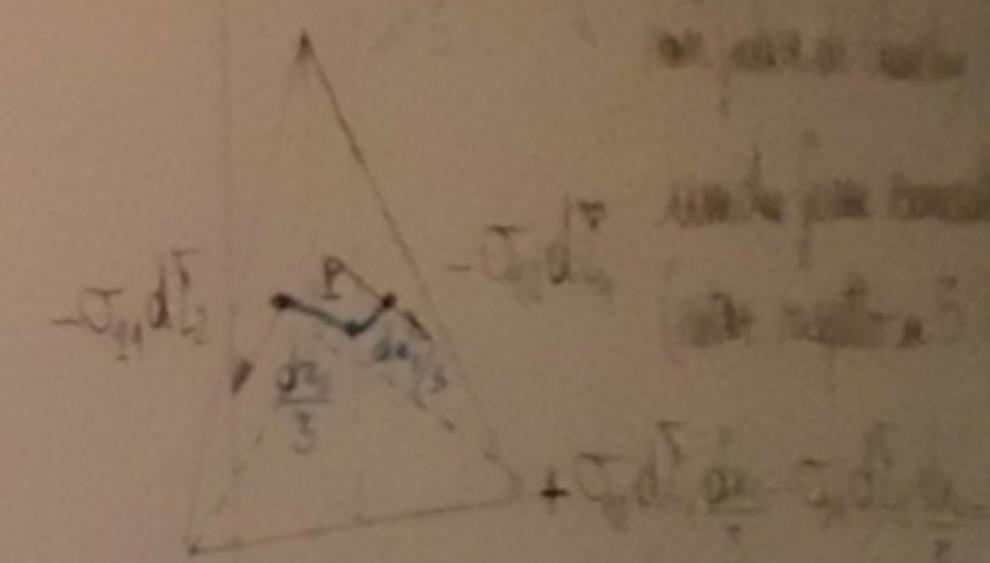
$$t_n = \Omega \cdot \Pi = \Pi \cdot \Omega \Leftrightarrow t_{ni} = \sum_j \Omega_{ji} n_j = \Omega_{ji} n_j$$

- Pertanto la matrice sforzo  $[\Omega]$  che racchiude le comp. cartesiane  $\Omega_{ij} = t_{ji}$  si ottiene rappresentando le comp. di  $t_i$  in righe e le comp. di  $n_j$  in colonne.

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$



- Eguale alla rotazione del tensore



Idem per gli altri versi, posto

$$\Omega_{ji} = \Omega_{ij} \Leftrightarrow \{\Omega = \Omega^T\} \quad \Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33}$$

Tensore di simmetria

$i = 1 \quad \Omega_{11}, 3 sforzi normali$   
 $j+i \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ji} \quad 6 sforzi tangenziali  $\Rightarrow 3$  risultanti$



Tensore forza di Cauchy (da legge di Cauchy:  $t_n = \sum t_j n_j = t_j n_j$ )

$$\begin{cases} t_{n1} = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 \\ t_{n2} = t_2 n_1 + t_3 n_2 + t_1 n_3 \\ t_{n3} = t_3 n_1 + t_1 n_2 + t_2 n_3 \end{cases}$$

componenti cartesiane del vettore  $t_n$

$$t_{ni} = e_i \cdot t_n$$

$$\begin{bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_1 \\ t_3 & t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

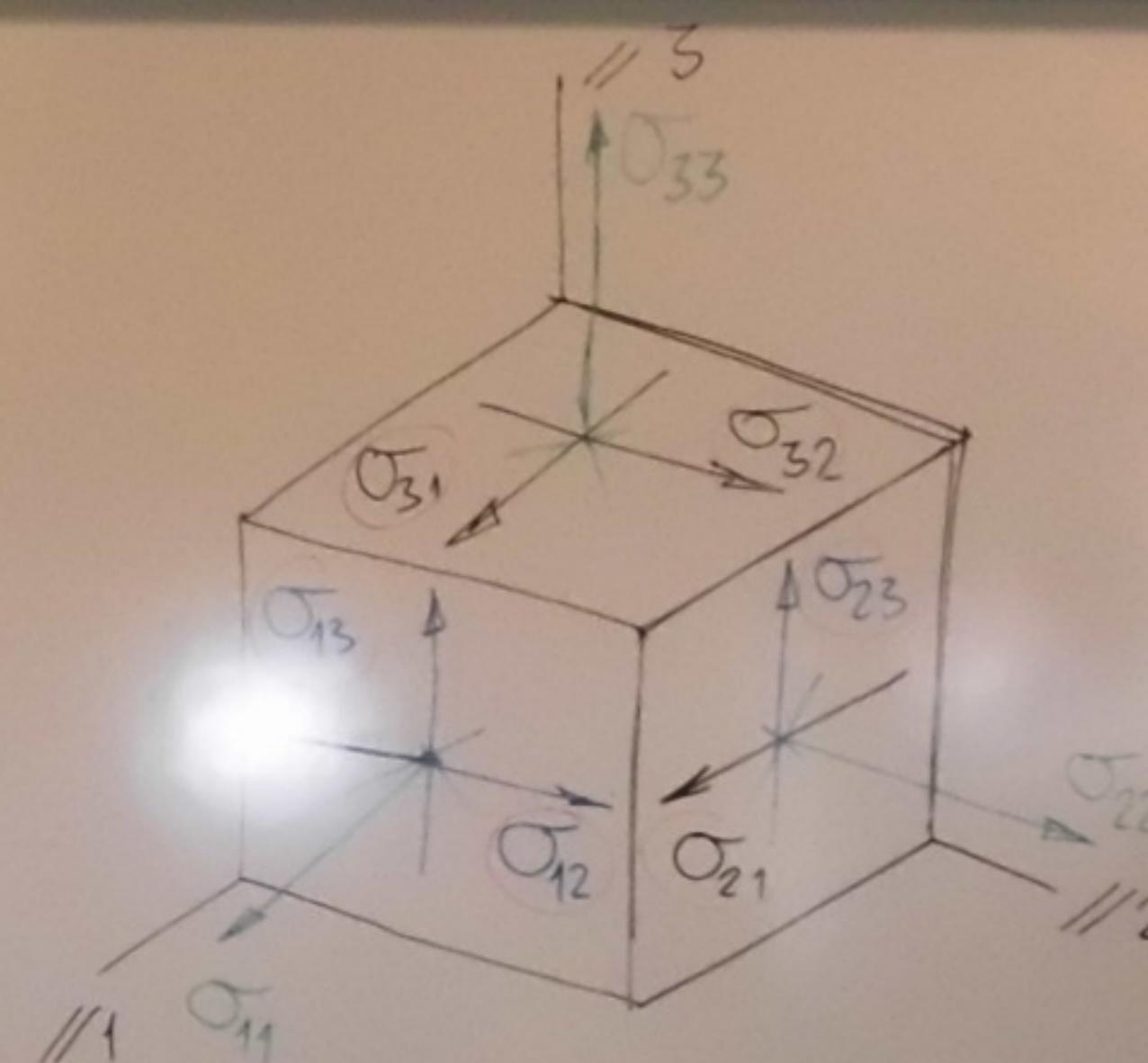
matrice

- Ci conduce di fatto ad una trasformazione lineare di  $\sigma$  in  $t_n$  tramite il tensore sforzo di Cauchy  $\Omega$ , di componenti cartesiane  $\Omega_{ij} = t_{ij}$ , tale per cui:

$$t_n = \Omega \cdot \Pi n = \Pi \cdot \Omega \Leftrightarrow t_{ni} = \sum_j t_{ij} n_j$$

- Pertanto la matrice sforzo  $[\Omega]$  che raccolge le comp. cartesiane  $\Omega_{ij} = t_{ij}$  sostiene rappresentando le comp. di  $t_i$  in righe

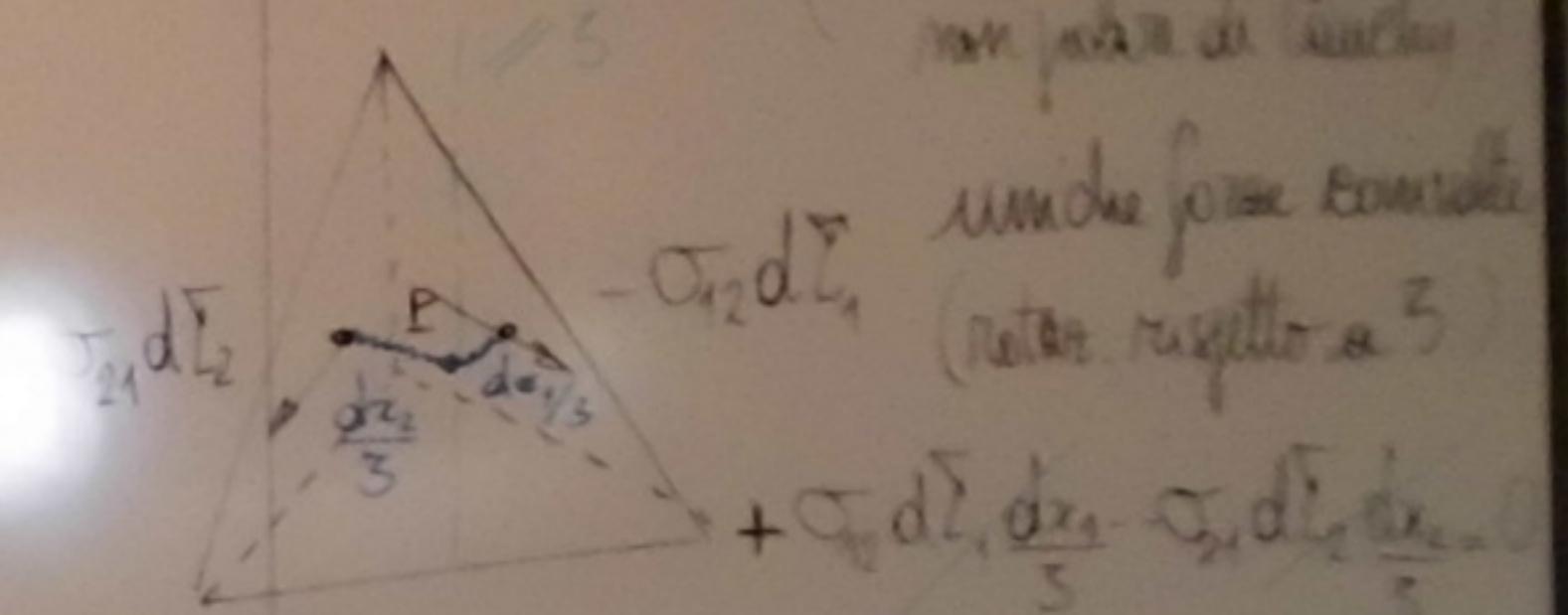
$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$



$\Omega_{ii} = \Omega_{jj}$  3 spz normali

$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$  6 spz tangenti  $\Rightarrow$  3 risultano indip.

- Equil. alle rotazioni del tetraedro (villaggio di contorno non polarizzata)

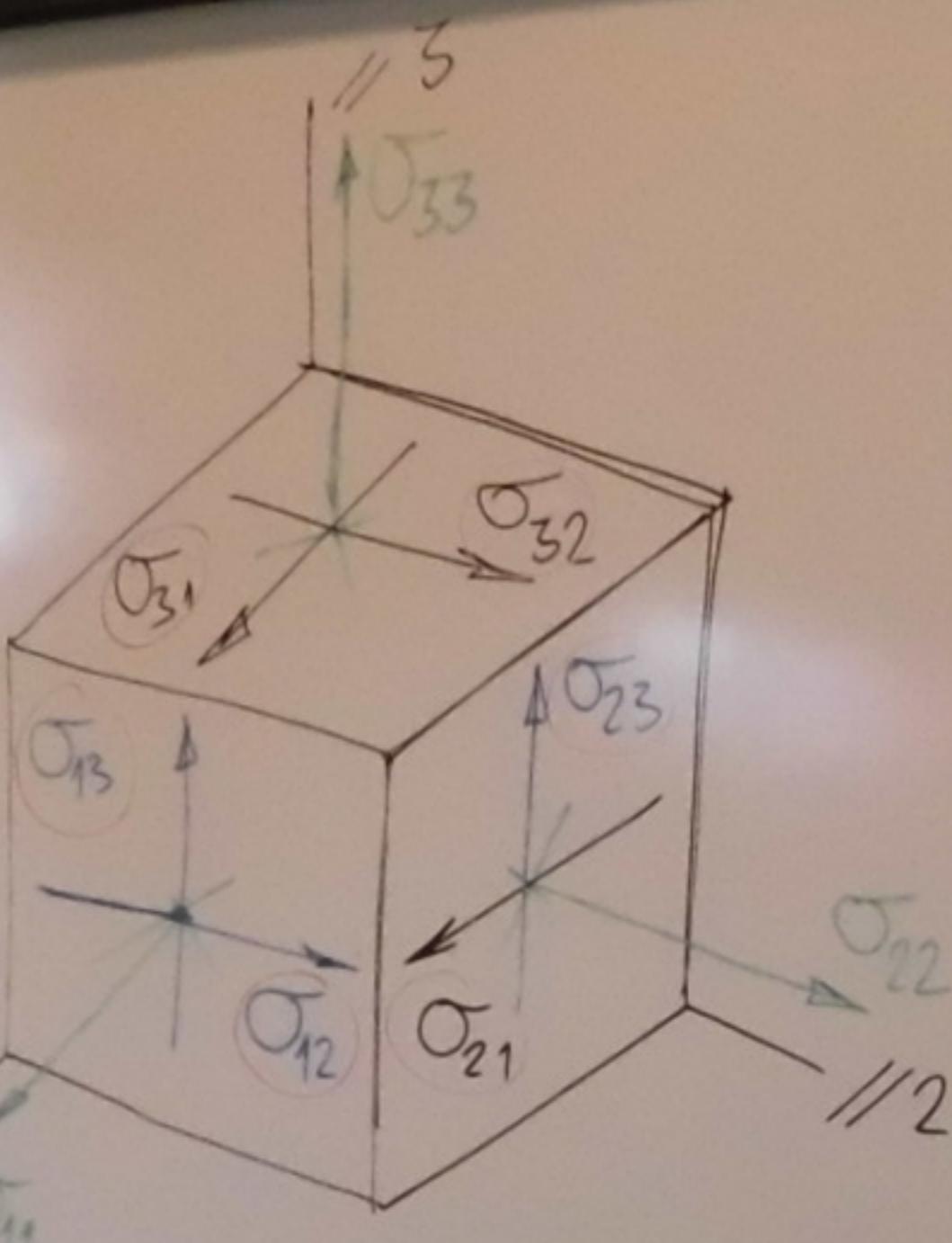


Idem per gli altri ang., pertanto:

$$\Omega_{ji} = \Omega_{ij} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_{11} = \Omega_{33} \\ \Omega_{22} = \Omega_{33} \\ \Omega_{12} = \Omega_{21} \end{cases}$$

Tensore sforzo di Cauchy è simmetrico  
dell'ordine 3 (diagonali) (6 comp. indip.)

Teorema di Cauchy:  $t_n = \sum t_i n_i = t \cdot n$   
 $t_{nn} = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3$   
 $t_{ni} = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3$   
 $t_{in} = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3$   
 $t_{ii} = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3$   
 $t_{ij} = t_{ji}$ , tale per cui:  
 $t_i = \sigma \cdot \Pi = \Pi \cdot \sigma \Leftrightarrow t_{ni} = t_i \cdot n_i = \sigma_i \cdot n_i$   
 Piantato la matrice sforzo  $[\sigma]$  che raccolge le comp. di sforzo  $\sigma_{ij} = t_{ij}$  si ha un rappresentazione simmetrica  
 $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$



$T_{nn}$ , 3 spz. normali  
 $j+i T_{ij} = \sigma_{ij}$  6 spz. tangenti  $\Rightarrow$  3 risultano indip.

- Equil. alla rotazione del tetraedro (nell'hp di continuo non polare di Cauchy)

$$-\sigma_{21} d\Sigma_1 - \sigma_{12} d\Sigma_2 + \sigma_{12} d\Sigma_1 + \sigma_{21} d\Sigma_2 - \sigma_{21} d\Sigma_1 - \sigma_{12} d\Sigma_2 = 0$$

Idem per gli altri assi, pertanto:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \Leftrightarrow \{\sigma^T = \sigma\}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13}$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}$$

Tensore sforzo di Cauchy è simmetrico  
 (del 2° ordine o doppio) (6 comp. indip.)