

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Cinematica dei continui : (definizione di deformazione; equazioni di congruenza interna)

- Misura (intensiva)

Stelle deformazione

(in regime di piccole

deformazioni) → piccoli gradienti
di spostamento

$$\text{~}\rightsquigarrow\text{~} \mathfrak{E}(x)$$

vettore tensore di

vettore tensore di spostamento deformazione $x = x_1$

$$\sigma_i(x_k) \quad \sum_j (x_k)$$

$$|\psi_{ij}| \ll 1 \sim 0.001 = 1\%; \quad 0.01 = 1\%$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \nabla \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{tensore gradiente di spostamento}$$

(deve contenere le deformazioni)

$\varepsilon = \varepsilon + \gamma$ decomposizione additiva di Ψ ($\gamma_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j}$, 9 componenti) "strain"

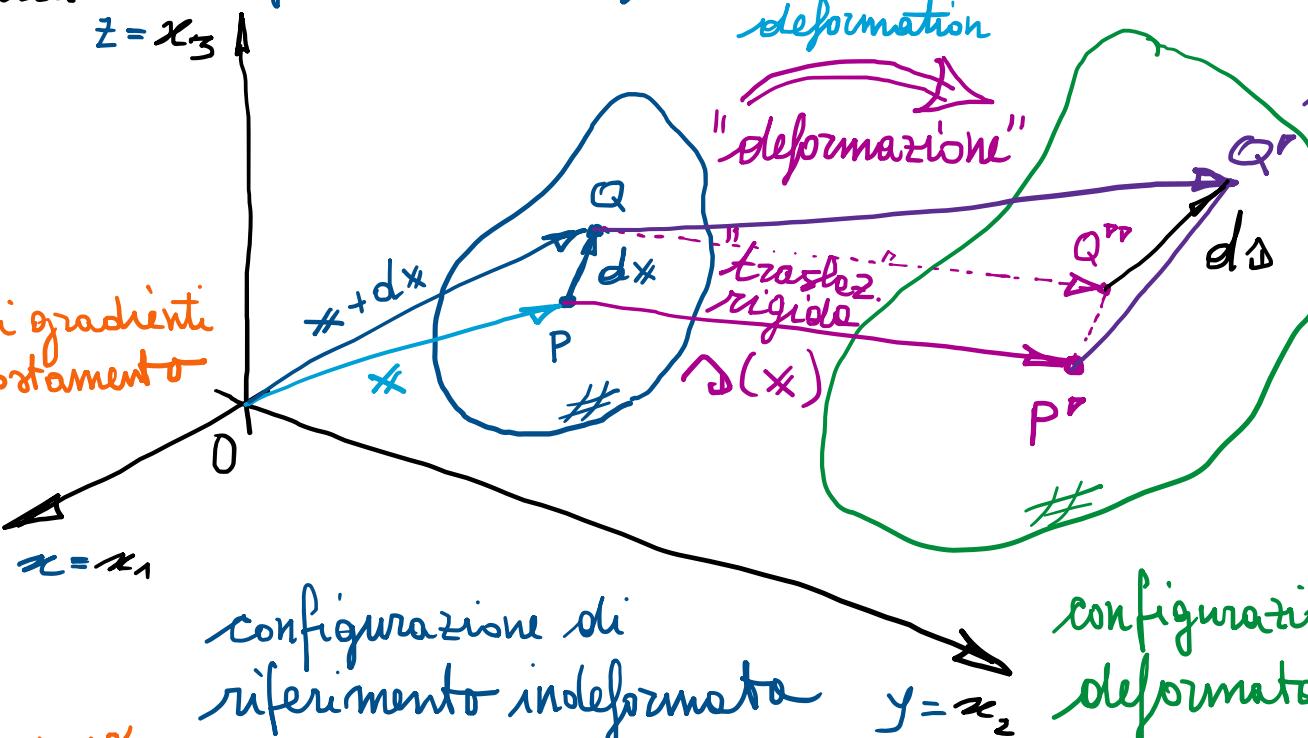
con :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\Psi + \Psi^\top) \text{ parte simmetrica}$$

$$[\varepsilon^T = \varepsilon; \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{i,j} + \gamma_{j,i})] \begin{matrix} \text{deformazione} \\ \text{pura} \end{matrix}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} (\Psi^+ + \Psi^-) \text{ parte simmetrica } [\vartheta_{ij} = \vartheta_{ji}, \quad \vartheta_{ij} - \vartheta_{ji} = \frac{1}{2} (\vartheta_{i,j} - \vartheta_{j,i})] \text{ parit\acute{a}} \\ \varTheta = \frac{1}{2} (\Psi - \Psi^T) \text{ parte emisimmetrica } [\vartheta^+_{ij} = -\vartheta^-_{ij}; \quad \vartheta^+_{ij} - \vartheta^-_{ij} = -\frac{1}{2} (\vartheta_{i,j} - \vartheta_{j,i})] \text{ roteazione rigida infinitesima}$$

$$\overset{+}{\vartheta} = \frac{1}{2} (\Psi - \Psi^T) \text{ parte emisimmetrica } [\overset{+}{\vartheta} = -\vartheta; \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} = -\frac{1}{2}(\gamma_{i,j} - \gamma_{j,i})] \begin{matrix} \text{rotazione} \\ \text{rigide} \\ \text{infinitesime} \end{matrix}$$



$$\Delta(x+dx) = \Delta(x) + d\Delta$$

$$d\uparrow = \Delta(x+dx) - \Delta(x)$$

$$= \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot dx + \dots$$

$$= \underline{\nabla s(x)} \cdot dx$$

$$= \uparrow \quad \cdot dx$$

derivata parziale

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\text{gradiente} = g_i$$

ura : "strain")

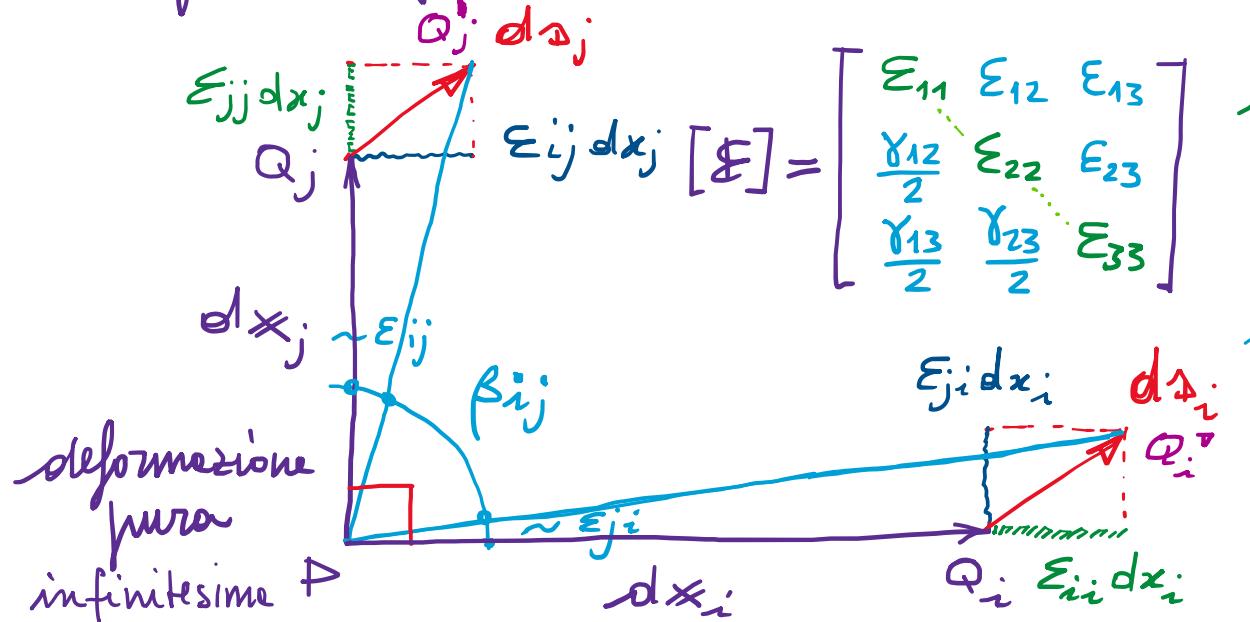
componenti) "latente".

a: 17 deformazione

$-s_{j,i})$] proiezione rigida

infinitesime

- Significato fisico di $\boldsymbol{\varepsilon}$ (componenti ε_{ij}): $\Psi = \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow d\mathbf{x} = \Psi \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x} \Leftrightarrow ds_i = \varepsilon_{ij} dx_j$

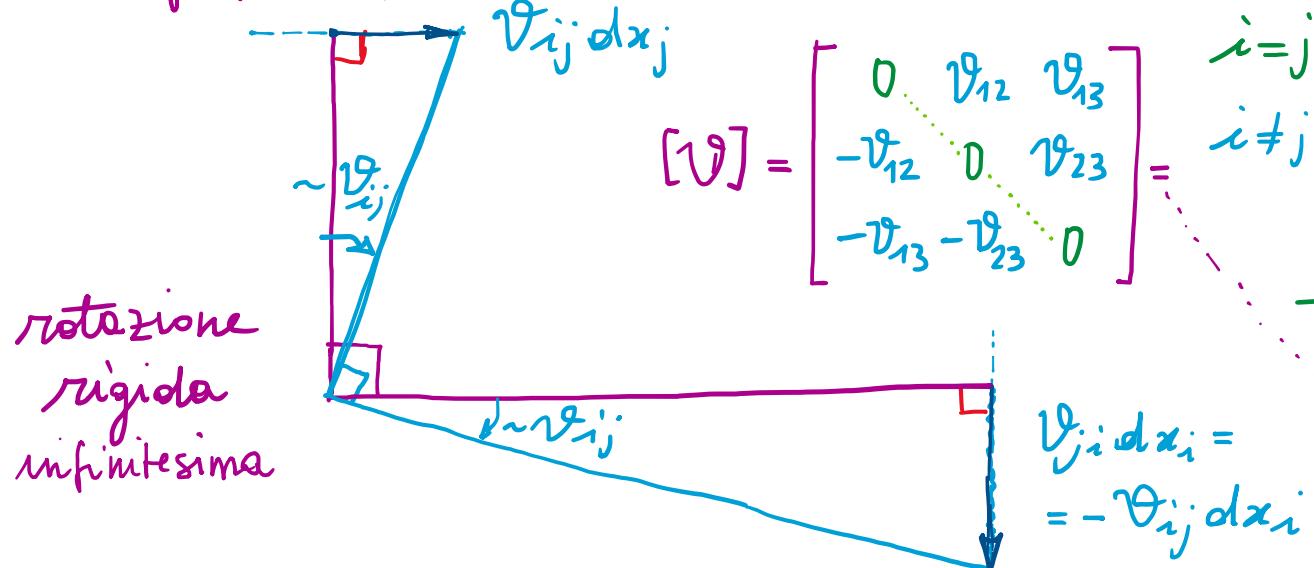


$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$i=j$ ε_{ii} = allungamento specifico nelle (veoli) $E = \frac{\Delta l}{l_0}$
= γ_{ii} , direzione i

$i \neq j$ $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij}$
scorrimento angolare tra fibre i e j
... deformazione tagliente

- Significato fisico di $\boldsymbol{\vartheta}$ (componenti ϑ_{ij}): $\Psi = \boldsymbol{\vartheta}$ ($\boldsymbol{\vartheta}^T = -\boldsymbol{\vartheta}$; $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$) [$\vartheta_{ii} = 0$]



$$[\boldsymbol{\vartheta}] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_{ij} dx_i = -\vartheta_{ij} dx_i$$

$i=j$ $\vartheta_{ii} = 0$

$i \neq j$ ϑ_{ij} rotazione rigida infinitesima delle fibre i,j (rispetto all'asse K)

$$-2\omega_K = 2\vartheta_{ij} = \dot{\alpha}_{i,j} - \dot{\alpha}_{j,i} \quad (2\dot{\omega} = \text{rot } \boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \boldsymbol{\omega})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'angolare velocità prodotto vettoriale

Equazioni di congruenza interne (o di compatibilità)

- CN di congruenza per il campo $\varepsilon_{ij}(x_k)$:

Scarto Residuo

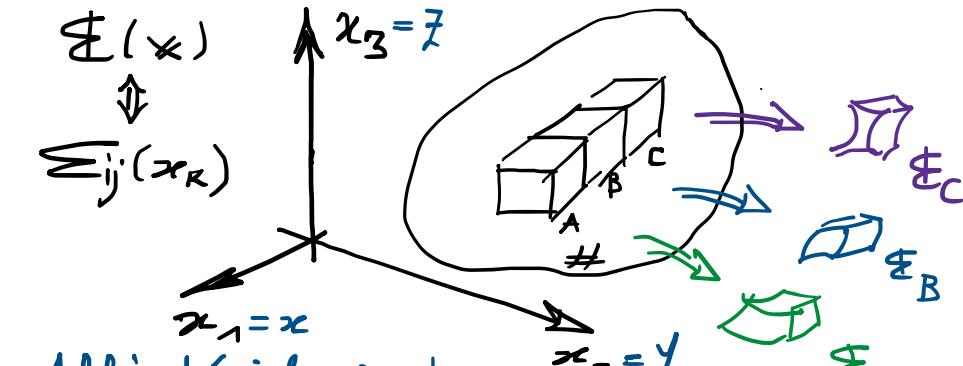
$$\left\{ \begin{array}{l} S_{zz} = R_z = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xz} = 0 \quad (*) \\ S_{xx} = R_x = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\ S_{yy} = R_y = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{yz} = U_x = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} = 0 \\ S_{zx} = U_y = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \quad (*) \\ S_{xy} = U_z = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} = 0 \end{array} \right.$$

- Scritture compatte (de Saint Venant) ~ 1884

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ke,i} = \varepsilon_{ik,j} + \varepsilon_{ie,jk}$$

$$(\text{rot} = \nabla \wedge) \quad \mathbb{S} = \text{rot rot } \mathbb{\varepsilon} = 0 \quad ; \quad \mathbb{R} = \mathbb{U} = 0$$



Affinché il campo di deformazione risulti compatibile ("riassembaggio dei nodi deformati") le variazioni spaziali del $\varepsilon(x)$ deve soddisfare certe relazioni

$$\text{Se } \mathbb{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \Phi + \nabla \Phi^\top) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij,j} + \alpha_{ji,i}) :$$

$$\cancel{\alpha_{xx,xyy}} + \cancel{\alpha_{yy,xxx}} - \cancel{\frac{1}{2} (\alpha_{xy,y} + \alpha_{yx,x})}_{,xy} = 0$$

per il Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni (se $\mathbb{\varepsilon}$ è congruente, allora \Rightarrow)

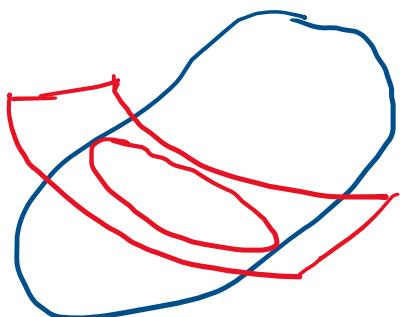
(equivalenti a 3 relazioni indipendenti, in quanto vengono le identità di Bianchi seguenti)

Identità di Bianchi (3 relazioni): [per th. di Schwarz]

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} = 0 \\ U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} = 0 \\ U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{anche per campo } \mathbf{S}(x) \text{ non congruente}$$

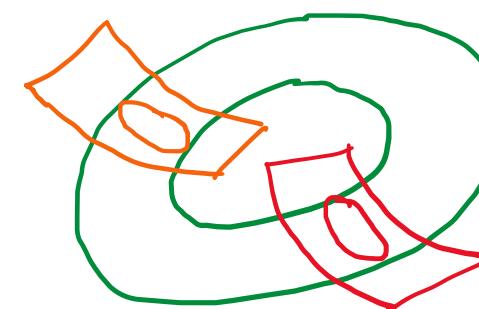
Sono CS di congruenza? (integrandolo si

ottiene un
campo S
compatibile?)



Si, per corpi monoconnessi
(si scindono in sole parti con
un unico taglio)

No, per corpi pluriconnessi
(es. biconnesso)



• $\Delta \mathbf{S} \neq 0$
Occorre in più una
condizione di
compatibilità alle
interfacce che giunge
ad imporre $\Delta \mathbf{A} = 0$

(per ogni interfaccia
aggiuntiva, rispetto a
corpo monoconnesso)