Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

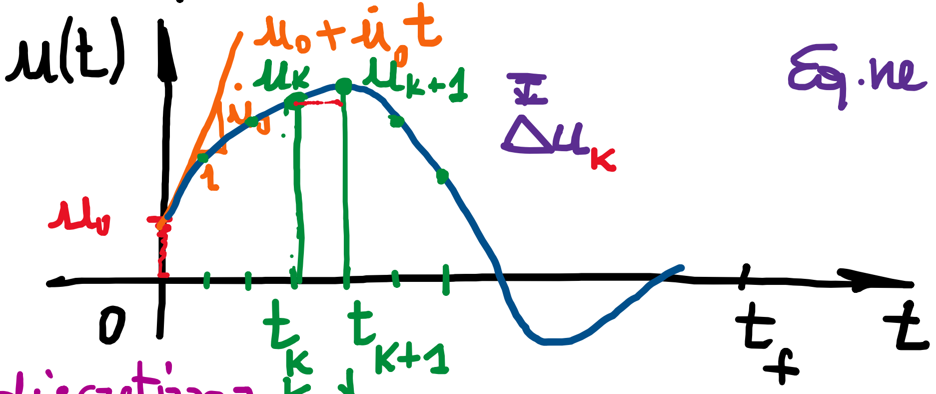
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 09

Integrazione diretta nel tempo dell'equazione del moto (integrazione passo-passo)
"step-by-step"



discretizzaz. dell'asse dei tempi

Δt_k passo temporale "time step"

$\Delta t_k = \Delta t = \frac{t_f - t_0}{n}$ .... n° dei passi

Eq.ne del moto in forma incrementale:

$$m\,\Delta\ddot{u}_k + c\,\Delta\dot{u}_k + K\,\Delta u_k = \Delta F_k \Rightarrow \Delta u, \Delta\dot{u}, \Delta\ddot{u}$$

(esatta o approx.)

Avanzamento $t_k \to t_{k+1}$

$$\ddot{u}_{k+1} = \ddot{u}_k + \Delta\ddot{u}_k \qquad [\Delta\ddot{u}_k = \ddot{u}_{k+1} - \ddot{u}_k]$$

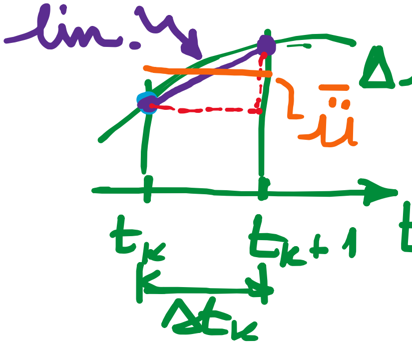
$\ddot{u}_k$: soluz. all'inizio del passo

$\Delta\ddot{u}_k$: incremento della soluzione nel passo

"Metodo delle differenze finite" $\Rightarrow$ rappresentaz. di derivate tramite rapporti incrementali

Sviluppo in serie di Taylor: $\Delta f_k = f(x_k + \Delta x_k) - f(x_k) = f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x)\,\Delta x^3 + \ldots$

- Metodo dell'accelerazione lineare



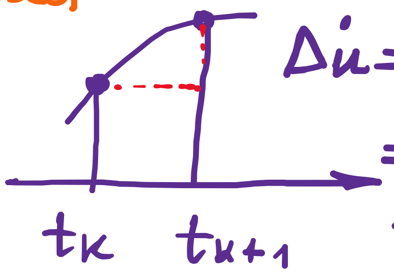
(media)

$\Delta\ddot{u} = \dddot{u}\,\Delta t \quad f_1 \Rightarrow \ddot{u}$

$\Rightarrow \dddot{u} = \frac{\Delta\ddot{u}}{\Delta t}$

$\sim \Delta t^2$

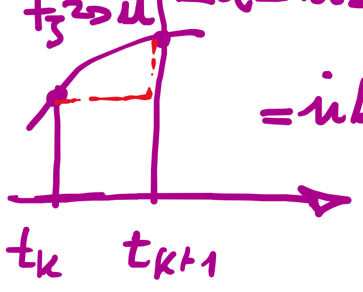
$f_2 \Rightarrow \dot{u}$



$$\Delta\dot{u} = \ddot{u}\,\Delta t + \frac{1}{2}\dddot{u}\,\Delta t^2 = \Delta t\left(\ddot{u} + \frac{1}{2}\Delta\ddot{u}\right)$$

$\sim \Delta t^3$

$f_3 \Rightarrow u$



$$\Delta u = \dot{u}\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}\,\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{u}\,\Delta t^3 = \dot{u}\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\ddot{u} + \frac{1}{3}\Delta\ddot{u}\right)$$

Metodo di Newmark (1959) ⇒ Generalizzazione (famiglia di metodi di integr.)

$$
\begin{cases}
(1)\quad \Delta u = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2(\underbrace{\ddot u + 2\beta\,\Delta\ddot u}_{(1-2\beta)\ddot u_k + 2\beta\,\ddot u_{k+1}}) = \dot u\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot u\,\Delta t^2 + \beta\,\Delta\ddot u\,\Delta t^2 \\
(2)\quad \Delta\dot u = \Delta t(\underbrace{\ddot u + \gamma\,\Delta\ddot u}_{(1-\gamma)\ \ \gamma})
\end{cases}
$$

medie pesate

Acc. lin. $2\beta = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{6}$

$\gamma = \frac{1}{2}$

" media $2\beta = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{4}$

$\gamma = \frac{1}{2}$

Dalla (1)
$$\Delta\ddot u = \frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u\,\Delta t}{\beta\Delta t^2} - \frac{1}{2}\frac{\ddot u\,\Delta t^2}{\beta\,\Delta t^2} = \boxed{\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot u}{\beta\Delta t} - \frac{\ddot u}{2\beta} = \Delta\ddot u} \quad (3)$$

Sost. la (3) nella (2):
$$\Delta\dot u = \ddot u\,\Delta t + \gamma\Delta t\frac{\Delta u}{\beta\Delta t^2} - \gamma\Delta t\frac{\dot u}{\beta\Delta t} - \gamma\Delta t\frac{\ddot u}{2\beta} = \boxed{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot u + \frac{2\beta-\gamma}{2\beta}\ddot u\,\Delta t = \Delta\dot u} \quad (4)$$

Sost. la (3) e la (4) nell'eq.ne del moto in forma incrementale: $m\Delta\ddot u + c\Delta\dot u + k\Delta u = \Delta F$

$$\underbrace{\left(\frac{m}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta\Delta t} + k\right)}_{\tilde K \text{ rigidezza efficace}}\Delta u = \underbrace{\Delta F + \frac{m}{\beta}\left(\frac{\dot u}{\Delta t} + \frac{\ddot u}{2}\right) + \frac{c}{\beta}\left(\gamma\dot u - \frac{2\beta-\gamma}{2}\ddot u\,\Delta t\right)}_{\Delta\tilde F \text{ forza incrementale efficace}} \Rightarrow \left\{\tilde K\,\Delta u = \Delta\tilde F\right\}$$

$$\Delta u = \tilde K^{-1}\,\Delta\tilde F$$

Noto Δu, sost. nelle (4) e (3), si ottiene l'incremento $\Delta\dot u$ e $\Delta\ddot u$, a consentire l'avanzamento della soluzione all'istante temporale successivo.

Implementazione (pseudo-code) ⇒ Algoritmo di integrazione

- Partendo da c.i. $u_0, \dot{u}_0$

CICLO su tutti i time step:

- t_k : $u_k, \dot{u}_k, \ddot{u}_k$; ΔF_k
- calcolo di $\tilde{K}$, $\Delta \tilde{F}_k$
- soluzione $\Delta u_k = \tilde{K}^{-1} \Delta \tilde{F}_k$
- determinaz. di $\Delta \dot{u}_k$, $\Delta \ddot{u}_k$
- aggiornamento variabili $u_{k+1}, \dot{u}_{k+1}, \ddot{u}_{k+1}$

cf. ⇒ accuratezza del metodo (bontà della soluz.)

indicazione tipica per suff. accurat.

$$\Delta t \simeq \frac{T_1}{10}$$

metodo	β	γ	tipo	Δt_{cr}
acc. media	1/4	$\frac{1}{2}$	implicito	incond. stab. (∞)
" lineare	1/6	$\frac{1}{2}$	implicito	$\sqrt{3}\,\frac{T_1}{\pi}$
differenze centrali	0	$\frac{1}{2}$	esplicito	$\frac{T_1}{\pi}$

Caratteristiche

- esplicito sse $\beta = 0$
- accuratezza del 2° ordine sse $\gamma = 1/2$ $\quad \varepsilon \sim \Delta t^2$
- stabilità (numerica) u limitata $\forall \Delta t$
- incondizionatamente stabile ($\forall \Delta t$) $\quad 2\beta \geq \gamma \geq 1/2$
- condizionatamente stabile $\quad 2\beta < \gamma$; $\gamma \geq 1/2$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_1} = \frac{\Omega_{cr}}{2\pi} T_1$$

Stima Δt_{cr}

$$\Omega_{cr} = \frac{\xi(\gamma - 1/2) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2(\gamma - 1/2)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}$$

stima conserv. $\xi = 0$ $\to$ $\gamma = 1/2$

$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} ; \quad \Delta t_{cr} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} T_1$$

SOMMARIO (Lez. 09)

- Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (nel dominio del tempo).
- Da sviluppo in serie di Taylor ⟹ differenze finite (approx. nel passo).
- Metodo dell'accelerazione lineare/media.
- Generalizzazione ⟹ Metodo di Newmark (famiglia di metodi).
- Implementazione in algoritmo numerico passo-passo.
- Caratteristiche (implicito/esplicito; accuratezza; stabilità numerica).

Next step: Introduzione (cenno) all'analisi nel dominio delle frequenze.

Sistemi MDOF (Multi Degree of Freedom Systems) ⟹ alias sistemi discreti a più gradi di libertà.