

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

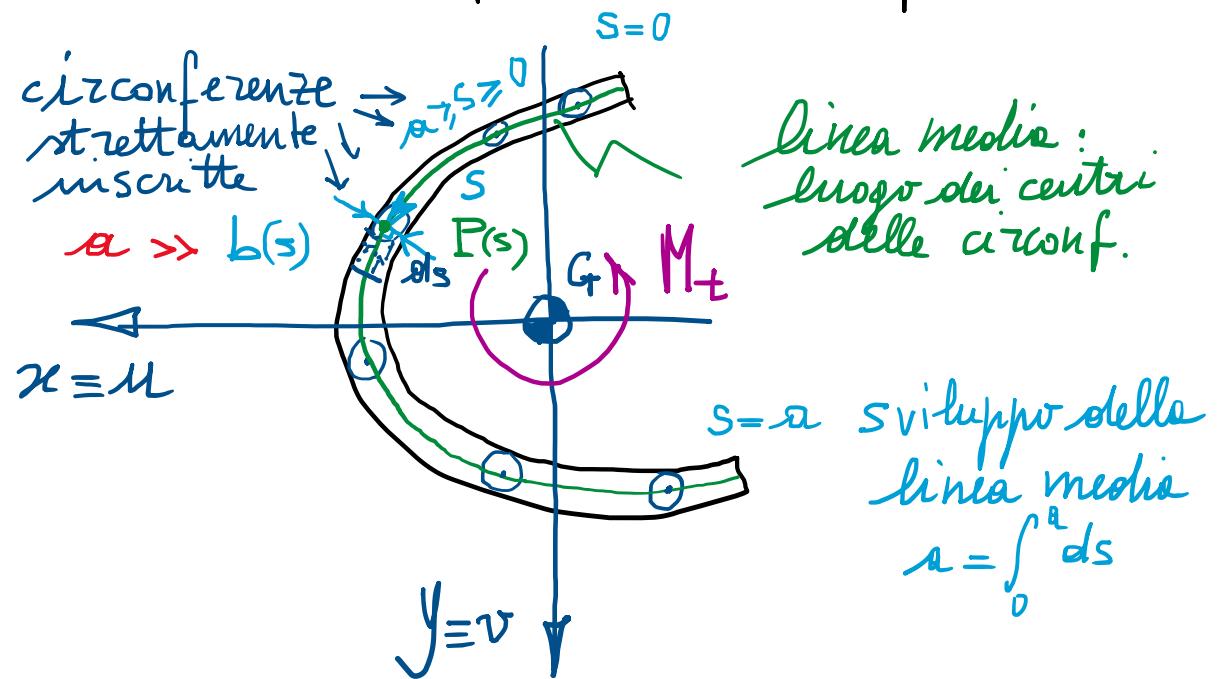
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

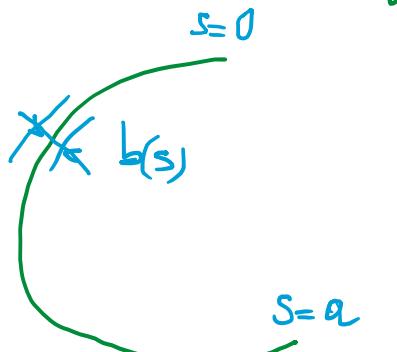
[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 22

Torsione nei profili sottili aperti ( $\rightarrow$  generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile) "ripiegato"  $\longleftrightarrow$



Caratteristiche geometriche: (riferite alla linea media)

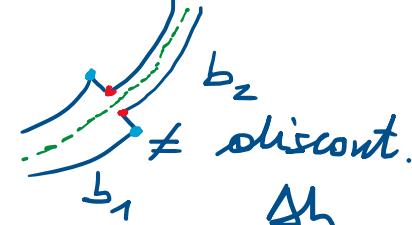


$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

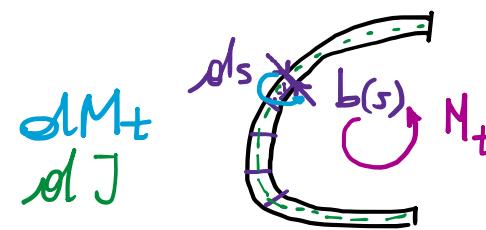
$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore  $b(s)$ , anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).
- Variazione ammessa, seppur con  $b(s) \ll a$  e  $s$ , con continuità: non

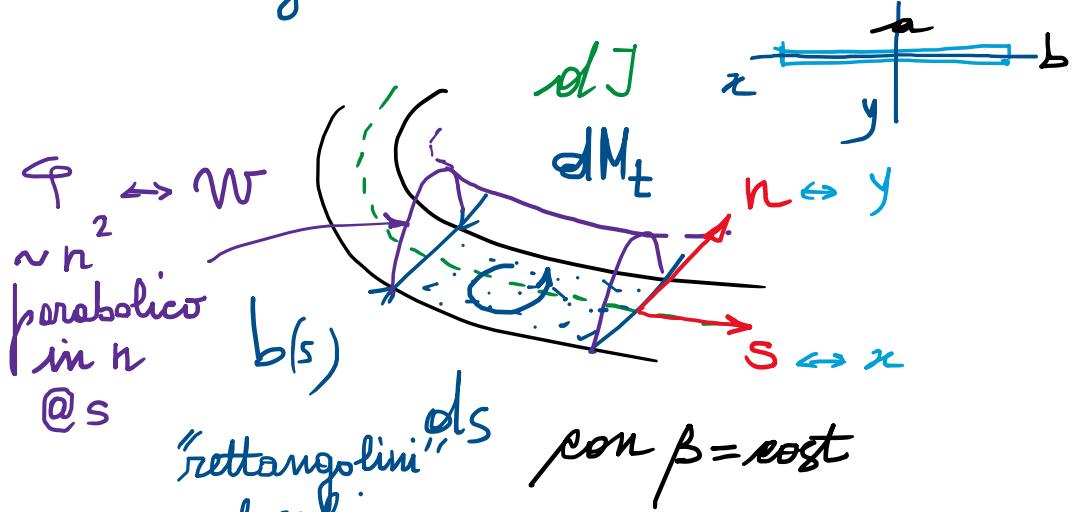


- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo  $b(s) ds$  si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione

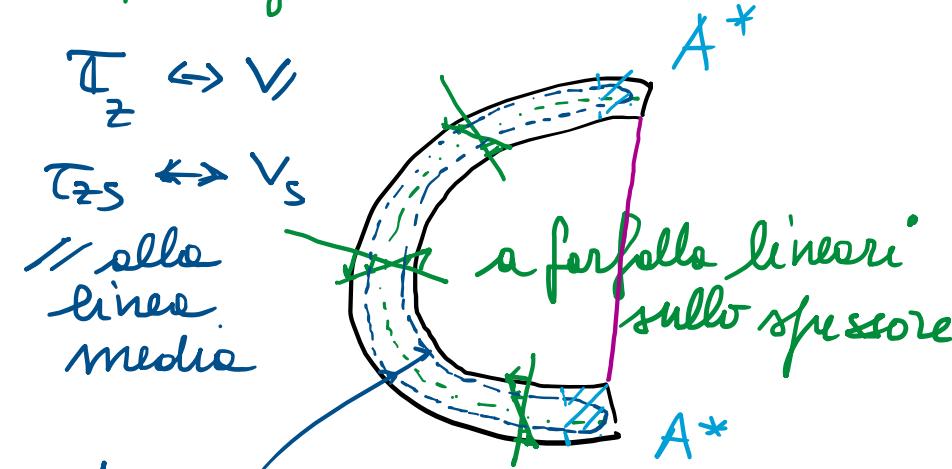


a ferite di  
torsione  
 $\beta = \text{cost}$

- Analoge delle membrane:



- Analoge idrodinamica:



traiettorie che si  
richiudono all'interno  
dello spessore

→ "tracci di leva" delle  $T_{zs}$  >  $T_{zn}$   
dell'ordine dello spessore  $b(s)$   
quindi piccoli → scarsa capacità portante  
a torsione

- f. ne di Airy:

$$\Phi(s, n) = K \left( \frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right)$$

locale

$$\frac{M_t}{J}$$

$$n = \pm \frac{b}{2}$$

$$T_{zs}(s) = \frac{M_t}{J} b(s)$$

$$\underbrace{c}_{\text{trascurabili}}$$

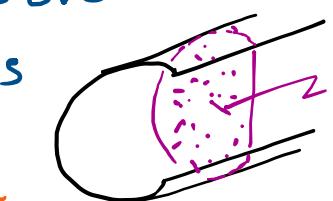
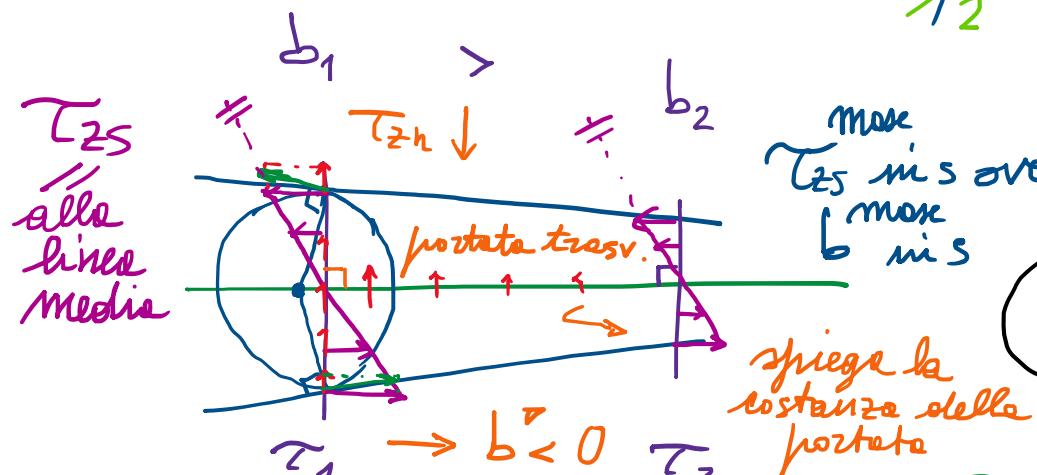
$$-2 \frac{M_t}{J} n$$

trascurabili  
in sensi  
ingegneristici

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{zs}(n; s) = \Phi_{,n} = G\beta (-2n) = -2G\beta n = -2 \frac{M_t}{J} n \\ T_{zn}(s) = -\Phi_{,s} = K \cancel{\frac{2}{4}} \frac{b(s)}{b''} \cancel{b(s)} \simeq 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{db(s)}{ds} \simeq 0$$

spessore  
resto  
piccolo



$T_{zs}$  tangente al  
contorno

$T_{zs}$  (fluido uscibile dal profilo)

-  $\bar{J}$  determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle  $T_{zs}$  e il momento torcente  $M_t$ ):

$$M_t = 2 \int_A c P dA = 2 G \beta \int_0^a \left( \frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) dn ds$$

$$\begin{aligned} &= 2 G \beta \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \\ &\quad \text{d}\bar{J} \quad \boxed{\frac{ds}{b(s)}} \\ &= G \beta \bar{J} \end{aligned}$$

torsione



$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad G\beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ}$$

cost. per tutti i  $b(s) \cdot ds$

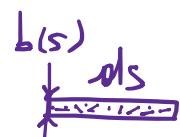
rigidezza torsionale

$$\left. \frac{\frac{b(s)^2}{4} b(s) - \frac{n^3}{3}}{b/2} \right|_{-b/2}^{b/2} = b(s) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{2}{8} \right) = \frac{1}{12} b(s) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{b(s)}{3}$$

$$b = \text{cost} \Rightarrow \bar{J} = \frac{1}{3} ab^3$$

$$\bar{J} = \int_0^a d\bar{J} = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds \quad \begin{array}{l} \text{"piccolo"} \\ \sim b(s) \end{array}$$

momento d'inerzia torsionale



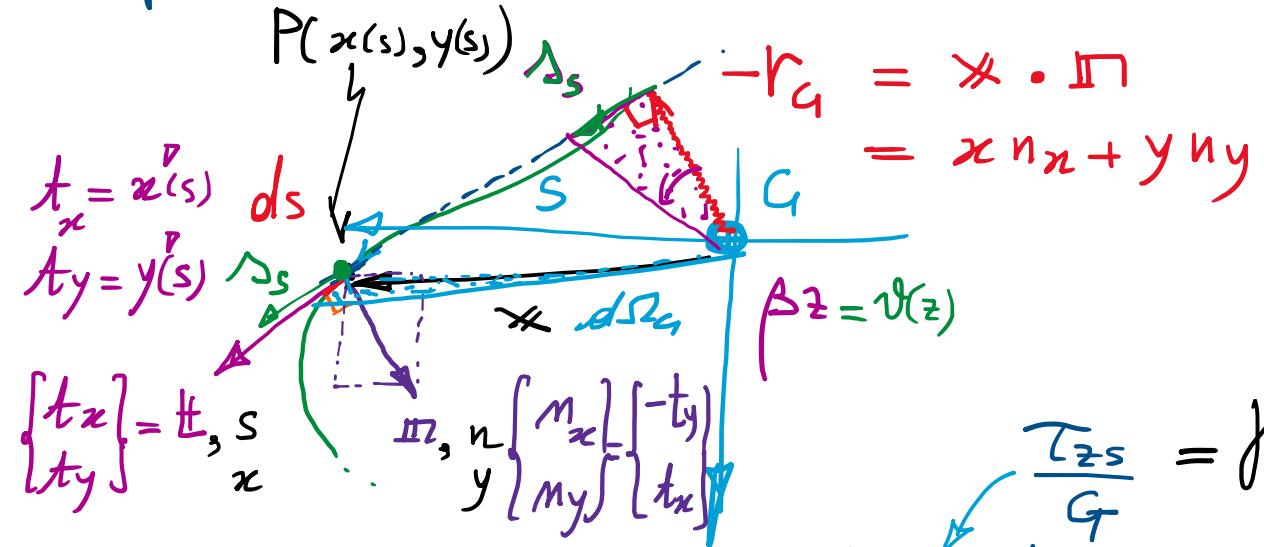
$$T_{zs}^{(s)} = G\beta b(s) = \frac{M_t}{J} b(s) = \frac{dM_t}{dJ} b(s)$$

- Ingombro fuori piano (riferito alle linee medie)  $[\Psi_G(s) \neq 0, \Psi_c(s) \neq 0]$

$\text{camino}$   
di  
sostamenti  
(rif. a G)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x = -\beta z y \\ \Delta_y = \beta z x \\ \Delta_z = \beta \Psi_G(x(s), y(s)) \end{array} \right\}$$

$\vartheta(z)$



$$d\Psi_g = -2 d\Delta_Q$$

$$\Psi_g(s) = -2 (\bar{\Omega}_g(s) - \bar{\Omega}_G(s))$$

$$\bar{\Omega}_G = \frac{1}{A} \int_0^a \bar{\Omega}_g(s) b(s) ds$$

Veloz. media

camino

di

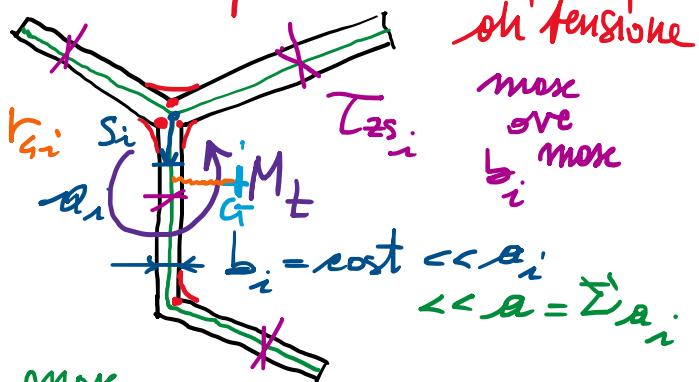
sostamenti  
(rif. a G)

camino

di

- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili

*smissi per abbattere concentraz.*



di tensione  
max  
ove  
max

$a_i = \sum a_i$

$\ll a_i = \sum a_i$

$$\left( T_{2s_i} \right)_{\text{max}} = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M t_i}{J_i} b_i$$

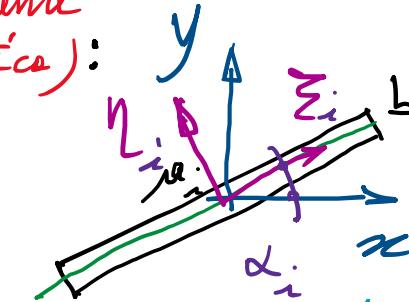
$$A = \sum_i a_i b_i$$

$$J_x = \sum_i J_{x_i}$$

$$J_y = \sum_i J_{y_i}$$

$$J = \sum_i J_i = \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3$$

(caso frequente  
nella pratica):



$$J_{\Sigma_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \approx 0$$

$$J_{y_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3$$

trasf. per rotazione d'assi  
(con  $J_{\Sigma_i} = 0$ )

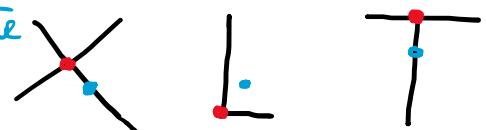
$$\begin{cases} J_{x_i} = J_{y_i} \sin^2 \alpha_i \\ J_{y_i} = J_{y_i} \cos^2 \alpha_i \\ J_{x_i y_i} = \frac{J_{y_i}}{2} \sin 2 \alpha_i \end{cases}$$

vedi  
Cerchiori  
Mohr  
(solle inezzie)

- Funzione di ingombro:  $\psi_{g_i}(s_i) \sim \Omega_{g_i}(s_i)$  con  $r_{g_i} = \text{cost}$  + tratti i  
lineare a tratti nelle  $s_i$

- Profili "a stella"

particolarmente  
deboli a  
torsione



centro delle stelle  
è il centro di torsione

no ulteriori risorse portanti ole  
ev. ingombro impedito (torsione  
per congruenza  $\Leftrightarrow$  secondaria)

$$r_{g_i} \neq 0$$

$$r_{c_i} = 0 \Rightarrow \Omega_{c_i} = 0 \Rightarrow \psi_c = 0$$

$$\int_A \psi_c dA = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_A \psi_c x dA = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_A \psi_c y dA = 0 \quad \checkmark$$

f. ne di ingombro  
riferita al centro  
delle stelle identic.  
nulle

