FONDAMENTI DI DINAMICA E INSTABILITÀ DELLE STRUTTURE

Facoltà di Ingegneria (DALMINE)
Università di Bergamo

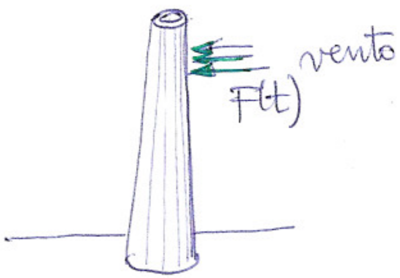
prof. Egidio RIZZI

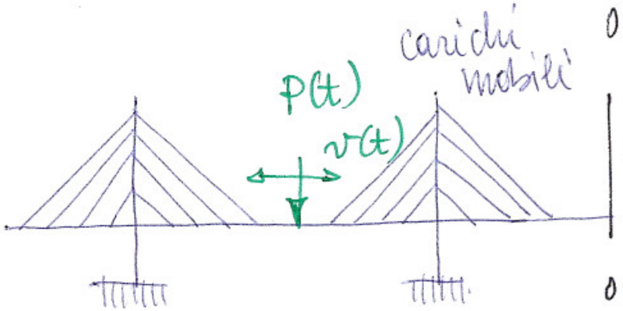
(I) Introduzione al corso

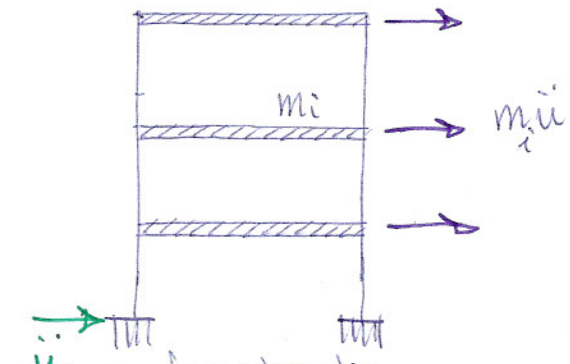
- Si analizzano gli aspetti fondamentali delle tematiche strutturali;

DINAMICA

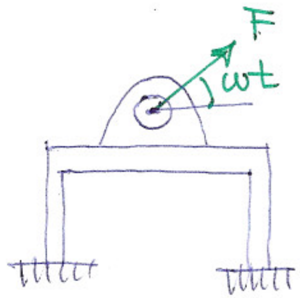
Risposta delle struttura ad azioni variabili nel tempo (deterministiche (note) o aleatorie (casuali))







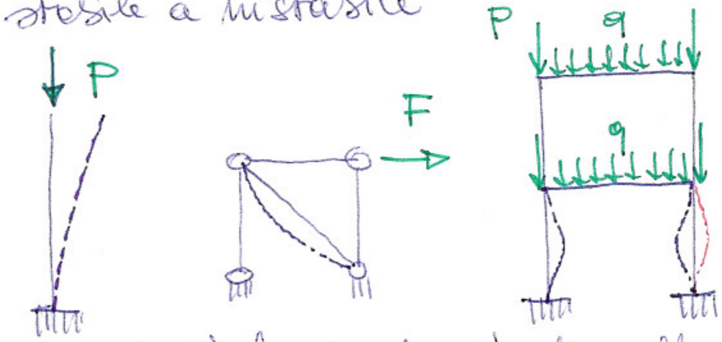
azione sismica



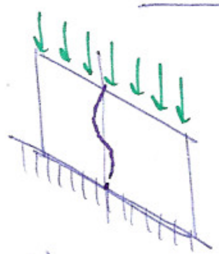
vibrazioni indotte da masse rotanti eccentriche

INSTABILITÀ

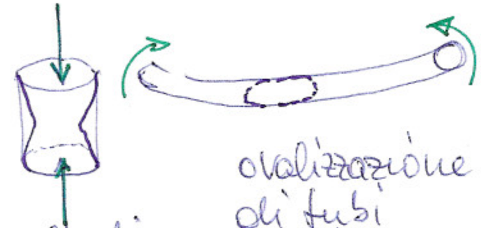
Cambiamento della natura della configurazione di equilibrio, da stabile a instabile



instabilità flessionale di aste snelle compresse

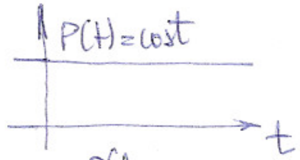


imbozzamento locale di lastre e gusci sottili

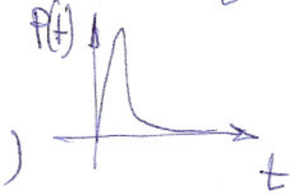


ovalizzazione di tubi sottili

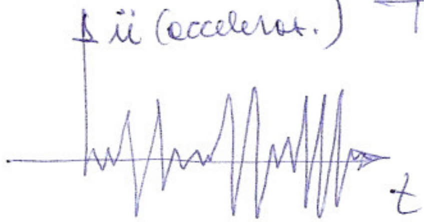
- le azioni possono essere di diversa natura e caratteristica:
  - statiche – Ad es. carichi permanenti o sovraccarichi accidentali



  - variabili di breve durata (impulsive) – Ad es. impatti, esplosioni



  - variabili di lunga durata – Ad es. evento sismico



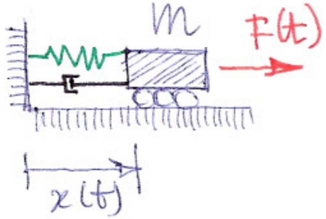
- Possono corrispondere a situazioni di servizio, per le strutture, o a situazioni limite, eventualmente anche al collasso.

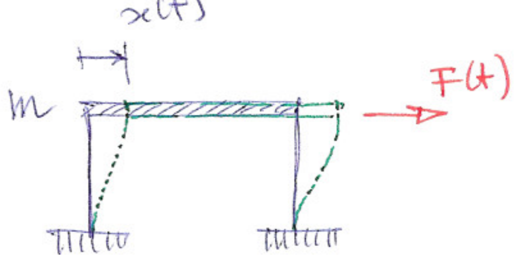
- L'analisi strutturale si inquadra nell'ambito della Scienza delle Costruzioni. Si mantengono in genere tutte le ipotesi caratteristiche (in particolare la linearità del comportamento del materiale) ma appaiono due novità fondamentali:
  - nell'ambito dinamico la presenza degli effetti inerziali, cioè legati alla distribuzione delle masse strutturali, nonché la dipendenza dal tempo della risposta strutturale.
  - nell'ambito dell'instabilità la presenza di grandi spostamenti, cioè la necessità di imporre il rispetto dell'equilibrio rispetto alla configurazione deformata (e non a quella indeformata) della struttura (pur potendo comunque spesso ritenere gli spostamenti geometricamente piccoli ai fini della descrizione cinematica).

Scorsa al programma:

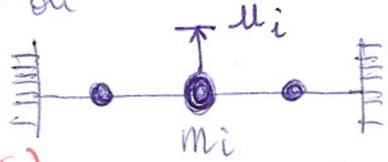
I Parte – Dinamica

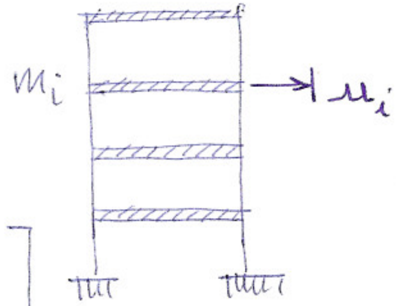
1. Dinamica dei sistemi ad un gdl:



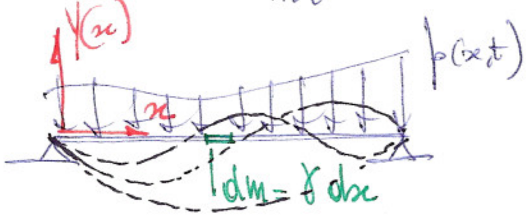


2. Dinamica dei sistemi ad un numero finito di gradi di libertà:



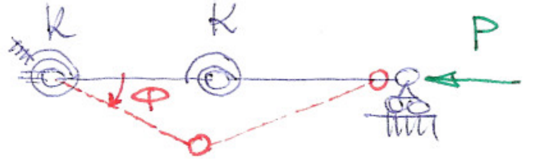


3. Dinamica dei sistemi continui:

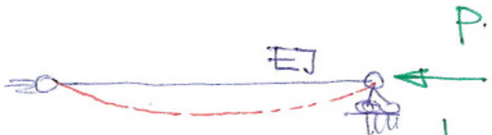


II Parte – Instabilità

1. Instabilità di sistemi discreti:
(ad elasticità concentrata)



2. Instabilità flessionale di aste compresse:

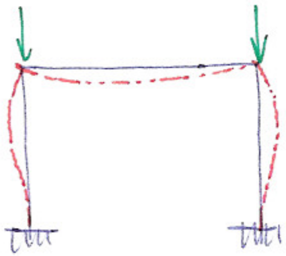


l'asta di Eulero

3. Instabilità di sistemi reali:

archi ribassati

effetto delle imperfezioni

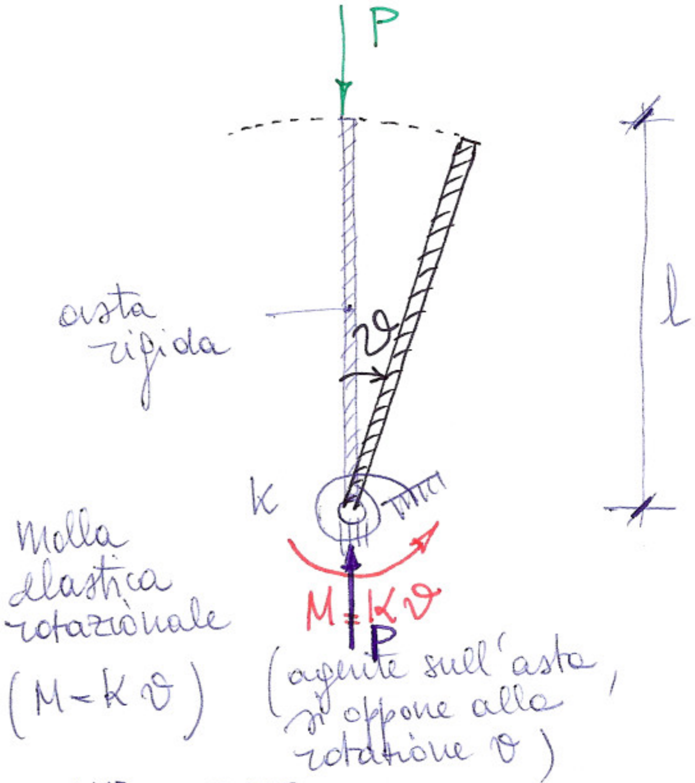


instabilità dei telai

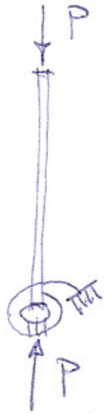
- La separazione tra le due parti non è, peraltro, così netta:
  - mostreremo metodologie comuni per affrontare i due aspetti (ad es. metodi energetici, metodi di discretizzazione, pb. agli autovalori);
  - vi è intimità tra instabilità e dinamica, come illustrato dal seguente <u>esempio</u>, che può essere considerato <u>illustrativo delle tematiche presentate nel corso</u>.

<u>Esempio illustrativo</u> –

- Si vuole analizzare la stabilità di un sistema ad 1 gdl con deformabilità elastica concentrata.
- Si assuma l'angolo ϑ quale il grado di libertà che definisce la <u>configurazione di equilibrio deformata</u>
- È facile intuire che $\exists$ una configurazione di equilibrio <u>banale</u> indeformata ($\vartheta = 0$), con l'asta compressa dalla forza P.



$$[K] = \frac{[M]}{[\vartheta]} = [F] \cdot [L]$$

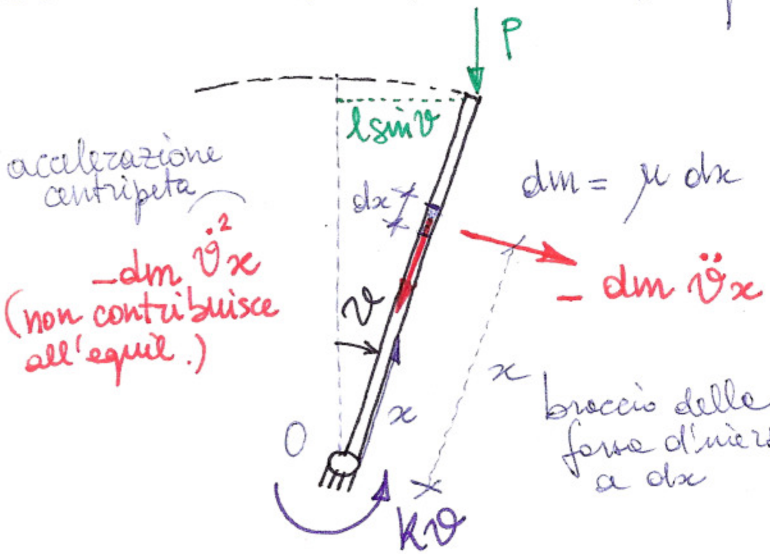


$\vartheta = 0$ <u>configurazione di equilibrio banale</u>

- Si vuole indagare la <u>natura</u> di questa configurazione di equilibrio, se stabile oppure no.

- Criterio dinamico di stabilità (secondo Liapunov): studiamo la possibilità che una piccola perturbazione della configurazione banale conduca il sistema a lasciarla (instabile), oppure no.

- Consideriamo un moto di piccole perturbazioni (ϑ_0, $\dot{\vartheta}_0$) rispetto alla configurazione banale $\vartheta = 0$. Scriviamo l'equazione del moto per configurazione deformata:



$dm = \mu\, dx$ (es. μ = cost., densità di massa lineare)

$- dm\, \ddot{\vartheta} x$ forza d'inerzia (da introdurre nell'eq. del moto, accanto alle azioni statiche — Principio di d'Alembert)

ove $\ddot{\vartheta}$: accelerazione angolare

- Equilibrio dinamico alla rotazione rispetto ad O:

$$\underbrace{P \cdot l \sin\vartheta}_{\text{momento destabilizzante dovuto al carico P}} - \underbrace{K\vartheta}_{\text{momento stabilizzante di richiamo elastico}} - \underbrace{\int_0^l (dm\, \ddot{\vartheta} x) \cdot x}_{\text{momento stabilizzante legato agli effetti inerziali}} = 0$$

DINAMICA

- Si noti che, nello scrivere l'equilibrio dinamico, si è considerata una generica configurazione deformata, discosta da quella banale. Si ottiene:

$$P\ell \sin\vartheta - K\vartheta - \underbrace{\left(\int_0^\ell \mu x^2 dx\right)}_{\text{momento d'inerzia dell'asta rigida rispetto ad O:}}\ddot{\vartheta} = 0$$

$$I = \mu \frac{\ell^3}{3} > 0 \qquad [I] = \frac{[M]}{\cancel{[L]}}[L]^{\cancel{3}\,2} = [M][L]^2 = \frac{[F]}{[A]}[L]^2 = \frac{[F][t]^2}{\cancel{[L]}}[L]^{\cancel{2}} = [F][L][t]^2$$

$$\boxed{P\ell \sin\vartheta - K\vartheta - I\ddot{\vartheta} = 0}$$

N.B. ‖ Si sono qui ritenuti gli spostamenti grandi, in modo cioè da influenzare la scrittura delle equazioni di equilibrio.

- Se si assumono ora spostamenti geometricamente piccoli, per piccole perturbazioni, cioè spostamenti che siano approssimabili, dal punto di vista geometrico, a spostamenti infinitesimi, si ottiene la linearizzazione ($\sin\vartheta \simeq \vartheta$):

$$(P\ell - K)\vartheta - I\ddot{\vartheta} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\vartheta}(t) + \underbrace{\frac{K - P\ell}{I}}_{\text{cost.}}\vartheta(t) = 0 \quad \text{sotto le}$$

condizioni iniziali (c.i.)

$\vartheta(0) = \vartheta_0$; spostamento angolare iniziale

$\dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_0$ velocità angolare iniziale

Si distinguono i tre casi seguenti:

1) Se $K - Pl > 0$, possiamo porre:

o pulsazione naturale

con ω_1:

$$\underbrace{\ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta = 0}_{\text{equazione dei moti armonici}} \quad \text{ove} \quad \omega_1^2 = \frac{K - Pl}{I} > 0 \quad \text{frequenza angolare propria del sistema}$$

$$[\omega_1^2] = \frac{1}{[t]^2} \; ; \; [\omega_1] = \frac{1}{[t]} \rightarrow \text{es. } \frac{rad}{s}$$

la soluzione corrisponde alla risposta armonica:

$$\vartheta(t) = A \cos\omega_1 t + B \sin\omega_1 t \quad \Rightarrow \text{ infatti } \quad \dot{\vartheta}(t) = -\omega_1 A \sin\omega_1 t + \omega_1 B \cos\omega_1 t$$

$$\ddot{\vartheta}(t) = -\omega_1^2 A \cos\omega_1 t - \omega_1^2 B \sin\omega_1 t \quad \text{e}$$

$$\ddot{\vartheta}(t) + \omega_1^2 \vartheta(t) \equiv 0$$

le costanti A, B (ampiezze del moto armonico) sono presto determinate in base alle c.i.

$$\vartheta(0) = A \cos 0 + \cancel{B \sin 0} = A = \vartheta_0$$

$$\dot{\vartheta}(0) = \cancel{-\omega_1 A \sin 0} + \omega_1 B \cos 0 = \omega_1 B = \dot{\vartheta}_0 \Rightarrow B = \frac{\dot{\vartheta}_0}{\omega_1}$$

Si ottiene quindi

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\omega_1 t + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\omega_1} \sin\omega_1 t \quad \text{(risposta armonica)}$$

In questo caso si ottengono piccole oscillazioni con ampiezze proporzionali alla perturbazione iniziale (piccola): la situazione di equilibrio banale $\vartheta = 0$ è quindi <u>stabile</u> (tali oscillazioni sono inoltre smorzate se vi è la presenza di un qualsiasi fenomeno dissipativo).

2) Se $K - Pl = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta(t) = A + Bt$ $\quad (\dot{\vartheta}(t) = B = cost)$

con $A = \vartheta_0$

$B = \dot{\vartheta}_0$, cioè $\vartheta(t) = \vartheta_0 + \dot{\vartheta}_0 t$

In questo caso il moto tende a divergere ($\vartheta \to \infty$, per $t \to \infty$), quindi la perturbazione crea oscillazioni di ampiezza crescente nel tempo

3) Se $K - Pl < 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \alpha^2 \vartheta = 0$ $\left(\text{ove } \alpha^2 = -\frac{K - Pl}{I} > 0 \right)$

Soluz.: $\vartheta(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$ $\quad \left(\Rightarrow \dot{\vartheta} = \alpha A e^{\alpha t} - \alpha B e^{-\alpha t} \right.$

$\left. \ddot{\vartheta} = \alpha^2 A e^{\alpha t} + \alpha^2 B e^{-\alpha t} = \alpha^2 \vartheta \right)$

tramite le c.i., si trovano A e B:

$$\begin{cases} \vartheta_0 = A + B \\ \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} = 2A \\ \vartheta_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} = 2B \end{cases}$$

Quindi: $\vartheta(t) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha}\right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\left(\vartheta_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}$

Anche in questo caso il moto tende a divergere a causa della funzione esponenziale ($\vartheta \to \infty$, per $t \to \infty$).

In entrambi i casi 2) e 3) la configurazione di equilibrio iniziale non è più stabile in quanto le oscillazioni tendono a crescere in maniera illimitata, mentre il sistema abbandona la configurazione di equilibrio banale (perdita di stabilità secondo Liapunov)

- In definitiva il valore del carico P per il quale si ha $K - Pl = 0$ segnala il valore critico per il quale la configurazione di equilibrio iniziale $\vartheta = 0$ cessa di essere stabile:

$$P_{cr} = \frac{K}{l}$$ carico critico ⇒ instabilità

- In pratica, data la costante elastica K, la rigidezza del sistema, tenendo conto della scrittura dell'equilibrio (dinamico) in configurazione deformata, dipende dal valore del carico P:
  - K è il contributo elastico alla rigidezza (rigidezza elastica)
  - $-Pl$ è il contributo geometrico (negativo, per $P>0$) che nasce considerando la configurazione deformata (rigidezza geometrica)
  - Per $Pl = K$ il sistema perde la sua rigidezza complessiva e non è più in grado di opporsi alla perturbazione imposta.

- L'esempio, pur semplice, pone in luce già gli aspetti fondamentali del corso e l'intimità tra dinamica e instabilità. Ora ci prepareremo però ad analizzarle in maniera separata nelle due parti distinte del corso.

erizzi@unibg.it