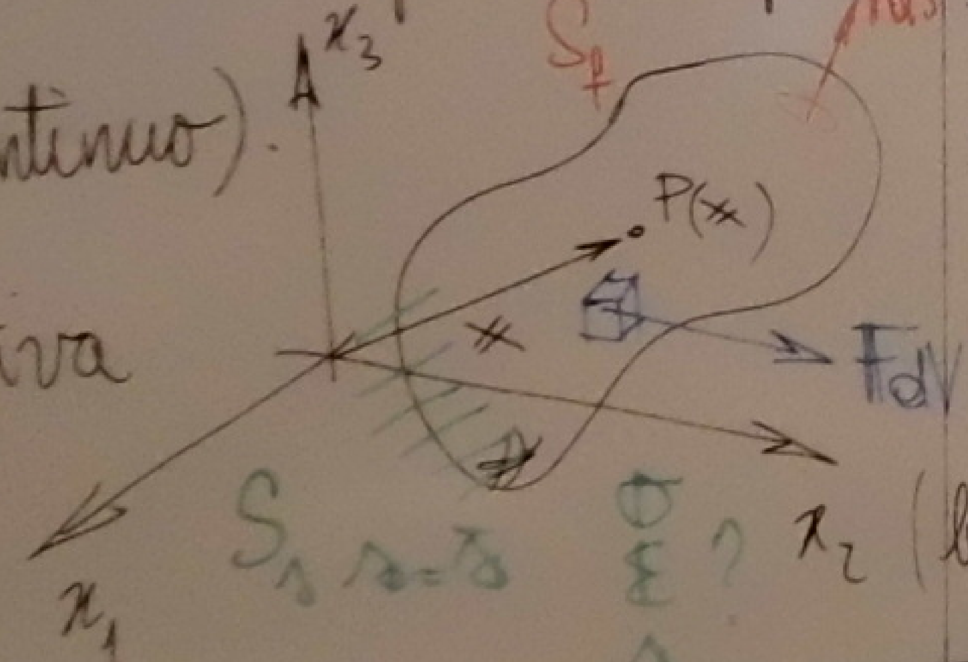
Legame costitutivo (elastico, lineare, isotropo) } comp.to indip. dalla direzione

– Da bilancio eq.ni/incognite a disposizione per la risoluzione del problema elastico, emerge l'esigenza di descrivere la legge sforzi/deformazioni, in ragione del comportamento meccanico del materiale di cui è composto il corpo solido (mezzo continuo).



risposta tenso-deformativa del corpo solido ad azioni note

INCOGNITE

sforzo $\sigma \Leftrightarrow \sigma_{ij}$ 6 comp.ti

deformazioni $\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}$ 6 comp.ti

spostamento $s \Leftrightarrow s_i$ 3 comp.ti

15 comp.ti

EQUAZIONI GOVERNANTI

equilibrio $\mathrm{div}\,\sigma + F = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0_j$ 3 eq.ni

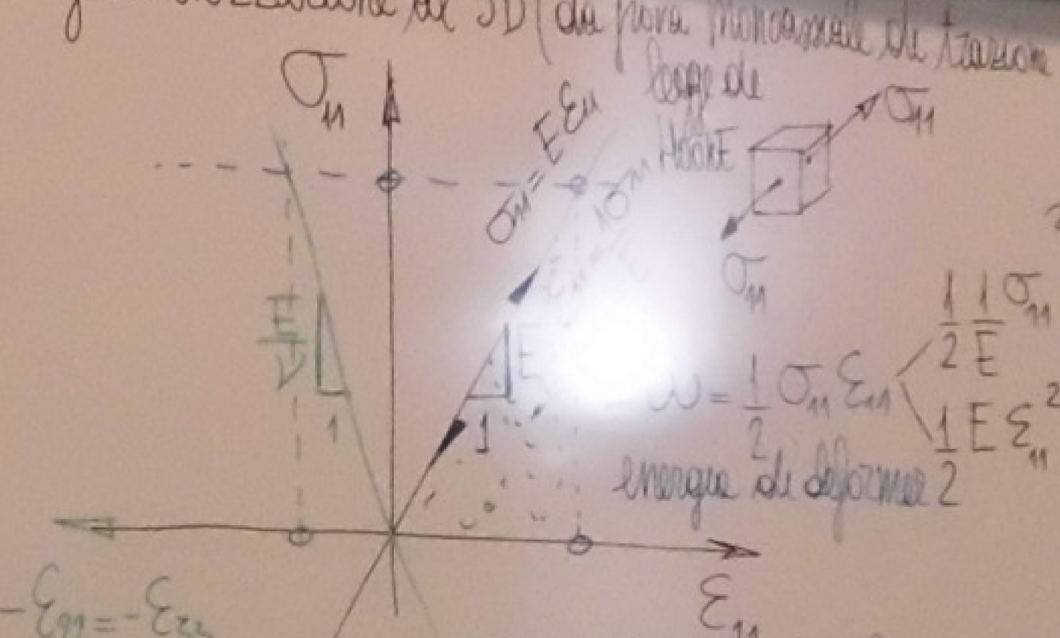
congruenza $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla^T s) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ 6 eq.ni

legame costitutivo $\sigma = \sigma(\varepsilon),\ \varepsilon = \varepsilon(\sigma) \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}),\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ 6 eq.ni

15 eq.ni governanti

(legge sforzi/deformazioni) comp. elastico

– Generalizzazione al 3D (da prova monoassiale di trazione)



$\omega = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{E}\sigma_{11}^2 \\ \frac{1}{2}E\varepsilon_{11}^2 \end{cases}$ energia di deformaz.

$-\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{33} = \nu\varepsilon_{11} = \nu\frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{\sigma_{11}}{E/\nu}$

E modulo di elasticità longitudinale o modulo di YOUNG (esprime la rigidezza del materiale) [viceversa 1/E ⇒ cedevolezza]

ν: coeff. di contrazione trasversale o di POISSON

$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} \\ \varepsilon_{22} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} \\ \varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E} \end{cases}$$

risposta dilf. normali/sforzi normali ⇒

$2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{\sigma_{ij}}{G}$, $i \neq j = 1,2,3$

risposta dilf. taglianti/sforzi di taglio con G modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio (da prova di torsione)

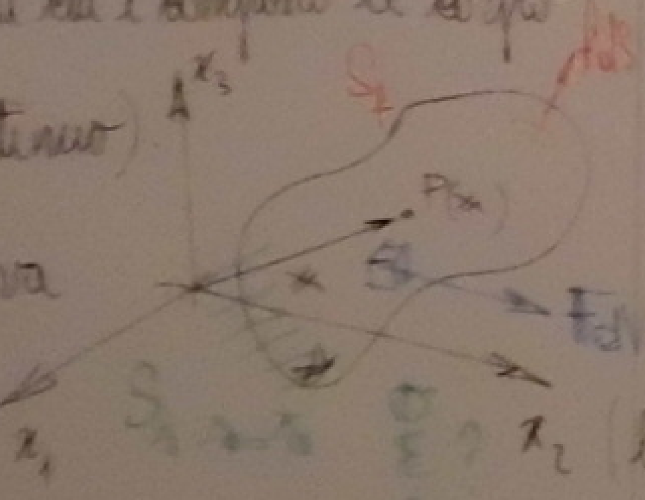
oppure $\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}$

$\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\}$

matrice di cedevolezza E, ν

Legame costitutivo (elastico, lineare, isotropo) → comp.to indip. dalla direzione

- Da bilancio eq.ni/incognite a disposizione per la risoluzione del problema elastico, emerge l'esigenza di descrivere la legge sforzi/deformazioni, in ragione del comportamento meccanico del materiale di cui è composto il corpo solido (mezzo continuo)



risposta tenso-deformativa del corpo solido ad azioni date

INCOGNITE

sforzo $\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \sigma_{ij}$ 6 comp.ti

deformazion. $\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij}$ 6 comp.ti

spostamento $\mathbf{s} \Leftrightarrow s_i$ 3 comp.ti

15 comp.ti

EQUAZIONI GOVERNANTI

equilibrio $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0_j$ 3 eq.ni

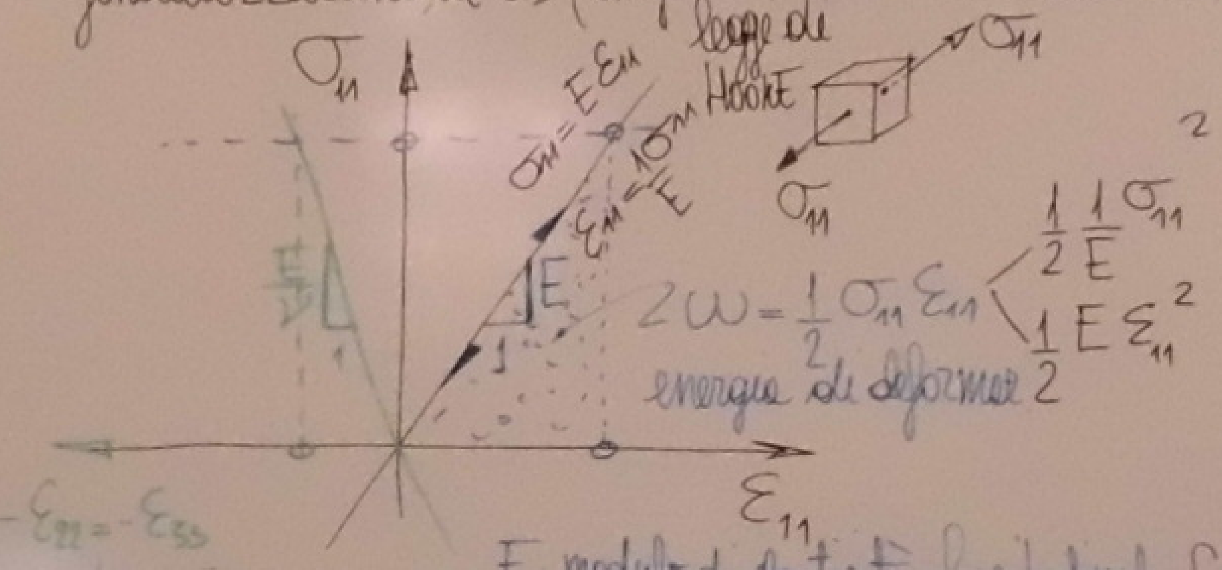
congruenza $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ 6 eq.ni

legame costitutivo (legge sforzi/deformazioni) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}), \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ 6 eq.ni

campo elastico

15 eq.ni governanti

- Generalizzazione al 3D (da prova monoassiale di trazione) → P.S.E.



$-\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{33} = \nu\,\varepsilon_{11} = \nu \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{\sigma_{11}}{E/\nu}$

$$2\omega = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{E}\sigma_{11}^2 \\ \frac{1}{2}E\,\varepsilon_{11}^2 \end{cases}$$

energia di deformaz.

E. modulo di elasticità longitudinale o modulo di YOUNG (esprime la rigidezza del materiale)

[viceversa 1/E → cedevolezza]

ν: coeff. di contrazione trasversale o di POISSON

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} \\ \varepsilon_{22} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} \\ \varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E} \end{cases}$$

risposta def. normali/sforzi normali ⇒

$$\left\{ 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \right. \quad j \neq i = 1,2,3$$

risposta def. taglianti/sforzi di taglio con G. modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio (es. da prova di torsione)

oppure $\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} = \sigma_{12} \\ \tau_{23} = \sigma_{23} \\ \tau_{31} = \sigma_{31} \end{Bmatrix}$$

6x1 6x6 6x1

$$\{\varepsilon\} = \underbrace{[\mathbb{C}]}_{\text{matrice di cedevolezza}} \cdot \{\sigma\}$$

notazione matriciale

(E, ν; G) 3 parametri di materiale

INCOGNITE
EQUAZIONI GOVERNANTI
Generalizzazione al 3D (da prova monoassiale di trazione) → P.S.E. (sovrapposizione degli effetti) valido per l'assunta linearità
legge de Hooke
$2\omega = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\frac{1}{E}\sigma_{11}^2 = \frac{1}{2}E\varepsilon_{11}^2$
energia di deformaz.
E: modulo di elasticità longitudinale o modulo di YOUNG (esprime la rigidezza del materiale)
[inversa 1/E → cedevolezza]
ν: coeff. di contrazione trasversale o di Poisson
$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$
$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E}$
$\varepsilon_{22} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E}$
$\varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}$
risposta dei normali/sforzi normali
$2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \quad j \neq i = 1,2,3$
risposta dei taglianti/sforzi di taglio
con G: modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio (es. da prova di torsione)
oppure $\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}$
risposte disaccoppiate nel caso isotropo
notazione matriciale
6x1
6x6
6x1
$\{\varepsilon\} = [C]\cdot\{\sigma\}$
matrice di cedevolezza (E, ν; G) 3 parametri di materiale

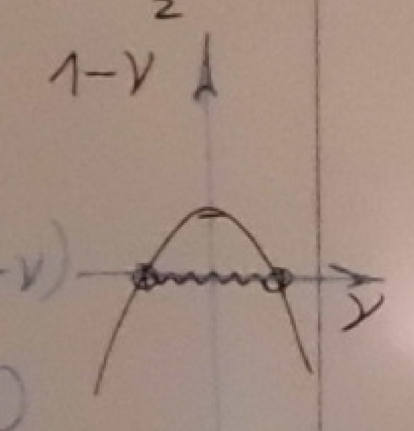
- Def.za dell'energia di deformaz. elastica def. positiva

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot [\mathbb{C}] \cdot \{\sigma\} > 0 \quad \forall \sigma \neq 0$$

- Ciò implica che la matrice $[\mathbb{C}]$ sia def. pos. (CNS: minori princ. >0)

- $\frac{1}{E} > 0 \Rightarrow \boxed{E > 0}$

- $\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \frac{1}{E^2}(1-\nu^2) = \frac{1}{E^2}(1+\nu)(1-\nu) > 0$



$\Rightarrow -1 < \nu < 1$

$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$

- $\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \frac{1}{E}\frac{(1+\nu)^2}{E^2}(1-2\nu) > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$

$0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ mat. ingegneristici

- $\frac{1}{G} > 0 \Rightarrow \boxed{G > 0}$

delimitazioni sui parametri costitutivi

- Legge costitutiva tensoriale $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$

risposta def./sforzi normali

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{\nu}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} + \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \end{cases}$$

$i = 1,2,3$ $\quad \varepsilon_{(ii)} = -\frac{\nu}{E}\underbrace{\sigma_{kk}}_{\mathrm{tr}\,\sigma = I_1} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{(ii)}$

$$\varepsilon(\sigma) = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$$

tensore identità del 2° ord. $\quad [\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$$

δ_{ij} simbolo di Kronecker

risposta def./sforzi tangenziali

$$\left\{ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E};\; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right.$$

- Pertanto, la relazione tensoriale

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$$

rappresenta il legame costitutivo elastico, lineare, isotropo (legge di Hooke generalizzata),

mentre la relazione $\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$ esprime

una relazione di dipendenza tra i tre param. E, ν, G

(due parametri indip., tre parametri E, ν)

$$E, \nu \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

altern. $\begin{cases} E, G \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \\ \nu, G \Rightarrow E = 2(1+\nu)G \end{cases}$

- Risposta volumetrica

$\vartheta = \mathrm{tr}\,\varepsilon$

def. volumetrica

$= -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;3 + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma$

$= \frac{1}{E}\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\underbrace{(1+\nu-3\nu)}_{1-2\nu}3$

$p = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$

tensione media

$\vartheta = \frac{1}{k}p$, $p = k\vartheta$ con $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

$k \to \infty$ per $\nu \to 1/2$

mat. incomprimibili

modulo di comprimibilità volumetrica o bulk modulus

- Forza dell'energia di deformaz. [illegible] def positiva

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot [C] \cdot \{\sigma\} > 0 \quad \forall \sigma \neq 0$$

(CNS. minori princ. >0)

• $\frac{1}{E} > 0 \Rightarrow \boxed{E>0}$

$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

$$0 \le \nu < \frac{1}{2}$$

mat. ingegneristici

• $\frac{1}{G} > 0 \Rightarrow \boxed{G>0}$

delimitazioni sui parametri costitutivi

- Legge costitutiva tensoriale $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$

risposta dei sforzi normali

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{\nu}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} + \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \end{cases}$$

$i = 1,2,3$

$$\varepsilon_{(ii)} = -\frac{\nu}{E}\underbrace{\sigma_{kk}}_{\mathrm{tr}\,\sigma = I_1} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{(ii)}$$

$$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon(\sigma) = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\underbrace{\mathbb{I}}_{} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma}$$

tensore identità del 2° ord. δ_{ij} $\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ simbolo di Kronecker

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}; \quad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

- Pertanto, la relazione tensoriale

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$$

rappresenta il legame costitutivo elastico, lineare, isotropo (legge di Hooke generalizzata), mentre la relazione $\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$ esprime una relazione di dipendenza tra i tre param. E, ν, G (due parametri indip., tipicamente E, ν)

$$E, \nu \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

altern. $\begin{cases} E, G \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \\ \nu, G \Rightarrow E = 2(1+\nu)G \end{cases}$

- Risposta volumetrica

$$\vartheta = \mathrm{tr}\,\varepsilon$$

def. volumetrica

$$= -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\mathrm{tr}\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma$$

$$= \frac{1}{E}\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\underbrace{(1+\nu-3\nu)}_{1-2\nu}3$$

$$p = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$

tensione media

$$\vartheta = \frac{p}{K}$$

$$\vartheta = \frac{1}{K}p, \quad p = K\vartheta \quad \text{ove} \quad \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

modulo di comprimibilità volumetrica o bulk modulus

$K \to \infty$ per $\nu \to 1/2$

mat. elast. incomprimibile

– Legge costitutiva tensoriale $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\sigma)$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) & -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\sigma_{22}}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33}) & -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\sigma_{33}}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) & -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} + \dfrac{\nu}{E}\sigma_{33} \end{cases}$$

$i = 1,2,3$

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\nu}{E}\underbrace{\sigma_{kk}}_{\mathrm{tr}\,\sigma = I_1} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii}$$

$$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{E}(\sigma) = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma}$$

tensore identità del 2° ord. δ_{ij} $\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ simbolo di Kronecker

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}\,;\quad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

– Pertanto, la relazione tensoriale

$$\mathcal{E} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma$$

rappresenta il legame costitutivo elastico, lineare, isotropo (legge di Hooke generalizzata), mentre la relazione $\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$ esprime una relazione di dipendenza tra i tre param. $E, \nu; G$ (due parametri indip., tipicamente E, ν)

$$E, \nu \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

altern.
$$\begin{cases} E, G \Rightarrow \nu = \dfrac{E}{2G} - 1 \\ \nu, G \Rightarrow E = 2(1+\nu)G \end{cases}$$

– Risposta volumetrica

$$\vartheta = \mathrm{tr}\,\mathcal{E}$$

def. volumetrica

$$= -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\;\underbrace{\mathrm{tr}\,\mathbb{I}}_{3} + \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma$$

$$= \frac{1}{E}\,\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,3\,\underbrace{(1+\nu-3\nu)}_{1-2\nu}$$

$$p = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$

tensione media

γ h $\vartheta = \frac{p}{K}$ $p = \gamma h$

$$\vartheta = \frac{1}{K}\,p\,,\quad p = K\vartheta \quad \text{ove} \quad \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

$K \to \infty$ per $\nu \to 1/2$
mat. elast. incomprimibile

modulo di comprimibilità volumetrica o bulk modulus