

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

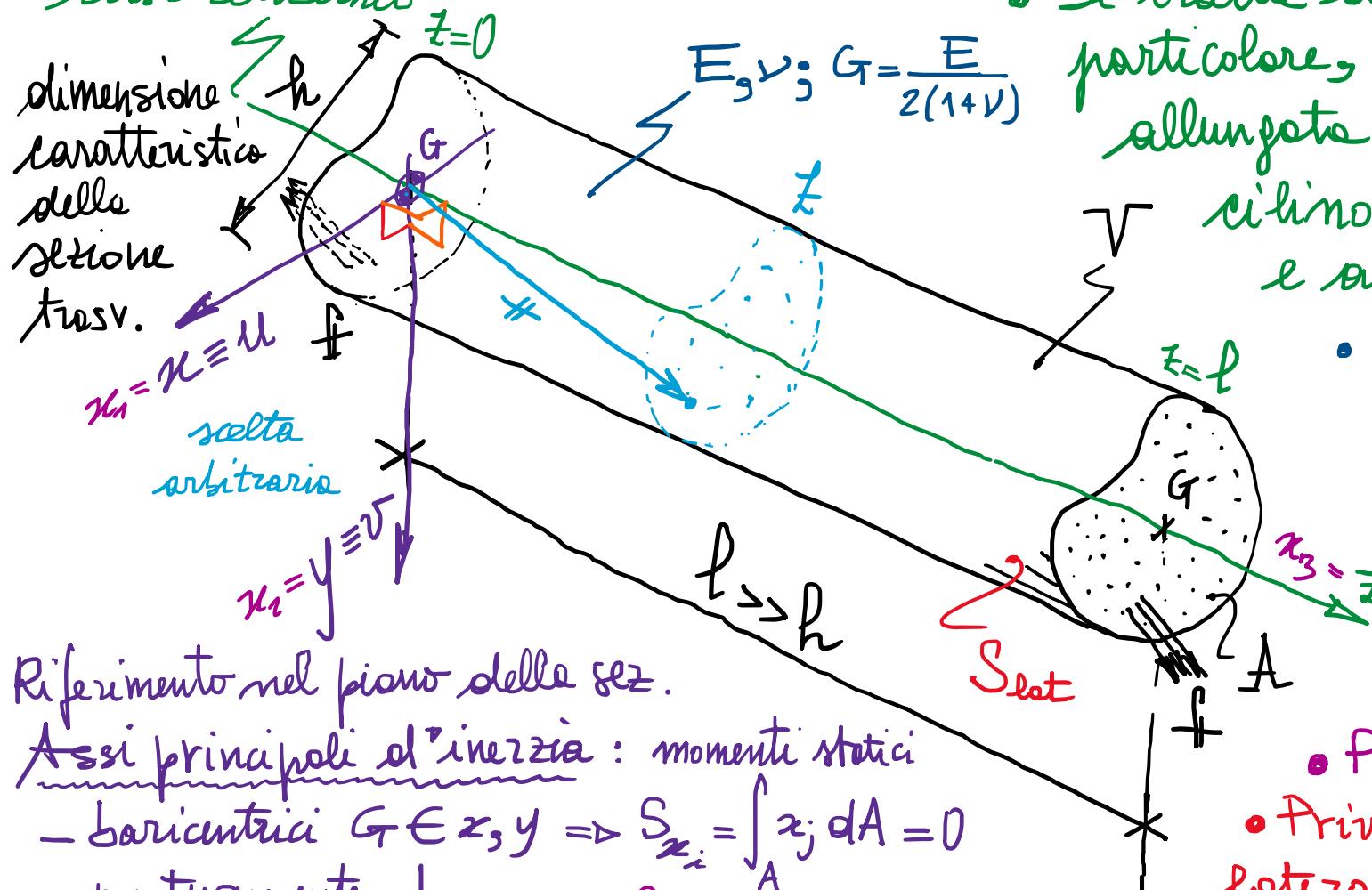
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problema di de Saint Venant (~1855) - Ipotesi e definizioni:

Casi di DSV:
 $N_s, T_s, M_s; M_t$

asse rettilineo



Riferimento nel piano delle sez.

Aksi principali d'inerzia: momenti statici

- bariantici $G \in z, y \Rightarrow S_{x_i} = \int_A z_j dA = 0$

- mutuamente \perp

- coniugati $\Leftrightarrow I_{xy} = \int_A xy dA = 0$

(v. es. Belluzzi) momento d'inerzia centrifugo

- Si tratta di un problema elastico lineare particolare, riguardante un solido di forma allungata ($l >> h$; $l > 10h$), "tipo trave", cilindrico, a sezione costante di area A e asse rettilineo.

- Composto da materiale elastico lineare isotropo, omogeneo: $E, \nu; G$ costanti in $\infty \in V$.

- Privo di vincoli esterni ($S_s = \emptyset$) (spostamenti noti a meno di moti rigidì).

- Privo di forze di volume ($F = 0$ in V).

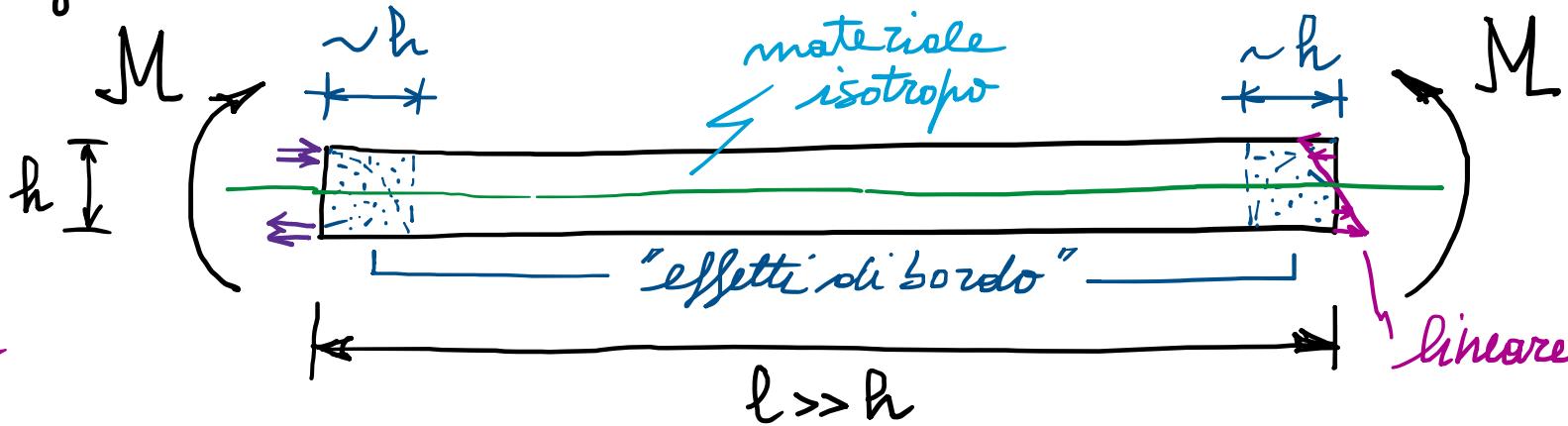
- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ($f = 0$ su S_{tot}).

- Soggetto a sole forze di superficie f agenti sulle basi, note in termini di risultanti e tali da formare un sistema autoconquilibrato.

Postulato di DSV :

- La reale distribuzione (non assegnate) delle forze di superficie sulle basi, e parità di risultanti, risulta ininfluente ai fini della risoluzione della risposta tenso-deformativa all'interno del prisma di DSV.

es.:
caso
di
DSV
delle
flessione

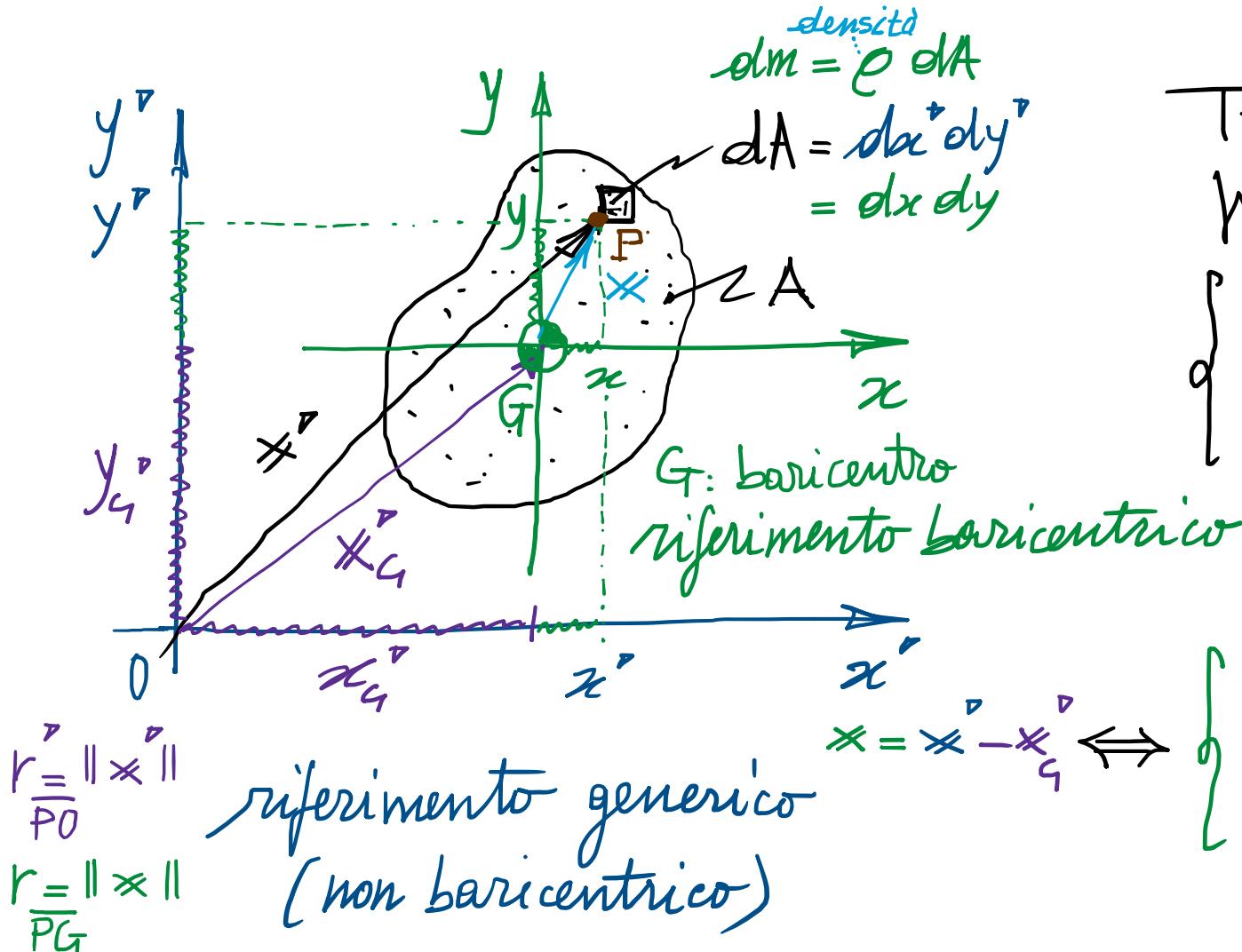


in 'eccesso'
rispetto alle
distribuz. in soluz.

distribuz. f. e
risultante nulla
potremo creare
"effetti di bordo"
localizzati ma
sforzo nullo in quasi
tutto il solido

- Ciò appare lecito, in quasi tutto il prisma, a meno di possibili "effetti di bordo" localizzati in corrispondenza delle basi (sezioni compatte).
- In pratica, si potrebbe ipotizzare di applicare le forze di superficie sulle basi secondo le distribuzioni (incognite) previste dalla soluzione del problema stesso, in termini di sforzo.

Richiami sulla geometria delle aree (o delle masse) \rightarrow v. es. Belluzzi.



Trasformazione di coordinate
 per traslazione d'assi :

$$\begin{cases} x^* = x_G + x \\ y^* = y_G + y \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{x}_G + \vec{x}$$

vettoriale
 componenti

$$\begin{cases} x = -x_G + x^* = x^* - x_G \\ y = -y_G + y^* = y^* - y_G \end{cases}$$

trasformazione inversa

- Si definiscono le proprietà geometriche della sezione trasversale seguenti.

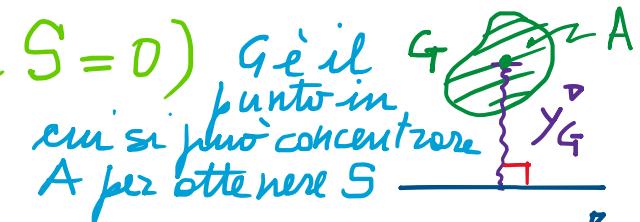
$$A = \int_A dA > 0 \quad [L]^2 \text{ Area della sezione [trasversale]} \quad (\text{momento di ordine } 0)$$

$$S_{x'} = \int_A y' dA \geq 0 \quad [L]^3 \text{ Momento "statico" della sezione}$$

$$S_{y'} = \int_A x' dA = 0 \quad \text{per assi baricentrici} \quad \begin{cases} S_{x'} = A y_G \\ S_{y'} = A x_G \end{cases} \Rightarrow x'_G = \frac{S_{y'}}{A}; y'_G = \frac{S_{x'}}{A}$$

rispetto all'asse x' e all'asse y' (momenti di ordine 1)

(Baricentro G è il luogo degli assi con $S=0$)



$$I_{x'} = J_{x'} = \int_A y'^2 dA > 0$$

Momento d'inerzia della sezione

$$I_{y'} = J_{y'} = \int_A x'^2 dA > 0 \quad [L]^4 \text{ rispetto all'asse } x' \text{ e all'asse } y' \quad (\text{momenti di ordine 2})$$

$$I_{xy} = J_{xy} = \int_A x'y' dA \geq 0 \quad \text{centrifugo rispetto agli assi } x', y'$$

$= 0$ per assi coniugati

$$I_0 = J_0 = \int_A r'^2 dA = \int_A (x'^2 + y'^2) dA = J_{x'} + J_{y'} > 0 \quad \text{polare rispetto a } O$$

Teorema di trasposizione (per traslazione d'assi baricentrici e non)

Huygens - Steiner

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}} &= \int_A \vec{x} \vec{y} dA = \int_A (\vec{x}_G + \vec{x})(\vec{y}_G + \vec{y}) dA \\
 &= \int_A \vec{x}_G \vec{y}_G dA + \int_A \vec{x} \vec{y} dA + \int_A \vec{x}_G \vec{y} dA + \int_A \vec{y}_G \vec{x} dA \\
 &= \vec{x}_G \vec{y}_G A + \mathbb{J}_{xy} + \cancel{\vec{x}_G \vec{x}} + \cancel{\vec{y}_G \vec{y}}
 \end{aligned}$$

se x, y essi
baricentrici
($G \in x, y$)

Pertanto : $\mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}} = \mathbb{J}_{xy} + A \vec{x}_G \vec{y}_G^2$

$$\mathbb{J}_x = \mathbb{J}_x + A \vec{y}_G^2$$

$$\mathbb{J}_y = \mathbb{J}_y + A \vec{x}_G^2$$

$$\mathbb{J}_G = \mathbb{J}_G + A \vec{r}_G^2$$

analogamente :

$$\mathbb{J}_{xy} = \mathbb{J}_{\vec{x}\vec{y}} - A \vec{x}_G \vec{y}_G^2$$

$$\mathbb{J}_x = \mathbb{J}_{\vec{x}} - A \vec{y}_G^2$$

$$\mathbb{J}_y = \mathbb{J}_{\vec{y}} - A \vec{x}_G^2$$

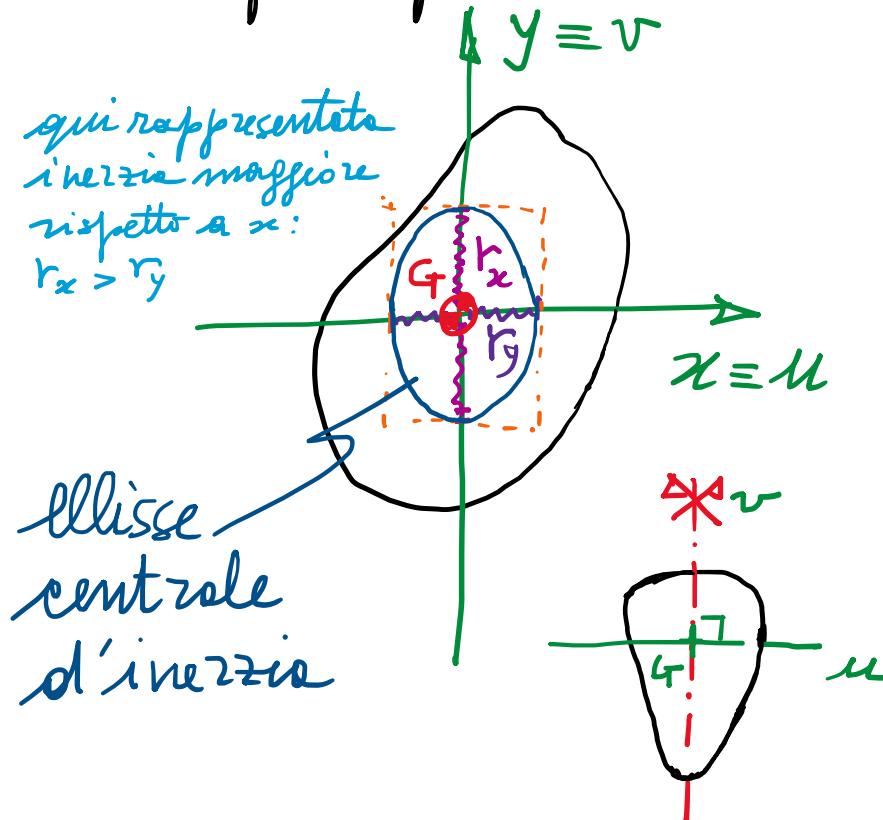
$$\mathbb{J}_G = \mathbb{J}_0 - A \vec{r}_G^2$$

trasf. da assi baricentrici a non baric.

trasf. da assi non baricentrici a assi baric.

Assi principali d'inerzia $J_{xy} = J_{uv} = 0$ (assi coniugati) (in generale che determin. per rotazione d'assi)

qui rappresentato
inerzia maggiore
rispetto a x :
 $r_x > r_y$



N.B.: Se \exists asse di simmetrie rette, esso è asse principale d'inerzia, e l'altro asse è quello baricentrico ed esso perpendicolare.

~~asse di sim.~~ \Rightarrow asse principale

J_u e J_v risultano il max e il min momento d'inerzia al variare di tutte le proiezioni nel piano (rotazione d'assi).

Raggi giratori d'inerzia:

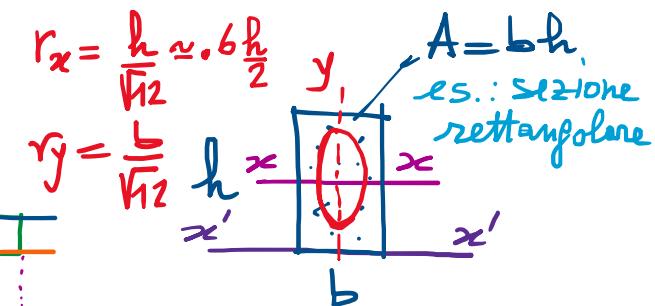
$$r_x = r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} ; \quad r_y = r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad [L]$$

Ellisse centrale d'inerzia delle sezioni:

$$\left(\frac{x}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x}\right)^2 = 1$$

Spesso figure composte da aree elementari A_i :

$$A = \sum_i A_i$$



$$J_x = \frac{1}{3} b h^3 ; \quad J_y = \frac{1}{12} b h^3$$