

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

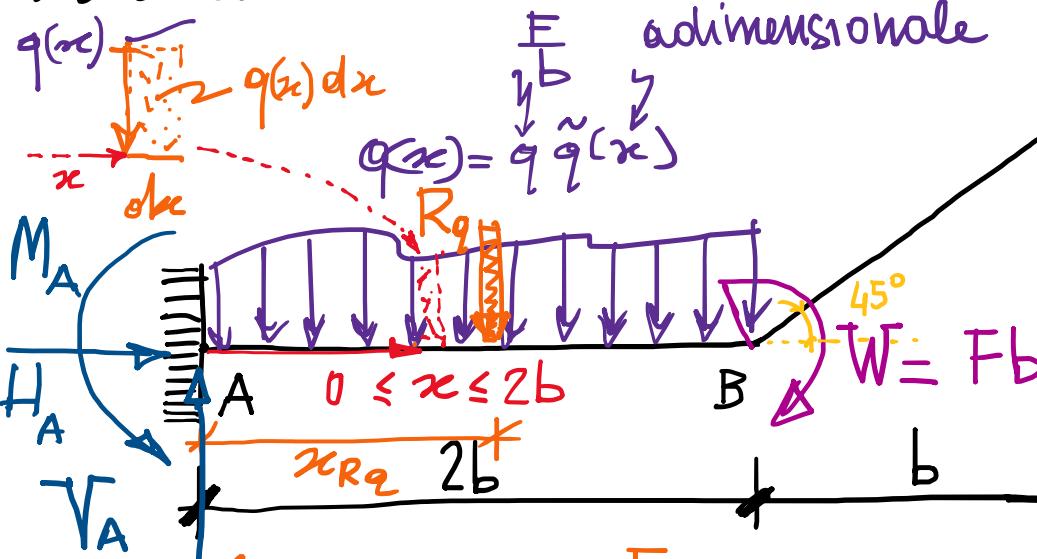
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 04

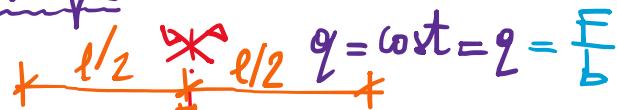
# Analisi Statica (AS): Calcolo delle Reazioni Vincolari (RV)



$$R_q = \int_0^{l_{AB}} q(x) dx = \int_0^l \tilde{q}(x) dx \quad [R_q] = [F]$$

$$x_{Rq} = \frac{M_A}{R_q} = \frac{\int_0^l [q(x)dx] x}{\int_0^l q(x) dx} = \frac{\int_0^l \tilde{q}(x)x dx}{\int_0^l \tilde{q}(x) dx}$$

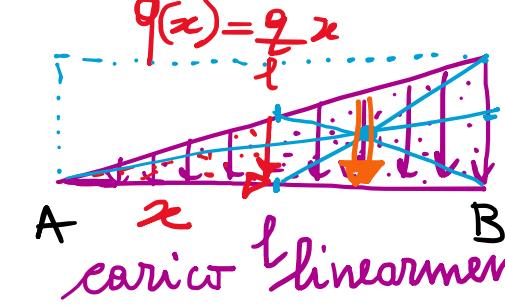
Esempi



carico uniformemente ripartito

$$R_q = q l$$

$$x_{Rq} = \frac{q \frac{l^2}{2}}{q l} = \frac{l}{2}$$



carico l linealmente ripartito ( $q=0, int$ )

$m [b] = [L]$  lunghezza ("scala delle lunghezze")  
 $N [F] = [F]$  forza ("scala delle forze")  
 $Nm [W] = [Fb]$  momento o coppia  
 $= [F][L]$  (concentrata)

$\frac{N}{m}$   $[q] = \left[ \frac{F}{b} \right]$  carico distribuito o  
 $= \left[ \frac{F}{L} \right]$  ripartito (per unità di  
lunghezza)

(Th. di Varignon:  $M_A = R_q x_{Rq}$ )



$q = \frac{q}{l} l$

caso generale

$$R_q = \frac{q l}{2}$$

$$x_{Rq} = \frac{2}{3} l$$

(per simmetria)

Reazioni vincolari: postuliamo l'enza di azioni statiche, prodotte dai vincoli, in corrispondenza dei poli forniti, cioè dell'equazione di vincolo cinematico corrispondente, alle entità arbitrarie (tali da poter impostare l'equilibrio, in modo che il vincolo possa svolgere le sue funzioni di "blocco" di spostamento/rotazione).

## Calcolo delle RV: equazioni cardinali della statica dei corpi rigidi

2 eq. m    3 eq. m  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ risultante nullo} \\ \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \text{ momento rispetto a polo O nullo} \end{array} \right.$  (sistema di forze attive e reattive)

  $\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{x_i} = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 \\ \sum_i M_{o_i} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{equil. alle traslazioni} \\ \text{orizzontale} \\ \text{verticale} \\ \text{equil. alle rotazioni rispetto ad } O \end{array}$

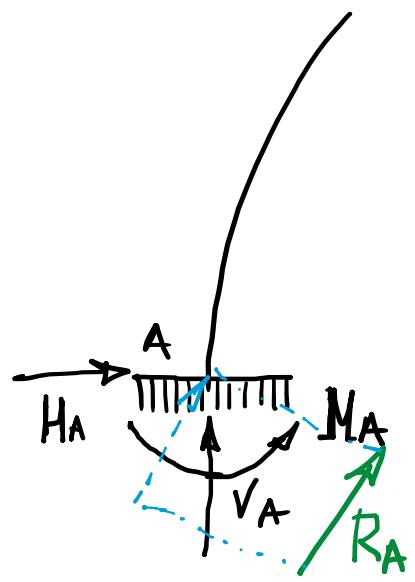
Esempio :

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H_A + 2F = 0 \Rightarrow H_A = -2F \\ V_A - F - R_q = 0 \Rightarrow V_A = F + R_q \\ M_A - F \cdot 3b - F \cdot 2b - Fb - M_A^q = 0 \Rightarrow M_A = 6Fb + M_A^q \end{array} \right. \\ \uparrow & \\ \curvearrowleft & \end{aligned}$$

Alternativa:  
tre equilibri alle  
rotazione rispetto  
a tre punti non  
allineati (per  
eq. in linearmente  
indipendenti)

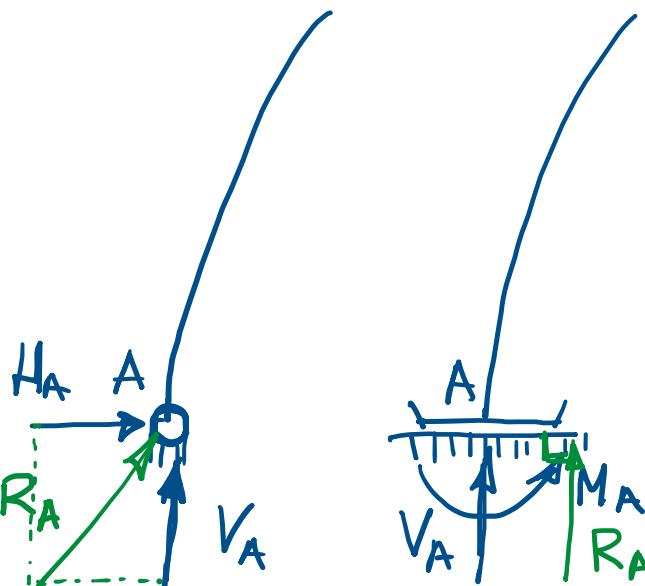
# RV dei vincoli introdotti (vincoli assoluti)

vincoli triplo

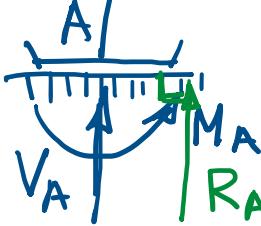


INCASTRO

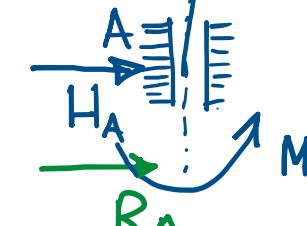
vincoli doppio



CERNIERA

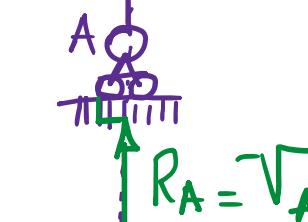


PATTINO

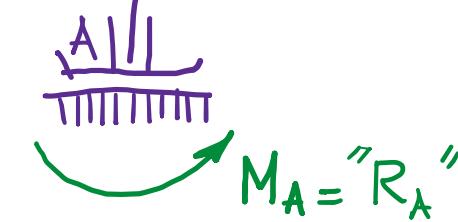


MANICOTTO

vincoli semplici

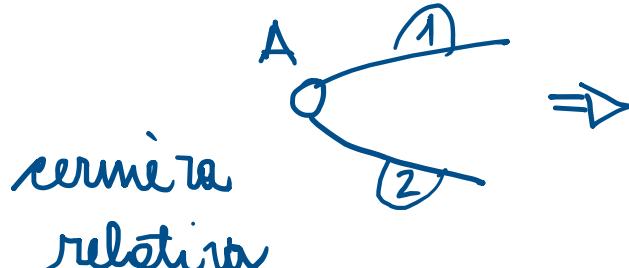


CARRELLO

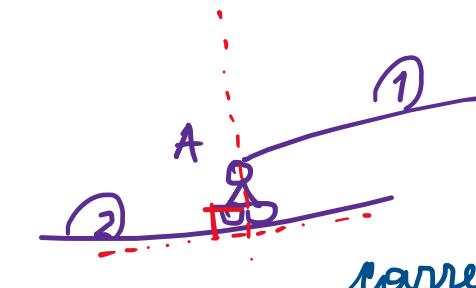
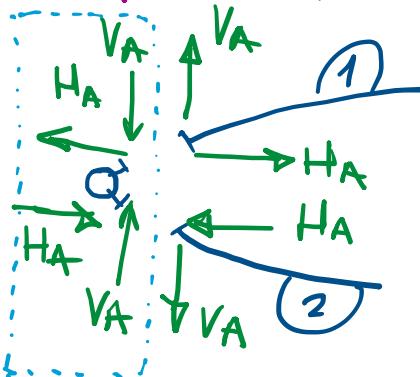


BIPATTINO

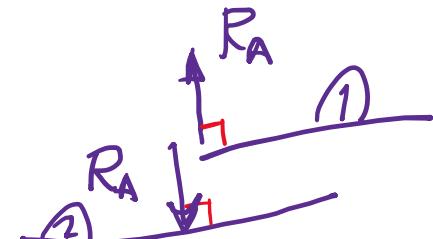
IDEEM per vincoli relativi tra più corpi rigidi:



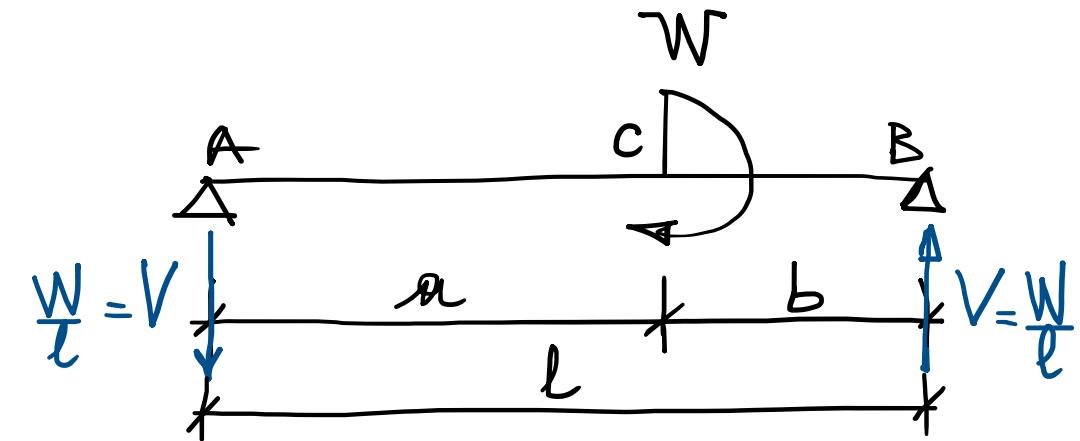
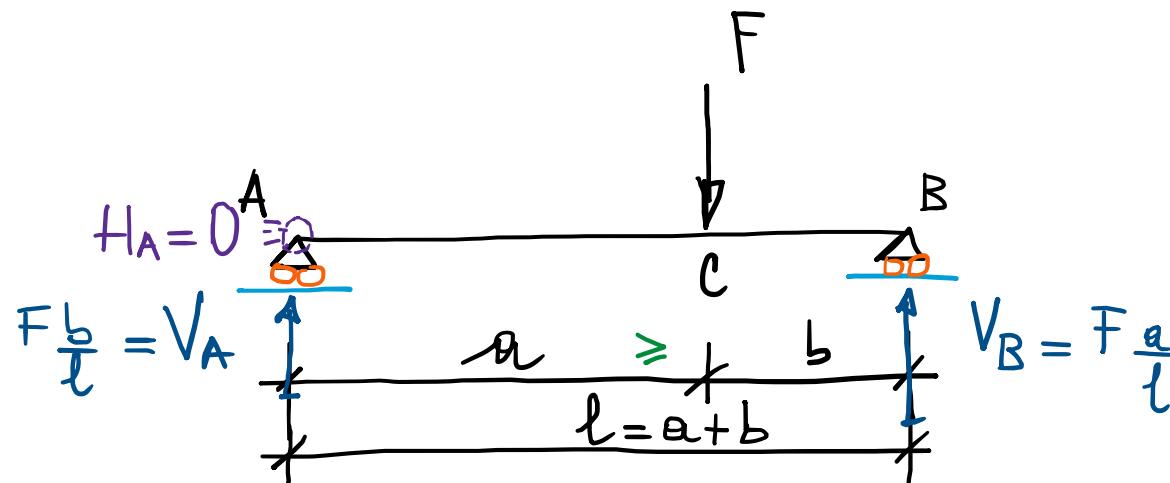
cerniera  
relativa



carrello  
relativo



Esempi significativi:



trave semplicemente appoggiate (appoggio-appoggio)

$$\sum_i M_{Bi} = 0 \Rightarrow -V_A l + Fl = 0 \Rightarrow V_A = \frac{Fl}{l}$$

$$\sum_i M_{Ai} = 0 \Rightarrow V_B l - Fa = 0 \Rightarrow V_B = \frac{Fa}{l}$$

$$\left( \sum_i F_{Yi} = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F = 0 \Rightarrow V_A + V_B = F \right) \checkmark$$

$$\frac{Fa+b}{l} = \frac{Fl}{l} + \frac{Fa}{l} \leq F$$

$$NB: se a=b=\frac{l}{2} \Rightarrow V_A = V_B = V = \frac{F}{2}$$

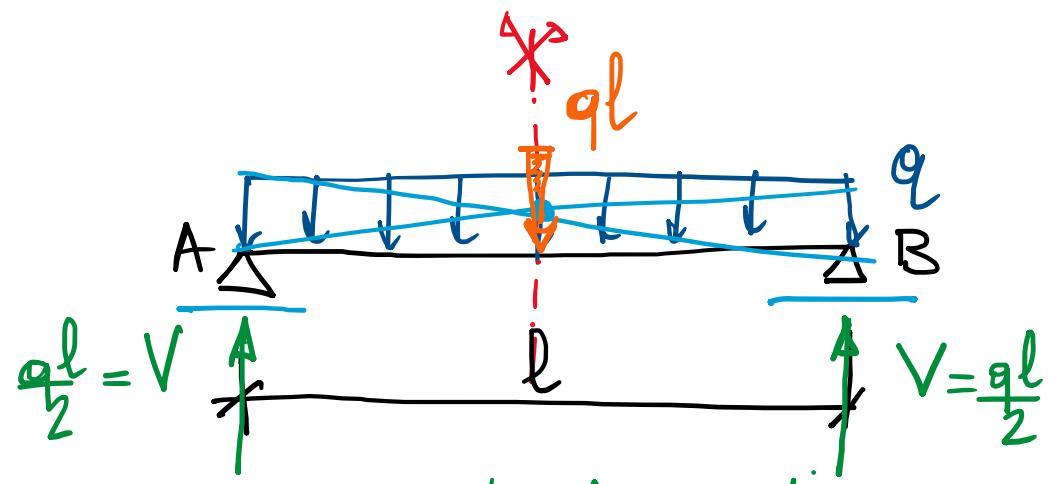
equilibrio alle rotazioni

$$V l = W$$

$$V = \frac{W}{l}$$

(indipendentemente  
dal p. t. di applicazione C  
sul corpo rigido AB)

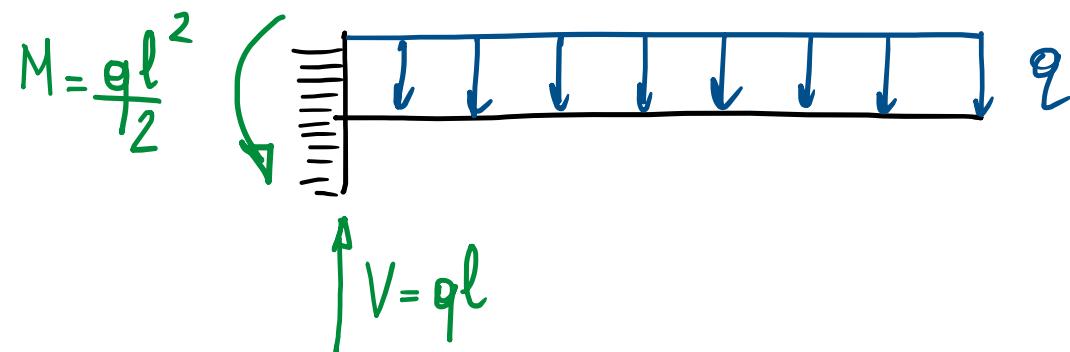
## Aasse di simmetrie (rette)



equil. alle traslat. verticali

$$2V = ql$$

(o rotazione rispetto ad A o B)



Esempio di arte tre-carrelli  $\Rightarrow$  disegno

