Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Componenti Volumetrica e Deviatorica

$v = I_1^{\varepsilon}$ deformazione volumetrica   deviatori

Deformazione: $\varepsilon = \varepsilon_V + \varepsilon_D = \overbrace{\frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}}^{v}\,\mathbb{I} + e = \frac{v}{3}\mathbb{I} + e \Rightarrow$ $e = \varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\mathbb{I}$ di deformaz.

Sforzo: $\sigma = \sigma_V + \sigma_D = \frac{\overbrace{\mathrm{tr}\,\sigma}^{I_1}}{\underbrace{3}_{p}}\mathbb{I} + s = p\,\mathbb{I} + s \Rightarrow$ $s = \sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\mathbb{I}$ di sforzo

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3} = \frac{\mathbb{I}:\sigma}{3} = \frac{I_1}{3}$$

"traceless tensors"

tensione media

$$\mathrm{tr}\,\sigma = I_{ij}\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{ii}$$

$$[\mathbb{I}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ord. $\left(I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}\right)$

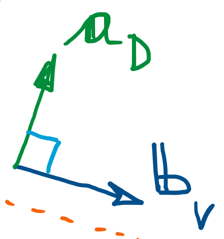
$$\mathrm{tr}\,\mathbb{I} = \mathbb{I}:\mathbb{I} = \delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

$$a_D = a - \frac{\mathrm{tr}\,a}{3}\mathbb{I}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{tr}\,a_D = \mathrm{tr}\,a - \frac{\mathrm{tr}\,a}{\cancel{3}}\underbrace{\mathrm{tr}\,\mathbb{I}}_{\cancel{3}} = 0$$

N.B.: $a_V : b_D = a_D : b_V \equiv 0$

$$\frac{\mathrm{tr}\,a}{3}\mathbb{I} : b_D = a_D : \frac{\mathrm{tr}\,b}{3}\mathbb{I} \equiv 0$$

$$\mathrm{tr}\,b_D = \mathrm{tr}\,a_D \equiv 0$$

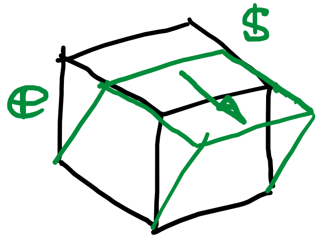


Invarianti del deviatore di deformazione (e) o di sforzo (s):

$$\begin{cases} J_1^{D} = \mathrm{tr}\,s = s_{ii} = \mathbb{I}:s = \cancel{\mathrm{tr}\,\sigma} - \frac{\cancel{\mathrm{tr}\,\sigma}}{\cancel{3}}\,\cancel{\mathrm{tr}\,\mathbb{I}} \equiv 0 \text{ per definizione} \\ J_2^{D} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,s^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(s\cdot s) = \frac{1}{2}\delta_{ij}s_{ik}s_{kj} = \frac{1}{2}s_{jk}s_{kj} = \frac{1}{2}s_{jk}s_{jk} = \boxed{\frac{1}{2}s:s = J_2} \\ J_3^{D} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,s^3 \end{cases}$$

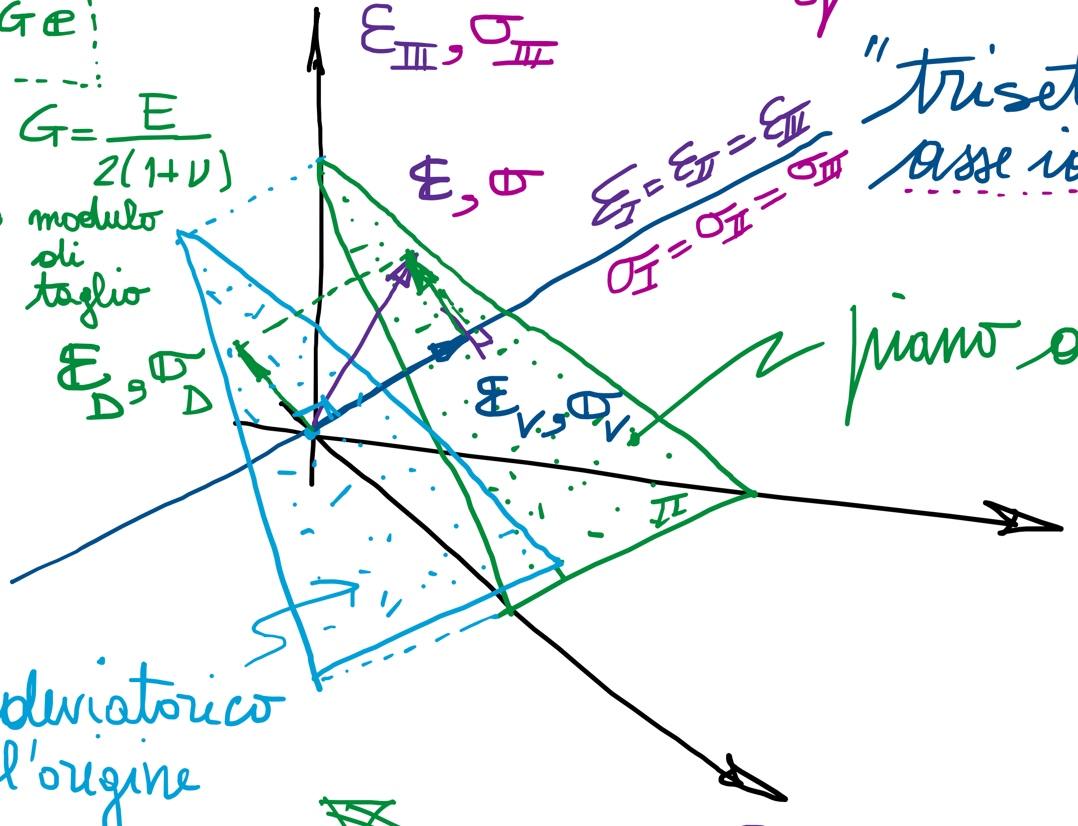
Rappresentazione nello "spazio principale" (spazio delle deformazioni principali)
spazio delle tensioni principali

$e = \frac{s}{2G}$; $s = 2Ge$



$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

("deviazione") variazione di forma a volume costante

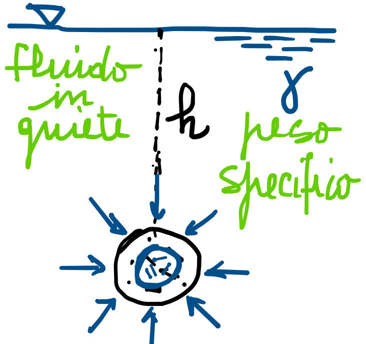


"trisettrice del 1° ottante"
asse idrostatico ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$)

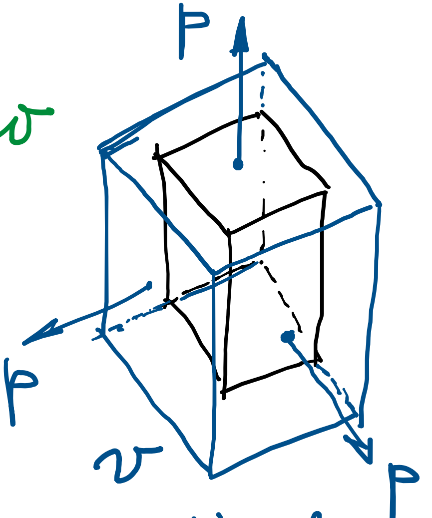
piano deviatorico

piano deviatorico per l'origine

pallino di materiale isotropo



$p = \gamma h$ sforzo idrostatico o sferico o isotropo



variazione di volume a forma costante (omotetica)

$v = \frac{1}{K} p$; $p = K v$

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di volume

Disaccoppiamento della risposta volumetrica e deviatorica per materiale isotropo

$\varepsilon_V \leftrightarrow \sigma_V$ $\qquad$ $e \leftrightarrow s$

Risposta deviatorica

$\varepsilon(\sigma)$ legge di Hooke generalizzata (materiale elastico, lineare, isotropo)

E, ν $[K, G]$

$$\mathbb{e} = \varepsilon - \frac{tr\,\varepsilon}{3}\mathbb{I} = \overbrace{-\frac{\nu}{E}\,tr\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma}^{\varepsilon(\sigma)} - \frac{\overbrace{tr\,\varepsilon}^{v}}{3}\mathbb{I}$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}\frac{\mathbb{I}}{E}\underbrace{(3\nu + 1 - 2\nu)}_{1+\nu}$$

$$\frac{v}{3} = \frac{1}{K}\frac{p}{3} = \frac{\cancel{3}(1-2\nu)}{E\,\cancel{3}}\,\frac{tr\,\sigma}{3} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$2\mathbb{e} = \frac{1}{G}\mathbb{s} \; ; \quad \mathbb{s} = G\,2\mathbb{e}$$

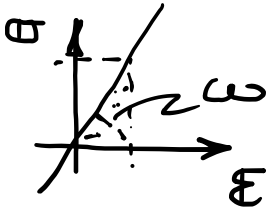
$\mathbb{e} \Leftrightarrow \mathbb{s}$ disaccoppiata dalla risposta volumetrica

$$= \frac{2(1+\nu)}{2E}\underbrace{\left(\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}\mathbb{I}\right)}_{\mathbb{s}} = \boxed{\frac{1}{2G}\mathbb{s} = \mathbb{e} \; ; \quad \mathbb{s} = 2G\,\mathbb{e}} \qquad G = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} = \frac{\tau_{ij}}{2\varepsilon_{ij}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \; ; \quad G \to \infty, \; \nu \to -1$$

deformazione senza variazione di forma

Energia di deformazione:



$$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_V + \sigma_D) : (\varepsilon_V + \varepsilon_D) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_V : \varepsilon_V}_{\omega_V} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_D : \varepsilon_D}_{\omega_D} \quad \text{ove:}$$

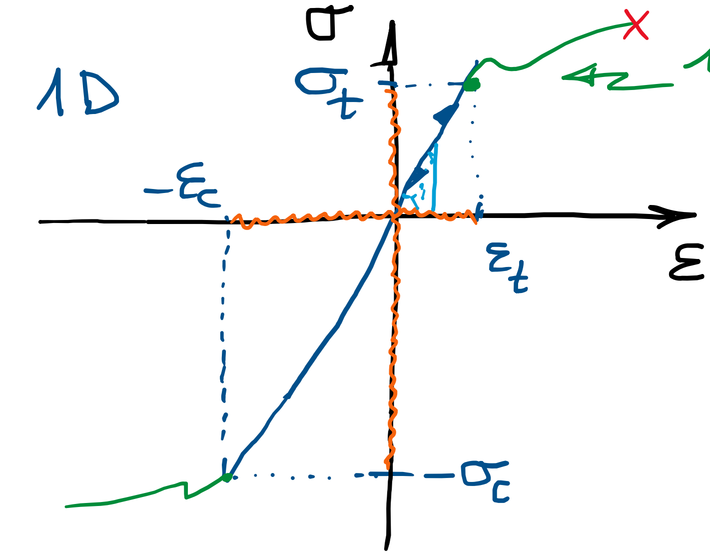
ω_V energia volumetrica; ω_D energia deviatorica

$[\sigma_V : \varepsilon_D = \sigma_D : \varepsilon_V = 0]$

- $\omega_V = \frac{1}{2}\boxed{\frac{\overbrace{tr\,\sigma}^{p}}{3}}\cancel{\mathbb{I}} : \frac{\overbrace{tr\,\varepsilon}^{v}}{\cancel{3}}\cancel{\mathbb{I}} = \frac{1}{2}p\,v = \begin{cases} \frac{1}{2}K v^2 = \frac{1}{2}K I_1^{\varepsilon\,2} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{K}p^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{9K}I_1^2 \end{cases} > 0$

- $\omega_D = \frac{1}{2}\mathbb{s} : \mathbb{e} = \begin{cases} \frac{1}{2}2G\,\mathbb{e}:\mathbb{e} = 2G J_2^{\varepsilon} \\ \boxed{\frac{1}{2}}\frac{\mathbb{s}:\mathbb{s}}{2G} = \frac{1}{2G}J_2 \end{cases} > 0$

Verifica di resistenza (elastica)



ev. comportamento asimmetrico trazione/compressione

sforzo di snervamento

$$\sigma_t = \frac{\sigma_y}{f} \Rightarrow \sigma_0$$

fattore di sicurezza 2÷5 (10)

- Un dato materiale, in relazione alla propria natura e allo stato tenso-deformativo cui è sottoposto, può manifestare determinate risorse di "resistenza" (ad es., "elastica", cioè rispetto all'uscita dal campo elastico, per giungere poi a "rottura"), definite tramite opportuni "criteri di resistenza", idonei allo scopo.

- Verifica di resistenza:

$$S = G.I.P.(\sigma, \varepsilon) \leq R$$

Sollecitazione "Grandezza indice del pericolo" Resistenza (elastica)

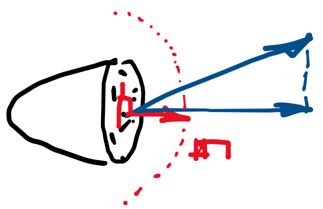
- Nel dominio degli sforzi:

$$\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon) \leq \sigma_0$$

"tensione equivalente" (quantità scalare) tensione ammissibile

1) Criterio di Galileo – Rankine – Navier (vedi "mensole di Galileo")

Assume come G.I.P. lo sforzo normale (max, min)



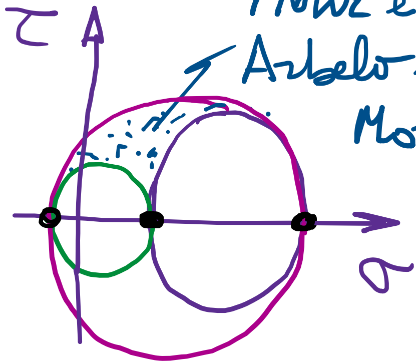
$$t_n = n \cdot \sigma$$

$$\sigma_n = \sigma_n \, n$$

$$-\sigma_c \leq \underbrace{\sigma_n^{min} \; ; \; \sigma_n^{max}}_{\sigma_I,\, \sigma_{II},\, \sigma_{III}} \leq \sigma_t$$

tensioni principali

Cerchi di Mohr e Arbelo di Mohr



$$\underset{\sigma_n^{min}}{\sigma_{III}} \leq \sigma_{II} \leq \underset{\sigma_n^{max}}{\sigma_I}$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_1 \leq \sigma_t$$

$1 = I, II, III$

$\sigma_{eq} = \sigma_1$ tensioni principali

6 disuguaglianze

$$-\sigma_c \leq \sigma_I \leq \sigma_t$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_{II} \leq \sigma_t$$

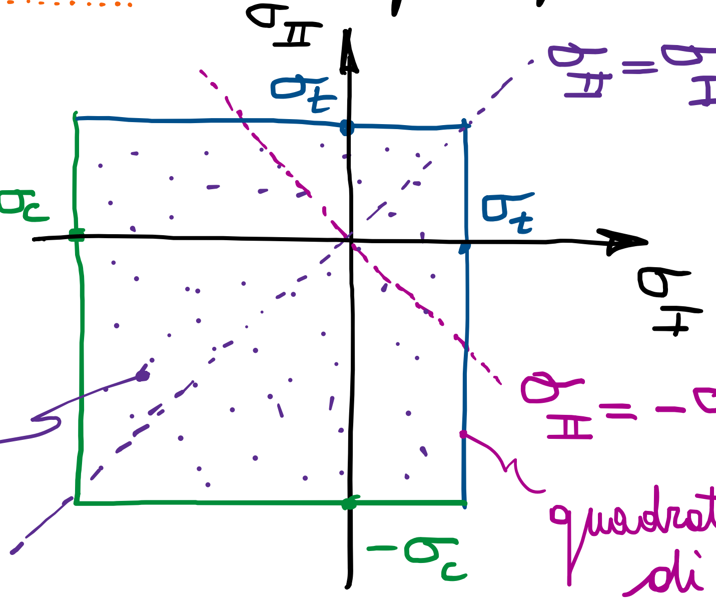
$$-\sigma_c \leq \sigma_{III} \leq \sigma_t \quad ✓$$

4 disuguaglianze per sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$)

?

"cubo" di G.R.N. (nello spazio delle tensioni principali)

dominio di resistenza di G.R.N.



piano delle tensioni principali

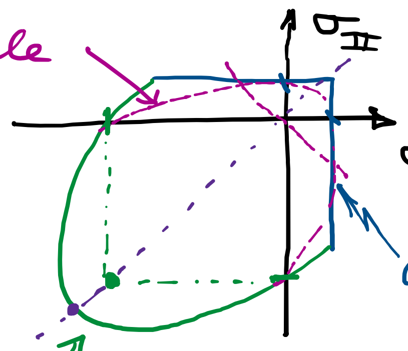
$\sigma_t + \sigma_c$

quadrato di G.R.N.

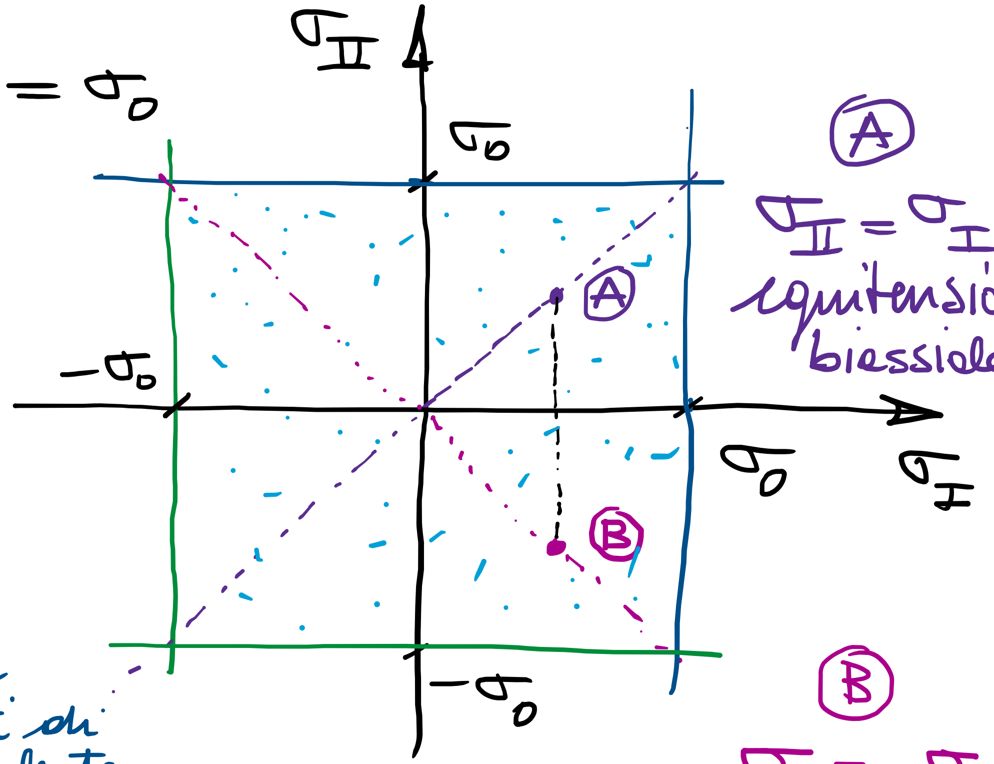
– Idoneo per materiali a comportamento non simmetrico a trazione/compressione
(in particolare per stati di prevalente trazione, in materiali lapidei)

– Per materiali a comportamento simmetrico t/c, non idoneo a distinguere il diverso livello di pericolosità di stati A ($\sigma_{II} = \sigma_I$) e B ($\sigma_{II} = -\sigma_I$)

materiale "lapideo"
(come CLS)

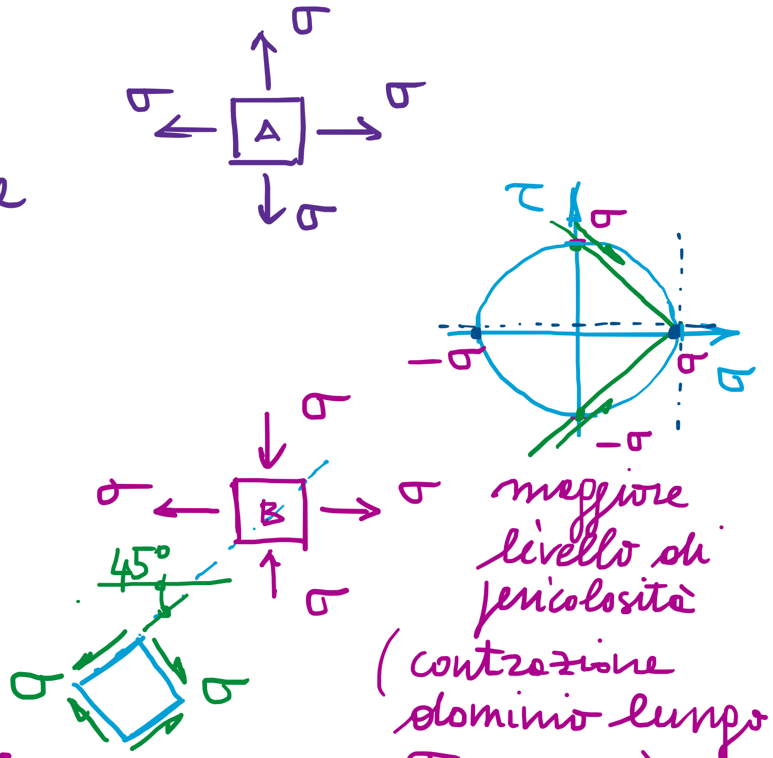


$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_0$



(A)
$\sigma_{II} = \sigma_I$
equitensione biassiale

(B)
$\sigma_{II} = -\sigma_I$
taglio puro



maggiore livello di pericolosità
(contrazione dominio lungo $\sigma_{II} = -\sigma_I$)

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.