Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

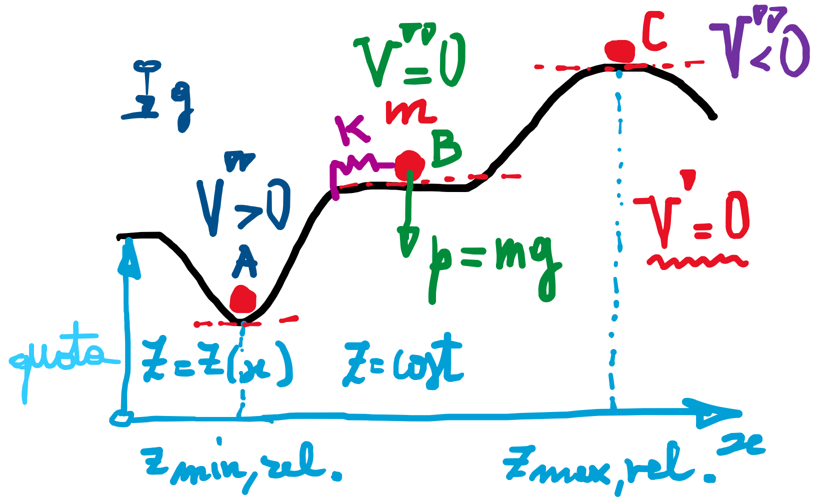
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture



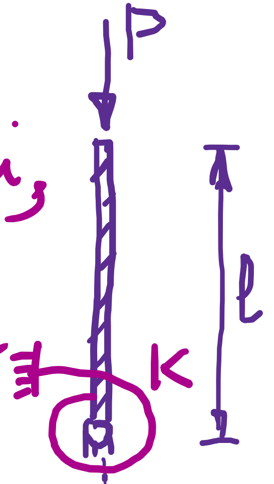
Problema puramente posizionale (governato da Energia Potenziale $V(z(x)) = \underbrace{mg}_{P}\, z(x)$ dipendente dalla sola coord. posizionale z): (concetto)

configuraz. di equilibrio

- A: buca dell'EP ove V è min $\Rightarrow$ equil. STABILE
  In seguito a (piccole) perturbazione, il sistema tende a ritornarvi (non la abbandona).
- B: valore costante dell'EP $\Rightarrow$ equil. INDIFFERENTE
  Il sistema non tende a restare né ad abbandonare la configurazione. separa A da C
- C: massimo dell'EP $\Rightarrow$ equil. INSTABILE
  Il sistema tende ad abbandonare la conf.ne, a produrre energia cinetica, alla ricerca di una altra conf.ne di equilibrio stabile.

In generale, sono presenti anche elementi elastici, utili alla stabilizzazione

$\Rightarrow$ EPT (totale): $V = \underbrace{V_e}_{\text{En. elastica } \mathcal{E}} + \underbrace{V_f}_{\text{E.P. forze esterne conserv.}}$



Th. di Dirichlet (sulla stabilità dell'equilibrio)

Una conf.ne di equil., di un sistema olonomo (legge intera), con vincoli ideali, conservativo, è stabile, se ivi l'Energia Potenziale Totale (EPT) del sistema è minima (minimo locale rel.): CS di stabilità

$V(q)$

sistema discreto MDOF $\longleftrightarrow$ (q variabile generalizzate) conf.ne

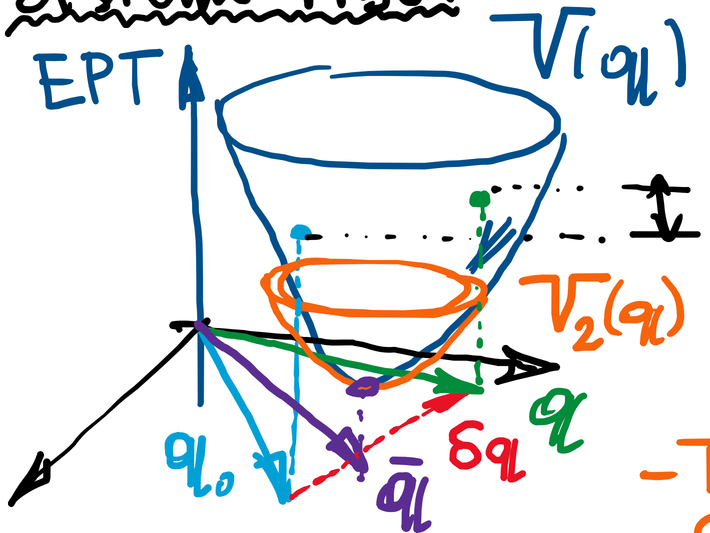
$\bar{q}$ equil. e $V(\bar{q})$ è min. rel. $\Rightarrow$ $\bar{q}$ è stabile

- Naturalmente, CN per avere una conf.ne di equilibrio con min. rel. dell'EPT, ivi l'EPT deve risultare stazionaria $\Rightarrow$ $\delta V = 0$. (variaz. prima)

  Condiz. di staz. dell'EPT è CN di equilibrio $\Rightarrow$ fornisce le eq.ni di equilibrio (in generale non-lineari).

- Dal p.to di vista della CS di stabilità, possiamo definire stabile un sistema in cui si applica e non stabile (stab. non garantita) se non $\Rightarrow$ Instabile.

Sistemi MDOF



Inquadramento

$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q} : \quad \delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ (variazione di $\mathbf{q}$)

differenza

$$\Delta V = V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{q}_0) = \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0}^{T} \delta\mathbf{q}}_{\delta V} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\delta\mathbf{q}^T \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{q}\,\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0} \delta\mathbf{q}}_{\frac{1}{2}\delta^2 V} + \dots$$

sviluppo in serie di Taylor (arrestato al 2° ordine)

- Teoria del 2° ordine
- Effetti del 2° ordine

variaz. prima $\sim \mathbf{q}$ — variaz. seconda $\sim \mathbf{q}^2$ $\;V_2(\mathbf{q})$

$$\Big(V(\mathbf{q}) = V_e(\mathbf{q}) + \underbrace{V_f(\mathbf{q})}_{-\mathcal{L}_{ef}}\Big) = -\mathbf{P}^T \delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\,\delta\mathbf{q}^T \mathbb{K}\, \delta\mathbf{q}$$

$$\mathbf{P} = -\left.\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0} \qquad \mathbb{K} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{q}\,\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0}$$

vettore dei carichi esterni conservativi — matrice di rigidezza (Hessiana)

$\mathbf{q}$: spazio variabili generalizzate ad n dimensioni

- $\mathbf{q}_0$: conf.ne di riferimento (in genere equil.) [spesso $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$]
- $\bar{\mathbf{q}}$: conf.ne equilibrata (se di min. => stabile)
- $\mathbf{q}$: conf.ne variata

NB: per min rel., $\Delta V > 0 \;\forall \delta\mathbf{q}$, è necessario (CN) $\delta V = 0$, in modo da non avere dip. dal segno di $\delta\mathbf{q}$.

Analisi al 2° ordine

- Condizione di stazionarietà di $\underline{V_2(q)}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial q} = -\mathbb{P} + \mathbb{K}\,\delta q = \mathbb{0} \Rightarrow$$

(CN di equil.)

eq. di equil. $\underline{\text{lineari}}$ in q

$$\underbrace{\mathbb{K}\,\delta q = \mathbb{P}}_{\text{eq.ni di equil. (lineari)}} \Rightarrow \bar{q} \text{ di equil.} \qquad (\delta q = q - q_0)$$

- CS di stabilità (Dirichlet) – $\bar{q}$ è min. rel. $\frac{1}{2}\delta^2 V_{\bar{q}} = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_{\bar{q}}\,\delta q > 0 \quad \forall \delta q \neq 0$

$\mathbb{K}_{\bar{q}}$ è matrice $\underline{\text{def. pos.}}$

Proprietà algebriche di $\mathbb{K}$, valutata nelle conf.ni di equil., condiz. la stabilità.

- minori princ. > 0
- autovalori (reali) > 0
- det > 0 (det $= 0 \Rightarrow$ perdita di stabilità)

- Se $q_0 = \bar{q}$ (conf.ne di rif. è equil.) (in genere)

$$\mathbb{P} = -\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0 = \bar{q}} \equiv \mathbb{0} \Rightarrow \delta q = \mathbb{0} \quad (\bar{q} = q_0)$$

- Nelle conf.ni equilibrate $\bar{q}$:

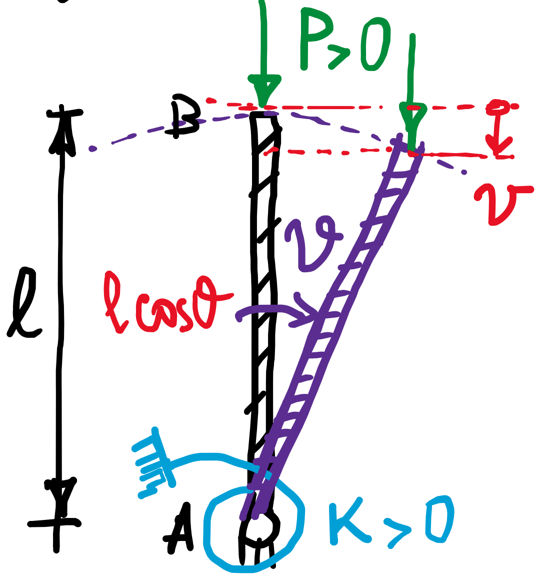
$$\delta V_{\bar{q}} = \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{\bar{q}}^T \delta q = 0 \Rightarrow \Delta V_2 = \cancel{\delta V} + \frac{1}{2}\delta^2 V + \dots$$

variaz. prima nulla

con segno legato alla variazione seconda

>0 STABILITÀ

Esempio SDOF $(q_1 = \vartheta)$



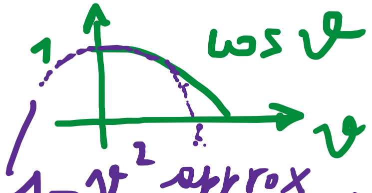
$\vartheta_0 = 0$, conf.ne di riferimento è di equil.

$V_e = \mathcal{E}\,U \qquad V_f = -\mathcal{L}_{ef} \leftarrow P\cdot v$

$$V(\vartheta) = \underbrace{\frac{1}{2}K\vartheta^2}_{} - P\cdot\underbrace{l(1-\cos\vartheta)}_{v}$$

EPT

$$= \underset{>0}{K}\left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - p(1-\cos\vartheta)\right) \qquad p = \frac{Pl}{K} = \frac{P}{K/l} \Rightarrow P = p\,\frac{K}{l}$$



$1-\frac{\vartheta^2}{2}$ approx quadratica $|\vartheta|\ll 1$

carico base P_0

moltiplicatore del carico

come per approccio statico

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = K\left(\frac{2}{2}\vartheta - p\sin\vartheta\right) \overset{\checkmark}{=} 0$$

condiz. di staz. (CN di equil.) $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} K\bar\vartheta &= Pl\sin\bar\vartheta \\ \bar\vartheta &= p\sin\bar\vartheta \\ p(\bar\vartheta) &= \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \quad (\bar\vartheta\neq 0)\end{aligned}}$$

eq.ne di equil. non lin.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} = K(1-p\cos\vartheta)$$

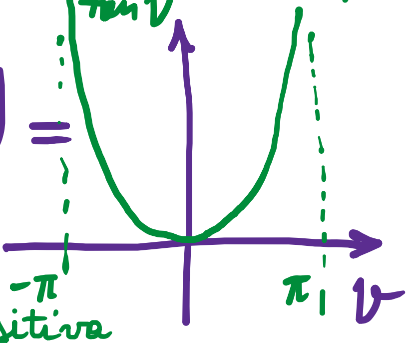
da valutare nelle $\bar\vartheta$ di equil.

$=$

- $\bar\vartheta = 0 \quad K(1-p) \gtreqless 0$
  - $p<1$ ∪ S
  - $=1$ — I
  - >1 ∩ I
- $\bar\vartheta:\ p(\bar\vartheta) = \frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta} \to V''(\bar\vartheta) = K\left(1-\frac{\bar\vartheta}{\sin\bar\vartheta}\cos\bar\vartheta\right) = K\left(1-\frac{\bar\vartheta}{\tan\bar\vartheta}\right)$ è positiva

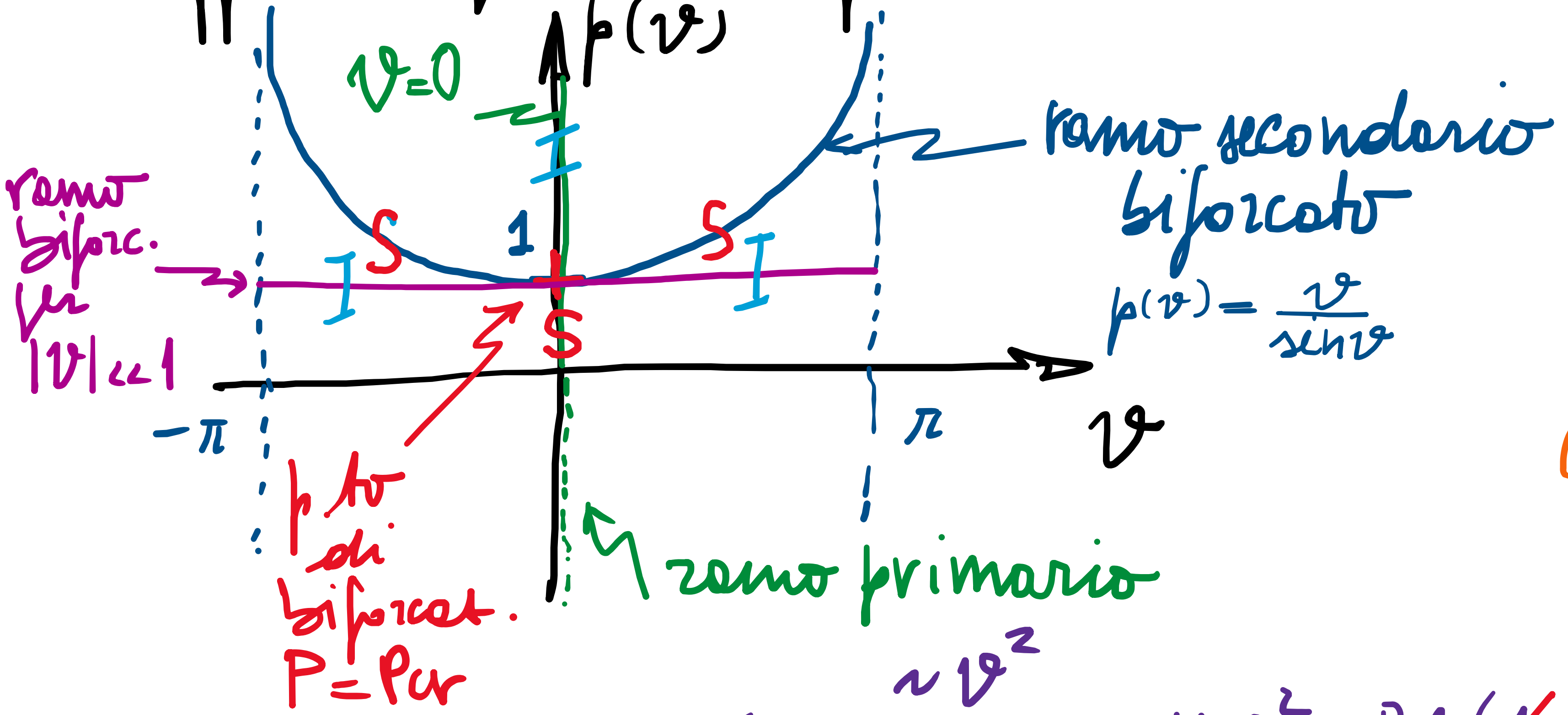
>0 conf.ni stabili $(\bar\vartheta\neq 0)$

$1-\frac{\vartheta}{\tan\vartheta} > 0 \ \forall\vartheta\neq 0$



(studio del segno di $\frac{1}{2}\delta^2 V$)

Mappa dei percorsi di equilibrio:



N.B.: perdita di stabilità della conf.ne di equil. indef. $\vartheta = 0$ per $p = 1 \Rightarrow P = P_{cr} = \frac{K}{l}$

(come da analisi con approccio statico)

Analisi al 2° ordine: $V(\vartheta) \simeq \underbrace{V_2(\vartheta)}_{\sim \vartheta^2} = \frac{1}{2} K \vartheta^2 - P l \Big(\cancel{1} - \big(\overbrace{\cancel{1} - \frac{\vartheta^2}{2}}^{\sim \cos\vartheta} \big) \Big)$ "quadraticizzazione" di V

$$= \frac{1}{2} K \vartheta^2 - P l \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{1}{2} (K - P l) \vartheta^2$$

$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \dots$

ipot. "geom. piccoli"

$V'(\vartheta) = \frac{1}{\cancel{2}} (K - P l) \cancel{2} \vartheta = 0 \Rightarrow (K - P l)\vartheta = 0$ $\begin{cases} K \neq P l, & \vartheta = 0 \\ K = P l, & \vartheta \text{ arb.} \end{cases}$

eq.ne di equil. lin.

"linearizzazione" di V

$V''(\vartheta) = K - P l \gtreqless 0$ $\quad K > Pl$, $\boxed{K = Pl}$, $K < Pl$ $\quad$ perdita di stabilità ($P = P_{cr}$)

deriv. 2ª costante

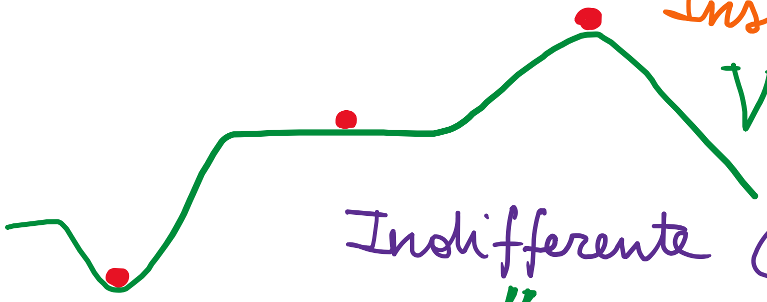
- Concetti fondamentali :

- Approccio energetico ai pb. di instabilità delle strutture -

- Concetto intuitivo per pb. puramente posizionale : V en. potenz.

pallina pesante (massante)

$g \downarrow$



Instabile (picco di energia potenziale)

$V'' < 0$ max. rel.

Indifferente (plateau di energia potenziale)

$V'' = 0$ en. pot. costante

Stabile

z

(buca di energia potenziale)

min. rel.

$V'' > 0$

Condiz. di equilibrio $V' = 0$

stazionarietà della E.P.

- Generalizzazione per pb. strutturali, in primis "discreti" MDOF -

- Energia Potenziale Totale (EPT): $V = V(q) = V_e(q) + V_f(q)$.

di più variabili (sistemi MDOF) $\Rightarrow$ funzione delle coordinate lagrangiane q

$q = \{q_i\}$ $i = 1, n$ gdl del sist.

V_e: Energia Potenziale elastica (sistema strutturale elastico lineare)

V_f: Energia Potenziale forze esterne conservative (es. campo gravitazionale)

con $V_f = -U_f = -\mathcal{L}_{ef}$

"la" EP, "il" potenziale, lavoro forze esterne conserv.

- Condizione Sufficiente di stabilità: minimo locale dell'EPT (Th. di Dirichlet).

(garantisce la stabilità/esclude l'instabilità).

↑ visione strutturale

- Teoria del 2° ordine: $V(q) \simeq V_2(q) \sim q^2$ quadratica $\rightarrow$ V' lin., V'' cost.

- Esempio SDOF, prec. visto con approccio statico $\Rightarrow$ mostra natura S/I delle configurazioni di equilibrio.

SOMMARIO (Lez. 17)

- Approccio energetico ai problemi di instabilità delle strutture ⇒ EPT (V).
- Th. di Dirichlet (CS di stabilità ⇒ EPT min. rel.).
  mentre CN di equil. ⇒ EPT stazionaria.
- Teoria del 2° ordine ⇒ $V \simeq V_2$:
  - Eq.ni di equil., da stazionarietà, linearizzate.
  - Segno variazione seconda (se >0 ⇒ stabile).
- Esempio SDOF :
  - Scrittura dell'EPT.
  - Equil. per condiz. di stazionarietà.
  - Analisi di stabilità per studio segno variaz. 2ª.

spost. "grandi" "geom."	spost "piccoli" "geom."
non-lineari	lineari
funzione	cost.

Next step: Cenno all'instabilità di sistemi reali (con imperfezioni)
⇒ transizione continua, senza p.to di biforcazione.