Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

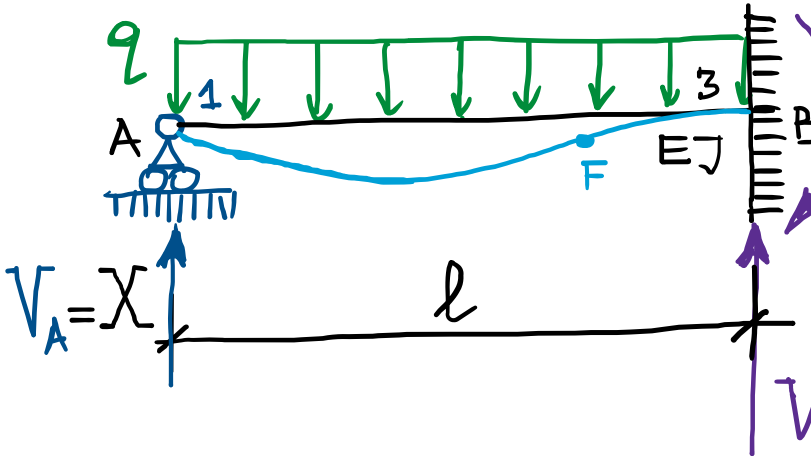
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Risoluzione di strutture iperstatiche (tramite LE)



$H_B = 0$

$M_B = \frac{q\ell^2}{2} - X\ell$

$V_B = q\ell - X$

gdv = 3+1 = 4

gdl = 3

non labile

1 volta iperst.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0 \text{ static. determinata} \\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -V_A \ell + q\ell \frac{\ell}{2} - M_B = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - q\ell = 0 \end{cases}$$

2 eq.ni in 3 incognite (V_A, V_B, M_B) pb. staticam. indeterm.

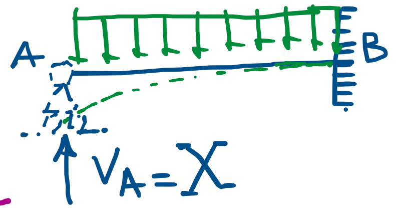
Scelta dell'incognita iperstatica ("metodo delle forze") => X agente in corrispondenza del vincolo ritenuto ridondante => $RV = RV(q; X)$ nel rispetto dell'equilibrio.

o sovrabbondante (cioè in eccesso, in esubero)

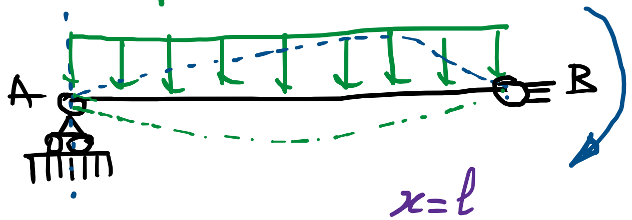
$$\left.\begin{array}{l} 3^a \text{ eq.ne} \Rightarrow V_B = q\ell - X \\ 1^a \text{ eq.ne} \Rightarrow M_B = \frac{q\ell^2}{2} - X\ell \end{array}\right\} RV(X)$$

Condizione di congruenza:

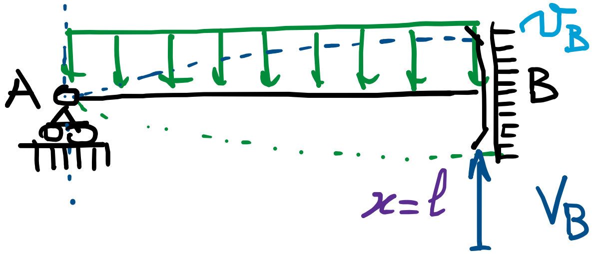
$V_A = X \Rightarrow \boxed{v_A = 0} \Leftrightarrow$



Altre possibili scelte: (basate sulle RV)

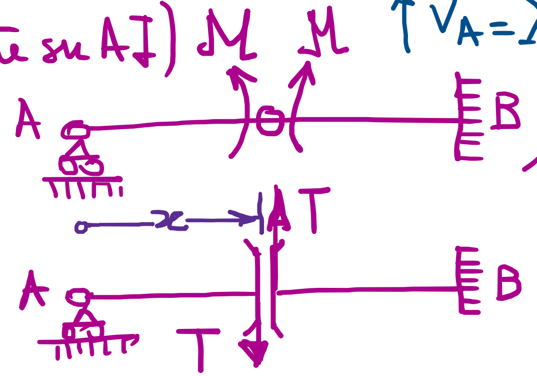


$M_B = Y \Rightarrow \varphi_B = 0$

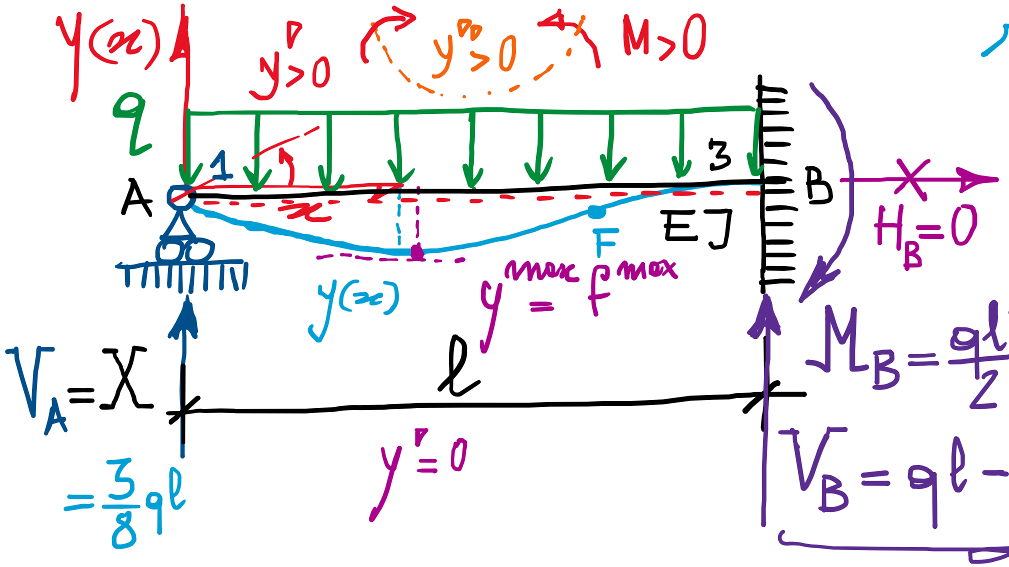


$v_B = 0 \Leftrightarrow V_B = Z$

(basate su AI)



infinite scelte $\forall x$



rigidezza flessionale (cost)

equilibrio "locale"

rif. locale:

$$EJ\, y''(x) = +M(x) = -\frac{qx^2}{2} + Xx$$

eq.ne differenz. della LE al 2° ord.

$\int dx$

$$EJ\, y'(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{Xx^2}{2} + A_1$$

$\int dx$

$$EJ\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{Xx^3}{6} + \underbrace{A_1 x + \cancel{A_2}}_{\text{comp. di moto rigido rototraslatorio}}$$

$$M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl = \frac{ql^2}{8}$$

$$\underbrace{V_B = ql - X = \frac{5}{8} ql}_{RT(X)}$$

equil. "globale"

$y(x)$ nota a meno di 3 incognite: $X;\ A_1,\ A_2$

(Individuazione)

Scrittura delle condizioni al contorno (c.c.) $[x=0,\ x=l]$ Imposizione delle c.c.:

$$\left\{\begin{array}{ll} v_A = 0 & \text{carrello in A (gdv sovrabbondante)} \\ v_B = 0 & \\ \varphi_B = 0 & \text{incastro in B} \end{array}\right. \quad \text{"fisiche"}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} y(0)=0 & \dashrightarrow A_2 = 0 & (1) \\ y(l)=0 & \Rightarrow -\frac{ql^4}{24} + X\frac{l^3}{6} + A_1 l + A_2 = 0 & (2) \\ y'(l)=0 & \Rightarrow -\frac{ql^3}{6} + X\frac{l^2}{2} + A_1 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

sistema delle c.c. (algebrico, nelle incognite $X;\ A_1,\ A_2$)

Dalla (3): $A_1 = \frac{ql^3}{6} - X\frac{l^2}{2} = \underbrace{A_1(X)}$

Dalla (2): $A_2 = \frac{ql^4}{24} - X\frac{l^3}{6} - \left(\frac{ql^3}{6} - X\frac{l^2}{2}\right) l = A_2(X) \overset{\text{Dalla (1)}}{=} 0$

Eq.ne di congruenza $y(0)=0$: consente di calcolare l'incognita iperstatica X

$$\frac{ql^4}{24} - \frac{4ql^4}{4\cdot 6} - X\left(\frac{l^3}{6} - \frac{3l^3}{3\cdot 2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\cancel{3}}{\cancel{24}_8} q l^{\cancel{4}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_3} X \cancel{l^3} = 0 \Rightarrow \boxed{X = \frac{3}{8} ql} = \frac{f_q}{f_1} = \frac{\frac{1}{8}\frac{ql^4}{\cancel{EJ}}}{\frac{1}{3}\frac{1\,l^3}{\cancel{EJ}}}$$

Sostituendo la X ottenuta:

$$\varphi_A = y'(0) = \frac{A_1}{EJ}$$

$$A_1 = \frac{q\ell^3}{6} - \frac{3}{8} q\ell \frac{\ell^2}{2} = \frac{q\ell^3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right) = \frac{q\ell^3}{2}\,\frac{8-9}{24} = -\frac{1}{48} q\ell^3 \Rightarrow |\varphi_A| = \frac{1}{48}\underbrace{\frac{q\ell^3}{EJ}}$$

gruppo dimensionale per rotazione flessionale elastica legata a q

Equazione finale della LE:

$$y(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qx^4}{24} + \frac{\cancel{3}}{8} q\ell \frac{x^3}{\cancel{6}_2} - \frac{1}{48} q\ell^3 x\right]$$

N.B.: $y = 0$ in $x = 0$

$$EJ\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{1}{16} q\ell x^3 - \frac{1}{48} q\ell^3 x$$

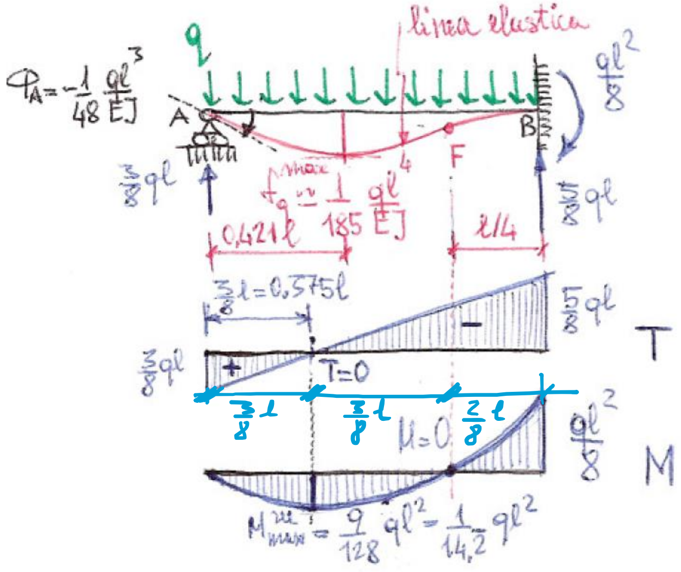
condiz. di staz. (per y^{max}) $y' = 0$

$$EJ\, y'(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{3}{16} q\ell x^2 - \frac{1}{48} q\ell^3 = \frac{q}{48}\left(-8x^3 + 9\ell x^2 - \ell^3\right) = 0$$

$$= \frac{q}{48}\left(-8x^2 + \ell x + \ell^2\right)(x - \ell) = 0 \;<\; \begin{array}{l} x = \ell \\ \bar{x} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{16}\ell \simeq 0.421\,\ell \end{array}$$

$$EJ\, y''(x) = -\frac{qx^2}{2} + \overbrace{\frac{3}{8} q\ell}^{X} x = M(x) = 0 \;<\; \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2X}{q} = \dfrac{3}{4}\ell \end{array}$$

- Tracciamento dei diagrammi delle AI
- Rappresentazione della deformata qualitativa (Linea Elastica) $\Rightarrow$ vedi note sul sito $\Rightarrow$



spost.

$$f^{max} \simeq \frac{1}{185}\frac{q\ell^4}{EJ} = -y(\bar{x})$$

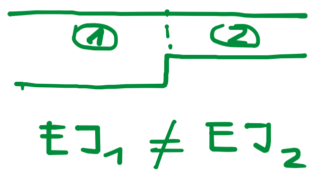
"freccia" massima

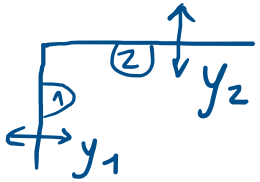
Quadro generale del metodo della LE

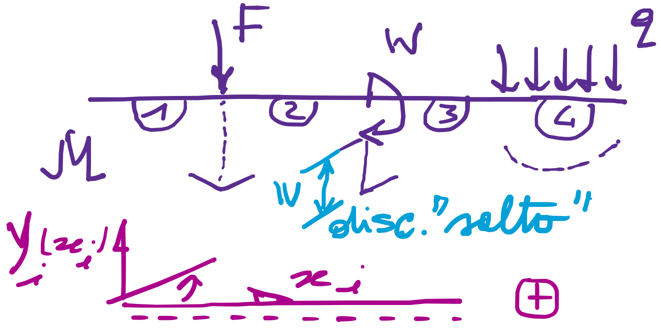
con stessa eq.ne differenziale della LE

$$EJ_i(x_i)\, y_i''(x_i) = \pm M_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots n$$

- Suddivisione in campi di integrazione:



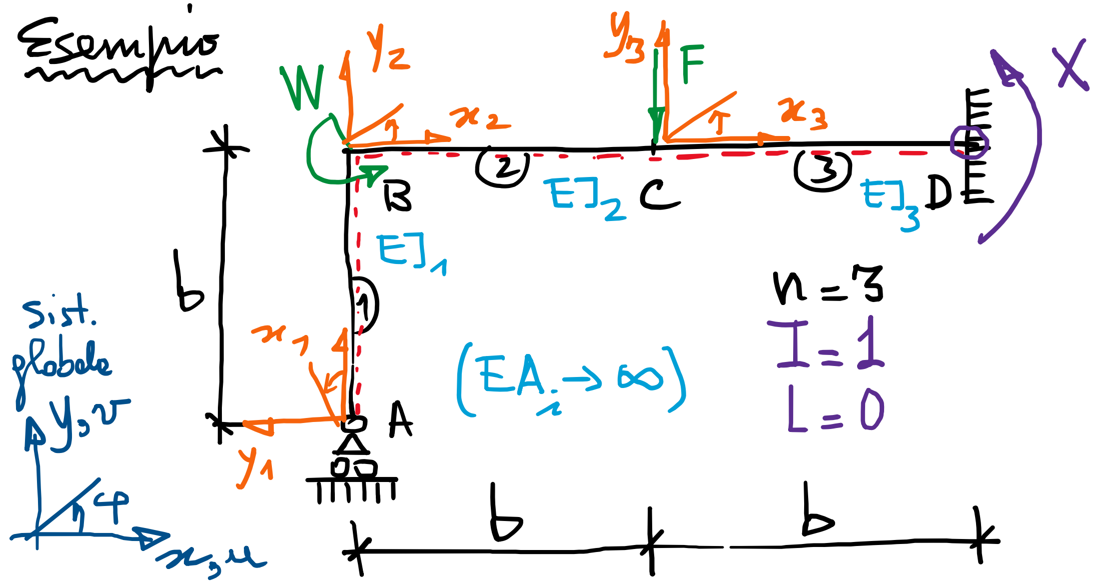




eq.ni diverse di $M_i(x_i)$ nei vari tratti

- Scelta dei sistemi di riferimento locali
- Integraz. delle eq.ni differenziali => $2n$ costanti di integraz. (+ inc. iperst.) I
- Scrittura e imposizione delle c.c. ($n_{c.c.} = 2n + I$)
- Soluzione; LE finali; RV; N, T, M; calcolo di comp.ti di "spost."; deformata qualitativa

Esempio



$n_{cc} = 2n + I = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$y_1(b) = 0$	Incastro in D + $EA_{BCD} \to \infty$
$y_1'(b) = y_2'(0)$	Continuità alla rotaz. in B
$y_2(0) = 0$	Carrello in A + $EA_{AB} \to \infty$
$y_2(b) = y_3(0)$	Continuità allo spostamento in C
$y_2'(b) = y_3'(0)$	Continuità alla rotazione in C
$y_3(b) = 0$	Incastro in D
$y_3'(b) = 0$	condizione di congruenza associata alla scelta di X