

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

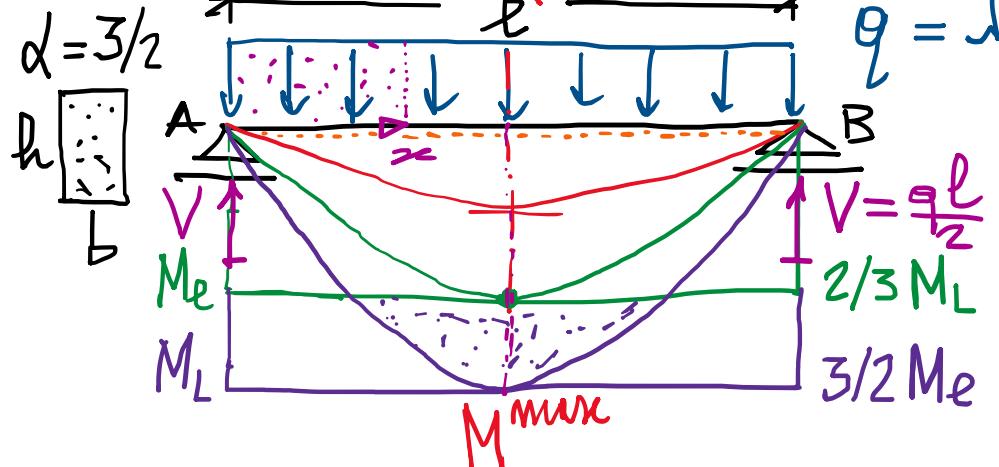
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 25

Trae appoggio-appoggio (150) con carico uniforme distribuito ($q = \text{cost}$) \rightarrow poi incastro-incastro (IPER)



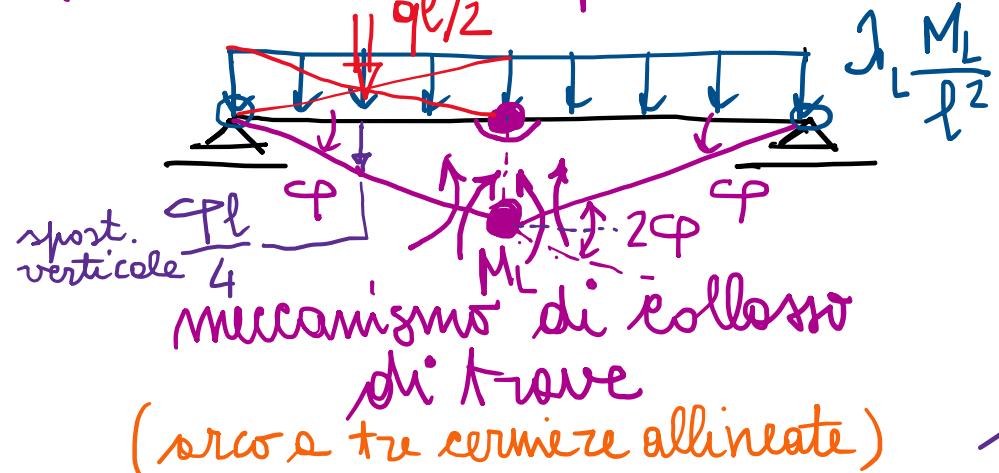
$$q = \lambda q_0 = \lambda \frac{M_L}{l^2}$$

$$M(x) = \frac{q}{2} x - q \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{max}} &= \frac{q l^2}{8} = \frac{1}{8} M_L \\ &= \frac{T_A^2}{2q} = \left(\frac{q l}{2}\right)^2 \frac{1}{2q} = \frac{q l^2}{8} \\ &\quad \dots x = \frac{l}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

• Limite elastico: $M = \frac{\lambda_e}{8} M_L = M_e = \frac{2}{3} M_L \Rightarrow \lambda_e = \frac{16}{3} = 5.\bar{3}$ (Regime E $0 \leq \lambda \leq \lambda_e$)

• Collasso plastico: $M = \frac{\lambda_L}{8} M_L = M_L \Rightarrow \lambda_e = \lambda_L = 8 = \frac{24}{3}$ (Regime EP $\lambda_e \leq \lambda \leq \lambda_L$)
(limite elastico nell'ip. di CP) $[+50\% \text{ rispetto a } \lambda_e]$



$$\text{PLV: } \lambda_e = \frac{1}{2} \left(\frac{q l}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{P}{4} = \lambda_{ip} = D = M_L 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_L = \frac{D}{\lambda_{eo}} = \frac{2 M_L}{q_0 \frac{l}{4}^2} = 8 \quad (\text{come volevano dim.})$$

equilibrio e
collasso incipiente

(il moltiplicatore di collasso λ_L può agevolmente essere determinato, nota il meccanismo di collasso, re PLV)

Risposta elasto-plastica (analisi evolutiva)

"Frecce"  EJ
elastiche: $\frac{M_{max}}{EJ} = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EJ}$, $f_{max} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ}$

Quindi, in campo elastico:

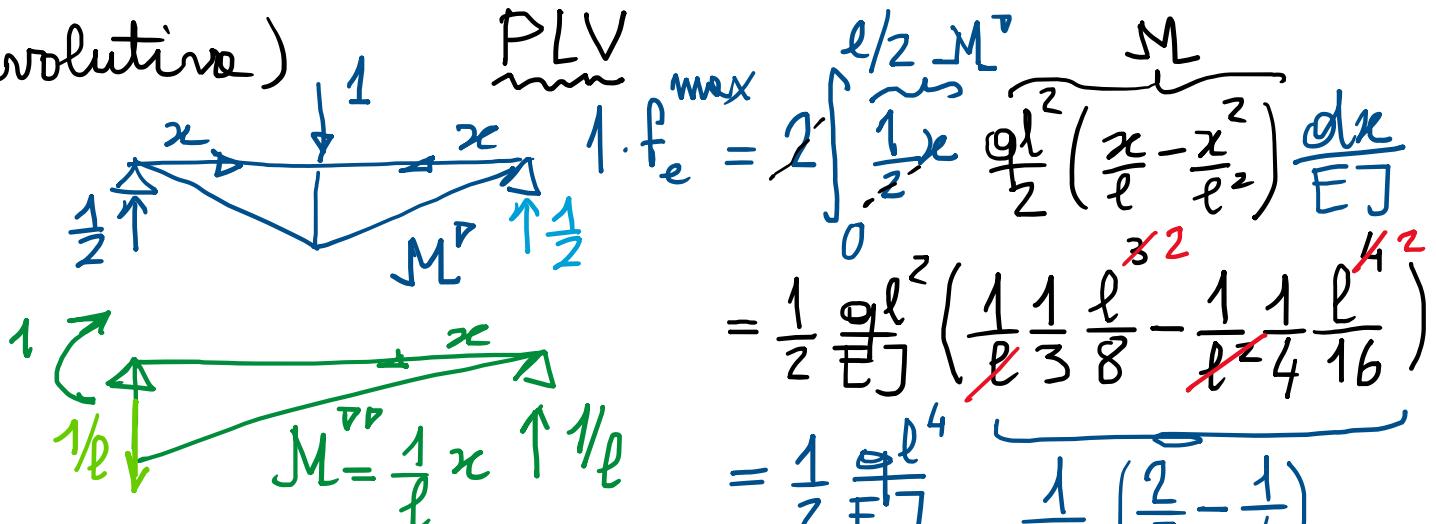
$$\bar{f} = \frac{5}{384} \cancel{\lambda / M_L l^2} \Rightarrow \bar{f} = \frac{5}{384} \lambda \Rightarrow \frac{1}{\bar{f}} = \frac{384}{5}$$

$$\bar{f}_e = \frac{5}{24} \cancel{\frac{16}{384}} = \frac{5}{72}$$

$$\bar{f}_E = \frac{5}{384} \cancel{8} = \frac{5}{48}$$

Diagramma forza-spostamento (A-A) \Rightarrow
moltip. del carico-frecce $(\lambda - \bar{f})$

Risposta evolutiva elasto-plastica non-lineare,
per non-linearità di materiale.

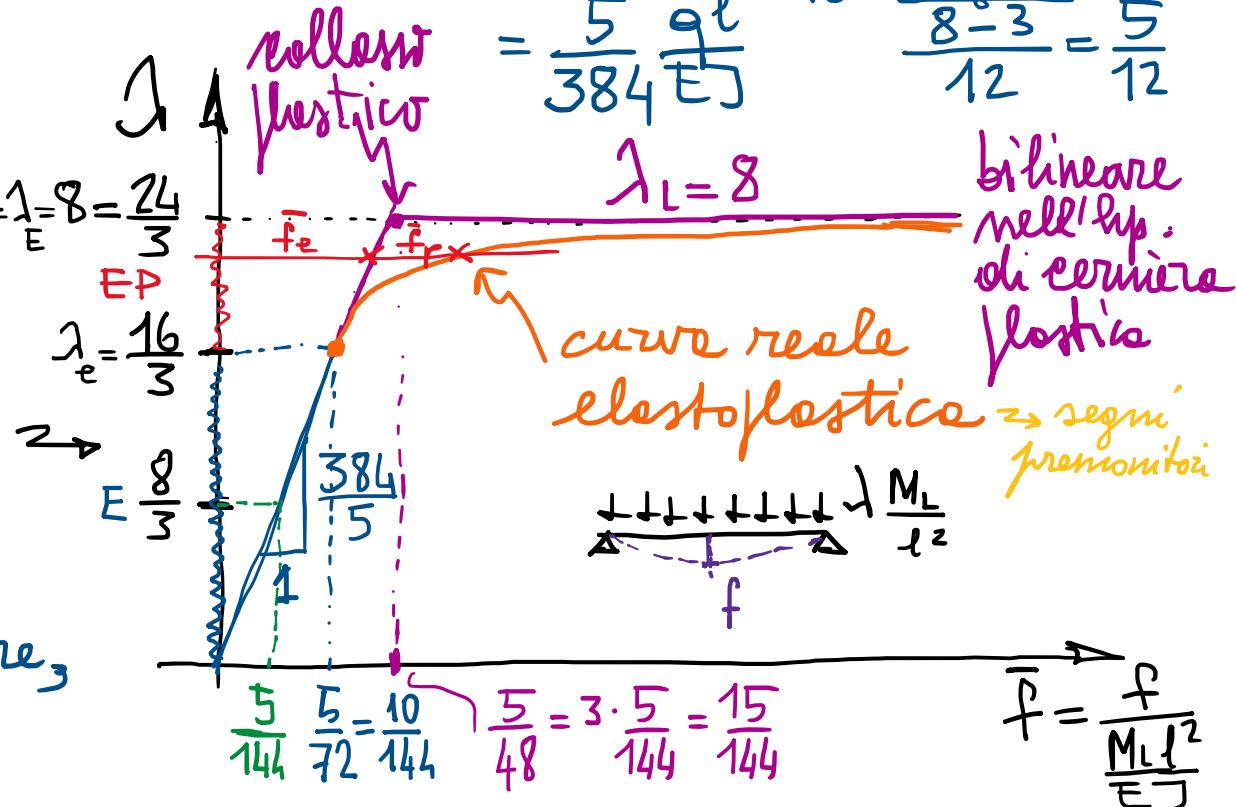


$$1 \cdot f_e^{max} = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} x \frac{q l^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{dx}{EJ}$$

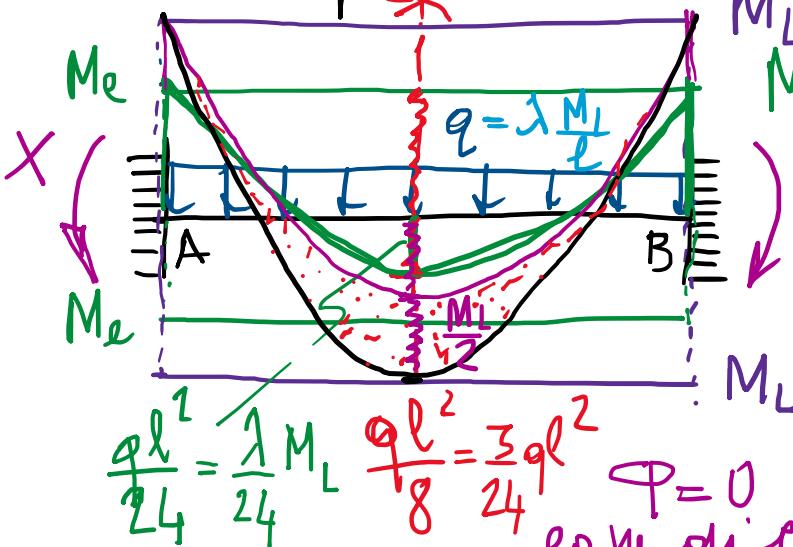
$$= \frac{1}{2} \frac{q l^2}{EJ} \left(\frac{1}{l} \frac{1}{3} \frac{l}{8} - \frac{1}{l^2} \frac{1}{4} \frac{l}{16} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q l^4}{EJ} \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ} \frac{8}{12} = \frac{5}{12}$$



Strutture iperstatiche (trave doppiamente incastrata)



$$\frac{q l^2}{24} = \frac{1}{24} M_L \quad \frac{q l^2}{8} = \frac{3}{24} q l^2$$

$$\text{ep. n. di congi.} \quad \varphi = 0$$

$$N_{el.}^{max} = \frac{q l^2}{12} = \frac{2}{24} q l^2 = \frac{1}{12} M_L$$

$$= \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \Delta \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ \Delta \end{array}$$

$$\varphi_q = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{E J}, \quad f_q = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E J}$$

$$f_X = \frac{1}{8} \frac{X l^2}{E J} = \frac{1}{768} \frac{q l^4}{E J}$$

$$1 \quad X \quad 1 \quad X$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{X l}{E J} \quad (\text{vedi DSV flessione})$$

$$\frac{1}{24} \frac{q l^3}{E J} \quad \frac{1}{12} \frac{q l^2}{E J} \quad \bar{f}_{tot} = \frac{5-4}{384} \lambda$$

$$\frac{1}{384}$$

Limite elastico: $\frac{\lambda_e}{12} M_L = M_e = \frac{2}{3} M_L \Rightarrow \boxed{\lambda_e = 8}$

Momento limite: $\frac{\lambda_E}{12} M_L = M_L \Rightarrow \boxed{\lambda_E = 12}$ (limite elastico nell'ip. di C.P.)

N.B.: Il momento può ancora crescere in campo, sino ad M_L , mediante ridistribuzione di sforzi (dei momenti), mentre si producono deformazioni plastiche nelle travi (localizzate in A e B nell'ip. di C.P.).

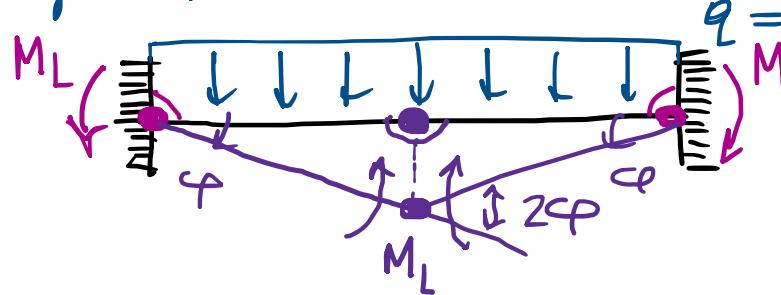
$$\Delta \lambda \Rightarrow M^{max} = M_L \Rightarrow \Delta M = \frac{M_L}{2} = \frac{\Delta \lambda}{8} M_L$$

$$\Delta q = \Delta \lambda \frac{M_L}{l^2}$$

$$\Delta M^{max} = \frac{\Delta q l^2}{8} = \frac{\Delta \lambda}{8} M_L \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{8}{2} = 4$$

$$+33\% \quad \boxed{\lambda_L = 16}$$

- Infatti, analizzando il meccanismo di collasso:

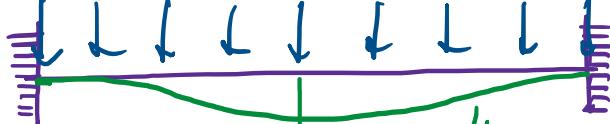


$$PLV: f_c = \lambda f_{e0} = f_{ip} = D$$

raddoppio di dissipazione plastica D_p e parità di f_{e0} rispetto a ISO

$$\lambda_L = \frac{D}{f_{e0}} = \frac{\frac{4}{4} M_L \varphi}{\frac{1}{4} M_L \varphi} = 16$$

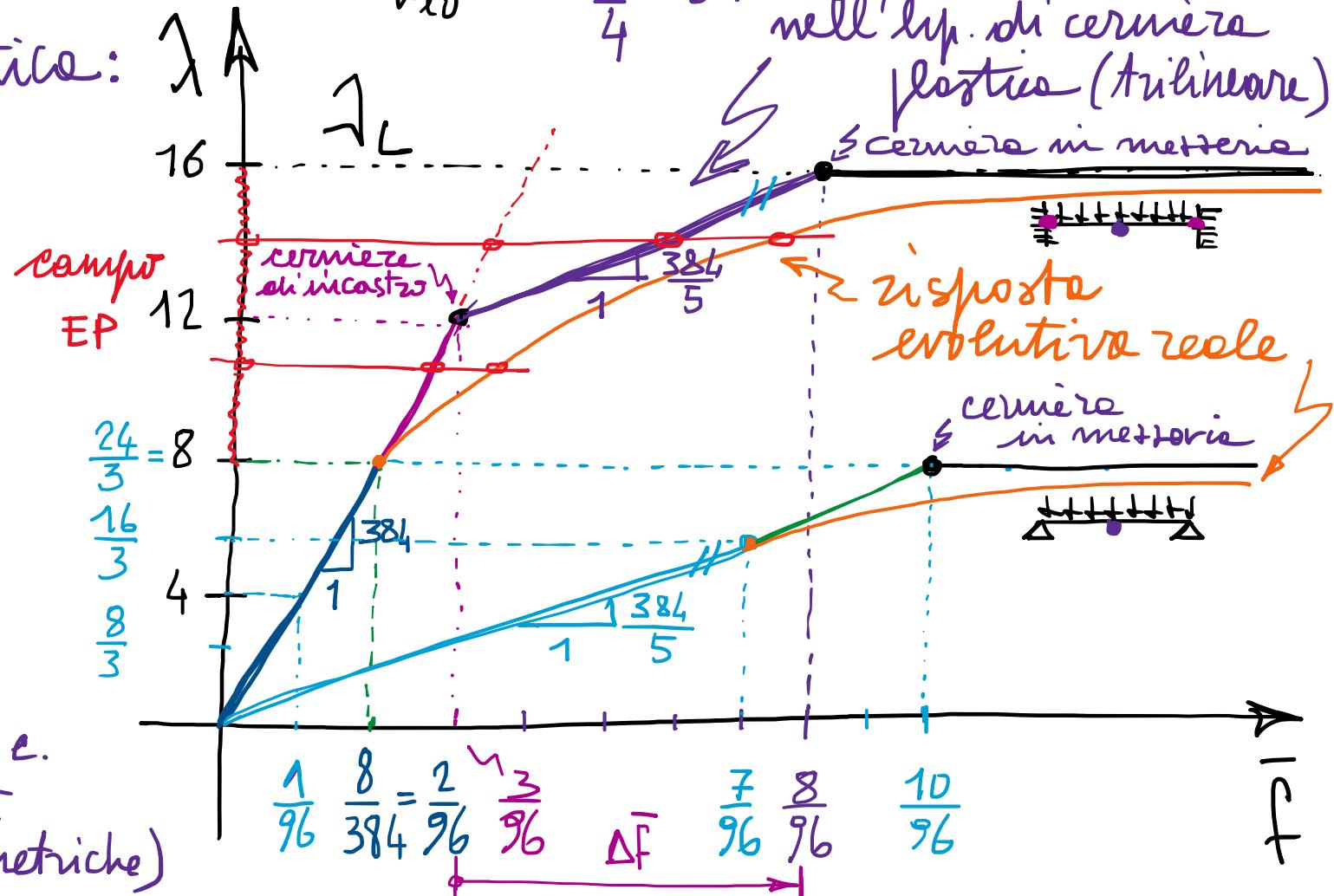
- Risposte evolutive elasto-plastiche:



$$\Delta \bar{f} = \frac{5}{384} \quad \Delta \lambda = \frac{20}{384} = \frac{5}{96} \quad \bar{f} = \frac{1}{384}; \quad \frac{1}{\bar{f}} = 384$$

N.B.: - rigidità elastica 5 volte
- multif. collasso 1 volta

Guadagno ottenibile con sole r.c.
(di vincolo) a parità di proprietà mit-inseche (di materiale e geometriche)



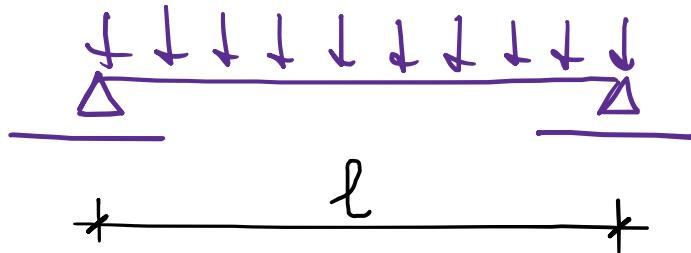
Concetti fondamentali :

- Gerarchia di approcci nell'analisi elastoplastica delle strutture :
 - determinazione delle risposte EP complete, in termini di **forze e spostamenti** (curva $P-\Delta$ non-lineare) -
 - tracciamento delle **risposte evolutive EP**, lineare a tratti, nell'ipotesi di cerniere plastiche (curva $P-\Delta$ "piece-wise linear"), con sottostime dell'entità delle deformazioni e valutazioni corrette dei valori di carico corrispondenti alle sequenze di attivazione delle CP, sino a raggiungere la situazione di collasso plastico.
 - individuazione delle sole **caratteristiche di collasso plastico**, in termini di : **moltiplicatore** (dei carichi) di collasso e corrispondente **meccanismo di collasso** (incipiente). \Rightarrow "metodi diretti"

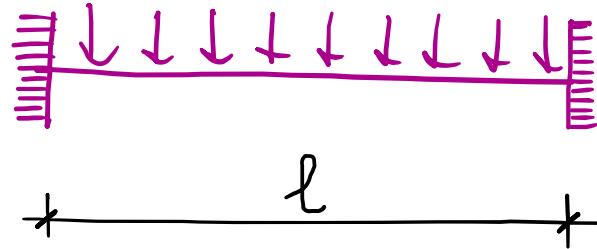
A
N
A
L
I
S
T
E

- Illustrazione mediante esempio emblematico (differenza della risposta in campo elastoplastico):

$$q = \lambda \frac{M_L}{D^2}$$



vs.



trave appoggio-appoggio

ISO

(staticamente determinate)

trave incastro-ricastro

IPER

(staticamente indeterminate)

SOMMARIO (Lec. 25)

- $\lambda - \bar{f}$
- Analisi evolutiva trave appoggio-appoggio con q (bilineare): collasso all'attivazione delle prime cerchiere plastiche in mezzerie (no risorse ulteriori); λ_L agilmente determinato (via PLV), nonostante sottostima deformazione EP.
 - Analisi evolutiva trave incastro-incastro con q (tutlineare): sequenza di attivazione delle cerchiere plastiche (due istanze di apertura); ulteriori risorse portanti da ridistribuzione di sforzo per sviluppo di deformazioni plastiche, e carico crescente.
 - Confronto: moltiplicatore di collasso doppio (+100%); rigidezza elastica iniziale quintupla (rigidezza successive uguale a quelle del caso precedente, all'apertura delle cerchiere plastiche alle estremità incastrate).
 - In genere, informazione essenziale è collasso plastico (meccanismo e moltiplicatore) vs. analisi evolutiva.

Next step: Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (calcolo a rottura dei telai), per stima del collasso plastico - Esempi.