

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

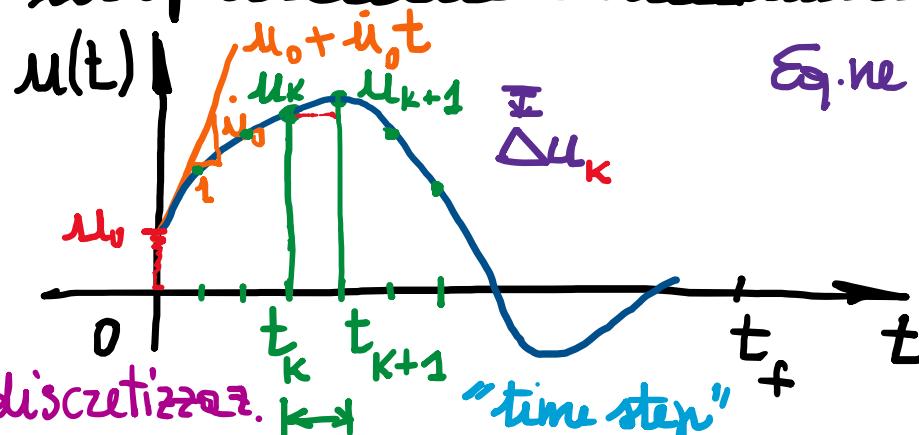
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 09

Integrazione diretta nel tempo dell'equazione del moto (integrazione passo-passo)



discretizzaz.
dell'asse
dei tempi "time step"
 Δt_k passo temporale
 $\Delta t_k = \Delta t = \frac{t_f - t_0}{n \dots n. \text{ dei passi}}$

Eq. ne del moto in forma incrementale:

"step-by-step"

$$m \ddot{u}_{k+1} + c \dot{u}_{k+1} + K u_{k+1} = \Delta F_k \rightarrow \Delta u, \Delta \dot{u}, \Delta \ddot{u}$$

(esatto o approx.)

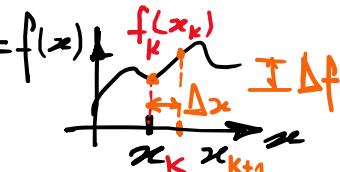
"Avanzamento" $t_k \rightarrow t_{k+1}$

$$\ddot{u}_{k+1} = \ddot{u}_k + \Delta \ddot{u}_k$$

$$[\Delta \ddot{u}_k = \ddot{u}_{k+1} - \ddot{u}_k]$$

aggiornamento
delle soluzioni
all'inizio
del passo

incremento
delle soluzioni
nel passo

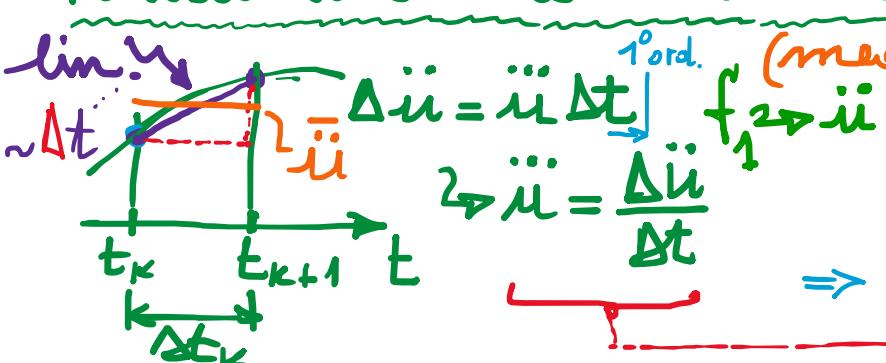


"Metodo delle differenze finite" \rightarrow rappresentaz. di derivate tramite rapporti incrementali

Sviluppo in serie di Taylor: $\Delta f_k = f(x_k + \Delta x_k) - f(x_k) = f'(x_k) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_k) \Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x_k) \Delta x^3 + \dots$

termini di
ordine
superiore

Metodo dell'accelerazione lineare



$$\begin{aligned} f_2 &\rightarrow \ddot{u} \\ \Delta \ddot{u} &= \ddot{u} \Delta t \\ \ddot{u} &= \frac{\Delta \ddot{u}}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &\rightarrow \ddot{u} \\ \Delta \ddot{u} &= \ddot{u} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u} \Delta t^2 \\ &= \Delta t \left(\ddot{u} + \frac{1}{2} \Delta \ddot{u} \right) \end{aligned}$$

sostituzione

$$\begin{aligned} \Delta u &= \ddot{u} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \ddot{u} \Delta t^3 \\ f_3 &\rightarrow u \\ &= \ddot{u} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\ddot{u} + \frac{1}{3} \Delta \ddot{u} \right) \end{aligned}$$

Metodo di Newmark (1959) \Rightarrow Generalizzazione (famiglie di metodi di integrazione)

β, γ costanti del metodo di N.

$$\ddot{u}_{k+1} - \ddot{u}_k$$

$$(1) \Delta u = \dot{u} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\ddot{u} + 2\beta \Delta \ddot{u}) = \dot{u} \Delta t + \frac{1}{2} \dot{u} \Delta t^2 + \beta \Delta \dot{u} \Delta t^2 \quad - \text{Acc. lin. } 2\beta = \frac{1}{3}; \beta = \frac{1}{6}$$

$$(2) \Delta \dot{u} = \Delta t (\dot{u} + \gamma \Delta \ddot{u}) \quad \begin{matrix} (1-2\beta)\ddot{u}_k + 2\beta \ddot{u}_{k+1} \\ (1-\gamma) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{medie} \\ \text{pesate} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{di } \ddot{u}_k \text{ e } \ddot{u}_{k+1} \\ - \Rightarrow \text{media } 2\beta = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$- \text{Dalle (1): } \Delta \ddot{u} = \frac{\Delta u}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{u} \Delta t}{\beta \Delta t^2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{u} \Delta t^2}{\beta \Delta t^2} = \boxed{\frac{\Delta u}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{u}}{\beta \Delta t} - \frac{\ddot{u}}{2\beta} = \Delta \dot{u}} \quad (3) \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

- Sost. la (3) nella (2):

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u} \Delta t + \gamma \Delta t \frac{\Delta u}{\beta \Delta t^2} - \gamma \Delta t \frac{\dot{u}}{\beta \Delta t} - \gamma \Delta t \frac{\ddot{u}}{2\beta} = \boxed{\frac{\gamma \Delta u}{\beta \Delta t} - \frac{\gamma \dot{u}}{\beta} + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \ddot{u} \Delta t = \Delta \dot{u}} \quad (4)$$

$\Delta \dot{u}$ fine di Δu

- Sost. le (3) e le (4) nell'eq. ne del moto in forma incrementale: $m \ddot{u} + c \dot{u} + K(\dot{u}) = \Delta F$

$$\left(\frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{c}{\beta \Delta t} + K \right) (\Delta u) = \Delta F + \frac{m}{\beta} \left(\dot{u} + \frac{\ddot{u}}{2} \right) + \frac{c}{\beta} \left(\dot{u} - \frac{2\beta - \gamma}{2} \ddot{u} \Delta t \right) \Rightarrow \boxed{\tilde{K} \Delta u = \Delta \tilde{F}}$$

\tilde{K} rigidezza efficace

$\Delta \tilde{F}$ forza incrementale efficace

- Nota Δu , sost. nelle (4) e (3), si ottengono gli incrementi $\Delta \dot{u}$ e $\Delta \ddot{u}$, a consentire l'avanzamento della soluzione all'istante temporale successivo.

$$\Delta u = \tilde{K} \Delta \tilde{F}$$

Implementazione ("pseudo-code") \Rightarrow Algoritmo di integrazione

- Partendo da c.i. u_0, i_0 ,

- $t_k: u_k, i_k, \ddot{u}_k \ni \Delta F_k$
- calcolo di $K, \tilde{\Delta F}_k$
- soluzione $\Delta u_n = K^{-1} \tilde{\Delta F}_k$
- determinist. di $\Delta i_k, \ddot{u}_k$
- aggiornamento variabili $u_{k+1}, i_{k+1}, \ddot{u}_{k+1}$

indicazione
tipica per
suff. accurat.

$$\Delta t \approx \frac{T_1}{10}$$

metodo	β	γ	tipo	Δt_{cr}
occ. media	1/4			incond. stab. (∞)
" lineare	1/6	$\frac{1}{2}$	implicito	$\sqrt{3} \frac{T_1}{\pi}$
differenze centrali	0		esplicito	$\frac{T_1}{\pi}$

$$\Omega_{cr} = \frac{\zeta(\gamma - 1/2) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \zeta^2(\gamma - 1/2)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}$$

stimare ζ e γ

$$\zeta = 0 \quad \gamma = 1/2$$

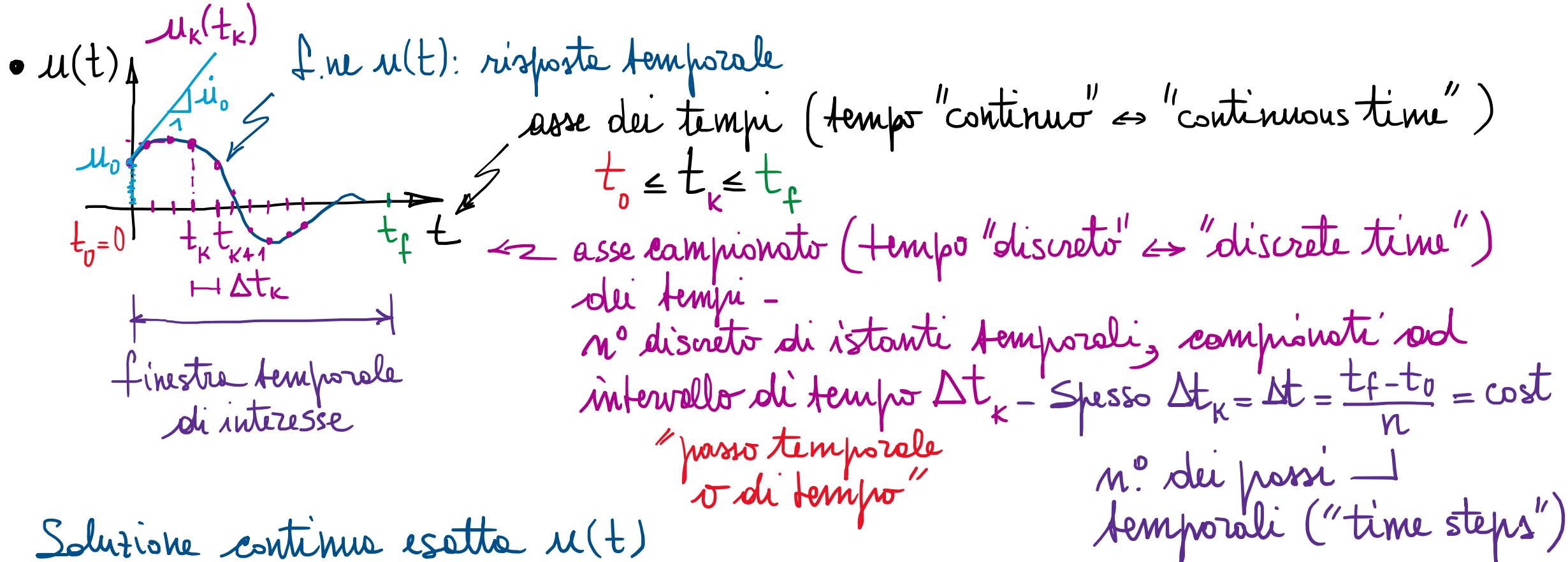
$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}}; \quad \Delta t_{cr} = \frac{1}{12\gamma - 4\beta} \frac{T_1}{\pi}$$

accuratezza del metodo
(bontà delle soluz.)
approssimate rispetto
alle vere

Caratteristiche

- esplicito SSE $\beta = 0$
- accuratezza del 2° ordine
SSE $\gamma = 1/2$ $\Sigma \sim \Delta t^2$ errore
- stabilità (numerica)
 Δt limitata $\forall \Delta t$
- incondizionatamente stabile
 $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$ ($\forall \Delta t$)
- condizionatamente stabile
 $2\beta < \gamma; \gamma \geq 1/2$
- $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_1} = \frac{\Omega_{cr}}{2\pi} T_1$

Concetti fondamentali :



Soluzione continua esatto $u(t)$

„ discrete esatto $u_k(t_k)$ (campionamento di $u(t)$)

„ „ approssimato $\tilde{u}_k(t_k)$ (sufficientemente accurate, nelle
rappresentazione della risposta reale)

- Equazione del moto in forma incrementale:

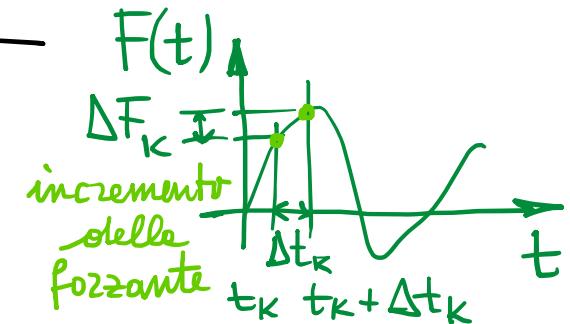
$m, c, K = \text{cost}$ (sist. dinamico tempo-invariante)

all'inizio del passo t_k :

$$m \ddot{u}_k + c \dot{u}_k + Ku_k = F_k(t_k) \quad \ominus$$

alla fine del passo $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$: $m \ddot{u}_{k+1} + c \dot{u}_{k+1} + Ku_{k+1} = F_{k+1}(t_{k+1}) \quad \oplus$

$$m \Delta \ddot{u}_k + c \Delta \dot{u}_k + K \Delta u_k = \Delta F_k$$



"avanzamento" delle
soluzione nel passo
tempore

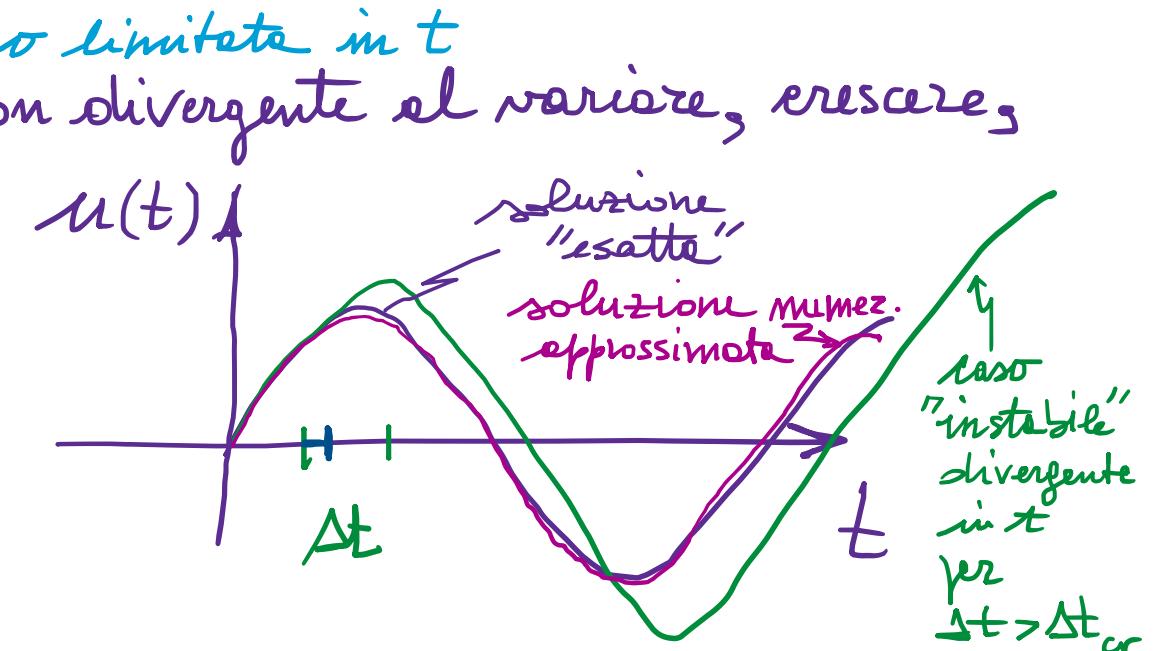
$$\ddot{u}_{k+1} = \ddot{u}_k + \Delta \ddot{u}_k$$

↑ ↑ ↑
 Valori Valori incremento
 alle all'inizio delle risposte
 fine del passo del passo nel passo

- Metodo di integrazione: due aspetti fondamentali

- stabilità del metodo (risposta non divergente al variare, crescere, di Δt)

$\tilde{u}(t)$ di significato numerico e fisico (non esplode, diverge)



- accuratezza del metodo (stime delle vicinanze delle soluzioni approssimate, rispetto a quelle reale)

- Inoltre, caratteristiche del metodo

implicito (necessita delle soluzioni allo interno del passo) non avanza automaticamente

esplicito ("in avanti" - "forward")

può richiedere passi molto piccoli (es. in dinamica veloce)

SOMMARIO (Lec. 09)

- Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (nel dominio del tempo).
- Desviluppo in serie di Taylor \Rightarrow differenze finite (approx. nel passo).
- Metodo dell'accelerazione lineare/media.
- Generalizzazione \Rightarrow Metodo di Newmark (famiglia di metodi).
- Implementazione in algoritmo numerico passo-passo.
- Caratteristiche (implicito/explicito; accuratezza; stabilità numerica).

Next step: Introduzione (cenno) all'analisi nel dominio delle frequenze.

Sistemi MDOF (Multi Degree of Freedom Systems) \Rightarrow alias sistemi discreti a più gradi di libertà.