

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

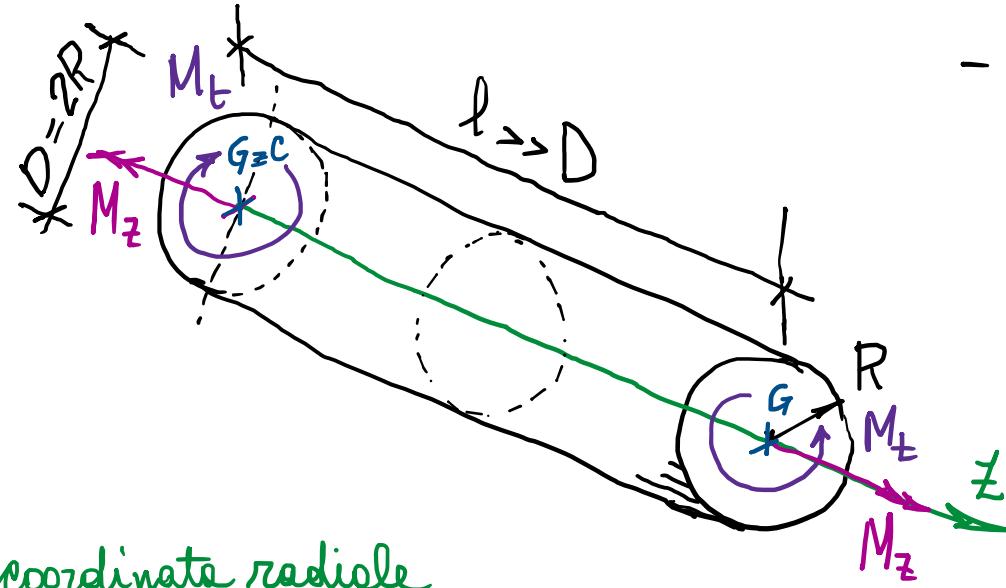
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

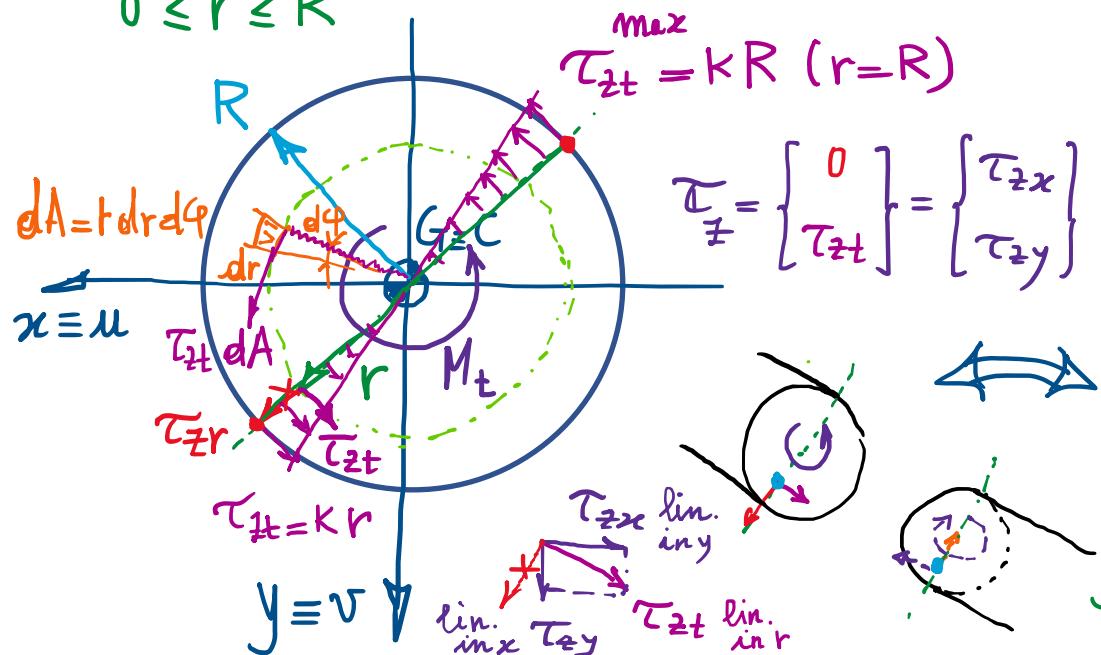
LEZIONE 24

#### 4) Azione torcente o torsione (circolare)



coordinate radiale

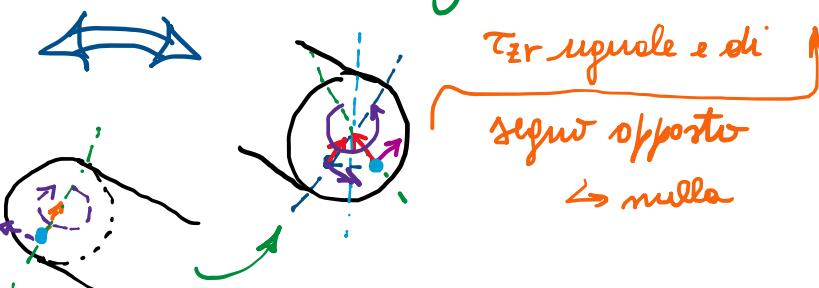
$$0 \leq r \leq R$$



- Si consideri un prisma di DSV di sezione circolare, di raggio  $R$  (diametro  $D = 2R$ , area  $A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ ) soggetto a momento torcente costante  $M_t = M_z$ .

- In analogia coi casi di DSV precedentemente visti, in particolare col caso della flessione retta, si procede con approssimazione semi inverso agli sforzi, ipotizzando, in base a considerazioni di simmetria (polare rispetto a  $G \equiv C$ ), il seguente campo di sforzo:

$$(\sigma_{ij} \equiv 0; \tau_{zr} \equiv 0); \quad \tau_{zt} = K r$$



cost  
lineare e farfalle lungo qualsiasi diametro (con valore nullo in  $G=C$ )

- Si verifica che tutte le eq. ri governanti il pb. elastico lineare risultino soddisfatte. ✓
- Resta da impostare le condizioni di equivalenza statica tra il campo ipotizzato delle  $\tau_{zt} = Kr$  e il momento torcente  $M_t$  che le ha generate:

$$\int_A \underbrace{\tau_{zt} dA}_{A \text{ Kr}} \cdot r = M_t$$

$$K \int_A r^2 dA = M_t \Rightarrow$$

$J_G$  momento d'inerzia

polare rispetto a G=C

$$[L] J_G = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R d\phi$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_G = J_x + J_y = 2J_r$$

$$J_r = \frac{J_G}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\Rightarrow \text{flessione (rette)}$$

$$= \frac{R^4}{4} \cancel{2\pi}$$

$$= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Analogie con flessione rette

$$\sigma_{zz} = Ky = \frac{M_x}{J_x} y$$

$$\uparrow$$

$$\sigma^{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4M_x}{\pi R^3}$$

$$W_x \text{ (modulo di resistenza flessione)} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{W_t}{2}$$

$$\tau_{zt} = Kr = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$$

$$\tau = \tau_{zt} = \tau_{zt}(r=R) = \frac{M_t R}{J_G}$$

Modulo di resistenza  
a torsione

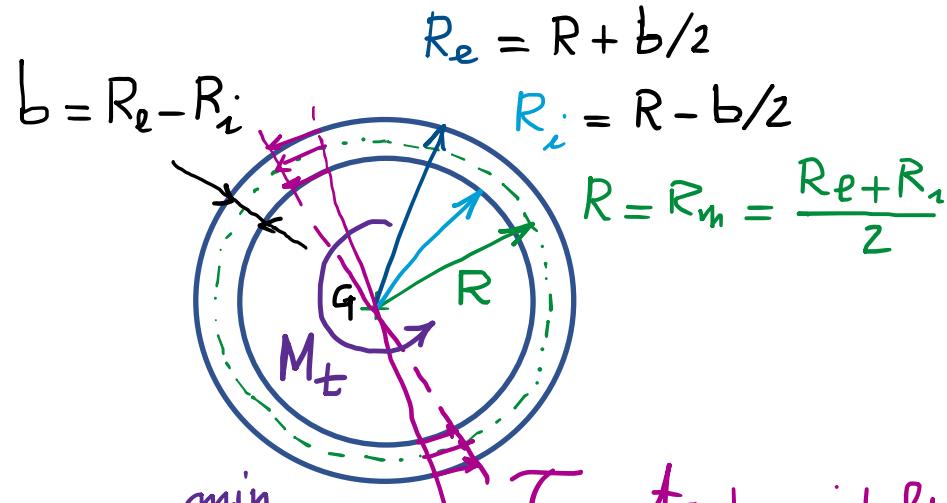
$$W_t = \frac{J_G}{R} = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2} [L]^3$$

(parametro per cui dividere  $M_t$  per trovare le  $\tau^{\max}$ )

$$= \frac{M_t}{J_G/R} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$= \frac{2M_t}{\pi R^3} = \tau^{\max}$$

- Sezione circolare cava



$$\begin{aligned} r = R_i &: \tau^{\min} \\ r = R_m &: \tau^m \\ r = R_e &: \tau^{\max} \end{aligned}$$

$\tau_{zt}$  trapezoidali  
nullo spessore  
 $R_i \leq r \leq R_e$

2) Calcolo  
torsione nei  
profili rotti  
chiusi

Bredt

$$\tau \sim \frac{M_t}{2\pi R^2 b} \quad \text{perete sottile}$$

$$\text{se } \frac{b}{R} \rightarrow 0$$

$\tau$  cost. sullo  
spessore

$\Omega$  area racchiusa all'interno della linea media

$$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_G} r$$

$$\begin{aligned} J_G &= \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) \\ &= \frac{\pi}{2} (R_e^2 + R_i^2)(R_e^2 - R_i^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \left(R + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{b}{2}\right)^2 \right) \left( \left(R + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{b}{2}\right)^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( R^2 + \frac{b^2}{4} + Rb + R^2 + \frac{b^2}{4} - Rb \right). \\ &\quad \left( R^2 + \frac{b^2}{4} + Rb - R^2 - \frac{b^2}{4} + Rb \right) \\ &= \frac{\pi}{2} 2 \left( R^2 + \frac{b^2}{4} \right) 2 Rb = 2\pi Rb \left( R^2 + \frac{b^2}{4} \right) \\ &= 2\pi R^3 b \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{b}{R} \right)^2 \right] = J_G \end{aligned}$$

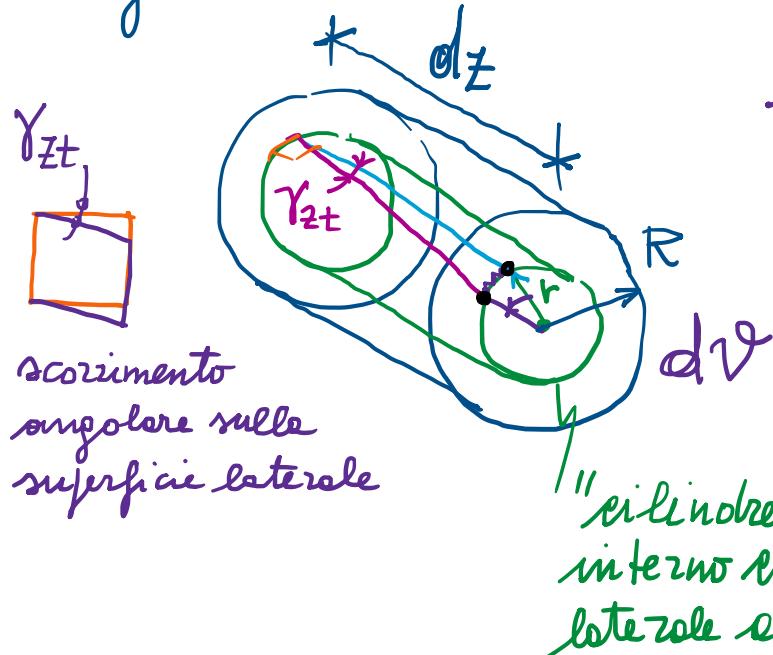
- Campo di deformazione:

$$\sum_{ij} = 0 \text{ tranne } \gamma_{zt} = \frac{\tau_{zt}}{G} = \frac{M_t}{G J_G} r$$

$$G: \text{modulo di elasticità tangenziale o}$$

" " " taglio  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Deformazione del concio di prisma di lunghezza  $dz$ :



rotazione rigida nel piano delle sezioni, di entità  $d\vartheta$  su base  $dz$  (rotaz. relativa tra sez. e distanza  $dz$ )

$$\tan \gamma_{zt} dz = r d\vartheta$$

$$\frac{M_t}{G J_G} \times dz \stackrel{tr}{=} \times d\vartheta \Rightarrow$$

$$d\vartheta = \frac{M_t dz}{G J_G}$$

rigidità torsionale

$$d\varphi \stackrel{\uparrow \downarrow}{=} \frac{M_t dz}{E J_n}$$

rigidità flessionale

- Generalizzazione per sezioni di forma generica:  $\rightarrow$  ColSdC

$$d\vartheta = \frac{M_t}{G J_t} dz = \eta \frac{M_t}{G J_G} dz$$

$$J_t = \frac{J_G}{\eta} \leq J_G$$

$J_t$ : momento d'inerzia;  $\eta = \frac{J_G}{J_t} \geq 1$  fattore di torsione  
(proprietà geom. sez. trasv.)

Intero prisma:

$$\Delta\vartheta = \frac{M_t L}{G J_G}$$

rotaz. relativa  
tra le  
base del prisma

## - Programma indicativo del corso di SolC

- 1. Statica dei corpi rigidi (AC, calcolo di RV, AI: N, T, M; solut. di strutt. isostatiche)
- ▼ 2. Statica e kinematica dei continui (sforzo  $\sigma$ ; deformazione  $E$ )
- ▼ 3. Legame costitutivo (comport. meccanico del materiale, legame  $\sigma \leftrightarrow E$ , parametri elasticci  $\nu, E, G, K$ ; verifica di resistenza (elastica))
- 4. Analisi dei sistemi di travi deformabili (PLV, LE  $\Rightarrow$  risolvere strutt. iperstatiche)
- ▼ 5. Problema di de Saint Venant (Azione assiale, tagliente, flettente, torsionale; verifica di sezioni di travi)
  - Mecanica delle Strutture
  - ▼ Mecanica dei Solidi

(due parti interagenti, proposte in parallelo)

# Conclusioni sul Corso di SdC (da Indice delle Lezioni)

## [\*\*ARCHIVIO LEZIONI ONLINE SdC Edili \(2022\)\*\*](#)

### **Meccanica delle Strutture**

- [\*\*Lezione 01. Introduzione al corso/Analisi Cinematica: vincoli e gradi di vincolo\*\*](#)
- [\*\*Lezione 02. Computo gdv/classificazione e approcci/schemi isostatici fondamentali del corpo rigido\*\*](#)
- [\*\*Lezione 03. Schemi isostatici fondamentali dei sistemi articolati di corpi rigidi/sequenza di montaggio \(schemi elementari\)\*\*](#)
- [\*\*Lezione 04. Analisi Statica: calcolo delle Reazioni Vincolari \(corpo rigido\)\*\*](#)
- [\*\*Lezione 05. Calcolo delle Reazioni Vincolari dei sistemi articolati\*\*](#)
- [\*\*Lezione 06. Azioni Interne e loro rappresentazione \(diagrammi N, T, M\)\*\*](#)
- [\*\*Lezione 07. Equazioni indefinite di equilibrio delle travi \(rettilinee\)/andamenti tipici/considerazioni sulle AI nei sistemi articolati\*\*](#)
- [\*\*Lezione 08. Meccanica dei Solidi: Introduzione ai concetti di sforzo, deformazione e legame costitutivo\*\*](#)
- [\*\*Lezione 09. Analisi dei sistemi di travi deformabili. Metodo della Linea Elastica \(LE\)\*\*](#)
- [\*\*Lezione 10. Risoluzione di strutture iperstatiche mediante LE\*\*](#)
- [\*\*Lezione 11. Princípio dei Lavori Virtuali \(PLV\). Calcolo di componenti di spostamento e risoluzione di strutture iperstatiche mediante PLV\*\*](#)

### **Meccanica dei Solidi**

- [\*\*Lezione 12. Meccanica dei Solidi. Statica dei continui. Sforzo di Cauchy\*\*](#)
- [\*\*Lezione 13. Tensioni principali; problema agli autovalori; proprieta' e classificazione. Equazioni indefinite di equilibrio dei continui\*\*](#)
- [\*\*Lezione 14. Cerchio di Mohr: derivazione analitica e rappresentazione grafica. Cerchi e Arbelo di Mohr\*\*](#)
- [\*\*Lezione 15. Cinematica dei continui: tensore di deformazione; deformazioni principali; deformazione volumetrica\*\*](#)
- [\*\*Lezione 16. Problema elastico lineare: bilancio equazioni/incognite. Legame costitutivo elastico \(lineare, isotropo\)\*\*](#)
- [\*\*Lezione 17. Risposte volumetrica e deviatorica. Verifica di resistenza; criterio di Galileo-Rankine-Navier\*\*](#)
- [\*\*Lezione 18. Criteri di resistenza di de Saint Venant-Grashof; Beltrami; Huber-Hencky-von Mises; Guest-Tresca\*\*](#)
- [\*\*Lezione 19. Problema di de Saint Venant: ipotesi e definizioni. Richiami sulla geometria delle aree\*\*](#)
- [\*\*Lezione 20. Casi di de Saint Venant: azione assiale; flessione \(retta\)\*\*](#)
- [\*\*Lezione 21. Sollecitazioni composte: flessione deviata; tenso-flessione\*\*](#)
- [\*\*Lezione 22. Caso di DSV del taglio \(flessione composta\): trattazione approssimata di Jourawsky\*\*](#)
- [\*\*Lezione 23. Deformazione a taglio; fattore di taglio; sezione rettangolare; sezioni composte. Formule di verifica per stati di sforzo alla dSV\*\*](#)
- [\*\*Lezione 24. Torsione circolare. Conclusioni sul corso\*\*](#)