Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

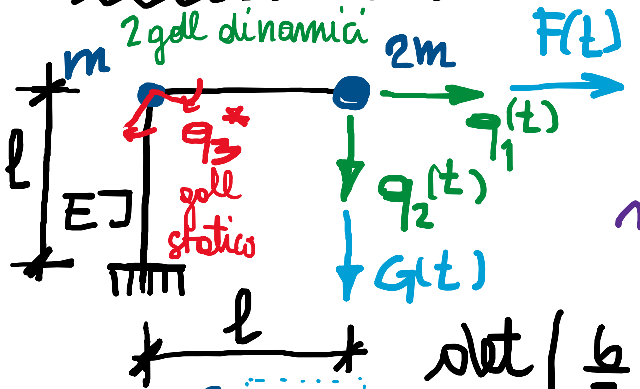
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Esempio 2DOF → Modi principali di vibrazione : $\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i$



$$\underset{2\times2}{\mathbb{M}} = m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \; ; \quad \underset{2\times2}{\mathbb{K}} = \frac{6}{7}\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

matrice di massa   matrice di rigidezza

ω_i : pulsazione naturale

ϕ_i : forma modale

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\,\phi_i = 0$$

$$\det\left(\frac{6}{7}\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \omega_i^2\, m \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{se} \Leftarrow$$

pb. agli autovalori generaliz. associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ (simmetriche e definite positive)

$$\lambda_i = \omega_i^2 \boxed{\frac{m l^3}{EJ}} \; [t]^2$$

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}\,\sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}$$

$K \sim EJ/l^3$

$m \sim m$

$\omega^2 \sim \frac{K}{m} \sim \boxed{\frac{EJ}{m l^3}} \; \frac{1}{[t]^2}$

λ_i numero puro

$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7}\\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{48}{7} - 3\lambda_i\right)\left(\frac{12}{7} - 2\lambda_i\right) - \frac{18^2}{7^2} = 0$$

$$(48 - 21\lambda_i)(12 - 14\lambda_i) - 18^2 = 0$$

$$\cancel{3}(16 - 7\lambda_i)\,\cancel{2}(6 - 7\lambda_i) - 18\cdot\cancel{6}\cdot 3 = 0$$

$$\cancel{7}\cdot 7\lambda_i^2 - \cancel{7}\underbrace{(16+6)}_{22}\lambda_i + \underbrace{16\cdot 6 - \overset{9\cdot 2}{18}\cdot 3}_{(16-9)6,\ \cancel{7}} = 0$$

eq.ne caratteristica (2° grado)

$$\boxed{7\lambda_i^2 - 22\lambda_i + 6 = 0}$$

soluzione analitica

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \mp \sqrt{121 - 42}}{7} = \frac{11 \mp \sqrt{79}}{7} = \begin{cases}\lambda_1 = .3017\\ \lambda_2 = 2.841\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_1 = .5493\\ \omega_2 = 1.686\end{cases}\sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}$$

I modo di vibrare

II modo " "

[rad/s] pulsazioni proprie (freq. proprie $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ [Hz])

- Autovettori: $i=1,2$

N.B.: due eq.ni linearmente dipendenti per $\lambda=\lambda_i$ $(i=1,2)$

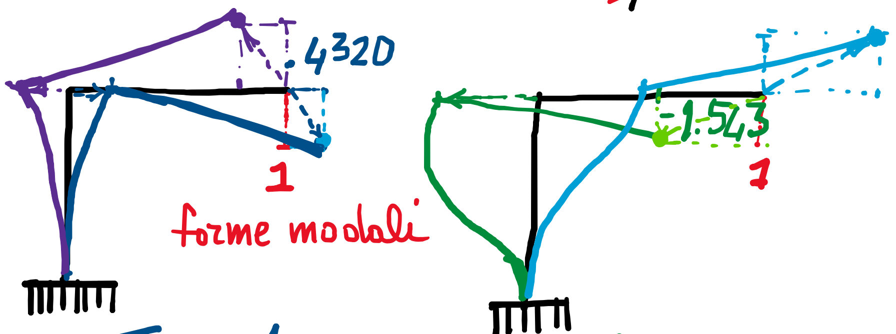
$$\begin{bmatrix} \frac{48}{7}-3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7}-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow -\frac{\cancel{18}^{\,9}}{7}\phi_{i1} + \cancel{2}\left(\frac{6}{7}-\lambda_i\right)\phi_{i2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi_{i1}}{\phi_{i2}} = \frac{\frac{6}{\cancel{7}}-\frac{7}{\cancel{7}}\lambda_i}{\frac{9}{\cancel{7}}} = \frac{6-7\lambda_i}{9}$$

ad es. dalla 2ª eq.ne

$i=1,\ \lambda_1$ (.3017) $\Rightarrow \dfrac{\phi_{11}}{\phi_{12}} = .4320$ $\qquad \Rightarrow \qquad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} .4320 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$i=2,\ \lambda_2$ (2.841) $\Rightarrow \dfrac{\phi_{21}}{\phi_{22}} = -1.543$ $\qquad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.543 \\ 1 \end{Bmatrix}$

normalizzazione con $\phi_{i2}=1$



I modo ω_1 (utili i momenti modali $M_i(x)$) II modo ω_2

- Altre normalizzazioni:

(definite a meno di un fattore di proporzionalità arbitrario)

• $\|\Phi_i\| = 1$ norma unitaria $\quad \Phi_i = \alpha_i \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\alpha_i = \dfrac{1}{\|\Phi_i\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\phi_{i1}^2}}$ $\left(\Phi_i \Rightarrow \dfrac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}\right)$

$\Rightarrow \Phi_1 = \begin{Bmatrix} .3966 \\ .9180 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} -.8392 \\ .5439 \end{Bmatrix}$

• $\Phi_i^T M \Phi_i = M_i = \begin{cases} 1 \\ m \end{cases} = \beta_i \{\phi_{i1} \ \ 1\}\, m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \beta_i \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ 1 \end{Bmatrix}$

masse modali unitarie (o valore specifico, es m)

$= \beta_i^2 \{\phi_{i1}, 1\}\, m \begin{Bmatrix} 3\phi_{i1} \\ 2 \end{Bmatrix}$

$= m\beta_i^2 (3\phi_{i1}^2 + 2) \Rightarrow \beta_i = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \dfrac{1}{\sqrt{3\phi_{i1}^2+2}}$

se $M_i = m$

$\Phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} .2700 \\ .6250 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} -.5103 \\ .3307 \end{Bmatrix}$

se $M_i = 1$

- Coordinate principali :

somma su tutti i modi

$$q = \Phi\, p = [\phi_1 \;\; \phi_2] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = \sum_i \phi_i p_i$$

$$\Phi\, \Phi^{-1} = \mathbb{I}_{2\times 2}$$

$$\Phi^T M q = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\mathfrak{M}} p$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} .2700 & -.5103 \\ .6250 & .3307 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_1 = .2700\, p_1 - .5103\, p_2 \\ q_2 = .6250\, p_1 + .3307\, p_2 \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} .8101 & 1.250 \\ -1.531 & .6614 \end{bmatrix}$$

- Relaz. inversa :

$$p = \Phi^{-1} q = (\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{\mathfrak{M}})^{-1} \Phi^T M q \Rightarrow p_i = \frac{\phi_i^T M q}{M_i} \rightarrow \begin{cases} p_1 = .8101\, q_1 + 1.250\, q_2 \\ p_2 = -1.531\, q_1 + .6614\, q_2 \end{cases}$$

$$M \leftarrow \cancel{m}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_i = \phi_i^T M \phi_i \leftarrow M_i : \cancel{m}$$

$$= \phi_i^T \cancel{m} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \phi_i^T \begin{Bmatrix} 3q_1 \\ 2q_2 \end{Bmatrix}$$

$$= 3\phi_{i1} q_1 + 2\phi_{i2} q_2$$

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto :

$$\mathfrak{M} = m\, \mathbb{I} ; \quad \mathcal{K} = \Phi^T K \Phi = \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} \underbrace{.3017}_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \underbrace{2.841}_{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

$$K \Phi = M \Phi \Omega^2$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = \mathfrak{M}^{-1} \mathcal{K} \leftrightarrow \omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i} ; \quad \omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$$

$$\begin{cases} m\ddot{p}_1 + \frac{EJ}{\ell^3} .3017\, p_1(t) = .2700\, F(t) + .6250\, G(t) = P_1(t) \\ m\ddot{p}_2 + \frac{EJ}{\ell^3} 2.841\, p_2(t) = -.5103\, F(t) + .3307\, G(t) = P_2(t) \end{cases}$$

(fisiche) coordin. lagrang.

coord. principali (matematiche)

$$\Rightarrow p(t) \Rightarrow q(t) = \Phi\, p(t)$$

risposta finale

- Determinazione numerica delle autosoluzioni (metodo iterazione vettoriale inversa)

Forme standard: $\begin{cases} G\,\phi_i = \frac{1}{\omega_i^2}\,\phi_i\,, & G = K^{-1} M \\ H\,\phi_i = \omega_i^2\,\phi_i\,, & H = M^{-1} K \end{cases}$

$\phi_i^{(0)} \rightarrow \hat{\phi}_i^{(1)} = G\,\phi_i^{(0)} \xrightarrow[k\ \text{iter.}]{} \cdots$ conv. a ϕ_1 (primo)

$\hat{\phi}_i^{(1)} = H\,\phi_i^{(0)} \dashrightarrow$ conv. a $\phi_n = \phi_2$ (ultimo)

autov. di tentativo (trial vector)

processo iterativo (mediante semplici moltiplicazioni successive)

- Ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT (da inserire ad ogni iterazione per evitare di convergere sugli autovettori già precedentemente determinati).

- Algoritmo iterativo (pseudo-code), di agevole implementazione

  - $\phi^{(0)}$ trial vector
  - $\hat{\phi}^{(1)} = G\,\phi^{(0)}$ ← l'autovettore si aggiorna mediante semplice moltiplicazione (con G o H) — converge a ϕ_1 (modo 1); converge a ϕ_n (modo n)
  - $\phi^{(1)} \leftarrow \hat{\phi}^{(1)}$ tramite normalizzazione
  - $\omega^2_{(1)} = \dfrac{\phi^{(1),T} K\,\phi^{(1)}}{\phi^{(1),T} M\,\phi^{(1)}}$ stima dell'autovalore da rapporto di Rayleigh (successiva) i
  - $\dfrac{|\omega^2_{(i+1)} - \omega^2_{(i)}|}{\omega^2_{(i)}} < tol \simeq 10^{-4} - 10^{-6} \longrightarrow$ end; $>$

ciclo ("loop")

- Concetti fondamentali (analisi dinamica modale) ← sistemi dinamici lineari tempo-invar.

- Soluzione del pb. agli autovalori "generalizzato" associato alle matrici di rigidezza $\mathbb{K}$ e di massa $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{K}\,\boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\boldsymbol{\phi}_i \qquad \begin{cases} \lambda_i = \omega_i^2 & \text{autovalori } (\omega_i \text{ pulsazioni proprie o naturali}) \\ \boldsymbol{\phi}_i & \text{autovettori (forme modali)} \end{cases}$$

- forma analitica, solo per n (n. dei gdl dinamici) < 5 ⟨ autoval. da eq.ne caratteristica di grado n. / autovett. da sist. lin. omogeneo.

- forma numerica, per sistemi generici, aventi anche molti gdl.

- Trasformazione in coordinate principali $p_i(t)$:

$$\underset{\substack{\text{coordinate}\\\text{lagrangiane}\\\text{(di senso fisico)}}}{\mathbf{q}(t)} = \boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{p} = \underbrace{\left[\boldsymbol{\phi}_1 \,\vdots\, \boldsymbol{\phi}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \boldsymbol{\phi}_i \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \boldsymbol{\phi}_n\right]}_{\boldsymbol{\Phi}}\,\mathbf{p} = \sum_{\substack{i\\\text{modi}}} \boldsymbol{\phi}_i\, p_i(t)$$

p_i: componente (modale) del vettore $\mathbf{q}$ nella base degli autovettori $\boldsymbol{\phi}_i$.

$\boldsymbol{\Phi}$: matrice degli autovettori ($\boldsymbol{\phi}_i$ per colonne)

$\mathbf{p}$: coordinate principali, associate ai modi di vibrare (di significato matematico: coeff. della combinazione lineare dei $\boldsymbol{\phi}_i$).

– Conseguente trasformazione in matrici modali (diagonali): $\Rightarrow$ disaccoppiamento delle equazioni del moto

$$\mathbb{M}\,\ddot{q} + \mathbb{K}\,q = \mathbb{Q}(t)$$

$q = \Phi\, p$ trasformaz. di coordinate $\Phi = [\phi_i]$ matrice degli autovettori (per colonne)

$$\Phi^T \left(\mathbb{M}\Phi\ddot{p} + \mathbb{K}\Phi p = \mathbb{Q} \right)$$

$$\underbrace{\Phi^T \mathbb{M} \Phi}_{\mathcal{M}=\mathrm{diag}[M_i]}\,\ddot{p} + \underbrace{\Phi^T \mathbb{K} \Phi}_{\mathcal{K}=\mathrm{diag}[K_i]}\, p = \Phi^T \mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$$

$\Rightarrow$ coerentemente:

$\Omega^2 = \mathrm{diag}[\omega_i^2]$ matrice degli autovalori (diagonale)

$$\mathbb{K}\phi_i = \overset{\text{scalare}}{\omega_i^2}\, \mathbb{M}\phi_i = \mathbb{M}\phi_i\,\omega_i^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\Phi^T\left(\mathbb{K}\Phi = \mathbb{M}\Phi\Omega^2\right)$$

$$\mathcal{K} = \Phi^T\mathbb{K}\Phi = \underbrace{\Phi^T\mathbb{M}\Phi}_{\mathcal{M}}\,\Omega^2 = \mathcal{M}\,\Omega^2 \Rightarrow \Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$$

$$\omega_i^2 = M_i^{-1} K_i = \frac{K_i}{M_i}$$

$$\underbrace{M_i}_{\phi_i^T \mathbb{M} \phi_i}\, \ddot{p}_i + \underbrace{K_i}_{\phi_i^T \mathbb{K} \phi_i}\, p_i(t) = \phi_i^T \mathbb{Q} = P_i(t)$$

massa modale — rigidezza modale

.... n eq.ni del moto disaccoppiate, nelle n coordinate principali $p_i(t)$

(ripetizione, n volte, tante quanti sono i modi, di quanto visto per un sistema SDOF) $\Rightarrow$ interpretazione: sistema MDOF ad n gdl, come n sistemi SDOF, per ciascun modo di vibrare.

$$\Updownarrow$$

ricorda: sistema SDOF $q_1 = u(t)$

$$m\,\ddot{u} + k\,u(t) = F(t)$$

semplice generalizzazione

SOMMARIO (Lez. 13)

- Esempio 2DOF: modi principali di vibrazione.
- Soluzione (analitica) dell'eq.ne caratteristica ⇒ autovalori.
- Determinazione degli autovettori (dal sist. agli autoval. originario), a meno di costante arbitraria.
- Normalizzazione degli autovettori. (⇐ scelta della costante arbitraria)
- Trasformazione in coordinate principali e disaccoppiamento delle eq.ni del moto.
- Calcolo numerico delle autosoluzioni (metodo dell'iterazione vettoriale inversa).

Next step: introduzione dello smorzamento; azioni interne (modali).