

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

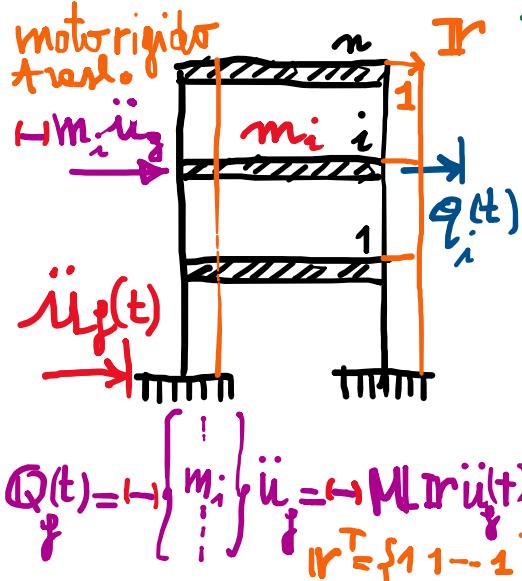
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

Azione sismica su sistemi MDOF (telsi multipiano "shear-type") [Generata da accelerazioni, in seguito al moto del terreno.]



Telai shear-type:

- elementi assialm. rigidi $\frac{EA}{l} \rightarrow \infty$

- teli infinitamente rigide anche fless. $EJ_t \rightarrow \infty$ e naturalm. $-i_p(t)$

- colonne flessionalmente elastiche, $\frac{EJ_c}{l_c} \text{ finite}$ (spost. totale: $\ddot{q}_i = \ddot{u}_g + \ddot{q}_i$)

- masse concentrate ai piani m_i

- gelli dinamici: spost. dei piani, relativi al terreno

- Matrice di massa: $M = \text{diag}[m_i]$

- Matrice di rigidezza tridiagonale

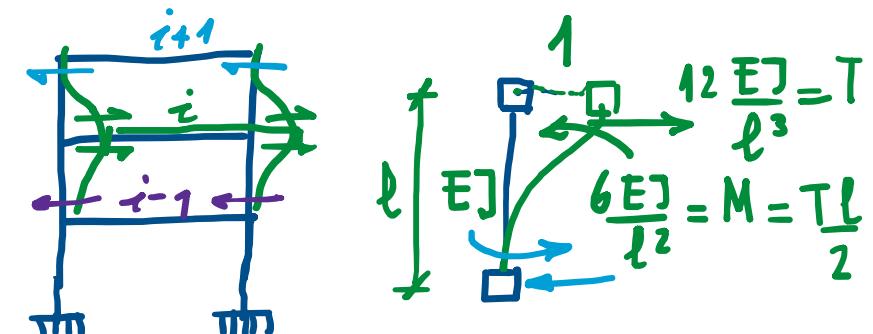
$$K = \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{i-1,i} & & \\ & & K_{i,i} & \\ & & & K_{i+1,i} \end{bmatrix}$$

- Matrice di smorzamento (diagonalizzabile):

- alle Rayleigh o "classico" $C = \alpha M + \beta K$ (α, β det. fissando ζ_1, ζ_2 per i primi due modi)

- $T = \text{diag}[C_i = 2\zeta_i \sqrt{K_i M_i}]$, definendo i fattori di smorz. modali $\{K_i: \text{rigidezza modali}, M_i: \text{massa modali}\}$

- Pb. agli autovelori: $K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i \Rightarrow \frac{\omega_i^2}{\lambda_i} = \frac{K_i}{M_i} \Leftrightarrow K \Psi_i = M \Phi_i \Psi_i^2$ $\Phi_i^T K \Phi_i = \lambda_i^2 \Phi_i^T M \Phi_i$



• Eq. m del moto:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq^t = -M\ddot{r} \ddot{i}_g(t) \Rightarrow M\ddot{p} + C\dot{p} + Kp(t) = -\Phi^T M\ddot{r} \ddot{i}_g(t)$$

$$\ddot{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

n. eq. m disc.
(per i vari modi)

modo i

$$\cancel{M_i \ddot{p}_i + C_i \dot{p}_i + K_i p_i(t) = -\Lambda_i \ddot{i}_g(t)}$$

$$\ddot{p}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i(t) = -\Gamma_i \ddot{i}_g(t)$$

$$\Gamma = \{\Gamma_i\}$$

vettore dei fattori
di partecipazione
modale

es. ultimo

piano

$$[1]$$

è numero
puro
(rapporto di
massa)

N.B.: $M_i, \Lambda_i; \Gamma_i$ assoc. a Φ_i
dir. de normal. di \ddot{p}_i

$\ddot{q} = \Phi p$ Analisi dinamica modale

$$\Phi^T M \Phi \quad \Phi^T C \Phi \quad \Phi^T K \Phi$$

$$\Lambda = \{\Lambda_i\}$$

$\text{diag}[M_i]$ $\text{diag}[C_i]$ $\text{diag}[K_i]$ vettore massa

partecipanti Modelli

$$\Lambda_i = \Phi_i^T M \Phi_i$$

modo i dimensioni di
una massa

$$\Gamma_i = \frac{\Lambda_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T M \Phi_i}{\Phi_i^T M \Phi_i}$$

fattore di
partecipazione
modale (alla
stessa norma)

$$\cancel{M^{-1} \ddot{p} + C^{-1} \dot{p} + K^{-1} p(t) = -\cancel{M^{-1} \Lambda} \ddot{i}_g(t)}$$

Quindi:

$$\Gamma = M^{-1} \Lambda$$

$$= (\Phi^T M \Phi)^{-1} \Phi^T M \Phi$$

$$= \Phi^{-1} M^{-1} \Phi^{-1} \Phi^T M \Phi = \Phi^{-1} \Phi$$

$$\boxed{\Gamma}$$

$$\boxed{\ddot{r} = \Phi \Gamma}$$

$$\Rightarrow 1_j = \sum_i \Phi_{ij} \Gamma_i \left(\frac{\Phi_{ij} = 1}{\sum_i \Gamma_i = 1} \right)$$

Risposte all'azione sismica:

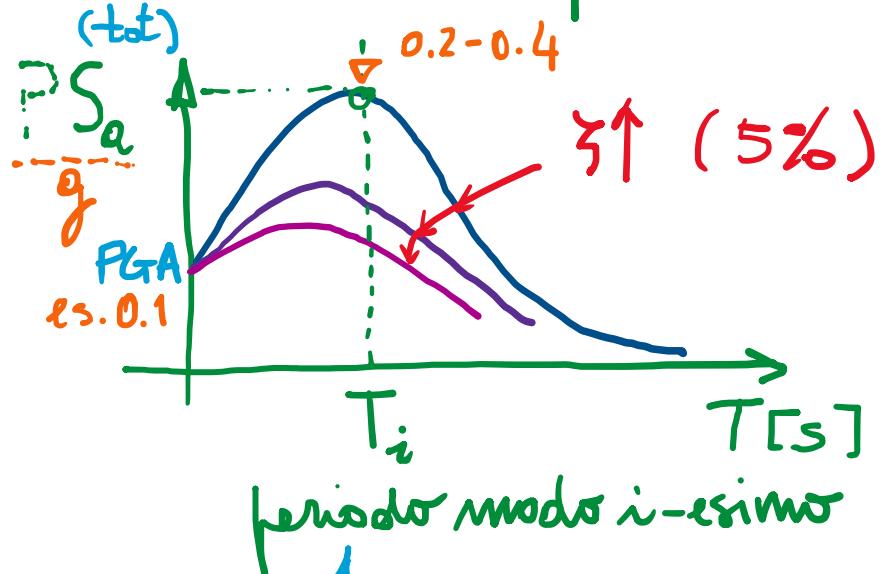
- Tramite Int. di Duhamel

Metodo di Newmark

$$i \ddot{y}_j(t) \rightarrow \dot{\psi}_i(t) \rightarrow q_j(t) = \sum_i \phi_{ij} \dot{\psi}_i(t)$$

j gelle i modo

- Tramite Spettro di risposta (ev. di progetto, in base a zonazione sismica)



Si "entra" nello spettro di risposta col periodo proprio del modo i -esimo

grado di libertà j -esimo

$$S_{d,i} = \max_t \{ p_i \} \rightarrow PS_{r,i} = \omega_i S_{d,i} \rightarrow PS_e = \omega_i^2 S_d$$

$$S_{d,i} = \frac{PS_{e,i}}{\omega_i^2}$$

L'pseudo-solo di "amplificazione", del fattore di partecipazione modale Γ_i

$$\boxed{\max_{\text{modi}} \dot{\psi}_i = |\Gamma_i| \frac{S_{e,i}}{\omega_i^2}}$$

(che si registrano in istanti di tempo diversi)

Stime spostamento complessivo q_j^{max}

$$= \sum_i |\phi_{ij}| \dot{\psi}_i^{\text{max}} \quad (\text{in genere eccess. conserv.})$$

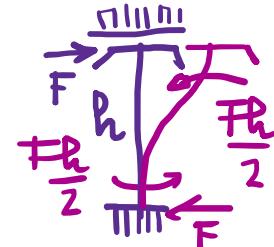
$$= \sqrt{\sum_i |\phi_{ij}| \Gamma_i | \frac{S_{e,i}}{\omega_i^2} |^2}$$

Square Root of Sum of Squares

SRSS (efficace maggiore.)

Azioni interne (a partire da quelle modelli $\bar{\Phi}_i(s)$)

$$\mathcal{A}_K^{\max \text{ SRSS}} = \sqrt{\sum_i \left(\bar{\Phi}_i(s_K) \Gamma_i \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} \right)^2}$$



sez. caratteristiche
(vedi calcolo dei telai
col metodo degli sforzi.)
5 cellule base (N non nota
nelle travi)

Toglio modelle alla base

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{E}_i &= K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i = F I_i \\ \rightarrow \bar{E}_{ij} & \\ \tau_i &= \sum_j \bar{E}_{ij} = \bar{E}_i^T r = \omega_i^2 \underbrace{\Phi_i^T M^{(T)} r}_{{\Lambda}_i} \end{aligned}$$

τ_i : somma di tutte le forze d'inerzia ai piani

Toglio modelle max:

$$\tau_i^{\max} = \tau_i \rho_i^{\max} = |\Lambda_i| \omega_i^2 |\Gamma_i| \frac{S_{ei}}{\omega_i^2} = \frac{|\Lambda_i|^2}{M_i} S_{ei}$$

$$m_{tot} = \sum_i m_i = r^T M r = \Gamma \underbrace{\Phi^T M \Phi}_m \Gamma \underbrace{\Gamma^{-1}}_{M^{-1}}$$

$$= \Gamma^T \Gamma = \sum_i \Gamma_i^T \Lambda_i = \sum_i \frac{|\Lambda_i|^2}{M_i} = \sum_i M_{eff,i}$$

proprietà "fisica" delle masse modelli efficieni

$$|\Lambda_i| \omega_i^2 = \tau_i \quad (\omega = \sqrt{\lambda})$$

dip. delle normalizz. di Φ_i

$$\begin{aligned} M_{eff,i} S_{ei} &= \tau_i^{\max} \\ M_{eff,i} &= \frac{|\Lambda_i|^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T M r)^2}{\Phi_i^T M \Phi_i} \end{aligned}$$

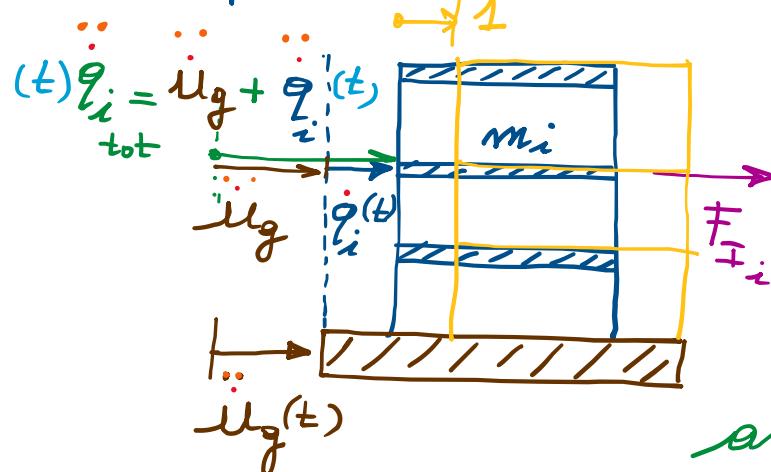
$\sim \frac{\rho_i^2}{\Phi_i^2}$

masse modelli efficieni
(indip. da norm. di Φ_i)

[M]
ohm.
di massa

Concetti fondamentali:

- Risposte sismica (con specifico riferimento ai "telesi shear-type"):



Eq. di moto:

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_i + C \dot{q}_i + K q_i &= -\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_i \\ \vdots \\ m_n \end{array} \right\}}_{M} \ddot{u}_g(t) \\ &= -m_i (\ddot{u}_g(t) + \dot{q}_i(t)) \end{aligned}$$

analisi dinamica
modello

$$\oint^T \dots = \dots$$

$\ddot{q}_i = \oint^T P$ matrice degli autovettori
coord. prima
n x 1
n x n

$$(K \Phi_j = \omega_j^2 M \Phi_j)$$

$$\underbrace{\oint^T M \Phi}_{M} \ddot{P} + \underbrace{\oint^T C \Phi}_{C} \dot{P} + \underbrace{\oint^T K \Phi}_{K} P = -\underbrace{\oint^T M \Phi}_{M} r \ddot{u}_g(t)$$

$$\text{diag}[M_i] = \Phi_i^T M \Phi_i$$

$$\text{hyp. diag}[C_i = \Phi_i^T C \Phi_i]$$

$$\text{diag}[K_i] = \Phi_i^T K \Phi_i$$

vettore delle
mosse partecipanti
modelli:

$$r_i = \Phi_i^T M L r$$

$$ML = \text{diag}[m_i]$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_i & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = ML r$$

r : rigid body motion vector

di ampiezza unitaria

(spostamento traslazionale)

- Premoltiplicando per $\omega\omega^{-1}$:

$$\ddot{\mathbf{P}} + \omega\omega^{-1} \mathcal{C} \dot{\mathbf{P}} + \omega\omega^{-1} \mathcal{K} \mathbf{P} = -\omega\omega^{-1} \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{II}} \underbrace{\ddot{\mathbf{u}}_g(t)}_{\text{I}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathcal{L} &= \text{diag} [m_i] \text{ masse dei punti} \\ \omega\omega &= \text{diag} [M_i] \text{ masse modelli} \\ M_i &= \Phi_i^T \mathcal{M} \mathcal{L} \Phi_i \dots \end{aligned}$$

All modo i

$$\ddot{\mathbf{p}}_i(t) + \underbrace{\frac{c_i}{M_i}}_2 \dot{\mathbf{p}}_i(t) + \omega_i \mathbf{p}_i(t) = -\Gamma_i \ddot{\mathbf{u}}_g(t)$$

"amplifica"
 $\ddot{\mathbf{u}}_g$ per il modo
i-esimo

$$\Gamma = \left\{ \Gamma_i = \frac{1}{M_i} = \frac{\Phi_i^T \mathcal{M} \mathcal{L} \mathbf{r}}{\Phi_i^T \mathcal{M} \mathcal{L} \Phi_i} \right\}$$

fattori di partecipazione modele:

coeff. moltiplicativo di $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$
per il generico modo i $[\Gamma_i] = [1]$

L SDOF $\frac{m}{m} = 1$

- Proprietà:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \omega\omega^{-1} \mathbb{1} \\ &= (\Phi^T \mathcal{M} \mathcal{L} \Phi)^{-1} \underbrace{\Phi^T \mathcal{M} \mathcal{L} \mathbf{r}}_{\text{II}} \\ &= \Phi^{-1} \mathcal{M}^{-1} \Phi^{-T} \Phi^T \mathcal{M} \mathcal{L} \mathbf{r} = \Phi^{-1} \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = \Phi \Gamma \end{aligned}$$

(se $j=n$, $\phi_{in}=1$
es. $\sum \Gamma_i = 1$)

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{P}$$

$$\mathbf{r} = \Phi \Gamma$$

$$1 = r_j = \sum_i \Phi_{ij} \Gamma_i$$

modo i

Γ_i sono le componenti
di \mathbf{r} nella base degli
autovettori $\mathbf{r} = \sum_i \Phi_i \Gamma_i$

- Masse moduli efficiaci :

$$M_{\text{eff},i} = \lambda_i \Gamma_i = \lambda_i \frac{\lambda_i}{M_i} = \frac{\lambda_i^2}{M_i} = \frac{(\Phi_i^\top M I \Phi_i)^2}{\Phi_i^\top M I \Phi_i} > 0$$

$\sim \frac{M^2}{M}$ è una massa [M]
 $\sim \frac{\lambda^2 \Phi_i^2}{\lambda^2 \Phi_i^2}$ indipendente da come è normalizzato Φ_i .

- Esprimono il telaio modale sulle base massimo secondo i vari modi :

$$\Sigma_i^{\text{mass}} = M_{\text{eff},i} S_{\alpha,i} \leftrightarrow \text{relazione tipo } F = m \frac{\ddot{\alpha}}{\text{massa}} \quad \begin{matrix} \text{forza} \\ \text{accelerazione} \end{matrix}$$

\uparrow è la massa strutturale coinvolta nel modo i a dare il telaio sulle base massimo.

- Proprietà "fisica": $\sum_i M_{\text{eff},i} = m_{\text{tot}} = \sum_j m_j$ masse totale del telaio
 (in genere i primi due/tre modi rubano una larga percentuale (anche ~90%) della massa totale dell'edificio)..

SOMMARIO (Lec. 15)

- Risposta sismica di strutture MDOF (telsi "shear-type").
- Equazioni del moto con azione sismica per effetto di trascinamento.
- Analisi dinamica modale con disaccoppiamento in N eq. di M modi.
- Determinazione delle risposte tramite spettro di risposte.
- Stime (SRSS) degli indici di risposta sismica (spat., AI, taglio alla base).
- Parametri di partecipazione modale (mese, fattori) e mese modelli efficaci (legate alle stime del taglio modale alla base massimo).

Next step: (Dinamica dei sistemi continui).

II: Instabilità delle strutture (di perturbare nell'analisi dinamica).