

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

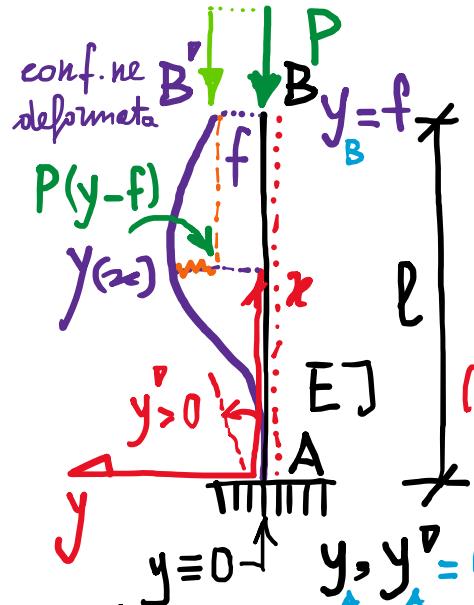
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 21

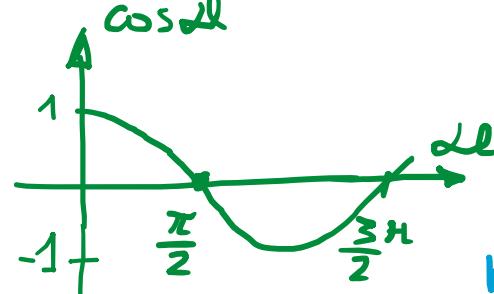
# Altre condizioni di vincolo (generalizzazione dell'asta di Euler)



conf. ne dirif.  
(equilibrata)

condiz. di

singolarità: slet  $D = \alpha l \cos \alpha l = 0$



$$h=1 \quad P_{cr}^E = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{1}{4} P_{W,AE}^E$$

LE:  $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = + M(x) \quad (\text{nella configuzz. deformat.})$   
 $= - P(y(x) - f) = - Py + Pf$

$$y''(x) + \frac{P}{EJ} y(x) = \frac{P}{EJ} f \quad \alpha^2 > 0 \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

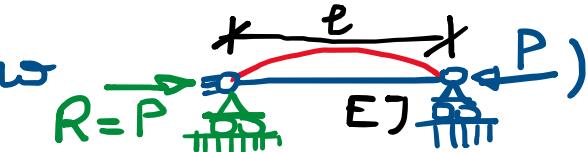
$$P = \alpha^2 l^2 \frac{EJ}{l^2} = (\alpha l)^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Soluzioni non banali  
 $y \neq 0$  se:

$$\alpha l \cos \alpha l = 0 \quad \not\equiv 0 \quad \alpha l = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$(\alpha l)^2 = n^2 \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow P_{cr,n} = n^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$$

$$= \pi^2 \frac{EJ}{l_{0,n}^2}; \quad l_{0,n} = \frac{2}{n} l \text{ lungR. d'inflessione}$$



$$P_{cr}^E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \approx 10 \frac{P^2}{l^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{f}{l}$$

formule di Euler  
 integraz. gen. omog. anz. integr. part.

Scrittura e impostazione delle e.e.:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow B + f = 0 \Rightarrow B = -f \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha l \cdot A = 0 \\ y(l) = f \Rightarrow \sin \alpha l \cdot A + \cos \alpha l \cdot B + f = f \end{cases}$$

Sistema  
delle  
condizioni  
al contorno

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha l & 0 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ f \end{bmatrix} = 0$$

$\times (x=0$   
soluz.  
"bonale")

- Soluzione e deformate critiche ( $\mu \propto l = n \frac{\pi}{2}$ )
 
$$\begin{cases} B = -f \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = f \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{2} \frac{x}{l} \right)$$

arbitr.

$$l_{0,n} = \frac{2}{n} l \quad y_{cr,n} = f \left( 1 - \cos \frac{n\pi x}{2l} \right) \quad l_0 = 2l \quad n=1$$

$$l_0 = \frac{2}{3} l \quad F \quad y_{cr,3} = f \left( 1 - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right) \quad n=3$$

$\rightarrow$  note le lunghezze di libere inflessione  
stelle deformata critica è noto il cerchio crit.

- Altre condizioni di vincolo:  $P_{cr}^E = \pi^2 E J / l_0^2 \Rightarrow l_0 = \sqrt{c} l$ 

coeff. di vincolo  $c = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2$

$l$

$y, y' = 0$

$l_0 = 2l$

$c = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} P_{cr,a,E}^E$

$y, y'$

$l_0 = l$

$c = 1$

$P_{cr,a,E}^E = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$

$l_0 \approx \frac{l}{\sqrt{2}}$   
 $\approx 0.7l$

$l_0 = l$

$l_0 = l$

$l_0 = l$

$l_0 = \frac{l}{2}$

$c = 4$

$4 P_{cr,a,E}^E$

$y, y'$

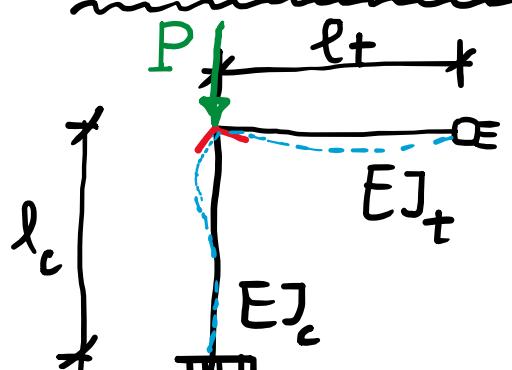
$y, y'$

$y, y'$

$y, y'$

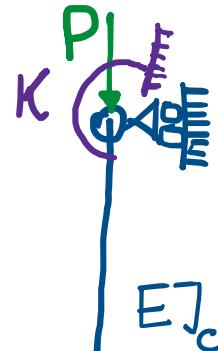
$(Axial = \alpha l)$

## - Teleri e modi fissi (soluz. rotazioni)



$$l=2 \leq c \leq l=4$$

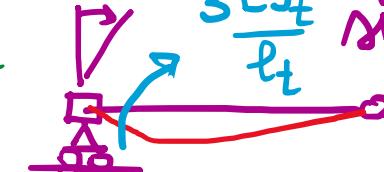
$$K=0, \mu \rightarrow \infty$$



$$K = \frac{1}{\mu} \frac{EJ_c}{l_t}$$

$$K \rightarrow \infty, \mu = 0$$

$\nu=1$  effetto flessionale delle trave  
sulle colonne



$$\frac{3EJ_t}{l_t}$$

$\frac{1}{\mu}$  ... coeff. di riduzione

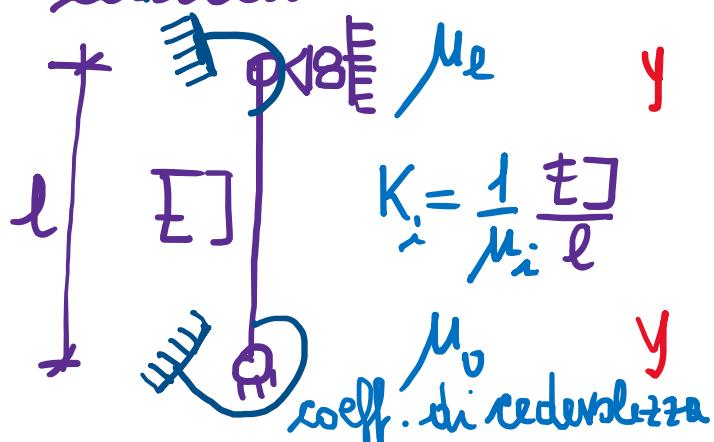
$$K = \frac{M}{\nu} = 3 \frac{EJ_t}{l_t} \cdot \frac{EJ_c}{l_c} \cdot \frac{l_c}{EJ_c} = \frac{1}{3} \frac{EJ_c}{EJ_t} \frac{l_t}{l_c}$$

$$\text{Es. } M_0 \rightarrow 0, \mu_e = \mu \quad \mu = 1/3$$

$$c_N = 2 \frac{0.4 + \mu}{0.2 + \mu}; \frac{EJ_t}{l_t} = \frac{EJ_c}{l_c}$$

$$= \frac{11}{4} = 2.75$$

## - Formule di Newmark:



$$P_{G2} \approx c_N \frac{\pi^2 EJ}{l^2} (\text{valori approx., irr. < 4\%})$$

$$c_N = \frac{(0.4 + M_0)(0.4 + M_e)}{(0.2 + M_0)(0.2 + M_e)}$$

$$\begin{aligned} -M_i \rightarrow 0 & \quad c_N = 4 \quad (\text{valori esatti in casi particolari}) \\ -\mu_i \rightarrow \infty & \quad c_N = 1 \end{aligned}$$

Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza:  $N = P$ ;  $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} < \sigma_0$ )

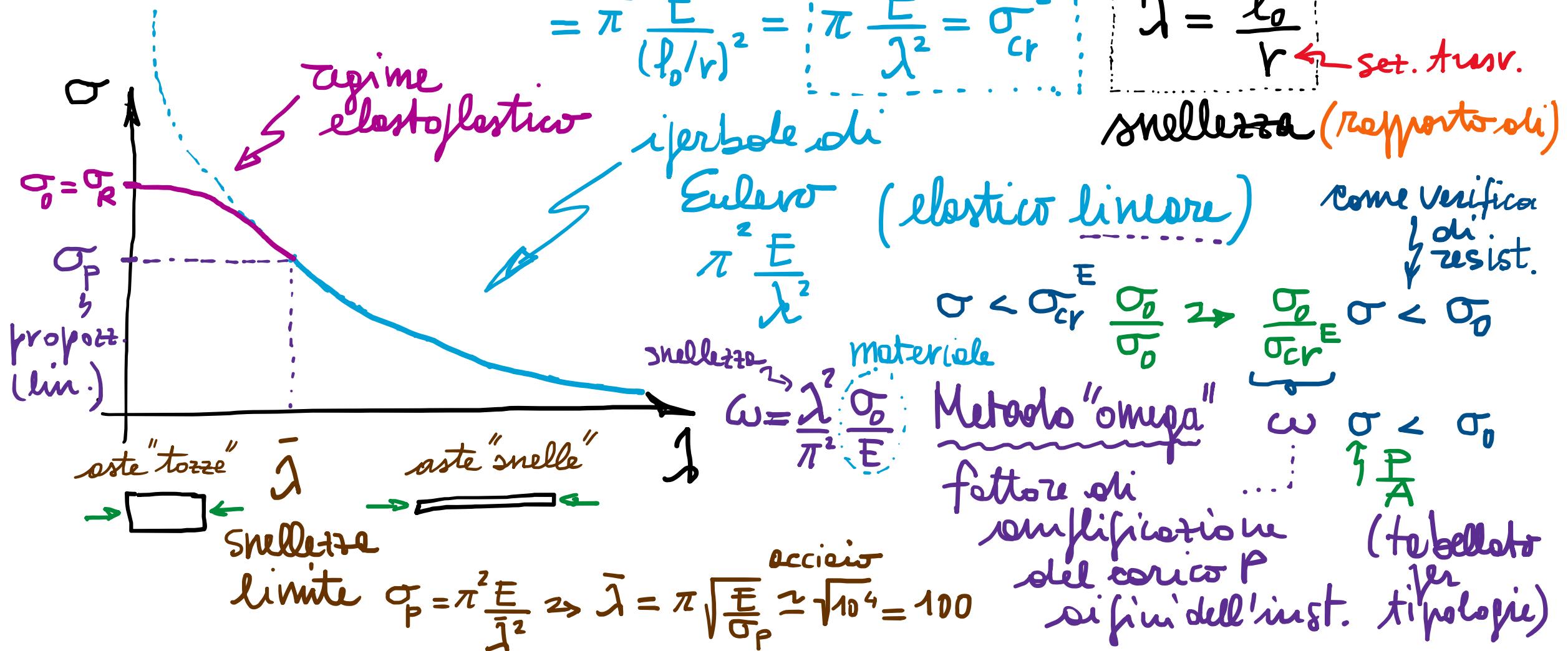
$$\sigma = \frac{P}{A} < \frac{P_{cr}^E}{A} = \sigma_{cr}^E \Rightarrow \sigma_{cr}^E = \pi^2 \frac{E J}{l_o^2} \cdot \frac{1}{A} r^2 \quad r_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} \quad \text{oppure}$$

raggio giroscopico d'inerzia

$$= \pi^2 \frac{E}{(l_o/r)^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \sigma_{cr}^E$$

$$J = \frac{l_o}{r} \quad \text{set. trass.}$$

snellentezza (rapporto l/r)



$$\sigma < \sigma_{cr}^E \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_0} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^E} \sigma < \sigma_0$$

$$\text{Moltiplicazione per } \omega = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{\sigma_0}{E}$$

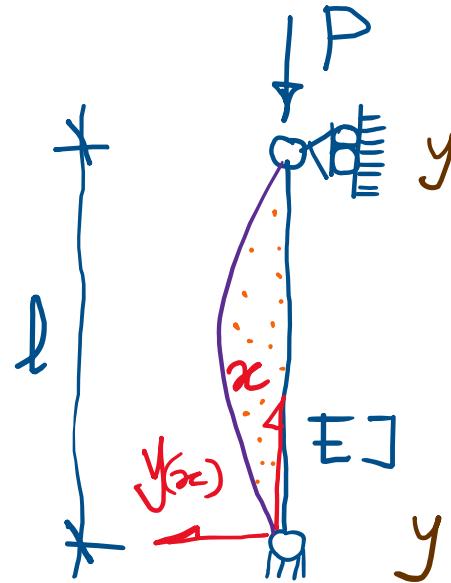
metodologia "Omega" ...  
fattore di amplificazione  
del carico  $P$   
si fissa dell'inst. tipologie

$$\text{acciaio} \quad \sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \approx \sqrt{10^4} = 100$$

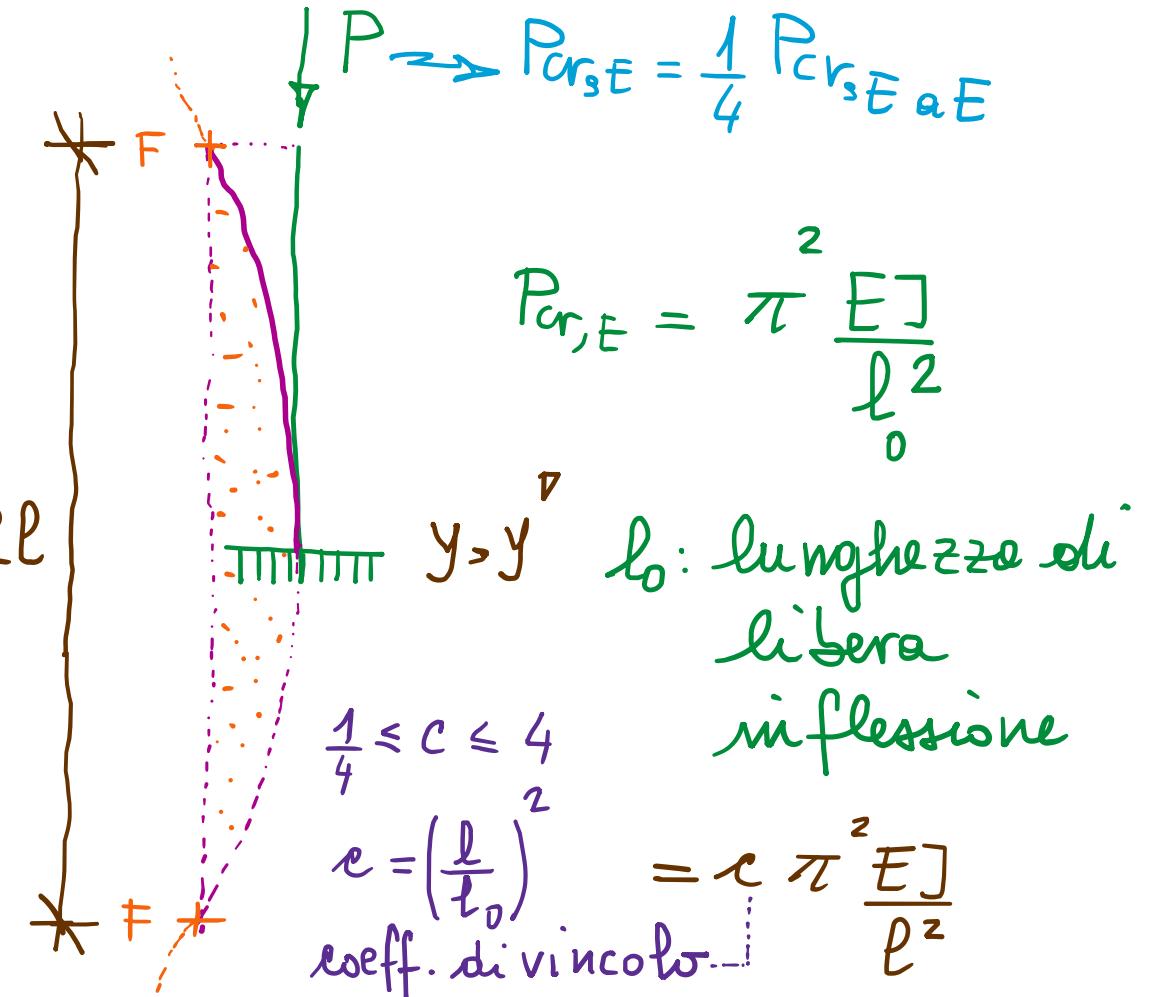
(tabellato per  
varie tipologie)

## Concetti fondamentali :

- Generalizzazione dell'analisi sull'asta di Euler per altre condizioni al contorno (c.c.), cioè di vincolo:



$$P_{cr,E} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad \Rightarrow \quad l_0 = 2l$$



- Estensione per telai (a nodi fissi)
  - Formule di Newmark (vincoli cedevoli elasticamente  $\Rightarrow$  molle rotazionali)
  - Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza)
- } Aste di Euler generolizzata

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_o$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_o} \sigma_o$$

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_{cr}} \sigma \leq \sigma_o \quad (\text{Metodo "omega"}) \Rightarrow \omega \frac{P}{A} \leq \sigma_o$$

$\omega$  coeff. amplificativo di P (ai fini dell'instabilità)

## SOMMARIO (Lec. 21)

- Aste incastrate e generalizzazione ad altre condizioni di vincolo.
- Coefficiente di vincolo, lunghezze di libera inflessione.
- Telei e nodi fissi: effetto flessionale delle travi considerato in molte rotazioni (elementi a deform. elastico concentrato).
- Formule di Newmark per travi appoggiate (errori contenuti).
- Verifica di stabilità (può essere interpretata come verifica di resistenze con carico amplificato di fattore  $\omega \rightarrow$  "Metodo omega").
- Fine Instabilità delle Strutture - (2<sup>a</sup> parte).

Next step: Anelasticità (plasticità) delle Strutture (3<sup>a</sup> parte).  
Comportamento elastoplastico del materiale.