

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

( ICAR/08 - SdC ; 9 CFU )

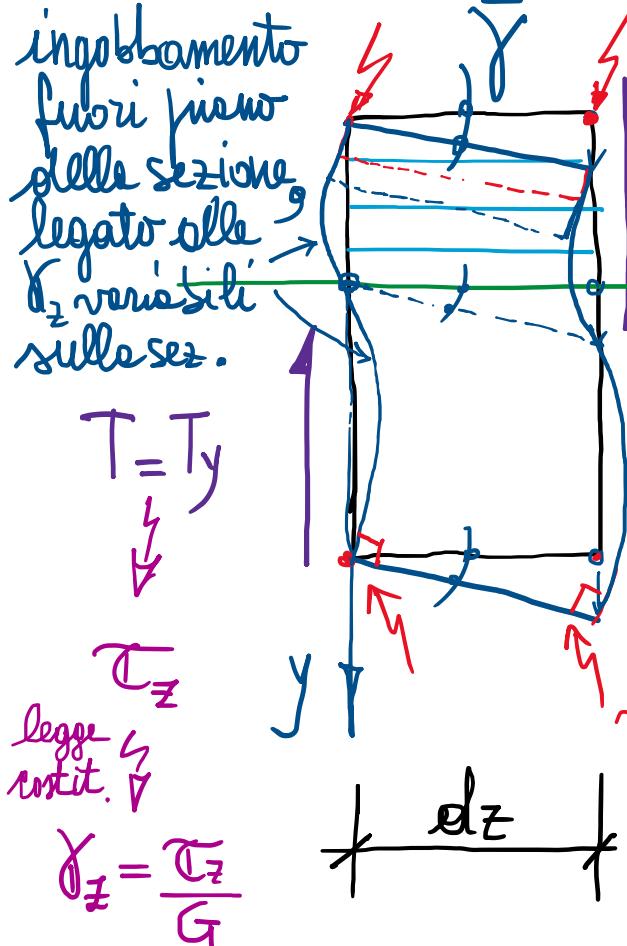
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 23

## - Deformazione del concio di trave dovuta al taglio



$G$ : modulo di elasticità tangenziale o Modulo di taglio

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

materiale:  
- elastico  
- lineare  
- isotropo  $\rightarrow$  2 parametri

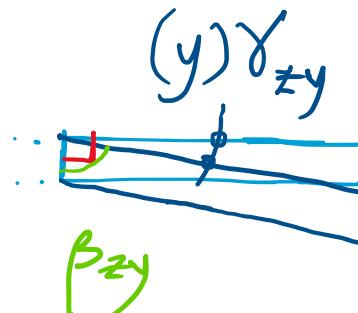
$$\gamma_{xy} = 0 \quad (\tau_{xy} = 0)$$

$$T = T_y$$

$$dM_x = T_y dz$$

$$dt_y = \bar{\gamma} dz$$

scorrimento angolare medio



variazione di angolo retto tra fibre iniziali.

↓ scorimento angolare ( $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ ;  
 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$ )

$$= \frac{\pi}{2} - \beta_{xy}$$

- Se  $\gamma_{xy}$  fosse costante in  $y$ , la deformazione del concio sarebbe "autosomigliante" a quella, costante, di ogni "striscioline" ideale, e si verrebbe a produrre solo uno scorrimento relativo dt delle facce di destra rispetto a quelle di sinistra.

- Poiché  $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(y)$  risulta variabile lungo la sezione, da  $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} > \text{con } \tau_{xy}(y)$ , secondo ad es., le formule di Jouravsky, si valuta  $\gamma$



$\gamma_{xy} \uparrow$  (veloz medio)

• Valutazione dello scorrimento medio via PLV : [effetti taglienti]

$$\frac{d\bar{t}_e}{dz} = T_y \frac{dt}{dz} = \int_A \bar{\tau}_z \cdot \gamma_z dA \cancel{= \frac{d\bar{t}_i}{dz}} \quad \bar{\tau}_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}; \quad \gamma_z = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \frac{\tau_{zy}}{G} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\tau} = \frac{T_y}{GA^*} = \frac{dt}{dz}$$

$$\tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy} \Leftrightarrow \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \Phi : \mathbb{E}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{T_y}{GA^*} = \frac{dt}{dz}$$

$$\frac{1}{G} \left( \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 \right) = \frac{\tau_z^2}{G}$$

Soluz. di Joukowski

$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \tau_{zy}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} \right)^2 \right] dA$$

$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \frac{S_x''(y)}{b(y)^2} \left( 1 + \frac{4 \tan^2(y)}{b^2(y)} x^2 \right) dA$$

$$dt = \mu \frac{T_y}{GA} \frac{1}{\gamma}$$

$\mu$ : fattore di taglio delle sez. trasv.  $\geq 1$

rigidezza tagliente,  $A^* = \frac{A}{\mu}$  area ruotata  $\Rightarrow dt = \frac{T_y}{GA^*} dz$

$GA^*$  rigidezza tagliente efficace.

$$\tau_z = \|\bar{\tau}_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_z^2 = \|\bar{\tau}_z\|^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2$$

$$\tau_{zy}(y) = \frac{T_y S_x''(y)}{J_x b(y)}$$

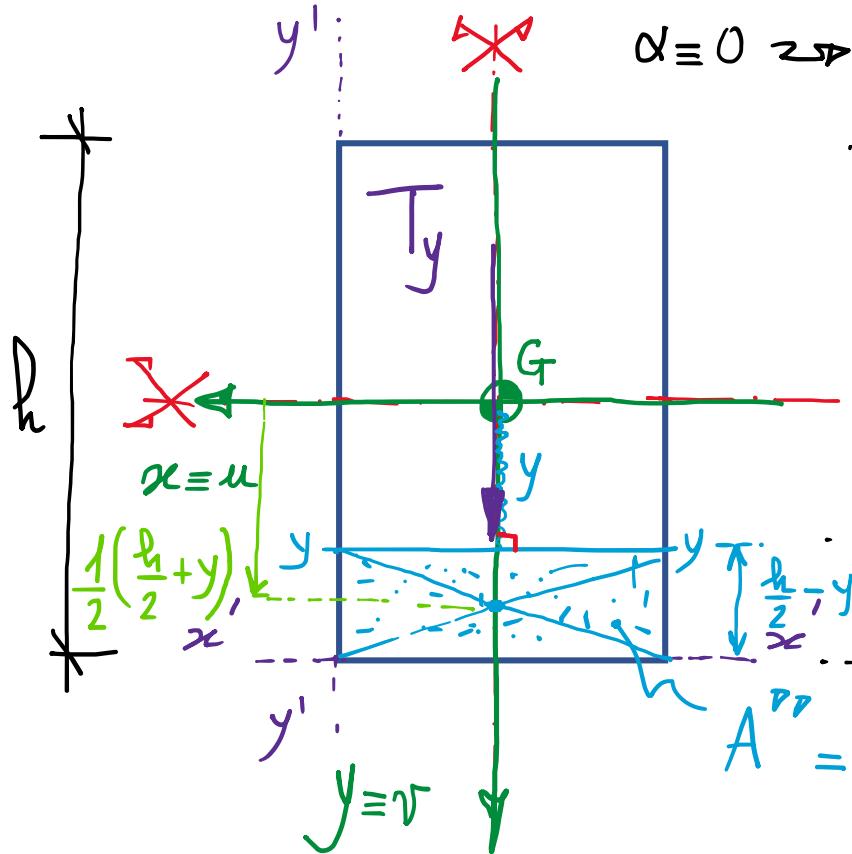
$$\tau_{zx}(x; y) = -\frac{2 \tan(y)}{b(y)} x$$

formule di Joukowski

interv.  $dt = \frac{T_y}{GA^*} dz$

pusm  $G A^*$

- Caso delle sezioni rettangolari: (sez. strettamente simmetrica)



$$A = bh$$

$$\begin{aligned} J_x' &= \iint_A y'^2 dA = \int_0^b \frac{y'^3}{3} \Big|_0^h dx' \Rightarrow J_x' = \frac{1}{12} bh^3 \\ &= \frac{1}{3} bh^3 \end{aligned}$$

$$J_x = J_x' - Ad_c^2 = \frac{1}{3} bh^3 - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) bh^3 = \frac{4-3}{12} bh^3$$

*andamento parabolico*

$\alpha = 0 \Rightarrow T_{zx} = 0$

$T_{zy}(y) = \frac{J_y}{J_x} S_z''(y) = \frac{J_y}{J_x b} S_z''(y)$

$S_z''(y) = A' \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)$

$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$

*parabolica*

$(0 \text{ per } y = \pm \frac{h}{2})$

$f.n.e \text{ peri } m.y$

$\bar{T}_{zy} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} = 1.5 \bar{\tau}_{zy}$

$\bar{T}_{zy}(y) = \frac{J_y}{12bh^3} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$

$\bar{\tau}_{zy} = \frac{1}{bh} \int_{-h/2}^{h/2} T_{zy} b dy$

*valore medio*

$= \frac{6}{bh^3} \frac{T_y}{12} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \underbrace{(y/h/2)}_2^2$

$= \frac{3}{bh^3} \frac{6}{5} \frac{T_y}{12} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$

$M = \frac{6}{5} \frac{T_y}{bh}$

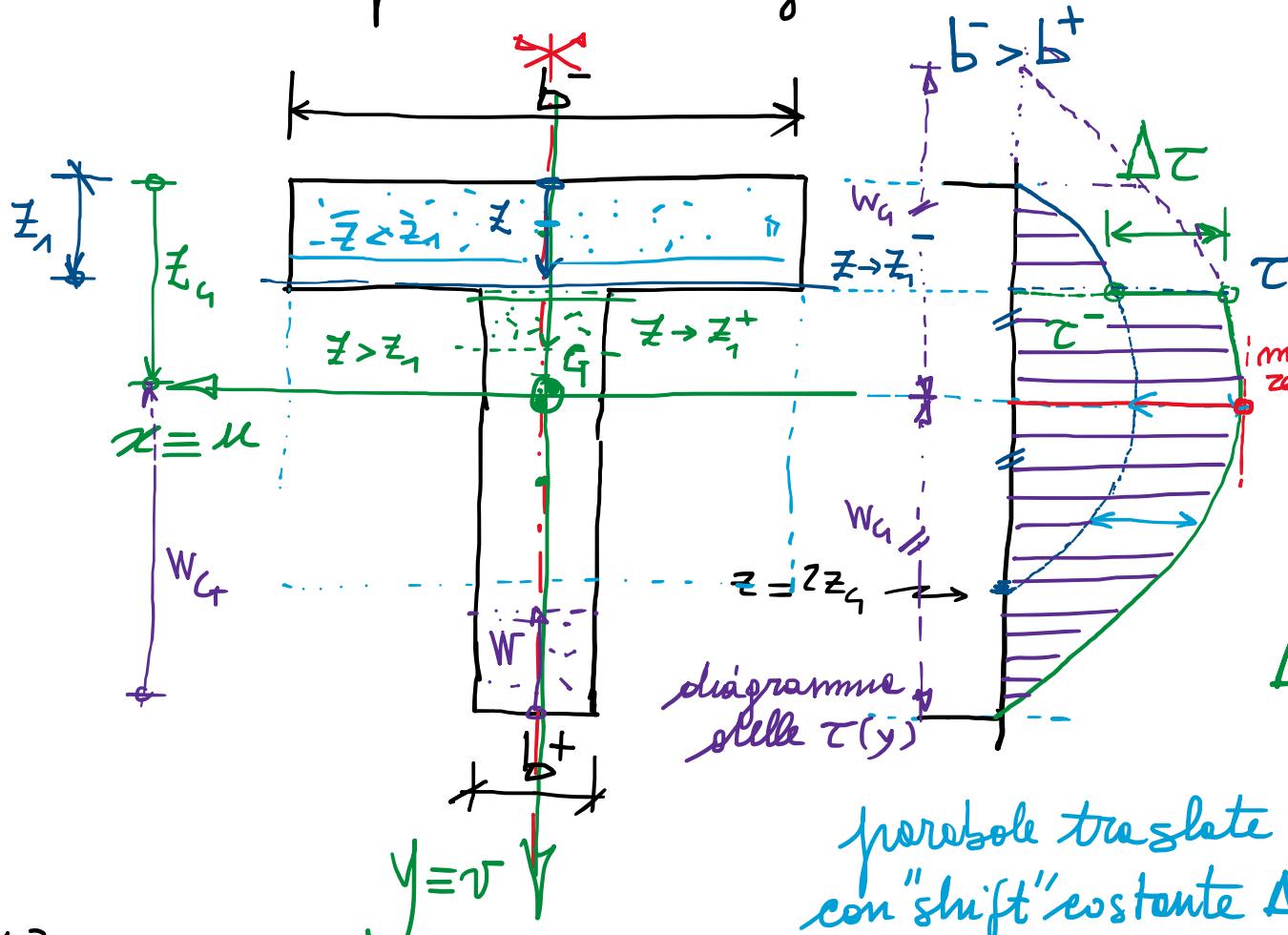
*fattore di taglio*

$= \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$

$\frac{d}{dy} = -4 \frac{2y}{h^2} \text{ lin.}$

$S_z'' = bh \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^3}{8}$

- Sezioni composte da rettangoli elementari:



$$z = z_1$$

$$\bar{\tau}^- = \frac{TS_1}{Jb^-} \quad ; \quad \bar{\tau}^+ = \frac{TS_1}{Jb^+}$$

discontinuità delle larghezze  
delle corde  $\Delta b = b^- - b^+$

discontinuità "salto" delle  $\tau$

$$\begin{aligned}\Delta \tau &= \bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^- = \frac{TS_1}{J} \left( \frac{1}{b^+} - \frac{1}{b^-} \right) \\ &= \frac{TS_1}{J} \frac{b^- - b^+}{b^+ b^-} = \frac{TS_1}{J} \frac{\Delta b}{b^+ b^-}\end{aligned}$$

$$= \bar{\tau}^- \frac{\Delta b}{b^+} = \bar{\tau}^+ \frac{\Delta b}{b^-}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}^- b^- &= \bar{\tau}^+ b^+ \quad ; \quad \frac{\bar{\tau}^+}{\bar{\tau}^-} = \frac{b^-}{b^+} \\ \bar{\tau}^+ &= \frac{b^-}{b^+} \bar{\tau}^-\end{aligned}$$

parbole traslate  
con "shift" costante  $\Delta z$

$+ \frac{b^- - b^+}{\Delta b} z_1 \left( z_1 - \frac{z_1 - z}{2} \right)$  "shift" costante

$$\begin{aligned}S_x &= b^- z_1 \left( z_1 - \frac{z_1 - z}{2} \right) \sim z^2 \\ &\quad - stessa\ funzione \\ S_x &= b^- z_1 \left( z_1 - \frac{z_1 - z}{2} \right) + b^+ \left( z - z_1 \right) \left( z_1 - \frac{z_1 - z}{2} \right) \sim z^2 \\ &\quad + stessa\ funzione \\ &\quad + b^+ \left( z - z_1 \right) \left( z_1 - \frac{z_1 - z}{2} \right) - b^+ z_1 \left( z_1 - \frac{z_1 - z}{2} \right)\end{aligned}$$

## Risoluzione struttura:

- AC (iso + iper)
- RT ( $RT_{iso} + RT_{iper}(X)$ )  $\leftrightarrow$  equilibrio ✓
- $N, T, M$  iso  $\rightarrow$  verifica degli equil. nodali in scale, stesse scale
- analisi sottostrutt. iperstatica col PLV  $\rightarrow$   $X_{PLV}$
- $RV(\leftarrow X)$  finali  $\rightarrow N, T, M$  iper
- " " " " " con LE  $\rightarrow$   $X_i, y_i(x_i)$
- valutazione di spost. di interesse (nel sist. globale  $y, v$ ,  $x, u$ )
- tracciamento delle deformate qualitativa  $\leftrightarrow$  guardando  $M$
- calcolo degli spostamenti col PLV

