Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

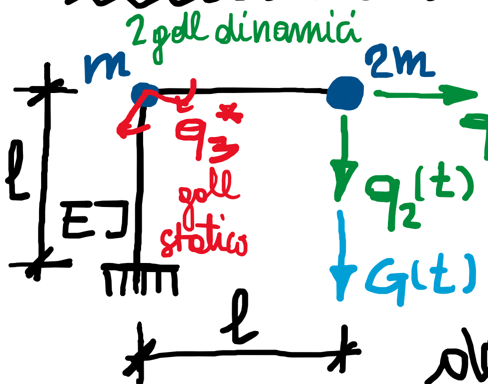
A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Esempio 2DOF → Modi principali di vibrazione:



$$\underset{2\times2}{\mathbb{M}} = m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}; \quad \underset{2\times2}{\mathbb{K}} = \frac{6}{7}\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

matrice di massa — matrice di rigidezza

$$\mathbb{K}\,\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\phi_i$$

ω_i: pulsazione naturale

ϕ_i: forma modale

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\,\phi_i = 0$$

$$\det\left(\frac{6}{7}\frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \omega_i^2 m \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{sse} \Leftarrow$$

pb. agli autovalori generaliz. associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ (simmetriche e definite positive).

$$\lambda_i = \omega_i^2 \frac{m\ell^3}{EJ} \quad [t]^2$$

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}}$$

$K \sim EJ/\ell^3$

$m \sim m$

$\omega^2 \sim \frac{K}{m} \sim \frac{EJ}{m\ell^3} \quad \frac{1}{[t]^2}$

λ_i numero puro

$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{48}{7} - 3\lambda_i & -\frac{18}{7}\\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7} - 2\lambda_i\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{48}{7} - 3\lambda_i\right)\left(\frac{12}{7} - 2\lambda_i\right) - \frac{18^2}{7^2} = 0$$

$$(48 - 21\lambda_i)(12 - 14\lambda_i) - 18^2 = 0$$

$$\cancel{3}(16 - 7\lambda_i)\,\cancel{2}(6 - 7\lambda_i) - 18\cdot\cancel{6}\cdot 3 = 0$$

$$\cancel{7}\cdot 7\lambda_i^2 - \cancel{7}\underbrace{(16+6)}_{22}\lambda_i + \underbrace{16\cdot 6 - \overset{9\cdot 2}{18}\cdot 3}_{(16-9)\,6 \;\; \cancel{7}} = 0$$

eq.ne caratteristica (2° grado)

$$\boxed{7\lambda_i^2 - 22\lambda_i + 6 = 0} \Leftarrow$$

soluzione analitica

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \mp \sqrt{121 - 42}}{7} = \frac{11 \mp \sqrt{79}}{7} = \begin{cases}\lambda_1 = .3017\\ \lambda_2 = 2.841\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_1 = .5493\\ \omega_2 = 1.686\end{cases}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell^3}}$$

I modo di vibrare

II modo " "

[rad/s] pulsazioni proprie (freq. proprie $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ [Hz])

- Autovettori: $i=1,2$

N.B.: due eq.ni linearmente dipendenti per $\lambda=\lambda_i$ $(i=1,2)$

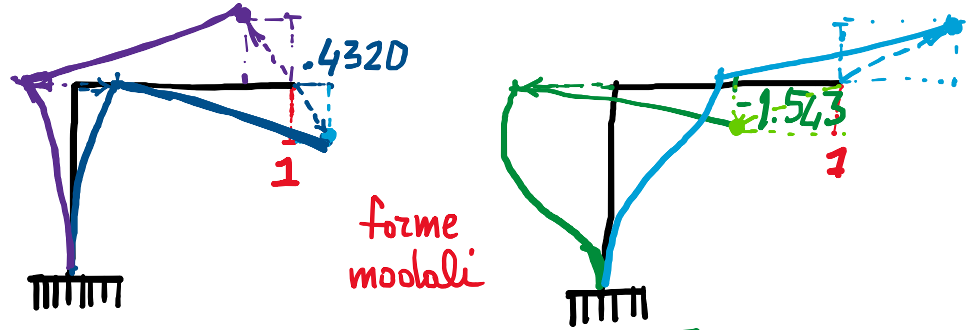
$$\begin{bmatrix} \frac{48}{7}-3\lambda_i & -\frac{18}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{12}{7}-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\phi_{i1}\\ \phi_{i2}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow -\frac{\cancel{18}^{\,9}}{7}\phi_{i1} + \cancel{2}\left(\frac{6}{7}-\lambda_i\right)\phi_{i2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi_{i1}}{\phi_{i2}} = \frac{\frac{6}{\cancel{7}} - \frac{7}{\cancel{7}}\lambda_i}{\frac{9}{\cancel{7}}} = \frac{6-7\lambda_i}{9}$$

ad es., dalla 2ª eq.ne

$i=1,\ \underset{.3017}{\lambda_1} \Rightarrow \dfrac{\phi_{11}}{\phi_{12}} = .4320$ $\Rightarrow$ $\Phi_1 = \begin{Bmatrix} .4320 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$i=2,\ \underset{2.841}{\lambda_2} \Rightarrow \dfrac{\phi_{21}}{\phi_{22}} = -1.543$ $\qquad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.543 \\ 1 \end{Bmatrix}$

normalizzazione con $\phi_{i2}=1$



forme modali

I modo ω_1 (utili i momenti modali $M_i(x)$) II modo ω_2

(definite a meno di un fattore di proporzionalità arbitrario)

- Altre normalizzazioni:

• $\|\Phi_i\| = 1$ norma unitaria $\quad \Phi_i = \alpha_i \begin{Bmatrix}\phi_{i1}\\ 1\end{Bmatrix}, \quad \alpha_i = \dfrac{1}{\|\Phi_i\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\phi_{i1}^2}} \quad \left(\Phi_i \Rightarrow \dfrac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}\right)$

$\Rightarrow \Phi_1 = \begin{Bmatrix} .3966 \\ .9180 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} -.8392 \\ .5439 \end{Bmatrix}$

• $\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = M_i = \begin{cases} 1 \\ m \end{cases} = \beta_i \{\phi_{i1}\ \ 1\}\, m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \beta_i \begin{Bmatrix}\phi_{i1}\\ 1\end{Bmatrix}$

masse modali unitarie (o valore specifico, es. m)

$= \beta_i^2 \{\phi_{i1}\ \ 1\}\, m \begin{Bmatrix} 3\phi_{i1} \\ 2 \end{Bmatrix}$

$= m\beta_i^2 (3\phi_{i1}^2 + 2) \Rightarrow \beta_i = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \dfrac{1}{\sqrt{3\phi_{i1}^2+2}}$

se $M_i = m$

$\Phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} .2700 \\ .6250 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} -.5103 \\ .3307 \end{Bmatrix}$

se $M_i = 1$

- Coordinate principali:

somma su tutti i modi

$$q = \Phi p = [\phi_1 \ \phi_2]\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = \sum_i \phi_i p_i$$

$$\Phi \Phi^{-1} = I_{2\times 2}$$

$$\Phi^T M q = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} p$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} .2700 & -.5103 \\ .6250 & .3307 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_1 = .2700\, p_1 - .5103\, p_2 \\ q_2 = .6250\, p_1 + .3307\, p_2 \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} .8101 & 1.250 \\ -1.531 & .6614 \end{bmatrix}$$

- Relaz. inversa:

$$p = \Phi^{-1} q = (\underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m})^{-1} \Phi^T M q \Rightarrow p_i = \frac{\phi_i^T M q}{M_i} \rightarrow \begin{cases} p_1 = .8101\, q_1 + 1.250\, q_2 \\ p_2 = -1.531\, q_1 + .6614\, q_2 \end{cases}$$

$$M_i = \phi_i^T M \phi_i$$

$$M = \cancel{m}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\phi_i^T \cancel{m} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}}{\cancel{m}} = \phi_i^T \begin{Bmatrix} 3q_1 \\ 2q_2 \end{Bmatrix} = 3\phi_{i1} q_1 + 2\phi_{i2} q_2$$

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto:

$$m = m I; \quad K = \Phi^T K \Phi = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} \underbrace{.3017}_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \underbrace{2.841}_{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T (K\Phi = M \Phi \Omega^2)$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = m^{-1} K \Leftrightarrow \omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}; \quad \omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$$

$$\begin{cases} m\ddot{p}_1 + \frac{EJ}{\ell^3}\, .3017\, p_1(t) = .2700\, F(t) + .6250\, G(t) = P_1(t) \\ m\ddot{p}_2 + \frac{EJ}{\ell^3}\, 2.841\, p_2(t) = -.5103\, F(t) + .3307\, G(t) = P_2(t) \end{cases}$$

coordin. lagrang. (fisiche)

coord. principali (matematiche)

$$\Rightarrow p(t) \Rightarrow q(t) = \Phi p(t)$$

risposta finale

- Determinazione numerica delle autosoluzioni (metodo iterazione vettoriale inversa)

Forme standard: $\begin{cases} G\,\phi_i = \dfrac{1}{\omega_i^2}\,\phi_i\,; & G = K^{-1}M \\ H\,\phi_i = \omega_i^2\,\phi_i\,; & H = M^{-1}K \end{cases}$

$\phi_i^{(0)} \rightarrow \hat{\phi}_i^{(1)} = G\,\phi_i^{(0)} \dashrightarrow$ conv. a ϕ_1 (primo)

$\hat{\phi}_i^{(1)} = H\,\phi_i^{(0)} \dashrightarrow$ conv. a $\phi_n = \phi_2$ (ultimo)

autov. di tentativo (trial vector)

k iter.

processo iterativo (mediante semplici moltiplicazioni successive)

- Ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT (da inserire ad ogni iterazione per evitare di convergere sugli autovettori già precedentemente determinati).

- Algoritmo iterativo (pseudo-code), di agevole implementazione

- $\phi^{(0)}$ trial vector
- $\hat{\phi}^{(1)} = G\,\phi^{(0)}$ ⟵ l'autovettore si aggiorna mediante semplice moltiplicazione (con G o H)
- $\phi^{(1)} \leftarrow \hat{\phi}^{(1)}$ tramite normalizzazione
- $\omega_{(1)}^2 = \dfrac{\phi^{(1)T} K\,\phi^{(1)}}{\phi^{(1)T} M\,\phi^{(1)}}$ stima dell'autovalore da rapporto di Rayleigh (successiva)
- $\dfrac{|\omega_{(i+1)}^2 - \omega_{(i)}^2|}{\omega_{(i)}^2} \lessgtr tol \simeq 10^{-4} - 10^{-6} \longrightarrow$ end

con G ↑ converge a ϕ_1 (modo 1)

con H ↓ converge a ϕ_n (modo n)

ciclo ("loop")

- Concetti fondamentali (analisi dinamica modale) ⇐ sistemi dinamici lineari tempo-invar.

– Soluzione del pb. agli autovalori "generalizzato" associato alle matrici di rigidezza $\mathbb{K}$ e di massa $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{K}\,\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\,\phi_i \qquad \begin{cases} \lambda_i = \omega_i^2 & \text{autovalori } (\omega_i \text{ pulsazioni proprie o naturali}) \\ \phi_i & \text{autovettori (forme modali)} \end{cases}$$

– forma analitica, solo per n (n. dei gdl dinamici) < 5

autoval. da eq.ne caratteristica di grado n.

autovett. da sist. lin. omogeneo.

– forma numerica, per sistemi generici, aventi anche molti gdl.

– Trasformazione in coordinate principali $p_i(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = \Phi\,\mathbf{p} = \underbrace{[\phi_1 \,\vdots\, \phi_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_i \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_n]}\,\mathbf{p} = \underbrace{\sum_i}_{\text{modi}} \phi_i\,p_i(t)$$

coordinate lagrangiane (di senso fisico)

Φ: matrice degli autovettori (ϕ_i per colonne)

p_i: componente (modale) del vettore $\mathbf{q}$ nella base degli autovettori ϕ_i.

coordinate principali, associate ai modi di vibrare (di significato matematico: coeff. della combinazione lineare dei ϕ_i).

– Conseguente trasformazione in matrici modali (diagonali): $\Rightarrow$ disaccoppiamento delle equazioni del moto

$$\mathbb{M}\,\ddot{q} + \mathbb{K}\,q = \mathbb{Q}(t)$$

$$q = \Phi\, p \quad \frac{\text{trasformaz.}}{\text{di coordinate}} \qquad \Phi = [\phi_i] \text{ matrice degli autovettori (per colonne)}$$

$\Rightarrow$ coerentemente:

$\Omega^2 = \mathrm{diag}[\omega_i^2]$ matrice degli autovalori (diagonale)

$$\mathbb{K}\,\phi_i = \omega_i^2\, \mathbb{M}\,\phi_i = \mathbb{M}\,\phi_i\,\omega_i^2 \quad (\omega_i^2 \text{ scalare})$$

$$\Updownarrow$$

$$\Phi^T \left(\mathbb{K}\,\Phi = \mathbb{M}\,\Phi\,\Omega^2 \right)$$

$$\mathcal{K} = \Phi^T \mathbb{K}\,\Phi = \underbrace{\Phi^T \mathbb{M}\,\Phi}_{\mathcal{M}}\,\Omega^2 = \mathcal{M}\,\Omega^2 \Rightarrow \Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$$

$$\omega_i^2 = M_i^{-1} K_i = \frac{K_i}{M_i}$$

$$\Phi^T \left(\mathbb{M}\,\Phi\,\ddot{p} + \mathbb{K}\,\Phi\,p = \mathbb{Q} \right)$$

$$\underbrace{\Phi^T \mathbb{M}\,\Phi}\,\ddot{p} + \underbrace{\Phi^T \mathbb{K}\,\Phi}\,p = \Phi^T \mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$$

$\mathcal{M} = \mathrm{diag}[M_i]$ $\quad$ $\mathcal{K} = \mathrm{diag}[K_i]$

$$\underbrace{M_i}_{\phi_i^T \mathbb{M}\,\phi_i}\,\ddot{p}_i + \underbrace{K_i}_{\phi_i^T \mathbb{K}\,\phi_i}\,p_i(t) = \phi_i^T \mathbb{Q} = P_i(t)$$

massa modale $\quad$ rigidezza modale

.... n eq.ni del moto disaccoppiate, nelle n coordinate principali $p_i(t)$

(ripetizione, n volte, tante quanti sono i modi, di quanto visto per un sistema SDOF) $\Rightarrow$ interpretazione: sistema MDOF ad n gdl, come n sistemi SDOF, per ciascun modo di vibrare.

$$\Updownarrow$$

ricorda: sistema SDOF $\quad q_1 = u(t)$

$$m\,\ddot{u} + k\,u(t) = F(t)$$

semplice generalizzazione

SOMMARIO (Lez. 13)

- Esempio 2DOF: modi principali di vibrazione.
- Soluzione (analitica) dell'eq.ne caratteristica ⇒ autovalori.
- Determinazione degli autovettori (dal pb. agli autoval. originario), a meno di costante arbitraria.
- Normalizzazione degli autovettori. (⇐ scelta della costante arbitraria)
- Trasformazione in coordinate principali e disaccoppiamento delle eq.ni del moto.
- Calcolo numerico delle autosoluzioni (metodo dell'iterazione vettoriale inversa).

Next step: introduzione dello smorzamento; azioni interne (modali).