

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

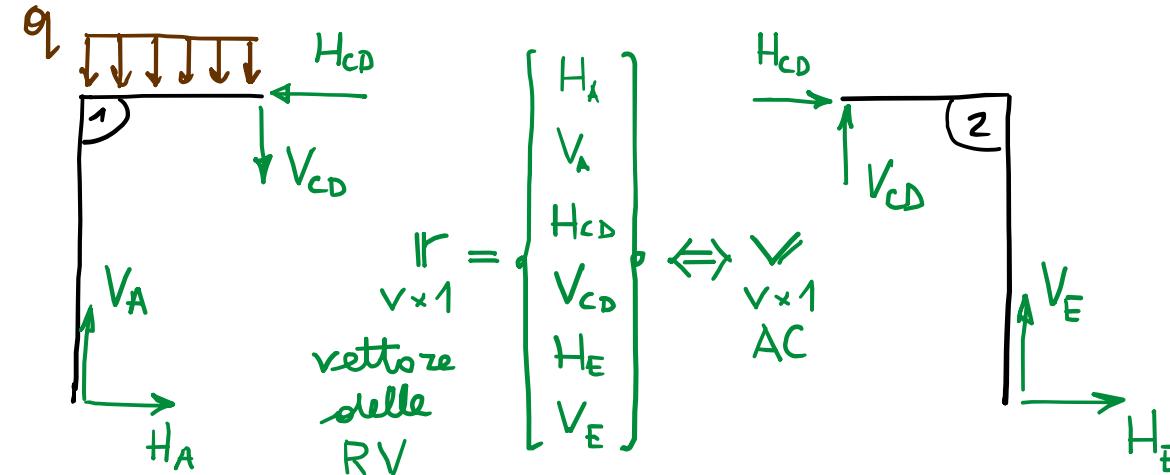
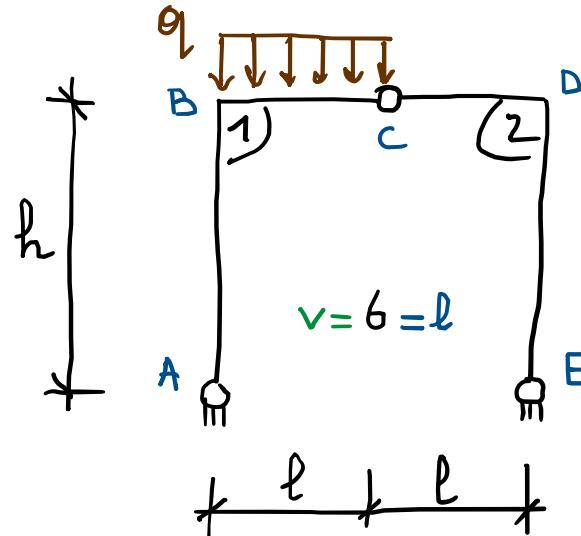
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

Analisi Statica (AS) \Rightarrow trattazione matriciale (implementabile); dualità cinematico/statice

- Approccio completo \Rightarrow rimozione di tutti i gradi ("esplosa")



- Scrittura delle equazioni di equilibrio (\Rightarrow sistema di equilibrio):

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \sum F_x^1 = 0 \Rightarrow H_A - H_{CD} = 0 \\ \sum F_y^1 = 0 \Rightarrow V_A - V_{CD} - ql = 0 \\ \sum M_A^1 = 0 \Rightarrow H_{CD}h - V_{CD}l - \frac{ql^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \sum F_x^2 = 0 \Rightarrow H_E + H_{CD} = 0 \\ \sum F_y^2 = 0 \Rightarrow V_E + V_{CD} = 0 \\ \sum M_E^2 = 0 \Rightarrow -H_{CD}h - V_{CD}l = 0 \end{cases}$$

$(l=3n) \times 1 \Leftrightarrow \$, f$

$$\$ = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -h & -l & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ \frac{ql^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Per risuzione, con le corrispondenze curate:

$$E = C^+ \Leftrightarrow C = E^+$$

dualità

$(C, E \text{ di range pieno, nonsing.})$

$$r = -E^{-1} \cdot f \quad \Leftarrow \quad E \cdot r = -f \quad \Leftrightarrow \quad \$ = E \cdot r + f = 0$$

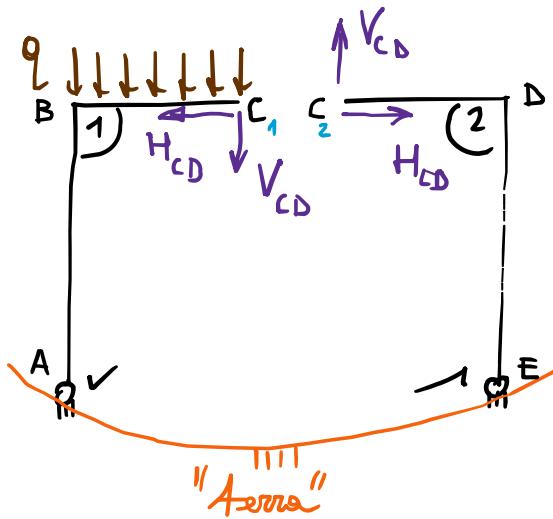
risultante forze

matrice di equilibrio
reattive

attive

Soluz.

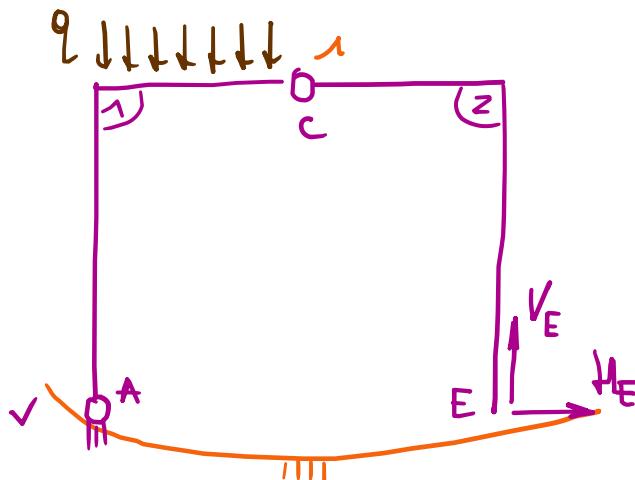
- Analogamente per analisi con sistemi risolti (schemi ad albero):



$$\begin{aligned} \checkmark \sum M_A^1 &= 0 \\ \nearrow \sum M_E^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \begin{bmatrix} h & -l \\ -h & -l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{CD} \\ V_{CD} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ &= \mathbb{E}^r \cdot \mathbf{r}^r + \mathbf{f}^r = 0 \\ &\text{L } \mathbb{C}^T; \text{ sottomatrice di } \mathbb{E} \end{aligned}$$

$$r[\mathbb{E}^r] = 2, \det[\mathbb{E}^r] = -2hl \neq 0$$



$$\begin{aligned} \checkmark \sum M_A^{1+2} &= 0 \\ \nearrow \sum M_C^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \begin{bmatrix} 0 & 2l \\ h & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_E \\ V_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ &= \mathbb{E}^{rr} \cdot \mathbf{r}^{rr} + \mathbf{f}^{rr} = 0 \\ &\text{L } \mathbb{C}^{rrT}; \text{ non sottomatrice di } \mathbb{E} \end{aligned}$$

$$r[\mathbb{E}^{rr}] = 2, \det[\mathbb{E}^{rr}] = -2hl \neq 0$$

$$\text{Sistema di equilibrio } \mathbf{s} = \mathbb{E} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbb{E} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{f}$$

- Esistenza della soluzione (se il sistema è coerente, "consistent") \Leftrightarrow sistema equilibrabile
- Unicità della soluzione (determinazione statica)

- Sistema coerente $\Leftrightarrow r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{E}, -\mathbf{f}]$ (th. di Rouché-Capelli)

non

<

con unica solut. sse $r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{E}, -\mathbf{f}] = v$

infinte

<

deficienza di rango rispetto a v

$$\rightarrow I = N[\mathbb{E}] = v - r[\mathbb{E}] \geq 0$$

$\begin{array}{c} \text{nucleo} \\ \cap \\ \text{rang} \end{array}$

grado di indet.

$\leq \min\{l, v\}$

sist. di
equilibrio

deficienza di rango rispetto a l

grado di indet.
cinem., o di labilità

$$L = N[\mathbb{C}] = l - r[\mathbb{C}] \geq 0$$

sist. di
congruenze

- poichè si è notato, per isezione (poi dim. via PLV) che $\mathbb{E} = \mathbb{C}^T; \mathbb{C} = \mathbb{E}^T \Rightarrow r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{C}] = r$
 \hookrightarrow dualità cinematica / statica

$$I - L = v - \cancel{r} - l + \cancel{r}$$

N.B. gradi di indet. cinematica
elementano gradi di indet.
statica (e viceversa)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} I &= L + v - l \\ L &= I + l - v \end{aligned}}$$

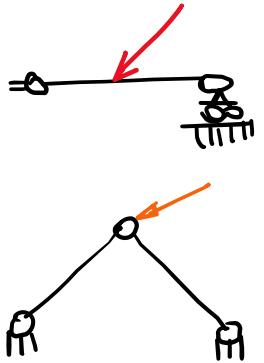
Classificazione

1) $L=0, I=0$

$$r=l \quad r=v \Rightarrow v=l=r$$

square

Strutture
isostatiche
(sistemi cinem.
e statici.
isodeterminati)



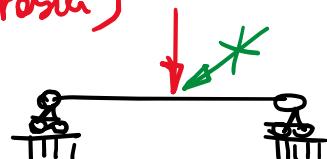
3) $L>0, I=0$

$$r < l \quad r=v \Rightarrow r=v < l$$

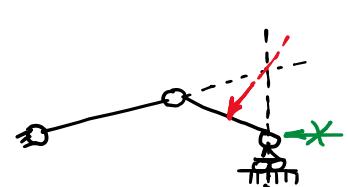
rettangolari

Strutture
ipostatiche (se equilibrabili)

(sistemi cinem.
indet. e statici.
indeterminati)



$L=1$



2) $L=0, I>0$

$$r=l \quad r < v \Rightarrow v > l = r$$

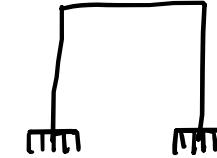
alte basse

rettangolari

Strutture
iperstatiche
(sistemi cinem.
det. e statici
indet.)



$I=1$



$I=3$

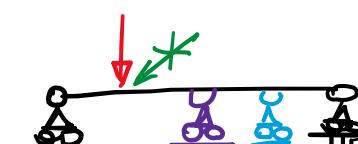
4) $L>0, I>0$

$$r < l \quad r < v \Rightarrow v \leq l$$



$L=2$

Strutture
indeterminate
(sistemi cinem.
e statici
indeterminati)



$v=l \quad I=1$

$v>l \quad I=2$

$L=1$