

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

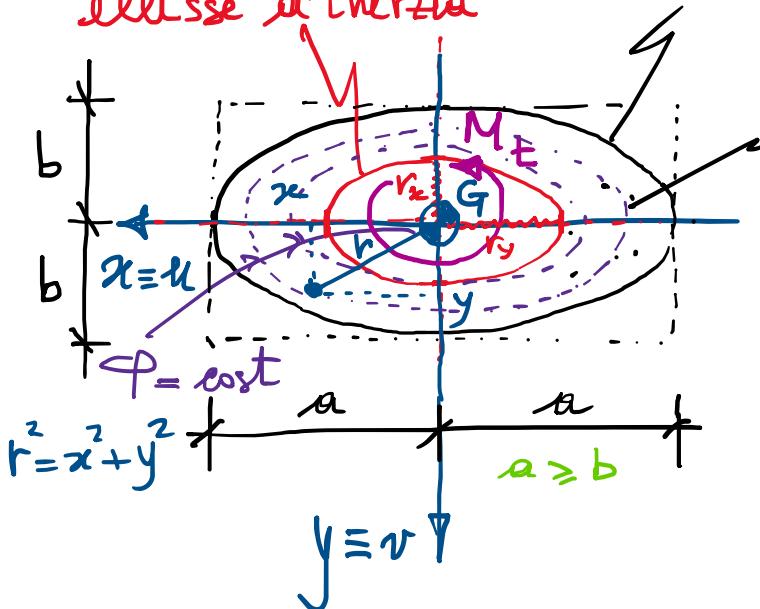
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

Soluzioni analitiche del pb. della torsione

Sezione ellittica ellisse d'inerzia



$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\Gamma: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$A = \int_A dA = \pi ab$$

$$J_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi}{4} a b^3 = \pi a b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = A r_x^2 \Rightarrow r_x = \frac{b}{2}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{4} a^3 b = \pi a b \left(\frac{a}{2}\right)^2 = A r_y^2 \Rightarrow r_y = \frac{a}{2}$$

$$J_G = \int_A r^2 dA = J_x + J_y = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) = A r_G^2 \Rightarrow r_G = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Funzione potenziale di sforzo di Airy: $(\beta = \frac{M_t}{GJ} \Rightarrow c = 2G\beta = 2 \frac{M_t}{J})$

eq. di Poisson con termine noto cost.

$$\Phi = \Phi(x, y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = K \left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} \right) = -2K \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \checkmark \text{ in A}$$

$\Phi = 0$ su Γ c.c. ✓ (Dirichlet)

$\Phi = \text{cost} \Rightarrow$ traiettorie ellittiche

$\Phi \sim x^2, y^2 \Rightarrow$ derivate seconde costanti

$$\Phi_\eta = 0; \eta = 1, J = J_G$$

Sez. circolare (caso particolare): $a = b = R$

$$A = \pi R^2$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$J_G = 2J_x = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$r_x = r_y = \frac{R}{2}; r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$K = \frac{c}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$G\beta = \frac{M_t}{J}$$

• Equivalenza statica:

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_A K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dA = 2K \left(A - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x\right) = 2KA \left(1 - \frac{r_y^2}{a^2} - \frac{r_x^2}{b^2}\right)$$

$$= 2KA \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \cancel{2KA \frac{1}{2}} \Rightarrow K = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{\pi ab} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow J = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

• Momento d'inerzia torsionale (DSV):

$$J = \frac{\pi}{4} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{\pi a b}{\pi^3 a b} = \frac{A^4}{4\pi^2 J_G} = J$$

$$J = \frac{J_G}{\gamma} \quad \begin{matrix} \pi^2 \approx 10 \\ 4\pi^2 \approx 40 \end{matrix}$$

$$J_G = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2); A = \pi a b$$

$$\begin{matrix} a=b=R, J = \pi \frac{R^6}{2R^2} = \frac{\pi R^4}{2} \\ \checkmark = J_G (\gamma=1) \end{matrix}$$

formule utili a stimare il momento d'inerzia di sezioni compette quali sez. ellittiche equivalenti di perimetro A e J_G .

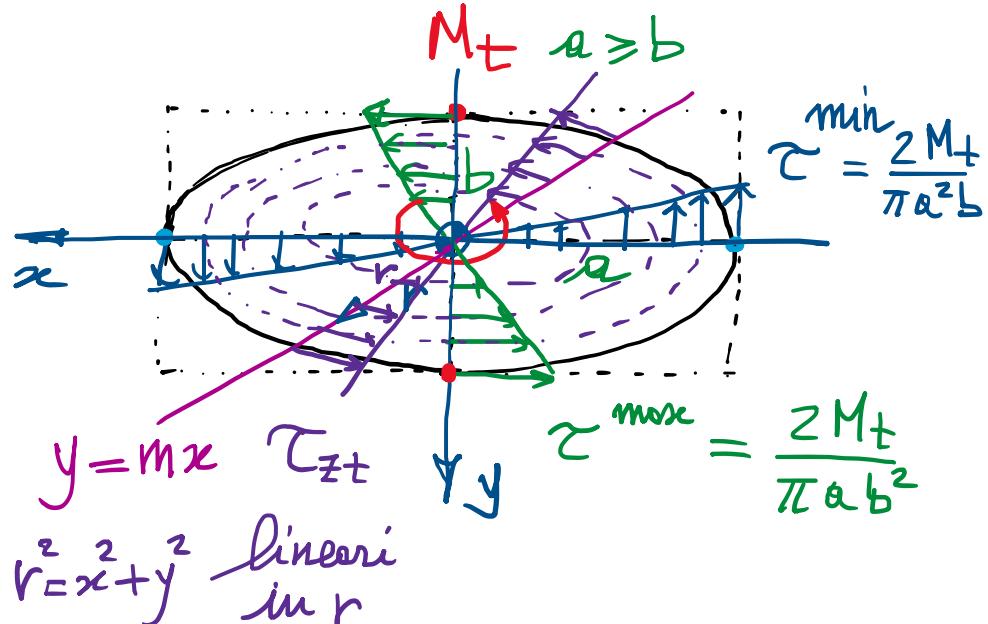
• Fattore di torsione

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{J_G}{J} = \frac{a^2 + b^2}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab + 2ab)^2}{4a^2 b^2} \\ &= \frac{[2ab + (a-b)^2]^2}{(2ab)^2} = \left[1 + \frac{(a-b)^2}{2ab}\right]^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \text{sez. ell.}: \quad \begin{matrix} \gamma = \frac{J_G}{J} \approx \frac{J_G}{\frac{A^4}{40 J_G}} = 40 \frac{J_G^2}{A^4} = 40 \left(\frac{J_G}{A^2}\right)^2 \\ a=b=R \quad \gamma=1 \quad (J=J_G) \end{matrix} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

- Campo delle tensioni tangenziali:

$$\Phi = \frac{M_t}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \text{f. ne di AIRY}$$

$\underbrace{\Phi}_{A}$



Tangenti alle traiettorie ellittiche e parallele
di distanze radiali r
(con modulo crescente
linealmente con r)

$$\begin{cases} T_{zx} = \Phi_s y = - \frac{2 M_t}{\pi a b^3} y = - \frac{2 M_t}{\pi a b} \frac{y}{b^2} \\ T_{zy} = -\Phi_s x = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b} x = \frac{2 M_t}{\pi a b} \frac{x}{a^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{zy}}{T_{zx}} &= - \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} && \text{lineari in } x, y \\ &= - \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{m} = \text{cost, lungo diametro } y = m x \end{aligned}$$

$$\tau_z = \| \tau_z \| = \sqrt{\tau_{zz}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2 M_t}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

$$\text{su } y = mx = \frac{2 M_t}{\pi a b} x \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{m^2}{b^2}} \quad \begin{array}{l} \text{lineare in } x \\ \text{in } y \end{array}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1+m^2)x^2$$

$$r = \sqrt{1+m^2} x$$

Sez. circolare $a=b=R$ \therefore in r

$$\begin{aligned} \tau_{zt} &= \frac{2 M_t}{\pi R^4} r, \quad \tau_{zt}^{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \\ &= \frac{M_t}{J_4} r \end{aligned}$$

- Funzione di ingolamento (ψ_G):

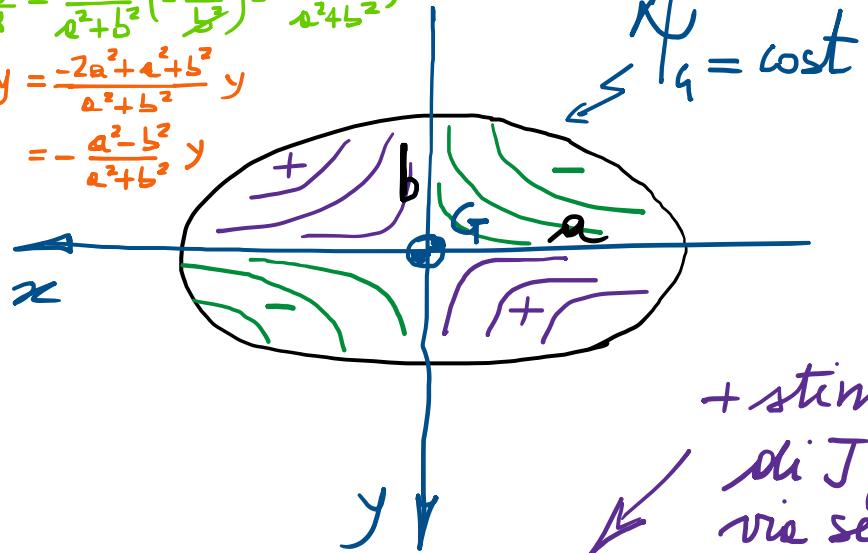
$$\begin{cases} \psi_{G,x} = \frac{1}{4\beta} \varphi_{xy} + y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y \\ \psi_{G,y} = -\frac{1}{4\beta} \varphi_{yx} - x = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x \end{cases}$$

$$\frac{\varphi}{4\beta} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$\text{es. } \frac{\varphi_{xy}}{4\beta} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{2y}{b^2} \right) = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} y$$

$$+ y = -\frac{2a^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2} y$$

$$= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y$$



iperboloido
iperbolico

+ stime approssimate
di J per sezioni compatte
via sez. ellittica equiv.

Quindi: sez. ellittica costituisce caso rilevante con
soluzione analitica in forme chiuse esatte
(contenente il caso della sez. circolare come caso particolare).

differenziale delle f.n. $\psi_G(x, y)$

$$\begin{aligned} d\psi_G &= \psi_{G,x} dx + \psi_{G,y} dy \\ &= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (y dx + x dy) \\ &\quad \int d(x \cdot y) \end{aligned}$$

integrandi:

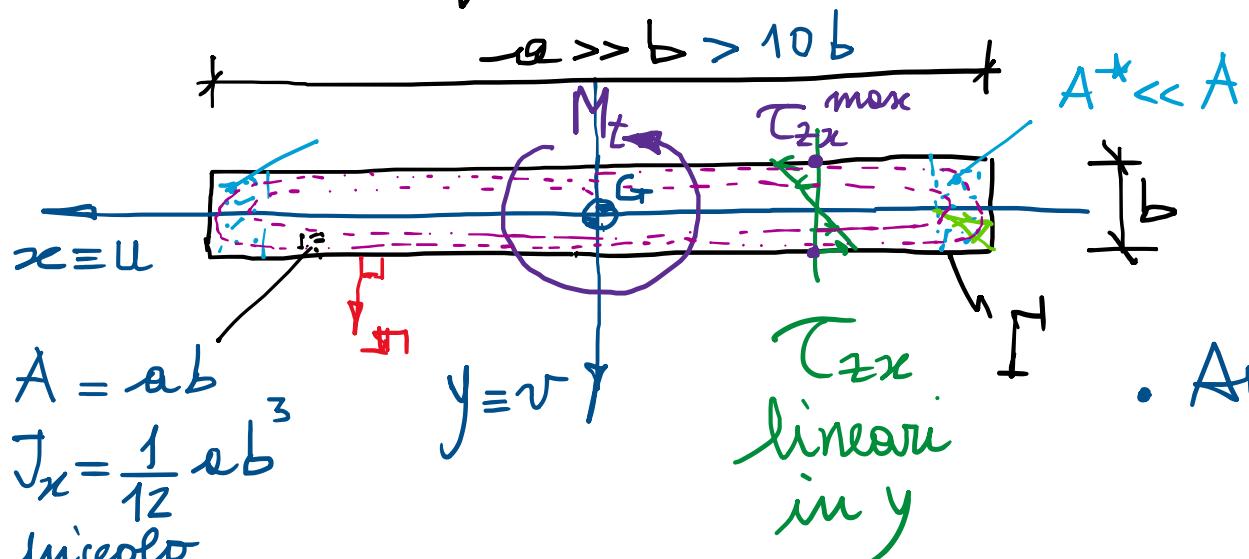
$$\psi_G(x, y) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \text{cost}$$

N.B. Sez. circolare ($a = b = R$)

$\psi_G = 0$, non c'è ingolamento

$$\eta = 1, J = J_G = \frac{\pi R^4}{2}$$

Profilo rettangolare sottile (soluzione analitica approssimata)



Eq. governanti (torsione):

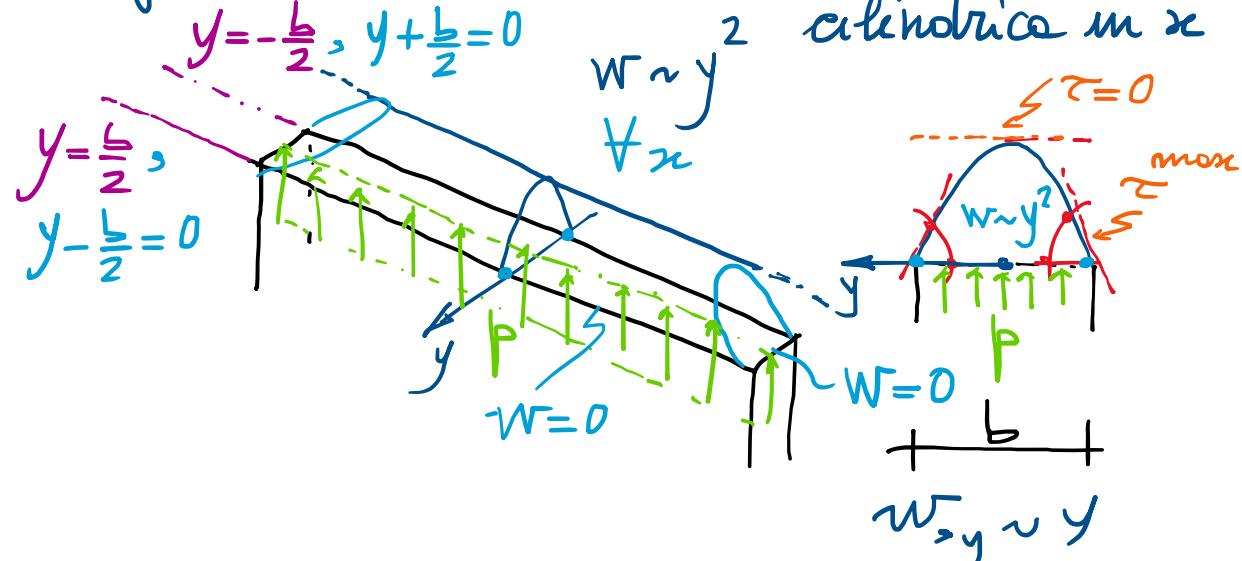
equil. $\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$ in A ✓

congrz. $\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c$ in A ✓

r.e. $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su M ✓

- Analogie idrodinamica: $(\frac{b}{a} \rightarrow 0; \frac{L}{b} \rightarrow \infty)$
 $\tau_{zx} = -cy$; $\tau_{zy} = 0$ in $A - A^*$
 lineari sullo spessore

Analogie delle membrane: sostanzialmente cilindrica in x



- Campo delle tensioni tangenziali valvole in quasi tutto il profilo rettangolare sottile, salvo nelle zone in corrispondenza delle estremità, di piccola estensione A^* (con τ_z stessa dello stesso ordine di grandezza) \Rightarrow soluzione approx.

- Funzione di sforzo: *eq. m. rette lati lunghi*

$$\text{f. di AIRY} \quad \varphi = \varphi(y) = K \left(\frac{b}{2} + y \right) \left(\frac{b}{2} - y \right) = K \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ su } \Gamma - \Gamma^*$$

$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{yy} = -2K \stackrel{\checkmark}{=} -c \Rightarrow K = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J} \Rightarrow J = \frac{M_t}{K}; M_t = KJ$$

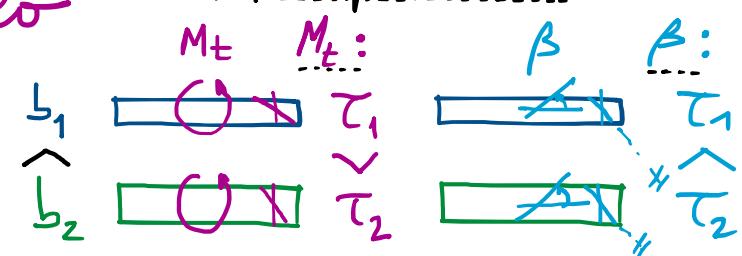
$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2K \int_A \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) dA = 2K \left(\frac{b^2}{4} A - J_x \right) = 2K \left(\frac{3}{3} \frac{ab^3}{4} - \frac{ab^3}{12} \right) = \cancel{2K} \frac{ab^3}{\cancel{6}3}$$

$$= K \underbrace{\frac{1}{3} ab^3}_{J} = KJ$$

$$J = \frac{1}{3} ab^3 = 4 J_x \quad \sim b^3 \text{ piccolo}$$

momento d'inerzia torsionale
di sezione rettangolare sottile

cf. a parità di:



- Campo delle τ_{zx} :

$$\varphi = \underbrace{\frac{3M_t}{ab^3}}_{\frac{M_t}{J} = G\beta} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\frac{6M_t}{ab^3}y = -2\frac{M_t}{J}y \Rightarrow \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx}^{\max} &= \left| -\frac{6M_t}{ab^3} \left(\pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{3M_t}{ab^2} \\ &= \frac{M_t}{J} b = G\beta b \end{aligned}$$

- Equivalenza statica delle τ_{zx} :

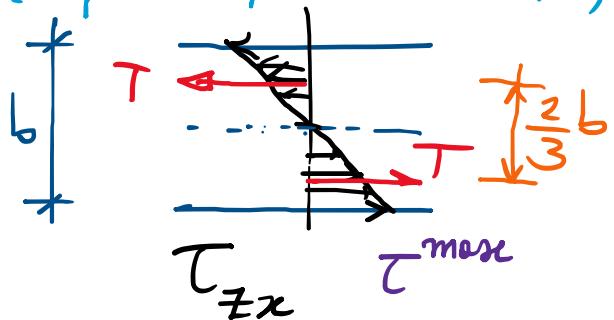
$$\int_A -\tau_{zx} y \, dA = \int_A +\frac{2M_t}{J} y^2 \, dA = \frac{2M_t}{J} \underbrace{\frac{J}{4J_x}}_{=4J_x} = \frac{M_t}{2}$$

$A^* \ll A$

τ_{zx} $\tau_{zx} \approx \frac{M_t}{2}$

(v. L. Corradi)

Derivezione "diretta" di τ^{\max}
(sappiamo l'equiv. di $\tau_{zx} \approx M_t/2$)



$$T = \frac{1}{2} \frac{b}{2} \tau^{\max} a = \frac{ab}{4} \tau^{\max}$$

$$\frac{M_t}{2} = T \cdot \frac{2}{3} b = \frac{ab}{4} \tau^{\max} \cancel{\frac{2}{3} b}$$

L'Att.: equivalenza a metà M_t

- Funzione di ingombramento:

$$\begin{cases} \psi_{G_3x} = \frac{1}{4\beta} \varphi_s y + y = \frac{1}{4\beta} (-2\varphi_s y) + y = -y \\ \psi_{G_3y} = -\frac{1}{4\beta} \varphi_s x - x \end{cases} \Rightarrow d\psi_g = -y \, dx - x \, dy \Rightarrow \psi_g(x, y) = -xy + \text{const} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \psi_g^{\text{ell}} \quad \bar{\psi}_g = 0$$

Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti alle metà del momento torcente

L'altra metà di M_t sarà legata alle τ^* nelle zone A^* (stesso ordine di grandezza ma bracci di leva in direz. x lunghi dell'ordine di a).

$$\tau^{\max} = \frac{3M_t}{ab^2}$$

(esse x)
 $y=0 \rightarrow \psi_g=0$
no in problem.
lungo l'asse x
trascurabile sulla
spessore ($y^{\max} = \frac{b}{2}$)
 $\psi_g(x, y) = -xy + \text{const}$
 $= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \psi_g^{\text{ell}}$ $\bar{\psi}_g = 0$