Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

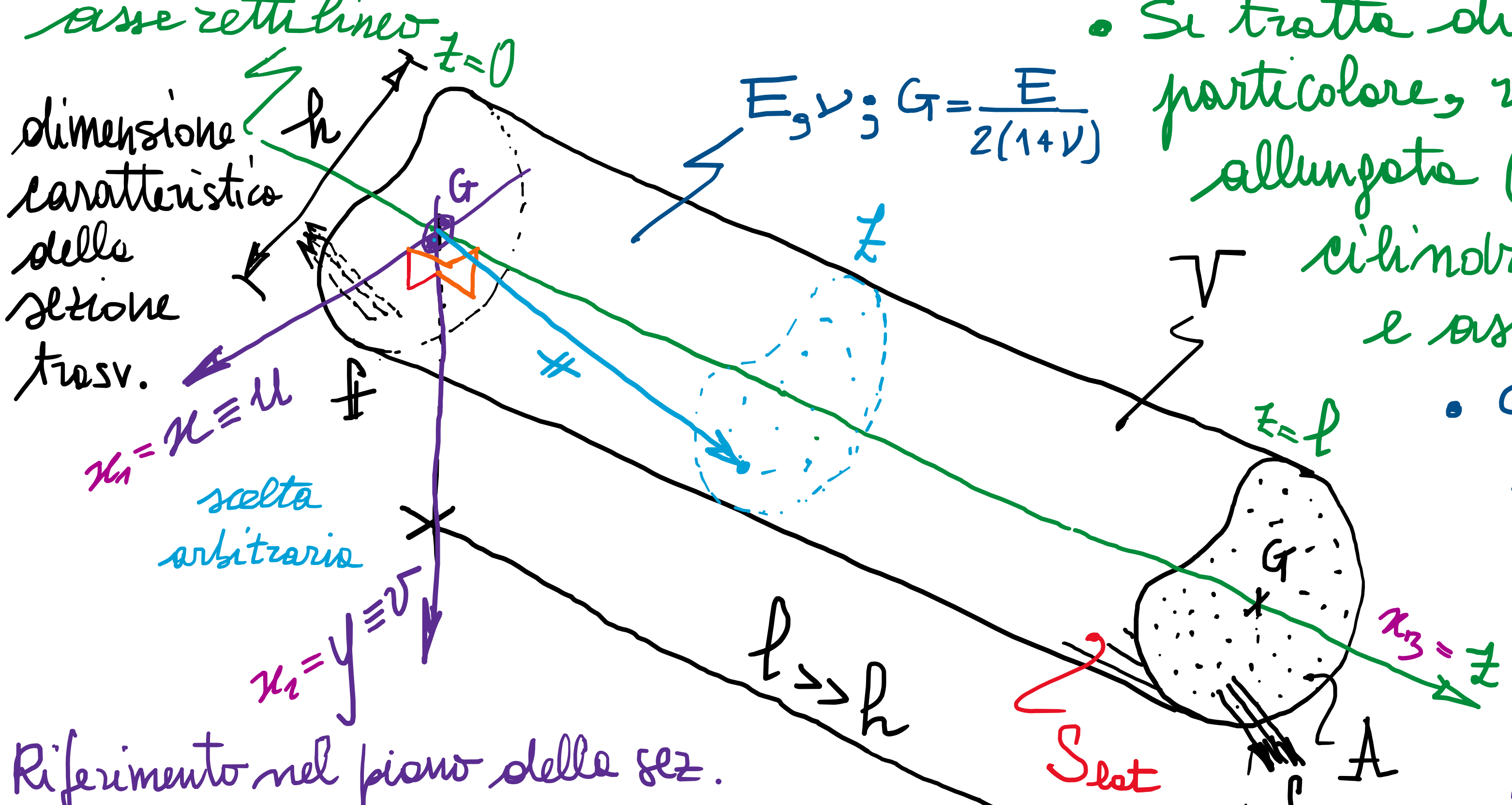
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problema di de Saint Venant (~1855) – Ipotesi e definizioni:

Casi di DSV: $N, T, M; M_t$



- Si tratta di un problema elastico lineare particolare, riguardante un solido di forma allungata ($\ell >> h$; $\ell > 10h$), "tipo trave", cilindrico, a sezione costante di area A e asse rettilineo.
- Composto da materiale elastico lineare isotropo, omogeneo: $E, \nu; G$ costanti in $x \in V$.
- Privo di vincoli esterni ($S_s \equiv \emptyset$) (spostamenti noti a meno di moti rigidi).
- Privo di forze di volume ($\mathbb{F} = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ($f = 0$ su S_{lat}).
- Soggetto a sole forze di superficie f agenti sulle basi, note in termini di risultanti e tali da formare un sistema autoequilibrato.

Riferimento nel piano della sez.

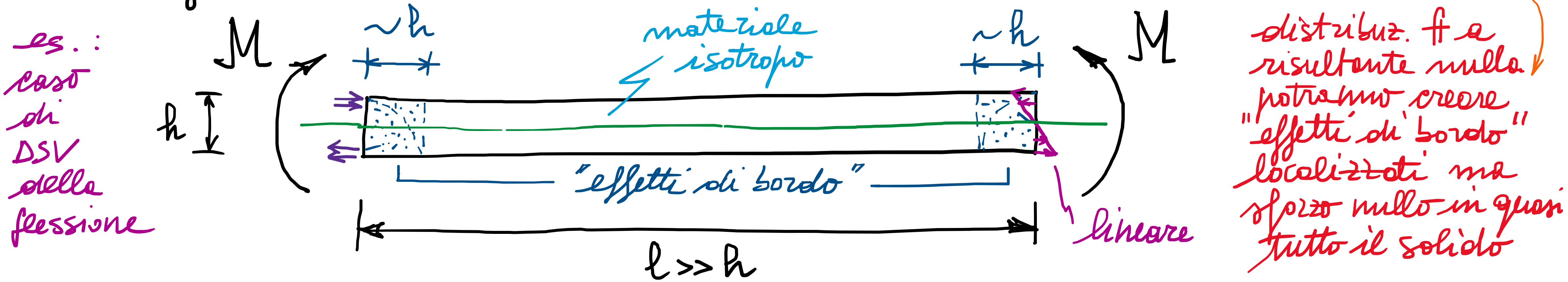
Assi principali d'inerzia: momenti statici

- baricentrici $G \in x, y \Rightarrow S_{x_i} = \int_A x_j \, dA = 0$
- mutuamente $\perp$
- coniugati $\overset{CNS}{\Longleftrightarrow}$ $J_{xy} = \int_A xy \, dA = 0$

(v. es. Belluzzi) momento d'inerzia centrifugo

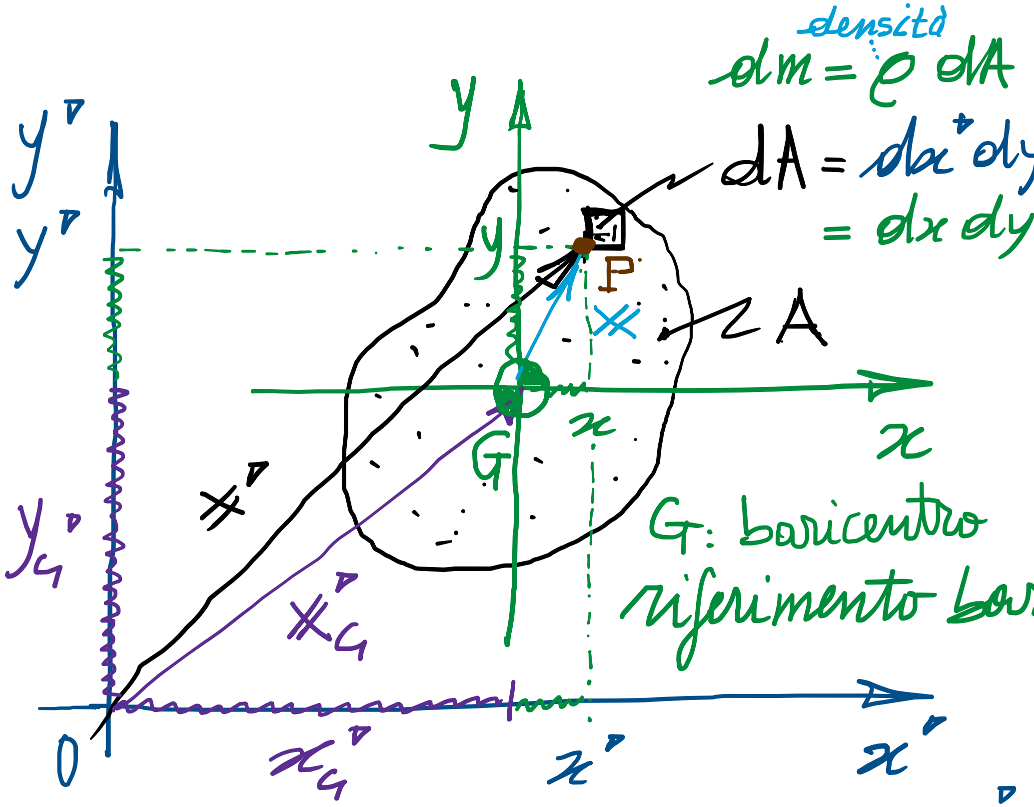
Postulato di DSV:

- La reale distribuzione (non assegnata) delle forze di superficie sulle basi, a parità di risultanti, risulta ininfluente ai fini della risoluzione della risposta tenso-deformativa all'interno del prisma di DSV.



- Ciò appare lecito, in quasi tutto il prisma, a meno di possibili "effetti di bordo" localizzati in corrispondenza delle basi (sezioni compatte).
- In pratica, si potrebbe ipotizzare di applicare le forze di superficie sulle basi secondo la distribuzione (incognita) prevista dalla soluzione del problema stesso, in termini di sforzo.

Richiami sulla geometria delle aree (o delle masse) ⇒ v. es. Belluzzi.



G: baricentro

riferimento baricentrico

$r^\triangledown_{\overline{PO}} = \|\mathbf{x}^\triangledown\|$

$r_{\overline{PG}} = \|\mathbf{x}\|$

riferimento generico (non baricentrico)

Trasformazione di coordinate per traslazione d'assi:

$$\begin{cases} x^\triangledown = x_G^\triangledown + x \\ y^\triangledown = y_G^\triangledown + y \end{cases} \Longleftrightarrow \mathbf{x}^\triangledown = \mathbf{x}_G^\triangledown + \mathbf{x}$$

componenti — vettoriale

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\triangledown - \mathbf{x}_G^\triangledown \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -x_G^\triangledown + x^\triangledown = x^\triangledown - x_G^\triangledown \\ y = -y_G^\triangledown + y^\triangledown = y^\triangledown - y_G^\triangledown \end{cases}$$

trasformazione inversa

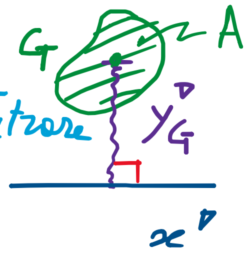
– Si definiscono le proprietà geometriche della sezione trasversale seguenti.

- $A = \int_A \underbrace{1}\, dA > 0 \quad [L]^2$ Area della sezione [trasversale] (momento d'inerzia di ordine 0)

- $S_{x'} = \int_A y' \, dA$, $\quad S_{y'} = \int_A x' \, dA \gtrless 0 \quad [L]^3$ Momento "statico" della sezione rispetto all'asse x' e all'asse y' (momenti di ordine 1)

  $= 0$ per assi baricentrici $\begin{cases} S_{x'} = A\, y'_G \\ S_{y'} = A\, x'_G \end{cases} \Rightarrow x'_G = \dfrac{S_{y'}}{A} \,;\ y'_G = \dfrac{S_{x'}}{A}$

  (Baricentro G è il luogo degli assi con $S = 0$) G è il punto in cui si può concentrare A per ottenere S



- $I_{x'} = J_{x'} = \int_A y'^2 \, dA > 0$ Momento d'inerzia della sezione

  $I_{y'} = J_{y'} = \int_A x'^2 \, dA > 0 \quad [L]^4$ rispetto all'asse x' e all'asse y'; (momenti di ordine 2)

  $I_{x'y'} = J_{x'y'} = \int_A x' y' \, dA \gtrless 0$ centrifugo rispetto agli assi x', y'

  $= 0$ per assi coniugati

  $I_0 = J_0 = \int_A r'^2 \, dA = \int_A (x'^2 + y'^2) \, dA = J_{x'} + J_{y'} > 0$ polare rispetto a O

Teorema di trasposizione (per traslazione d'assi baricentrici e non)

Huygens–Steiner

$$J_{x'y'} = \int_A x'y'\,dA = \int_A (x'_G + x)(y'_G + y)\,dA$$

$$= \int_A x'_G y'_G\,dA + \int_A xy\,dA + \int_A x'_G y\,dA + \int_A y'_G x\,dA$$

$$= x'_G y'_G A + J_{xy} + x'_G \cancel{S_x}^{\,0} + y'_G \cancel{S_y}^{\,0}$$

se x, y assi baricentrici ($G \in x, y$)

Pertanto:

$$J_{x'y'} = J_{xy} + A\,x'_G y'_G \qquad\qquad J_{xy} = J_{x'y'} - A\,x'_G y'_G$$

analogamente:

$$J_{x'} = J_x + A\,y'^2_G \qquad\qquad J_x = J_{x'} - A\,y'^2_G$$

$$J_{y'} = J_y + A\,x'^2_G \qquad\qquad J_y = J_{y'} - A\,x'^2_G$$

$$J_0 = J_G + A\,r'^2_G \qquad\qquad J_G = J_0 - A\,r'^2_G$$

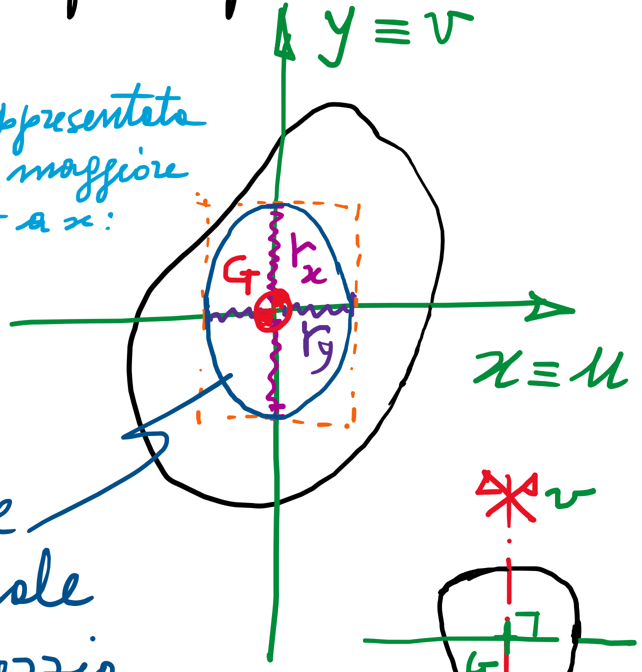
trasf. da assi baricentrici a non baric. — trasf. da assi non baricentrici ad assi baric.

Assi principali d'inerzia $J_{xy} = J_{uv} = 0$ (assi coniugati) (CNS)

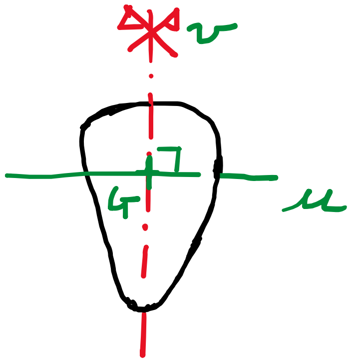
(in generale da determin. per rotazione d'assi)

J_u e J_v risultano il max e il min momento d'inerzia al variare di tutte le giaciture nel piano (rotazione d'assi).

qui rappresentata inerzia maggiore rispetto a x: $r_x > r_y$



Ellisse centrale d'inerzia



Raggi giratori d'inerzia:

$$\rho_x = r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \; ; \quad \rho_y = r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \qquad [L]$$

Ellisse centrale d'inerzia della sezione:

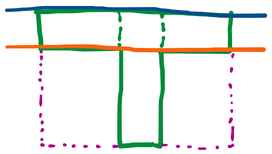
$$\left(\frac{x}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x}\right)^2 = 1$$

N.B.: Se $\exists$ asse di simmetria retta, esso è asse principale d'inerzia, e l'altro asse è quello baricentrico ad esso perpendicolare.

asse di sim. $\Rightarrow$ asse principale

$\not\Leftarrow$

Spesso figure composte da aree elementari A_i



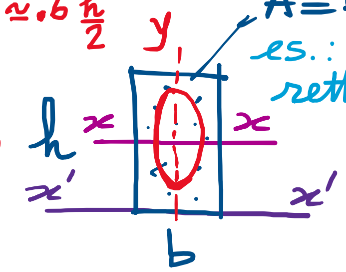
$A = \sum_i A_i$

$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}} \simeq .6\,\frac{h}{2}$

$r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$

$A = bh$

es.: sezione rettangolare



$$J_{x'} = \frac{1}{3} b h^3 \; ; \quad J_x = \frac{1}{12} b h^3$$