Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

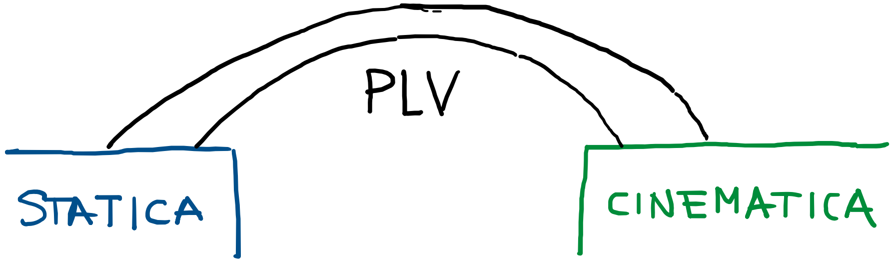
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) → Meccanica dei continui (dei Solidi)

"Ponte" tra statica e cinematica



Sistema A — staticamente ammissibile: Famiglia di quantità statiche equilibrate

$F^A, f^A ; \sigma^A$

$\operatorname{div} \sigma^A + F^A = 0$ in V

$t_n^A = n \cdot \sigma^A = f^A$ su S_f

"virtuali"

no causa-effetto

Sistema B — cinematicamente ammissibile: Famiglia di quantità cinematiche congruenti

$s^B, \bar{s}^B ; \varepsilon^B$

$\varepsilon^B = \frac{1}{2}\left(\nabla s^B + \nabla s^{BT}\right)$ in V

$s^B = \bar{s}^B$ su S_s

Enunciato del PLV

(CN di equilibrio e di congruenza):

$$\forall \left.\begin{matrix}\text{Sistema A}\\ \text{Sistema B}\end{matrix}\right] : \mathcal{L}_e^{AB} = \int_V \underbrace{F^A \cdot s^B}_{F_i^A s_i^B} dV + \int_{S_f} \underbrace{f^A \cdot s^B}_{f_i^A s_i^B} dS + \int_{S_s} \underbrace{n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B}_{n_i \sigma_{ij}^A \bar{s}_j^B} dS = \int_V \underbrace{\sigma^A : \varepsilon^B}_{\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B} dV = \mathcal{L}_i^{AB}$$

(valido indipendentemente dal comportamento del materiale)

Manifestazioni del PLV (CS): strumenti applicativi, operativi ("metodi")

- PSV (CS di equilibrio)

$$\left.\begin{matrix}\text{Sistema B cinem. amm.}\\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}\end{matrix}\right\} : \text{Sistema A static. amm.}$$

(v. "metodo degli spostamenti")

- PFV (CS di congruenza)

$$\left.\begin{matrix}\text{Sistema A static. amm.}\\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}\end{matrix}\right\} : \text{Sistema B cinem. amm.}$$

(v. "metodo delle forze")

Dim. del PLV (CN di equil. e congruenza) $\Rightarrow$ Teorema dei Lavori Virtuali

$\begin{cases} \text{Hp.: } A,\ B \text{ ammiss.} \\ \text{Tesi: } \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \end{cases}$

[Th. della divergenza:

$$\int_V \mathrm{div}\, g \, dV = \int_S n \cdot g \, dS, \qquad g: \text{campo tensoriale} \qquad \left[\mathrm{div}(\ ) = \nabla \cdot (\ ) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\ ) \right]$$

$$\int_V g_{i,i} \, dV = \int_S n_i g_i \, dS \qquad \text{es. vettore } g_i$$
]

Sia $g = \sigma \cdot s \Leftrightarrow g_i = \sigma_{ij} s_j \Rightarrow \mathrm{div}\, g = ?$

g: vettore; σ: tensore doppio; s: vettore

regola del prodotto

$$\text{scalare} = g_{i,i} = (\sigma_{ij} s_j)_{,i} = \underbrace{\sigma_{ij,i}}_{(\mathrm{div}\,\sigma)_j} s_j + \sigma_{ij} \underbrace{s_{j,i}}_{\psi_{ji}}$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $(\sigma^T = \sigma)$ simm.

$$\Leftarrow \mathrm{div}(\sigma \cdot s) = (\mathrm{div}\, \sigma) \cdot s + \sigma : \underbrace{\nabla s^T}_{(\varepsilon^{(T)} + \vartheta^T)}$$

$\nabla s = \psi = \varepsilon + \vartheta$

simm. $\varepsilon^T = \varepsilon$, $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$

emis. $\vartheta^T = -\vartheta$, $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ji} = \sigma_{11} \cancel{\vartheta_{11}} + \sigma_{12} \cancel{\vartheta_{21}} + \dots + \sigma_{21} \cancel{\vartheta_{12}} + \dots \equiv 0$$

$(\sigma : \vartheta^T = \sigma : \vartheta \equiv 0)$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \sigma^A : \varepsilon^B \, dV = \int_V \left[\mathrm{div}(\sigma^A \cdot s^B) - (\mathrm{div}\, \sigma^A) \cdot s^B \right] dV$$

Th. Div.

$$= \int_S n \cdot \sigma^A \cdot s^B \, dS - \int_V (\mathrm{div}\, \sigma^A) \cdot s^B \, dV$$

A static amm.

B cinemat. amm.

$$= \int_{S_s} n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B \, dS + \int_{S_f} f^A \cdot s^B \, dS + \int_V F^A \cdot s^B \, dV = \mathcal{L}_e^{AB} \quad \text{c.v.d.}$$

(idem per CS di equilibrio o di congruenza)

Proprietà del "problema elastico lineare"

– Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE) [Valido per la linearità di tutte le equaz. governanti ⇒ operatori lineari]

α (Sistema ①: $\mathbb{F}^1, \mathbf{f}^1, \bar{\mathbf{s}}^1 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \mathbf{s}^1$)

β (Sistema ②: $\mathbb{F}^2, \mathbf{f}^2, \bar{\mathbf{s}}^2 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathbf{s}^2$)

es. $\mathrm{div}(\alpha\boldsymbol{\sigma}^1 + \beta\boldsymbol{\sigma}^2) = \alpha\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^1 + \beta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^2$ algebrica e differenziali

$$\underbrace{\alpha\mathbb{F}_1 + \beta\mathbb{F}_2,\ \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2,\ \alpha\bar{\mathbf{s}}^1 + \beta\bar{\mathbf{s}}^2}_{\text{combinazione lineare dei dati}} \Rightarrow \underbrace{\alpha\boldsymbol{\sigma}^1 + \beta\boldsymbol{\sigma}^2,\ \alpha\boldsymbol{\varepsilon}^1 + \beta\boldsymbol{\varepsilon}^2,\ \alpha\mathbf{s}^1 + \beta\mathbf{s}^2}_{\text{combinazione lineare delle soluzioni}}$$

– Buona posizione del problema ($\exists$ un numero finito di soluzioni con dipendenza continua dai dati)

- $\exists$ la soluzione (Teoria dell'Elasticità ⇒ Sokolnikoff, 1956)
- Unicità della soluzione ($\exists!$: esiste un'unica soluzione) ⇒ Th. di Kirchhoff ~ 1859

Dim.: Da PSE con $\alpha = -\beta = 1$, con $\mathbb{F} = \mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^2,\ \mathbf{f} = \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^2,\ \mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}}^1 = \bar{\mathbf{s}}^2$ (stessi dati)

$\Delta\mathbb{F} \equiv \mathbf{0}, \quad \Delta\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}, \quad \Delta\bar{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{0}$

Hp. (ragionamento per assurdo): $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2 \neq \mathbf{0},\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2 \neq \mathbf{0},\ \Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2 \neq \mathbf{0}$ (diverse soluzioni)

$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$

Da PLV (A, B sist. reale)

$$\mathcal{L}_e \equiv 0 = 2\int_V \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\sigma} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = 2\int_V \omega(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})\, dV = \mathcal{L}_i \overset{\text{assurdo}}{\Rightarrow} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0},\ \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0};\ \Delta\mathbf{s} \neq \mathbf{0} \text{ in generale}$$

ipotesi smentite

(es. moti rigidi arbitrari)

$\omega(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) > 0 \quad \forall \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ def. pos.

(linearità + elasticità)

unicità su sforzo e deformazione

- Approcci risolutivi
  - analitico (soluzioni esatte o approssimate)
  - numerico (soluzioni approssimate) ⇒ Calcolo Numerico

processo di discretizzazione

(∞ gdl ⇒ n. finito di gdl)

v. CMSS

Metodo degli Elementi Finiti (FEM)

" " " di contorno (BEM)

Metodo delle Differenze Finite (FD)

Metodo degli Elementi Discreti (DEM)

⇒ (es. murature)

- Metodologie di analisi (metodi)
  - Diretto : Dati → Soluzione (soluzione esatta, in forma chiusa, solo per casi particolari)
  - Semi-inverso : Dati ⇄ Soluzione parzialmente nota (a meno di un certo n. di parametri)
  - Inverso : Dati ← Soluzione (es. Structural Health Monitoring (SHM), Identificazione parametrica mediante analisi inversa, Model updating)

es. nota sperimentalmente

Input ⇄ Output