Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2022/2023

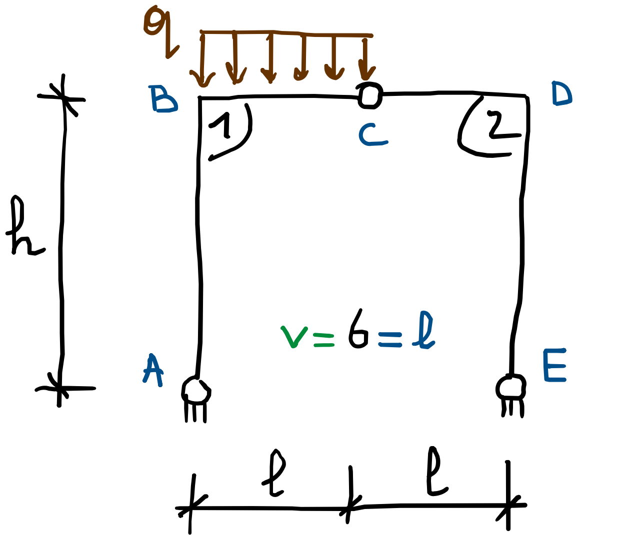
prof. Egidio RIZZI

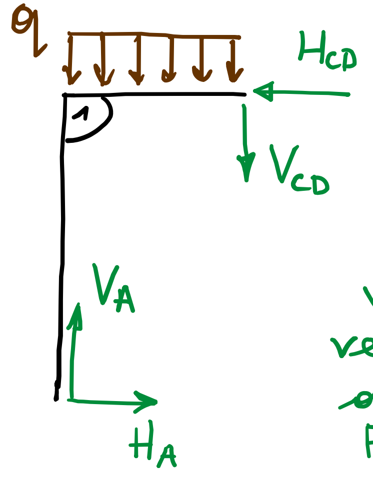
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

Analisi Statica (AS) ⇒ trattazione matriciale (implementabile); dualità cinematica/statica

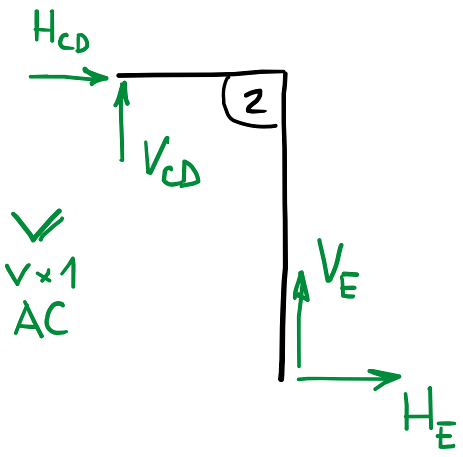
– Approccio completo ⇒ rimozione di tutti i gdv ("esploso")





$$\mathbb{r} = \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{v}$$

$\mathbb{r}$: $v \times 1$ vettore delle RV ⇔ $\mathbb{v}$: $v \times 1$ AC



– Scrittura delle equazioni di equilibrio (⇒ sistema di equilibrio):

$$① \begin{cases} \Sigma F_x^1 = 0 \Rightarrow H_A - H_{CD} = 0 \\ \Sigma F_y^1 = 0 \Rightarrow V_A - V_{CD} - q\ell = 0 \\ \Sigma M_A^1 = 0 \Rightarrow H_{CD} h - V_{CD} \ell - \frac{q\ell^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \Sigma F_x^2 = 0 \Rightarrow H_E + H_{CD} = 0 \\ \Sigma F_y^2 = 0 \Rightarrow V_E + V_{CD} = 0 \\ \Sigma M_E^2 = 0 \Rightarrow -H_{CD} h - V_{CD} \ell = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{u}$ $(\ell = 3n) \times 1$ ⇔ $\mathbb{s}, \mathbb{f}$

$$\mathbb{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -h & -\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\ell \\ -\frac{q\ell^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbb{0}$$

(matrix columns: H_A, V_A, H_{CD}, V_{CD}, H_E, V_E)

$$\mathbb{r} = -\mathbb{E}^{-1} \cdot \mathbb{f} \Leftarrow \mathbb{E} \cdot \mathbb{r} = -\mathbb{f} \Leftrightarrow \mathbb{s} = \mathbb{E} \cdot \mathbb{r} + \mathbb{f} = \mathbb{0}$$

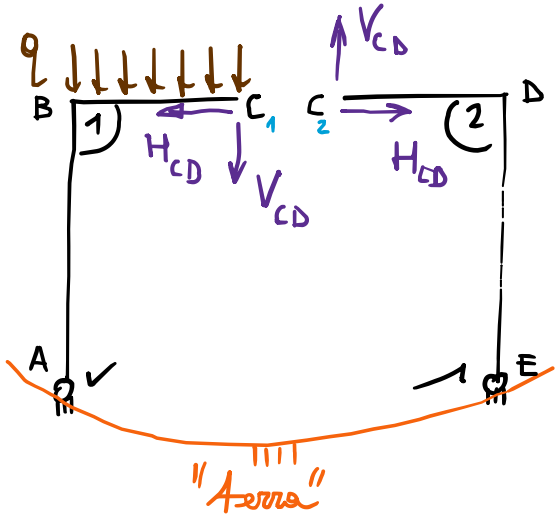
Soluz. — $\mathbb{s}$: risultante forze; $\mathbb{E}$: $(\ell = 3n) \times v$ matrice di equilibrio; $\mathbb{r}$: reattive; $\mathbb{f}$: attive

Per ispezione, con le corrispondenze curate:

$\mathbb{E} = \mathbb{C}^T \Leftrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{E}^T$ (dualità)

($\mathbb{C}, \mathbb{E}$ di rango pieno, non sing.)

– Analogamente per analisi con sistema ribaltato (schema ad albero):



$\checkmark \sum M_A^1 = 0$

$\nearrow \sum M_E^2 = 0$

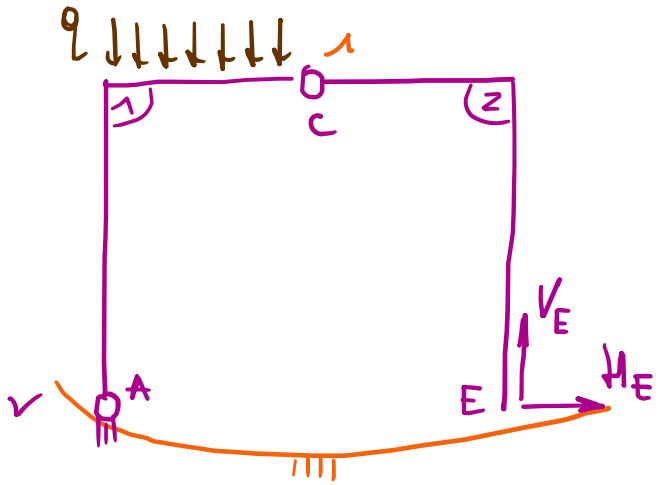
$$\underset{2\times1}{\mathbb{S}^{\nabla}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} h & -l \\ -h & -l \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times1}{\begin{Bmatrix} H_{CD} \\ V_{CD} \end{Bmatrix}} + \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbb{0}$$

$$= \mathbb{E}^{\nabla} \cdot \mathbb{r}^{\nabla} + \mathbb{f}^{\nabla} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \begin{cases} H_{CD} = \frac{ql^2}{4h} \\ V_{CD} = -\frac{ql}{4} \end{cases}$

$\mathbb{L}\ \mathbb{C}^{\nabla T}$; sottomatrice di $\mathbb{E}$

$r[\mathbb{E}^{\nabla}] = 2, \det[\mathbb{E}^{\nabla}] = -2hl \neq 0$



$\checkmark \sum M_A^{1+2} = 0$

$\nearrow \sum M_C^2 = 0$

$$\mathbb{S}^{\nabla\nabla} = \begin{bmatrix} 0 & 2l \\ h & l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_E \\ V_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbb{0}$$

$$= \mathbb{E}^{\nabla\nabla} \cdot \mathbb{r}^{\nabla\nabla} + \mathbb{f}^{\nabla\nabla} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \begin{cases} H_E = -\frac{ql^2}{4h} \\ V_E = \frac{ql}{4} \end{cases}$

$\mathbb{L}\ \mathbb{C}^{\nabla\nabla T}$; non sottomatrice di $\mathbb{E}$

$r[\mathbb{E}^{\nabla\nabla}] = 2, \det[\mathbb{E}^{\nabla\nabla}] = -2hl \neq 0$

Sistema di equilibrio $\$ = \mathbb{E} \cdot \mathbb{r} + \mathbb{f} = \mathbb{0} \iff \mathbb{E} \cdot \mathbb{r} = -\mathbb{f}$

- Esistenza della soluzione (se il sistema è coerente, "concistent") $\leftrightarrow$ sistema equilibrabile
- Unicità della soluzione (determinazione statica)

– Sistema coerente $\overset{\text{CNS}}{\text{sse}}$ $r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{E}, -\mathbb{f}]$ (th. di Rouché-Capelli)

non $<$

– con unica solut. sse $r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{E}, -\mathbb{f}] = v$

– infinite $<$

deficienza di rango rispetto a v ← grado di indet. statica, o di iperst.

$\rightarrow$ $I = N[\mathbb{E}] = v - r[\mathbb{E}] \geq 0$ sist. di equilibrio

(N: nullo, r: rango)

grado di indet. statica, o di iperst.

$I \leq \min\{l, v\}$

$\Updownarrow$

deficienza di rango rispetto a l ← grado di indet. cinem., o di labilità

$L = N[\mathbb{C}] = l - r[\mathbb{C}] \geq 0$ sist. di congruenza

– poiché si è notato, per ispezione (poi dim. via PLV) che $\mathbb{E} = \mathbb{C}^T$; $\mathbb{C} = \mathbb{E}^T \rightarrow r[\mathbb{E}] = r[\mathbb{C}] = r$

$\rightarrow$ dualità cinematica / statica

$I - L = v - \cancel{r} - l + \cancel{r}$

$\rightarrow$ $I = L + v - l$

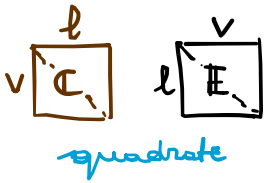
$L = I + l - v$

N.B. gradi di indet. cinematica alimentano gradi di indet. statica (e viceversa)

Classificazione

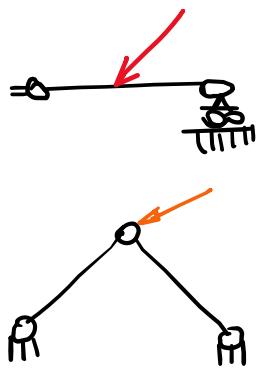
1) $L=0$, $I=0$

$r=\ell$ $r=v$ $\Rightarrow$ $v=\ell=r$



quadrate

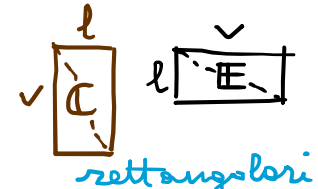
Strutture isostatiche (sistemi cinem. e staticam. isodeterminati)



2) $L=0$, $I>0$

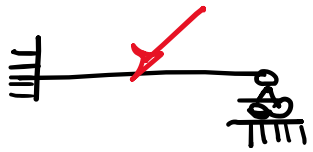
$r=\ell$ $r<v$ $\Rightarrow$ $v>\ell=r$

alta bassa

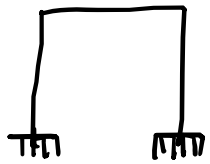


rettangolari

Strutture iperstatiche (sistemi cinem. odet. e static. indet.)



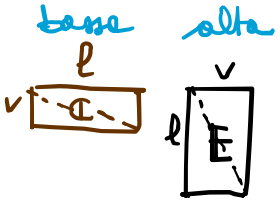
$I=1$



$I=3$

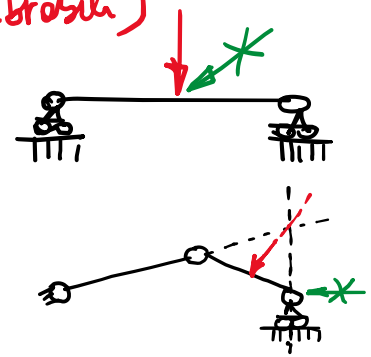
3) $L>0$, $I=0$

$r<\ell$ $r=v$ $\Rightarrow$ $r=v<\ell$



rettangolari

Strutture iperstatiche (se equilibrabili) (sistemi cinem. indet. e static. determinati)

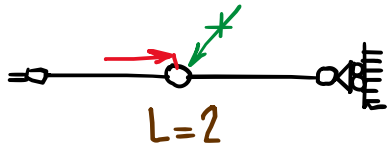


$L=1$

4) $L>0$, $I>0$

$r<\ell$ $r<v$ $\not\Rightarrow$ $v \lessgtr \ell$

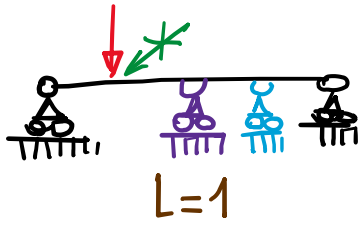
Strutture indeterminate (sistemi cinem. e static. indeterminati)



$L=2$

$v<\ell$ $I=1$

"iperstaticità assiale"



$L=1$

$v=\ell$ $I=1$

$v>\ell$ $I=2$