

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

( ICAR/08 - SdC ; 6 CFU )

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

[egidio.rizzi@unibg.it](mailto:egidio.rizzi@unibg.it)

LEZIONE 23

## Flessione elastoplastica delle travi

Scopi:

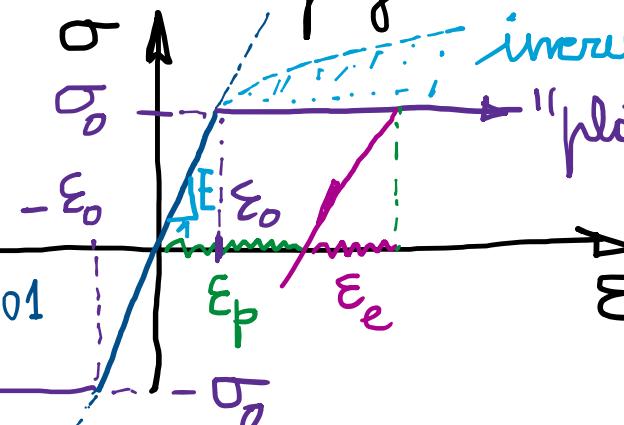
- Descrivere il salto di scala, da materiale a struttura, per cogliere il comportamento dell'elemento strutturale anche oltre l'uscita dal campo elastico (di quotidiano funzionamento, per condizioni di esercizio regolare), per non-linearità del materiale (comportamento elastoplastico).
- "Analisi Limite" dei sistemi di travi ("Calcolo e Rotta" dei travi) utile a determinare le possibili condizioni di collasso strutturale (plastico), sia nelle caratteristiche statiche (livello dei carichi  $\Rightarrow$  carico di collasso, o moltiplicatore di), che cinematiche (mecanismo di collasso).
- Individuare la relazione tra comportamento locale (elastoplastico) del punto materiale della trave e comportamento globale dell'intero elemento strutturale - Lo facciamo nell'ambito dell'ipotesi di comportamento perfettamente elastoplastico del materiale (no incrudimento) [da un lato conservativo, dall'altro sotto l'ipotesi di garantire una elevata (illimitata) duttilità del materiale].

- Comportamento perfettamente elasto-plastico del materiale

$$\sigma_0 = E \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

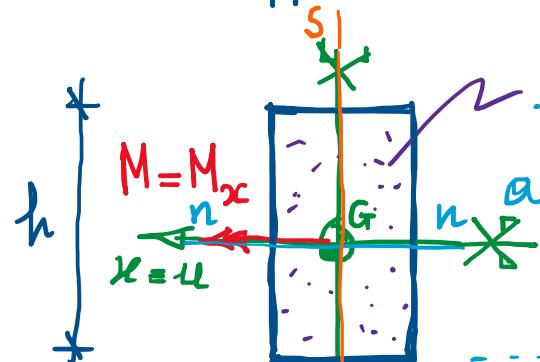
$$\approx 10^{-3} = .001$$



incremento (limite di movimento variabile)

"plateau" o spazio costante (flow stress), con sviluppo di deformazioni plastiche illimitate.  
(limite elastico fiso)

- Sezione doppialmente simmetrica, rettangolare (flessione rette) (esempio)



$E, \sigma_0 (\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E})$  cost.

asse neutro (in campo elasto-plastico)

$M$   $\leftrightarrow$  curvatura ( $\chi$ )  $\chi = \frac{1}{e} = \frac{d\Phi}{ds} \approx \frac{d\Phi}{dz}$   
variabile dell'asse miflesso  
statica (variabile cinematica)

Campo elastico

$$\text{lineare} \Rightarrow \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}$$

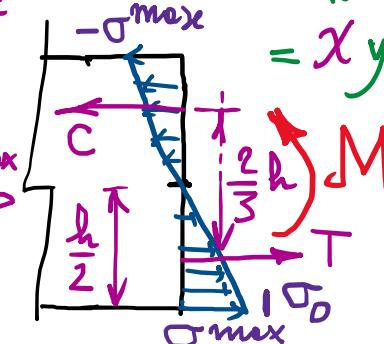
$$\varepsilon^{\max} \leq \varepsilon_0$$

legge costitutivo (Hooke)

$= E \chi y$  lineare sulla sezione

$$\sigma_{zz}(y) = E \varepsilon_{zz} = E \frac{y}{h}$$

$$T = C = \frac{1}{2} \frac{h}{2} \frac{\sigma^{\max}}{b}$$



$d\Phi$   $\rho$ : raggio di curvatura  
asse miflesso (B-E-N)

Ipotesi di conservazione  
delle sezioni  
piane (e  $\perp$   
all'asse  
miflesso)

lineari sulle sez. (y)

$$\varepsilon^{\max} = \chi \frac{h}{2}$$

$$W_e = \frac{bh^3}{42} \frac{\sigma^{\max}}{E}$$

equiv.  
statica

- Quindi, in maniera diretta:

$$M = W_e \sigma^{\max} \Rightarrow \sigma^{\max} = \frac{M}{W_e}, \quad W_e = \frac{bh^2}{6} \text{ modulo di resistenza (a flessione) elastico}$$

- Altrettanto, per equivalenza statica (tra  $M_x$  e  $\sigma_{zz}$  che ne deriva):

$$M_x = \int_A (\sigma_{zz} dA) y = \int_A \sigma_{zz} y dA = \int_A E \frac{\epsilon_{zz}}{\sigma_{zz}} y dA = E J_x \int_A y^2 dA \quad J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

Legge di B-E-N: (comp. costitut. delle st. trass.)

$$M_x = E J_x \chi_x \Leftrightarrow \chi_x = \frac{M_x}{E J_x} \quad \begin{array}{l} \text{delle trave} \\ \text{in campo} \\ \text{elastico} \end{array}$$

Rigidezza flessionale (elastico)

Momento d'inerzia  
delle sezioni trass.  
rispetto all'asse  $x$   
(asse n-n)

- Formule di Novizi: (sforzi lineari sulle sez.)

$$\sigma_{zz} = E \frac{\chi_y}{\epsilon_{zz}} = E \frac{M}{J_x} y = \frac{M_x}{J_x} y \xrightarrow{\text{max}} \sigma = \sigma_{zz}(y=\frac{h}{2}) = \frac{M_x}{J_x \cdot 2} = \frac{M_x}{W_{ex}}$$

limite elastico

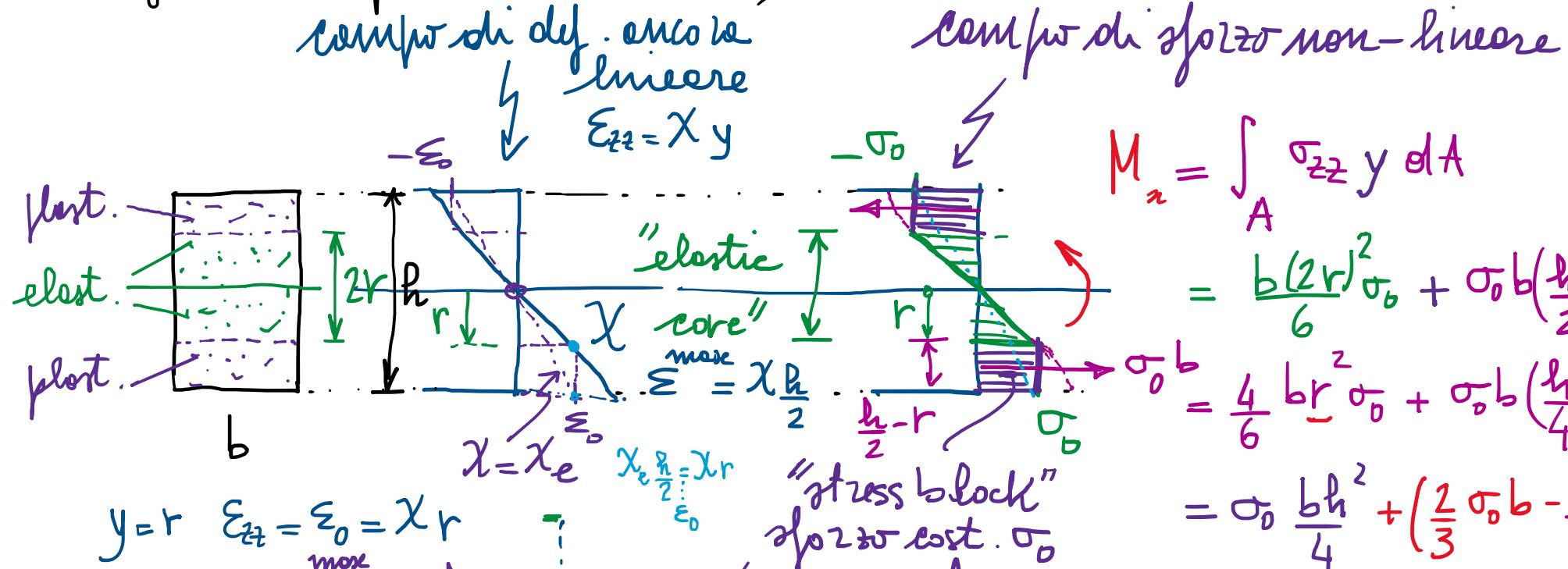
- Regime elastico:  $\epsilon^{\max} = \chi \frac{h}{2} \leq \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}; \quad \sigma^{\max} \leq \sigma_0; \quad \chi \leq \chi_e = \chi_0$

$\epsilon = \epsilon_0 \xrightarrow{\text{max}} \chi_e = \frac{2\epsilon_0}{h}$

$$W_e = \frac{J_x}{h/2} = \frac{1}{12} \frac{bh^3}{\chi/2} = \frac{1}{6} bh^2 \xrightarrow{\text{max}} M_e = \sigma_0 W_e$$

Momento d'inerzia  
al limite elastico

- Regime elasto-plastico ( $\chi \geq \chi_e$ )  $\Rightarrow (M \geq M_e)$



$$y=r \quad \varepsilon_{zz}=\varepsilon_0=\chi r$$

$$\varepsilon_{max} = \chi \frac{h}{2}$$

A limite elastico:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{max} = \chi_e \frac{h}{2} \quad \rightarrow 1 = \frac{\chi r}{\chi_e \frac{h}{2}}$$

Momento limite

$$M_L = \sigma_0 W_p$$

$$\text{modulo plastico: } W_p = \frac{bh^2}{4} = Z \quad (\chi \rightarrow \infty, M \rightarrow M_L)$$

$$\frac{r}{h/2} = \frac{\chi_e}{X} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{max}}$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA$$

$$= \frac{b(2r)^2 \sigma_0}{6} + \sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - r\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + r\right)$$

$$\sigma_0 b = \frac{4}{6} br^2 \sigma_0 + \sigma_0 b \left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$= \sigma_0 \frac{bh^2}{4} + \left(\frac{2}{3} \sigma_0 b - \frac{3}{3} \sigma_0 b\right) r^2$$

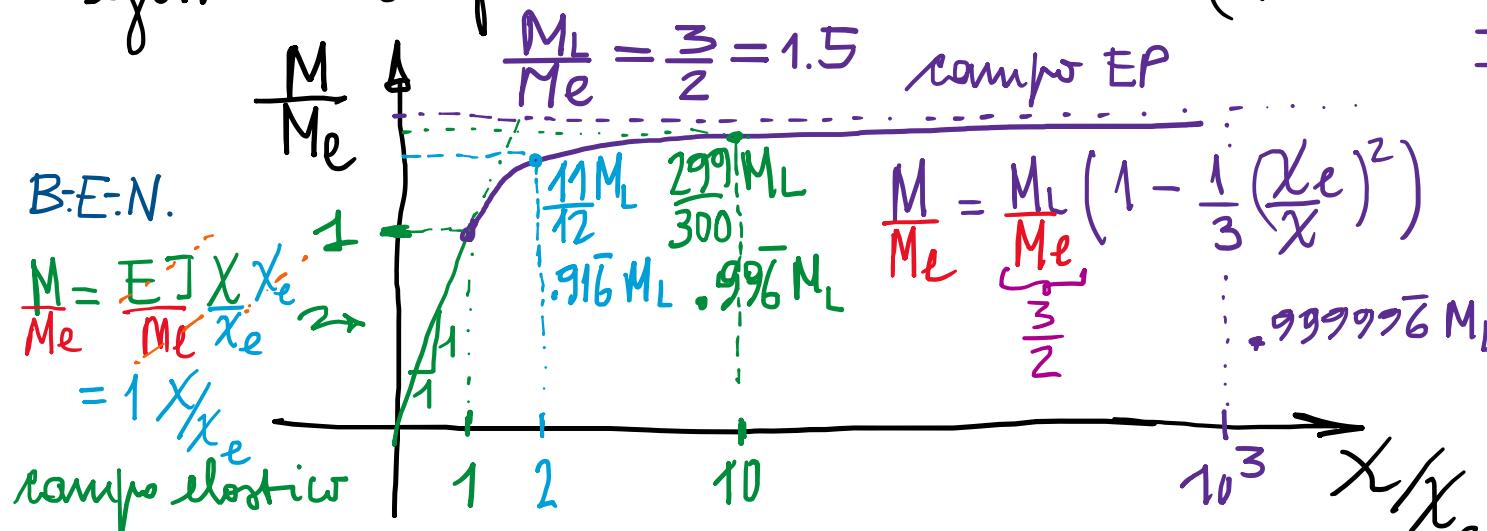
$$= \sigma_0 \frac{bh^2}{4} - \frac{1}{3} \sigma_0 b r^2 \quad r = \frac{\varepsilon_0}{X} = \frac{\chi_e h/2}{X}$$

$$= \underbrace{\sigma_0 \frac{bh^2}{4}}_{\text{non-lin.}} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma_0 b}{\sigma_0 b h^2} 4 r^2\right) \quad \frac{r}{h/2} = \frac{\chi_e}{X}$$

$$= M_L \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{h/2}\right)^2\right)$$

$$= M_L \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi_e}{X}\right)^2\right) = M(\chi)$$

- legge elastoflessiva delle sez. tesse. ( $M = M(X)$  non-lineare) con incroci.



-  $M_L$ : comp. osintotico per  $X \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow 0$ )

- Caso limite: (compenetrazione impossibile)

$$\varepsilon^{\text{max}} = 1 \Rightarrow X = \frac{2}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \varepsilon^{\text{max}} = X \frac{h}{2}$$

$$\frac{X}{X_e} = \frac{1}{\varepsilon_0} \approx \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000.$$

- Caso tipico  $\varepsilon^{\text{max}} = 1\% = 10^{-2} \Rightarrow X = \frac{2}{h} 10^{-2}$   
 (in campo EP)  
 deformazioni che possono  
 tipicamente manifestarsi in campo EP.

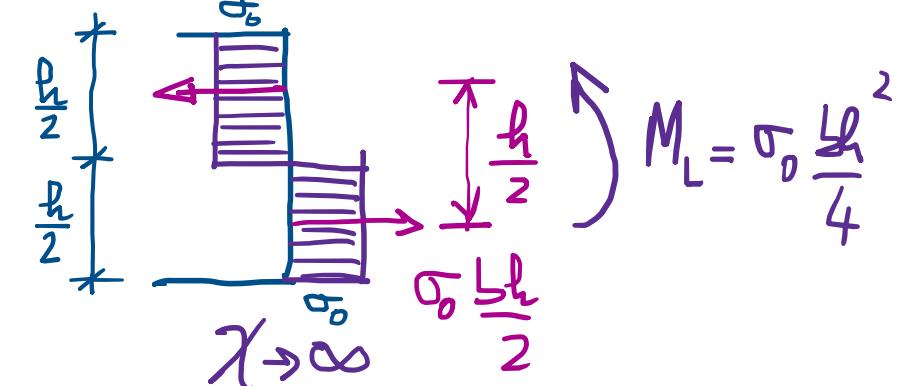
$$\frac{X}{X_e} = \frac{10^{-2}}{\varepsilon_0} \approx 10$$

Fattore di forma:



$$\alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{\sigma_0 W_p}{\sigma_0 W_e} = \frac{\frac{b h^2}{4}}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Momento Limite:



Generalizz. ad altre sezioni:



$$\alpha: 1.1-1.2 \quad 1.27 \quad 1.6-1.8 \quad 1.7 \quad 2.0$$

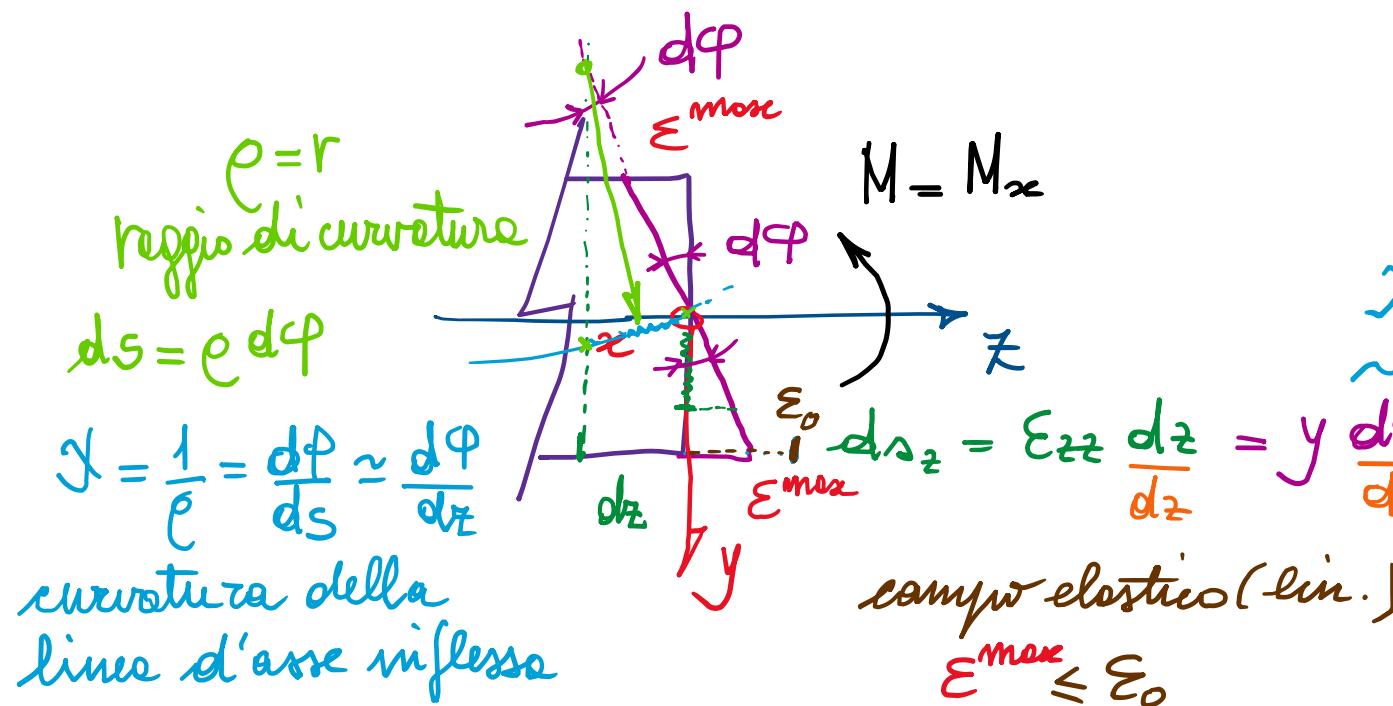
$$\frac{b h^2}{4} = W_p = 2 S_x = \frac{b h}{2} \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$$

mom. resist.  
il giudizio  
plastico

Momento statico parte set.  
sotto asse neutro

## Concetti fondamentali :

- Flessione elastoplastica (teorema): decomporre comportamento elastico e comportamento elastoplastico -
- Ipotesi cinematica sul campo di deformazione (conservazione delle sezioni piane):  $\epsilon_{zz} = \chi y$  *valido nel campo elastoplastico*



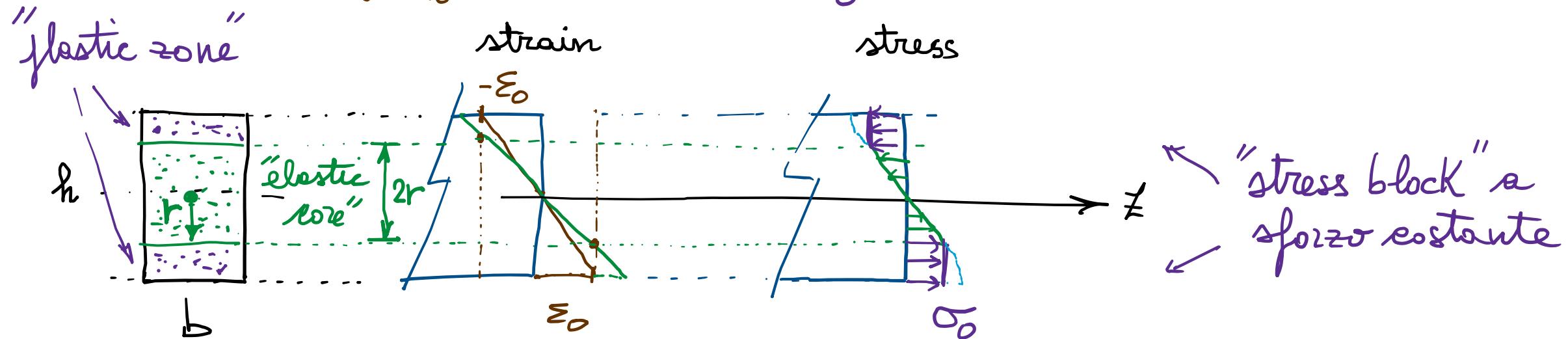
$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}$$

campo elastico

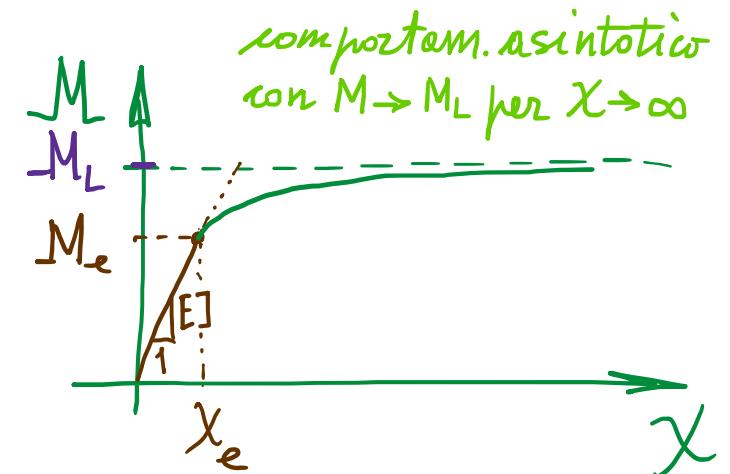
$$\epsilon_{zz} = \chi y \rightarrow \sigma_{zz}(y) = E \chi y$$

deformazioni lineari sulla sezione  
 sforzo lin. sulla sezione

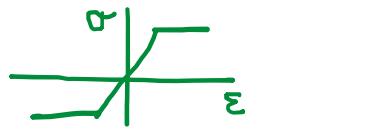
- Campo elasto-plastico:  $\varepsilon^{\text{max}} \geq \varepsilon_0$   
 $X = X_e$        $X \geq X_e$



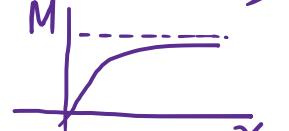
- $X$  crescente, oltre il campo elastico,  $r$  si riduce da  $\frac{h}{2}$  ( $X = X_e$ )
- 0 ( $X \rightarrow \infty$ )
- Conduce a legge Momento/Curvature  $M = M(X)$  non lineare, con incremento macroscopico



# SOMMARIO (Lec. 23)



- Flessione elastoplastica (vs. legge costitutiva delle sez. trasversali). [che materiale] e sezione
- Hp. di conservazione delle sezioni piane (campo lineare di deformazione).
- Regime elastico (lineare): modulo di resistenza elastico, momento/curvatura e limite elastico.
- Regime elastoplastico : plasticizzazione con "stress block" che si diffondono, per curvature crescenti, dai lenti vs. l'interno ; legame  $M/X$  non-lin. con incrudimento ; modulo (di resistenza) plastico ; momento limite ( $X \rightarrow \infty$ ).
- Fattore di forma : guadagno / plasticità / elasticità.
- Casi pratici : momento limite quasi raggiunto per deformazioni osservabili  $\sim 1\%$  in campo elastoplastico.



Next step: Comportamento globale delle trave infisse ; ipotesi di cerchiola plastica ; meccanismo di collasso (plastico) delle trave -