Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

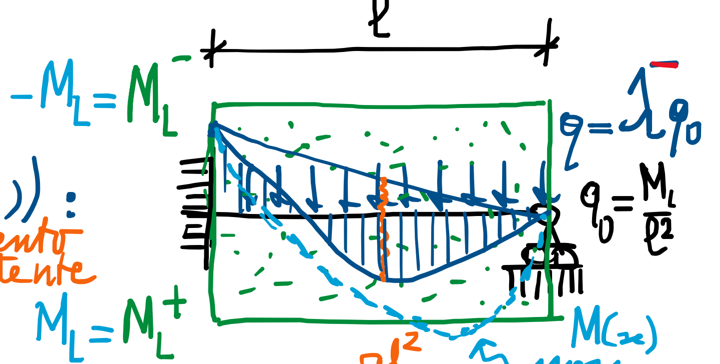
LEZIONE 26

Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (Calcolo a rottura dei telai)

Volti a definire delle strategie di calcolo delle caratteristiche di collasso (metodi "diretti")

DEFINIZIONI:

• Sistema di quantità statiche: carichi esterni, permanenti o accidentali (affetti da moltiplicatore statico dei carichi λ^-) e A.I. ($M(x)$): momento flettente



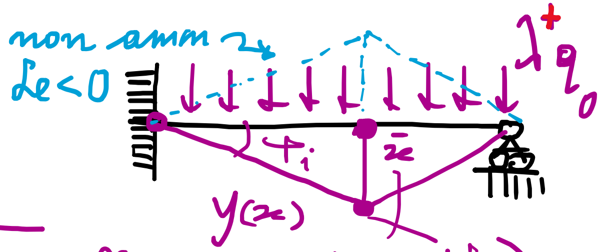
staticamente e plasticamente ammissibili

• $M(x)$ in equilibrio coi carichi esterni (λ^-);

• $M_L^-(x) \le M(x) \le M_L^+(x)$ (conformità plastica). $\Rightarrow$ Classe di quantità statiche all'interno della quale si ricercano le caratt. statiche a collasso:

$S = \lambda_L,\ M_{coll}(x) \in (\lambda^-,\ M(x))$

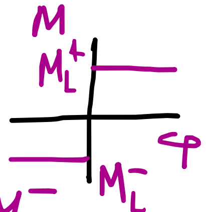
• Sistema di quantità cinematiche: spostamenti e rotazioni (in particolare plastiche, nelle CP) associabili a moltiplicatore cinematico dei carichi λ^+, secondo bilancio energetico (da PLV), come se si trattasse della condizione di collasso incipiente:



cinematicamente e plasticamente ammissibili

• spost. $y(x)$ e rotaz. φ_i compatibili coi vincoli e tali da produrre lavoro esterno positivo ($L_e > 0$);

• rotazioni plastiche $\varphi_i^+ \ge 0$ ove $M = M_L^+$ e $\varphi_i^- \le 0$ ove $M_L = M_L^-$ (tali da fornire dissipaz. plastica $D \ge 0$ nelle C.P.). $\Rightarrow$



Classe di quantità cinematiche ove si ricercano quelle a collasso:

$S = \lambda_L,\ y_L(x) \in (\lambda^+,\ y(x),\ \varphi_i)$

• **Moltiplicatore cinematico λ^+ associato (al meccanismo ammissibile):**
Determinato come se fosse il meccanismo di collasso via PLV:

$$\mathcal{L}_e = \underbrace{\sum_i \lambda^+ P_{i0}\, y_i + \int_i \lambda^+ q_{i0}(x)\, y_i(x)\,dx}_{\lambda^+ \mathcal{L}_{e0}\ \text{carichi accidentali}} + \underbrace{\int_i g_i(x)\, y_i(x)\,dx}_{\mathcal{L}_{eg}\ \text{carichi permanenti (gravitaz.)}\ >0} = \mathcal{L}_{ip} = D = \underbrace{\sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^-}_{\text{dissipazione plastica} \geq 0} > 0$$

(g non tali da produrre collasso)

$$\Rightarrow \quad \lambda^+ = \frac{D - \mathcal{L}_{eg}}{\mathcal{L}_{e0}} \quad \frac{\geq 0}{>0} \quad \geq 0$$

$\mathcal{L}_{e0} > 0$ lavoro esterno dei carichi base

• **Teorema statico** ("lower-bound" o "safe" Th.):
All'interno della classe dei moltiplicatori statici λ^- staticamente ammissibili, il molt. di collasso λ_L è il max dei λ^-:

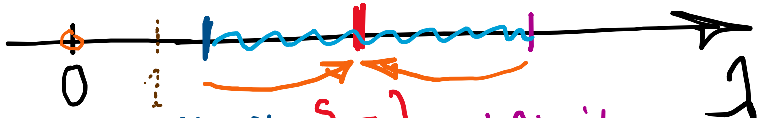
$$\lambda_L = \max\{\lambda^-\}.$$

• **Teorema cinematico** ("upper-bound" Th.):
All'interno della classe dei moltiplicatori cinematici λ^+ cinem. ammissibili, il molt. di collasso λ è il min. dei λ^+:

$$\lambda_L = \min\{\lambda^+\}.$$

"forchetta"
delimitazione bilaterale del moltiplicatore limite

$$\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$$



$s = \lambda_L$

delimitaz. inf.
stima per difetto $-$

delimitaz. sup.
stima per eccesso $+$

Teorema misto:
Per coincidenza tra moltiplicatore statico λ^- e moltiplic. cin. λ^+, allora $\lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$, e λ_L risulta individuato.

Dimostrazione (tramite PLV: $\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$)

Th. statico: "lower bound"

quantità statiche a collasso

$$\sum_i \lambda_L P_{i0} y_i = \sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^- \Rightarrow$$

Equazione che consente di calcolare λ_L noto il meccanismo di collasso

quantità cinematiche a collasso

$-$

$$\sum_i \lambda^- P_{i0} y_i = \sum_i M_i \varphi_i^+ + M_i \varphi_i^-$$

quantità statiche amm. (λ^-)

$M_{L_i}^- \leq M_i \leq M_{L_i}^+$

$$(\lambda_L - \lambda^-) \underbrace{\sum_i P_{i0} y_i}_{\mathcal{L}_{e0} > 0} = \sum_i \underbrace{(M_{L_i}^+ - M_i)}_{\geq 0} \underbrace{\varphi_i^+}_{\geq 0} + \underbrace{(M_{L_i}^- - M_i)}_{\leq 0} \underbrace{\varphi_i^-}_{\leq 0} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^- \leq \lambda_L}$$

λ_L è un λ^-

$\lambda_L = \max\{\lambda^-\}$

Th. cinematico: "upper bound"

quantità statiche rel. al cinem. amm. (λ^+)

$$\sum_i \lambda^+ P_{i0} y_i = \sum_i M_{L_i}^+ \varphi_i^+ + M_{L_i}^- \varphi_i^- \Rightarrow$$

Equazione che consente di calcol. λ^+ dato il meccanismo cinem. ammiss.

quantità cinematiche mecc. ammiss.

$-$

$$\sum_i \lambda_L P_{i0} y_i = \sum_i M_i \varphi_i^+ + M_i \varphi_i^-$$

quantità statiche a collasso

$$(\lambda^+ - \lambda_L) \underbrace{\sum_i P_{i0} y_i}_{> 0} = \sum_i \underbrace{(M_{L_i}^+ - M_i)}_{\geq 0} \underbrace{\varphi_i^+}_{\geq 0} + \underbrace{(M_{L_i}^- - M_i)}_{\leq 0} \underbrace{\varphi_i^-}_{\leq 0} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_L \leq \lambda^+}$$

è un $\lambda^+ \Rightarrow \lambda_L = \min\{\lambda^+\}$

Corollari:

- Le caratteristiche di collasso (λ_L, $M_{coll}(x)$, $Y_{coll}(x)$) non dipendono da proprietà elastiche (in quanto esse non intervengono nelle equazioni viste, atte ad individuare delle stime delle caratteristiche a collasso stesse).

  ⇒ Ip. di comportamento rigido-plastico (non per risposta evolutiva).

- La presenza di coazioni, cedimenti vincolari, stati tenso-deformativi (es. sforzi residui) pregressi (all'imposizione di carichi accidentali, amplificati da λ) non influenza la determinazione del moltiplicatore λ_L (in quanto non entrano nella scrittura delle eq.ni viste).

Strumenti operativi (metodi "diretti")

- Metodi di calcolo a collasso "manuali" che consentono la determinazione delle caratteristiche a collasso per esempi specifici (travi, telai).
- Metodi di calcolo "automatico" (implementazione) nell'ambito della Programmazione Matematica (risoluz. di pb. di max. o di min.). Esempio: metodo del simplesso.

Concetti fondamentali :

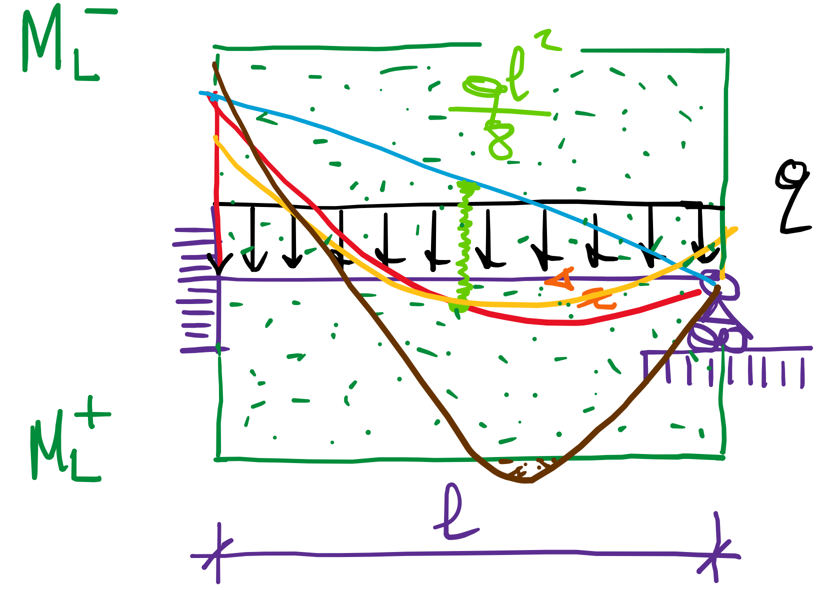
- Metodi "diretti" (nell'ambito dell'Analisi Limite, AL, dei sistemi di travi inflessi, alias "Calcolo a Rottura" dei telai): volti a determinare in maniera "diretta", cioè senza pretendere necessariamente di voler ricostruire l'intera risposta evolutiva elastoplastica della struttura ("curva carico/spostamento"), le caratteristiche di collasso plastico, in termini di:

QUANTITÀ STATIC.
- moltiplicatore dei carichi (accidentali) a collasso λ_L, con le corrispondenti distribuzioni di Azioni Interne $[M(s)]$.

QUANTITÀ CINEM.
- meccanismo di collasso corrispondente, con spostamenti $y(x)$ e rotazioni (in particolare plastiche, nelle CP, φ_i^+ e φ_i^-).

- A tale scopo, si mira a predisporre dei metodi di calcolo semplificati, anche "manuali", che con conti abbordabili consentano agevolmente di pervenire alla soluzione delle richieste di cui sopra, perlomeno per tipologie di strutture tipiche e adeguatamente descrivibili col presente approccio (travi e sistemi di travi, telai multipiano).
- Secondo tali esigenze, si formulano dei Teoremi (fondamentali dell'Analisi Limite), utili a costituire inquadramento e base metodologica per formulare tali metodi di calcolo.
- In tale richiesta, risulterà fondamentale definire, in primis, le classi, ritenute ammissibili, di quantità statiche e cinematiche all'interno delle quali ricercare le caratteristiche di collasso, tra tutte quelle possibili.

– Esempio (quantità statiche):

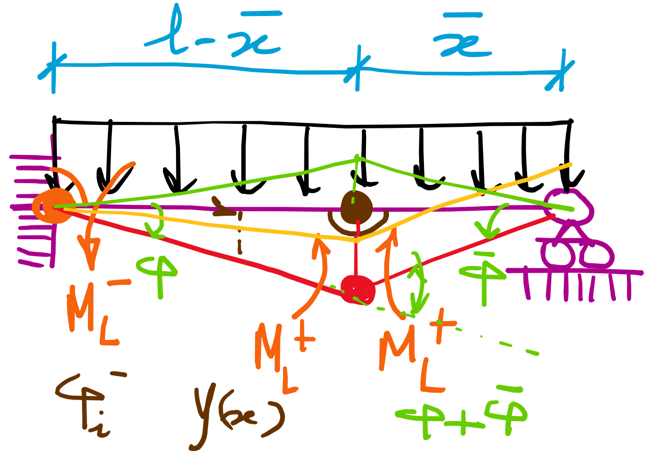


$$\frac{M_L}{\ell^2}$$

$$q = \lambda \tilde{q}_0$$

$$M(x) \sim x^2$$

– Esempio (quantità cinematiche):



$$\mathcal{L}_{e0} > 0$$

$$D > 0$$

SOMMARIO (Lez. 26)

- Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite, alla base del Calcolo a Rottura (dei telai), volto alla determinazione (diretta) delle caratteristiche di collasso.
- Definizioni: classi staticamente e cinematicamente ammissibili (entro le quali si ricercano le condizioni di collasso).
- Teorema statico: fornisce una delimitazione inferiore del molt. limite: $\lambda^- \leq \lambda_L$.
- Teorema cinematico: " " " superiore " " " : $\lambda_L \leq \lambda^+$.
- Teorema misto: se la delimitazione "forchetta" bilaterale si stringe a zero, il molt. di collasso risulta individuato $\Rightarrow \lambda^- = \lambda_L = \lambda^+$.
- Dimostrazione via PLV (indip. da parametri elastici e effetti anelastici pregressi).
- Metodi diretti (statico/cinematico/misto): sulla base dei Th. visti, divengono strumenti operativi per il calcolo ("manuale" o "automatico") delle caratteristiche di collasso plastico.

Next step: Esempi (travi e telai), con determinazione o stima delle caratteristiche a collasso ($\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$, momento a collasso, meccanismo plastico).