Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

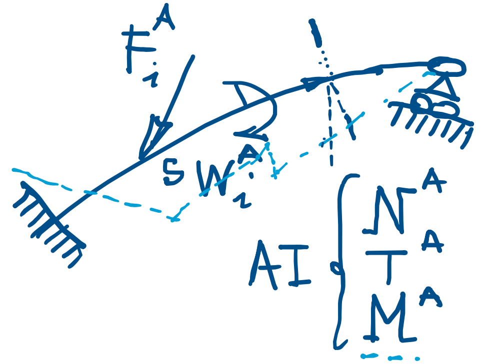
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 11

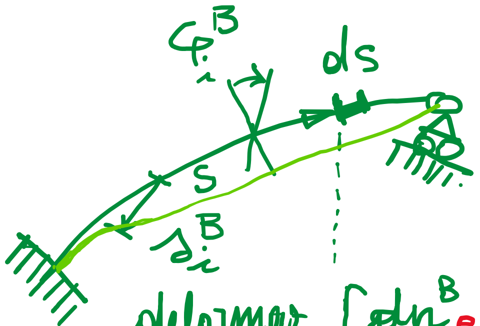
Principio dei Lavori Virtuali (PLV) [Analisi dei sistemi di travi]

Ai fini dell'enunciato, si pongano le seguenti definizioni:

(A) Sistema staticamente ammissibile: famiglie di quantità statiche (forze, coppie; Azioni Interne: N, T, M) equilibrate



(B) Sistema cinematicamente ammissibile: famiglie di quantità cinematiche (spostamenti, rotazioni; deformazioni elementari dn, dt, $d\varphi$) congruenti o compatibili



deformaz. del concio di trave $\begin{cases} dn_e^B \\ dt_e^B \\ d\varphi_e^B \end{cases}$ $\leftrightarrow$ legate a corrispondenti AI^B: N^B, T^B, M^B (EA, GA, EJ)

∞ ∞

NB: Sono le classi all'interno delle quali potremo definire ammissibili dei sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema reale

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza):

$\forall$ coppie di sistemi (anche "virtuali") Ⓐ e Ⓑ, rispettivamente staticamente e cinematicamente ammissibili, vale la seguente identità dei Lavori (Virtuali) mutui esterno ed interno:

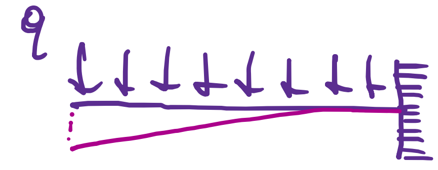
$$\mathcal{L}_{est.}^{AB} = \sum_i F_i^A \cdot s_i^B + W_i^A \cdot \varphi_i^B = \int_{\text{Struttura}} N^A \cdot d\lambda_e^B + T^A \cdot dt_e^B + M^A \cdot d\varphi_e^B = \mathcal{L}_{int.}^{AB}$$

- I sistemi Ⓐ e Ⓑ non sono necessariamente coincidenti col sistema reale ma possono essere "virtuali", cioè del tutto indipendenti e in particolare non legati a delle relazioni di causa-effetto (se pur associabili nel senso dei lavori virtuali).
- Enunciato valido indipendentemente dal comportamento del materiale (in particolare elastico o anelastico).
- In genere si ritengono trascurabili i contributi assiali e taglianti, a fronte di quelli flessionali (predominanti nei sistemi di travi "snelle"). Per corpi rigidi $\mathcal{L}_i^{AB} = 0$, quindi: $\mathcal{L}_e^{AB} = 0$.
- Si tratta di un teorema dimostrabile (oltre un assunto, un principio) $\Rightarrow$ vedi dim. nella meccanica dei continui (CdSdC).
- Manifestazioni del PLV: $\underset{\text{post.}}{\text{PSV}}$ (CS di equilibrio), $\underset{\text{oltre}}{\text{PFV}}$ (CS di congruenza) $\Rightarrow$ CdSdC

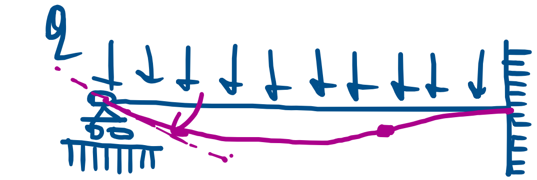
Utilizzi del PLV, come metodo di analisi dei sistemi di travi (deformabili):

P Forze V

- Determinazione di componenti di spostamento (in particolare elastico) di strutture deformabili:

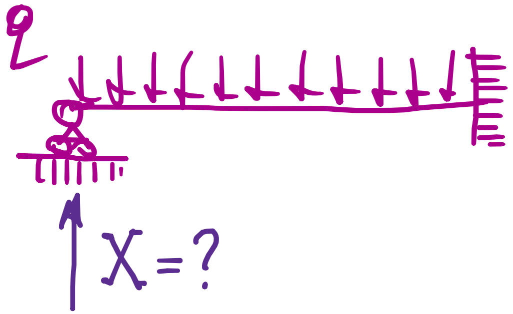


$f_q = ?$ isost.



$\varphi_q = ?$ iperst.

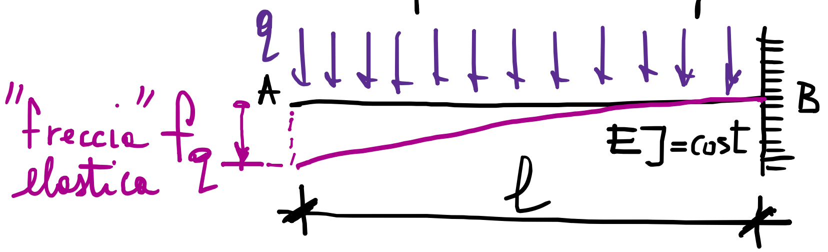
- Risoluzione di strutture staticamente indeterminate, cioè iperstatiche:



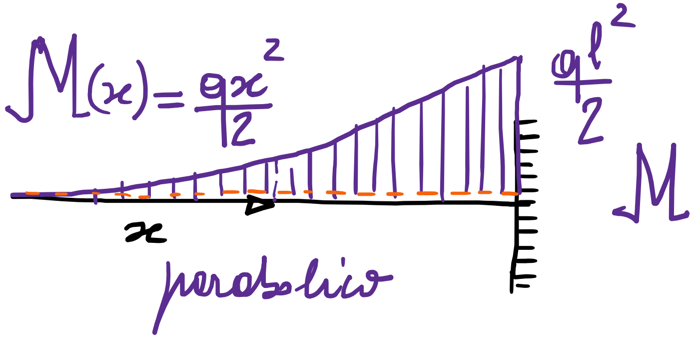
P Spost. V

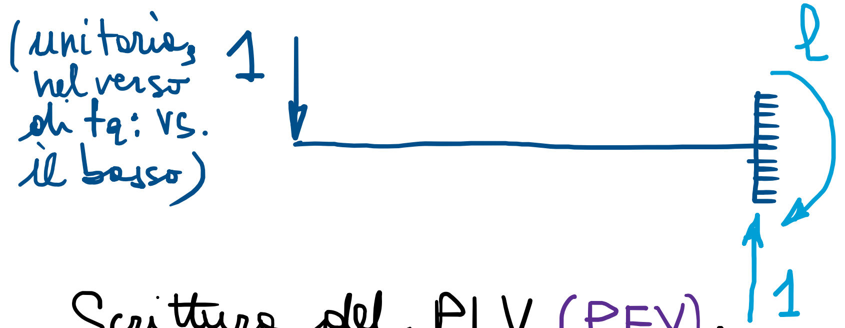
- Calcolo di RV e AI tramite PLV nei sistemi articolati di corpi rigidi ($\mathcal{L}_e^{AB} = 0$) [CdSdC]

Calcolo di componenti di spostamento di travi deformabili:

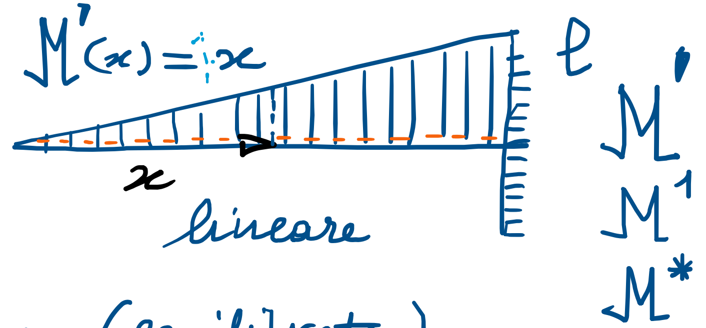


Ⓑ Struttura reale
(2→ congruente)





Ⓐ Struttura virtuale
(fittizia, ausiliaria)
avente solo forza unitaria
in corrispondenza della
componente di spost. da calcolare (equilibrata)



Scrittura del PLV (PFV):

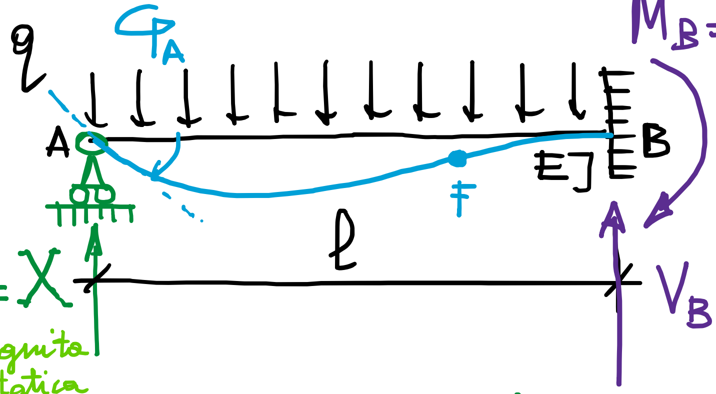
$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1\, f_q + 1\, \cancel{v_B}^{\,0} + \ell\, \cancel{\varphi_B}^{\,0} = \int_{Str} M'\, d\varphi_e = \int_{Str} M' \frac{M\,dx}{EJ} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

vincoli perfetti (non cedevoli)

$$f_q = \int_0^\ell M'(x)\, M(x)\, \frac{dx}{EJ} = \int_0^\ell x\, \frac{qx^2}{2}\, \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{2}\, \frac{q}{EJ}\, \frac{x^4}{4}\Big|_0^\ell = \boxed{\frac{1}{8}\, \frac{q\ell^4}{EJ} = f_q}$$

- Il PLV, come metodo di calcolo, consente di calcolare "chirurgicamente" le sole quantità di specifico interesse.
- Di fatto, si è resa necessaria la risoluzione "statica" di un'altra struttura (due strutture isostatiche)

Risoluzione di strutture iperstatiche tramite PLV (PFV):



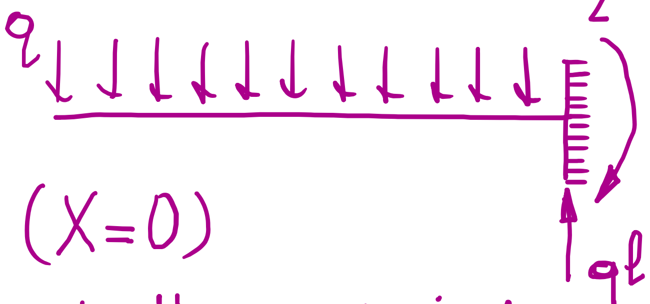
$M_B = \frac{q\ell^2}{2} - X\ell$

$V_B = q\ell - X$

$V_A = X$ incognita iperstatica

Ⓑ Sistema reale (⇒ congruente)

$=$



$\frac{q\ell^2}{2} = M_B^0$

$q\ell = V_B^0$

$(X = 0)$

struttura principale isostatica

$+ X$

Ⓐ Sistema "virtuale" (equilibrato)

$-\ell = M_B^{\triangledown}$

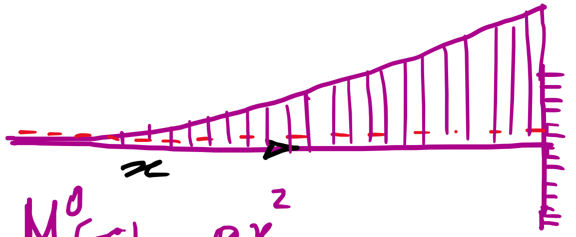
$1 = X$

$-1 = V_B^{\triangledown}$

struttura fittizia (con l'iperstatica posta uguale a 1)

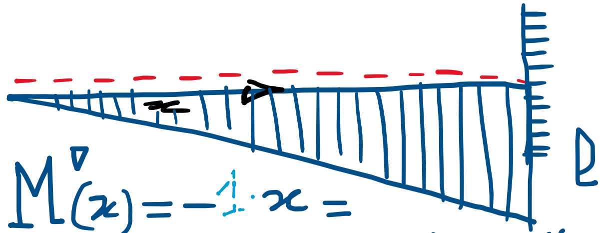
$RV(X) = \quad RV^0 \quad + X \; RV^{\triangledown}$

Sovrapposizione degli effetti



$M^0(x) = \frac{qx^2}{2}$

$+ X$



$M^{\triangledown}(x) = -1 \cdot x = M^1 = M^*, \text{ecc.}$

Scrittura del PLV:

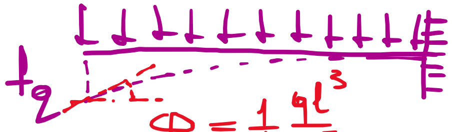
$M(X, x) = M^0(x) + X\, M^{\triangledown}(x)$

$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1\, \cancel{v_A} - 1\, \cancel{v_B} - \ell\, \cancel{\varphi_B} = \int_{str} M^{\triangledown} \underbrace{\frac{\overbrace{M^0 + X M^{\triangledown}}^{M(X,x)}}{EJ}\, ds}_{d\varphi_e} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow 0 = \int_{str} M^{\triangledown} M^0 \frac{ds}{EJ} + X \int_{str} M^{\triangledown 2} \frac{ds}{EJ}$$

$\{v_A = 0\}$ condizione di congruenza

$$\boxed{X = -\frac{\int_{str} M^{\triangledown} M^0 \frac{ds}{EJ}}{\int_{str} M^{\triangledown 2} \frac{ds}{EJ}}}$$

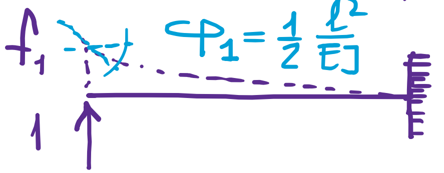
- $\int_0^l M^{\nabla}_{(x)} M^0_{(x)} \frac{dx}{EJ} = \int_0^l (-x)\, \frac{q x^2}{2} \frac{dx}{EJ} = -\frac{1}{2}\frac{q}{EJ}\frac{x^4}{4}\Big|_0^l = \boxed{-\frac{1}{8}\frac{q l^4}{EJ}} = \boxed{-f_q}$



$\varphi_q = \frac{1}{6}\frac{q l^3}{EJ}$

$\left(f_F = \frac{1}{3}\frac{F l^3}{EJ}\right)$

- $\int_0^l M^{\nabla 2}_{(x)} \frac{dx}{EJ} = \int_0^l (-x)^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ} = f_1 = \frac{f_F}{F}$



$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{l^2}{EJ}$

$X = -\frac{-\frac{1}{8}\frac{q l^4}{EJ}}{\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}} = \frac{3}{8} q l \iff v_A = -f_q + X f_1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{-f_q}{f_1}$

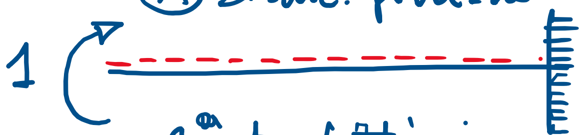
condizione di congruenza

metodo delle "forze"

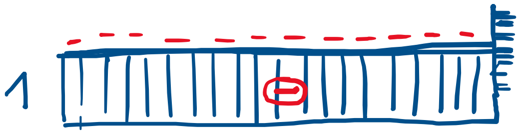
coefficienti di influenza

- Sostituendo in RV(X), M(X, x) => RV finali, M finale (idem per N e T)
- A valle, calcolo di componenti di "spostamento" di interesse, per ulteriori scritture del PLV:

Ⓐ Strutt. fittizia



2ª strz. fittizia



$M^{\nabla\nabla} = -1$

M^2

$M^{\nabla\nabla}$

Ⓑ Sist. reale

$$1\,\varphi_A = \int_0^l M^{\nabla\nabla}_{(x)} \Big(M^0_{(x)} + \underbrace{X}_{\frac{3}{8} q l} M^{\nabla}_{(x)}\Big) \frac{dx}{EJ}$$

$$= \int_0^l M^{\nabla\nabla}_{(x)} M^0_{(x)} \frac{dx}{EJ} + X \int_0^l M^{\nabla\nabla}_{(x)} M^{\nabla}_{(x)} \frac{dx}{EJ}$$

$$= -\varphi_q + X \varphi_1 \Leftarrow \text{sovrapposizione degli effetti}$$

$-\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\frac{1}{2} = \frac{-8+9}{48}$

$\varphi_A = \frac{1}{48}\frac{q l^3}{EJ}$