

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

~~~~~

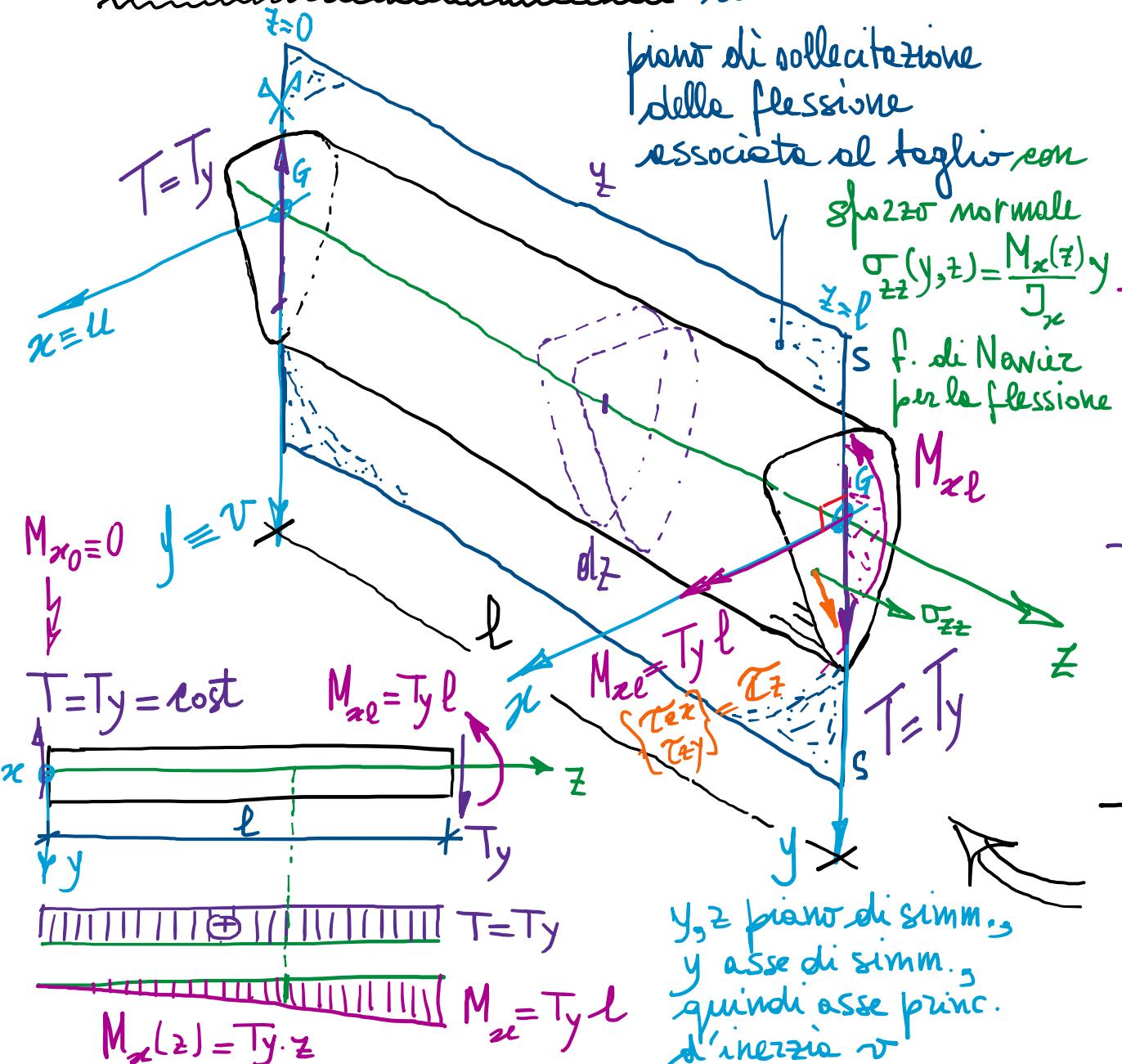
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 22

### 3) Azione tagliente o taglio (flessione composta)



- Risultano presenti delle azioni taglienti (uguali e contrarie) sulle basi e un momento flettente, in modo da avere un sistema di forze autoequilibrato, anche alle rotazioni  $\rightarrow$  sollecitazione composta.

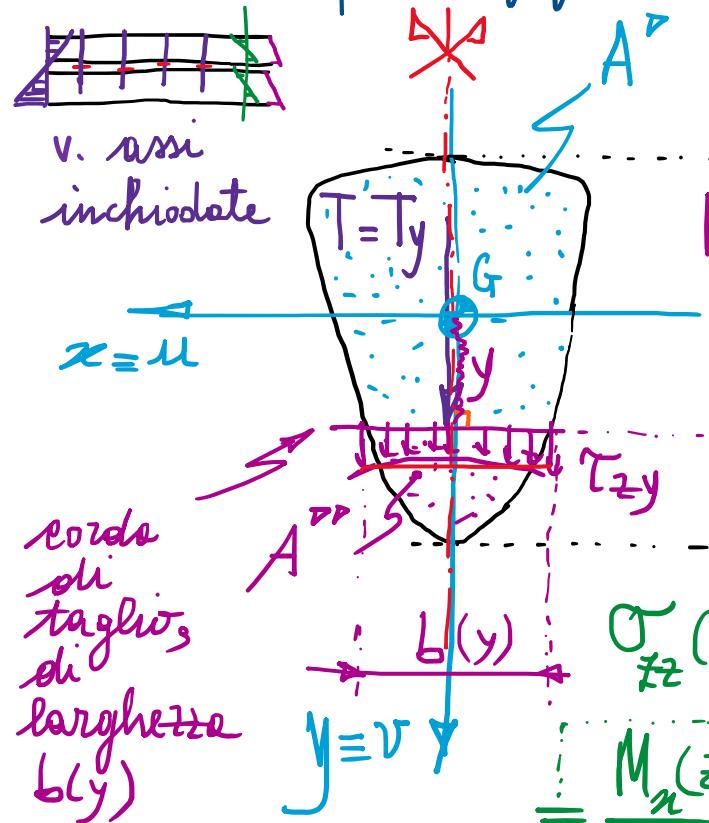
- In generale, la trattazione del caso di DSV del taglio non si presenta agevole: soluz. analitice possibile per casi particolari, anche mediante sviluppi in serie.

- Soluzioni approssimate risultano possibili e utili a determinare il campo delle tensioni tangenziali a fini ingegneristici, in particolare per casi specifici.

- Ad esempio, nel caso di prisme a sezione compatta avendo un asse di simmetria retta e caricato lungo l'asse di simmetria, che pertanto è esse princ. d'inerzia ( $\rightarrow$  flessione retta), si ottiene stima efficace delle tasse di taglio.

• Trattazione approssimata del taglio secondo D. J. Jourawsky (~1856)

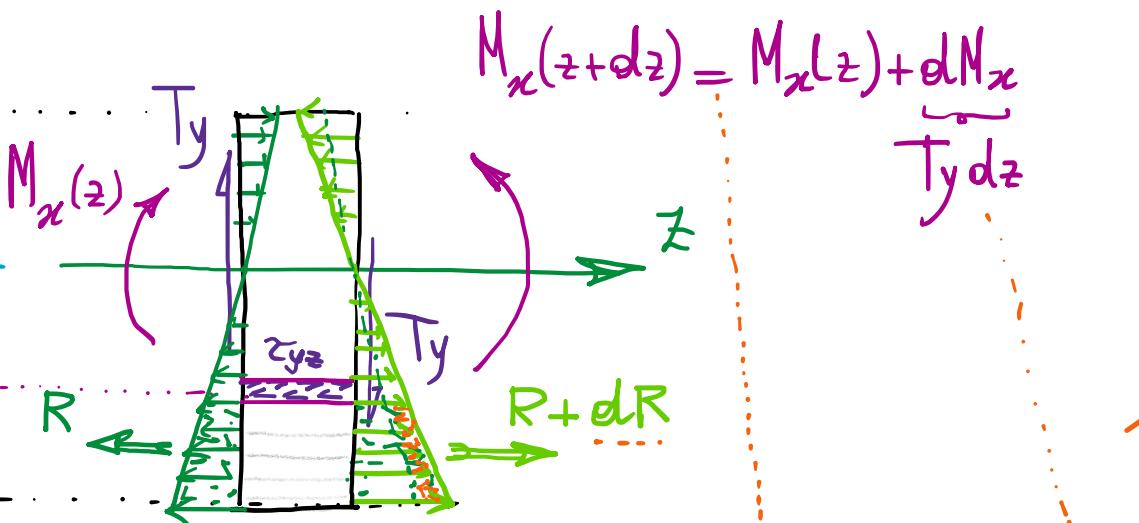
Utile a fini ingegneristici e fondata sul ragionamento di equilibrio (alle tracce) seguente.



$T_{zy}(x; my)$  ottenuta simmetriche rispetto a  $y$   
 (ad es. maggiori verso l'esterno, bordo non protetto)

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{M_x(z)}{J_x} y$$

formule di Navier per le flessioni (indip. da  $x$ )



$$M_x(z+dz) = M_x(z) + dM_x$$

$$T_y dz$$

$$M_x(z) = T_y z$$

$$\frac{dM_x}{dz} = M_x'(z) = T_y$$

$$\frac{dM_x}{dz}$$

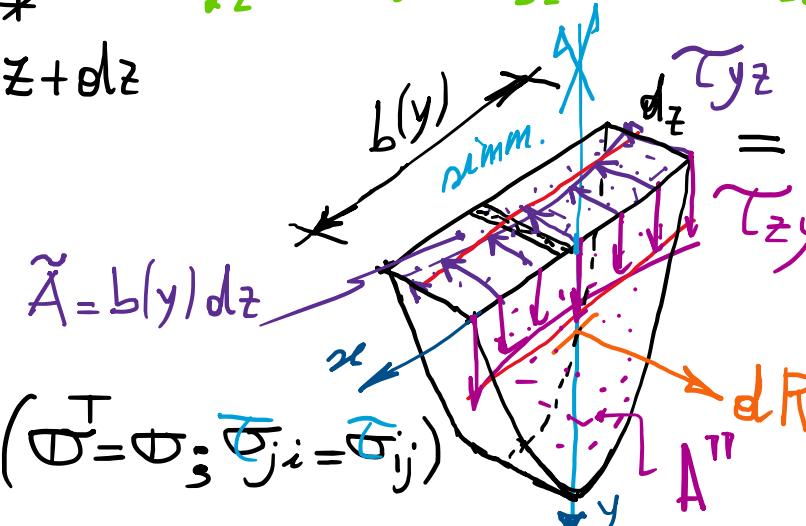
$$d\sigma_{zz} = \frac{T_y dz}{J_x} y \leftrightarrow dR$$

Equil. alle tracce nelle direzione  $z$ :

Risultante delle  $T_{yz}$  su  $\tilde{A}$

$$=$$

Risultante  $dR$  su  $A''$  dorata a  $\sigma_{zz}$



## Equilibrio alle traslazioni (in direzione z):

$$\int_{\tilde{A}} \tau_{yz}(x; y) dx dz = \int_{A''} \frac{d\sigma_{zz}}{dz} dA'' = \int_{A''} \frac{T_y dz}{J_x} y dA'' = \frac{T_y dz}{J_x} \int_{A''} y dA'' \quad \begin{array}{l} \text{momento statico} \\ \text{di } A'' \text{ rispetto} \\ \text{a } x \end{array}$$

$$\bar{\tau}_{yz}(y) b(y) = \frac{T_y}{J_x} S_x''(y)$$

valor medio delle

$\tau_{yz}(x; y)$  alle quote y  
lungo la corda

definiz.  
di valor  
medio  
su di  
un  
intervallo

$$\bar{\tau}_{yz}(y) = \frac{1}{b(y)} \int_{-\frac{b(y)}{2}}^{+\frac{b(y)}{2}} \tau_{yz}(x; y) dx$$

Si ipotizza che le  $\tau_{zy}(x; y)$  risultino fuori dal loro  
valor medio lungo la  
corda, quindi costanti lungo di esse.

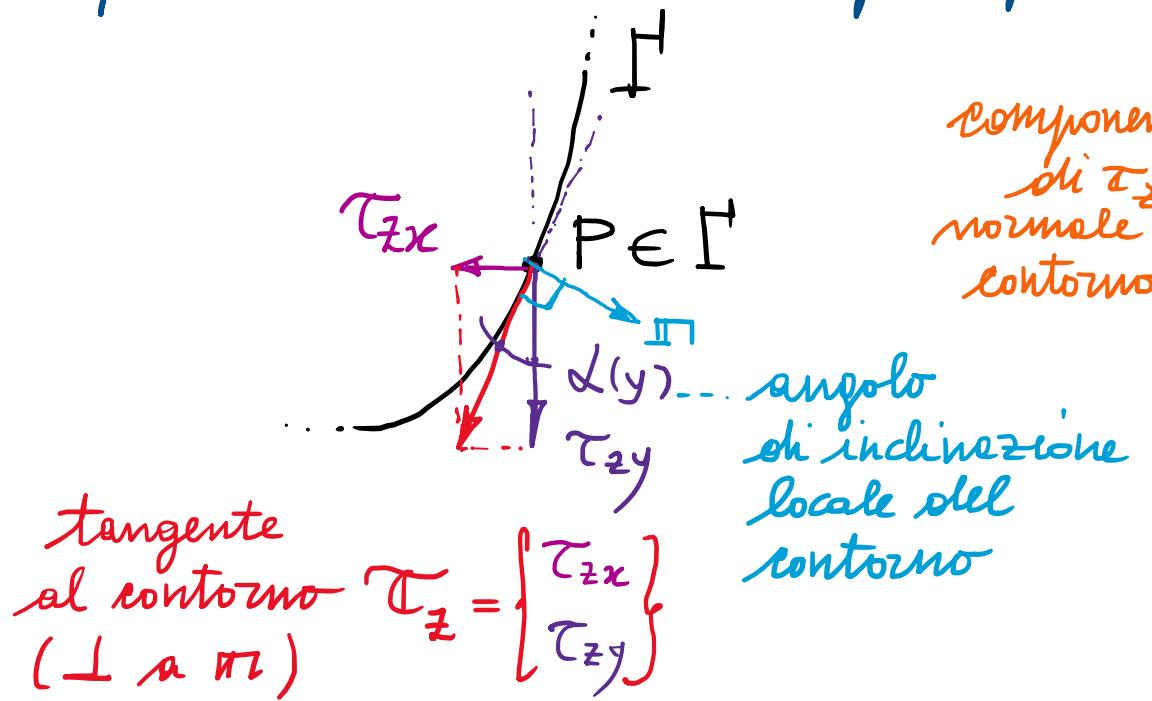
$$[\text{asse } x \text{ barientrico, } G \in x : S_x = S_x' + S_x'' = 0 \Rightarrow S_x'' = -S_x']$$

Formule di Jouzawsky sul valor medio

delle  $\tau_{zy}$  lungo le corde:

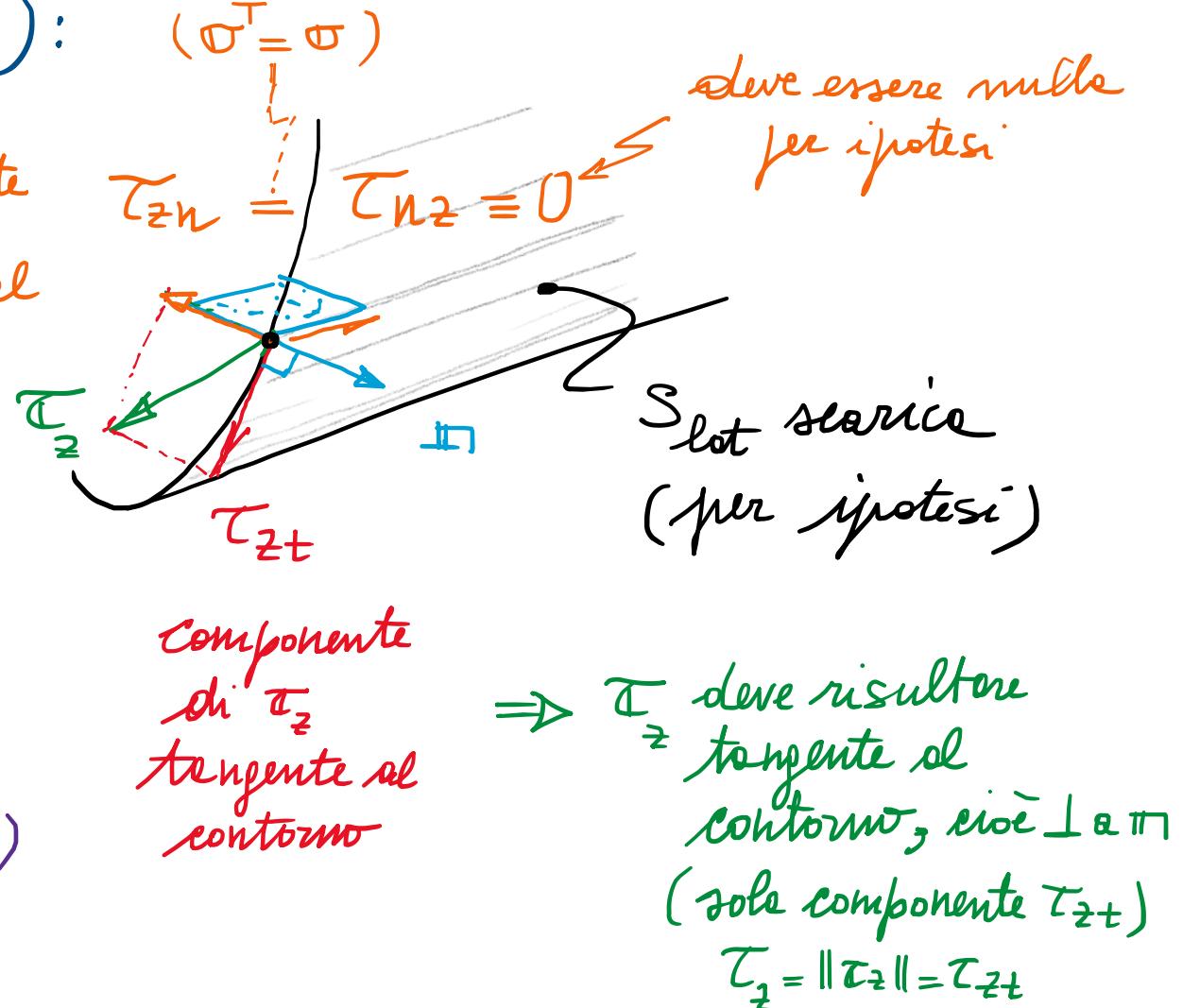
- dirett. prop. al taglio  
applicato  $T_y$
- dirett. prop. al momento  
statico delle porzioni  $A''$   
rispetto all'asse  $x$  (esse  
neutrali della flessione retta  
associate al taglio)
- invers. prop. al momento  
d'inizio dell'intera sezione  
rispetto all'asse  $x$
- invers. prop. alla larghezza  
della corda alle quote  $y$

- Inoltre, se il contorno della sezione risulta inclinato rispetto all'asse di simmetria (asse  $y$ ), dovranno risultare presenti anche delle  $\tau_{zx}$ , in modo tale che sui punti del contorno il vettore  $\tau_z$  risulti tangente al contorno (in quanto le superficie laterale del prisma di DSV è scarica, per ipotesi):



$$\text{In } P \in \Gamma: \tau_{zx}(y) = \tau_{zy}(y) \tan \alpha(y)$$

$$x = \pm \frac{b(y)}{2}$$



- Ancora, l'andamento delle  $\tau_{zx}$  lungo le corde, alle quote  $y$ , è ottenso antisimm. rispetto all'asse  $y$  - (per la simmetria delle sezioni).

- In più, coerentemente con l'ipotesi  $\tau_{zy}(y) = \text{cost} = \bar{\tau}_{zy}$ , secondo Jourawsky, dalle terze eq. ne indefinite di equilibrio, si ottengono  $\tau_{zx}$  lineari in  $x$ :

$$\cancel{\text{div } \sigma + F = 0 \text{ in } V} \Leftrightarrow \sigma_{ij,j_i} + \cancel{F_j} = 0_j \quad j = \underset{x,y,z}{1,2,3}$$

$\textcircled{1}$

*forze di volume  
nulle per hyp.*

$$j = \frac{3}{2} \quad \left( \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \right) \frac{\partial}{\partial x} = \tau_x$$

$$\tau_{zx,xx} + \tau_{zy,yx} + \sigma_{zz,zx} = 0$$

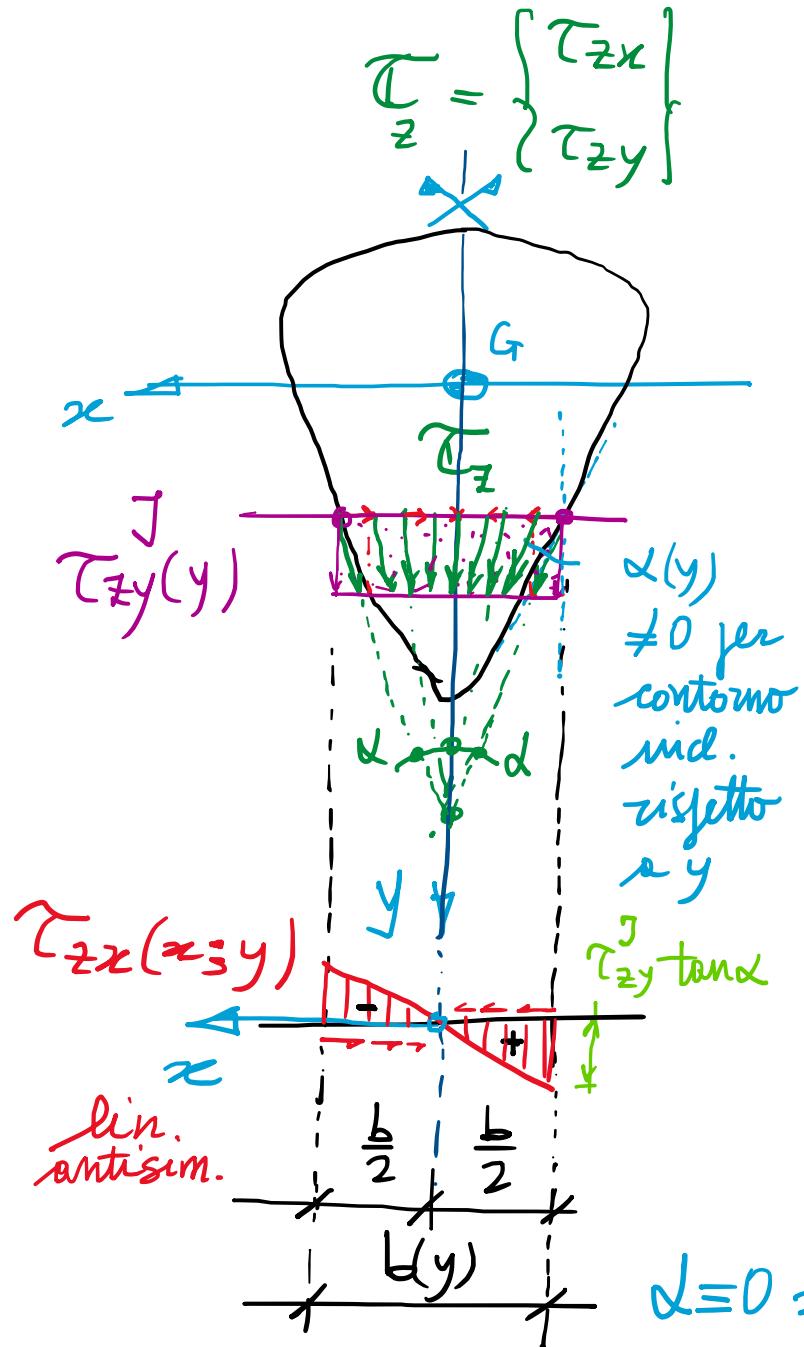
$\tau_{zx}$  lineari  
(e antisimmetriche)  
in  $x$

$$0 = \tau_{zx,xx} + \tau_{zy,yx} + \sigma_{zz,zx} = 0$$

Jourawsky

$$\tau_{zy} = \text{cost} = \bar{\tau}_{zy}$$

th. di Schwarz sulla  
invertibilità dell'ordine  
delle derivate



Campo delle tensioni tangenziali (in sez. simmetrica):

$$\tau_{zx}(x; y) = - \frac{\tau_{zy}^J(y) \tan \alpha(y)}{b(y)/2} \cdot x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \tau_{zx}(x; y) = - 2 \frac{\tan \alpha(y)}{b(y)} \tau_{zy}^J(y) \cdot x \\ \bullet \tau_{zy}^J(y) = \frac{T_y S_x''(y)}{J_x b(y)} = \text{cost in } x \end{array} \right.$$

N.B.:  $\tau_{zy}^J$  ove  $\frac{S_x''(y)}{b}$  è max

$$\tau_z(x, y) = \|\tau_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^J} = \tau_{zy}^J \sqrt{1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b^2(y)} x^2}$$

$$\alpha=0 \Rightarrow \tau_{zx}=0 \quad (\alpha \text{ piccolo}, \tau_{zx} \text{ piccolo}, \tau_z \approx \tau_{zy}^J)$$

## Risoluzione struttura:

- AC (iso + iper)
- RT ( $RT_{iso} + RT_{iper}(X)$ )  $\leftrightarrow$  equilibrio ✓
- $N, T, M$  iso  $\rightarrow$  verifica degli equil. nodali in scale, stesse scale
- analisi sottostrutt. iperstatica col PLV  $\rightarrow$   $X_{PLV}$
- $RV(\leftarrow X)$  finali  $\rightarrow N, T, M$  iper
- " " " con LE  $\rightarrow X_{LE}, y_i(x_i)$
- valutazione di spost. di interesse (nel sist. globale  $x_i, y_i$ ) /  $EJ$
- tracciamento delle deformate qualitativa  $\leftrightarrow$  guardando  $M$
- calcolo degli spostamenti col PLV

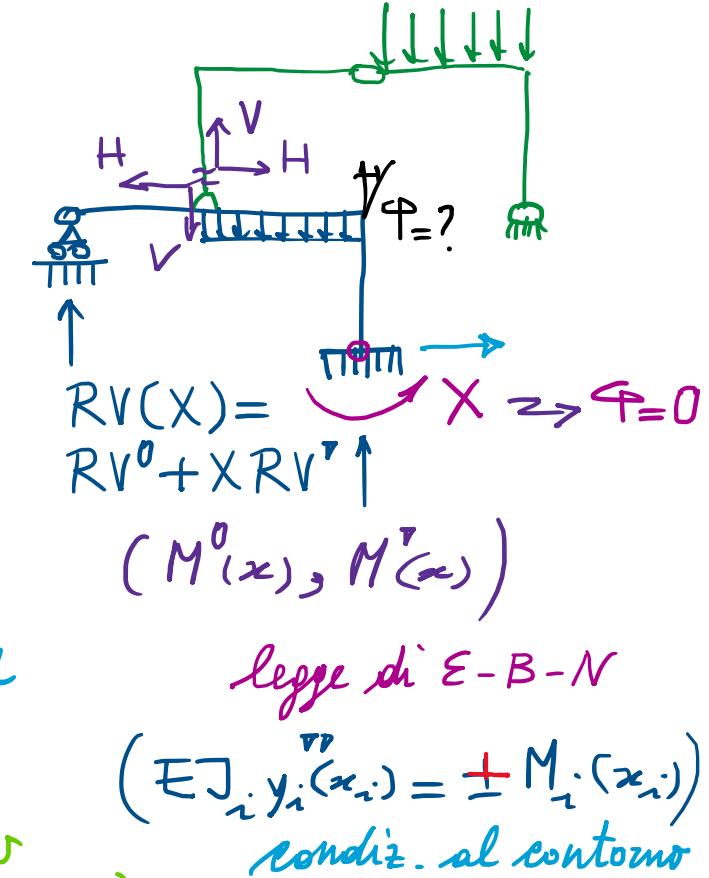
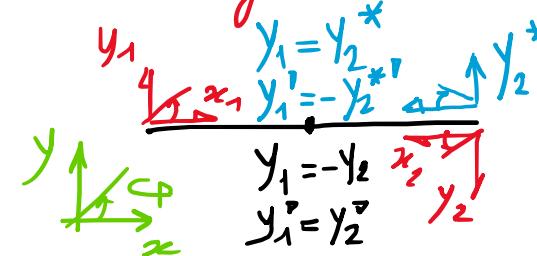


Diagram illustrating beam deflection and boundary conditions:

Deflection curve equation:

$$y_i = \frac{M}{EJ} x_i$$

Boundary condition at node  $i$ :

$$M > 0 \quad y_i'' > 0$$