

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

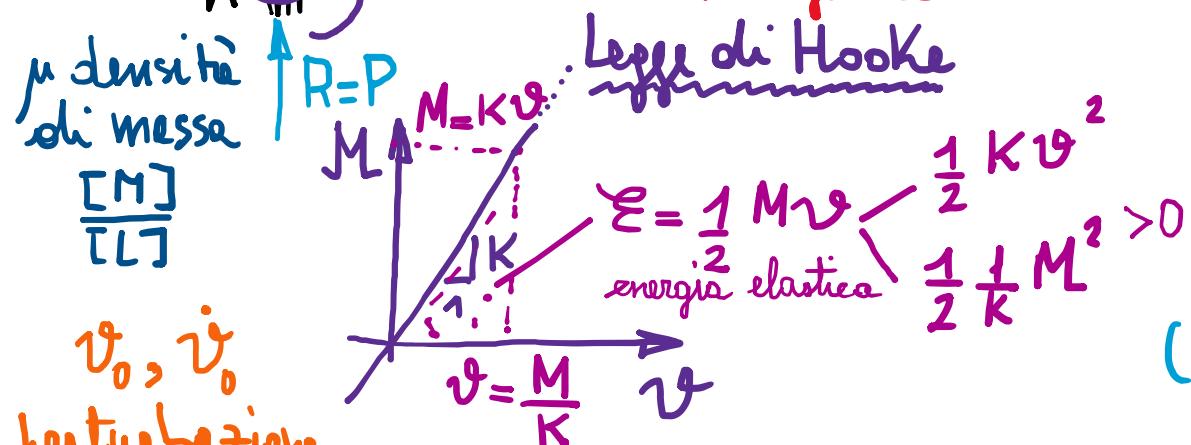
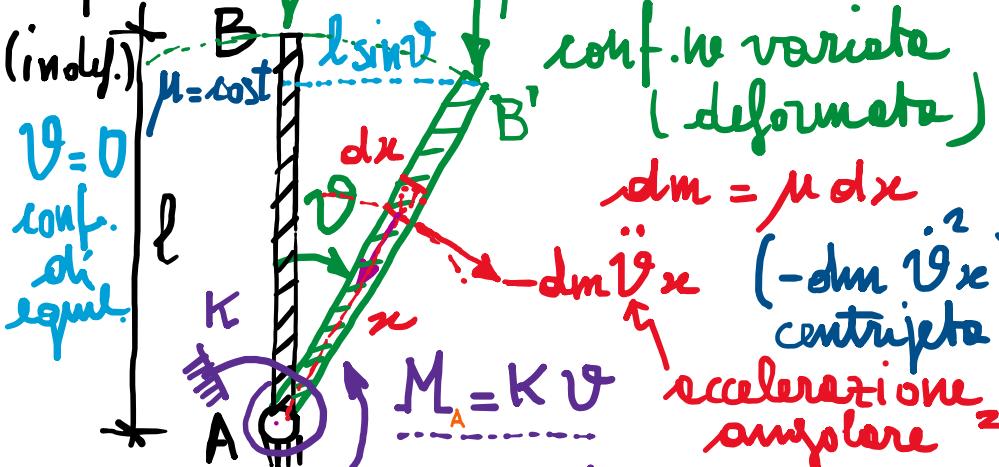
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

II - Instabilità delle Strutture

conf. ne di riferim.
ref. (indif.)



perturbazione iniziale
(piccole entità)

molla elastica lineare
(molla rotazionale)

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{K}$$

(Introduzione ai sistemi discreti - SDOF)

- Sistemi a deformabilità elastica concentrate
- Forze conservative (campo gravitazionale):
 - P e direz. verticale costante (no forze "follower")
 - di intensità costante (o variabile in maniera "quasi-statica") $\rightarrow P = p P_0 > 0$
 - P_0 = carico base
 - p = moltiplicatore del carico
 - $p = \frac{P}{P_0}$

Eq. ne di "equilibrio dinamico" (ella rotazione rispetto alle momenti ribalt. mom. 0 momento ermine A)

$$P l \sin \vartheta = K \vartheta - \int_{0}^{l} (-dm) \dot{\vartheta}_x \, dx$$

effetto stabilità

non-lineare

$$\text{eq. ne del moto: } P l \sin \vartheta = K \vartheta + \mu \int_{0}^{l} x^2 dx \dot{\vartheta}$$

$I = \frac{1}{3} \mu l^3$ momento d'inerzia

Eq. del moto: $P_l \sin\vartheta = I \ddot{\vartheta} + K \vartheta$ [eq. del moto non-lin.]

$$(I \ddot{\vartheta} + K \vartheta - P_l \sin\vartheta = 0)$$

lin. non-lin.

$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$

Analisi per spostamenti "geometricamente piccoli" ($|\vartheta| \ll 1$) $\Rightarrow \sin\vartheta \approx \vartheta$

$I \ddot{\vartheta} + (K - P_l) \vartheta = 0$ $\Rightarrow \ddot{\vartheta} + \frac{K - P_l}{I} \vartheta(t) = 0$ (linearizzazione dell'eq. del moto)

mom. $\underbrace{\quad}_{\text{eq. ne lineare}}$

d'inerzia rigidezza: $K_{\text{elast}} - K_g$ rigidezza "geometrica" (sottrae rigidezze del sistema, al crescere del carico P)

$I > 0$ rigidezza totale

1) $K - P_l > 0$; $P < \frac{K}{l}$ $\Rightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta(t) = 0$ $\omega_1^2 = \frac{K - P_l}{I}$ (dip. del valore di P) \downarrow per P

(caso sub-critico) eq. dei moti armonici

Sistema stabile (secondo criterio di stabilità

dinamico di LIAPUNOV).

il sistema non tende ad abbondare le conf. re di rif. (di equil.), oscillando di poco intorno ad esse ($+\delta\text{magg.}$) che attenua progressivamente l'oscillazione

e.i. $\begin{cases} \dot{\vartheta}_0 = A \\ \ddot{\vartheta}_0 = \omega_1 B \end{cases}$

$\vartheta(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t = \vartheta_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$

moto armonico

- di pulsaz. $\omega_1(P)$

- di ampiezza $\sqrt{\vartheta_0^2 + \frac{\dot{\vartheta}_0^2}{\omega_1^2}}$ (piccole)

attorno alle conf. re di riferimento

$$2) K - Pl = 0; \quad P = \frac{K}{\ell} \Rightarrow I \ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta(t) = A + Bt$$

Perdite di stabilità delle config. di equil. $\dot{\vartheta} = 0$: sistema tende a divergere, cioè ad abbandonarla
 Condizione di transizione $P_{cr} = \frac{K}{\ell}$

carico critico

$$3) K - Pl < 0; \quad P > \frac{K}{\ell} \Rightarrow \ddot{\vartheta} - \alpha^2 \vartheta = 0$$

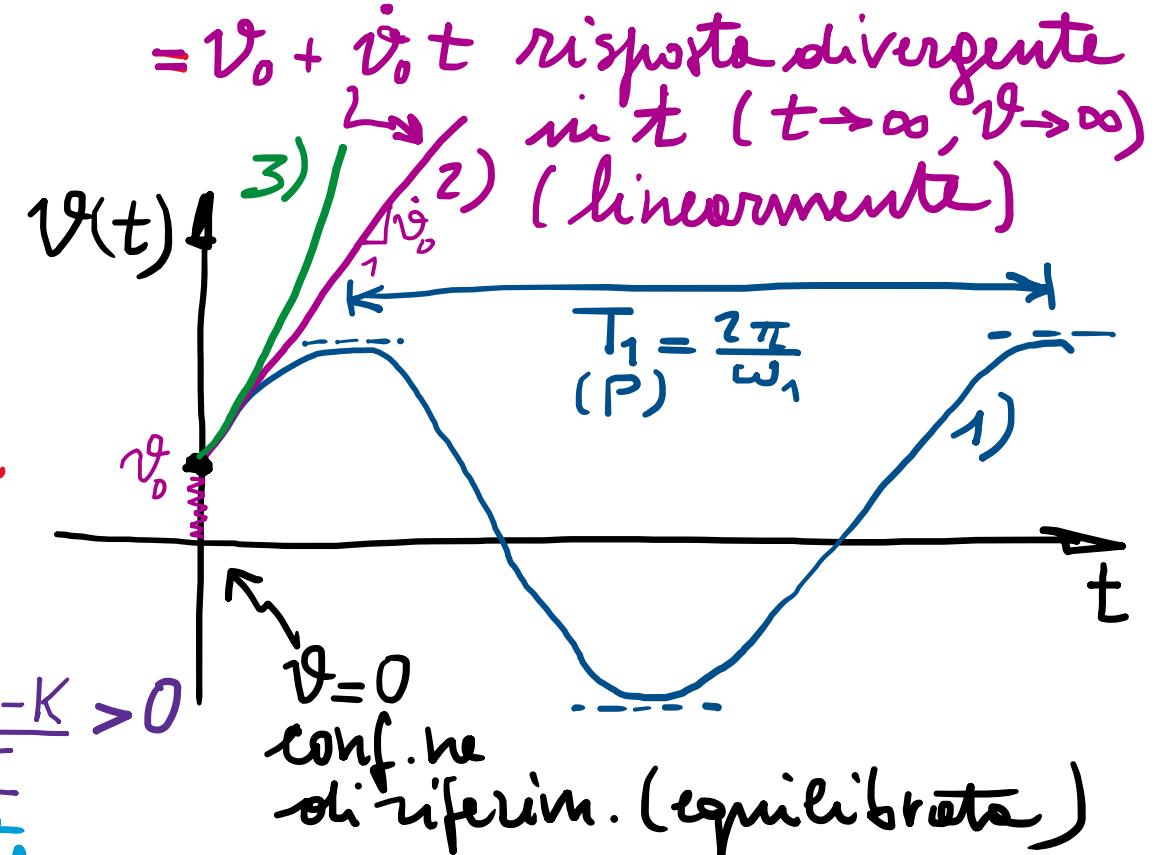
eq. ne corrett. ($e^{\lambda t}$)

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha \Rightarrow e^{\pm \alpha t}$$

$$\vartheta(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}_0 + \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}_0 - \frac{\dot{\vartheta}_0}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}$$

caso supercritico



esponenzialmente in t $P = p P_{cr} = p \frac{K}{\ell}$ ($p = \frac{1}{\ell}$ carico unitario)

In sintesi:

- Stabile $P < P_{cr} = \frac{K}{\ell}$ ($p < 1$)
- Instabile $P \geq P_{cr} = \frac{K}{\ell}$ ($p \geq 1$)

Approccio Attico

eq. di equil.

$$P_l \sin \vartheta = k \vartheta$$

eq. non lineare in ϑ

$$\sin \vartheta = \frac{k}{P_l} \vartheta$$

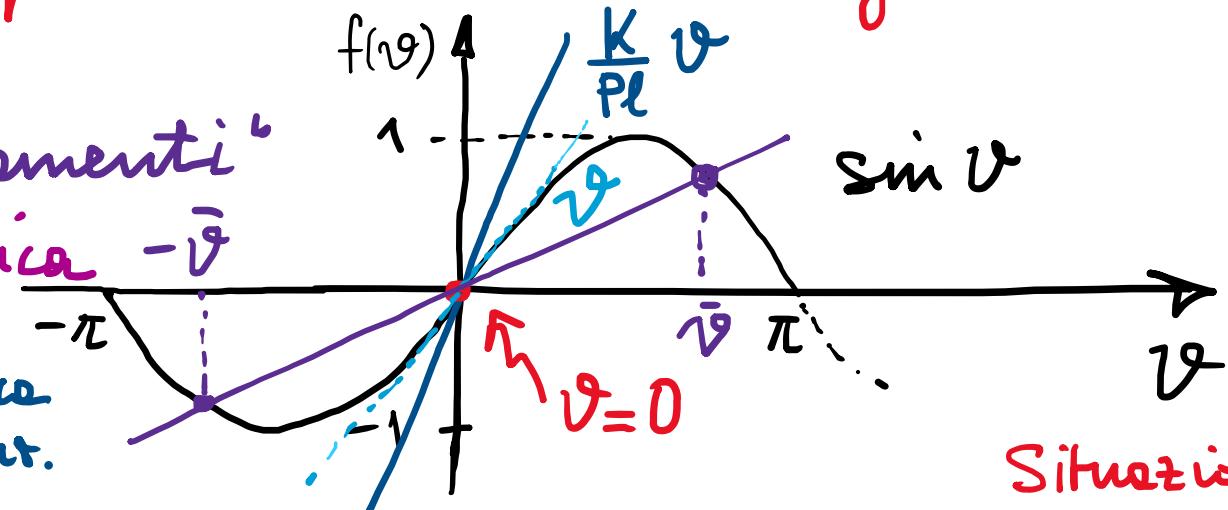
($\vartheta=0$ è una conf. ne di equil.)

nelle conf. ne deformate (gli spostamenti sono tali da influenzare l'eq. ne di equilibrio):

- analisi in "grandi spostamenti"
- non-linearietà geometrica

$$1) \frac{K}{P_l} > 1; P_l < \frac{K}{l}$$

$\vartheta=0$ unica solut.



2) $\frac{K}{P_l} = 1; P_l = \frac{K}{l} = P_{cr}$ infinite soluzioni nell'intorno di $\vartheta=0$ transizione (critica): si

3) $\frac{K}{P_l} < 1; P_l > \frac{K}{l}$ più soluz. equil. $\begin{cases} \vartheta=0 \\ \vartheta=\pm\bar{\vartheta} \end{cases}$

$$\beta = \frac{P_l}{K}; \beta = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

$$I = P_{cr} = \frac{K}{l}$$

perdita di stabilità -

($P = \beta \frac{K}{l} = \beta P_{cr}; \beta_{cr} = 1$)

Situazione di

transizione

(critica): si

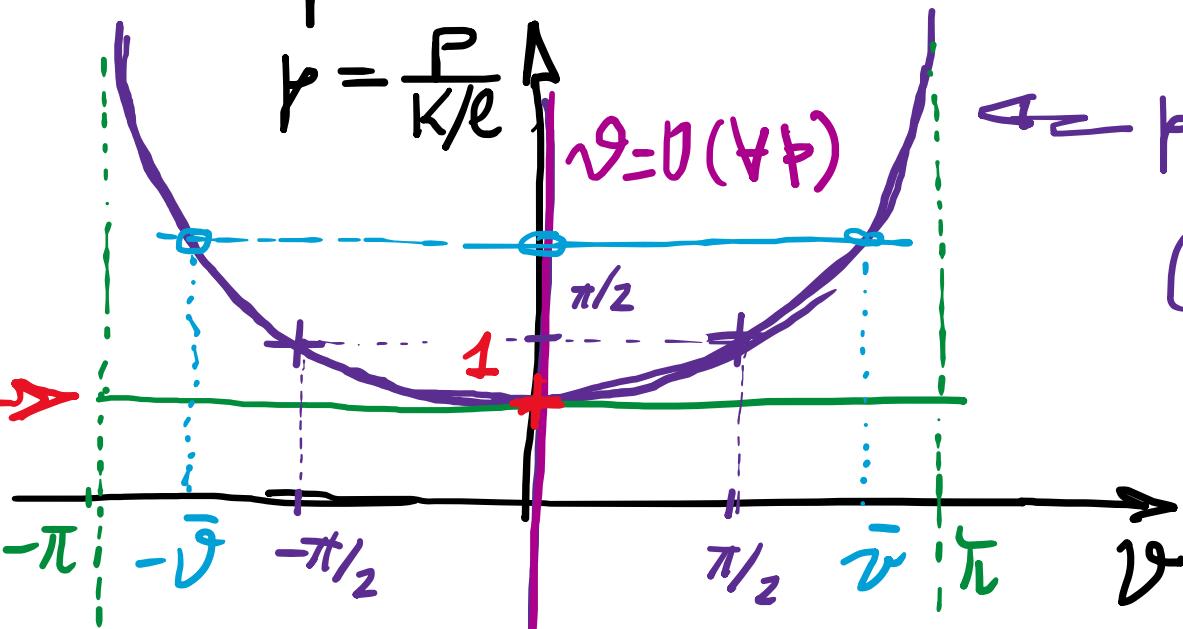
produce per lo stesso valore $P_{cr} = \frac{K}{l}$ preced.

det. con LIA+UNOV

- Mappa dei percorsi di equilibrio:

$$P = P_{cr} = \frac{K}{\ell} \quad (p=1)$$

p.t. di biforcazione \Rightarrow
dei percorsi di equilibrio



(f.n.e "pari" $P(\vartheta) = P(-\vartheta)$)

$$P = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}$$

(effetto P-Δ)

curva forza-spost.
non lineare

- Il corso critico viene deolatto in base alle presenti di un p.t. di biforcazione dei percorsi di equilibrio (perdita di unicità delle soluz.)

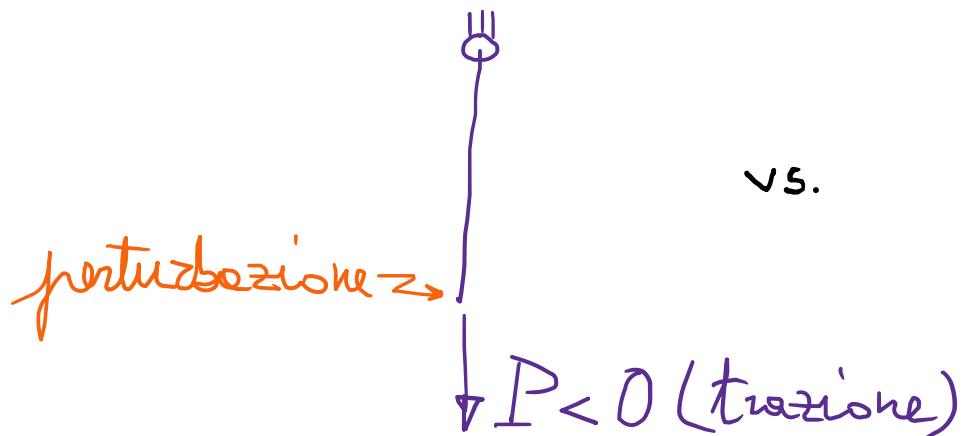
- Idem per analisi sui spostamenti "geometricamente nonlinei": (resto utile $|\vartheta| \ll 1 \Rightarrow \sin \vartheta \approx \vartheta \Rightarrow (K - Pl)\vartheta = 0$ $\begin{cases} K - Pl \neq 0 \Rightarrow \vartheta = 0 \text{ a determinare} \\ K - Pl = 0 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_{cr} \text{ per } P = \frac{K}{\ell} = P_{cr} \end{cases}$)
p.t. di biforcaz. per $P = \frac{K}{\ell} = P_{cr}$

Concetti fondamentali:

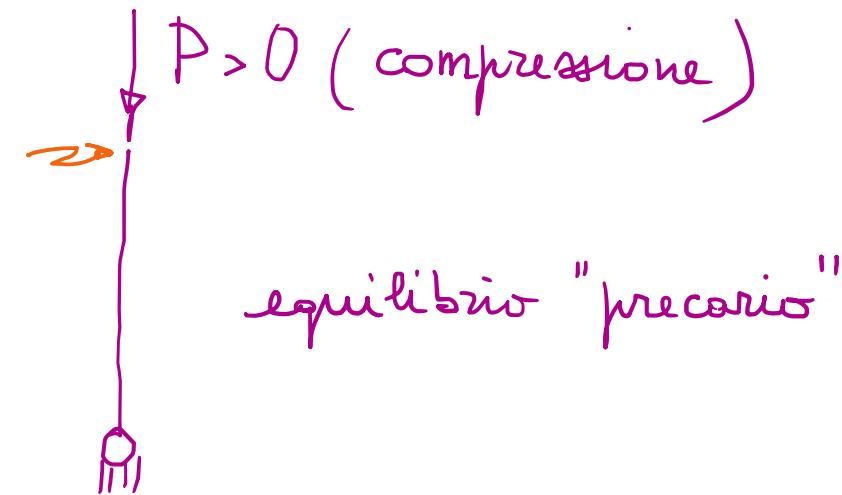
- Dalle Dinamica alle Instabilità delle Strutture :

Tornando ad un ambito "statico" (carichi lentamente variabili nel tempo), si mira ad indagare se le configurazioni di equilibrio risultino stabile oppure no.

- Per stabile, con criterio di stabilità "dinamico" (alla Liapunov), si intende la possibilità che piccole perturbazioni della configurazione non vengano ad alterarla, nel senso di far tendere il sistema ad abbandonarla .
- Due esempi intuitivi :

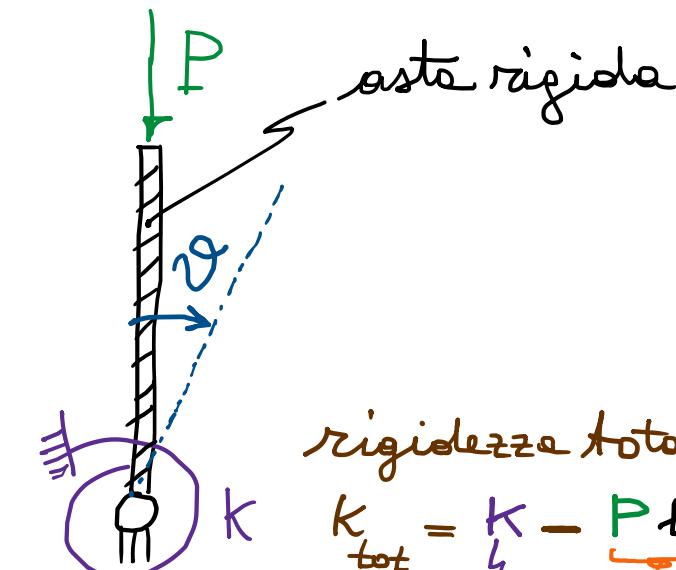


vs.



- L'analisi potrà richiedere di abbandonare l'ambito lineare, indagando effetti di non-linearità (geometrica) nelle relazioni tra carichi e spostamenti, ritenendo cioè gli spostamenti "grandi", vale a dire tali da influenzare le condizioni di equilibrio.
- Carico "critico": condizione "spartiacque" stabilità/mistabilità.

esempio
 discreto
 SDOF
 sistema a deformabilità
 elastica concentrata
 \Rightarrow molla (elastica lineare)



$$K_{\text{tot}} = \frac{K}{l} - \frac{P l}{\text{es. geom. piccoli}}$$

elasticità geometrica (sottrae rigidità)

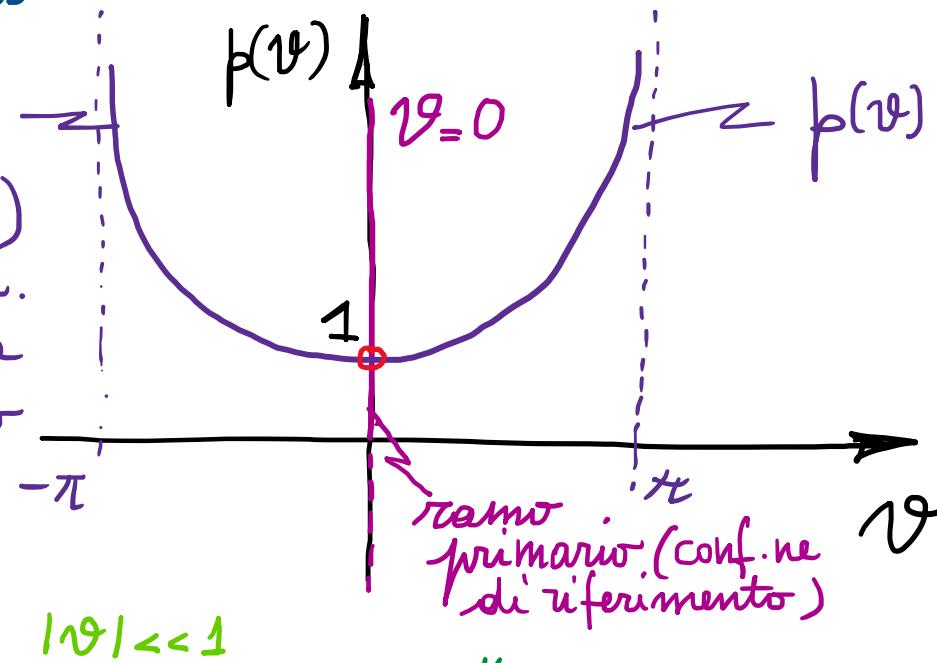
$$P_{\text{cr}} = \frac{K}{l}$$

parametro di
rigidezza
(elastica lineare)

parametro
geometrico del
sistema

- Approccio statico: carico critico olesotto come punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio

ramo biforcato \rightarrow
 (bifurcated branch)
 configurazioni di equil.
 deformate, discoste da
 quello di riferimento



$$P(v) = \frac{P(v)}{K/l} = \frac{v}{\sin v}$$

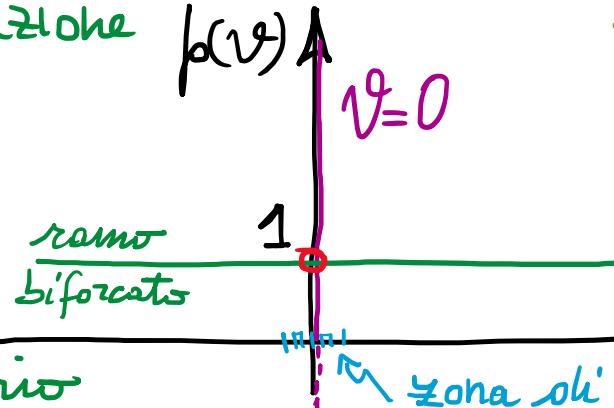
curva di risposta
 "carico-spostamento"
 non-lineare
 ("effetto P-Δ")

- Per spostamenti "geometricamente piccoli": linearizzazione dell'eq. di equilibrio e medesimo p.to di biforcazione per $P=1$:

$$(K - Pl)v = 0$$

$P \neq 1, v = 0$

$P = 1, v$ arbitrario



\Rightarrow analisi comunque utile
 ad individuare (più
 semplicemente) il carico
 critico $P_{cr} = \frac{K}{l}$

v zona di reale validità per v piccoli, $|v| << 1$

SOMMARIO (Lec. 16)

- Dalle Dinamica all'Instabilità delle strutture \Rightarrow criterio dinamico di stabilità secondo LIAPUNOV.
- Carico critico: valore caratteristico che segnala le perdite di stabilità del sistema (piccole perturbazioni non restano più confinate a risposta limitata).
- Transizione dinamica (verso il collasso).

Instabilità delle Strutture

- Approssimazione statica: scrittura dell'equilibrio nelle configurazioni deformate (perdite di unicità della soluzione).
- Non-linearità geometrica carico/spostamento.
- Carico critico: p.t.o di biforcazione nelle mappe dei percorsi di equilibrio.
- Analisi per spostamenti "geometricamente fricvoli" (coh stesso P_{cr}).

Next step: Approssimazione energetico per indagare la natura (stabile/instabile) delle configurazioni di equilibrio.