Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

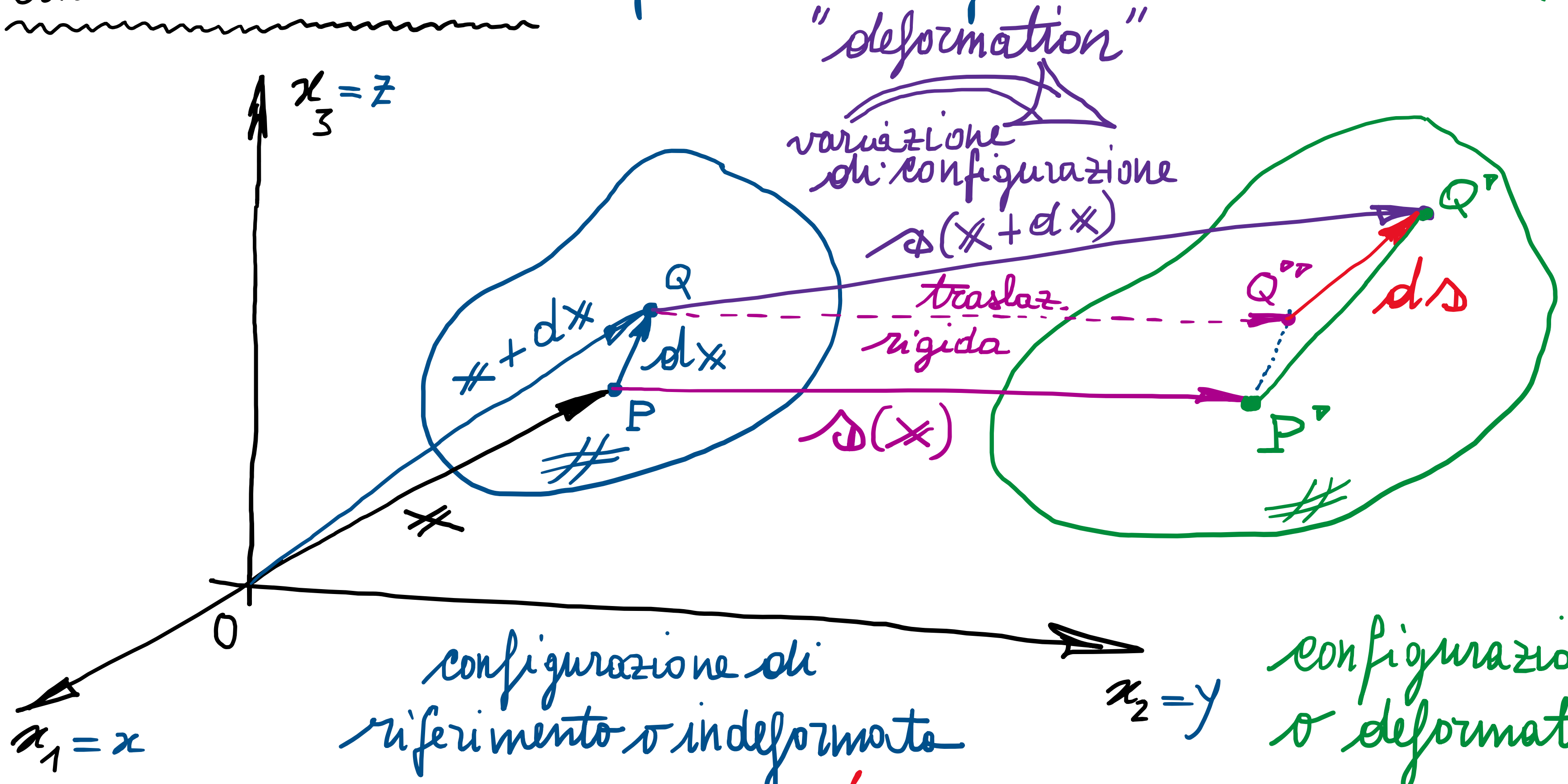
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2022/2023

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

Cinematica dei continui: spostamento e deformazione in ambito 3D (regime di piccole deformazioni)



$s(x)$ vettore spostamento (campo vettoriale) $s_i(x_k)$

(contiene componenti di traslazione rigida)

$$s(x+dx) = s(x) + \overbrace{\underbrace{\frac{\partial s(x)}{\partial x}}_{} \cdot dx}^{ds} + \dots \quad \rightarrow | \; 1^\circ \text{ ord.}$$

$$\Rightarrow \quad ds = \overbrace{\frac{\partial s(x)}{\partial x}}^{\Psi(x)} \cdot dx$$

$$ds_i = s_{i,j}\, dx_j$$

piccoli gradienti di spostamento

$$|\Psi_{ij}| \ll 1$$

~1‰, 1%

tensore gradiente di spostamento (2° ordine)

$$\Psi(x) = \nabla s(x) = \frac{\partial}{\partial x} s(x) \iff \Psi_{ij}(x_k) = \frac{\partial s_i(x_k)}{\partial x_j} = s_{i,j}$$

9 componenti

Decomposizione additiva di Ψ:

(sempre possibile) $\Psi = \mathcal{E} + \vartheta$

definizioni

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$ parte simmetrica ⇕ tensore di deformazione "piccola"

$+$

$\vartheta = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T)$ parte emisimmetrica ⇕ tensore di rotazione infinitesima

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$$

$$\mathcal{E}^T = \frac{1}{2}(\Psi^T + \Psi) = \mathcal{E} \Leftrightarrow \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} \quad 6$$

$$\vartheta^T = \frac{1}{2}(\Psi^T - \Psi) = -\vartheta \Leftrightarrow \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} \quad 3$$

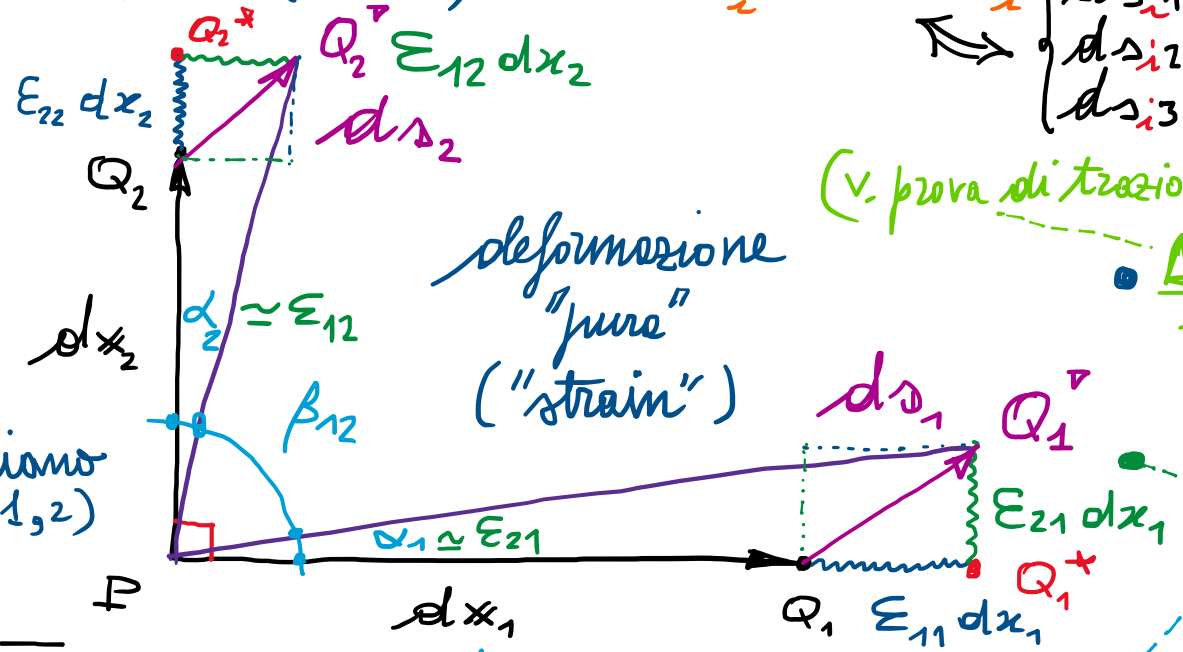
$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})$$

- Significato fisico delle componenti ε_{ij}

$\Psi = \mathcal{E} \ (\vartheta = 0) \Rightarrow ds_i = \mathcal{E} \cdot dx_i$

stato piano di def.

$$\begin{Bmatrix} ds_{i1} \\ ds_{i2} \\ ds_{i3} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdot \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{[\mathcal{E}]} \cdot \begin{Bmatrix} dx_{i1} \\ dx_{i2} \\ \cancel{dx_{i3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}\, dx_{i1} + \varepsilon_{12}\, dx_{i2} \\ \varepsilon_{21}\, dx_{i1} + \varepsilon_{22}\, dx_{i2} \\ \cdot \end{Bmatrix}$$



deformazione "pura" ("strain")

$\overline{PQ_i} = dx_i$

$\alpha_i \simeq \tan \alpha_i$

(v. prova di trazione)

- $\frac{\Delta l}{l_0} \simeq \frac{\overline{PQ_i^*} - \overline{PQ_i}}{\overline{PQ_i}} = \frac{(\cancel{1}+\varepsilon_{ii})\cancel{dx_i} - \cancel{dx_i}}{\cancel{dx_i}} = \varepsilon_{ii} \sim 1‰, 1\%$

allungamenti specifici di fibre $/\!/ \ x_i$

- $\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \beta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 \simeq \frac{\varepsilon_{21}\, \cancel{dx_1}}{(1+\cancel{\varepsilon_{11}})\, \cancel{dx_1}} + \frac{\varepsilon_{12}\, \cancel{dx_2}}{(1+\cancel{\varepsilon_{22}})\, \cancel{dx_2}}$

scorrimento angolare $= 2\varepsilon_{12}$

(v. prova di torsione)

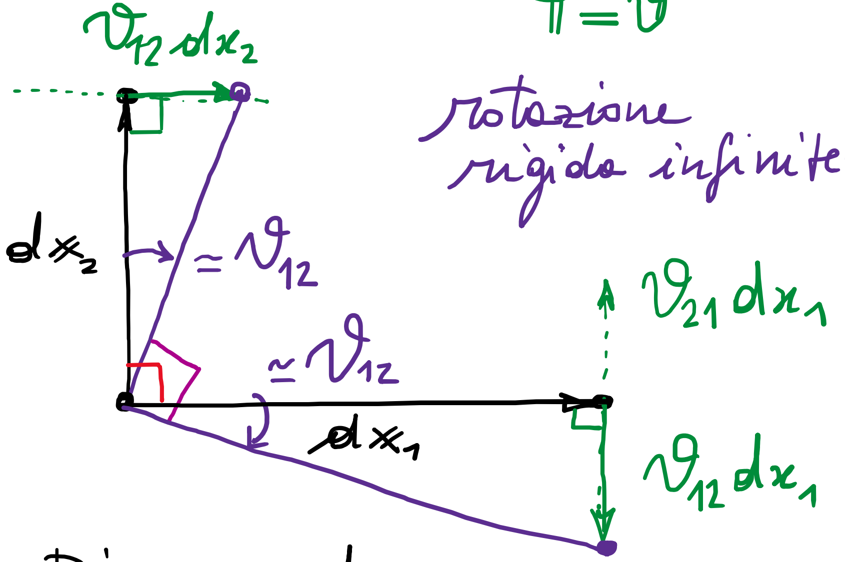
$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ deformazioni taglianti

- Significato fisico delle ϑ_{ij} : $\quad \vartheta_{ii} \equiv 0$ per $i=j$

$\Psi = \vartheta$

$$\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} \quad i \neq j$$

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \cdot \\ \vartheta_{21} = -\vartheta_{12} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$



rotazione rigida infinitesima

velocità angolare

$$-\dot{\vartheta}_3 = -\omega_3$$

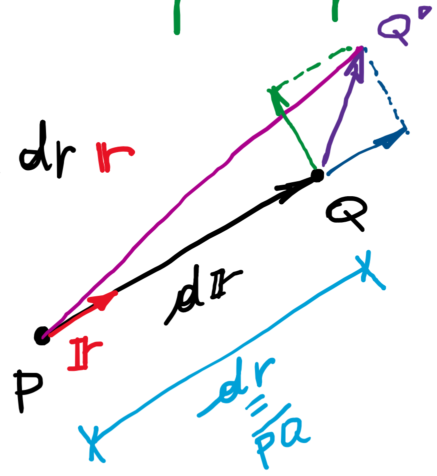
$$\vartheta_{12} \simeq \tan \vartheta_{12} = \frac{\vartheta_{12}\, \cancel{dx_1}}{\cancel{dx_1}}$$ (rotazione negativa rispetto all'asse x_3)

- Riassumendo:
  - il campo di spostamento contiene componenti di traslazione rigida e può rappresentare la deformazione pura ("strain") tramite il suo gradiente.
  - il gradiente di spostamento, nella sua parte emisimmetrica, può contenere una componente di rotazione rigida (infinitesima).
  - depurando il gradiente di spostamento della sua parte emisimmetrica, la sua parte simmetrica rappresenta l'effettiva deformazione pura infinitesima. Quindi, ε, tensore del secondo ordine simmetrico, rappresenta la misura intensiva cercata.

• Proprietà del tensore delle piccole deformazioni $\mathbb{E}$ (tensore doppio simmetrico) ⇒ vedi analisi svolta per il tensore sforzo di Cauchy σ, in statica dei continui.

• Deformazioni principali e direzioni principali di deformazione:

$d\mathbb{r} = dr\,\mathbb{r}$



$d\mathbb{s} = \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} \not\parallel d\mathbb{r}, \mathbb{r}$, in generale

Direzione principale di deformazione:

$$d\mathbb{s}_r = \underbrace{ds_r}\,\mathbb{r}_1 \parallel d\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_1$$

$$\mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \varepsilon_r \underbrace{dr\,\mathbb{r}}_{d\mathbb{r}}$$

$$\mathbb{E}\cdot \cancel{dr}\,\mathbb{r} = \varepsilon_r \cancel{dr}\,\mathbb{r}$$

$\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$; $\mathbb{r}_I, \mathbb{r}_{II}, \mathbb{r}_{III}$ ... $(\mathbb{r}_1 = \mathbb{n}_1^\circ)$

ε_r deformazioni principali ⇒ autovalori

$\mathbb{r}$ direzioni principali ⇒ autovettori

problema agli autovalori associato al tensore $\mathbb{E}$ ..... $\boxed{\mathbb{E}\cdot\mathbb{r} = \varepsilon_r\,\mathbb{r}} \Leftrightarrow (\mathbb{E} - \varepsilon_r\,\mathbb{I})\cdot\mathbb{r} = 0$

tensore identità del 2° ordine

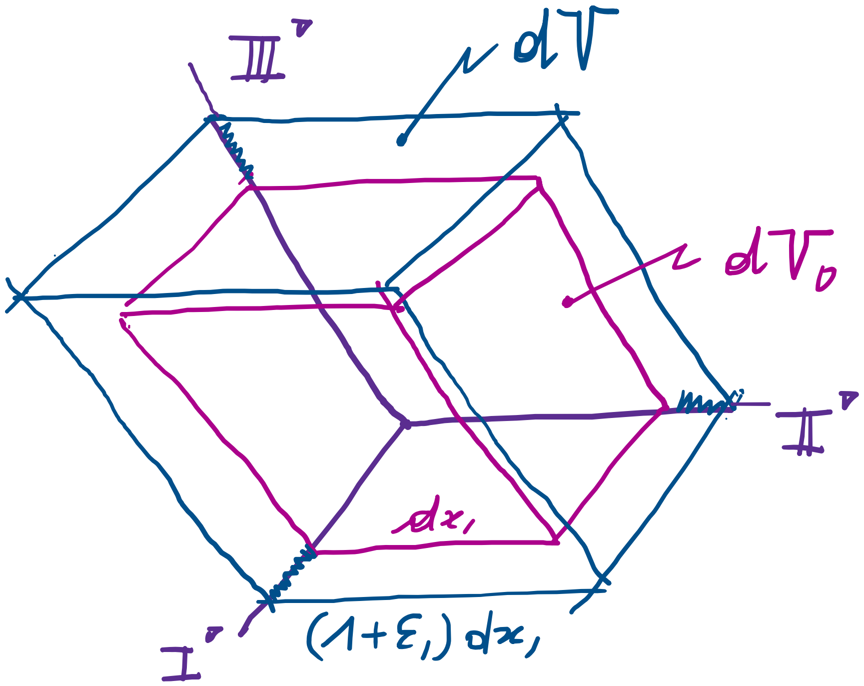
Soluzioni non banali $(\mathbb{r} \neq 0)$ sse: $-\det(\mathbb{E} - \varepsilon_r\mathbb{I}) = \underbrace{\varepsilon_r^3 - I_1^{\varepsilon}\varepsilon_r^2 - I_2^{\varepsilon}\varepsilon_r - I_3^{\varepsilon}}_{\text{polinomio caratteristico}} \overset{\text{eq.ne caratt.}}{=} 0$

Invarianti di deformazione
(indip. dal sistema di riferimento)

primo: $I_1^{\varepsilon} = \mathrm{tr}\,\mathbb{E}$

secondo: $I_2^{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right)$

terzo: $I_3^{\varepsilon} = \det\mathbb{E} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^3 - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbb{E}}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right)$



Variazione di volume, senza variazioni di forma
(no scorrimenti angolari)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \sim \varepsilon \\ \sim \varepsilon^2 \\ \sim \varepsilon^3 \end{matrix} \quad \begin{cases} I_1^{\varepsilon} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} \\ I_2^{\varepsilon} = -(\varepsilon_I \varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I \varepsilon_{III}) \\ I_3^{\varepsilon} = \varepsilon_I \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} \end{cases}$$

Deformazione volumetrica: variazione specifica di volume

$$v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1$$

direzioni principali di deformazione (terna principale)

produttoria

$$= \frac{\prod_i (1+\varepsilon_i)\, dx_i}{dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}} - 1$$

$$= (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III}) - 1$$

$$= \cancel{1} + \underbrace{\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}_{I_1^{\varepsilon}} + \underbrace{\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III}}_{-I_2^{\varepsilon}} + \underbrace{\varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}}_{I_3^{\varepsilon}} - \cancel{1}$$

$o(\varepsilon^2)$ $\quad o(\varepsilon^3)$

significato fisico dell'invariante primo (deformazione infinitesima)

$$v \simeq I_1^{\varepsilon} = \mathrm{tr}\, \varepsilon$$

(la traccia di ε rappresenta la deformazione volumetrica infinitesima)