21^a Lez. FDIS — Teoria del 2^o ordine e pb. euleriani di stabilità (formalizzazione)

$V_2 = V(q_0) + \delta V + \frac{1}{2}\delta^2 V$

- In approx. di spostamenti "geometricamente piccoli": $V(q) \cong V_2(q) = V(q_0) + \frac{\partial V}{\partial q}\Big|_{q_0}^{T} \delta q + \frac{1}{2}\delta q^T \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q}\Big|_{q_0} \delta q$; $\delta q = q - q_0$ (q: conf.ne generica; q_0: conf.ne di riferimento; δq: variazione di q nell'intorno di q_0)

tali comunque da influenzare l'equil. ma di modesta entità

Sviluppo arrestato al 2^o ordine

ove: • $-\mathbb{P} = \frac{\partial V}{\partial q}\Big|_{q_0}$ vettore dei carichi esterni conservativi

approx. al 2^o ordine $= \cancel{V(q_0)} - \mathbb{P}^T \delta q + \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}\, \delta q$

spesso 0 cost. ininfl. ai fini dell'analisi — quadratica in q (e δq)

• $\mathbb{K} = \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q}\Big|_{q_0}$ matrice di rigidezza del sistema

rizzi@unibg.it

- Condiz. di stazionarietà $\Rightarrow$ eq.ni di equilibrio linearizzate in q:

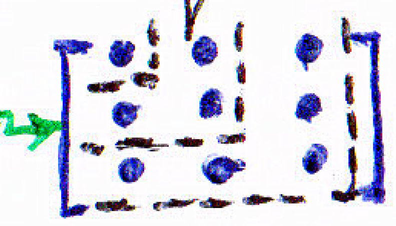
$$\frac{\partial V_2}{\partial q} = -\mathbb{P} + \mathbb{K}\delta q = \mathbb{0} \Rightarrow \boxed{\mathbb{K}\,\delta q = \mathbb{P}} \quad \text{Equazioni di equilibrio}$$

molto spesso $q_0 = \mathbb{0}$ e $\delta q = q$

• N.B. la conf.ne di rif. $q = q_0$ è di equil. solo se $\mathbb{P} = \mathbb{0}$ (come spesso avviene)

- Analisi di stabilità: (min. rel.)

$\frac{1}{2}\delta^2 V = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}\, \delta q > 0,\ \delta q \neq \mathbb{0}$ → chiede $\mathbb{K}$ def. pos. — le proprietà algebriche di $\mathbb{K}$ indicano se la conf.ne di equil. è stabile

↳ sse
- tutti i minori principali dominanti sono >0 $\mathbb{K} \Rightarrow$ 
- tutti gli autovalori (reali) sono >0

Pb. euleriani di stabilità

Hp.: • ∃ conf.ni di equil. dipendenti linearmente dai carichi

$\mathbb{P} = p\, \mathbb{P}_0$ con $\begin{cases} \mathbb{P}_0 & \text{carichi base} \\ p & \text{moltiplicatore dei carichi (adimensionale, } \geq 0) \end{cases}$

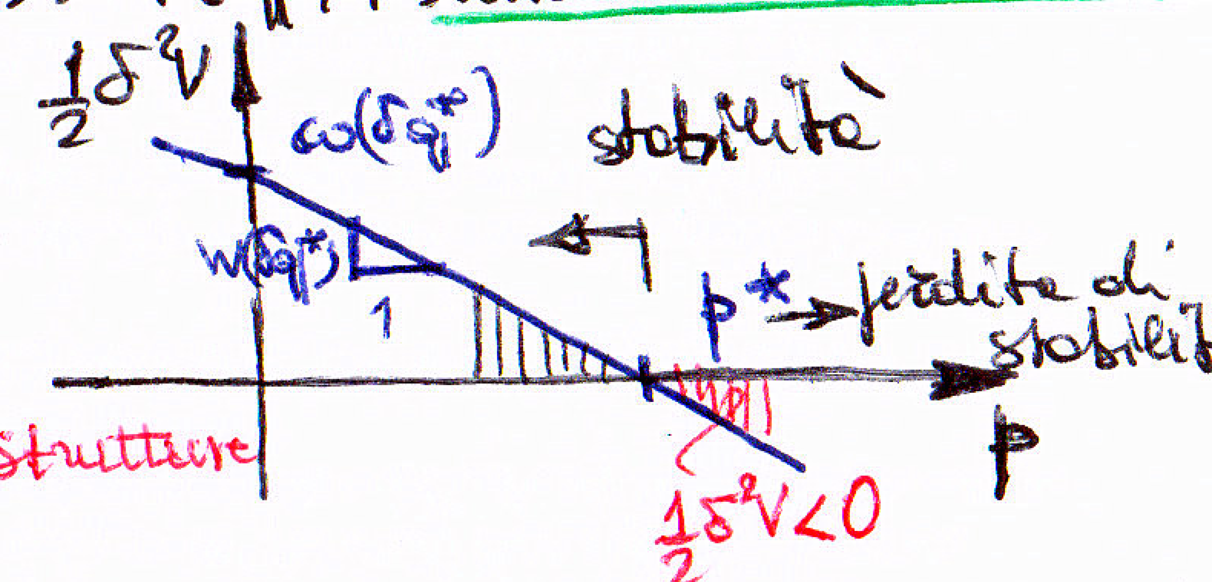
• Linearità pre-critica: $q = p\, q_0$ (q_0: conf.ne equilibrata corrisp. ai carichi base $\mathbb{P}_0$)

• Si assume che $\frac{1}{2}\delta^2 V$ possa essere espresso dalla seguente forma lineare in p: $\frac{1}{2}\delta^2 V = \omega(\delta q) - p\, w(\delta q)$ con

- $\omega(\delta q) > 0\ \forall \delta q \neq \mathbb{0}$ en. pot. elastica
- $w(\delta q) > 0\ \forall \delta q \neq \mathbb{0}$ lavoro del 2^o ord. dei carichi

poichè $\frac{1}{2}\delta^2 V = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}\, \delta q \to \mathbb{K}$ è figlia di due contributi: $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\, \mathbb{K}_G}$ ($\mathbb{K}_E$: matrice di rigidezza elastica; $\mathbb{K}_G$: matrice di rigidezza geometrica)

e $\omega(\delta q) = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_E \delta q$; $w(\delta q) = \frac{1}{2}\delta q^T \mathbb{K}_G \delta q$



• Condizione di perdita di stabilità (della conf.ne δq^* corrisp.)

$\frac{1}{2}\delta^2 V = 0 \Rightarrow \omega(\delta q) - p\, W(\delta q) = 0 \Rightarrow p^* = \frac{\omega(\delta q^*)}{w(\delta q^*)} = \frac{\frac{1}{2}\delta q^{*T}\mathbb{K}_E \delta q^*}{\frac{1}{2}\delta q^{*T}\mathbb{K}_G \delta q^*} \stackrel{!}{=} R(\delta q^*)$ (Rapporto di Rayleigh)

carichi critici — v. analogie con Dinamica delle Strutture

• Il minimo valore di p^* tale per cui $\frac{1}{2}\delta^2 V = 0$ si dice carico critico euleriano del sistema

$p_{cr}^E = \min\{p^*\}$; $\mathbb{P}_{cr}^E = p_{cr}^E\, \mathbb{P}_0$ — le corrisp. δq^* si chiamano deformate critiche.

• Per $p = p_{cr}^E$, $\mathbb{K}$ diviene semidef. pos.:

$\frac{1}{2}\delta^2 V(\delta q) = \omega(\delta q) - p_{cr}^E\, w(\delta q) = \frac{1}{2}\delta q^T(\mathbb{K}_E - p_{cr}^E \mathbb{K}_G)\delta q \geq 0\ \ \forall \delta q \neq \mathbb{0} \longrightarrow p_{cr}^E \leq \frac{\omega(\delta q)}{w(\delta q)} = R(\delta q)$

generico

• Si può dim. che $R(\delta q)$ è stazionario in corrisp. delle conf.ni di equilibrio e minimo in corrisp. di p_{cr}^E.

• $R(\delta q)$ fornisce sempre stima per eccesso di p_{cr}^E (con δq deformata critica di tentativo o approssimata)

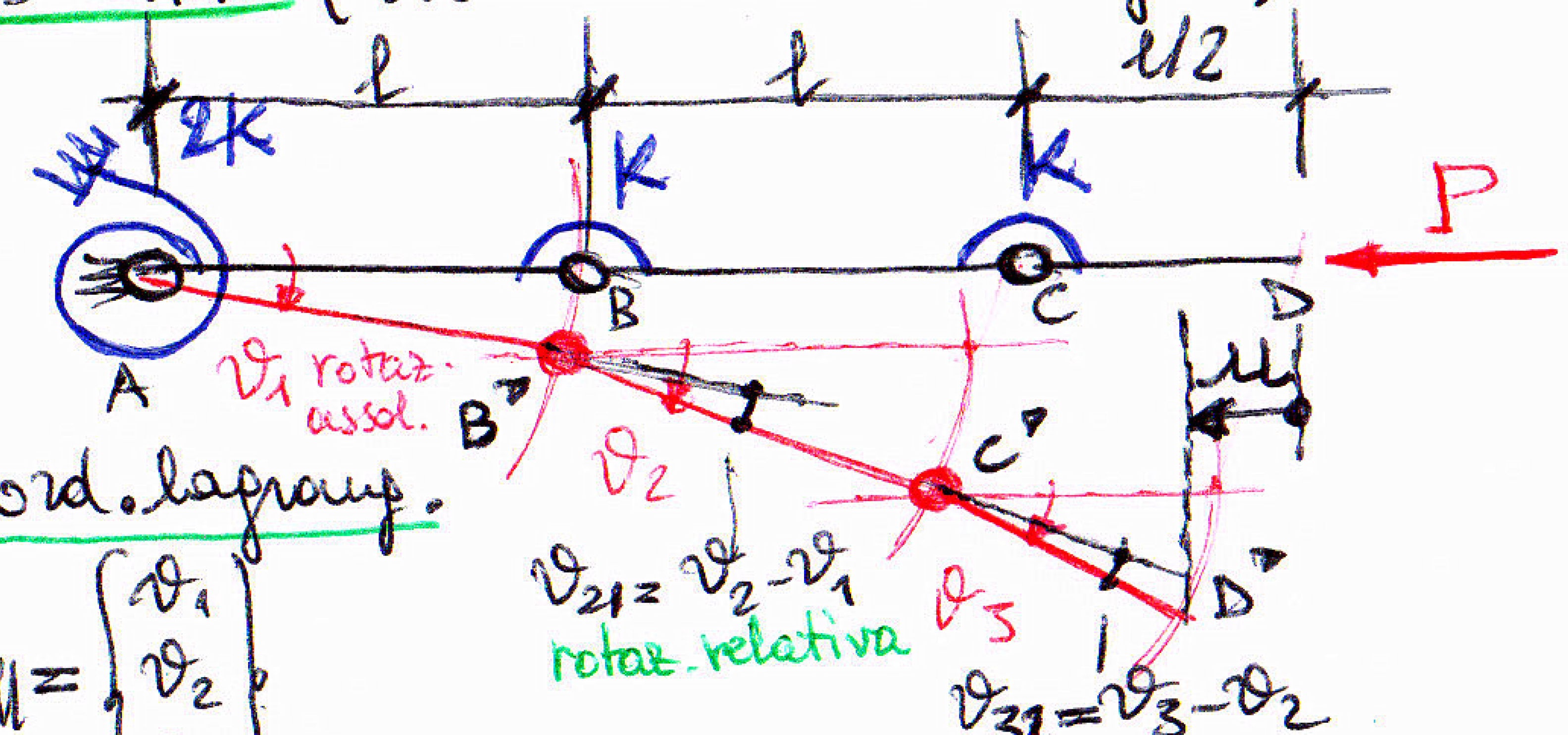
• Per det-i p^*:
- studio del segno dei min. princ. dominanti m_r
- " " " di $\det(\mathbb{K})$ e soluz. dell'eq.ne carott. $\det(\mathbb{K}) = 0 \to p^*$
- studio del pb. agli autovalori generalizzato $\mathbb{K}\delta q = (\mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G)\delta q = \mathbb{0} \Rightarrow \boxed{\mathbb{K}_E \delta q = p\, \mathbb{K}_G \delta q}$

vedi analogie con dinamica $\mathbb{K}\Phi = \omega^2 \mathbb{M}\Phi$ → pb. agli autov. generalizz. associato a $\mathbb{K}_E$ e $\mathbb{K}_G$

Metodo energetico
- $V(q) \Rightarrow V_2(q)$
- staz. $\Rightarrow \mathbb{K}\delta q = \mathbb{P}$ equil.
- $\mathbb{K} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$
- studio delle propr. algebriche di $\mathbb{K}$

Metodo statico
- eq.ni di equil. variate
- linearizz.: $\tilde{\mathbb{K}}\delta q = \mathbb{P}$ ($\tilde{\mathbb{K}}$ in generale $\neq \mathbb{K}$ ma con comb. lin. di righe e colonne)
- Studio propr. di $\tilde{\mathbb{K}}$, in part. singolarità: $\det(\tilde{\mathbb{K}}) = 0$

ESEMPIO (sistema discreto a 3 gdl).



Coord. lagrang.

$$q = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix}$$

$\vartheta_{21} = \vartheta_2 - \vartheta_1$ rotaz. relativa

$\vartheta_{32} = \vartheta_3 - \vartheta_2$

conf.ne rif. $q = q_0 = \Phi$

N.B.: $q_0 = \Phi$ è conf.ne di equilibrio banale. Infatti le eq.ni di equil. sono soddisfatte.

- **Metodo energetico**

EPT: $V(q) = \underbrace{\frac{1}{2} K \left(2\vartheta_1^2 + (\vartheta_2-\vartheta_1)^2 + (\vartheta_3-\vartheta_2)^2\right)}_{\text{energia potenziale elastica}} \underbrace{- P u}_{\text{en. pot. dei carichi esterni conservativi}}$

con $u = \left(\ell + \ell + \frac{\ell}{2}\right) - \left(\ell\cos\vartheta_1 + \ell\cos\vartheta_2 + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta_3\right)$
$= \ell\left(\frac{5}{2} - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_3\right)$

$$\bar{V}(q) = \frac{V(q)}{K} = \frac{1}{2}\left(2\vartheta_1^2 + (\vartheta_2-\vartheta_1)^2 + (\vartheta_3-\vartheta_2)^2\right) - \frac{P\ell}{K}\left(\frac{5}{2} - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_3\right), \quad p = \frac{P}{K/\ell}; \; P_0 = \frac{K}{\ell}$$

moltiplicatore dei carichi

$2\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_1^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - 2\vartheta_2\vartheta_3 = 3\vartheta_1^2 + 2\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 - 2\vartheta_2\vartheta_3$

- Cond.ne di stazionarietà: (eq.ni di equil.): $\frac{\partial \bar{V}(q)}{\partial q} = \Phi$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{2}(3\cdot 2\vartheta_1 - 2\vartheta_2) - p\sin\vartheta_1 = 0 \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \vartheta_2} = \frac{1}{2}(2\cdot 2\vartheta_2 - 2\vartheta_1 - 2\vartheta_3) - p\sin\vartheta_2 = 0 \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \vartheta_3} = \frac{1}{2}(2\vartheta_3 - 2\vartheta_2) - \frac{p}{2}\sin\vartheta_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{3 eq.ni di equilibrio}$$

$$\begin{cases} 3\vartheta_1 - \vartheta_2 - p\sin\vartheta_1 = 0 \\ -\vartheta_1 + 2\vartheta_2 - \vartheta_3 - p\sin\vartheta_2 = 0 \\ -\vartheta_2 + \vartheta_3 - \frac{p}{2}\sin\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

- Calcolo delle derivate seconde: (notare la simmetria dei termini) - [Th. Schwarz]

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{,\vartheta_1\vartheta_1} = 3 - p\cos\vartheta_1 & ; \bar{V}_{,\vartheta_1\vartheta_2} = -1 & ; \bar{V}_{,\vartheta_1\vartheta_3} = 0 \\ \bar{V}_{,\vartheta_2\vartheta_1} = -1 & ; \bar{V}_{,\vartheta_2\vartheta_2} = 2 - p\cos\vartheta_2 & ; \bar{V}_{,\vartheta_2\vartheta_3} = -1 \\ \bar{V}_{,\vartheta_3\vartheta_1} = 0 & ; \bar{V}_{,\vartheta_3\vartheta_2} = -1 & ; \bar{V}_{,\vartheta_3\vartheta_3} = 1 - \frac{p}{2}\cos\vartheta_3 \end{bmatrix}$$

Analisi al 2° ordine:

$\bar{V}(q) \simeq \bar{V}_2(q) = \frac{\omega}{K} - p\left(\frac{5}{2} - \left(1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{\vartheta_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vartheta_3^2}{2}\right)\right)$

$= \frac{\omega}{K} - \frac{p}{2}\left(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_3^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left[(3-p)\vartheta_1^2 + (2-p)\vartheta_2^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)\vartheta_3^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 - 2\vartheta_2\vartheta_3\right]$

- Staz. (è la linearizz. delle precedenti):

$$\begin{cases} \bar{V}_{2,\vartheta_1} = (3-p)\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 \\ \bar{V}_{2,\vartheta_2} = (2-p)\vartheta_2 - \vartheta_1 - \vartheta_3 = 0 \\ \bar{V}_{2,\vartheta_3} = \left(1 - \frac{p}{2}\right)\vartheta_3 - \vartheta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbb{K}\, q = \mathbb{P} = \Phi}$$

$\mathbb{K}_E\, q = p\, \mathbb{K}_G\, q$

con $\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}_E} - p \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}_G} = \mathbb{K}_E - p\,\mathbb{K}_G$

matrice di rigidezza

$\mathbb{K}_E$ matrice di rigidezza elastica

$\mathbb{K}_G$ matrice di rigidezza geometrica

- Idem, per $\mathbb{K}$, dalle derivate seconde $\bar{V}_{2,\vartheta_i\vartheta_j}$

- Calcolo dei p^*.

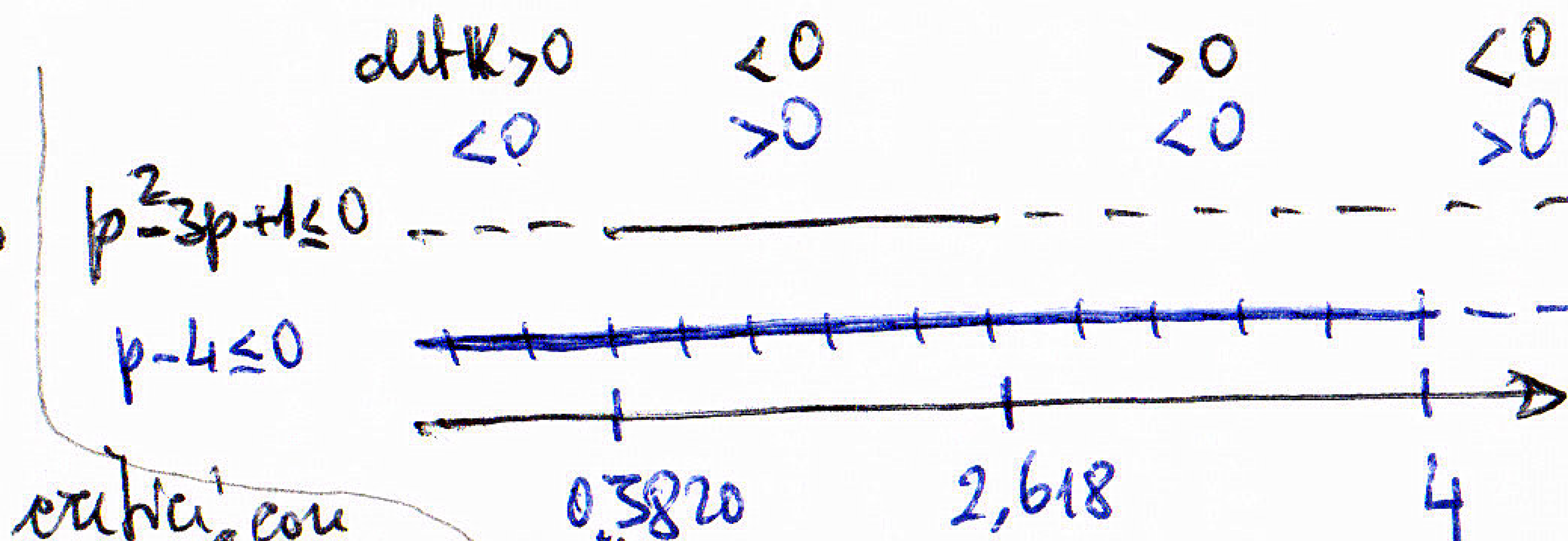
- $\det \mathbb{K} = 0 \rightarrow (3-p)\left[(2-p)\left(1-\frac{p}{2}\right) - 1\right] + 1\left[-\left(1-\frac{p}{2}\right)\right] =$
$= (3-p)\left[2 - p - p + \frac{p^2}{2} - 1\right] - 1 + \frac{p}{2} =$
$= (3-p)\left(1 - 2p + \frac{p^2}{2}\right) - 1 + \frac{p}{2} =$
$= 3 - p - 6p + 2p^2 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{p^3}{2} - 1 + \frac{p}{2} =$ eq.ne caratteristica
$= -\frac{1}{2}p^3 + \frac{7}{2}p^2 - \frac{13}{2}p + 2 \gtrless 0 \rightarrow \boxed{p^3 - 7p^2 + 13p - 4 \lessgtr 0} \rightarrow (p-4)(p^2 - 3p + 1) \lessgtr 0$

$p = 4$ è soluz. $4(\underbrace{16 - 28 + 13}_{1}) - 4 = 0$

$$\begin{cases} p^*_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 0{,}3820 \\ 2{,}618 \end{cases} \\ p^*_3 = 4 \end{cases}$$

Sono i tre carichi critici, con

$p_{cr}^E = 0{,}3820 \rightarrow P_{cr}^E = 0{,}3820\,\frac{K}{\ell}$



primo valore per cui det K cessa di essere > 0.

erizzi@unibg.it

…@unibg.it

22ª Lez. FDIS — Soluzione del pb. agli autovalori associato a $\mathbb{K}_E, \mathbb{K}_G$.

$\delta q = q - q_0 = q$ ($q_0 = 0$) — v. analogia con Dinamica ($\mathbb{K}\Phi = \omega^2 \mathbb{M}\Phi$)

- Pb. agli autovalori generalizzato:

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = \frac{1}{2}\delta q^T[\mathbb{K}\,\delta q] = \frac{1}{2}\delta q^T[\mathbb{K}_E\,\delta q - p\,\mathbb{K}_G\,\delta q] = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{K}_E\,\delta q = p\,\mathbb{K}_G\,\delta q}$$

perdita di stabilità (per $=0$)

pb. agli autovalori generalizzato associato alle matrici $\mathbb{K}_E$ e $\mathbb{K}_G$

- Il pb. agli autovalori può essere risolto coi metodi numerici visti (es. iterazione vettoriale inversa, con stima di $p^* = R(\delta q^*)$ da Rapporto di Rayleigh).
  - p autovalori → carichi critici p^* → $p_{cr}^E = \min\{p^*\}$
  - δq autovettori → deformate critiche δq^*
- $\det(\mathbb{K}) = 0 \rightarrow p_1^* = 0.3820,\ p_2^* = 2.618,\ p_3^* = 4$ autovalori.
- Deformate critiche:

$$\begin{cases} (3-p)\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 \\ -\vartheta_1 + (2-p)\vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \\ -\vartheta_2 + (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vartheta_1 = \dfrac{\vartheta_2}{3-p} = \dfrac{1-\frac{p}{2}}{3-p}\vartheta_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{2-p}{3-p}\vartheta_3 \\ \vartheta_2 = (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 \end{cases}$$

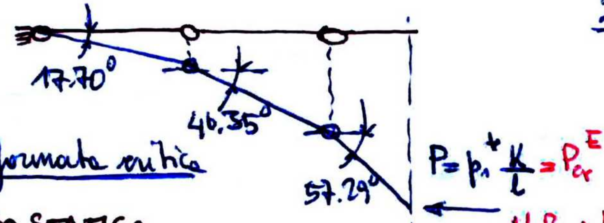
es $\vartheta_3 = 1$ rad $= 57.29°$ → $\delta q^* = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\frac{2-p}{3-p} \\ 1-\frac{p}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$ definita a meno di una costante — deformate critiche

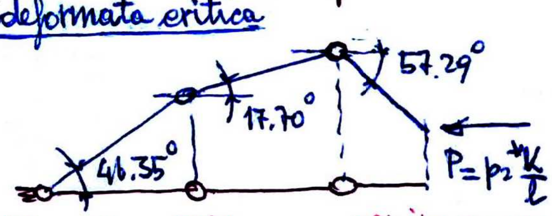
1° carico critico:
$p_1^* = 0.3820 \rightarrow \vartheta_1 = 0.3090$ rad $= 17,70°$; $\vartheta_2 = 0.8090$ rad $= 46.35°$

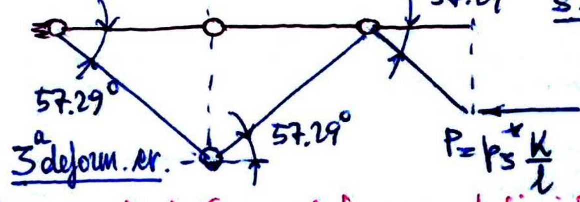
2° carico critico:
$p_2^* = 2.618 \rightarrow \vartheta_1 = -0.8090$ rad $= -46,35°$, $\vartheta_2 = -0.3090$ rad $= -17.70°$

3° carico critico:
$p_3^* = 4 \rightarrow \vartheta_1 = 1$ rad $= 57.29°$, $\vartheta_2 = -1$ rad $= -57.29°$

Carico critico euleriano



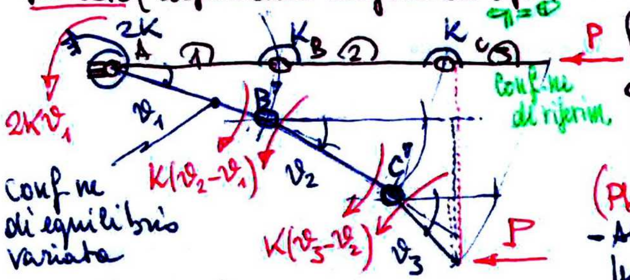




N.B.: Le deformate critiche sono definite a meno di una costante (come le forme modali in Dinamica). Angoli opportunamente riscalabili per visualizzare spostamenti realmente infinitesimi.

METODO STATICO

Scrittura diretta delle eq.ni di equilibrio variato (rispetto alla config.ne di riferimento)



$$\begin{cases} \Sigma M_{C'}^{(3)} = 0 \Rightarrow K(\vartheta_3 - \vartheta_2) - P\frac{l}{2}\sin\vartheta_3 = 0 \\ \Sigma M_{B'}^{(2)+(3)} = 0 \Rightarrow K(\vartheta_2 - \vartheta_1) - P(\frac{l}{2}\sin\vartheta_3 + l\sin\vartheta_2) = 0 \\ \Sigma M_{A}^{(1)+(2)+(3)} = 0 \Rightarrow 2K\vartheta_1 - P(\frac{l}{2}\sin\vartheta_3 + l\sin\vartheta_2 + l\sin\vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

(Pb. staticamente determinato)

$$\xrightarrow{/K} \begin{cases} -\vartheta_2 + \vartheta_3 - \frac{p}{2}\sin\vartheta_3 = 0 & \leftrightarrow 3^a \text{ eq.ne} \\ -\vartheta_1 + \vartheta_2 - p(\sin\vartheta_2 + \frac{1}{2}\sin\vartheta_3) = 0 & \leftrightarrow 2^a + 3^a \text{ eq.ne} \\ 2\vartheta_1 - p(\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2 + \frac{1}{2}\sin\vartheta_3) = 0 & \leftrightarrow 1^a + 2^a + 3^a \text{ eq.} \end{cases}$$

Condizione di stazion. di V

combinaz. lineare delle eq.ni di equil. da stazionarietà di V

- Al fine di cogliere i p.ti di biforcazione dei percorsi di equilibrio è possibile considerare le eq.ni linearizzate per spostamenti "geometricamente piccoli" (dalle precedenti per linearizzazione o per scrittura diretta, considerando $\sin\vartheta_i \simeq \vartheta_i$):

Eq.ni linearizzate:

$$\begin{cases} -\vartheta_2 + (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 = 0 \\ -\vartheta_1 + (1-p)\vartheta_2 - \frac{p}{2}\vartheta_3 = 0 \\ (2-p)\vartheta_1 - p\vartheta_2 - \frac{p}{2}\vartheta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{\mathbb{K}}\,q = 0 \text{ con } \tilde{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \\ -1 & 1-p & -\frac{p}{2} \\ 2-p & -p & -\frac{p}{2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbb{K}}_E - p\,\tilde{\mathbb{K}}_G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathbb{K}}$: matrice di rigidezza del sistema di eq.ni; $\tilde{\mathbb{K}}_E$: elastica; $\tilde{\mathbb{K}}_G$: geometrica

N.B. non simmetriche ma stesse proprietà algebriche di $\mathbb{K}, \mathbb{K}_E, \mathbb{K}_G$

- Si può operare con la soluzione del pb. agli autovalori generalizzato associato a $\tilde{\mathbb{K}}_E$ e $\tilde{\mathbb{K}}_G$, det. autovalori p^* e autovettori q^*.
- Alternativamente, l'eq.ne caratteristica può essere determinata dalla relazione $\det(\tilde{\mathbb{K}}) = 0$, con gli stessi risultati precedenti.

- $\det(\tilde{\mathbb{K}}) = 1\cdot\left(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}(2-p)\right) + \left(1-\frac{p}{2}\right)\left(p - (1-p)(2-p)\right) =$

$= \frac{p}{2}(3-p) + \left(1-\frac{p}{2}\right)\underbrace{\left(p - 2 + p + 2p - p^2\right)}_{-p^2+4p-2} =$

$= \frac{p}{2}\underbrace{(3-p+p^2-4p+2)}_{p^2-5p+5} - p^2 + 4p - 2 = \frac{1}{2}p^3 - \frac{7}{2}p^2 + \frac{13}{2}p - 2 = -\det(\mathbb{K}) = 0 \rightarrow \begin{cases} p_1^* = 0,3820 \\ p_2^* = 2,618 \\ p_3^* = 4 \end{cases}$

A questi autovalori corrispondono gli stessi autovettori precedentemente determinati.