

Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

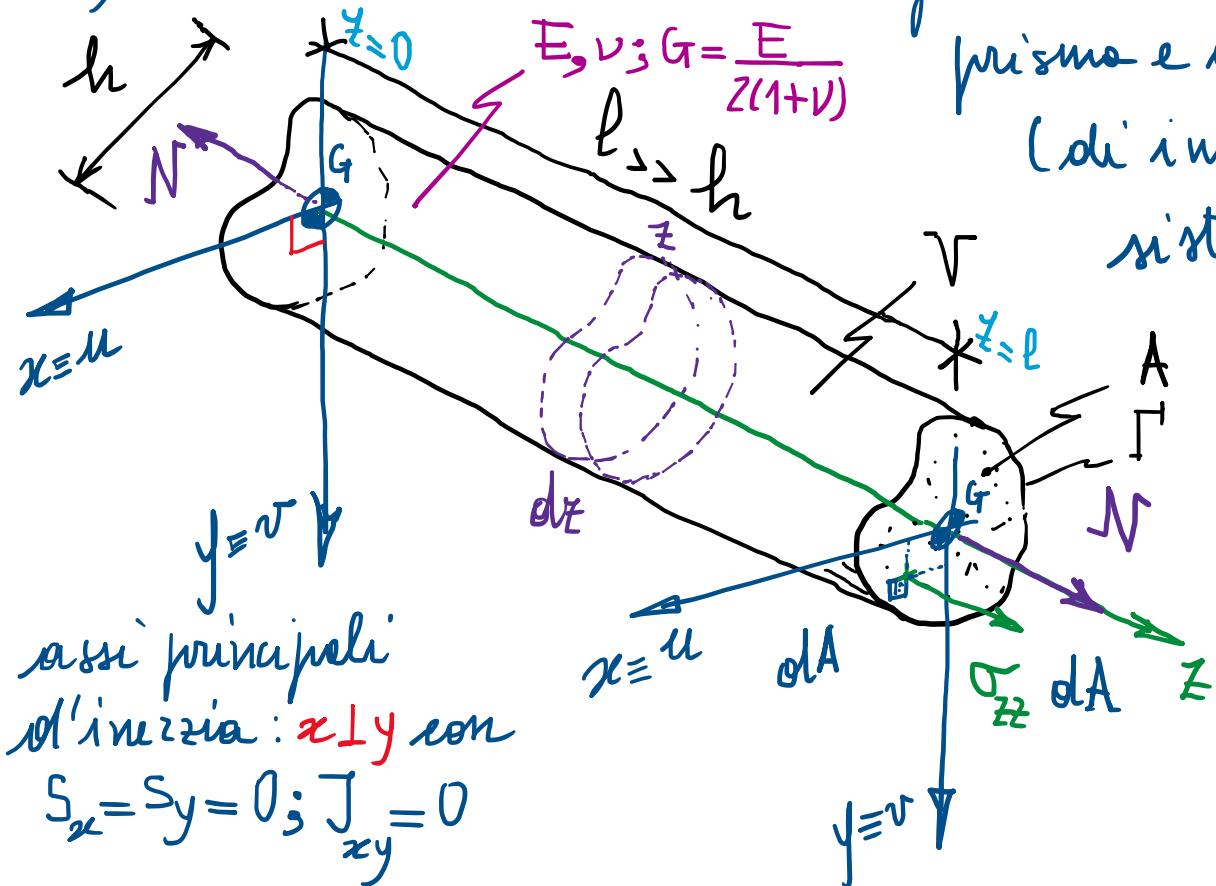
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

Casi di Saint Venant

1) Azione assiale o normale N : presenti due risultanti assiali, cioè normali alle basi del prisma e centrate nel barycentro G , uguali e contrarie (di intensità N), quindi tali da fornire un sistema di forze auto-equilibrato (in particolare alla traslazione lungo l'asse).



- Si opera con approccio "seminverso" agli sforzi mediante ipotesi sul campo di sforzo:

$\sigma_{zz} = \sigma_z = K = \text{cost}$; $\sigma_{ij} = 0$ altrimenti
distribuzione di sforzo normale costante
sulla sezione trasversale

- Si verifica che le equazioni governanti il pb. di DSV (particolare pb. elastico lineare), di equilibrio, coerenza e legame costitutivo, risultino soddisfatte, in maniera tale che la soluzione ipotizzata corrisponda alle soluzioni reali cercate. \rightarrow ColSdC

- Resta da determinare la costante K , mediante le seguenti condizioni di equivalenza statica (tra il campo σ_{zz} e l'azione N che l'ha generato):

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

$$= \int_A K dA = K \int_A dA = KA \Rightarrow K = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{zz} = K = \frac{N}{A}$$

- Campo di deformazione:
Da legge costitutiva,

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{N}{EA}$$

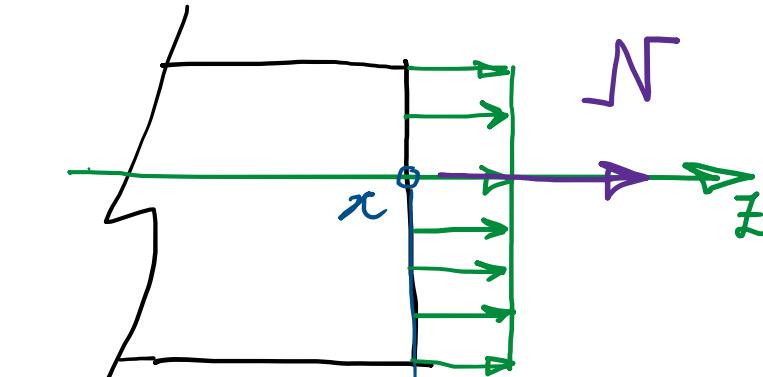
$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\nu \frac{N}{EA}$$

$$(Y_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = 0)$$

$$\sigma_{zz} = K = \frac{N}{A}$$

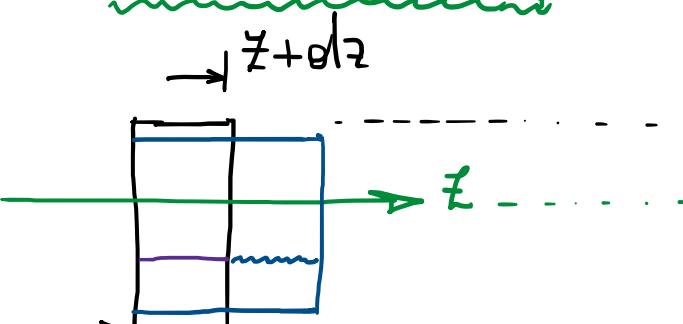
$$\epsilon_{zz} dz = \frac{N}{EA} dz$$

Rigidezza assiale $E \cdot A$

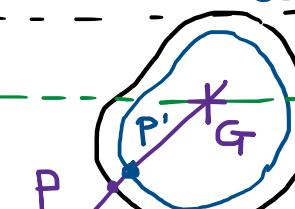


distribuzione di spazio normale costante sulla sezione trasversale

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$



contrazione omotetica delle sez. trasv.
nel suo piano



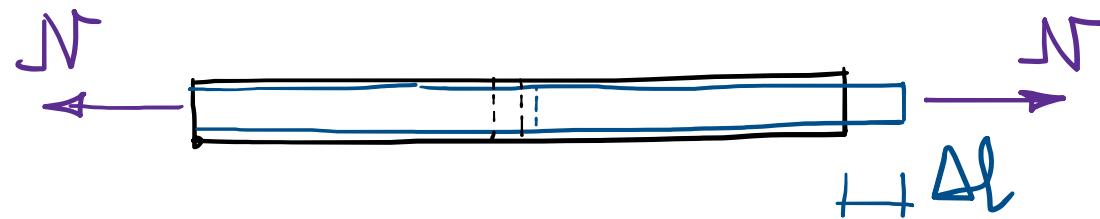
$$\epsilon_f = \epsilon_{pg} = \frac{\bar{PG} - PG}{\bar{PG}} = -\nu \frac{N}{EA}$$

(materiale isotropo)

- Soluzione in termini di spostamento: moto a meno di moti rigidi, in particolare nello spazio dell'asse (z) del prisma.
- Allungamento totale (spostamento relativo nello spazio assiale, tra le due basi):

$$\Delta l = \int_0^l dz = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = \frac{N l}{EA}$$

$$l = \int_0^l dz$$



legge "costitutiva" dello stato soggetto ad azione assiale

$$\Delta l = \frac{1}{EA/l} N$$

$$N = \frac{EA}{l} \Delta l$$

$$\leftrightarrow x = \frac{1}{K} F$$

equivalente a

molla elastica lineare (Hooke)

- dirett. prop. a N

- " " " a l

- invers. prop. alle rigidezza
assiale $E \cdot A$.

quindi:

- inv. prop. a E

- " " " a A

rigidezza

rigidezza

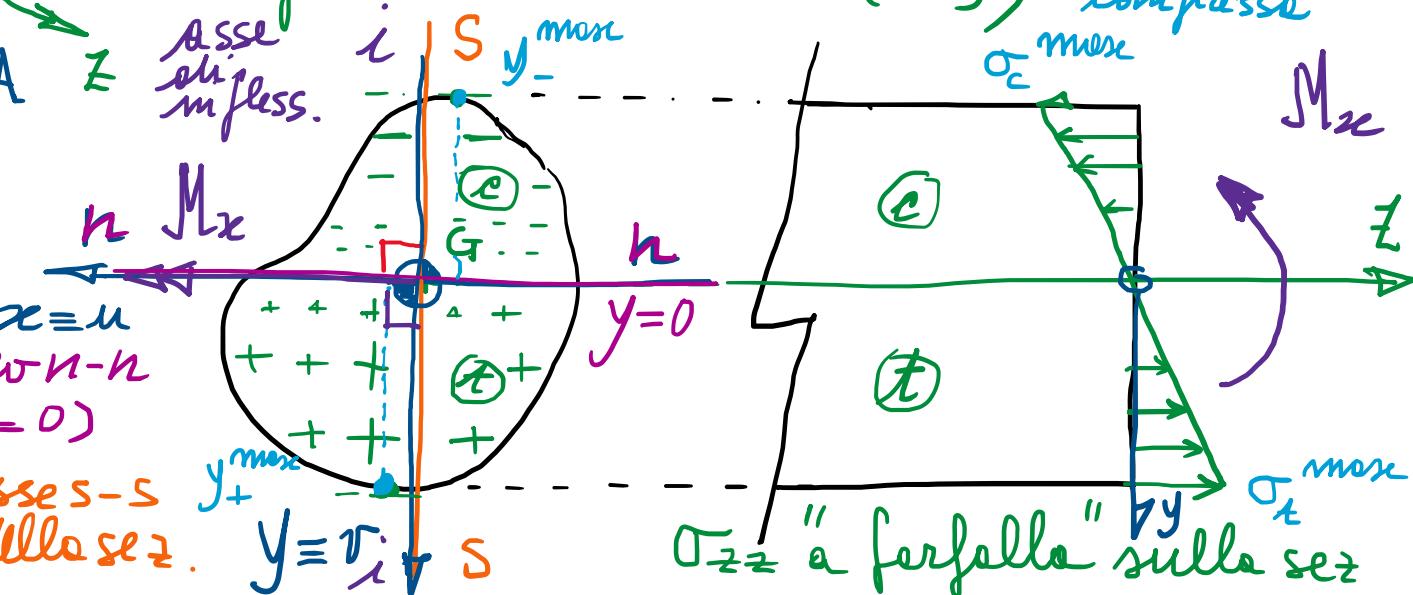
rigidezza

2) Flessione (retta): presenti sulle barre due momenti flettenti, uguali e contrari agenti in un piano di sollecitazione (contenente un asse principale d'inerzia, es. y), tali da formare un sistema autoequilibrato.

- Hp. sul campo di sforzo:

$$\sigma_{zz} = \sigma_z = \begin{cases} \kappa & y \\ 0 & \text{altri menti} \end{cases} ; \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ altrimenti}$$

spazio lineare sulle st. (in y) con tesa e perni più compresse



- Si può verificare che le eq. mi governante risultano soddisfatte. \rightarrow Col Solc
- Resta da determinare la costante K , dalle condizioni di equivalenza statica (che M_x e le σ_{zz} da esso ingenerate):

$$M_x = \int_A (\sigma_{zz} dA) \cdot y = \int_A K y^2 dA = K \int_A y^2 dA \Rightarrow K = \frac{M_x}{J_x} \quad [F][L]$$

- Formula di Navier per le flessioni:

$0 < J_x$ momento d'inerzia delle sezione trasversale rispetto all'asse x (esse $n-n$) $[L]^4$

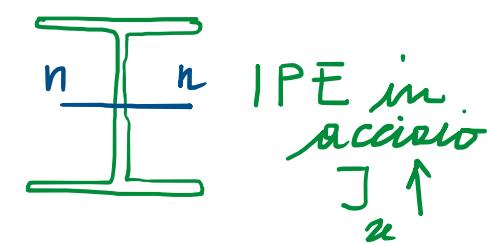
$$\frac{J_{zz}(y)}{[F]} = \frac{M_x}{J_x} y$$

- dirett. prop. a M_x
- invers. " a J_x
- dirett. prop. a y (distanza da $n-n$)

$$\sigma_t^{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_+^{\max} = \frac{M_x}{J_x / y_+^{\max}} = \frac{M_x}{W_x^+}$$

$$\sigma_c^{\max} = \frac{M_x}{J_x} |y_-^{\max}| = \frac{M_x}{J_x / |y_-^{\max}|} = \frac{M_x}{W_x^-}$$

moduli di resistenze (sforzi max a traz./compr.) $[L]^3$
(prop. geometrica sez. trasv. invers. prop. a tali moduli)



- Campo di deformazione:

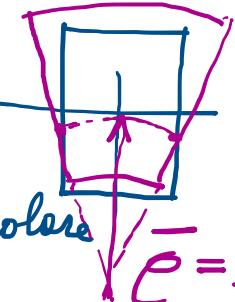
Da legge costitutiva

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{M_x}{E J_x} y$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\frac{y M_x}{E J_x} y$$

$$(\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = 0)$$

es. sez. rettangolare



$$\bar{r} = \frac{1}{\nu} r > r \text{ (fusibile)}$$

curvatura "anticlastica" $\bar{x}_z = \nu x_z < x_z$
nel piano della sezione

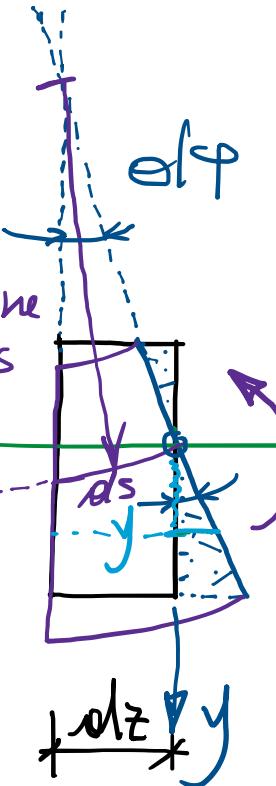
piano i-i

in piano di inflessione
= con piano s-s

linee d'asse
inflessa

$$\delta \varphi = ds \approx dz$$

$$x = \frac{1}{\bar{r}} = \frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{d\varphi}{dz}$$



rotazione delle
sezioni piane e l'
ell'asse inflesso
(sotto l'elenco di
sollecitazione)

$$M_x$$

rotazione
relativa

$$d\varphi = \frac{M_x dz}{E J_x}$$

$$y d\varphi = \epsilon_{zz} dz$$

$$y d\varphi = \frac{M_x}{E J_x} y dz$$

x_z
curvatura
elastica

$$x_z = \frac{M_x}{E J_x}$$

Legge di E-B-N

$$d\varphi = \frac{M_x dz}{E J_x}$$

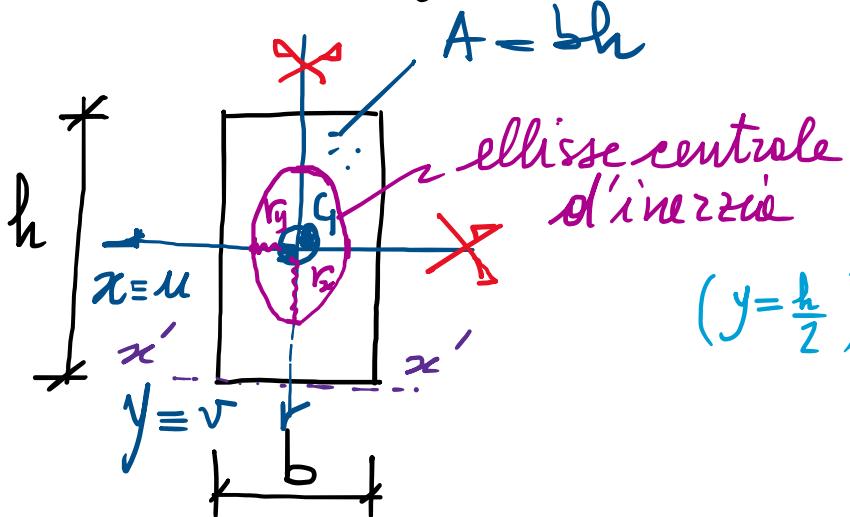
rigidezza
flessionale

- Per l'intero prisma (rotazione relativa tra le basi):

$$\Delta\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_x dz}{E J_x} = \frac{M_x l}{E J_x} = \frac{1}{E J_x / l} M_x ; M_x = \frac{E J_x}{l} \Delta\varphi$$

coefficiente
rigidezza

Ese.: Sezione rettangolare



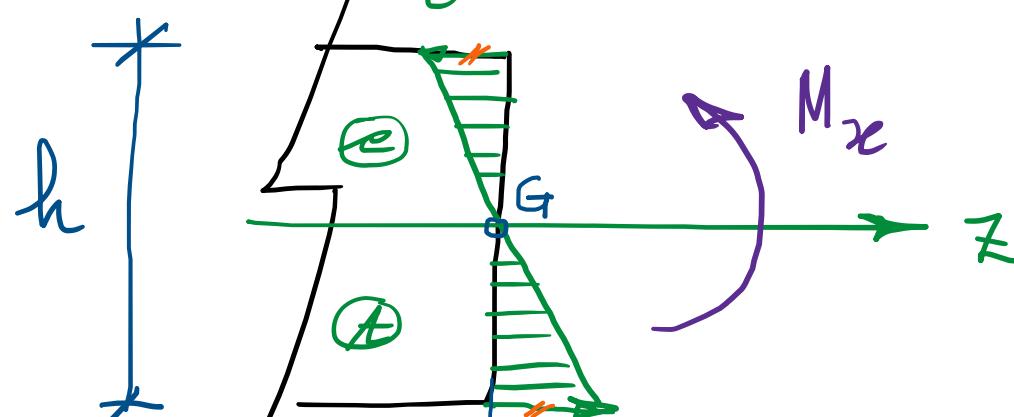
$$\begin{aligned} J_{x'} &= \int_A y'^2 dA \\ &= \int_0^b \int_0^h y'^2 dx' dy' \\ &= \frac{1}{3} b h^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x'} - A y_G'^2 \\ &= \frac{1}{3} b h^3 - b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3}\right) b h^3 = \frac{1}{12} b h^3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{M_x}{\frac{1}{12} b h^3} y = \frac{12 M_x}{b h^3} y$$

$$(y = \frac{h}{2}) \quad \sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x}{\frac{1}{12} b h^3} \frac{h}{2} = \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{M_x}{W_x}$$

W_x modulo di resistenza a flessione

$$W_x = \frac{b h^2}{6} [L]^3$$


raggio-giato re d'inerzia

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \frac{1}{\sqrt{12}} h = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{h}{2} \approx .6 \frac{h}{2}$$

idem per

$$\frac{J_y}{J_y} = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$r_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b}{2}$$