

Calcul différentiel

Semestre 4

DÉFINITION

Calcul des coefficients de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\pi x} dx$$

$$a_n(f) = c_n + c_{-n}$$

$$b_n(f) = i(c_n - c_{-n})$$

Somme partielle de Fourier

$$s_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{inx}$$

Produit scalaire

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Régularisée

$$f_r(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

Convergence en moyenne quadratique : Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors $(s_p(f))_p \rightarrow f$ alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|s_p(f)\|_2^2$$

Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

Inégalité de Bessel

$$\sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

FONCTIONS T -PÉRIODIQUES

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2i\pi}{T} nt} dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nT\right) dt$$

CONVERGENCE NORMALE

Soit f 2π périodique et continue par morceau alors

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n}] \rightarrow f$$

Dirichlet

$$f_r(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$
