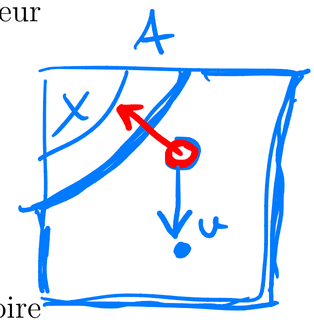
IF222, Introduction aux jeux

Devoir maison - partie 1, 16 mars 2021.

Un jeu $\mathcal{G}$ consiste d'une arène $\mathcal{A} = (V_0 \cup V_1, E)$ et d'une condition de victoire Win (pour le joueur P_0). On note par W_0, W_1 la région gagnante de P_0 et P_1, respectivement, dans le jeu $\mathcal{G}$. Donc W_0 est l'ensemble des sommets $v \in V$ pour tels que P_0 a une stratégie gagnante à partir de v, et pareil pour W_1.

Question 1

Soit $\mathcal{G}$ un jeu avec arène $\mathcal{A} = (V_0 \cup V_1, E)$ et condition de victoire Win. Soit $X \subseteq V$ un ensemble de sommets, $A = \mathrm{Attr}_0(X)$ l'attracteur du joueur P_0 vers X, et $Y = V \setminus A$. Justifiez :



> Si un sommet v est gagnant pour P_1 sur l'arène $\mathcal{A}' = (V_0 \cap Y, V_1 \cap Y, E \cap (Y \times Y))$ pour la condition $\overline{\mathrm{Win}}$, alors v est gagnant pour P_1 sur l'arène $\mathcal{A}$ pour $\overline{\mathrm{Win}}$.

P_1 : Reach(v)

Question 2

On considère un jeu avec arène $\mathcal{A} = (V_0 \cup V_1, E)$ et condition de victoire

Win ← $\mathrm{Reach}_2(F)$ décrite par un ensemble $F \subseteq V$ comme il suit :

> Le joueur P_0 gagne une partie $\pi = v_0, v_1, \ldots$ si F est visité au moins 2 fois : donc s'il existe $i < j$ tels que $v_i \in F$ et $v_j \in F$.

$W_0 \subseteq V$

$W_1 \subseteq V$

On veut calculer les régions gagnantes W_0, W_1 pour le jeu $\mathrm{Reach}_2(F)$.

1. On calcule d'abord une variante de l'attracteur, appellé *attracteur strict* $\mathrm{Attr}_0^+(F)$. On calcule $\mathrm{Attr}_0^+(F) = \cup_{i \geq 0} X_i$ par :

$$\begin{aligned} X_0 &= \{v \in V_0 : \exists w \in F, (v,w) \in E\} \cup \{v \in V_1 : \forall w.\, (v,w) \in E \Rightarrow w \in F\} \\ X_n &= X_{n-1} \cup \{v \in V_0 : \exists w \in X_{n-1}, (v,w) \in E\} \\ &\quad \cup \{v \in V_1 : \forall w.\, (v,w) \in E \Rightarrow w \in X_{n-1}\} \end{aligned}$$

   Justifiez que $v \in \mathrm{Attr}_0^+(F)$ si et seulement si P_0 a une stratégie pour visiter F en 1 ou plus coups.

2. Justifiez que la région gagnante de P_0 dans le jeu $\mathrm{Reach}_2(F)$ est l'ensemble

$$\mathrm{Attr}_0(F \cap \mathrm{Attr}_0^+(F))$$

   choix

   Attention, il faut justifier que $\mathrm{Attr}_0(F \cap \mathrm{Attr}_0^+(F)) \subseteq W_0$ et que $V \setminus \mathrm{Attr}_0(F \cap \mathrm{Attr}_0^+(F)) \subseteq W_1$. Dans les deux cas, il faut indiquer les stratégies gagnantes σ_0, σ_1 des deux joueurs.

2' Alternative : réduire le jeu $\mathrm{Reach}_2(F$ à un jeu d'accessibilité (sur une arène plus grande).