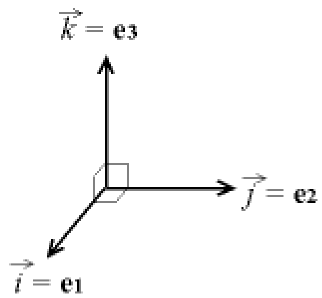
Physique

Mécanique Semestre 3

Table des matières

Première partie

Vecteurs et torseurs



On identifie une base orthonormée directe : $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et un repère $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$.

1 Vecteur.

Produit scalaire. $\vec{OA}.\vec{OB} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = ||\vec{OA}||.||\vec{OB}||cos(\vec{OA}.\vec{OB})$

Produit vectoriel. $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = ||\vec{OA}||.||\vec{OB}||sin(\vec{OA}.\vec{OB})\vec{n} = \begin{vmatrix} x_A & . & x_B \\ y_A & \wedge & y_B \\ z_A & . & z_B \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_A z_B - y_B z_A \\ z_A x_B - z_B x_A \\ x_A y_B - x_B y_A \end{pmatrix}$.

Produit mixte. $(\vec{OA} \wedge \vec{OB}).\vec{OC} = \vec{OA}.(\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = (\vec{OB} \wedge \vec{OC}).\vec{OA} = \vec{OB}.(\vec{OC} \wedge \vec{OA})$.

Moment d'un vecteur en 1 point. $\vec{\mathcal{M}}_O \vec{BC} = \vec{OB} \wedge \vec{BC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \wedge \vec{BC} = \vec{OA} \wedge \vec{BC} + \vec{AB} \wedge \vec{BC}$.
$\vec{\mathcal{M}_O} \vec{BC}.\vec{u} = (\vec{OB} \wedge \vec{BC}).\vec{u}$.

2 Torseur.

Somme. $\vec{S} = \vec{BG} + B_2\vec{C}_2 + ... + B_n\vec{C}_n = \sum_{i=1}^{n} B_i\vec{C}_i$.

Moment en O. $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OB}_1 \wedge B_1\vec{C} + ... + \vec{OB}_n \wedge B_n\vec{C} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA}_i \wedge B_i\vec{C}_i$

Torseur. $\begin{cases} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}}_O \end{cases} = \{T\}_O$. De O en O' : $\begin{cases} \vec{S} \to \vec{S'} \text{ inchangé - invariant} \\ \vec{\mathcal{M}}_O \to \vec{\mathcal{M}}'_O = O'\vec{A} \wedge B_1\vec{C} + ... + O'\vec{A}_n \wedge B_n\vec{C}_n \end{cases}$.
$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = (O'\vec{O} \wedge B_1\vec{C}_1) + \vec{OA}_1 \wedge B_1\vec{C}_1 + ... + (O'\vec{O} \wedge B_n\vec{C}_n) + \vec{OA}_n \wedge B_n\vec{C}_n \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + O'\vec{O} \wedge \vec{S}$.

$$\{T\}_O = \begin{cases} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}}_O \end{cases} \to \{T\}_{O'} = \begin{cases} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}}'_O = \vec{\mathcal{M}}'_O + \vec{OO'} \wedge \vec{S} \end{cases}$$

Torseur nul. $\vec{S}$ et $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{OS} \wedge \vec{S}$.

Torseur glisseur. $\begin{cases} \vec{S} \neq 0 \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{O} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{O} + \vec{O'O} \wedge \vec{S} \end{cases}$.

Torseur couple. $\begin{cases} \vec{S} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{S} \end{cases}$. $\{T\}_O = \begin{cases} \vec{S} \\ \vec{\mathcal{M}}_O \end{cases}$, alors $\vec{\mathcal{M}}_{O'}.\vec{O'O} = \vec{\mathcal{M}}_O.\vec{O'O} + (\vec{O'O} \wedge \vec{S}).\vec{O'O}$ si $\vec{O'O} = O'O.\vec{u}$.

$$\text{Équiprojectivité : } \vec{\mathcal{M}}_{O'}.O'O.\vec{u} = \vec{\mathcal{M}}_O.O'O.\vec{u}$$

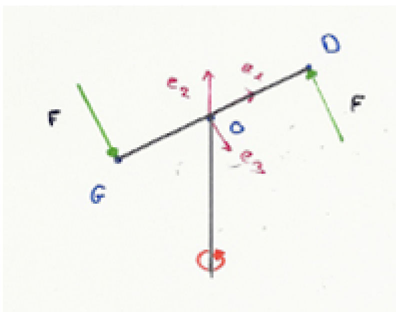
Propriétés de 2 torseurs. Soit $\{T_1\}_O = \begin{cases} \vec{S_1} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,1} \end{cases}$ et $\{T_2\}_O = \begin{cases} \vec{S_2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,2} \end{cases}$.

Somme. $\{T_1\}_O + \{T_2\}_O = \begin{cases} \vec{S_1} + \vec{S_2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,1} + \vec{\mathcal{M}}_{O,2} \end{cases}$

Produit par un scalaire. $\lambda \{T_1\}_O = \begin{cases} \lambda \vec{S_1} \\ \lambda \vec{\mathcal{M}}_{O,1} \end{cases}$

Produit de torseur (commoment). $\{T_1\}_O \times \{T_2\}_O = \begin{cases} \vec{S_1} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,1} \end{cases} \times \begin{cases} \vec{S_2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,2} \end{cases} = \vec{S_1}\vec{\mathcal{M}}_{O,2} + \vec{S_2}\vec{\mathcal{M}}_{O,1}$

Exemple.



— en D : $\{T_1\}_D = \begin{cases} -F\vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_D = \vec{DD} \wedge (-F\vec{e_3}) = \vec{0} \end{cases}$.

— en G : $\{T_2\}_G = \begin{cases} F\vec{e_3} \\ \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{GG} \wedge F\vec{e_3} = \vec{0} \end{cases}$

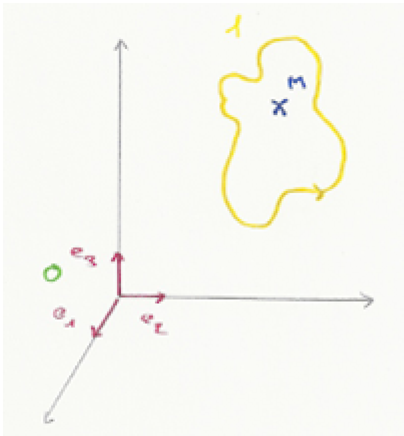
$$\{T_1\}_O + \{T_2\}_O = \begin{cases} -F\vec{e_3} \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_D + \vec{OD} \wedge -F\vec{e_3} + a\vec{e_1} \wedge -F\vec{e_3} \end{cases} + \begin{cases} F\vec{e_3} \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_G + \vec{OG} \wedge F\vec{e_3} - a\vec{e_1} \wedge F\vec{e_3} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \vec{0} \\ -2a\vec{e_1} \wedge F\vec{e_3} = 2aF\vec{e_2} \end{cases}$$

Deuxième partie

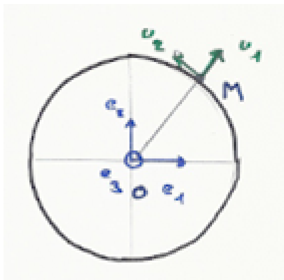
Cinématique

1 Bref retour en cinématique du point.

Repère de référence $R_0 = 0$ en position $\vec{OM}(t)$, l'ensemble des positions de M représente la trajectoire. Sa vitesse est donc $\vec{V}_{M\in 1|0} = \vec{V}_{M10} = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}|_0$. Son accélération est donc $\vec{\gamma}_{M\in 1|R_0} = \vec{\gamma}_{M10} = \frac{d^2OM(t)}{dt^2}|_0$.



Mouvement circulaire. Trajectoire $\mathcal{C}(O, R)$,



$$\begin{aligned}\vec{OM} = R\vec{u}_1.\ \vec{V}_{M\in 1|0} &= \frac{d_0(R\vec{u}_1)}{dt}\\ &= R\frac{d_0}{dt}(cos(\theta)\vec{e_1} + sin(\theta)\vec{e_2})\\ &= R(dcos(\theta).d(\theta)\vec{e}_1 + dsin(\theta)d(\theta)\vec{e}_2)\\ &= R\dot{\theta}(-sin(\theta)\vec{e}_1 + cos(\theta)\vec{e}_2)\\ &= R\dot{\theta}\vec{u_2}\end{aligned}$$

On pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e_3}$ Ainsi $\vec{\Omega} \wedge \vec{OH} = \dot{\theta}\vec{e_3} \wedge R\vec{u}_1 = R\dot{\theta}\vec{u}_2$. $\frac{d_0\vec{u}_1}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_2$. $\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_1 = \dot{\theta}\vec{e}_3 \wedge \vec{u}_1 = \dot{\theta}\vec{u}_2$. $\frac{d_0\vec{u}_1}{dt} = \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{u}_1$, $\vec{V}_{N10} = \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{ON}$.

$\vec{V}_{M10} - \vec{V}_{N10} = \vec{\Omega}_{10} \wedge (\vec{OM} - \vec{ON}) \Leftrightarrow \vec{V}_{M10} = \vec{V}_{N10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{NM}$.

Vitesse de rotation de 1 à 0 $\begin{cases}\vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}\vec{e}_3\\ \vec{V}_{M10} = R\dot{\theta}\vec{u}_2\end{cases} = \{V_{10}\}$ torseur cinématique.

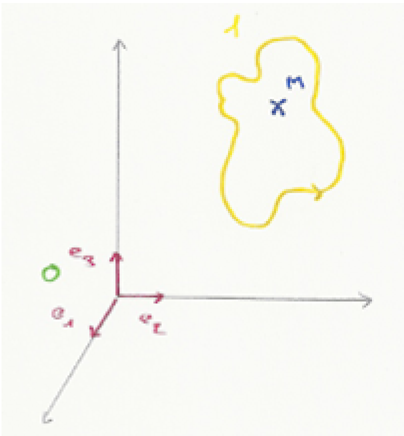
Mouvement de 1 à 0 : Torseur cinématique. $\{V_{10}\} = \begin{cases}\vec{\Omega}_{10}\\ \vec{V}_{O10} = \vec{0}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\Omega_{10}\\ \vec{V}_{M10} = \vec{V}_{O10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{OM}\end{cases}$.

$\vec{V}_{M10}.\vec{NM} = \vec{V}_{N10}.\vec{NM} + (\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{NM}).\vec{NH}$.

Digression fondamentale. Soit un vecteur $\vec{u} = X.\vec{u_1} + Y.\vec{u_2} + 0.\vec{u_3}$. On calcule les dérivées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère 1 et 0 : $\frac{d\vec{u}}{dt}|_1 = \dot{X}\vec{u_1} + \dot{Y}\vec{u_2}$ et $\frac{d\vec{u}}{dt}|_0 = \dot{X}\vec{u_1} + X\frac{d_0\vec{u_1}}{dt} + \dot{Y}\vec{u_2}Y\frac{d_0\vec{u_2}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}|_1 + X\dot{\theta}\vec{u_2} + Y(-\dot{\theta}\vec{u_1}) = \frac{d\vec{u}}{dt}|_1 + \dot{\theta}(-Y\vec{u_1} + X\vec{u_2})$On pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e_3}$, on forme $\vec{\Omega} \wedge \vec{u} = \dot{\theta}\vec{e_3}(X\vec{u_1} + Y\vec{u_2}) = \dot{\theta}(X\underbrace{\vec{e_3} \wedge \vec{u_1}}_{\vec{u_2}} + Y\underbrace{\vec{e_3} \wedge \vec{u_2}}_{\vec{u_1}})$.

2 Cinématique du solide.

La cinématique du solide s'intéresse au solides indéformables, elle repose sur le repérage (choix du repère) et sur le paramétrage qui permettent de décrire le mouvement.



On a $\vec{MN}$ constant dans 1 donc $\frac{d_1\vec{MN}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d_0\vec{MN}}{dt} = \frac{d_1\vec{MN}}{dt} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{MN}$
$\Leftrightarrow \frac{d_0(\vec{MO} + \vec{ON})}{dt} = \frac{d_0\vec{ON}}{dt} - \frac{d_0\vec{OM}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d_0\vec{ON}}{dt} - \frac{d_0\vec{OM}}{dt} = \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{MN}$
$\Leftrightarrow \frac{d_0\vec{ON}}{dt} = d_0\frac{\vec{OM}}{dt} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{MN}$. Ainsi :

$$\vec{V}_{N\in 1|0} = \vec{V}_{M\in 1|0} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{MN}$$

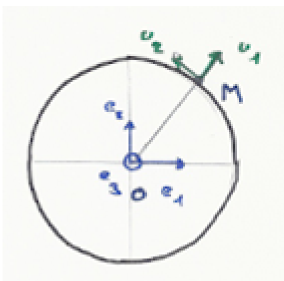
Torseur cinématique. La rotation est selon $\vec{\Omega}_{10}$, on définit la vitesse des points grâce à

$$\vec{V}_{M\in 1|0} \to \vec{V}_{N\in 1|0}.\vec{NM} = \vec{V}_{M\in 1|0}.\vec{NM} + (\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{MN}).\vec{NM}$$

Il y a donc équiprojectivité ce qui nous permet de définir le torseur cinématique :

$$\{V_{10}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}\vec{e_3} \\ \vec{V}_{O\in 1|0} = \vec{0} \end{cases} \to \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{G\in 1|0} = \vec{V}_{O\in 1|0} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{OG} = \dot{\theta}\vec{e_3} \wedge L\vec{u_1} = L\dot{\theta}\vec{u_2} \end{cases}$$

$\vec{V}_{0\in 1|0} = \vec{0}$
$\vec{V}_{G\in 1|0} = L\dot{\theta}\vec{u_2}$
$\vec{V}_{M\in 1|0} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\vec{u_2}$



Accélérations.

$$\{V_{10}\} = \begin{cases} \vec{\Omega_{10}} \\ \vec{V_{O10}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{M10} = \vec{V}_{O10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge O\vec{M} \end{cases}$$

$\dfrac{d_0\vec{V}_{M10}}{dt} = \dfrac{d_0\vec{V_{O10}}}{dt} + \dfrac{d_0(\vec{\Omega}_{10} \wedge O\vec{M}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a}_{M10}.O\vec{M} = \vec{a}_{O10}.O\vec{M} + (\dfrac{d_0\vec{\Omega}_{10}}{dt} \wedge O\vec{M}).O\vec{M} + (\vec{\Omega}_{10} \wedge \dfrac{d_0O\vec{M}}{dt}).O\vec{M} \Leftrightarrow$
$\vec{a}_{G10} = \frac{d_0\vec{V}_{G10}}{dt} = L(\ddot{\theta}\vec{u_2} + \dot{\theta}\underbrace{\dfrac{d_0\vec{u_2}}{dt}}_{-\dot{\theta}\vec{u_1}}) \Leftrightarrow \vec{a}_{G\in 1|0} = -L\dot{\theta}^2\vec{u_1} + L\ddot{\theta}\vec{u_2}$

Composition de mouvements. Le mouvement de 2 par rapport à 1 est relatif. Le mouvement de 1 par rapport à 0 est le mouvement d'entraînement et le mouvement de 2 par rapport 0 est absolu. Le repère 0 est le repère absolu, le repère 1 est le repère intermédiaire ou relatif.

Mouvement inverse. Le vecteur $\vec{W}$ se défini par $\begin{cases} \dfrac{d_2\vec{W}}{dt} = \dfrac{d_1\vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}_{12} \wedge \vec{w} \\ \dfrac{d_1\vec{W}}{dt} = \dfrac{d_0\vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}_{21} \wedge \vec{W} \end{cases}$. Ainsi :

$$\vec{O} = (\vec{\Omega}_{12} + \vec{\Omega}_{21}) \wedge \vec{w} \Rightarrow \vec{\Omega}_{21} = -\vec{\Omega}_{12}$$

Composition des rotations. $\begin{cases} \dfrac{d_2\vec{W}}{dt} = \dfrac{d_1\vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}_{12} \wedge \vec{w} \\ \dfrac{d_1\vec{W}}{dt} = \dfrac{d_0\vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}_{01} \wedge \vec{W} \\ \dfrac{d_0\vec{W}}{dt} = \dfrac{d_2\vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}_{20} \wedge \vec{w} \end{cases}$.

Position - vitesse. $O\vec{H} = O\vec{O}_1 + O_1\vec{H} \Leftrightarrow \dfrac{d_0O\vec{H}}{dt} = \dfrac{d_0O\vec{O}_1}{dt} + \dfrac{d_0O_1\vec{H}}{dt}$. $\vec{V}_{M\in 2|0} = \vec{V}_{01\in 1|0} + \underbrace{\dfrac{d_1O_1\vec{M}}{dt}}_{\vec{V}_{M\in 2|1}} + \vec{\Omega}_{10} \wedge$
$O_1\vec{M} = \vec{V}_{M\in 2|1} + \underbrace{\vec{V}_{01\in 1|0} + \vec{\Omega}_{10} \wedge O_1\vec{M}}_{\vec{V}_{M\in 1|0}}$. Donc

$$\vec{V}_{M\in 2|0} = \vec{V}_{M\in 2|1} + \vec{V}_{M\in 1|0}$$

Torseur. Le torseur cinématique

$$\{V_{20}\}_{M_1} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{20} = \vec{\Omega}_{21} + \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{M\in 2|0} = \vec{V}_{M\in 2|1} + \vec{V}_{M\in 1|0} \end{cases} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{21} \\ \vec{V}_{M\in 2|1} \end{cases} + \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{M\in 1|0} \end{cases} = \{V_{21}\}_M + \{V_{10}\}_M$$

Accélération.

$$\frac{d_0}{dt}\vec{V}_{M\in 2|0} = \frac{d_0}{dt}\vec{V}_{O_1\in 1|0} + \frac{d_0}{dt}\vec{\Omega}_{10} \wedge O_1\vec{M} + \frac{d_0}{dt}\vec{V}_{M\in 2|1}$$

Ainsi par définition on obtient : $\vec{\gamma}_{M\in 2|0} = \vec{\gamma}_{O_1\in 1|0} + \frac{d_0}{dt}\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \frac{d_0}{dt}\vec{O_1M} + \frac{d_1}{dt}\vec{V}_{M\in 2|1} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{V}_{M\in 2|1}$.
On a donc $\vec{\gamma}_{M\in 2|0} = \vec{\gamma}_{M\in 2|1} + \vec{\gamma}_{O_1\in 1|0} + \frac{d_0}{dt}\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega}_{10} \wedge (\frac{d_1 \vec{O_1M}}{dt} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{O_1M}) + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{V}_{M\in|1}$.

$$\underbrace{\vec{\gamma}_{M\in 2|0}}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{\gamma}_{M\in 2|1}}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{\gamma}_{O_1\in 1|0} + \frac{d_0}{dt}\vec{\Omega}_{10} \wedge (\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{O_1M})}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \underbrace{2(\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{V}_{M\in 2|1})}_{\text{Coriolis}}$$

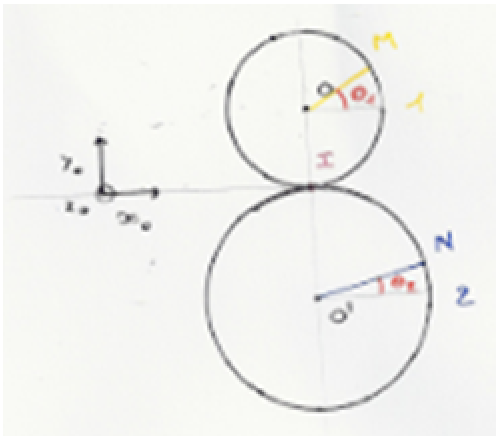
Exercice : mouvement planétaire. $\{V_{20}\}_K = \{V_{21}\}_K + \{V_{10}\}_K$. On procède au choix judicieux de O'.

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{20} \\ \vec{V}_{O'\in 2|0} \end{cases} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{21} = \dot{\theta}_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{V}_{O'\in 2|1} = \vec{0} \end{cases} + \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}_{10}\vec{z}_0 \\ \vec{V}_{O'\in 1|0} = \vec{V}_{O\in 1|0} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{OO'} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge R\vec{x}_1 = R\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\{V_{20}\}_{O'} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{20} = \left\{\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right\} \vec{z}_0 \\ \vec{V}_{O'\in 2|0} = R\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} idem \\ \vec{V}_{M\in 2|0} = \vec{V}_{O'\in 2|0} + \vec{\Omega}_{20} \wedge \vec{OH} = R\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1 + \underbrace{(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{z}_0 \wedge R'\vec{x}_2}_{R'(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y}_2} \end{cases}$$

On a l'accélération absolue : $\vec{\gamma}_{M\in 2|0} = \frac{d_0\vec{V}_{M\in 2|0}}{dt}$, l'accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_{M\in 2|1} = \frac{d_1\vec{V}_{M\in 2|1}}{dt}$. Finalement on a l'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_M = 2\vec{\Omega}_{entrainement} \wedge \vec{V}_{M\in 2|1}$.

Exercice : 2 roues crantés. On a une rotation sans glissement en I ainsi on obtient $\vec{v}_{I\in 2|1} = \vec{v}_{I21} = \vec{0}$. En décomposant le mouvement on obtient : $\vec{v}_{I20} + \vec{v}_{I01} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_{I20} = \vec{v}_{I10}$. On peut donc en déduire que :



$\vec{v}_{I10} = \vec{v}_{O10} + \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}_{10} = \vec{v}_{O10} + R_1\vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_1\vec{z}_0 = \vec{v}_{O10} + R_1\dot{\theta}_1\vec{x}_0$

$\vec{v}_{I20} = \vec{O'20} + \vec{IO'} \wedge \vec{\Omega}_{20} = \vec{v}_{O'20} - R_2\vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_2\vec{z}_0 = \vec{v}_{O'20} - R_2\dot{\theta}_2\vec{x}_0$

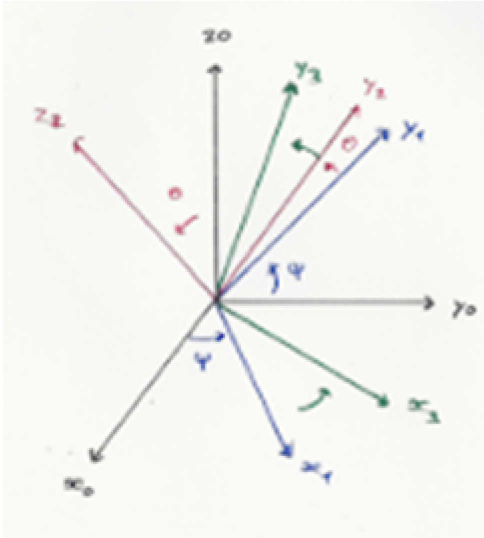
$\vec{\Omega}_{21} = \vec{\Omega}_{20} + \vec{\Omega}_{01} = (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\vec{z}_0$

$$\{V_{21}\}_I = \begin{cases} \vec{\Omega}_{21} \\ \vec{v}_{I21} = \vec{0} \end{cases}$$

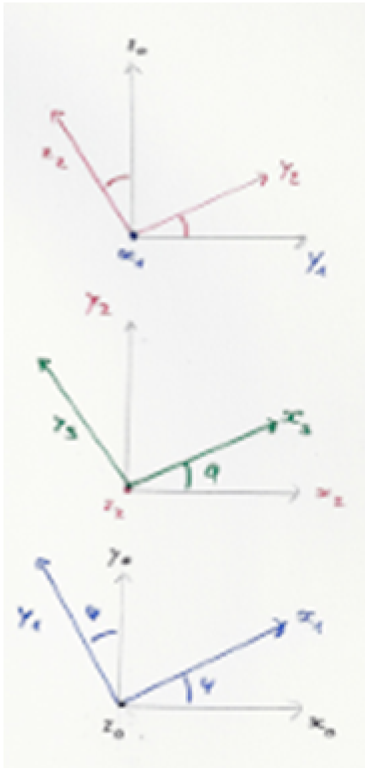
I est appelé le centre de rotation instantané.

Exercice : Solide à point fixe. On étudie un système constitué d'une rotule avec 3 axes de rotation on utilise le paramétrage d'Euler.

$$\{V_{30}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{30} = ? \\ \vec{v}_{C30} = \vec{0} \end{cases}$$



- $\vec{\Omega}_{10} = \dot{\Psi}\vec{z}_{01}$
- $\vec{\Omega}_{21} = \dot{\theta}\vec{x}_{21}$
- $\vec{\Omega}_{32} = \dot{\phi}\vec{z}_{32}$



Par composition on obtient :

$\vec{\Omega}_{30} = \vec{\Omega}_{32} + \vec{\Omega}_{21} + \vec{\Omega}_{10}$

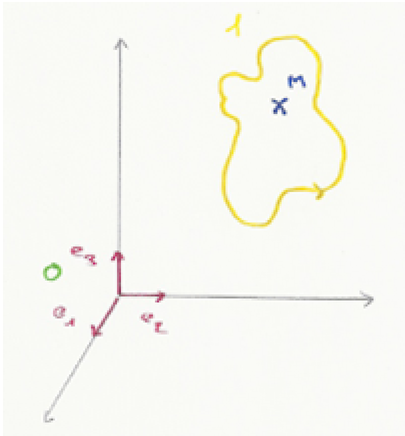
$= \dot{\phi}\vec{z}_2 + \dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\psi}\vec{z}_1$

$= -sin(\theta)\vec{y}_1 + cos(\theta)\vec{z}_1$

Troisième partie

Cinétique

1 La quantité de mouvement



Soit une masse ponctuelle alors la quantité de mouvement est définie par :

$$m.\vec{v}_{M|O}$$

Soit un ensemble de masse ponctuelle alors la quantité de mouvement est définie par :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{M_{i|0}}$$

Soit un système discret alors la quantité de mouvement est définie par :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{M_{i|0}}$$

en effet par la règle du barycentre on obtient : $m_T.\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OM}_i$. On a donc pour un système discret la quantité de mouvement définie par

$$m_T.\vec{G|}0$$

Pour des masses élémentaires contenue dans un solide c'est à dire un système continu la quantité de mouvement se calcule grâce à la somme des masse élémentaires $dm\vec{V}_{M_{1|0}}$. Ainsi la quantité de mouvement est définie par

$$\int_1 \vec{v}_{M_{1|0}}.dm = \int_1 \frac{d_0\vec{OM}}{dt}.dm = \frac{d_0}{dt}\left\{\int_1 \vec{OM}dt\right\}$$

Par conséquent :

$$m_T.\vec{OG}_T = \int_1 \vec{OM}.dm \text{ théorème du barycentre}$$

$$\int_1 dm \Rightarrow \vec{P}_{10} = \frac{d_0}{dt}\left\{m_1.\vec{OG}\right\} = m_1 \frac{d_0\vec{OG}}{dt} = m_1\vec{v}_{G\in 1|0}$$

$$\vec{P}_{10} = \int_1 \vec{v}_{M\in 1|0} dm = m_1\vec{v}_{G\in 1|0}$$

2 Moment

On définit le moment de la quantité de mouvement en O par

$$\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M|O}.m = \sum_{i=1}^{n} \vec{OM}_i \wedge \vec{v}_{M\in i|0}.m_i$$

Pour un système continu on obtient

$$\vec{\sigma}_{O10} = \int_1 \vec{OM} \wedge \vec{v}_{M\in 1|0}.dm$$

On l'exprime en O' :

$$\vec{\sigma}_{O'10} = \int_1 \vec{O'M} \wedge \vec{V}_{M10} dm = \int_1 \vec{O'O} \wedge \vec{v}_{M10} dm + \int_1 \vec{OM} \wedge \vec{v}_{M10} dm = \vec{O'O} + \vec{\sigma}_{O10}$$

On conclut donc que

$$\vec{\sigma}_{O'10} = \vec{\sigma}_{O10} + \vec{\sigma}_O \wedge \vec{P}_{10}$$

3 Calcul du moment cinétique

On a

$$\{C_{10}\} = \begin{cases} \vec{P}_{10} = m_1\vec{V}_{G10} \\ \vec{\sigma}_{O10} = \int_1 \vec{OM} \wedge \vec{V}_{M10} dm \end{cases} \rightarrow \begin{cases} idem \\ \sigma\vec{O'}_{10} = \vec{\sigma}_{O10} + \vec{O'O} \wedge \vec{p}_{10} \end{cases}$$

En un point du solide, en G centre de masse :

$$\vec{\sigma}_{K10} = \vec{\sigma}_{G10} + \vec{KG} \wedge \vec{p}_{10}$$

Avec $\vec{\sigma}_{G10} = \int_1 \vec{GM} \wedge \vec{V}_{M10} dm = \int_1 \vec{GM} \wedge (\vec{V}_{G10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{GM}) dm$
$= \int_1 \vec{GM} \wedge \vec{V}_{G10} dm + \int_1 \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{GM}) dm = \int_1 -\vec{V}_{G10} \wedge \vec{GM} dm + \int_1 [(\vec{GM}.\vec{GH})\vec{\Omega}_{10} - (\vec{GH}.\vec{\Omega}_{10}).\vec{GH}] dm.$
Or $\int_1 -\vec{V}_{G10} \wedge \vec{GH} dm = -\vec{V}_{G10} \wedge \int_1 \vec{GM} dm = -\vec{V}_{G10}$. Car par le théorème du barycentre on a $m.\vec{OG} = \int_1 \vec{OG}.dm$ et donc en G on a $m\vec{GG} = \int_1 \vec{GM}.dm = 0$.
On s'intéresse à $\int_1 [(\vec{GM}.\vec{GH})\vec{\Omega}_{10} - (\vec{GH}.\vec{\Omega}_{10}).\vec{GH}] dm$ sur $R_1(G, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$. On a $\vec{GH} = x\vec{x_1} + y\vec{y_1} + z\vec{z_1}$ et $\vec{\Omega}_{10} = \omega_x\vec{x_1} + \omega_y\vec{y_1} + \omega_z\vec{z_1}$.
Puisqu'on a l'intégrale nulle par le théorème du barycentre on peut écrire : $\vec{\sigma}_{G10} = \int_1 [(x^2 + y^2 + z^2)(\omega_x\vec{x}_1 + \omega_y\vec{y_1} + \omega_z\vec{z_1}) - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x\vec{x_1} + y\vec{y_1} + z\vec{z_1})] dm$
$= \int_1 [\vec{x_1}(x^2\omega_x - x^2\omega_x + (y^2 + z^2)\omega_x) - \vec{x_1} xy\omega_y - \vec{x_1} x_z\omega z + \vec{y_1}(z^2 + x^2)\omega_y - \vec{y_1} xy\omega_x - \vec{y_1} y_z\omega_z$
$+ \vec{z_1}(x^2 + y^2) - \vec{z_1} zx\omega_x - \vec{z_1} zy\omega_y] dm.$
$= \vec{x_1}\left\{\omega_x \int_1 (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_1 xydm - \omega_2 \int_1 xzdm\right\}$
$+ \vec{y_1}\left\{-\omega_y \int_1 xydm + \omega_y \int_1 (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int yzdm\right\}$

$+\vec{z_1}\left\{-\omega_x \int_1 xzdm - \omega_y \int_1 yzdm + \omega_z \int_1 (x^2+y^2)dm\right\}$.

$$\sigma \vec{G10} = \begin{pmatrix} \int_1 (y^2+z^2)dm & -\int_1 xydm & -\int_1 xzdm \\ -\int_1 xydm & \int_1 (z^2+x^2)dm & -\int_1 yzdm \\ -\int_1 xzdm & -\int_1 yzdm & \int_1 (x^2+y^2)dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

On peut donc la réduire à

$$\begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}$$

En un point du solide, en F dans le mouvement de 1 par rapport à 0, on a $\vec{V}_{F10} = \vec{0}$. On calcule $\sigma \vec{K10}$:

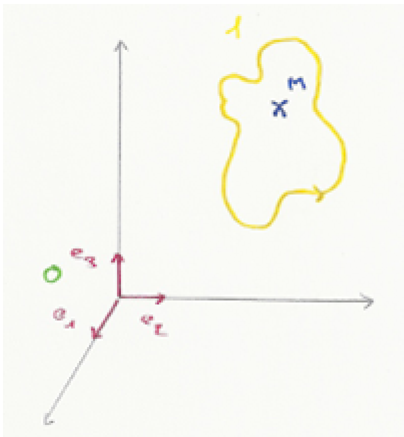
$\vec{\sigma}_{K10} = \vec{\sigma}_{F10} + \vec{KF} \wedge \vec{p}_{10}$

$\vec{\sigma}_{F10} = \int_1 \vec{FM} \wedge \vec{V}_{M10} dm = \int_1 \vec{FM} \wedge (\vec{V}_{F10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{FM})dm$

$\vec{\sigma}_{F10} = \int_1 \vec{FM} \wedge (\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{FM})dm$

$\vec{\sigma}_{F10} = \overline{\overline{I^1}}_{Fb_1}.\vec{\Omega}_{10}$ où $\vec{FM} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1 + z\vec{z}_1$ et $\vec{\Omega}_{10} = \omega_x \vec{x}_1 + \omega_y \vec{y}_1 + \omega_z \vec{z}_1$.

4 Énergie cinétique



Pour la masse élémentaire l'énergie cinétique est $\frac{1}{2}dm.\vec{V}^2_{M10}$. Pour le solide 1 on $E_{C10} = \int_1 \vec{V}^2_{M10}.dm$. On obtient donc la relation de Calcul $2E_{C10} = \int^1 \vec{V}^2_{M10} dm = \int_1 (\vec{V}_{A10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{AM}).\vec{V}_{M10} dm = \int_1 \vec{V}_{A10}.\vec{V}_{M10} dm + \int_1 (\vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{AM})\vec{V}_{M10} dm = \vec{V}_{A10}.\int_1 \vec{V}_{M10} dm + \int_1 \vec{\Omega}_{10}(\vec{AM} \wedge \vec{V}_{M10})dm = \vec{V}_{A10}.\vec{p}_{10} + \vec{\Omega}_{10}.\vec{\sigma}_{A10}$.

On peut donc réécrire l'énergie cinétique $2\vec{E}_{C10} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{A10} \end{cases} \times \begin{cases} \vec{p}_{10} \\ \vec{\sigma}_{A10} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2E_{C10} = \{V_{10}\}_A \times \{C_{10}\}_A = \{V_{10}\}_G \times \{V_{10}\}_G \times \{C_{10}\}_G$.

Au point G on a $2E_{C10} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{G10} \end{cases} \times \begin{cases} m\vec{V}_{G10} \\ \vec{\sigma}_{G10} \end{cases} = m\vec{V}_{G10} + \vec{\Omega}_{10}\vec{\sigma}_{G10}$.

Au point F fixe on a $\vec{V}_{F10} = \vec{0}$ ainsi $2\vec{E}_{C10} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{F10} \end{cases} \times \begin{cases} m\vec{V}_{G10} \\ \vec{\sigma}_{F10} \end{cases} = \vec{\Omega}_{10}.\vec{\sigma}_{F10}$.

Lors du mouvement de translation de 1 par rapport à 0 on a $\Omega_{10} = 0$ donc $2\vec{E}_{C10} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{V}_{G10} \end{cases} \times \begin{cases} m\vec{V}_{G10} \\ - \end{cases} = m\vec{V}_{G10}^2$

Lors du mouvement de rotation autour d'un axe fixe on a $2\vec{E}_{C10} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{F10} = \vec{0} \end{cases} \times \begin{cases} m\vec{V}_{G10} \\ \vec{\sigma}_{F10} \end{cases} = \vec{\Omega}_{10}.\vec{\sigma}_{F10}$ donc $2\vec{E}_{C10} = \vec{\Omega}_{10}(\overline{\overline{I}}^{1}_{F,b_1}.\vec{\Omega}_{10})$.

Et au final $2\vec{E}_{C10} = \vec{\Omega}_{10}.\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{\Omega}_{10} = \omega_x\vec{x}_1 + \omega_y\vec{y}_1 + \omega_z\vec{z}_1$ et donc

$$2E_{C10} = \omega_z.\vec{z_1}(-E\omega_z\vec{x_1} - D\omega_2\vec{y_1} + C\omega_2\vec{z_1}) = C\omega_2^2$$

5 Éléments d'inertie : théorèmes de Huygens

On a $K\vec{M} = K\vec{G} + G\vec{M}$, donc $\begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases} = \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases} + \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ donc $x = a + X$, $dx = dX$, $dy = dY$ et $dz = dZ$ ainsi $\rho dxdydz = \rho dXdYdZ$.

On calcule le moment d'inertie $A_K = \int_1 (y^2 + z^2)dm = \int_1 (y^2 + b^2 + 2by + z^2 + c^2 + 2cz)dm = \int_1 (y^2 + z^2)dm = (b^2 + c^2)\int_1 dm + 2b\int_1 ydm + 2c\int zdm = A_G + (b^2 + c^2)m$. Par théorème du barycentre en effet $m\vec{GG} = \int_1 G\vec{M}dm = \int_1 (x\vec{x_1} + y\vec{y_1} + z\vec{z_1})dm \Leftrightarrow 0 = \int_1 ydm$. Ainsi $\begin{cases} A_K = A_G + m(b^2 + c^2) \\ B_K = B_G + m(c^2 + a^2) \\ C_K = C_G + m(a^2 + b^2) \end{cases}$.

Pour les produits d'inertie on a $D_k = \int_1 yzdm = \int_1 (y+b)(z+c)dm = \int_1 yzdm + bc\int_1 dm + b\int_1 zdm + c\int_1 ydm = D_G + mbc$. Ainsi on a $\begin{cases} D_K = D_G + mbc \\ E_K = E_G + mca \\ F_K = F_G + mab \end{cases}$

Au final on a

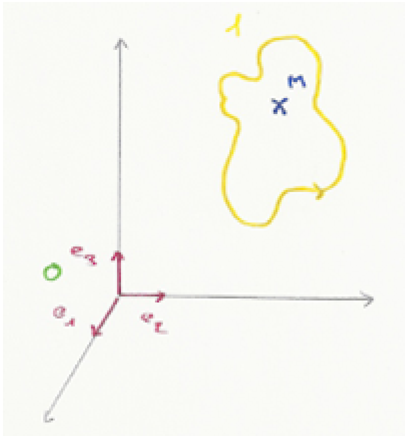
$$\begin{pmatrix} A_K & -F_K & -E_K \\ & B_K & -D_K \\ & & C_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ & B_G & -D_G \\ & & C_G \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ca \\ & c^2 + a^2 & -bc \\ & & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{\overline{I}}^{1}_{K_1 b_1} = \overline{\overline{I}}^{1}_{G,b_1} + \overline{\overline{H}}^{1}_{G,b_1 \to K,b_1}}$$

Quatrième partie

Dynamique

1 Moment dynamique



Étude cinétique. Soit la vitesse $\vec{V}_{M10}$ on a donc :

- $\vec{p}_{10} = \int_1 \vec{V}_{M10}dm = m.\vec{V}_{G10}$
- $\vec{\sigma}_{P10} = \int_1 P\vec{M} \wedge \vec{V}_{M10}dm$
- Si P est le centre de gravité $\vec{\sigma}_{G10} = \overline{\overline{I}}^{1}_{Gb_1}.\vec{\Omega}_{10}$
- Si P est un point fixe $\vec{\sigma}_{F10} = \overline{\overline{I}}^{1}_{Fb_1}.\vec{\Omega}_{10}$

Étude dynamique. Soit l'accélération $\vec{\Gamma}_{M10}$ on a donc :

- (résultante dynamique) $\vec{d}_{10} = \int_1 \vec{\Gamma}_{M10}dm = \int_1 \vec{d}_0 dt\vec{V}_{M10}dm = \dfrac{d_0}{dt}\int_1 \vec{V}_{M10}dm = \dfrac{d_0}{dt}(m\vec{V}_{G10}) = m\vec{\Gamma}_{G10}$.
- (moment dynamique) $\vec{\delta}_{P10} = \int_1 P\vec{M} \wedge \vec{\Gamma}_{M10}dm$
- Pour un point quelconque K on a $\delta_{K10} = \int_1 K\vec{M} \wedge \vec{\Gamma}_{M10}dm = \int_1 K\vec{P} \wedge \vec{\Gamma}_{M10}dm + \int_1 P\vec{M} \wedge \vec{\Gamma}_{M10}dm$
- (torseur dynamique) $\{D_10\} = \begin{cases} \vec{d}_{10} = m\vec{\Gamma}_{G10} \\ \vec{\delta}_{P10} = . \end{cases}$

Calcul du moment dynamique. $\vec{\delta}_{P10} = \int_1 P\vec{H} \wedge \vec{\Gamma}_{M10}dm = \int_1 P\vec{M} \wedge \dfrac{d_0\vec{V}_{M10}}{dt}dm$

$= \int(\dfrac{d_0}{dt}(P\vec{M} \wedge \vec{V}_{M10}) - \dfrac{d_0 P\vec{M}}{dt} \wedge \vec{V}_{M10})dm$

$= \int_1 \dfrac{d_0}{dt}(P\vec{M} \wedge \vec{V}_{M10})dm - \int_1(\vec{V}_{M10} - P10) \wedge \vec{V}_{M10}dm$

$= \dfrac{d_0}{dt}\int_1 P\vec{M} \wedge \vec{V}_{M10}dm + \int_1 \vec{V}_{P10} \wedge \vec{V}_{M10}dm$

$= \dfrac{d_0}{dt}\vec{\sigma}_{P10} + \vec{V}_{P10} \wedge \int_1 \vec{V}_{M10}dm.$

$$\vec{\delta}_{P10} = \frac{d_0}{dt}\vec{\sigma}_{P10} + \vec{V}_{P10} \wedge m\vec{V}_{G10}$$

On va considérer que P appartient à 1 c'est soit le centre de gravité alors $\vec{\delta}_{G10} = \dfrac{d_0}{dt}\vec{\sigma}_{G10}$. Soit c'est un point fixe alors $\vec{\delta}_{F10} = \dfrac{d_0}{dt}\vec{\sigma}_{F10}$

2 Principe fondamental de la dynamique

Énoncé. Le principe fondamental de la dynamique sur le solide 2 (de la centrifugeuse) s'exprime ainsi : le torseur des actions des forces extérieures de 2 sur 2 équivaut au torseur dynamique de 2 par rapport à 0. Ainsi le membre de droite peut se réécrire $\{D_{20}\}_{G_2} = \begin{cases} \vec{d}_{20} = m_2 \vec{\gamma}_{G20} \\ \vec{\delta}_{G\in 2|0} = \frac{d_0}{dt}\vec{\sigma}_{G\in 2|0} \text{ avec } \vec{\sigma}_{G\in 2|0} = \overline{\overline{I}}^2_{Gb_2}.\vec{\Omega}_{20} \end{cases}$.

Le membre de gauche peut aussi se réécrire $\{P_2\}_{G_2} = \begin{cases} -m_2 g \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$ que l'on ajoute à

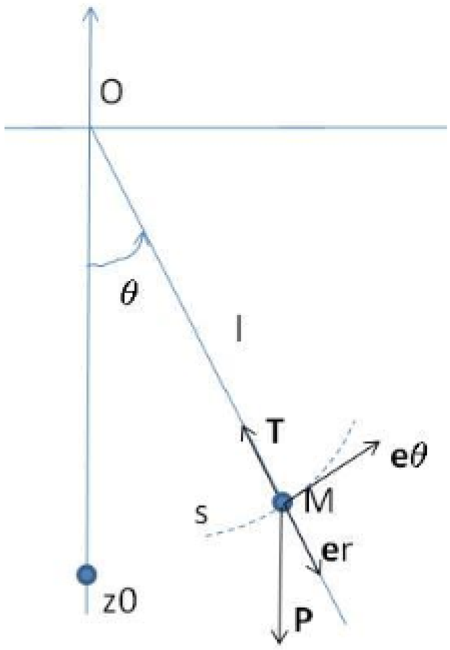
$$\{A_{12}\} = \begin{cases} \vec{R}_{12} = x_{12}\vec{x}_2 + y_{12}\vec{y}_2 + z_{12}\vec{z}_2 \\ \vec{\omega} A \in 1|2 = L_{12}\vec{x}_2 + M_{12}\vec{y}_2 + N_{12}\vec{z}_2 \end{cases}$$

. Cela conduit à l'expression du principe fondamental de la dynamique

$$\{P_2\}_{G_2} + \{A_{12}\}_{A\rightarrow G_2} = \{D_20\}_{G_2}$$

Cela conduit à deux théorème, celui de la résultante dynamique et celui du moment dynamique.
Dans le problème de la centrifugeuse, on peut isoler 2, faire le bilan des actions extérieures sur 2 et en déduire le principe fondamental de la dynamique à 2 par rapport à 0. De plus on peut isoler 1, faire le bilan des actions extérieures sur 1 et en déduire le principe fondamental de la dynamique de 1 à 0. De plus si on isole 1 et 2 et que l'on fait le bilan des forces extérieures sur 1 plus 2 on a le principe fondamental de la dynamique à 1 et 2, on retrouve le résultat précédent.
$\vec{d}_{10} = \int_1 \vec{\gamma}_{M\in 1|0} dm$ et $\vec{d}_{20} = \int_2 \vec{\gamma}_{M\in 2|0} dm$ ainsi $\vec{d}_{12|0} = \vec{d}_{10} + \vec{d}_{20} = \int_1 \vec{\gamma}_{M\in 1|0} dm + \int_2 \vec{\gamma}_{M\in 2|0} dm$. De manière analogue on a $\vec{\delta}_{12|0} = \vec{\delta}_{10} + \vec{\delta}_{20}$.

Exemple : le pendule simple.



$$\{V_{10}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}_{O\in 1|0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{C_{10}\} = \begin{cases} \vec{p}_{10} = m_1 l\dot{\theta}\vec{\phi}_1 \\ \vec{\sigma}_{O\in 1|0} = \overline{\overline{I}}^1_{Ob_1}.\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\{D_{10}\} = \begin{cases} \vec{d}_{10} = m_1 l(-\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + \ddot{\theta}\vec{\phi}_1) \\ \vec{\delta}_{O\in 1|0} = \dfrac{d_0}{dt}\vec{\sigma}_{O\in 1|0} \end{cases}$$

$$\{D_{10}\}_O = \{P_1\}_{G\to O} + \{A_{01}\}_O$$

On détermine la matrice d'inertie, les deux première colonnes sont nulles car elles sont multipliés par $\Omega_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

Il reste donc $-E$, $-D$ et C or $-E$ et $-F$ sont impaires en z et on intègre sur un domaine symétrique, il ne reste donc que C. Donc $\vec{\sigma}_{010} = C\dot{\theta}\vec{z}_0$ et donc $\vec{\delta}_{O\in 1|0} = C\ddot{\theta}\vec{z}_0$. On peut donc réécrire le principe fondamental de la dynamique

$$\begin{cases} m_1 l(-\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + \ddot{\theta}\vec{y}_1 \\ \vec{\delta}_{O\in 1|0} = C\ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{cases} = \begin{cases} \vec{d}_{10} = mg\vec{x}_0 \\ \vec{\delta}_{O\in 1|0} = \vec{OG}\wedge mg\vec{x}_0 \end{cases} + \begin{cases} \vec{R}_{01} = x_{01}\vec{x}_1 + y_{01}\vec{y}_1 + z_{01}\vec{z}_1 \\ \vec{m}_{O\in 0|1} = L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{cases}$$

On calcule la résultante selon la base 1 on a donc $\begin{cases} -m_1 l\dot{\theta}^2 = mgcos(\theta) + x_{01} \\ m_1 l\ddot{\theta} = -mgsin(\theta) + y_{01} \end{cases}$.

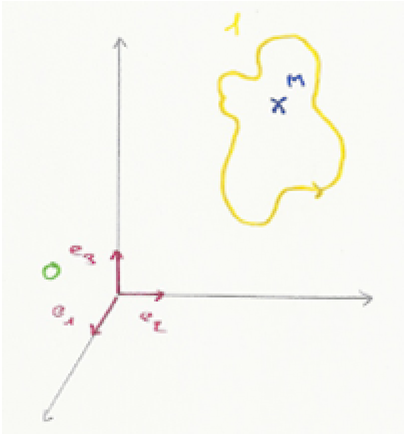
On calcule le moment selon la base 1 $C\ddot{\theta} = -mgl - sin(\theta) + 0$, c'est l'équation du mouvement.

On résout l'équation du mouvement

$$\dot{\dot{\theta}} + \frac{mgl}{C} sin\theta = 0$$

La solution est de la forme $\theta = Asin(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t)$.

3 Théorème de l'Energie cinétique



Enoncé - Démonstration. $E_{C\in 1|0} = \frac{1}{2} dm.\vec{V}^2_{M\in 1|0} dm$ et $2E_{C\in 1|0} = \{V_{10}\} \times \{C_{10}\}$, on a donc $\frac{d}{dt} E_{C\in 1|0} = \frac{d}{dt}(\int_1 \frac{1}{2} \vec{V}^{M\in 1|0^2} dm) = \int_1 \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\vec{V}^2_{M\in 1|0})dm = \int_1 V_{M\vec{\in} 1|0}.\frac{d}{dt}\vec{V}_{M\in 10} dm = \int_1 (\vec{V}_{X\in 1|0} + \vec{\Omega}_{10} \wedge X\vec{M}).\vec{\gamma}_{M\in 1|0} dm = \int_1 X \vec{\in} 1|0.\vec{\gamma}_{M\in 1|0} dm + \int_1 (\vec{\Omega}_{10} \wedge X\vec{M}).\vec{\gamma}_{M\in 1|0} dm = \vec{V}_{X\in 1|0}. \int \vec{\gamma}_{M\in 1|0} dm + \int_1 \vec{\Omega}_{10}(X\vec{M} \wedge \vec{\gamma}_{M\in 1|0})dm = \vec{V}_{X\in 1|0}.\vec{d}_{10} + \vec{\Omega}_{10}\delta_{X\vec{\in} 1|0}$. On a donc

$$\frac{d}{dt} F_{C\in 1|0} = \vec{V}_{X\in 1|0}.\vec{d}_{10} + \vec{\Omega}_{10}.\vec{\delta}_{X\in 1|0}$$

$$\frac{d}{dt} E_{C\in 1|0} = \{V_{10}\}\{D_{10}\}$$

Enoncé du principe fondamental de la dynamique

$$\{D_{10}\}\{V_{10}\} = \left\{A_{\overline{1}|1}\right\}\{V_{10}\}$$

$$\frac{d}{dt} E_{C\in 1|0} = \begin{cases} \vec{R}_{\overline{1}|1} \\ \vec{m}_{y\in \overline{1}|1} \end{cases} \times \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{y\in 1|0} \end{cases}$$

Nous pouvons donc en déduire

$$\frac{d}{dt} E_{C\in 1|0} = P_{\overline{1}|1}$$

Exemple : pendule simple. $2E_{C\in 1|0} = \{V_{10}\} \times \{C_{10}\}$

$$2E_{C\in 1|0} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}\vec{z} \\ \vec{V}_{G\in 1|0} = L\dot{\theta}\vec{y}_1 \end{cases} \times \begin{cases} \vec{p}_{10} = m_1 L\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_{G\in 1|0} \end{cases} = \overline{\overline{I}}^1_{Gb_1}.\vec{\Omega}_{10} = m_1 L^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt} 2E_{C\in 1|0} = m_1 L^2 2\dot{\theta}\dot{\dot{\theta}}$$

Actions $\overline{1}|1$ à distance

$$\begin{cases} mg\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_G \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}_{G\in 1|0} = L\dot{\theta}\vec{y}_1 \end{cases} = mgL\dot{\theta}\vec{x}_0\vec{y}_1 = -mgL\dot{\theta}sin(\theta)$$

et de contact

$$\begin{cases} x_{01}\vec{x}_1 + y_{01}\vec{y}_1 + z_{01}\vec{z}_1 \\ L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{cases} \times \begin{cases} \vec{\Omega}_{10} = \dot{\theta}\vec{z} \\ \vec{V}_{O\in 1|0} = \vec{0} \end{cases} = 0$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$m_1 L^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} = -m_1 g L\dot{\theta}sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}sin(\theta) = 0 \text{ équation du mouvement}$$

FIN.