2- Méthodes d'analyse des circuits en courant continu

- 2.1 Méthode générale de résolution
- 2.2 Méthode des noeuds
- 2.3 théorème de Millman
- 2.4 Méthode des mailles
- 2.5 Théorème de superposition
- 2.6 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de tension: Théorème de Thévenin
- 2.7 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de courant: Théorème de Norton
- 2.8 Equivalence générateur de courant ← → générateur de tension

2.1 Méthode générale de résolution

La résolution d'un réseau électrique (qu'on appelle aussi circuit ou encore montage), consiste à déterminer l'intensité des courants qui circulent dans chacune des branches et les tensions entre les différents nœuds.

On considère un réseau comportant n nœuds, b branches et m mailles.

A priori, l'étude d'un tel réseau devrait nous conduire à considérer :

- n équations (lois des nœuds) appliquée à chaque nœud
- b courants inconnus
- m équations (lois des mailles) appliquée à chaque maille.

Exemple 1 On considère un réseau de dipôles pour lequel on applique la loi de Kircchoff.

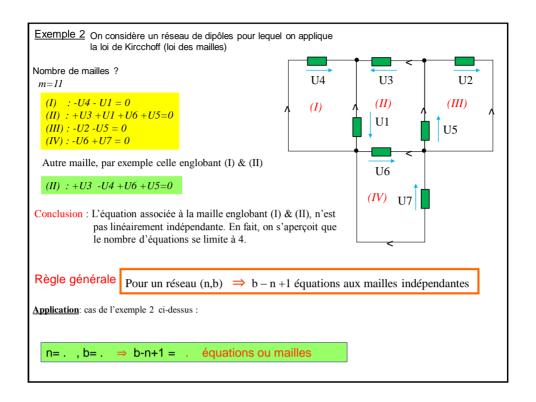
```
n=3
nœud A:
        I1 I2 I3 I4 = (1)
nœud B:
        I1 I2 I5
                   I6 = (2)
        I3 I4 I5 I6 = (3)
```

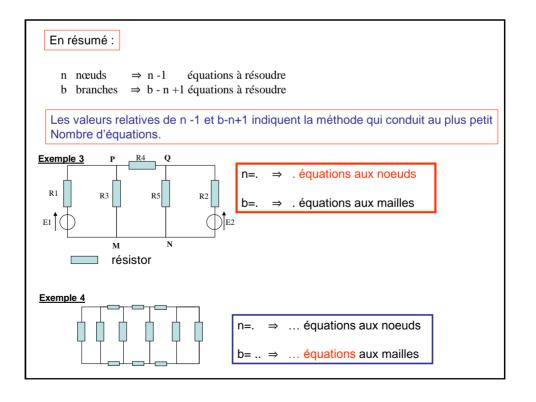
On peut montrer par combinaison linéaire, qu'on peut obtenir l'équ. (3) à partir de (1) et (2) ou bien (1) à partir de (2) et (3) ou bien (2) à partir de (1) et (3).

En conclusion : dans le système d'équations ci-dessus, il n'y a que 2 équations linéairement indépendantes.

Règle générale

n nœuds ⇒ n -1 équations aux nœuds indépendantes



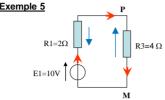


1° orienter le sens de parcours des courants à travers les différentes branches 2° orienter les tensions en fonction de la nature des dipôles (actif ou passif).

Exemple 5

P

Règle générale: La résolution d'un réseau électrique, nécessite de commencer par :

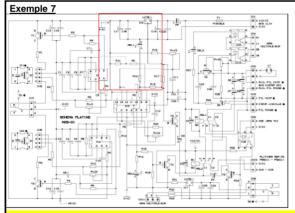


Exemple 6 A $R1=22\Omega$ $R3=4\Omega$ E=16V E=16V E=110V E=15V

Intéressons nous par exemple à la branche A-D-M :

Dipôle R1: Deux situations possibles:

Soit $V_{\!\scriptscriptstyle A} \text{-} V_{\!\scriptscriptstyle D} > 0 \implies I_{\!\scriptscriptstyle AD}$ ou bien $V_{\!\scriptscriptstyle D} \text{-} V_{\!\scriptscriptstyle A} > 0 \implies I_{\!\scriptscriptstyle DA}$



Pour contourner la difficulté à définir le sens réel des courants dans un réseau complexe, on introduit la notion de courants algébriques, c'est-à-dire des courants avec des intensités calculées pouvant être positives ou négatives.

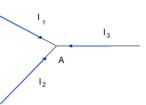
La loi des nœuds devient alors (pour k branches) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = 0$$

Sens conventionnel des courants algébriques

Pour écrire les équations aux nœuds ou loi des nœuds, on supposera que TOUS les courants arrivent sur le nœud.

Notation Algébrique : $I_1+I_2+I_3=0$



Question : Comment savoir dans la réalité, quels sont les courants qui arrivent et ceux qui partent ? La détermination du sens réel des courants se déduit directement du signe de la valeur de l'intensité

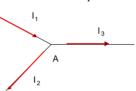
Convention de signes:

Tous les courants ayant une valeur algébrique positive arrivent au nœud. Tous les courants ayant une valeur algébrique négative partent du nœud.

Dans l'exemple du nœud ci-dessus, admettons qu'après résolution des équations on trouve :

$$I_1=2A$$
, $I_2=-1.5A$ et $I_3=-0.5A$

On redessine le nœud avec le sens réel des courants.



2.2 Méthode des noeuds

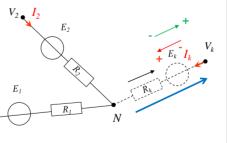
- ➤ <u>Objet</u>: Détermination des n-1 <u>valeurs</u> des potentiels de noeuds à partir d'un système de n-1 équations aux noeuds
- > Expression d'un courant de branche Soit un nœud N formé par la jonction de k branches

$$V_k - V_N = R_k I_k - E_k \implies I_k = G_k [+ E_k + (V_k - V_N)]$$

ou bier

$$V_k - V_N = R_k I_k + E_k \Rightarrow I_k = G_k [-E_k + (V_k - V_N)]$$

 G_k : conductance de la branche



En résumé:

$$I_k = G_k \left[\pm E_k + (V_k - V_N) \right]$$

Règle: $+E_k$ si la borne + est tournée vers N $-E_k$ si la borne - est tournée vers N

Méthode de substitution ou méthode de combinaison?
$$\begin{cases} 20 + 3U_{MP} + 2U_{QP} = 0 \\ 18 + \frac{7}{6}U_{MP} + \frac{7}{6}U_{PQ} + \frac{1}{2}U_{PQ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + 3U_{MP} + 2U_{QP} = 0 \\ 18 + \frac{7}{6}U_{MP} + \frac{10}{6}U_{PQ} = 0 \end{cases} \times 6/7 \quad \text{par la somme des deux équations} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{20}{3} - U_{MP} - \frac{2}{3}U_{QP} = 0 \\ \frac{108}{7} + U_{MP} + \frac{10}{7}U_{PQ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{108}{7} - \frac{20}{3} + \left(\frac{10}{7} + \frac{2}{3}\right)U_{PQ} = 0 \Rightarrow \frac{44}{21}U_{PQ} = -\frac{184}{21} \end{cases}$$

$$U_{PQ} = -\frac{184}{44} = -\frac{46}{11}V \quad \text{Soit} : U_{QP} = \frac{46}{11}V \quad \text{Et en remplaçant dans l'équation} : U_{MP} = -\frac{104}{11}V$$

$$Calcul des courants au nœud P$$

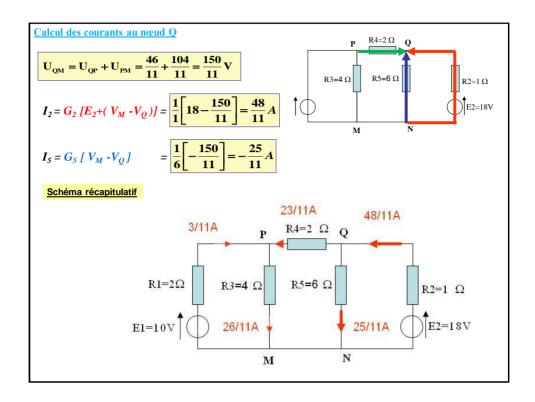
$$I_{I} = G_{I} \left[E_{I} + (V_{M} - V_{P})\right] = \frac{1}{2} \left[10 - \frac{104}{11}\right] = +\frac{3}{11}A$$

$$I_{3} = G_{3} \left[V_{M} - V_{P}\right] = \frac{1}{4} \left[-\frac{104}{11}\right] = -\frac{26}{11}A$$

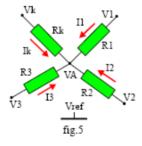
$$R_{I} = 2\Omega \quad \text{R3=4} \quad \Omega$$

$$R_{3} = 4\Omega \quad \text{R5=6} \quad \Omega$$

$$R_{1} = 2\Omega \quad \text{R5=6} \quad \Omega$$



2.3 - Théorème de Millman 3



On considère un nœud A auquel aboutissent k branches ; les potentiels V_i des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un <u>même potentiel de référence</u> V_{ref} ;

R_i est la résistance de la branche i et G_i sa conductance.

La loi des nœuds s'écrit :

$$\begin{split} \sum_{i=1}^{k} I_{i} &= I_{1} + I_{2} + \dots + I_{k} = 0 \\ \frac{V_{1} - V_{A}}{R_{1}} + \frac{V_{2} - V_{A}}{R_{2}} + \dots + \frac{V_{k} - V_{A}}{R_{k}} = 0 \\ (V_{1} - V_{A}).G_{1} + (V_{2} - V_{A}).G_{2} + \dots + (V_{k} - V_{A}).G_{k} = 0 \\ V_{A}.\sum_{i} G_{i} &= \sum_{i} V_{i}.G_{i} \end{split}$$

Le potentiel du point A par rapport à celui de la référence commune est

$$V_A = \frac{\sum_i V_i . G_i}{\sum_i G_i}$$
(8)

Remarques:

 \bullet Soit I_k le courant dans la branche k. Il peut être intéressant d'écrire le théorème de Millman sous la forme suivante :

$$\mathbb{V}_{\mathbb{A}} = \frac{\mathbb{I}_k + \sum_{i \neq k} \mathbb{V}_i.G_i}{\sum_{i \neq k} G_i}$$

2.4 Méthode des courants de mailles

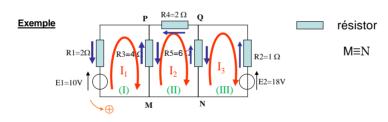
- ➤ Objet : détermination des b-n+1 valeurs des intensités indépendantes à partir d'un système de b-n+1 équations aux mailles.
- \triangleright Le long du circuit fermé d'une maille la somme des différences de potentiel est nulle: $\sum U_i = 0$

> Il faut choisir convenablement les mailles pour faire intervenir toutes les branches.

La méthode la plus rationnelle consiste à :

- a) choisir un courant et un sens de parcours de la maille étudiée (choix arbitraire).
- b) avec la convention de signe (courant,tension) dans un dipôle passif,
- c) la f.e.m d'un générateur est comptée avec le signe de la borne positive.

Si à l'issue du calcul, on obtient pour l'intensité du courant d'une branche une valeur négative, c'est que le courant réel de cette branche circule dans le sens opposé à celui qui a été arbitrairement choisi.



- 1° nombre de mailles à considérer : b-n+1=5-3+1 = 3 mailles
- 2° Identification des mailles choisies
- 3° choix arbitraire des courants de maille
- 4° orientation des tensions de chaque dipôle
- 5° sens arbitraire de parcours de la maille
- 6° prêter attention aux branches appartenant à deux mailles juxtaposées Dans cet exemple, les branches PM et QM sont traversées par les courants de maille (I_1, I_2) et (I_2, I_3) respectivement.

Dans la maille (I):

$$R_1.I_1-E_1+R_3.I_1-R_3.I_2=0$$
 (1)

$$X_1.I_1-E_1+X_3.I_1-X_3.I_2=0$$
 (1)
$$2 I_1 - 10 + 4 (I_1 - I_2) = 0$$
 (1)

$$6 I_1 - 4 I_2 = 10$$

$$6 I_1 - 4 I_2 = 10 \tag{1}$$

Dans la maille (II):

$$R_4.I_2+R_3.I_2-R_3.I_1+R_5.I_2-R_5.I_3=0$$
 (2)

$$2.I_2 + 4.I_2 - 4.I_1 + 6.I_2 - 6.I_3 = 0$$
 (2)

$$-4I_1 + 12I_2 - 6I_3 = 0$$

Exemple

P
R4=2
$$\Omega$$
Q
résistor

M=N

Dans la maille (III):

R₅I₃-R₅I₂+ E2 + R₂I₃ = 0 (3)
6I₃-6I₂+7I₃ = -18 (3)

$$\begin{cases}
6I_1 - 4I_2 &= 10 & (1) \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & (3)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
6I_1 - 4I_2 &= 10 & (1) \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & (3)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
6I_1 - 4I_2 &= 10 & (1) \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & (3)
\end{cases}$$

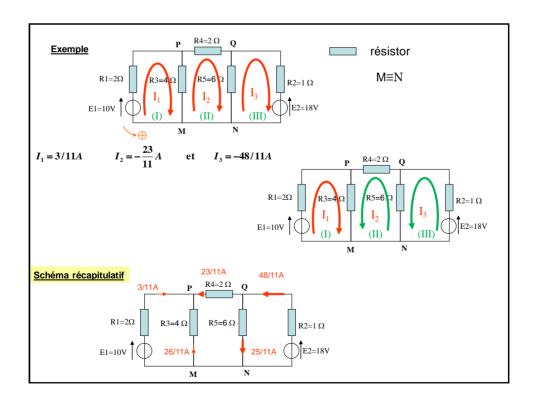
$$\begin{cases}
6I_1 - 4I_2 &= 10 & (1) \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & (3)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
6I_1 - 4I_2 &= 10 & (1) \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & (3)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
6I_1 - 4I_2 &= 10 & (1) \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & (3)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
14I_2 - 9I_3 &= 10 & \times 7 \\
-6I_2+7I_3 &= -18 & \times 9
\end{cases}$$

$$I_2 = \frac{-92}{44} = \frac{23}{11}A \qquad (1) \Rightarrow I_1 = 3/11A \qquad \text{et} \qquad (3) \Rightarrow I_3 = -48/11A$$



2.5 Théorème de superposition

Ce théorème découle directement de la linéarité des équations de Kirchhoff : un dipôle constitué de dipôles linéaires est un dipôle linéaire. Dans un réseau linéaire, il est possible de remplacer un ensemble de dipôles par un dipôle équivalent. La relation (6) montre que le courant I_j dans une branche est la somme de termes de la forme $G_j^k.U_k$, les G_j^k ayant la dimension d'une conductance.

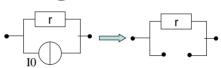
$$I_{j} = \sum_{i=1}^{M} G_{j}^{i}.U_{i}$$
 (6)

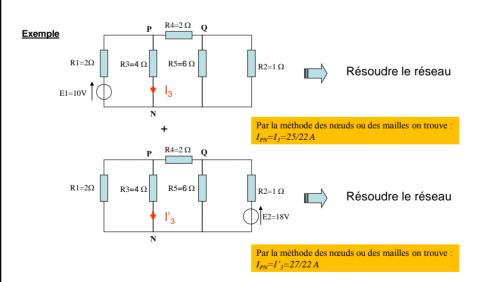


L'intensité du courant dans une branche d'un réseau comprenant plusieurs générateurs est la somme des intensités, que ferait passer, dans cette branche, chaque générateur considéré <u>isolément</u> comme actif, les autres générateurs du réseau étant alors passifs.

Rendre un générateur de tension passif ou "éteint":

Rendre un générateur de courant passif ou "éteint":



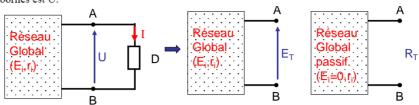


Le courant total dans la branche PN est la somme algébrique :

$$I_{PN} = I_3 + I'_3 = 25/22 + 27/22 = 52/22 = 26/11 A$$

2.6 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de tension: Théorème de Thévenin

On considère un réseau comprenant des dipôles actifs et passifs et on s'intéresse au fonctionnement d'un dipôle D particulier. Il est traversé par un courant I et la d.d.p. entre ses bornes est U.



Supposons que D soit isolé du reste du réseau. Si ce reste de réseau est actif, la f.e.m. mesurée entre A et B vaut E_T : c'est la tension en circuit ouvert. S'il est rendu passif c'est-à-dire si les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes, la résistance mesurée entre A et B vaut R_T . On remplace D par une source de tension idéale de f.e.m. U. D'après le théorème de superposition, le fonctionnement du circuit est inchangé. Le courant I est la superposition d'un courant I_P correspondant à la passivation de toutes les sources autres que U et d'un courant I_A où seule la source U est passivée : $I = I_P + I_A$

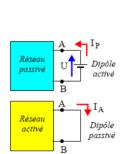


Fig. 6

- Si le générateur qui remplace D est seul à être actif le reste du réseau est équivalent à R_T : $I_P=-$ U/R $_T$

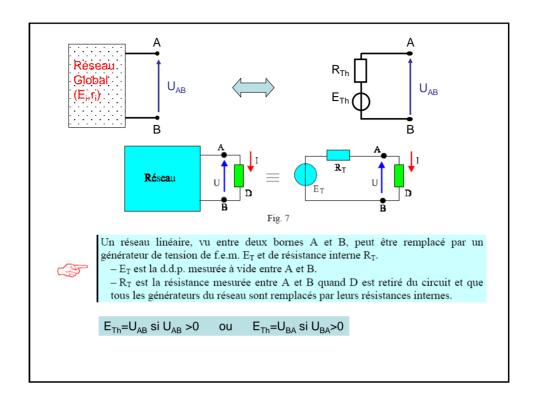
– Si on passive ce générateur, il est équivalent à une résistance nulle : le reste du réseau débite dans ce fil le courant $I_A = E_T/R_T$ Ce courant est le courant de court-circuit entre A et B.

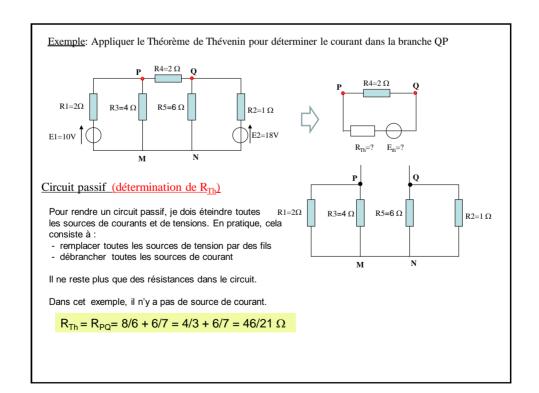
$$I = I_A + I_P = E_T/R_T - U/R_T$$

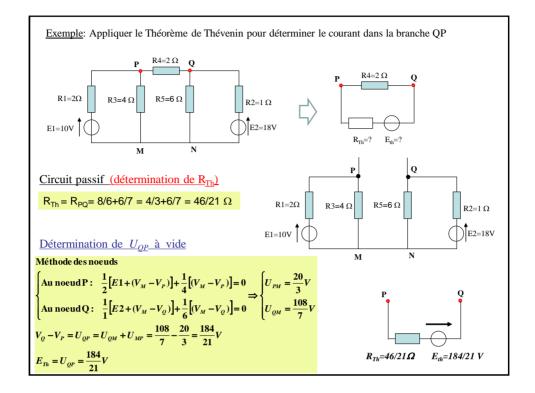
L'équation du circuit équivalent est donc :

$$U = E_T - R_T.I$$

Cette équation est celle d'un générateur de tension que l'on nomme le générateur de Thévenin du circuit. Les deux circuits de la figure 7 sont équivalents et l'application de la loi de Pouillet au circuit de droite donne de façon triviale : $E_T = (R_T + D).I$





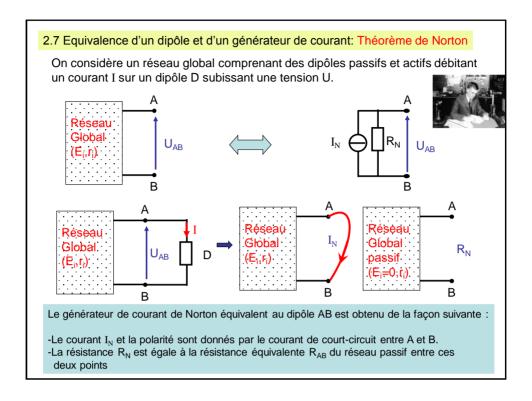


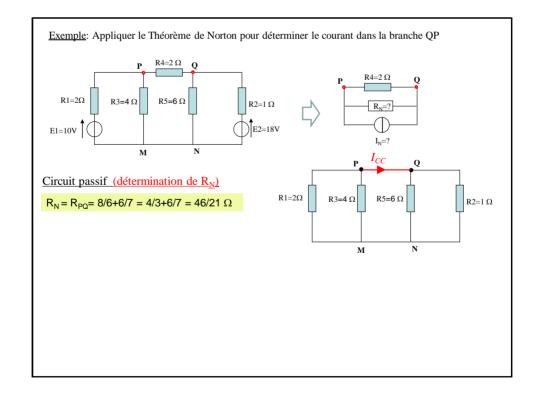
à partir de la borne Q:

$$-R_{4} \cdot I - R_{Th} \cdot I + E_{Th} = 0 \Leftrightarrow -(R_{4} + R_{Th}) \cdot I + E_{Th} = 0 \Leftrightarrow I = \frac{E_{Th}}{R_{4} + R_{Th}}$$

$$I = \left(\frac{184}{21}\right) / \left(\frac{46}{21} + 2\right) = \frac{184}{88} = \frac{23}{11}A$$

Le courant dans la branche QP est bien de 23/11 A, identique aux résultats précédents.





Exemple: Appliquer le Théorème de Norton pour déterminer le courant dans la branche QP

$$R_{1}=2\Omega$$
 $R_{2}=1\Omega$
 $R_{3}=4\Omega$
 $R_{5}=6\Omega$
 $R_{1}=10V$
 $R_{2}=18V$
 $R_{3}=4\Omega$
 $R_{5}=6\Omega$
 $R_{1}=2\Omega$
 $R_{2}=1\Omega$
 $R_{3}=4\Omega$
 $R_{5}=6\Omega$
 $R_{1}=2\Omega$
 $R_{1}=2\Omega$
 $R_{2}=1\Omega$
 $R_{3}=4\Omega$
 $R_{5}=6\Omega$
 $R_{5}=\Omega$
 $R_{$

