Première partie

Cinématique du point

Deuxième partie

Dynamique du point

1 Masse,Quantité de mouvement et force

1.1 Masse et quantité de mouvement

Pour un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$, on définit le vecteur quantité de mouvement : $\vec{p} = m.\vec{v}$
Tout comme la vitesse, ce vecteur est défini par rapport à un référentiel

1.2 Référentiels galiléens

Un point matériel isolé est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Ces référentiels sont des référentiels Galiléens.
On pourra prendre l'exemple du référentiel terrestre

1.3 Notions de forces

Interractions fondamentales

— L'interaction gravitationnelle de portée infinie, responsable en particulier des mouvements des planètes
— L'interaction électromagnétique de portée infinie responsables des phénomènes chimiques, optiques, électriques et magnétiques
— L'interaction faible responsable de la radioactivité bêta
— L'interaction forte responsable de la cohésion des noyaux

Poids d'un corps

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Souvent on trouvera le poids dans le sens inverse de l'axe y on aura donc : $\vec{p} = -mg\vec{e_z}$

Réactions des supports

Un point matériel immobile posé sur un support est soumis à son propre poids et à la réaction du support

$$\vec{R} = R\vec{e_z}$$

Force de frottement fluide

Pour un point matériel qui se déplace dans l'eau ou l'air subit des forces opposée à la vitesse de ce point ainsi :

$$\vec{f_f} = -\alpha\vec{v}$$

2 Principe fondamental de la dynamique du point

Proposition 1 *Dans un référentiel galiléen, la force qui s'exerce sur un point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement*

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\sum \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Ainsi deux cas sont à envisager :

- Si la masse est constante : $\vec{f} = m.\vec{a}$
- Si la masse varie : $\vec{f} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m.\vec{a}$

Proposition 2 *Cas particulier de la conservation de la quantité de mouvement : Si le point matériel est isolé ou pseudo isolé on a* $\vec{p} = \vec{cte}$

On se rappellera de l'utilisation classique de ce théorème vu en Terminale

3 Théorème du moment cinétique

Moment cinétique et moment d'une force

On pose O, M des points de (R) de masse m et de vitesse $\vec{v}$ le moment cinétique $\vec{\sigma_0}$

$$\vec{\sigma_0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{OM} \wedge \vec{p}$$

On définit également le moment d'une force $\vec{f}$ en O par le vecteur :

$$\vec{M_0}(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

$$\sum c\vec{M_0}(\vec{f}) = \frac{d\vec{\sigma_0}}{dt}$$

Cas particulier de la conservation du moment cinétique : Si on a $\vec{p} = \vec{cte}$ conservation de la quantité de mouvement[1] et $\vec{\sigma_0} = \vec{cte}$ conservation du moment cinétique alors on a une force centrale

Lien avec le mouvement à accélération centrale $\vec{\sigma_0} = m.\vec{c}$ avec $\vec{c} = \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e_z}$

1. voir PFD

4 Loi de l'action et de la réaction

expression générale de la loi

$$\vec{f_{A/B}} = -\vec{f_{B/A}}$$

Quantité de mouvement d'un système isolé

Pour un point A soumis à une force B : $\frac{d\vec{p_A}}{dt} = \vec{f_{A/B}}$ et $\frac{d\vec{p_B}}{dt} = \vec{f_{A/B}}$ donc comme $\frac{d}{dt}(\vec{p_A} + \vec{p_B})$ donc

$$\vec{p_A} + \vec{p_B} = \vec{cte}$$

Troisième partie

Travail et énergie

5 Travail et puissance

5.1 Travail élémentaire

Soit $M\vec{M}'$ un déplacement infinitésimal

$$\delta W = \vec{f}.M\vec{M}' = \vec{f}.d\vec{OM} = \vec{f}.\vec{v}.dt$$

. On peut utiliser cette formule dans n'importe quelle coordonnées

5.2 Travail au cours d'un déplacement fini

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f}.d\vec{OM} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}.\vec{v}.dt$$

5.3 Puissance moyenne et instantanée

$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$ en Watt, $P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{f}.\vec{v}$

6 Théorème de l'énergie cinétique

6.1 Théorème

On se place dans le cas où la masse est constante : $\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow dW = \vec{f}.\vec{v}dt = m.\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = m.\vec{v}.d\vec{v} = d(\frac{1}{2}m\vec{v}^2)$. Donc

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \delta W = dE_c$$

De plus

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}) = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W$$

Et

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\vec{f}) = \sum \vec{f}.\vec{v} = \frac{\delta W}{dt}$$

6.2 Remarques importantes

On notera que l'énergie cinétique ne se conserve pas sauf si la somme des forces qui s'exercent sur le point est nulle ou qu'elles soient perpendiculaire au mouvement.

Ce théorème est particulièrement adapté aux systèmes dont la position est définie par un seul degré de liberté.

7 Forces conservatrices-énergie potentielle

7.1 Energie potentielle

De manière générale on dit qu'un champ de force $\vec{f}$ est conservatif si : $\vec{rot}\vec{f} = \vec{0}$ On a donc

$$\vec{f} = -\nabla E_p$$

Si on se restreint à des forces indépendantes du temps on obtient : $E_p = -\int \vec{f}.d\vec{OM}$

La plupart du temps les forces de frottements ne sont pas conservatives, elles sont *dissipatives*

7.2 Une propriété importante des forces conservatives

$$\delta W = -dE_p$$

en intégrant on a donc :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{f}) = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

8 Energie mécanique

8.1 Conservation de l'énergie mécanique

On a $\delta W = dE_c$ et $\delta W = -dE_p$ [2] donc

$$dE_c + dE_p = 0 \rightarrow d(E_c + E_p) = 0 \rightarrow dE_m = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique quand

- $\vec{f}$ dérive d'une énergie potentielle E_p
- $\vec{f} = \vec{0}$
- $\vec{f}$ perpendiculaire au déplacement

Quatrième partie

Changement de référentiel

9 Introduction

'

9.1 Définitions

Vitesse absolue $\vec{v_a}$: Vitesse du point M évaluée dans le référentiel (R)

Accélération absolue $\vec{a_a}$: Accélération du point M évaluée dans le référentiel absolu (R)

Vitesse relative $\vec{v_r}$: Vitesse du point M évaluée dans le référentiel relatif (R')

Accélération relative $\vec{a_r}$: Accélération du point M évaluée dans le référentiel relatif (R')

Notion d'entrainement : Le point coïncidant est le point P qui coïncide avec M à l'instant t et fixe dans (R') on a donc :

- **Vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$:** Vitesse du point coïncidant P évaluée dans le référentiel fixe (R)
- **Accélération d'entrainement $\vec{a_e}$:** Accélération du point coïncidant P évaluée dans le référentiel fixe (R)

9.2 Dérivées d'un vecteur

$$\vec{U} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z} = x'.\vec{e'_x} + y'.\vec{e'_y} + z'.\vec{e'_z}$$

$$(\frac{d\vec{v}}{dt})_{(R)} = (\frac{d\vec{v}}{dt})_{(R')} + \omega(R/\vec{R'}) \wedge \vec{v}$$

2. Théorème de l'énergie cinétique et loi des forces conservatives

10 Transformations des vitesses et accélérations

10.1 Composition des vitesses

$$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$$

10.2 Composition d'accélération

$$\vec{a_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} + \vec{a_c}$$

avec $\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}_R + \frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \vec{OD} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (\vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{O'P})$ et $\vec{a_c} = 2\vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{v_r}(M/R')$

11 Dynamique dans un référentiel non galiléen

On considère (R) fixe et galiléen, (R') est mobile par rapport à (R), ainsi (R') n'est pas galiléen

11.1 Relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{f} = m\vec{a_a}$$

donc

$$\vec{f} - m\vec{a_e} - m\vec{a_c} = m\vec{a_r}$$

On obtient donc

$$\vec{f} + \vec{f_i e} + \vec{f_i c} = m\vec{a_r}$$

où $f_i e = -m\vec{a_c}$ et $f_i c = -m\vec{a_e}$

11.2 Cas Particuliers

Translation rectiligne : $\vec{a_c} = \vec{0}$

Rotation uniforme autour d'un axe fixe : On a $\vec{v_r} = \vec{0}$ et $f_i e = m\omega^2 \vec{OM}$

11.3 Point matériel immobile

Un point matériel M est immobile dans (R') si le vecteur O'M est constant donc : $\vec{f} - m\vec{a_e} = \vec{0}$

12 Application à la dynamique terrestre

$$\vec{g_0} = \frac{\vec{f_g}}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2}\vec{n}$$

Cinquième partie

Oscillateurs

13 Oscillations libres

13.1 Mouvement d'un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre

Par définition, on appelle oscillateur harmonique à une dimension, un point matériel mobile repéré par un paramètre dont le mouvement est décrit par une équation différentielle de la forme ci dessous.

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2.X = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

13.2 Description du mouvement

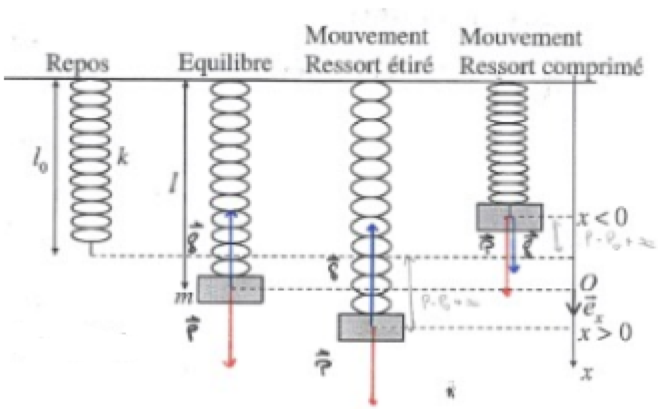
La solution de l'équation ci dessus est $X(t) = A.cos(\omega_0.t + \phi)$ avec $\begin{cases} A : \text{Amplitude} \\ \phi : \text{phase} \\ \omega_0 : \text{Pulsation propre du mouvement} \end{cases}$.

Le mouvement de l'oscillateur harmonique à une dimension est périodique. La période vaut $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

13.3 Deux représentations classique de l'oscillateur harmonique

L'oscillateur élastique

La force exercée par le ressort est en première approximation proportionnelle à l'allongement du ressort : $\vec{f} = -kx\vec{e_x}$. En résolvant l'équation différentielle on trouve $x = x_M cos(\omega_0.t)$



Le pendule simple

En résolvant l'équation différentielle on trouve $E_p = -\int f.d\vec{OM}$.

14 Aspect énergétique de l'oscillateur harmonique

14.1 L'oscillateur élastique

Énergie potentielle élastique

On définit l'énergie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

15 Oscillations amorties par frottement fluide

15.1 Equation différentielle du mouvement

Equation sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

En résolvant l'équation on a : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Régime pseudo-périodique

Si $\delta < 0$, solution sous la forme

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}cos(\omega t + \phi)$$

Régime critique

Si $\delta = 0$, solution sous la forme

$$x(t) = (At + B)^{-\omega_0 t}$$

Régime apériodique

Si $\delta > 0$, solution sous la forme

$$x(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$$

16 Oscillations forcées

16.1 Equation différentielle du mouvement

Equation sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}cos\omega t$$

Avec $x = Acos(\omega t + phi)$

16.2 Détermination de l'amplitude

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2}}$$

$$tan(\phi) = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

16.3 Étude de la résonance

Pour que A_{max} existe il faut que $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. L'amplitude A passe par son maximum pour $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ c'est un phénomène de résonance.

Sixième partie

Interaction à deux corps

17 Collisions

17.1 Conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{p}_{\text{initial}} = \vec{p}_{\text{final}} \Leftrightarrow m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}$$

17.2 Collisions élastiques

Conservation de l'énergie cinétique

$$E_{C\text{initial}} = E_{C\text{final}}$$

Référentiel du centre de masse

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OA_1} + m_2\vec{OA_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v_G} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

Dans R_G (le référentiel du centre de masse) , l y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

17.3 Collisions inélastiques

Choc mou

Un choc est dit mou si les deux corps avant le choc s'accompagnent après le choc.

Coefficient de restitution

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \begin{cases} e = 1 \to \text{ élastique} \\ e = 0 \to \text{ mou} \end{cases}$$

Vitesses finales

On pose $x = \dfrac{m_2}{m_1}$

— Si $e = 1$: $\begin{cases} v_1' = v_1(\dfrac{1-x}{1+x}) \\ v_2' = \dfrac{2v_1}{1+x} \end{cases}$

— Si $e = 0$: $v_1' = v_2' = \dfrac{v_1}{1+x}$

18 Énergie potentielle d'interaction

18.1 Définition

La fonction $E_p(r)$ porte le nom d'énergie potentielle d'interaction des deux corps et ne dépend que de la distance relative entre ces deux corps.

18.2 Loi de l'action et de la réaction

$$\vec{f_2} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u_{12}} = -\vec{f_1}$$

18.3 Energie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + E_p(r) = cte$$

19 Le problème à deux corps

19.1 Trajectoire dans le référentiel barycentrique

Le barycentre G du système est animé dans le référentiel galiléen (R) d'un mouvement rectiligne uniforme (car on a un système isolé)

$$\vec{r_2} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r_1}$$

Dans le référentiel du centre de masse (R_G), les deux corps en interaction décrivent des trajectoires homothétiques.

19.2 Mobile fictif et masse réduite

On appelle le point M le mobile fictif associé au système et défini par :

$$\vec{r} = \overline{GM} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

L'équation du mouvement est alors :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f_2}$$

où m est appelée masse réduite du système et définie par

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Septième partie

Mouvement dans un champ de force en $\frac{1}{r^2}$

20 Champ de force en $\frac{1}{r^2}$

20.1 Généralités

$$\vec{f} = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$$

20.2 Energie potentielle

$$E_p = \frac{K}{r}$$

20.3 Théorème de Gauss

$$\oint\oint \vec{g}d\vec{S} = -4\pi G \sum_i M_{iint}$$

Le flux sortant de $\vec{g}$ à travers une surface $(\mathcal{S})$ est égal à la masse contenu dans $(\mathcal{S})$ multiplié par $-4\pi G$

21 Trajectoires dans un champ de force en $\dfrac{1}{r^2}$ (cas attractif)

21.1 Recherche de trajectoire

On définit

$$p = -\frac{mc^2}{K}$$

$$e = -\frac{m\dot{c}A}{K}$$

$$\text{Si} \begin{cases} e > 1 : \text{ hyperbole} \\ e = 1 : \text{ parabole} \\ e < 1 : \text{ ellipse} \end{cases}$$

21.2 Caractéristiques de la trajectoire elliptique

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

21.3 Expression générale de l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{mc^2}{2p^2}(e^2 - 1) = cte$$

22 Application au mouvement des planètes et des satellites

22.1 Lois de Kepler

Première loi

La planète décrit une orbite elliptique dont un foyer est le centre du soleil.

Deuxième loi

Le rayon vecteu qui joint le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des temps égaux.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\phi} = \frac{c}{2}$$

Troisième loi

Le carré de la période T de révolution de la planète est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique.

Vitesse de satellisation