

GKN - Contactmoment 5

Logistische regressieanalyses (Deel 1)

Sven De Maeyer & Bea Mertens

09/12/2021

1/56

Categorische afhankelijke variabelen

Categorische afhankelijke variabelen



3/56

Categorische afhankelijke variabelen

Enkele klassiekers:

- Al dan niet slagen;
- Al dan niet doorstromen;
- Al dan niet falen;
- Al dan niet nieuwe job;
- Al dan niet norm halen;
- ...

Maar soms ook handig bij numerieke variabelen ...

Categorische afhankelijke variabelen

Variabelen met meerdere categorieën zijn herleidbaar tot een reeks van dummyvariabelen

Voor elke categorie kan je een variabele maken die aangeeft of een respondent al dan niet tot die categorie behoort

5/56

Vb. Onderpresteerders... in PIRLS

Leesvaardigheid van Vlaamse lln. in 5 categorieën ingedeeld (variabele ASRIBMO1):

- 1. BELOW 400 (code 1)
- 2. AT OR ABOVE 400 BUT BELOW 475 (code 2)
- 3. AT OR ABOVE 475 BUT BELOW 550 (code 3)
- 4. AT OR ABOVE 550 BUT BELOW 625 (code 4)
- 5. AT OR ABOVE 625 (code 5)

Code 1 en 2 samen vormen een groep van onderpresterende leerlingen

table(Vlaanderen_1_2_3\$ASRIBM01)

```
1 2 3 4 5
135 917 2329 1613 204
```

Onderpresteerders - afhankelijke var. hercoderen

Eerst hercoderen...

Dummyvariabele maken die aanstaat voor 'Onderpresteren' (dus voor leerlingen met code 1 of 2 voor de variabele ASRIBMO1)

```
library(car)
Vlaanderen_1_2_3$Onderpresteren <- recode(Vlaanderen_1_2_3$ASRIBM01, "1=1;2=1;3=0;4=0;5=0")
table(Vlaanderen_1_2_3$ASRIBM01, Vlaanderen_1_2_3$Onderpresteren)</pre>
```

1 0 135 2 0 917 3 2329 0 4 1613 0 5 204 0

7/56

Onderpresteerders - voorspeller?

Is het zo dat jongens een grotere kans hebben om onder te presteren dan meisjes?

```
Vlaanderen_1_2_3$Gender <- recode(Vlaanderen_1_2_3$ASBG01, "1 = 'Girls'; 2 = 'Boys'")
kruistabel.kolom(Vlaanderen_1_2_3$Onderpresteren, Vlaanderen_1_2_3$Gender)</pre>
```

```
x
y Boys Girls Sum
0 77.57266 82.04833 79.83699
1 22.42734 17.95167 20.16301
Sum 100.00000 100.00000 100.00000
```

Onderpresteerders - kansen! (1)

Wat is de kans op?

- 1. onderpresteren?
- 2. onderpresteren voor jongens?
- 3. onderpresteren voor meisjes?
- 4. onderpresteren voor meisjes onderpresteren voor jongens?

```
y Boys Girls Sum
0 77.57266 82.04833 79.83699
1 22.42734 17.95167 20.16301
Sum 100.00000 100.00000 100.00000
```

9/56

Onderpresteerders - kansen! (2)

Wat is de kans op....?

$$P(Onderpr.) = .202$$

$$P(Onderpr.\,|Boys) = .224$$

$$P(Onderpr.\,|Girls) = .180$$

$$P(Onderpr. | Girls) - P(Onderpr. | Boys) = .180 - .224 = -.044$$

Dummy als afhankelijke variabele? (1)

Waarom niet gewoon dummy als afhankelijke variabele?

```
Model_Dummy <- lm(Onderpresteren ~ Gender, data = Vlaanderen_1_2_3)</pre>
summary(Model_Dummy)
lm(formula = Onderpresteren ~ Gender, data = Vlaanderen_1_2_3)
Residuals:
    Min
            1Q Median
                           3Q
-0.2243 -0.2243 -0.1795 -0.1795 0.8205
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.224273 0.007941 28.244 < 2e-16 ***
GenderGirls -0.044757 0.011164 -4.009 6.18e-05 ***
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.4007 on 5151 degrees of freedom
  (45 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.003111,
                                Adjusted R-squared: 0.002917
F-statistic: 16.07 on 1 and 5151 DF, p-value: 6.183e-05
```

Dummy als afhankelijke variabele? (2)

Kans op onderpresteren voor een meisje?

11 / 56

Dummy als afhankelijke variabele? (3)

Kans op onderpresteren voor een leerling wiens ouders 3 SD hoger dan gemiddeld scoren op Ouders_GraagLezenZ?

```
Vlaanderen_1_2_3$Ouders_GraagLezenZ <- scale(Vlaanderen_1_2_3$ASBHPLR)</pre>
Model_Dummy2 <- lm(Onderpresteren ~ Ouders_GraagLezenZ, data = Vlaanderen_1_2_3)</pre>
summary(Model_Dummy2)
Call:
lm(formula = Onderpresteren ~ Ouders_GraagLezenZ, data = Vlaanderen_1_2_3)
               1Q
                    Median
                                  3Q
-0.39762 -0.21144 -0.17131 -0.09858 0.95232
Coefficients:
                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
                    0.189537 0.005672 33.42
-0.060328 0.005672 -10.63
(Intercept)
Ouders_GraagLezenZ -0.060328
                                                    <2e-16 ***
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.3873 on 4662 degrees of freedom
  (534 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.02369, Adjusted R-squared: 0.02348
```

13/56

Dummy als afhankelijke variabele? (4)

F-statistic: 113.1 on 1 and 4662 DF, p-value: < 2.2e-16

```
library(ggplot2)

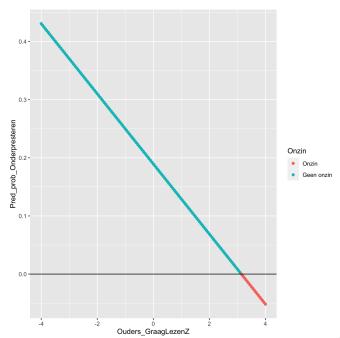
Ouders_GraagLezenZ <- seq(-4 , 4 , .05)

Pred_prob_Onderpresteren <- 0.189537 + (-0.060328 * Ouders_Graag

Onzin <- car::recode(
    Pred_prob_Onderpresteren,
    ' -2:-0.0000001 = "Onzin"; 0.00000001:1 = "Geen onzin" '
)

Onzin <- relevel(as.factor(Onzin), "Onzin")

qplot(x = Ouders_GraagLezenZ,
    y = Pred_prob_Onderpresteren,
    colour = Onzin) +
    geom_hline(yintercept = 0)</pre>
```



14/56

Problemen met dummyvariabelen als afhankelijke variabele

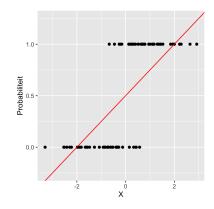
Probabiliteiten zijn gelimiteerd tussen 0 en 1

- ightarrow Regressielijn kan onmogelijke waarden bevatten
- ightarrow Kan leiden tot onzinnige schattingen
- ightarrow Hoe meer 'gemiddelde kans' afwijkt van 50%, hoe groter kans op onzinnige schattingen

15 / 56

Non-lineariteit

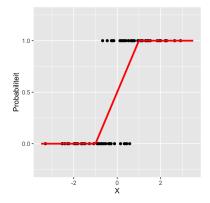
Lineaire regressie is hier problematisch!



We krijgen aan de uiteinden problemen met onrealistische schattingen...

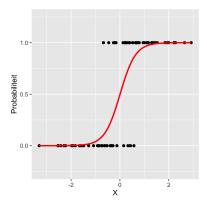
17/56

Oplossing 1



Dit model is DETERMINISTISCH: vanaf een bepaalde waarde voor X is de kans gelijk aan 0% of 100%!

Oplossing 2

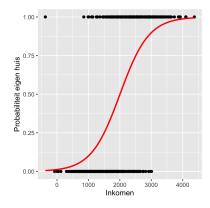


Dit model is

- REALISTISCHER: Vanaf een bepaalde waarde voor X benadert de kans 0% of 100%, maar is nooit exact 0% of 100%!
- NIET-LINEAIR: Kansen nemen niet lineair toe of af overheen de schaal van X

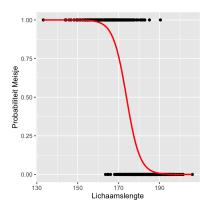
19/56

Voorbeelden uit het 'dagelijkse leven' (1)



- Kans om een eigen huis te bezitten is hoger voor gezinnen met hoger inkomen
- Toch ook gezinnen met hoog inkomen die geen eigen huis bezitten en vice versa
- 200€ meer verdienen heeft geen gelijkaardige impact (tussen 1500€ en 2500€ is de impact het sterkst)

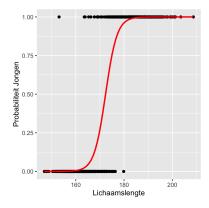
Voorbeelden uit het 'dagelijkse leven' (2a)



- Hoe groter lichaamslengte, hoe kleiner de kans dat het een meisje is
- Toch ook grote meisjes en kleine jongens
- 1cm groter of kleiner zijn heeft geen gelijkaardige impact

21/56

Voorbeelden uit het 'dagelijkse leven' (2b)



• Net hetzelfde model kan 'gespiegeld' worden!

Let's talk in LOGITS...



Logits

"I wish we hadn't learned probability 'cause I don't think our odds are good."

Kansen op een andere schaal uitgedrukt

 $Probabiliteiten \rightarrow Odds \rightarrow Logits$

25 / 56

0dds

De Odds voor een 'event' is:

$$Odds(Y=1) = rac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)} = rac{P(Y=1)}{P(Y
eq 1)}$$

Odds - voorbeeld onderpresteren

Kans op onderpresteren is 0.25 keer groter dan de kans op niet onderpresteren Kans op onderpresteren is 1/0.25 keer kleiner dan kans op niet onderpresteren

$$Odds(Onderpr. = 1) = rac{P(Onderpr. = 1)}{1 - P(Onderpr. = 1)} = rac{0.202}{0.798} = 0.253$$

Kans op niet onderpresteren is 4 keer groter dan kans op onderpresteren Kans op niet onderpresteren is 1/4 keer kleiner dan kans op onderpresteren

$$Odds(Onderpr. = 0) = rac{P(Onderpr. = 0)}{1 - P(Onderpr. = 0)} = rac{0.798}{0.202} = 3.95$$

27 / 56

Enkele odds...

| Probabiliteit | Odds |
|---------------|--------------------|
| 0.10 | (= 0.1/0.9) = 0.11 |
| 0.30 | 0.43 |
| 0.50 | 1.00 |
| 0.70 | 2.33 |
| 0.90 | 9.00 |

Loopt van 0 tot ∞

Odds zijn echter niet superhandig

- Nog steeds een nulwaarde
- Niet symmetrisch
- Dus niet handig voor lineaire modellen...

29 / 56

Tijd voor logits

Logit is het natuurlijk logaritme van een Odds:

$$Logits(Onderpr.=1) = \ln(Odds) = \ln(0.253) = -1.347$$

Uitstapje naar ... logaritmes

$$egin{align} \log_a(x)
ightarrow a^? &= x \ \log_{10}(10)
ightarrow 10^? &= 10
ightarrow 10^1 &= 10 \ \log_{10}(1)
ightarrow 10^? &= 1
ightarrow 10^0 &= 1 \ \log_{10}(100)
ightarrow 10^? &= 100
ightarrow 10^2 &= 100 \ \end{array}$$

31 / 56

Natuurlijk logaritme

 $\ln(x) = \log_e(x) o e^? = x$

met:

$$e=2,718281828$$
 $\ln(1) o e^?=1 o e^0=1$ $\ln(10) o e^?=10 o e^{2.303}=10$

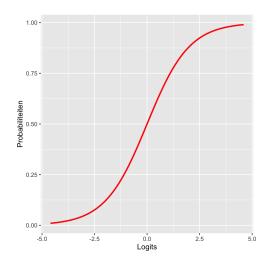
Enkele logits...

| Probabiliteit | Odds | Logits |
|---------------|------|--------|
| 0.10 | 0.11 | -2.20 |
| 0.30 | 0.43 | -0.85 |
| 0.50 | 1.00 | 0.00 |
| 0.70 | 2.33 | 0.85 |
| 0.90 | 9.00 | 2.20 |

- Loopt van $-\infty$ tot ∞
- 0 is midden (=50% kans)
- Symmetrisch!

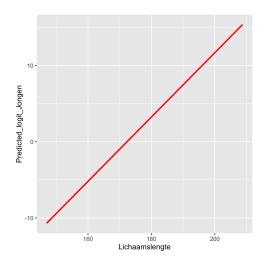
33 / 56

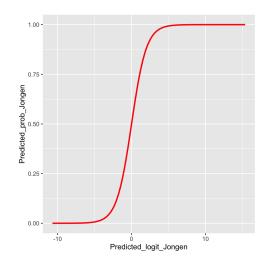
Verhouding tussen probabiliteiten en logits



- Elke toename van 1 logit is niet lineair gerelateerd aan toename in probabiliteiten!
- Lineair model in logits gaat gepaard met nonlineair model in probabiliteiten

Voorbeeld uit 'dagelijkse leven'





35 / 56

Voorbeeld uit 'dagelijkse leven'

Het statistisch model achter het verband tussen lengte en kans dat het om een jongen gaat:

$$Logit(Jongen = 1) = -72.717 + 0.422 * Lichaamslengte$$

waarbij

-72.717 = intercept = Voorspelde **kans in logits** dat het een jongen is als iemand 0 cm lang is 0.422 = slope = Per cm dat een persoon langer is, neemt **kans in logits** dat het om een jongen gaat met 0.422 logits toe

Voorbeeld uit 'dagelijkse leven'

5 fictieve personen + wat voorspelt ons model

$$Logit(Jongen=1) = -72.717 + 0.422*Lichaamslengte$$

| Lengte | Voorspelde logit Jongen |
|--------|------------------------------|
| 155 | -72.717 + 0.422*155 = -7.307 |
| 165 | -72.717 + 0.422*165 = -3.087 |
| 175 | -72.717 + 0.422*175 = 1.133 |
| 185 | -72.717 + 0.422*185 = 5.353 |
| 195 | -72.717 + 0.422*195 = 9.573 |

37 / 56

Voorbeeld uit 'dagelijkse leven'

5 fictieve personen + wat voorspelt ons model in logits

$$Logit(Jongen = 1) = -72.717 + 0.422 * Lichaamslengte$$

| Lengte | Voorspelde logit Jongen | $\Delta \; \mathbf{Logit}$ |
|--------|------------------------------|----------------------------|
| 155 | -72.717 + 0.422*155 = -7.307 | |
| | | 4.22 |
| 165 | -72.717 + 0.422*165 = -3.087 | |
| | | 4.22 |
| 175 | -72.717 + 0.422*175 = 1.133 | |
| | | 4.22 |
| 185 | -72.717 + 0.422*185 = 5.353 | |
| | | 4.22 |
| 195 | -72.717 + 0.422*195 = 9.573 | |
| | | |

Voorbeeld uit 'dagelijkse leven'

5 fictieve personen + wat voorspelt ons model in probabiliteiten

$$Logit(Jongen=1) = -72.717 + 0.422 * Lichaamslengte$$

| Lengte | Voorspelde logit Jongen | Δ Logit | Voorspelde Prob. Jongen | Δ Prob. |
|--------|------------------------------|----------------|-------------------------|----------------|
| 155 | -72.717 + 0.422*155 = -7.307 | | 0.0007 | |
| | | 4.22 | | 0.0429 |
| 165 | -72.717 + 0.422*165 = -3.087 | | 0.0436 | |
| | | 4.22 | | 0.7128 |
| 175 | -72.717 + 0.422*175 = 1.133 | | 0.7564 | |
| | | 4.22 | | 0.2388 |
| 185 | -72.717 + 0.422*185 = 5.353 | | 0.9952 | |
| | | 4.22 | | 0.0047 |
| 195 | -72.717 + 0.422*195 = 9.573 | | 0.9999 | |

39 / 56

Logistische regressie in R

Functie glm()

Werkwijze zeer gelijkaardig aan lineaire regressieanalyse

```
Functie glm( )
Model1 <- glm(Jongen ~ Lichaamslengte, data = DataGender, family = binomial())

Vervolgens
summary(Model1)</pre>
```

41/56

Voorbeeld uit 'dagelijkse leven'

Eerst maken we data aan om mee te werken:

```
set.seed(1975) # Maakt voorbeeld reproduceerbaar
Lichaamslengte <- c(rnorm( 300 , mean = 162 , sd = 6.2), #Genereer 300 waarden met mean 162 en SD 6.2
rnorm( 300, mean = 184 , sd = 7)) #Genereer 300 waarden met mean 184 en SD 7

Jongen <- c(rep( 0 , 300), rep ( 1 , 300))

DataGender <- data_frame(Lichaamslengte, Jongen)
```

Dan de analyse:

```
Model1 <- glm(Jongen ~ Lichaamslengte, data = DataGender, family = binomial())
```

De output

43 / 56

Welke kans ben je aan het voorspellen?

Kans dat het een jongen is of kans dat het een meisje is?

Hier: dummy die aanstaat voor jongen!

Standaard:

- Hoogste categorie (bv. waarde 1 bij een dummy)
- of laatste categorie alfabetisch (bv. categorie "Meisje" indien de variabele categorieën "Meisje" en "Jongen" heeft)

De voorbeelddata

We maken enkele varianten van de variabele geslacht. Vervolgens herschatten we model met elke variant als afhankelijke variabele.

45 / 56

Veranderen van referentiecategorie

De functie relevel()

Onderpresteerders - meerdere voorspellers

Effect van 'Gender' en 'Ouders_GraagLezenZ' op kans op onderpresteren?

```
M1_PIRLS <- glm(Onderpresteren ~ Gender + Ouders_GraagLezenZ,</pre>
                data = Vlaanderen_1_2_3, family = binomial())
 summary(M1_PIRLS)
glm(formula = Onderpresteren ~ Gender + Ouders_GraagLezenZ, family = binomial(),
    data = Vlaanderen_1_2_3)
Deviance Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-1.1701 -0.6869 -0.5991 -0.4531 2.2943
Coefficients:
                 Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
    Null deviance: 4496.7 on 4634 degrees of freedom
Residual deviance: 4377.4 on 4632 degrees of freedom
  (563 observations deleted due to missingness)
AIC: 4383.4
Number of Fisher Scoring iterations: 4
                                                                                                                                 47 / 56
```

alog() functie - PIRLS voorbeeld

Voor interpretatie handiger om in probabiliteiten te spreken

$$P(x=1) = rac{e^{logit(x=1)}}{1 + e^{logit(x=1)}}$$

Bv. Kans op onderpresteren voor een jongen is -1.376 logits (~ intercept)

In R

```
exp(-1.376)/(1+exp(-1.376))

[1] 0.2016522

Handiger: functie alog( ) uit "OLP2 Functies.R"
```

```
alog(-1.376)
```

[1] 0.2016522

alog() functie - PIRLS voorbeeld

```
# Probabiliteit tot onderpresteren voor jongens:
alog(-1.376)

[1] 0.2016522

# Probabiliteit tot onderpresteren voor meisjes:
alog(-1.376 - 0.254)

[1] 0.1638304

# Verschil in probabiliteit tot onderpresteren tussen jongens en meisjes:
alog(-1.376) - alog(-1.376 - 0.254)
```

[1] 0.03782182

49 / 56

alog() functie - PIRLS voorbeeld

Bij kwantitatieve voorspellers (bv. Ouders_GraagLezenZ) fictieve respondenten als voorbeeld hanteren:

```
# Probabiliteit tot onderpresteren voor een jongen die gemiddeld scoort:
alog(-1.376)

[1] 0.2016522

# Probabiliteit tot onderpresteren voor een jongen die 2 st.dev. hoger dan gemiddeld scoort:
alog(-1.376 + 2 * -0.394)

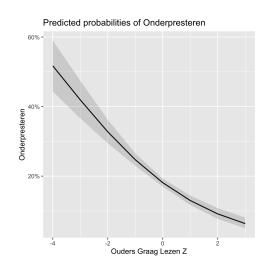
[1] 0.1030302

# Probabiliteit tot onderpresteren voor een jongen die 2 st.dev. lager dan gemiddeld scoort:
alog(-1.376 - 2 * -0.394)
```

[1] 0.3570939

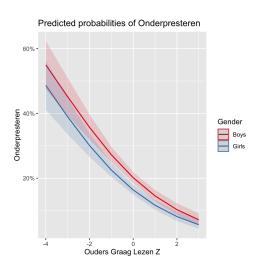
Grafisch samenvatten van model

Functie plot_model() uit het pakket sjPlot (niet in OLP!)



51/56

Grafisch samenvatten van model

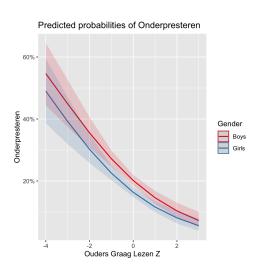


Interactie-effecten - PIRLS voorbeeld

Interactie-effect van 'Gender' en 'Ouders_GraagLezenZ' op kans op onderpresteren?

```
\verb"M2_PIRLS <- glm(Onderpresteren ~ Gender + Ouders\_GraagLezenZ + Gender*Ouders\_GraagLezenZ, not with the property of the pro
                                                     data = Vlaanderen_1_2_3, family = binomial())
   summary(M2_PIRLS)
 glm(formula = Onderpresteren ~ Gender + Ouders_GraagLezenZ +
            Gender * Ouders_GraagLezenZ, family = binomial(), data = Vlaanderen_1_2_3)
Deviance Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-1.1653 -0.6870 -0.5989 -0.4517 2.2982
Coefficients:
                                                                                                  Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
                                                                                                -1.375627 0.053804 -25.567 < 2e-16 ***
 (Intercept)
                                                                                               GenderGirls
Ouders_GraagLezenZ
GenderGirls:Ouders_GraagLezenZ -0.007286 0.077165 -0.094 0.92477
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
 (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
            Null deviance: 4496.7 on 4634 degrees of freedom
 Residual deviance: 4377.4 on 4631 degrees of freedom
       (563 observations deleted due to missingness)
AIC: 4385.4
Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Grafisch samenvatten van model



53 / 56

Time to pRactice!

Instructies:

- Laat deze sessie open staan
- Open Blackboard opnieuw in een ander venster
- Ga naar de curusus GKN
- Ga naar de Blackboard Collaborate omgeving van je groep
- Zet je microfoon/video aan

Eén van ons maakt zo meteen een ronde langs de groepen!

55 / 56

ExtRa's

Zit je te popelen om te weten ...

- hoe je toch random slopes voor kwalitatieve variabelen kan plotten zonder foutmelding?
- hoe je multilevel analyse gebruikt om longitudinale analyses te doen?

Check Blackboard (Leermateriaal > Materiaal per week)