Отчет по лабораторной работе № 4
Методы оптимизаций

Методы Ньютона.

Скроба Дмитрий M3234

ITMO UNIVERSITY

June 2021

1. Постановка задачи.

- Реализовать 3 варианта Ньютоновского метода минимализации функции:
    1. Класический метод Ньютона.
    2. Метод Ньютона с одномерным поиском.
    3. Метод Ньютона с направлением спуска.
    4. Квазиньютоновские метод Пауэллаю
    5. Квазиньютоновские метод Давидона-Флетчера-Пауэлла(1 вариант).
    6. 2 варианта метода Марквардта.
- Сравниить классические методы Ньютона и зависимость результата от начального приближения и типа функции.
- Провести сравнение с методом наискорейшего спуска на функциях с заданным начальным приближением:
    1. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.2x_1x_2 \qquad x^0 = (4, 1)^T$
    2. $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \qquad x^0 = (-1.2, 1)^T$
- Исследовать работу квазиньютоновских методов в сравнении с методом ньютона показавшим себя лучше остальных, на функциях:
    1. $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$
    2. $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$
    3. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$
    4. $f(x) = 100 - \frac{2}{1+(\frac{x_1-1}{2})^2+(\frac{x_2-1}{3})^2} - \frac{1}{1+(\frac{x_1-2}{2})^2+(\frac{x_2-1}{3})^2}$
- Исследовать работу метоу Марквардта в сравнении с методом ньютона показавшим себя лучше остальных, на функции Розенброка ($n = 100$):
    1. $f(x) = \sum_{i=1}^{99} 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2$

2. Этап I.

Сравнение методов Ньютона:

1. Поиск направления спуска осуществляется методом Гаусса.
2. Поиск оптимального коэффициента осуществляется методом золотого сечения.

Функция 1 : $f(x) = 3(x_1 - 1)^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 2$

$(0.1, 0.1)$	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	3	$(-2.0, -1.0)$	-
С одномерным поиском	3	$(-1.9999, 0.9999)$	$(0.9999, 0.9899)$
С направлением спуска	3	$(-2.0000, 1.0000)$	-

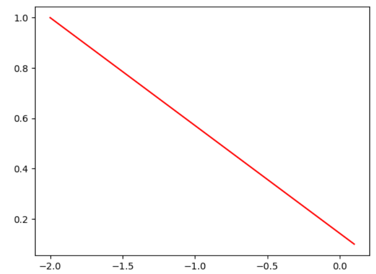

Рис. 1: Траектория метода Ньютона

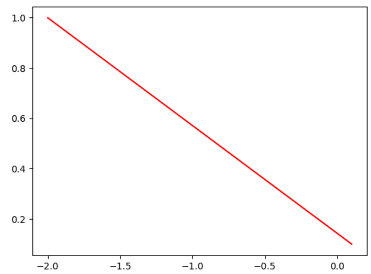

Рис. 2: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

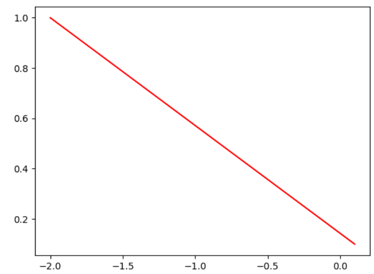

Рис. 3: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

$(1,1)$	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	3	$(-2.0, -1.0)$	-
С одномерным поиском	3	$(-1.9999, 0.9999)$	$(0.9999, 0.9899)$
С направлением спуска	3	$(-2.0000, 1.0000)$	-

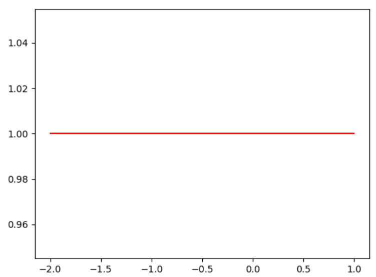

Рис. 4: Траектория метода Ньютона

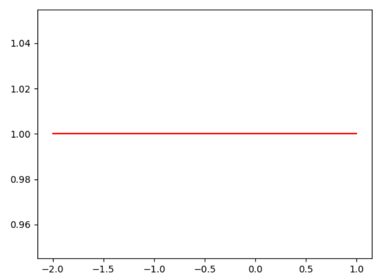

Рис. 5: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

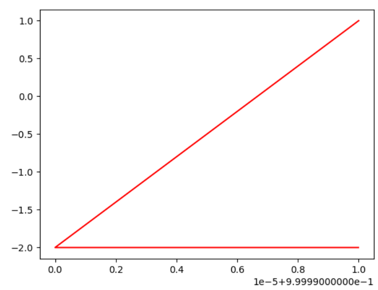

Рис. 6: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

$(15,15)$	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	3	$(-2.0, -1.0)$	-
С одномерным поиском	3	$(-1.9999, 0.9999)$	$(0.9999, 0.9899)$
С направлением спуска	3	$(-2.0000, 1.0000)$	-

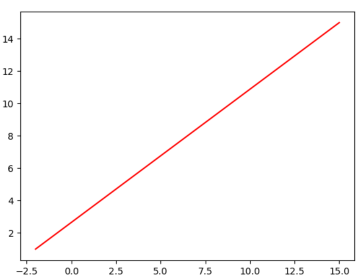

Рис. 7: Траектория метода Ньютона

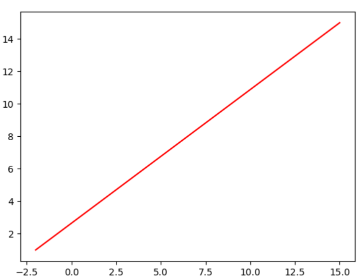

Рис. 8: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

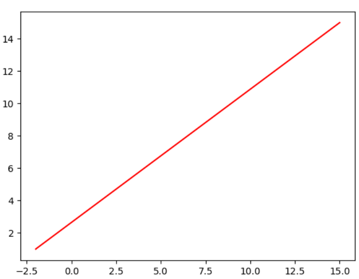

Рис. 9: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

Функция 2 : $f(x) = (2x_1 + x_2 + 2)^4 + (x_1 - 6x_2)^2$

$(0.1, 0.1)$	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	27	$(-0.92305 - 0.15384)$	-
С одномерным поиском	18	$(-0.92306 - 0.15384)$	$(0..2.23540)$
С направлением спуска	18	$(-0.92306 - 0.15384)$	-

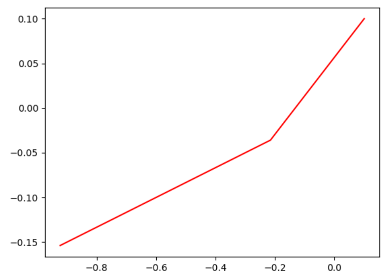

Рис. 10: Траектория метода Ньютона

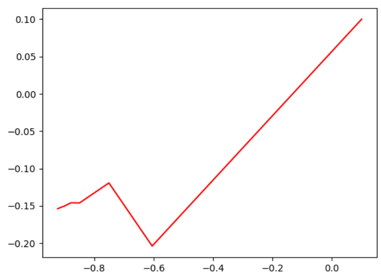

Рис. 11: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

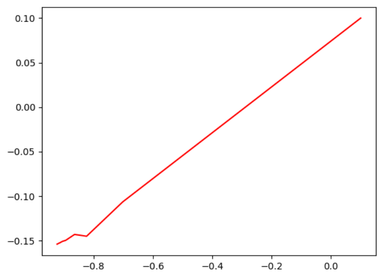

Рис. 12: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

$(10, -1)$	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	33	$(-0.92306 - 0.15384)$	-
С одномерным поиском	21	$(-0.92307 - 0.15384)$	$(0..2.56320)$
С направлением спуска	19	$(-0.92306 - 0.15384)$	-

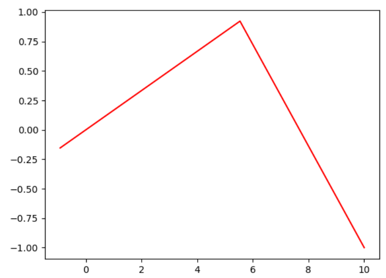

Рис. 13: Траектория метода Ньютона

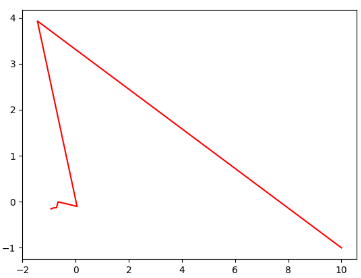

Рис. 14: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

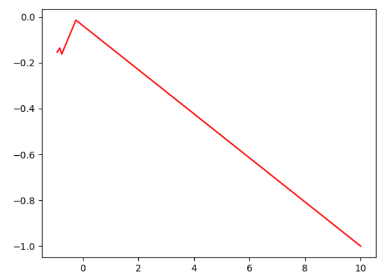

Рис. 15: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

$(5, -10)$	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	27	$(-0.92306 - 0.15384)$	-
С одномерным поиском	17	$(-0.92307 - 0.15384)$	$(0..2.633320)$
С направлением спуска	22	$(-0.92307 - 0.15384)$	-

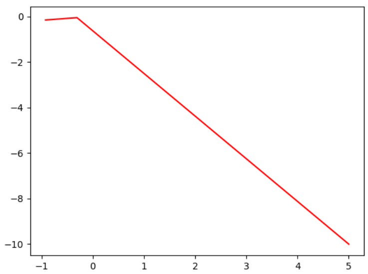

Рис. 16: Траектория метода Ньютона

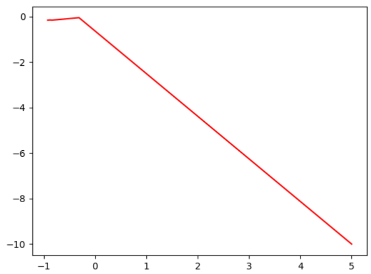

Рис. 17: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

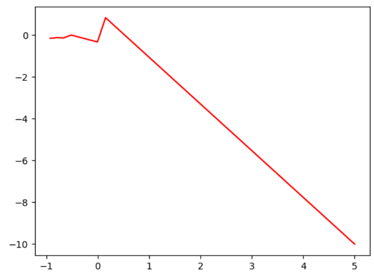

Рис. 18: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

Сравнение методов Ньютона с методом насикорейшего спуска
Функция 1 : $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.2x_1x_2 \qquad x^0 = (4, 1)^T$

Метод	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	3	(0.00000000.0000000)	-
С одномерным поиском	3	(0.00000000.0000000)	(0..0.9999989651)
С направлением спуска	3	(0.00000000.0000000)	-
Наискорейший спуск	12	(0.00084700.0010439)	-

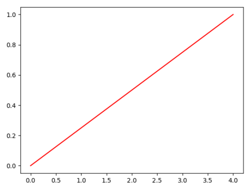

Рис. 19: Траектория метода Ньютона

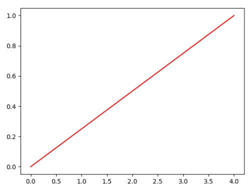

Рис. 20: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

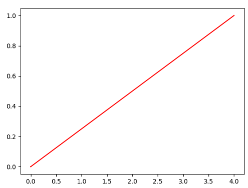

Рис. 21: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

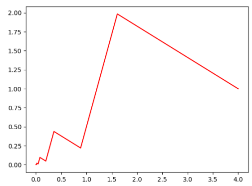

Рис. 22: Траектория метода наискорейшего спуска

Функция 2 : $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \qquad x^0 = (-1.2, 1)^T$

Метод	Количество шагов	Результат	Параметр
Классический	7	(1.00000001.0000000)	-
С одномерным поиском	14	(1.00000001.0000000)	(0..2.535447759510)
С направлением спуска	8	(1.00000001.0000000)	-
Наискорейший спуск	1276	(1.00175901.0035281)	-

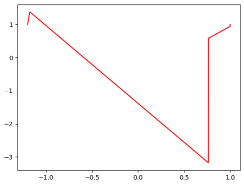

Рис. 23: Траектория метода Ньютона

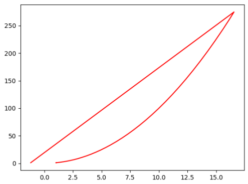

Рис. 24: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

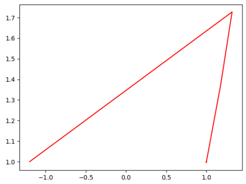

Рис. 25: Траектория метода Ньютона с направлением спуска

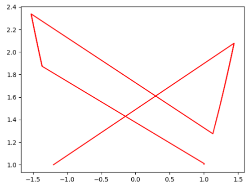

Рис. 26: Траектория метода наискорейшего спуска

Вывод: При рассмотрении квадратических функций, классический метод Ньютона показал себя наилучшим образом, выдавая точный результат за оптимальнейшее количество итераций. При сравнении же на не квадратичных функциях, метод с одномерным поиском уступает в скорости, но показывает более точный результат, при этом скорость сходимость отличается не значительно, при этом точность у метода с направленным спуском теряет точность после 6 знака после запятой.

2. Этап II.

Сравнение квазиньютоновских методов:

Функция 1 : $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

$(0, 0)$	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	14	(1.00000001.0000000)	-
С одномерным поиском	11	(1.00000001.0000000)	(0..3.09716119)
Powell	14	(1.00000001.0000000)	-

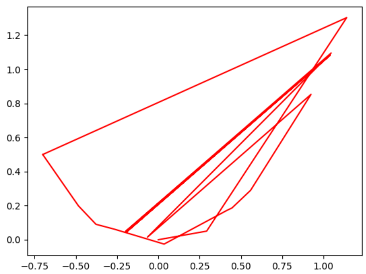

Рис. 27: Траектория метода DFP

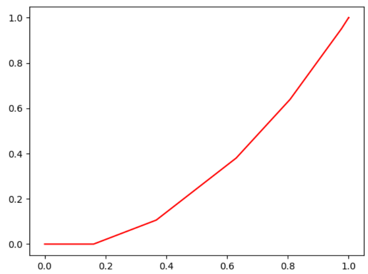

Рис. 28: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

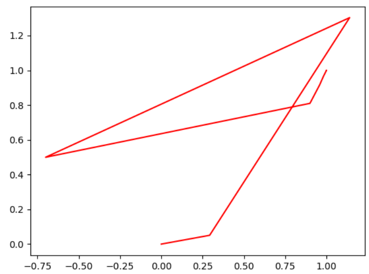

Рис. 29: Траектория метода Powell

$(10, 10)$	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	30	(1.00000001.0000000)	-
С одномерным поиском	29	(1.00000001.0000000)	(0..3.09716119)
Powell	600	(1.00000001.0000000)	-

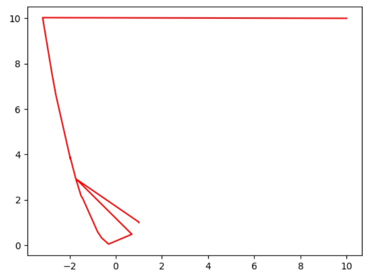

Рис. 30: Траектория метода DFP

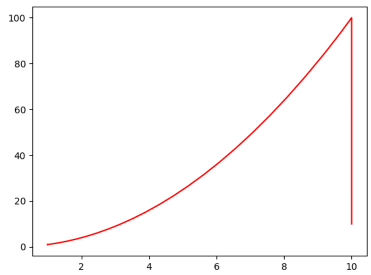

Рис. 31: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

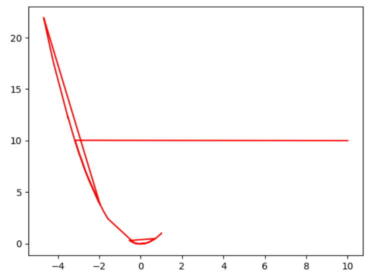

Рис. 32: Траектория метода Powell

$(5,5)$	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	402	(1.00000001.0000000)	-
С одномерным поиском	19	(1.00000001.0000000)	(0..2.421571789)
Powell	53	(1.00000001.0000000)	-

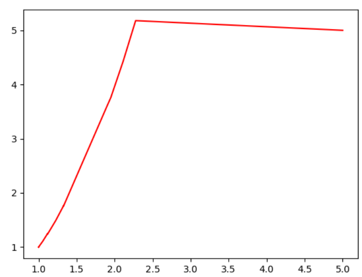

Рис. 33: Траектория метода DFP

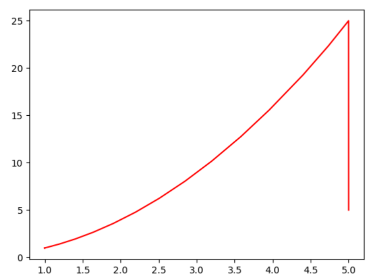

Рис. 34: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

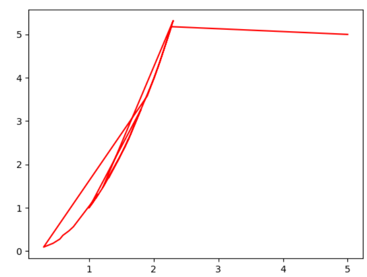

Рис. 35: Траектория метода Powell

Функция 2 : $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

$(0,0)$	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	9	(3.0000000 2.0000000)	-
С одномерным поиском	8	(3.0000000 2.000000)	(-3.34 .. 5004.393570891632)
Powell	9	(3.0000000 2.000000)	-

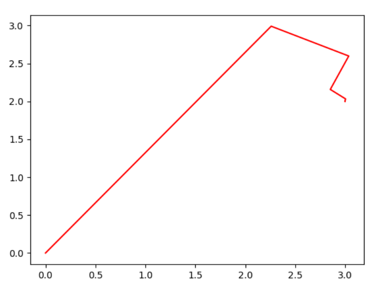

Рис. 36: Траектория метода DFP

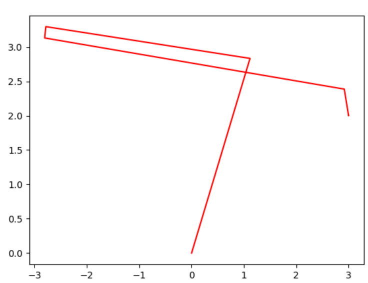

Рис. 37: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

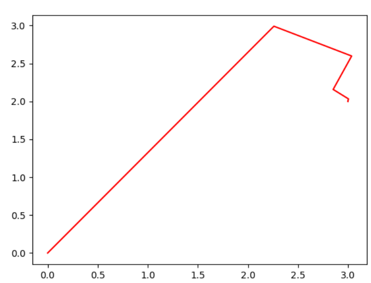

Рис. 38: Траектория метода Powell

(10, 10)	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	6	(3.0000000 2.0000000)	-
С одномерным поиском	6	(3.0000000 2.000000)	(0 .. 4.090417)
Powell	6	(3.0000000 2.000000)	-

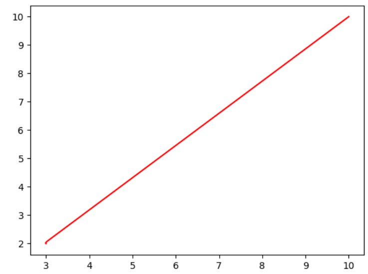

Рис. 39: Траектория метода DFP

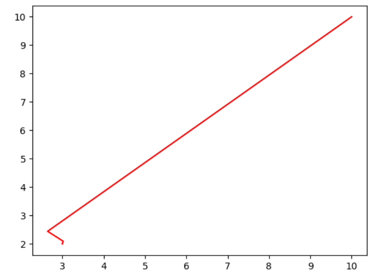

Рис. 40: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

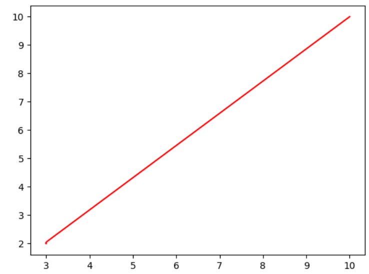

Рис. 41: Траектория метода Powell

(5, 5)	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	6	(3.0000000 2.0000000)	-
С одномерным поиском	6	(3.0000000 2.000000)	(-3.34 .. 5004.393570891632)
Powell	6	(3.0000000 2.000000)	-

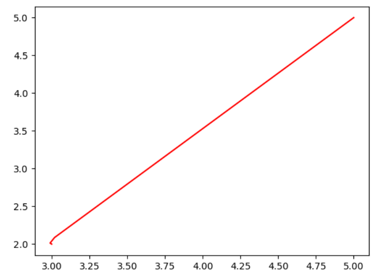

Рис. 42: Траектория метода DFP

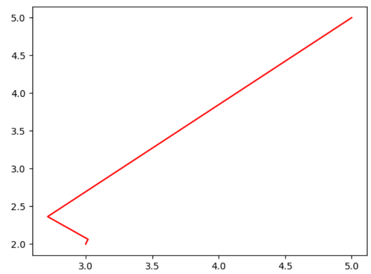

Рис. 43: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

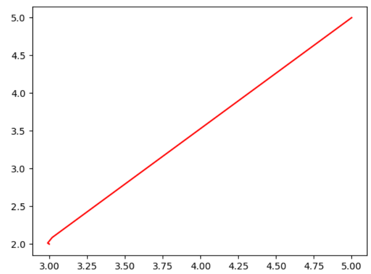

Рис. 44: Траектория метода Powell

Функция 3 : $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$

(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)	It	Результат
DFP	9	(-0.0000097 0.0000010 -0.0003553 -0.0003553)
С одномерным поиском	36567	(-0.0043255 0.0004326 -0.0018770 -0.0018771)
Powell	20	(-0.0000098 0.0000010 -0.0003554 -0.0003554)

(10, 10, 10, 10)	It	Результат
DFP	20	(0.0003374 -0.0000337 0.0001468 0.0001468)
С одномерным поиском	34972	(-0.0395790 0.0039803 -0.0171487 -0.0171941)
Powell	20	(0.0003117 -0.0000312 0.0001455 0.0001455)

$(5, 5, 5, 5)$	It	Результат
DFP	31	(-0.0000472 0.0000047 -0.0000213 -0.0000213)
С одномерным поиском	15629	(-0.0328747 0.0033003 -0.0142509 -0.0142768)
Powell	24	(-0.0000292 0.0000029 0.0000624 0.0000624)

Функция 4 : $f(x) = 100 - \frac{2}{1+(\frac{x_1-1}{2})^2+(\frac{x_2-1}{3})^2} - \frac{1}{1+(\frac{x_1-2}{2})^2+(\frac{x_2-1}{3})^2}$

$(0, 0)$	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	5	(1.2916431 1.00000020)	-
С одномерным поиском	5	(1.2916429 0.9999999)	(-0.2393 .. 0.99925161)
Powell	5	(1.2916431 1.0000000)	-

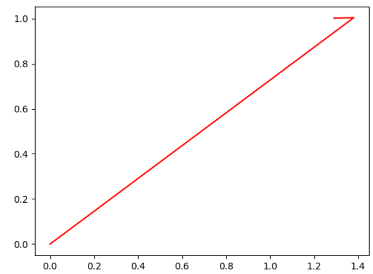

Рис. 45: Траектория метода DFP

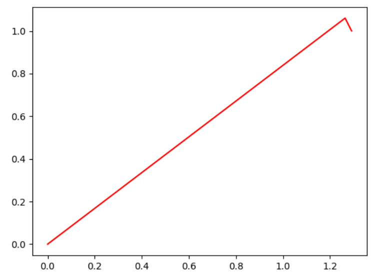

Рис. 46: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

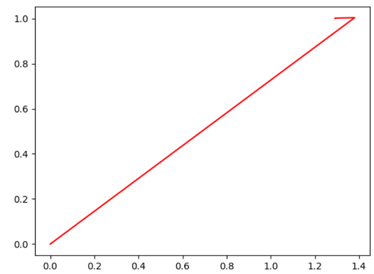

Рис. 47: Траектория метода Powell

$(10, -1)$	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	6	(1.2916430 0.9999998)	-
С одномерным поиском	5	(1.2916431 1.0000000)	(-10.177583 .. 1.00054)
Powell	5	(1.2916430 0.9999998)	-

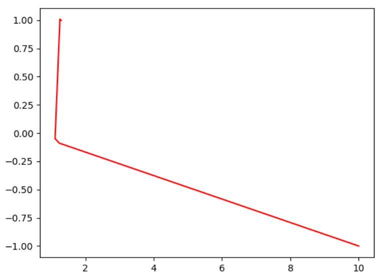

Рис. 48: Траектория метода DFP

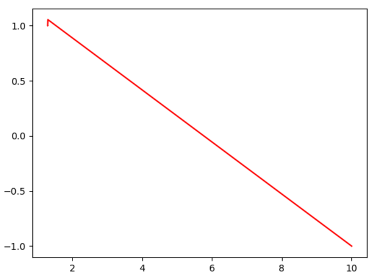

Рис. 49: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

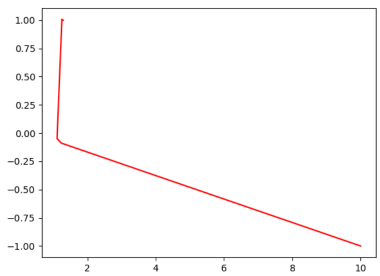

Рис. 50: Траектория метода Powell

(5, −10)	Количество шагов	Результат	Параметр
DFP	8	(1.2916430 0.9999999)	-
С одномерным поиском	5	(1.2916430 1.0000000)	(-2.773399 .. 0.98253177)
Powell	8	(1.2916431 0.9999998)	-

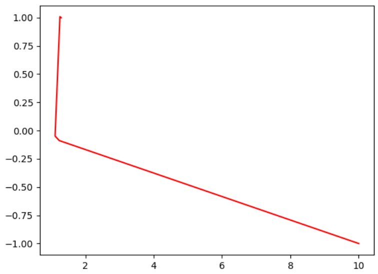

Рис. 51: Траектория метода DFP

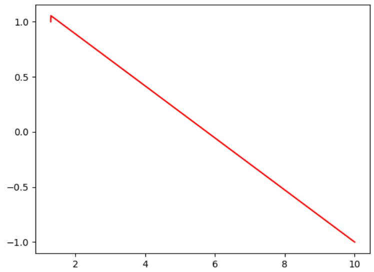

Рис. 52: Траектория метода Ньютона с одномерным поиском

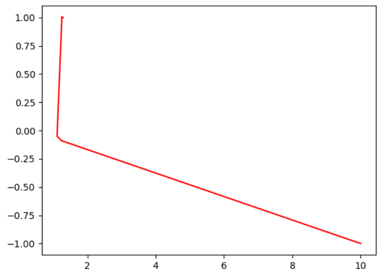

Рис. 53: Траектория метода Powell

Вывод: Как видно из результатов, чем больше размерность функции, тем больше погрешность метода Ньютона, при этом увеличивается количество итераций требуемое для нахождения результата. В отличии от метода Ньютона, квазиньютоновские методы не теряют свою точность, но при этом на результат влиют очень сильно начальное значение, и границы поиска одномерного поиска коэффициента.

3. Этап III.

Метод	Количество шагов	Абсолютная погр.	Относительная погр.
MarquardtMethodVersion1	336	40.660170266184714	4.066017026618471
MarquardtMethodVersion2	42	3.5918047510150995E11	3.591804751015099E10
NewtonLinaryMethod	3481	23533.339159426716	2353.3339159426714

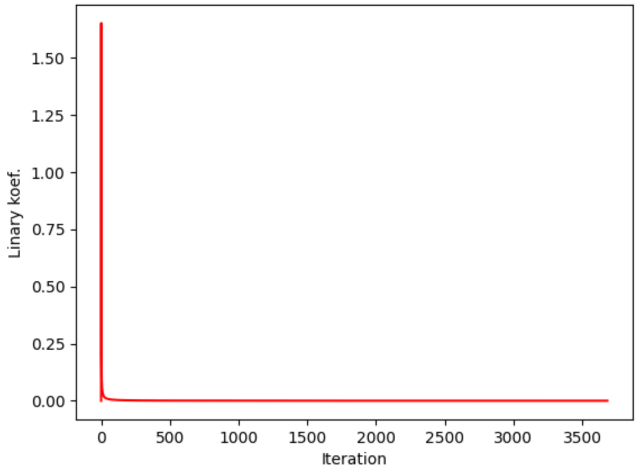

Рис. 54: Метод Ньютона с одномерной оптимизации

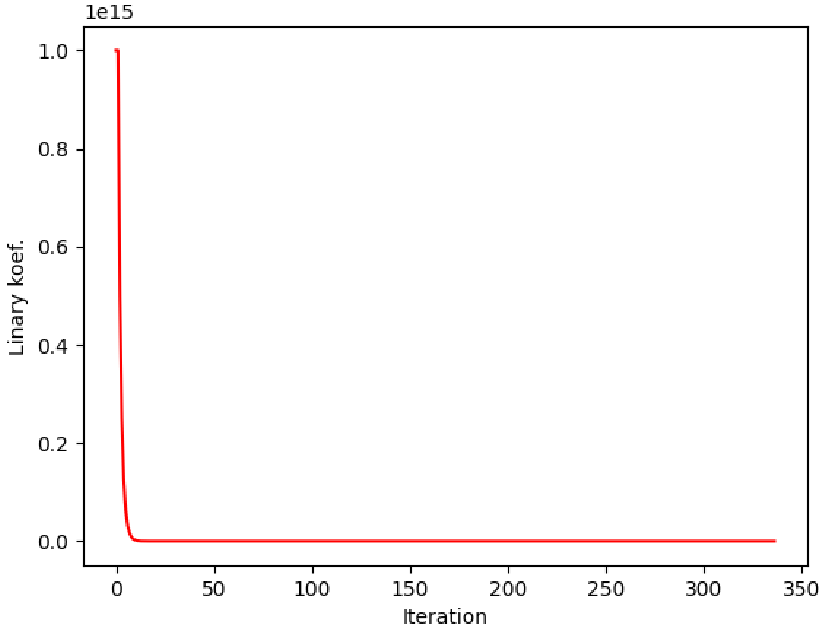

Рис. 55: Метод Марквардта версия 1

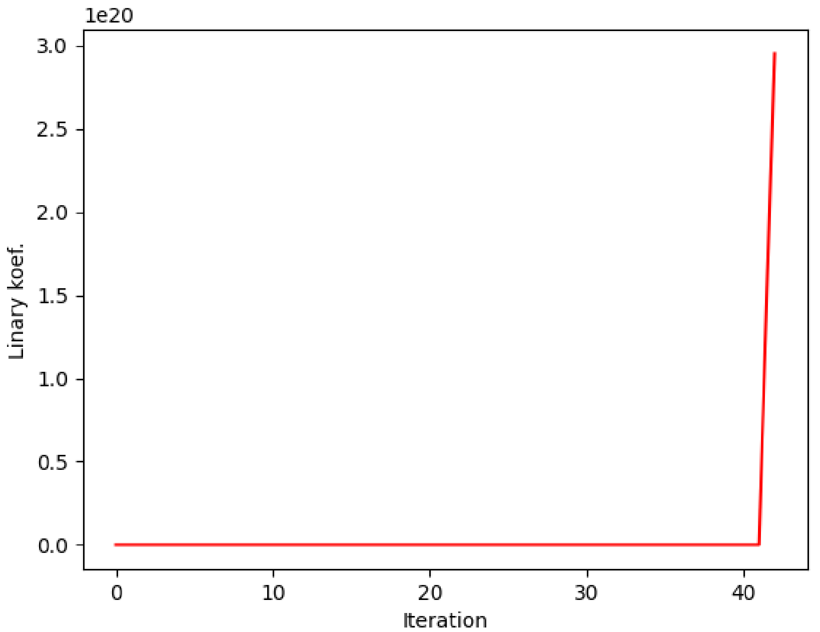

Рис. 56: Метод Марквардта версия 2

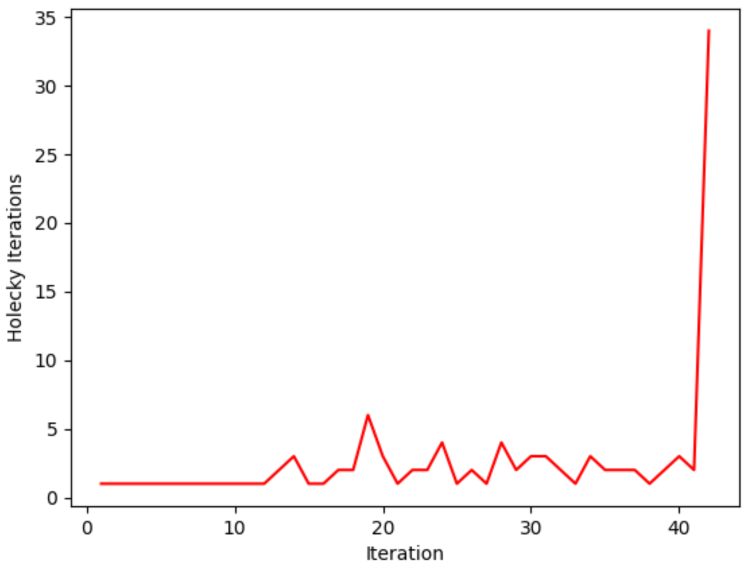

Рис. 57: Метод Марквардта версия 2

Вывод: Наиблее точный результат продемонстрировал Метод Марквардта с разложением Холесского, за наименьшее оличество итераций и снаиболей точностью, минус в большой погрешности у самых больших координат. При этом метод Ньютона показал большую погрешность и очень долгое вычисление, но абсолютная скорость вычисления у него была больше, чем у метода Марквардта находящего направление методом Гаусса.

4. Приложения

Реализация всех методов и всех вспомогательных классов выводящих резальтаты представленна в репозитории (sdmitrioul)

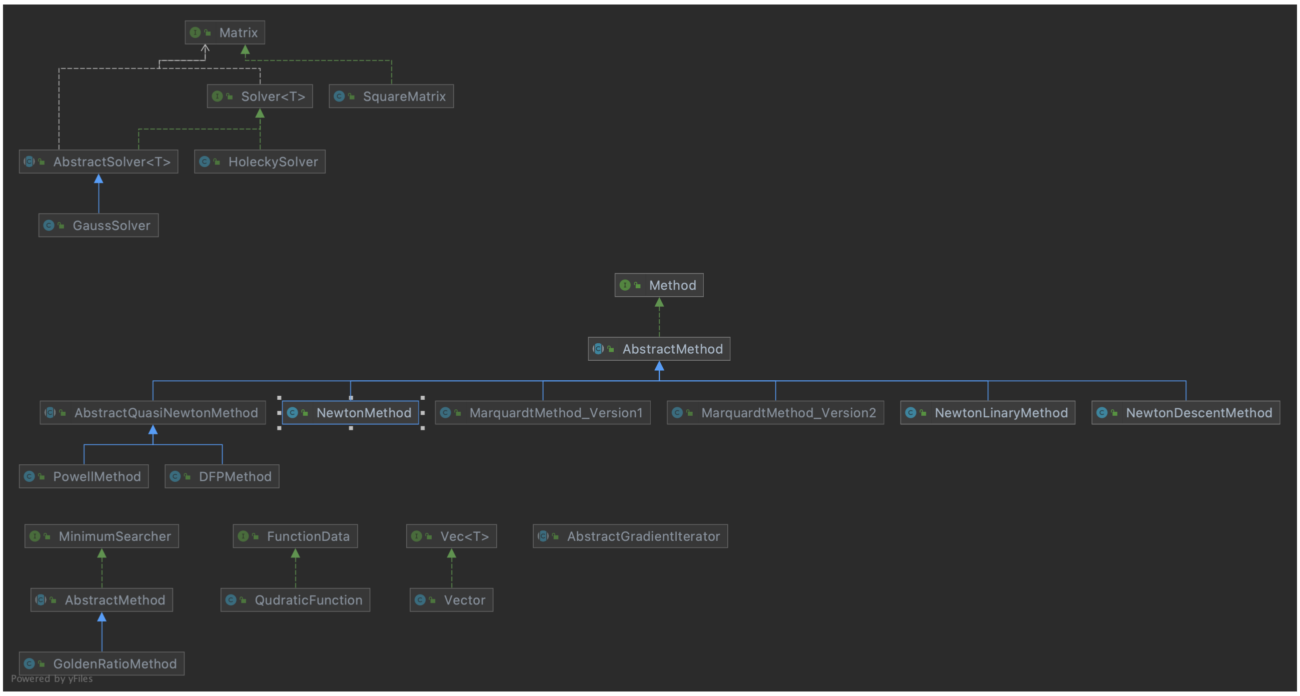

Рис. 58: Диаграмма классов