Отчет по лабораторной работе № 2
Методы оптимизаций

Методы многомерной оптимизации

Скроба Дмитрий M3234

ITMO UNIVERSITY

June 2021

1. Постановка задачи

- Реализовать алгоритмы многомерной оптимизации функций:
  1. Метод градиентного спуска
  2. Метод наискорейшего спуска
  3. Метод сопряженных градиентов
- Оценить различия скорости сходимости методов в зависимости от: метода оптимизации, входных данных, в частности от числа обусловленности оптимизируемой фунции и размерности пространства.
- Построить графики зависимости и визуализации работы методов.

2. Исследуемые функции

- Функция 1: $f(x, y) = 16x^2 + 8y^2 - 20xy + 5x - 7y + 1$
- Функция 2: $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 5$

Аналитические решения функций:

- **Функция 1:** $f(x, y) = 16x^2 + 8y^2 - 20xy + 5x - 7y + 1$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow minimum f(x, y)$$

$$\begin{cases} f'_x = 32x - 20y + 5 = 0 \\ f'_y = 16y - 20x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{28} \\ y = \frac{31}{28} \end{cases} \Leftrightarrow \min f(x, y) = -\frac{43}{28}$$

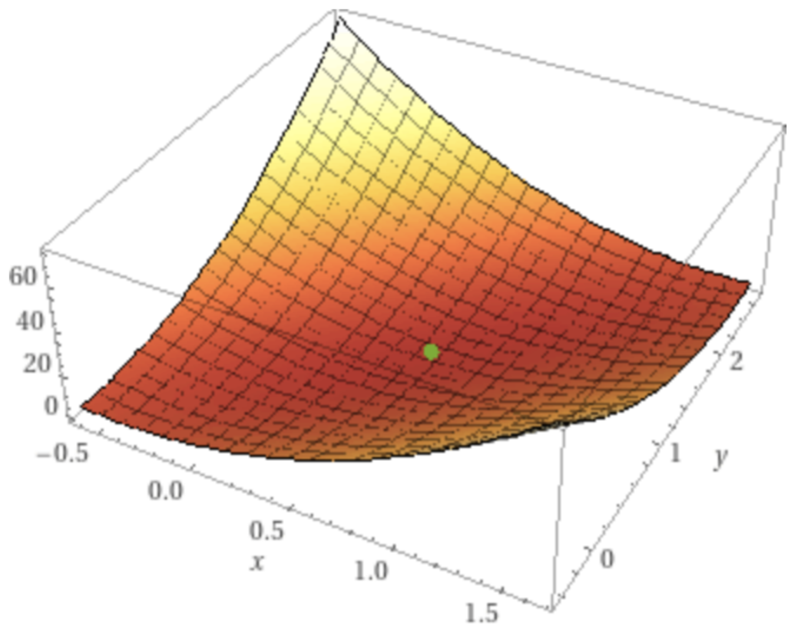

Рис. 1: Аналитическое решение 1-ой функции и ее график

- **Функция 2:** $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 5$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow minimum f(x, y)$$

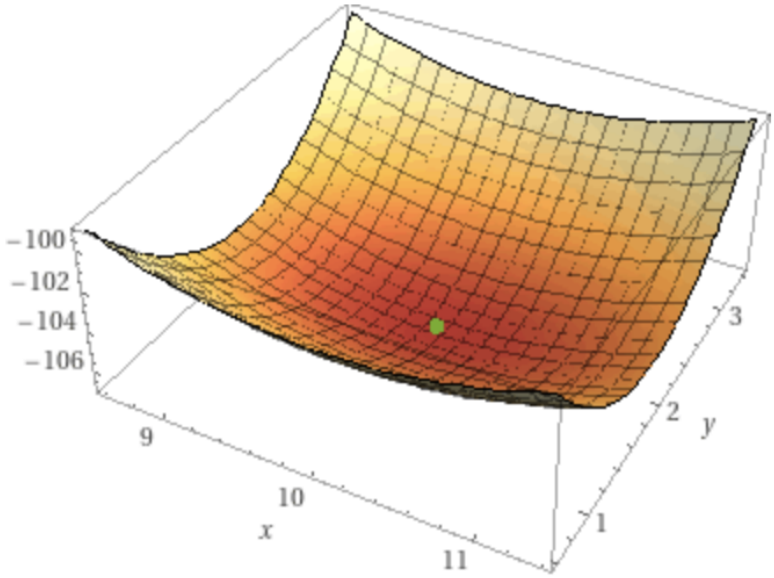

Рис. 2: Аналитическое решение 2-ой функции и ее график

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 20 = 0 \\ f'_y = 6y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \min f(x,y) = -107$$

3. Полученные результаты

Параметры исследований:

- Условие остановки: $||\nabla f(x^{[k]})|| \leq \epsilon$;
- Начальная точка: $x^0 = (0, 0, ..., 0)$;
- $\epsilon = 10^{-5}$;
- $\delta = 0.95$;
- Начальный шаг для градиентного спуска: 1;
- Число итераций для обновления метода сопряженных градиентов: 10.

Функция 1 - $f(x, y) = 16x^2 + 8y^2 - 20xy + 5x - 7y + 1$:

Метод градиентного спуска

Количество итераций: 119.

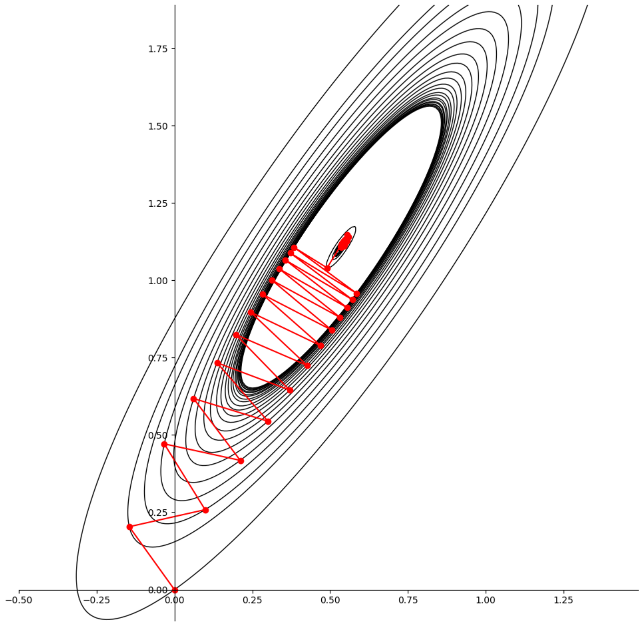

Рис. 3: Нешение 1-ой функции градиентным спуском

Визуализация показывает недостатки метода градиентного спуска, в частности из-за достаточного большого начального шага, поиск происходит достаточно рванно, те пока не произойдет уменьшение шага последующие итерации будут иметь малое влияние на уменьшение функции. Скорость уменьшения функции будет снижаться после каждой итерации до уменьшения шага, это и дает достаточно большое количество итераций для поиска.

Метод наискорейшего спуска

Количество итераций: 56.

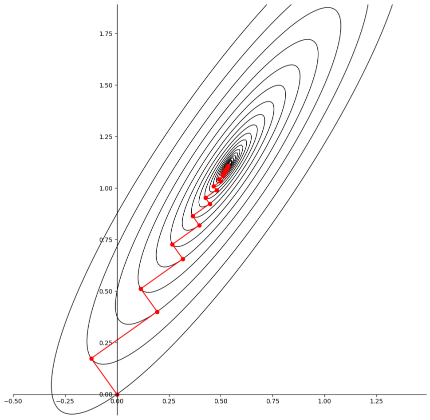

Рис. 4: Решение 1-ой функции методом наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска позволяет ускорить процесс поиска минимума, за счет поиска оптимального шага на каждой итерации. Это отчетливо видно на визуализации поиска, на нем отсутствуют частые и длинные шаги, при этом скорость поиск остается относительно равномерной все время работы алгоритма, что бозволяет уменьшить количество итераций в половину. **Метод сопряженных градиентов**

Количество итераций: 3.

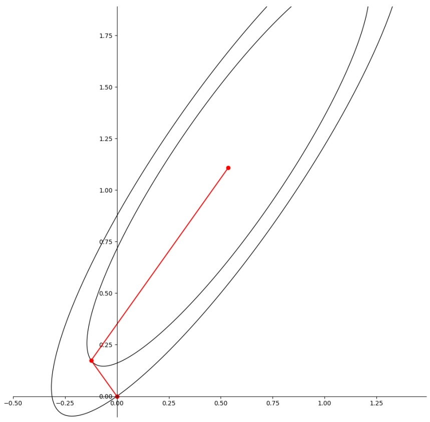

Рис. 5: Решение 1-ой функции методом сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов вследствии правильного выбора направлений и шага находит минимум функции достаточно быстро(за конечное время от размерности пространства), при этом на него почти не влияют особенности функции.

Функция 2 - $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 5$:

Метод градиентного спуска
Количество итераций: 20.

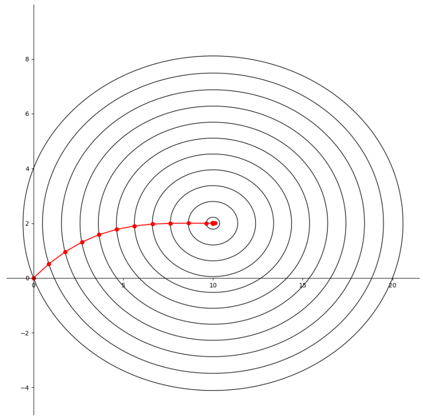

Рис. 6: Нешение 2-ой функции градиентным спуском

Градиентный спуск даже при выборе достаточно благоприятной функции, имеет большое количество итераций за счет постоянного шага. Это отчетливо видно на визуализации.

Метод наискорейшего спуска
Количество итераций: 19.

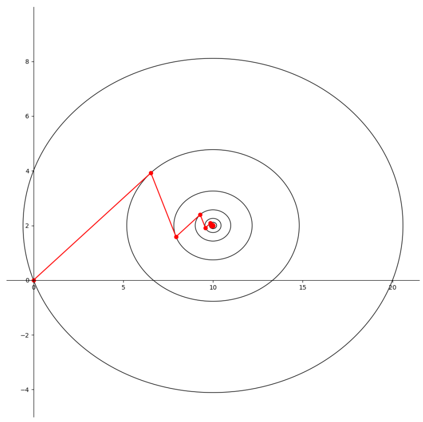

Рис. 7: Решение 2-ой функции методом наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска на второй функции показал же не такое большое преимущество перед градиентным спуском, количество итераций при приближении к минимуму даже на равномерной функции достаточно сильно увеличивается. вследствии чего выигрыш начального быстрого приближения становится малозначимым .

Метод сопряженных градиентов

Количество итераций: 3.

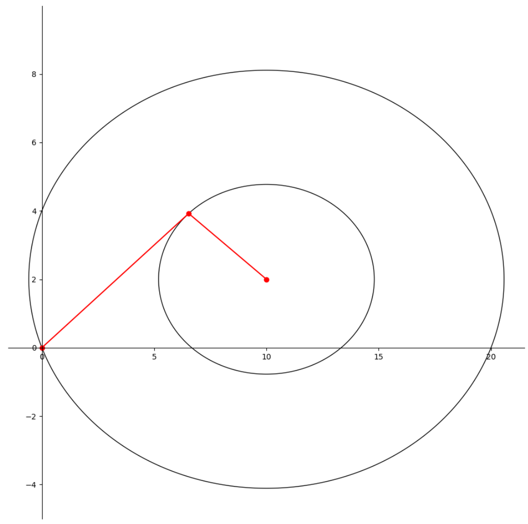

Рис. 8: Решение 2-ой функции методом сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов на второй функции тоже показал хороший результат, найдя минимум всего за 2 итерации.

Зависимость количества итераций от размерности пространства и числа обусловленности функции

Для изучения зависимости был написан генератор диагональных матриц с заданным числом обусловленности и размерности.

Метод градиентов спуска

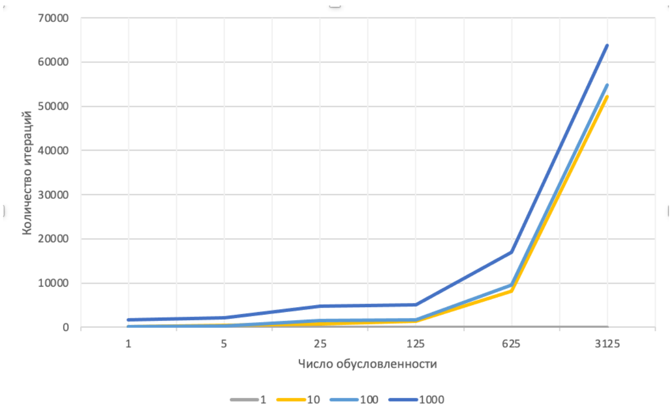

Рис. 9: График зависимости градиентов спуска

Метод градиентного спуска показывает, что разнится в количпестве итераций от размерности незначительна и близка к константному значению. При этом при достаточно большом числе обусловленности идет резкий рост количества итераций, что связано с погрешностью возникающих при вычислениях.

Метод наискорейшего спуска

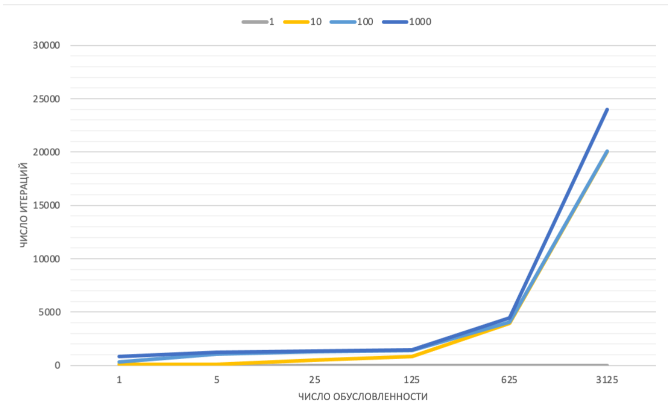

Рис. 10: График зависимости наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска так же показывает, что разнится в количпестве итераций от размерности незначительна и близка к константному значению. При этом при достаточно большом числе обусловленности так же идет резкий рост количества итераций, что связано с погрешностью возникающих при вычислениях. В свою очередь, метод показывает меньшее количество итераций, но "реальное"время его работы особенно при больших размерностях пространства, сильно превышает время работы метода градиентного спуска, что связано с большим количеством вычислений при решении задачи поиска оптимального шага на направлении.

Метод сопряженных градиентов

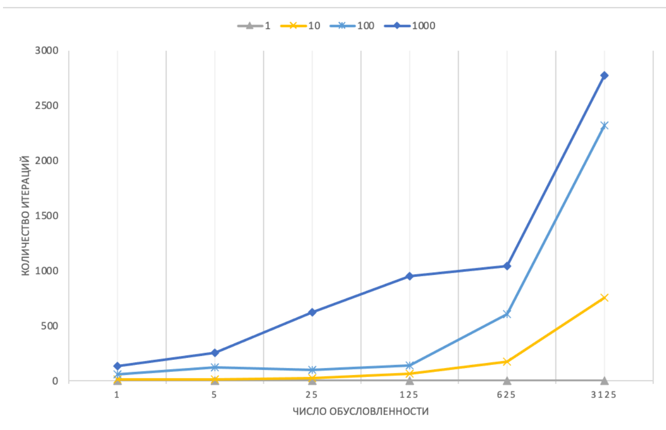

Рис. 11: График зависимости сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов, как и прежде, показывает наименьшее количество итераций среди всех приведенных методов. Но в отличии от предыдущих рассмотренных методов количество итераций зависит от размерности пространства.

4. Выводы и сравнения

Методы градиентного спуска и наискорейшего спуска показывают достаточно показывают, что для поиска минимума им обоим требуются достаточно большое количество итераций. При этом Метод градиентного спуска равномерно ищет минимум на всех этапах(ускоряясь при уменьшении шага), а метод наискорейшего спуска показывает себе в начале поиска, что дает возможность для использования его чтобы быстро вычислить окрестность минимума функции, а после найти его приближении при помощи другого метода. Оба показывают слабое влиения на время вычисления размерность функции. Но на реальных испытаниях, хоть и метод наискорейшего спуска имеет на 50 процентов меньше итераций, реальное время его работы сильно больше при большой размерности пространства. Метод сопряженных градиентов показал себя наиболее хрошо из всех методов, и количество итераций и реальное время работы было меньше, чем у предыдущих, н оза счет зависимости от размерности пространства вероятно, на достаточно большом по размерности пространстве он начет уступать другим методам. При этом он намного лучше ведет себя при увеличении числа обусловленности функции по сравнению с другими методами.

Вывод: За счет использования ортоганальных направлений метод сопряженных градиентов показывает наилучшее время работы на не слишком больших размерностях пространств. В свою очередь комбинирование методов наискорейшего спуска и метод градиентов может дать достаточно хорошее время сходимости функции.

5. Приложения

Реализация всех методов и всех вспомогательных классов выводящих резальтаты представленна в репозитории (sdmitrioul)