Отчет по лабораторной работе № 2
Методы оптимизаций

Методы многомерной оптимизации

Скроба Дмитрий M3234

ITMO UNIVERSITY

June 2021

1. Постановка задачи

- Реализовать алгоритмы многомерной оптимизации функций:
    1. Метод градиентного спуска
    2. Метод наискорейшего спуска
    3. Метод сопряженных градиентов
- Оценить различия скорости сходимости методов в зависимости от: метода оптимизации, входных данных, в частности от числа обусловленности оптимизируемой фунции и размерности пространства.
- Построить графики зависимости и визуализации работы методов.

2. Исследуемые функции

- Функция 1: $f(x,y) = 16x^2 + 8y^2 - 20xy + 5x - 7y + 1$
- Функция 2: $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 5$

Аналитические решения функций:

- **Функция 1:** $f(x,y) = 16x^2 + 8y^2 - 20xy + 5x - 7y + 1$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow minimum f(x,y)$$

$$\begin{cases} f'_x = 32x - 20y + 5 = 0 \\ f'_y = 16y - 20x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{28} \\ y = \frac{31}{28} \end{cases} \Leftrightarrow \min f(x,y) = -\frac{43}{28}$$

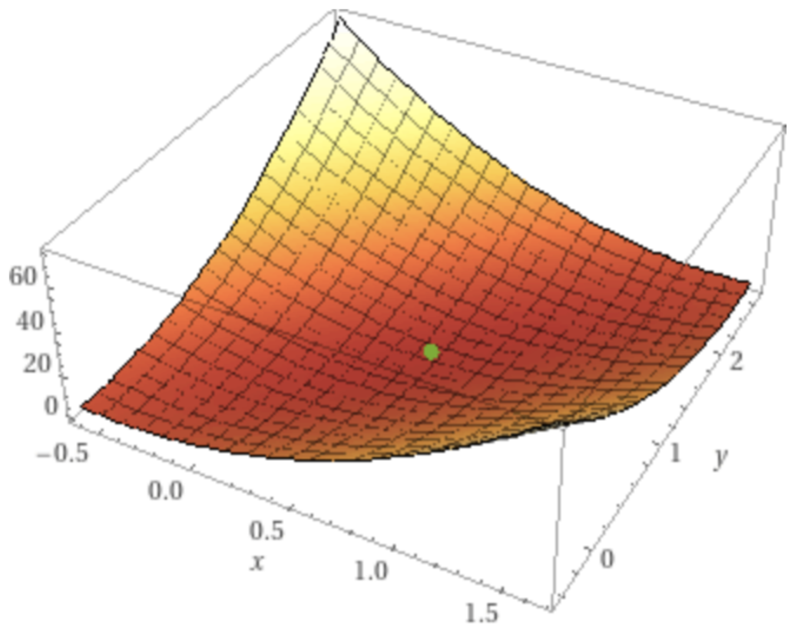

Рис. 1: Аналитическое решение 1-ой функции и ее график

- **Функция 2:** $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 5$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow minimum f(x,y)$$

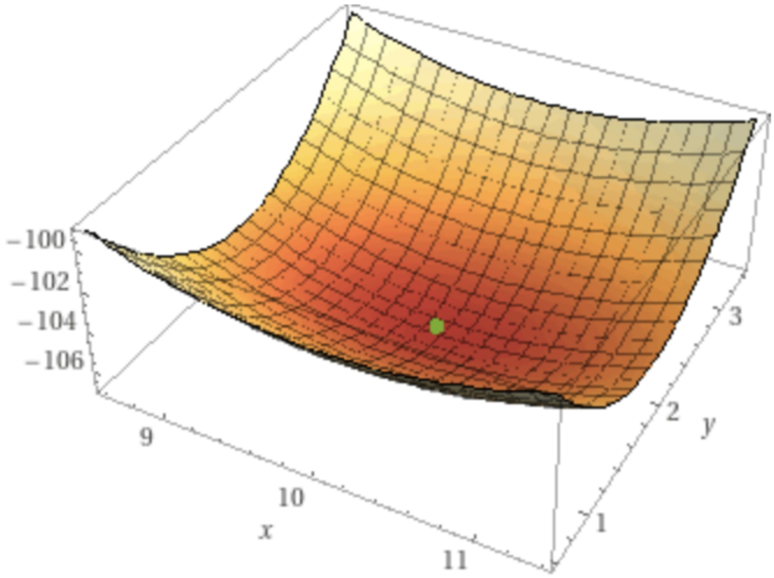

Рис. 2: Аналитическое решение 2-ой функции и ее график

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 20 = 0 \\ f'_y = 6y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \min f(x, y) = -107$$

3. Полученные результаты

Параметры исследований:

- Условие остановки: $||\nabla f(x^{[k]})|| \leq \epsilon$;
- Начальная точка: $x^0 = (0, 0, ..., 0)$;
- $\epsilon = 10^{-5}$;
- $\delta = 0.95$;
- Начальный шаг для градиентного спуска: 1;
- Число итераций для обновления метода сопряженных градиентов: 10.

Функция 1 - $f(x, y) = 16x^2 + 8y^2 - 20xy + 5x - 7y + 1$:

Метод градиентного спуска

Количество итераций: 119.

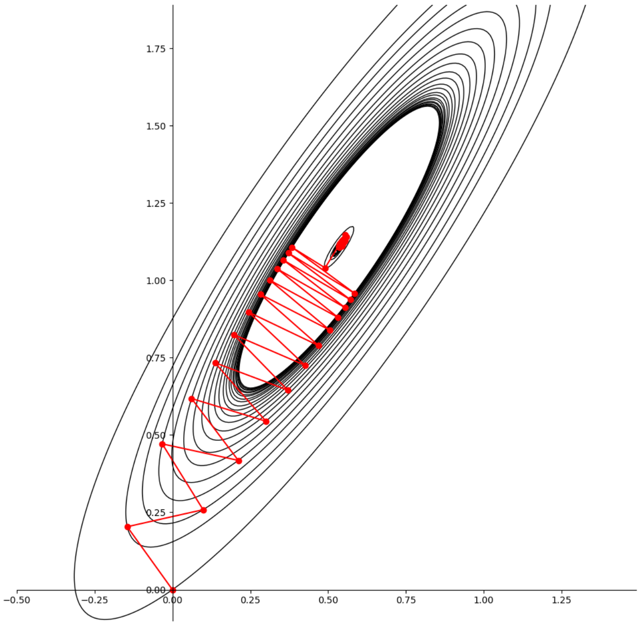

Рис. 3: Нешение 1-ой функции градиентным спуском

Визуализация показывает недостатки метода градиентного спуска, в частности из-за достаточного большого начального шага, поиск происходит достаточно рванно, те пока не произойдет уменьшение шага последующие итерации будут иметь малое влияние на уменьшение функции. Скорость уменьшения функции будет снижаться после каждой итерации до уменьшения шага, это и дает достаточно большое количество итераций для поиска.

Метод наискорейшего спуска

Количество итераций: 56.

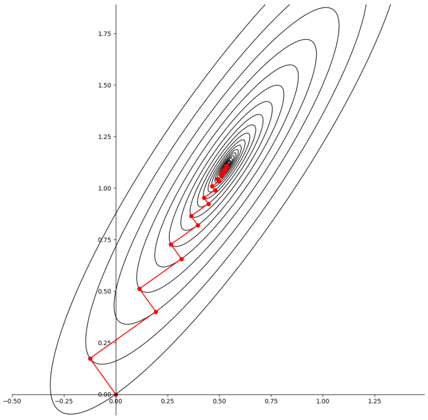

Рис. 4: Решение 1-ой функции методом наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска позволяет ускорить процесс поиска минимума, за счет поиска оптимального шага на каждой итерации. Это отчетливо видно на визуализации поиска, на нем отсутствуют частые и длинные шаги, при этом скорость поиск остается относительно равномерной все время работы алгоритма, что бозволяет уменьшить количество итераций в половину. **Метод сопряженных градиентов**

Количество итераций: 3.

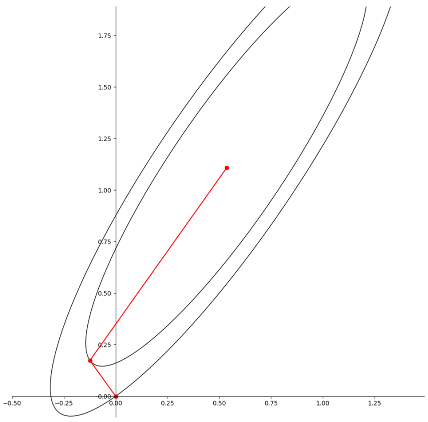

Рис. 5: Решение 1-ой функции методом сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов вследствии правильного выбора направлений и шага находит минимум функции достаточно быстро(за конечное время от размерности пространства), при этом на него почти не влияют особенности функции.

Функция 2 - $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 20x - 12y + 5$**:**

Метод градиентного спуска

Количество итераций: 20.

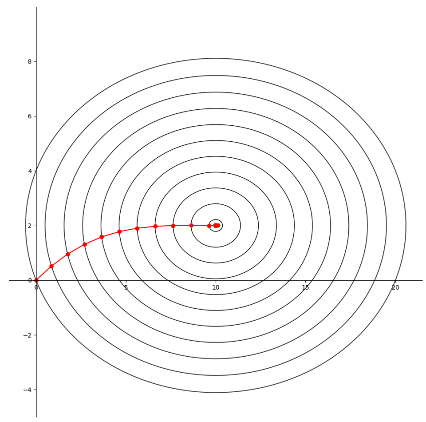

Рис. 6: Нешение 2-ой функции градиентным спуском

Градиентный спуск даже при выборе достаточно благоприятной функции, имеет большое количество итераций за счет постоянного шага. Это отчетливо видно на визуализации. **Метод**

наискорейшего спуска

Количество итераций: 19.

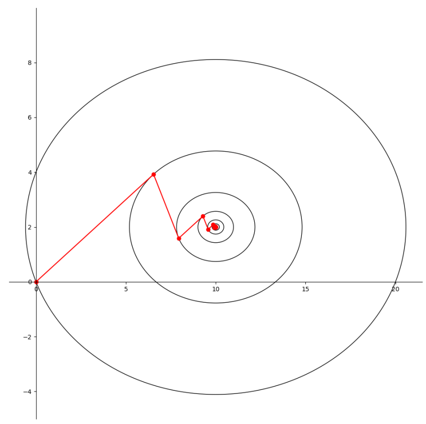

Рис. 7: Решение 2-ой функции методом наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска на второй функции показал же не такое большое преимущество перед градиентным спуском, количество итераций при приближении к минимуму даже на равномерной функции достаточно сильно увеличивается. вследствии чего выигрыш начального быстрого приближения становится малозначимым .

Метод сопряженных градиентов

Количество итераций: 3.

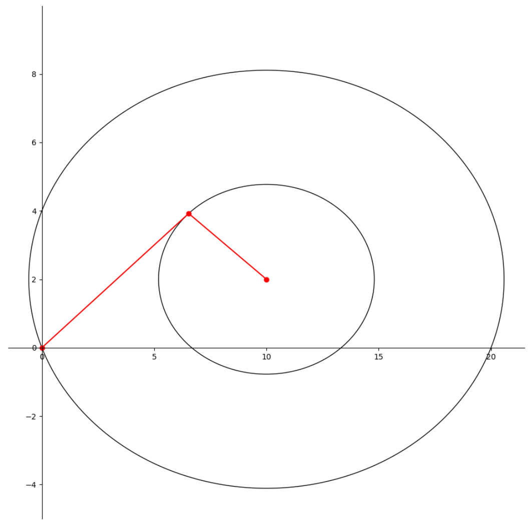

Рис. 8: Решение 2-ой функции методом сопряженных градиентов