

Численное решение одномерного уравнения Навье-Стокса с использованием схемы с центральными разностями (последовательная) $(\rho, \rho u)$

25 декабря 2019 г.

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

μ - известный коэффициент вязкости газа

ρ, u - функционалы плотности и скорости(газа): $(t, x) \in [0, T] * [0, X]$

$p = C\rho$ - давление газа

f - вектор внешних сил

2 Описание схемы

Для поиска численного решения задачи можно использовать разностную схему, в которой при аппроксимации членов используются центральные разности, а функции H, V на последующем слое ищутся путем решения двух систем линейных уравнений методом прогонки.

$$\begin{cases} H_{t,0} + 0.5((V \hat{H})_{x,0} + H_0 V x, 0) - 0.5h((HV)_{x,\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x,\bar{x},2} + H_0(V_{x,\bar{x},1} - 0.5V_{x,\bar{x},2})) = 0 \\ H_t + 0.5(V \hat{H}_x^0 + (V \hat{H})_x^0 + HV_x^0) = 0, x \in \omega_h \\ H_{t,M} + 0.5((V \hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V \bar{x}, M) - 0.5h((HV)_{x,\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x,\bar{x},M-2} + \\ + H_M(V_{x,\bar{x},M-1} - 0.5V_{x,\bar{x},M-2})) = 0 \\ (HV)_t + \frac{2}{3}(\hat{H} V \hat{V})_x^0 + \frac{2}{3} \hat{H} V \hat{V}_x^0 + \frac{V^2}{3} \hat{H}_x^0 + p(\hat{H})_x^0 = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H} f, x \in \omega_h \end{cases}$$

ω_h - внутренние узлы сетки В качестве значений решения уравнений на нулевом слое берутся функции ρ_0 и u_0 :

$$H_m^0 = (\rho_0)_m, V_m^0 = (u_0)_m, m = 0, 1, \dots, M$$

Граничные условия скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, m = 1, \dots, N$$

3 Координатная запись уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{H_0^{n+1}-H_0^n}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^n H_1^{n+1}-V_0^n H_0^{n+1}}{h} + H_0^n \frac{V_1^n-V_0^n}{h} \right) - \\ & - \frac{h}{2} \left(\frac{H_2^n V_2^n - 2H_1^n V_1^n + H_0^n V_0^n}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{H_3^n V_3^n - 2H_2^n V_2^n + H_1^n V_1^n}{h^2} + H_0^n \left(\frac{V_2^n - 2V_1^n + V_0^n}{h^2} - \frac{V_3^n - 2V_2^n + V_1^n}{2h^2} \right) \right) = 0 \\ & \frac{H_m^{n+1}-H_m^n}{t} + \frac{1}{2} \left(V_m^n \frac{H_{m+1}^{n+1}-H_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n H_{m+1}^{n+1}-V_{m-1}^n H_{m-1}^{n+1}}{2h} + H_m^n \frac{V_{m+1}^n-V_{m-1}^n}{2h} \right) = 0 \\ & \frac{H_M^{n+1}-H_M^n}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_M^n H_M^{n+1}-V_{M-1}^n H_{M-1}^{n+1}}{h} + H_M^n \frac{V_M^n-V_{M-1}^n}{h} \right) - \frac{h}{2} \left(\frac{H_M^n V_M^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_{M-2}^n V_{M-2}^n}{h^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{H_{M-1}^n V_{M-1}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-3}^n V_{M-3}^n}{h^2} + H_M^n \left(\frac{V_M^n - 2V_{M-1}^n + V_{M-2}^n}{h^2} - \frac{V_{M-1}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-3}^n}{2h^2} \right) \right) = 0 \\ & \frac{H_m^{n+1} V_m^{n+1} - H_m^n V_m^n}{t} + \frac{2}{3} \left(\frac{H_{m+1}^{n+1} V_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1} V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{2}{3} H_m^{n+1} V_m^n \left(\frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \left(\frac{V_m^2}{3} + p \right) \left(\frac{H_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) = \\ & = \mu \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} + H_m^{n+1} f \end{aligned} \right.$$

Выделяя коэффициенты при членах H_{m-1}^{n+1} , H_m^{n+1} , H_{m+1}^{n+1} из первых трёх уравнений системы, получим трёхдиагональную матрицу (первые два уравнения как раз сделают нашу матрицу трёхдиагональной, т.к. там участвует всего два члена). Аналогично выделяя из 4-го уравнения V_{m-1}^{n+1} , V_m^{n+1} , V_{m+1}^{n+1} получим трёхдиагональную матрицу (ещё два уравнения берутся из $V_0^n = 0$ и $V_M^n = 0$)

4 Расчёт гладкого решения

Для того чтобы рассчитать гладкое решение зададим функции:

$$\tilde{\rho} = e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right), \quad \tilde{u} = \cos(2\pi t) \sin\left(\pi \frac{x^2}{100}\right)$$

Определим функции f_0 и f так, чтобы они удовлетворяли системе:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} = f_0 \\ & \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{\rho} f \\ & p = p(\tilde{\rho}) \end{aligned} \right.$$

Проведя подстановку и соответствующие вычисления найдем эти функции:

$$\left\{ \begin{aligned} & f_0(t, x) = e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) + e^t \cos(2\pi t) \left(-\frac{\pi}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) + \frac{\pi x}{50} \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) \right) \\ & f(t, x) = \left(-e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) 2\pi \sin(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) + \frac{\pi t}{50} e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) (\cos(2\pi t))^2 \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - \right. \\ & \left. - p\left(\frac{\pi}{10}\right) e^t \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{\mu \pi}{50} \cos(2\pi t) \left(\cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - \frac{x^2 \pi}{50} \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \right) \right) / \left(e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) \right) \end{aligned} \right.$$

Таким образом, имеется дифференциальная задача для системы с начальными и граничными условиями:

$$\left\{ \begin{aligned} & \tilde{\rho}(0, x) = \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5, x \in [0, 10] \\ & \tilde{u}(0, x) = \sin\left(\pi \frac{x^2}{100}\right), x \in [0, 10] \\ & \tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, 10) = 0, t \in [0, 1] \end{aligned} \right.$$

Запустим программу и составим таблицы ошибок численного решения с теоретическим для плотности и скорости в нормах $\| \cdot \|_{C_h}$, $\| \cdot \|_{L_2}$, $\| \cdot \|_W$ при различных значениях $C=1, 10, 100$ и $\mu = 0.1, 0.01, 0.001$.

4.1 Таблицы ошибок

$\text{Mu}=0.1$ $C=1$ Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.696012e-01	4.676729e-01	4.676547e-01	4.676542e-01
100	5.273774e-02	4.794685e-02	4.793345e-02	4.793332e-02
1000	2.061029e-02	4.822147e-03	4.807590e-03	4.807479e-03
10000	1.983687e-02	5.248298e-04	4.810054e-04	4.808928e-04

$\text{Mu}=0.1$ $C=1$ Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.875196e-02	2.988319e-02	2.970035e-02	2.969852e-02
100	2.258236e-02	8.504889e-04	7.253258e-04	7.243288e-04
1000	2.216811e-02	2.495879e-04	6.949198e-05	6.912976e-05
10000	2.214678e-02	2.309446e-04	7.547881e-06	6.940393e-06

$\text{Mu}=0.01$ $C=1$ Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.693622e-01	4.680585e-01	6.490445e-01	5.836857e-01
100	5.309688e-02	4.801370e-02	4.800133e-02	4.800121e-02
1000	2.166696e-02	4.828824e-03	4.814649e-03	4.814546e-03
10000	2.094877e-02	5.282214e-04	4.817075e-04	4.816021e-04

$\text{Mu}=0.01$ $C=1$ Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.029442e-02	3.087900e-02	1.917698e+00	4.204071e-02
100	2.354953e-02	1.037940e-03	9.277028e-04	9.268492e-04
1000	2.311536e-02	2.684276e-04	9.006968e-05	8.974294e-05
10000	2.309261e-02	2.431423e-04	9.537925e-06	8.992415e-06

$\text{Mu}=0.001$ $C=1$ Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.693392e-01	4.681079e-01	2.101289e+05	6.689137e+00
100	5.313843e-02	4.802108e-02	4.800866e-02	2.831079e+51
1000	2.178340e-02	4.829571e-03	4.815410e-03	4.815307e-03
10000	2.107080e-02	5.287424e-04	4.817831e-04	4.816785e-04

Му=0.001 C=1 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.046303e-02	3.099334e-02	1.048840e+01	1.108761e+00
100	2.365315e-02	1.058706e-03	9.495971e-04	2.373660e+01
1000	2.321639e-02	2.706002e-04	9.228166e-05	9.195584e-05
10000	2.319345e-02	2.445016e-04	9.755249e-06	9.212892e-06

Му=0.1 C=10 Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.012199e-01	9.026897e-01	1.332887e+00	5.881042e-01
100	7.313454e-02	5.014497e-02	4.997401e-02	4.997231e-02
1000	3.731945e-02	5.190596e-03	5.009589e-03	5.007854e-03
10000	3.481758e-02	7.325545e-04	5.026531e-04	5.009082e-04

Му=0.1 C=10 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	1.569949e-01	2.877876e+00	4.068294e-01	6.828291e-01
100	8.370070e-02	7.345906e-03	6.609983e-03	6.602657e-03
1000	7.800496e-02	1.406512e-03	6.541825e-04	6.468310e-04
10000	7.744941e-02	8.367915e-04	7.200164e-05	6.461758e-05

Му=0.01 C=10 Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.022084e-01	1.423619e+05	8.159490e+02	1.626592e+01
100	7.327862e-02	5.023381e-02	8.824849e+18	2.323187e+57
1000	3.737192e-02	5.199727e-03	5.018538e-03	5.016802e-03
10000	3.486279e-02	7.338343e-04	5.035502e-04	5.018037e-04

Му=0.01 C=10 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	1.565878e-01	5.941192e+01	1.291210e+02	3.461202e+00
100	8.395313e-02	7.292156e-03	1.032459e+02	1.677696e+03
1000	7.826410e-02	1.405301e-03	6.488478e-04	6.414393e-04
10000	7.770867e-02	8.391346e-04	7.152280e-05	6.408480e-05

Му=0.001 C=10 Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.023105e-01	1.880213e+03	3.851973e+07	2.061678e+08
100	7.329301e-02	5.024290e-02	7.588565e+30	1.569206e+69
1000	3.737683e-02	5.200660e-03	5.019454e-03	-nan
10000	3.486694e-02	7.339606e-04	5.036420e-04	5.018953e-04

Му=0.001 C=10 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	1.565492e-01	6.564508e+01	3.606669e+02	5.992662e+02
100	8.397854e-02	7.287299e-03	3.929503e+02	9.418635e+02
1000	7.828992e-02	1.405225e-03	6.483702e-04	-nan
10000	7.773447e-02	8.393762e-04	7.148029e-05	6.403716e-05

Му=0.1 C=100 Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	6.892732e-01	1.695477e+05	2.067894e+02	6.274060e+01
100	1.848169e-01	5.844659e-02	6.097917e+56	1.569375e+62
1000	1.436575e-01	6.776485e-03	5.750473e-03	5.740913e-03
10000	1.399390e-01	1.822592e-03	5.837462e-04	5.741137e-04

Му=0.1 C=100 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.988637e-01	6.676197e+02	5.718412e+01	6.314213e+02
100	6.792977e-02	5.473185e-02	1.279158e+03	5.070745e+03
1000	9.111640e-02	4.898343e-03	5.415732e-03	5.421298e-03
10000	9.448411e-02	6.370485e-04	5.354648e-04	5.409874e-04

Му=0.01 C=100 Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	6.903202e-01	1.946647e+08	1.744581e+08	1.342455e+09
100	1.850824e-01	5.850591e-02	9.040434e+73	1.619640e+104
1000	1.438637e-01	6.784032e-03	5.755983e-03	-nan
10000	1.401390e-01	1.825028e-03	5.843136e-04	5.746605e-04

Му=0.01 C=100 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	6.024827e-01	1.099879e+03	6.972934e+02	6.449024e+03
100	6.784567e-02	5.506345e-02	5.898998e+02	3.429337e+03
1000	9.124946e-02	4.929974e-03	5.448898e-03	-nan
10000	9.465230e-02	6.357584e-04	5.387688e-04	5.443044e-04

Му=0.001 C=100 Норма=L2 H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	6.904225e-01	1.822857e+09	3.449237e+09	7.086286e+02
100	1.851091e-01	5.851193e-02	6.652407e+78	2.399980e+98
1000	1.438845e-01	6.784796e-03	5.756542e-03	-nan
10000	1.401592e-01	1.825274e-03	5.843711e-04	5.747160e-04

Му=0.001 C=100 Норма=L2 V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	6.028481e-01	4.193698e+02	2.259071e+02	1.238218e+02
100	6.783802e-02	5.509685e-02	6.411388e+02	3.794281e+03
1000	9.126407e-02	4.933165e-03	5.452239e-03	-nan
10000	9.467046e-02	6.356328e-04	5.391017e-04	5.446386e-04

Му=0.1 C=1 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.266352e-01	2.242783e-01	2.243384e-01	2.243389e-01
100	3.339934e-03	2.369863e-03	2.369207e-03	2.369199e-03
1000	9.218857e-04	2.401876e-05	2.385377e-05	2.385293e-05
10000	8.910033e-04	3.310484e-07	2.387876e-07	2.386945e-07

Му=0.1 C=1 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.636821e-03	1.678804e-03	1.656712e-03	1.656500e-03
100	1.101281e-03	1.163023e-06	7.858796e-07	7.833380e-07
1000	1.067990e-03	1.396659e-07	6.967660e-09	6.916825e-09
10000	1.066495e-03	1.291266e-07	8.436066e-11	6.980559e-11

Му=0.01 C=1 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.266125e-01	2.246461e-01	1.344835e+03	2.011295e+04
100	3.444780e-03	2.377525e-03	2.376711e-03	2.376703e-03
1000	1.035860e-03	2.410071e-05	2.393298e-05	2.393228e-05
10000	1.006218e-03	3.459493e-07	2.395703e-07	2.394921e-07

Му=0.01 C=1 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.925857e-03	1.774062e-03	1.007625e+04	6.235710e+00
100	1.206466e-03	1.585101e-06	1.200609e-06	1.198174e-06
1000	1.172444e-03	1.576896e-07	1.113679e-08	1.111471e-08
10000	1.171004e-03	1.457743e-07	1.248316e-10	1.118344e-10

Му=0.001 C=1 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.266165e-01	2.247186e-01	1.274827e+15	3.761625e+07
100	3.456925e-03	2.378535e-03	2.377712e-03	1.889691e+109
1000	1.048860e-03	2.411599e-05	2.394339e-05	2.394271e-05
10000	1.019342e-03	3.523948e-07	2.396735e-07	2.395968e-07

Му=0.001 C=1 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.958136e-03	1.786010e-03	7.424460e+05	1.927384e+03
100	1.218099e-03	1.645214e-06	1.259114e-06	5.852441e+07
1000	1.183949e-03	1.606840e-07	1.172054e-08	1.170089e-08
10000	1.182509e-03	1.485019e-07	1.306463e-10	1.176975e-10

Му=0.1 C=10 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.624592e-01	7.013725e+01	9.782317e+03	1.075803e+03
100	5.733031e-03	2.636787e-03	2.618552e-03	2.618370e-03
1000	1.580740e-03	2.831354e-05	2.633004e-05	2.631142e-05
10000	1.391264e-03	5.751677e-07	2.651374e-07	2.632600e-07

Му=0.1 C=10 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.954698e-02	7.567273e+02	9.951740e+01	5.578455e+01
100	8.125097e-03	6.724704e-05	5.517104e-05	5.505707e-05
1000	7.045407e-03	2.347605e-06	5.377756e-07	5.265280e-07
10000	6.944591e-03	8.105645e-07	6.437062e-09	5.252027e-09

Му=0.01 C=10 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.635583e-01	5.803430e+12	2.153164e+10	7.000958e+08
100	5.756304e-03	2.648648e-03	3.059475e+42	1.205348e+121
1000	1.585448e-03	2.843621e-05	2.644951e-05	2.643087e-05
10000	1.395191e-03	5.774470e-07	2.663354e-07	2.644554e-07

М_u=0.01 C=10 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.936210e-02	5.268399e+05	7.786422e+06	1.633538e+03
100	8.175648e-03	6.605397e-05	1.029845e+08	4.059385e+12
1000	7.096162e-03	2.338601e-06	5.272134e-07	5.160025e-07
10000	6.995257e-03	8.152468e-07	6.329653e-09	5.147843e-09

М_u=0.001 C=10 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.636715e-01	5.773240e+08	3.695847e+19	8.260787e+22
100	5.758628e-03	2.649868e-03	1.647069e+66	2.051343e+144
1000	1.585884e-03	2.844882e-05	2.646182e-05	nan
10000	1.395549e-03	5.776832e-07	2.664588e-07	2.645785e-07

М_u=0.001 C=10 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.934451e-02	1.348906e+06	3.486121e+08	6.680519e+08
100	8.180726e-03	6.594571e-05	1.818079e+09	2.519760e+12
1000	7.101211e-03	2.337914e-06	5.262648e-07	nan
10000	7.000293e-03	8.157906e-07	6.320019e-09	5.138498e-09

М_u=0.1 C=100 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.096800e-01	1.654515e+12	2.684747e+08	7.624242e+09
100	3.752784e-02	3.605272e-03	4.000138e+117	6.192381e+130
1000	2.279250e-02	4.900622e-05	3.483393e-05	3.471281e-05
10000	2.163208e-02	3.647125e-06	3.594400e-07	3.471425e-07

М_u=0.1 C=100 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.995056e-01	5.926259e+07	2.287497e+05	4.034115e+06
100	5.390020e-03	4.215015e-03	2.294375e+10	5.022340e+13
1000	9.755584e-03	3.419689e-05	4.113387e-05	4.121121e-05
10000	1.054039e-02	4.665495e-07	4.026904e-07	4.103031e-07

М_u=0.01 C=100 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.115334e-01	4.606997e+18	5.826575e+20	3.622074e+24
100	3.763937e-02	3.613920e-03	6.636325e+151	4.823846e+214
1000	2.285813e-02	4.913112e-05	3.491284e-05	nan
10000	2.169390e-02	3.657418e-06	3.602628e-07	3.479243e-07

Му=0.01 C=100 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.063290e-01	1.862894e+08	9.511582e+09	1.152487e+13
100	5.389960e-03	4.268898e-03	9.056398e+09	2.526656e+13
1000	9.809263e-03	3.466140e-05	4.166085e-05	nan
10000	1.060478e-02	4.649878e-07	4.078851e-07	4.155617e-07

Му=0.001 C=100 Норма=W H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.117153e-01	7.044811e+20	2.563453e+23	1.822338e+12
100	3.765063e-02	3.614799e-03	1.055100e+162	1.033818e+203
1000	2.286475e-02	4.914379e-05	3.492086e-05	nan
10000	2.170014e-02	3.658466e-06	3.603463e-07	3.480037e-07

Му=0.001 C=100 Норма=W V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	5.070233e-01	1.361498e+07	1.095214e+09	1.277009e+06
100	5.390188e-03	4.274346e-03	8.073137e+09	2.222629e+13
1000	9.815136e-03	3.470845e-05	4.171414e-05	nan
10000	1.061175e-02	4.648471e-07	4.084105e-07	4.160934e-07

Му=0.1 C=1 Норма=C H(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.179438e-01	2.192130e-01	2.194527e-01	2.194557e-01
100	2.518977e-02	2.241135e-02	2.243706e-02	2.243760e-02
1000	2.233762e-02	2.276058e-03	2.249771e-03	2.249519e-03
10000	2.244202e-02	2.579307e-04	2.253383e-04	2.250120e-04

Му=0.1 C=1 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	3.795647e-02	2.196135e-02	2.179295e-02	2.179127e-02
100	1.899213e-02	5.244840e-04	3.564047e-04	3.566873e-04
1000	1.860266e-02	2.092506e-04	4.037373e-05	4.077363e-05
10000	1.857879e-02	1.955468e-04	3.746625e-06	4.144430e-06

Му=0.01 C=1 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.163927e-01	2.175500e-01	4.396242e+00	8.749954e+00
100	2.502090e-02	2.234118e-02	2.231242e-02	2.231212e-02
1000	2.397577e-02	2.268780e-03	2.238890e-03	2.238592e-03
10000	2.407398e-02	2.552583e-04	2.242369e-04	2.239391e-04

Му=0.01 C=1 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	3.938675e-02	2.270966e-02	1.227988e+01	9.290166e-02
100	2.001753e-02	5.756359e-04	4.913619e-04	4.916278e-04
1000	1.960956e-02	2.237992e-04	5.292809e-05	5.333685e-05
10000	1.958394e-02	2.078997e-04	4.981326e-06	5.390988e-06

Му=0.001 C=1 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.162368e-01	2.175469e-01	1.378707e+06	7.854018e+01
100	2.500397e-02	2.234305e-02	2.231506e-02	5.924364e+52
1000	2.415613e-02	2.268964e-03	2.239182e-03	2.238885e-03
10000	2.425367e-02	2.552344e-04	2.242664e-04	2.239687e-04

Му=0.001 C=1 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	3.954294e-02	2.279341e-02	7.941219e+01	4.694984e+00
100	2.012834e-02	5.823544e-04	5.053189e-04	2.686081e+02
1000	1.971805e-02	2.256534e-04	5.424860e-05	5.465751e-05
10000	1.969220e-02	2.094184e-04	5.112648e-06	5.522197e-06

Му=0.1 C=10 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.301937e-01	2.804260e+00	1.076384e+01	2.335800e+00
100	3.864932e-02	2.383181e-02	2.375748e-02	2.375670e-02
1000	2.328398e-02	2.485522e-03	2.386291e-03	2.385348e-03
10000	2.173975e-02	3.681852e-04	2.396014e-04	2.386406e-04

Му=0.1 C=10 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	8.013448e-02	7.561324e+00	1.416883e+00	1.769298e+00
100	3.999426e-02	3.710982e-03	3.364230e-03	3.360763e-03
1000	3.699517e-02	6.839321e-04	3.283454e-04	3.248492e-04
10000	3.670239e-02	4.025058e-04	3.591412e-05	3.240483e-05

Му=0.01 C=10 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.297220e-01	3.701760e+05	6.205711e+03	3.505057e+02
100	3.872557e-02	2.389303e-02	2.892214e+19	7.292511e+58
1000	2.332144e-02	2.487998e-03	2.392440e-03	2.391539e-03
10000	2.177329e-02	3.667251e-04	2.401755e-04	2.392548e-04

Му=0.01 C=10 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	7.946146e-02	1.178424e+02	4.711194e+02	6.538070e+00
100	4.009036e-02	3.627122e-03	4.957063e+02	3.246079e+04
1000	3.711722e-02	6.771593e-04	3.198202e-04	3.162974e-04
10000	3.682668e-02	4.041034e-04	3.508662e-05	3.155218e-05

Му=0.001 C=10 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	2.296716e-01	4.891013e+03	1.728655e+08	2.751734e+09
100	3.873337e-02	2.390011e-02	8.799067e+31	2.390220e+70
1000	2.332517e-02	2.488308e-03	2.393157e-03	nan
10000	2.177663e-02	3.665834e-04	2.402434e-04	2.393266e-04

Му=0.001 C=10 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	7.939465e-02	1.669953e+02	1.258471e+03	1.915061e+03
100	4.010022e-02	3.618685e-03	2.380684e+03	1.331892e+04
1000	3.712939e-02	6.767002e-04	3.189625e-04	nan
10000	3.683904e-02	4.044652e-04	3.500375e-05	3.146639e-05

Му=0.1 C=100 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.454859e-01	3.090368e+05	1.236187e+03	1.318832e+03
100	1.047789e-01	3.566965e-02	4.696436e+57	2.390707e+63
1000	7.411283e-02	4.166086e-03	3.481856e-03	3.475029e-03
10000	7.107076e-02	1.038167e-03	3.541667e-04	3.473407e-04

Му=0.1 C=100 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	3.669411e-01	1.915365e+03	5.901420e+01	9.533754e+02
100	3.313374e-02	3.324154e-02	4.906579e+03	5.267763e+04
1000	4.240186e-02	2.893953e-03	3.265958e-03	3.269676e-03
10000	4.516272e-02	3.345240e-04	3.223104e-04	3.259984e-04

Му=0.01 C=100 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.478214e-01	2.812946e+08	1.069842e+09	2.204762e+10
100	1.050894e-01	3.581924e-02	2.757871e+74	1.523774e+105
1000	7.427042e-02	4.183770e-03	3.496213e-03	nan
10000	7.121407e-02	1.042790e-03	3.556245e-04	3.487719e-04

Му=0.01 C=100 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	3.701750e-01	3.244109e+03	4.539733e+03	7.372967e+04
100	3.320165e-02	3.348963e-02	3.217861e+03	6.820022e+04
1000	4.248983e-02	2.918523e-03	3.290431e-03	nan
10000	4.527621e-02	3.342365e-04	3.247547e-04	3.284407e-04

Му=0.001 C=100 Норма=C Н(Плотность):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	4.480400e-01	3.371922e+09	1.542561e+10	5.643980e+03
100	1.051207e-01	3.583462e-02	2.850570e+79	1.957510e+99
1000	7.428621e-02	4.185591e-03	3.497642e-03	nan
10000	7.122842e-02	1.043290e-03	3.557692e-04	3.489147e-04

Му=0.001 C=100 Норма=C V(Скорость):

$N \backslash M$	10	100	1000	10000
10	3.705013e-01	8.751785e+02	9.641961e+02	1.358234e+02
100	3.320878e-02	3.351465e-02	3.731032e+03	5.383169e+04
1000	4.249872e-02	2.920969e-03	3.292892e-03	nan
10000	4.528767e-02	3.342455e-04	3.250008e-04	3.286865e-04

4.2 Анализ результатов

Анализируя таблицу ошибок, делаем вывод, что система иногда сходится, а иногда расходится. Сходимость зависит от параметров C и μ . При $C = 1$ и $\mu = 0.1$ система сходится при любых N и M . Однако при больших C и малых μ наблюдается расходимость в верхнем углу матрицы, т.е. при $\frac{N}{M} < 1$. Также видно, что наилучшая сходимость наблюдается при равных M и N .

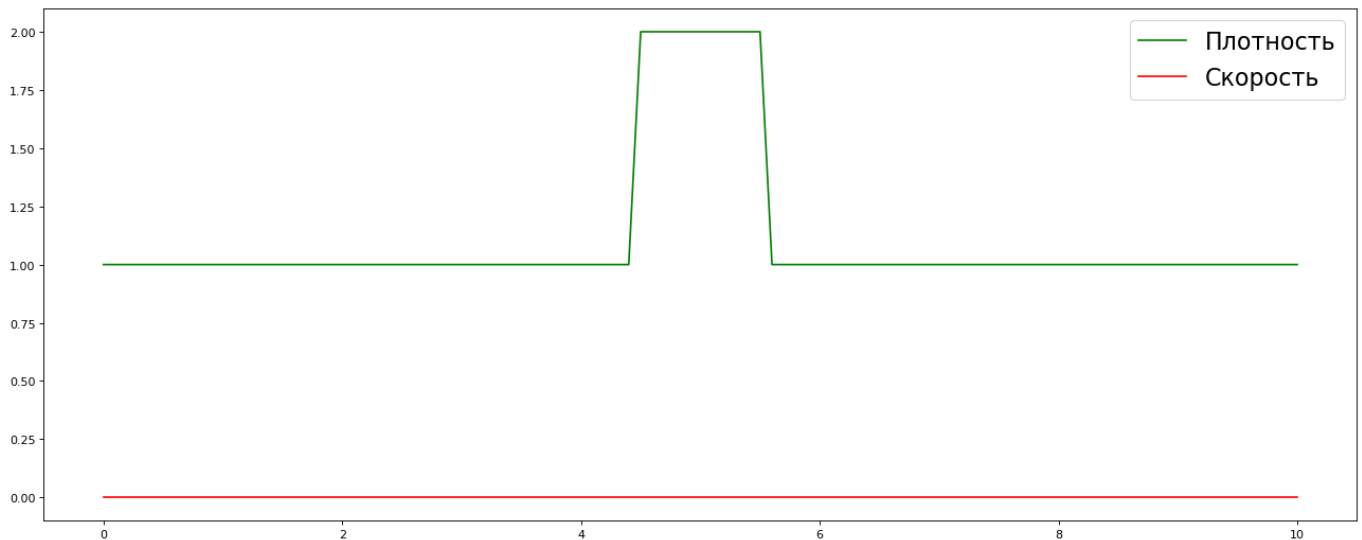
5 Разрывное решение

5.1 Задача с разрывной плотностью

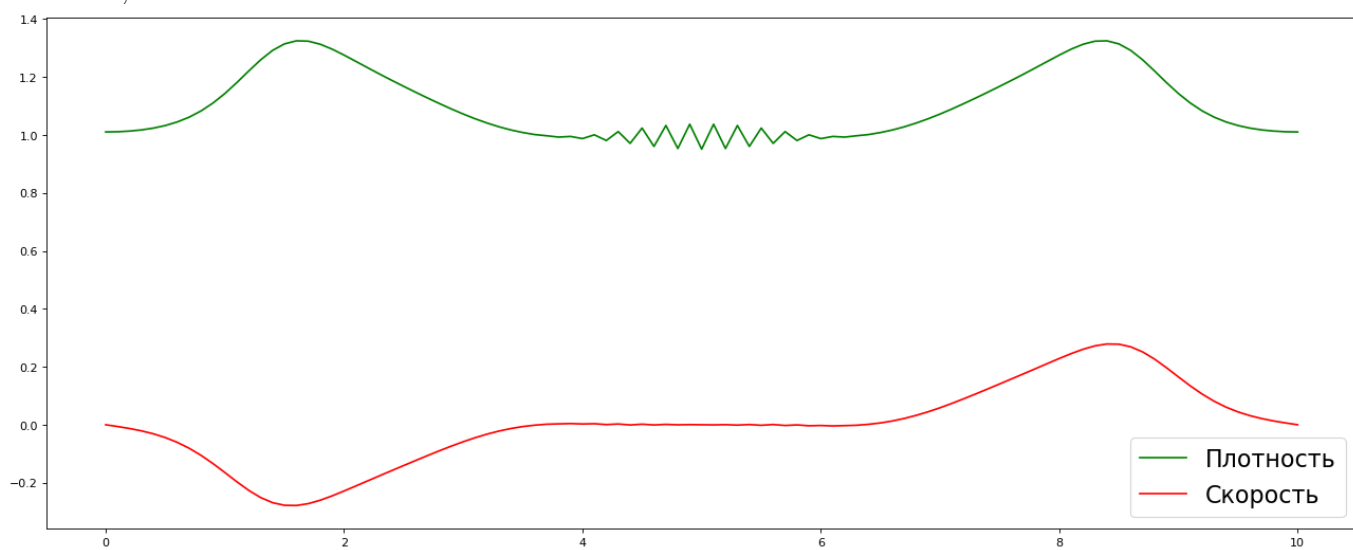
$$\begin{cases} \rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5 \\ 2, & x \in [4.5, 5.5] \end{cases} \\ u_0(x) \equiv 0, & x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Возьмём $C = 1$ и $\mu = 0.1$ шаг по x будет равен 0.1, шаг по t возьмём также 0.1. И будем смотреть стабилизацию решения. Под сходимостью будем подразумевать, что разница между максимальным и минимальным значением функций плотности и скорости меньше заданного $\epsilon = 0.02$. Момент стабилизации 182.

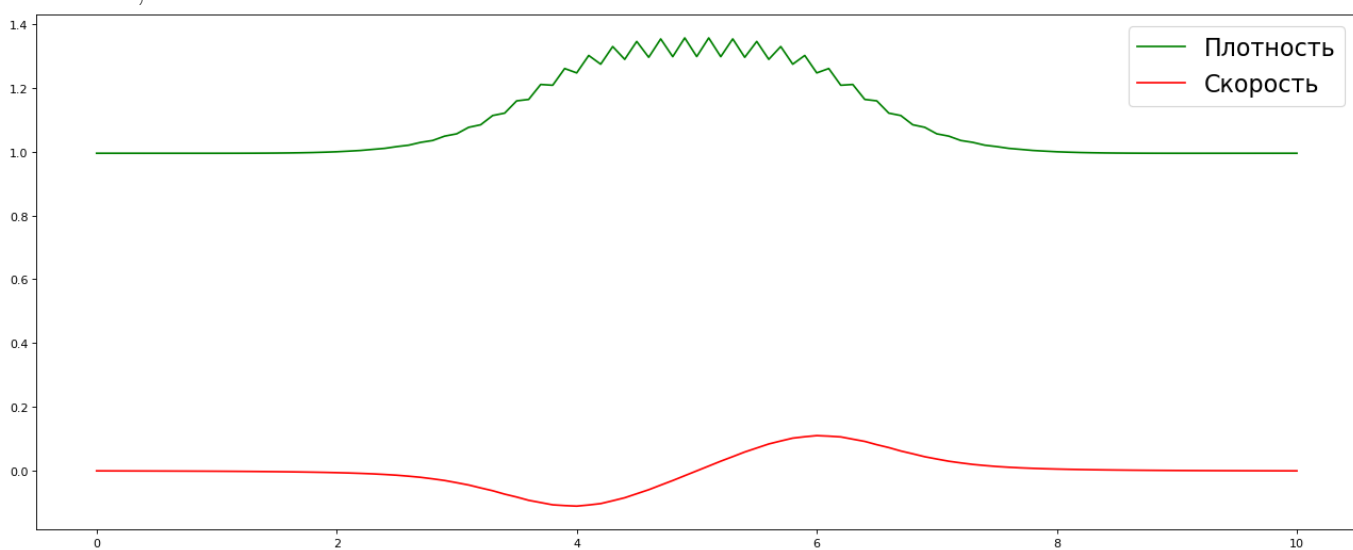
$t = 0, \Delta m = 0$



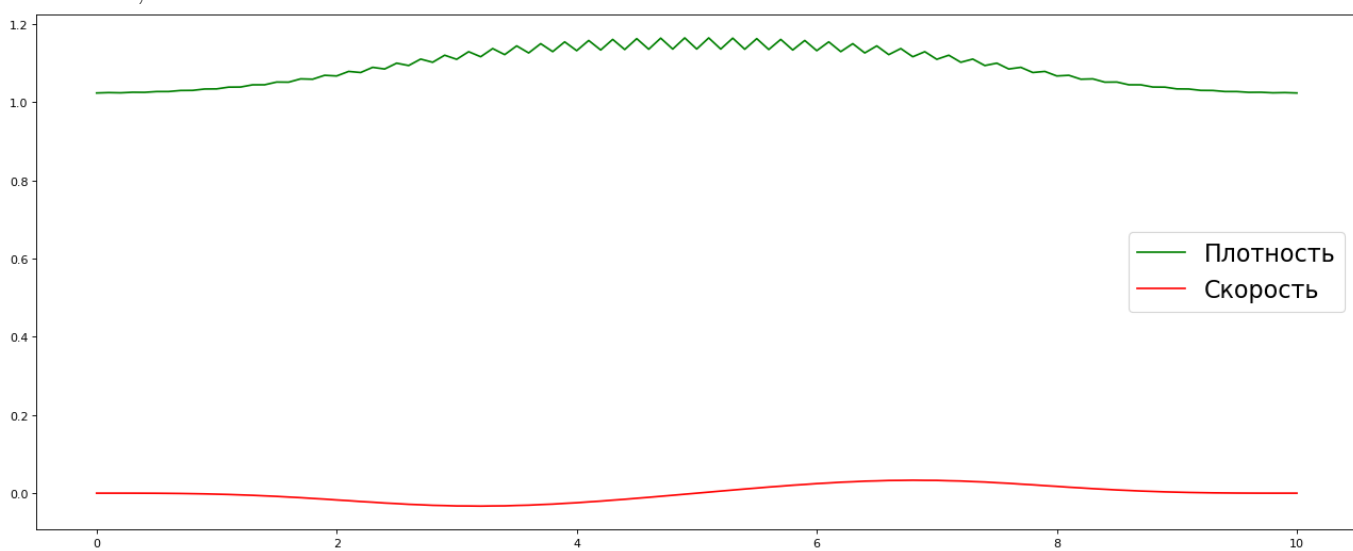
$t = 3, \Delta m = -4.712624e-01$



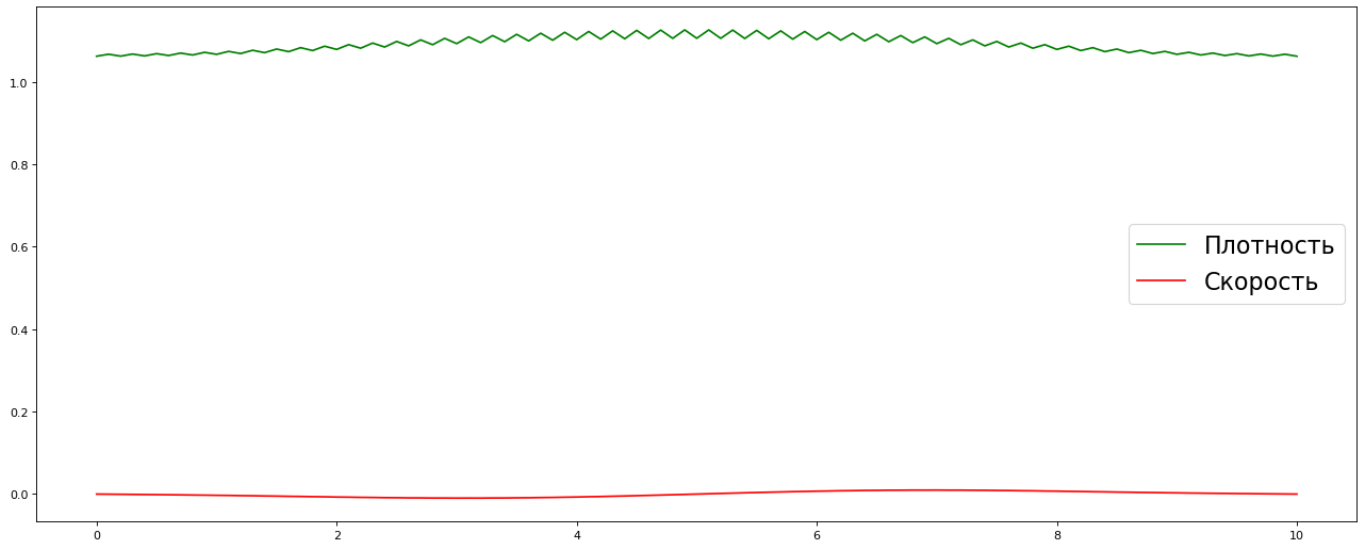
$t = 10, \Delta m = -5.062991e-01$



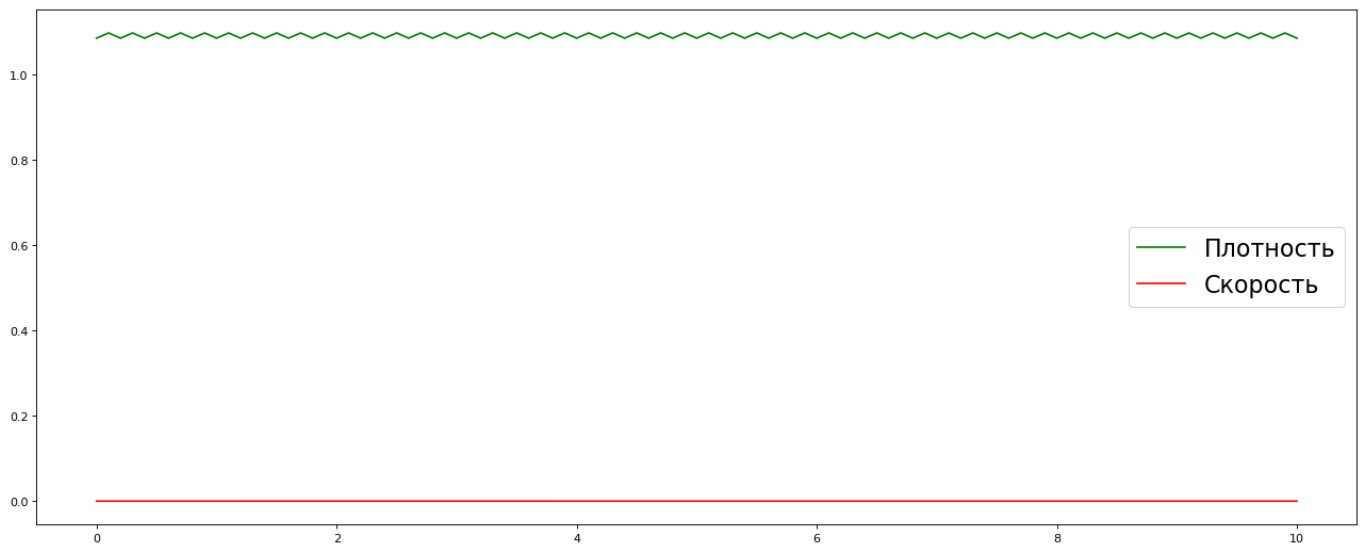
$t = 50, \Delta m = -6.066234e-01$



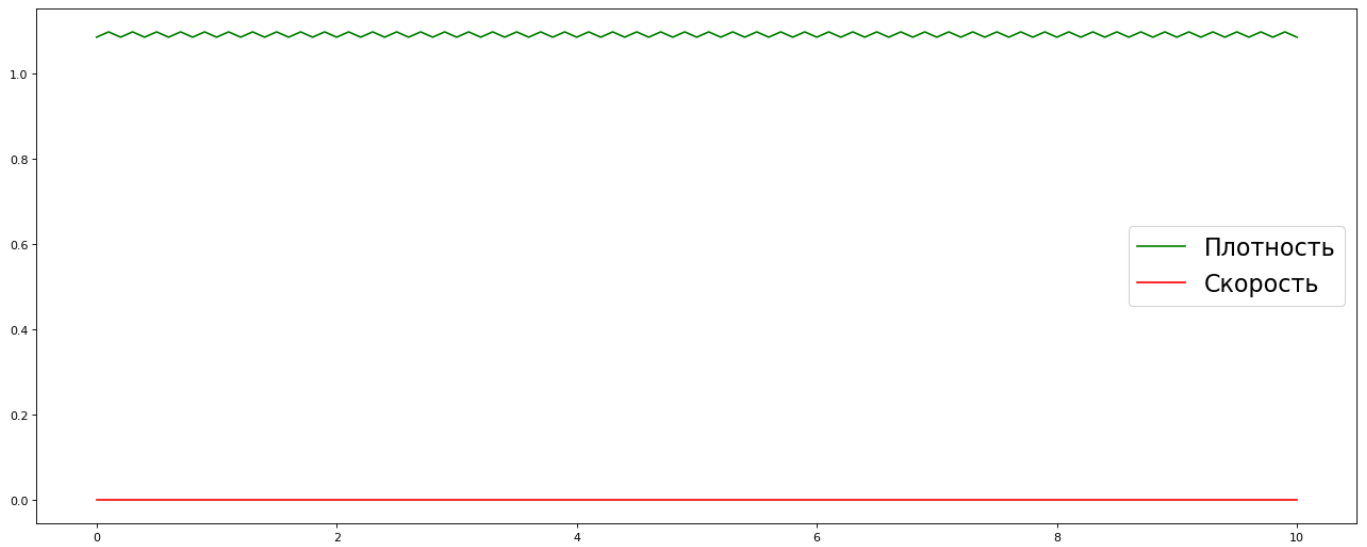
$t = 100, \Delta m = -6.177132e-01$



$t = 500, \Delta m = -6.187471e-01$



$t = 1000, \Delta m = -6.187560e-01$

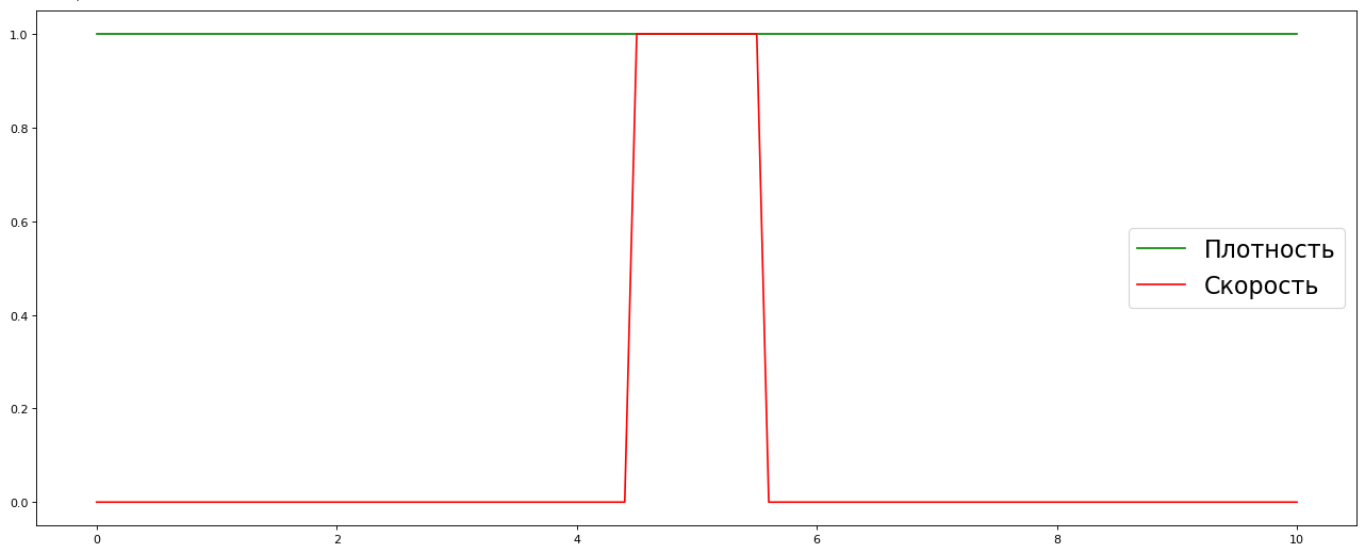


5.2 Задача с разрывной скоростью

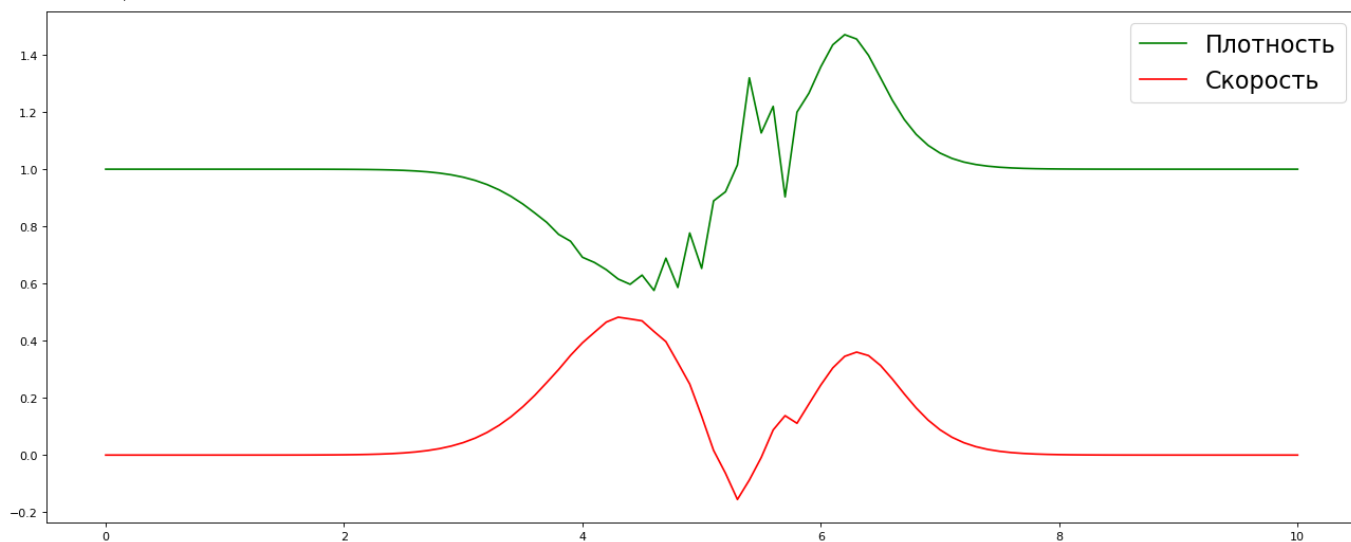
$$\begin{cases} u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5 \\ 1, & x \in [4.5, 5.5] \end{cases} \\ \rho_0(x) \equiv 1, & x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Возьмём $C = 1$ и $\mu = 0.1$ шаг по x будет равен 0.1, шаг по t возьмём также 0.1. И будем смотреть стабилизацию решения. Под сходимостью будем подразумевать, что разница между максимальным и минимальным значением функций плотности и скорости меньше заданного $\epsilon = 0.02$. Момент стабилизации 270.

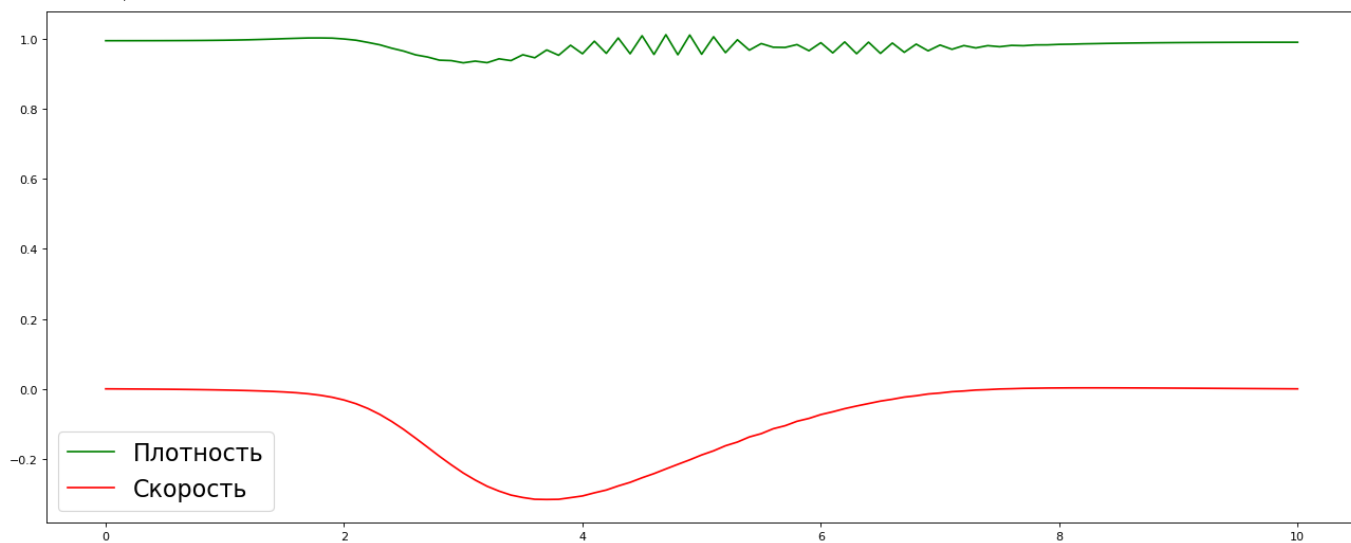
$t = 0, \Delta m = 0$



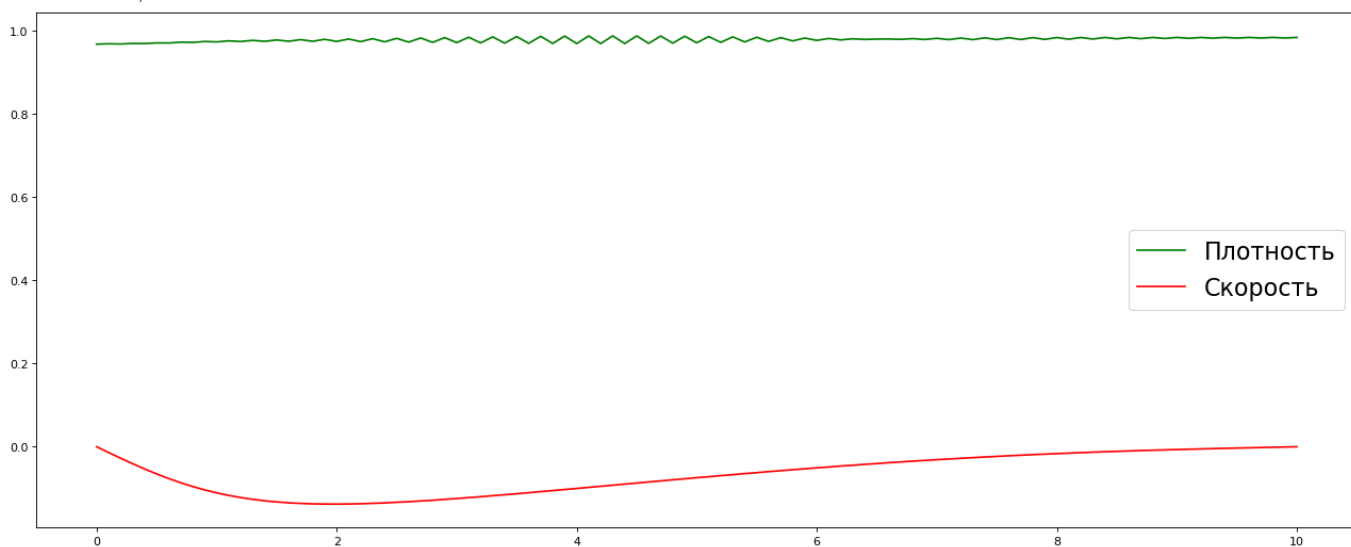
$t = 1, \Delta m = 4.397324e-02$



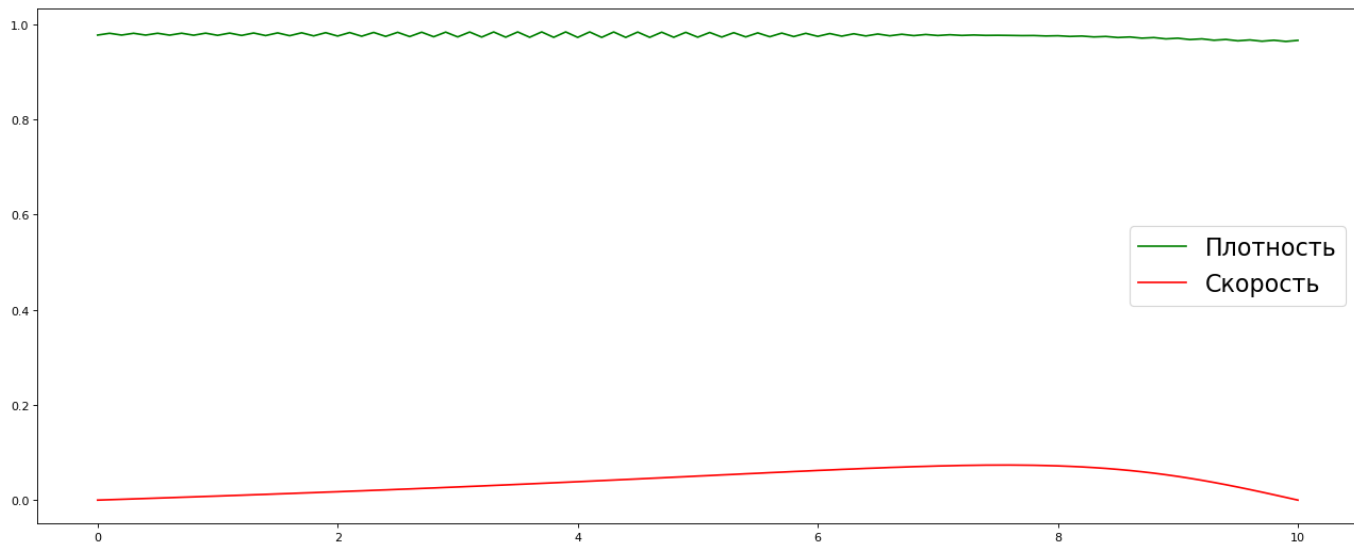
$t = 5, \Delta m = -6.363942e-02$



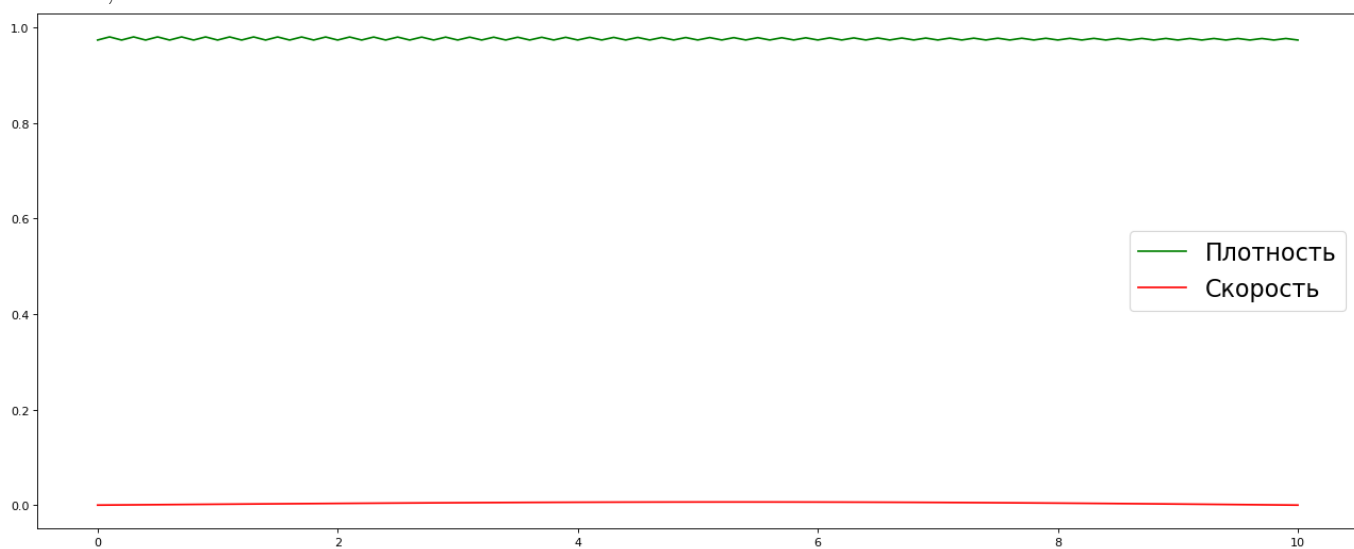
$t = 50, \Delta m = -2.257169e-01$



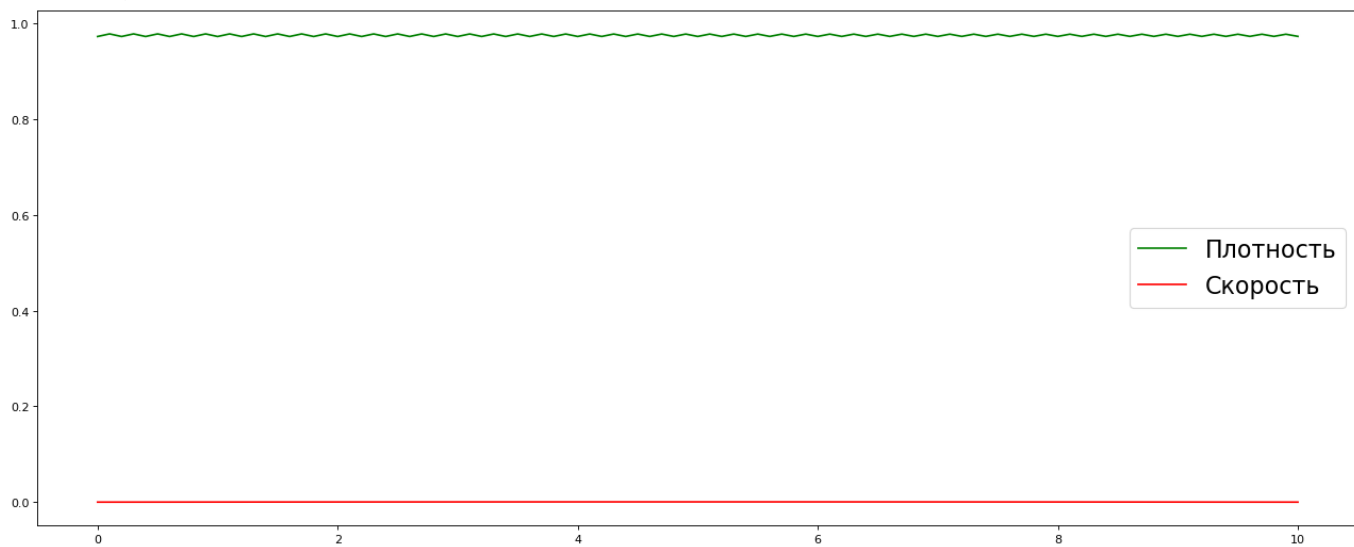
$t = 100, \Delta m = -2.367071e-01$



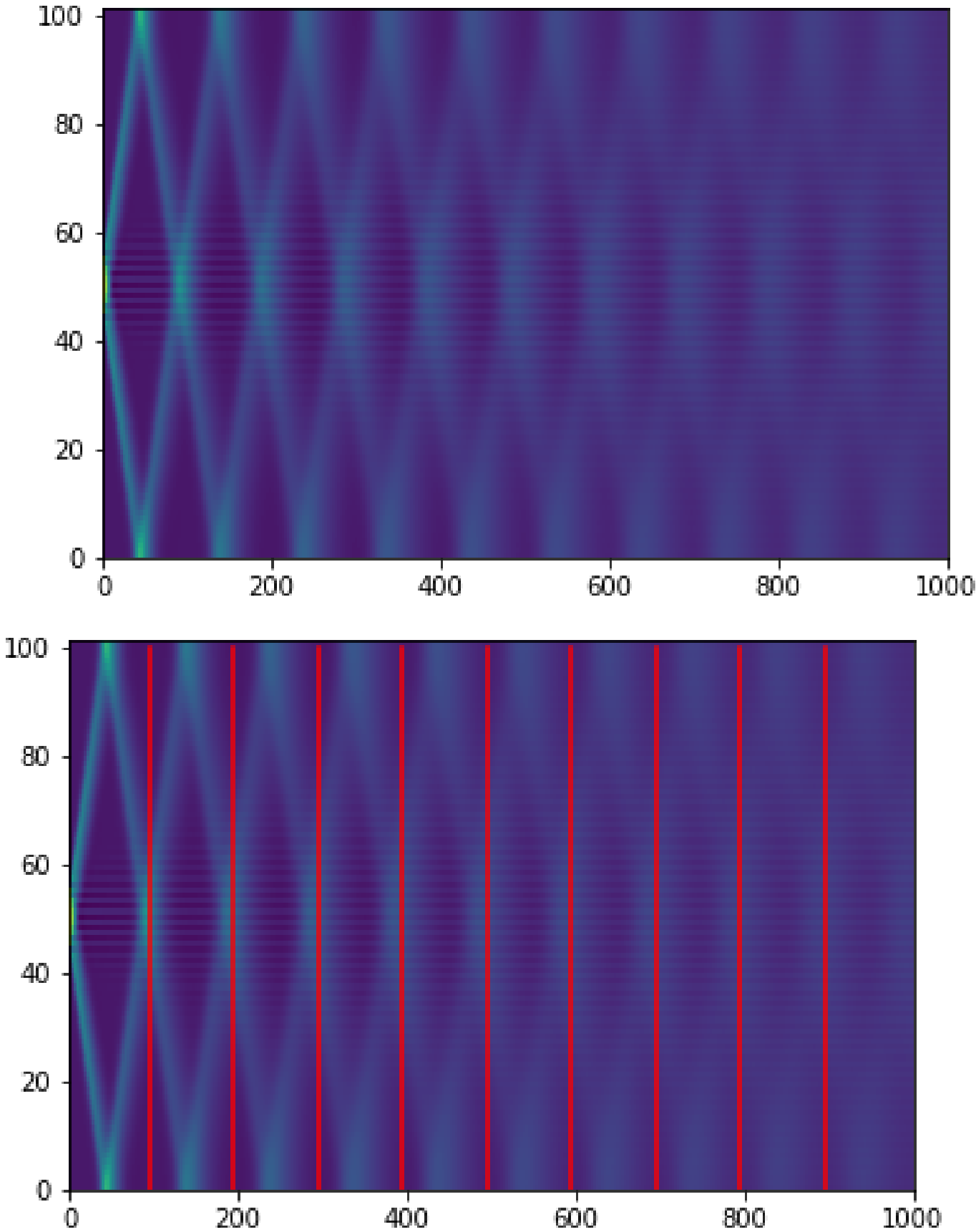
$t = 500, \Delta m = -2.422271\text{e-}01$



$t = 1000, \Delta m = -2.422836\text{e-}01$

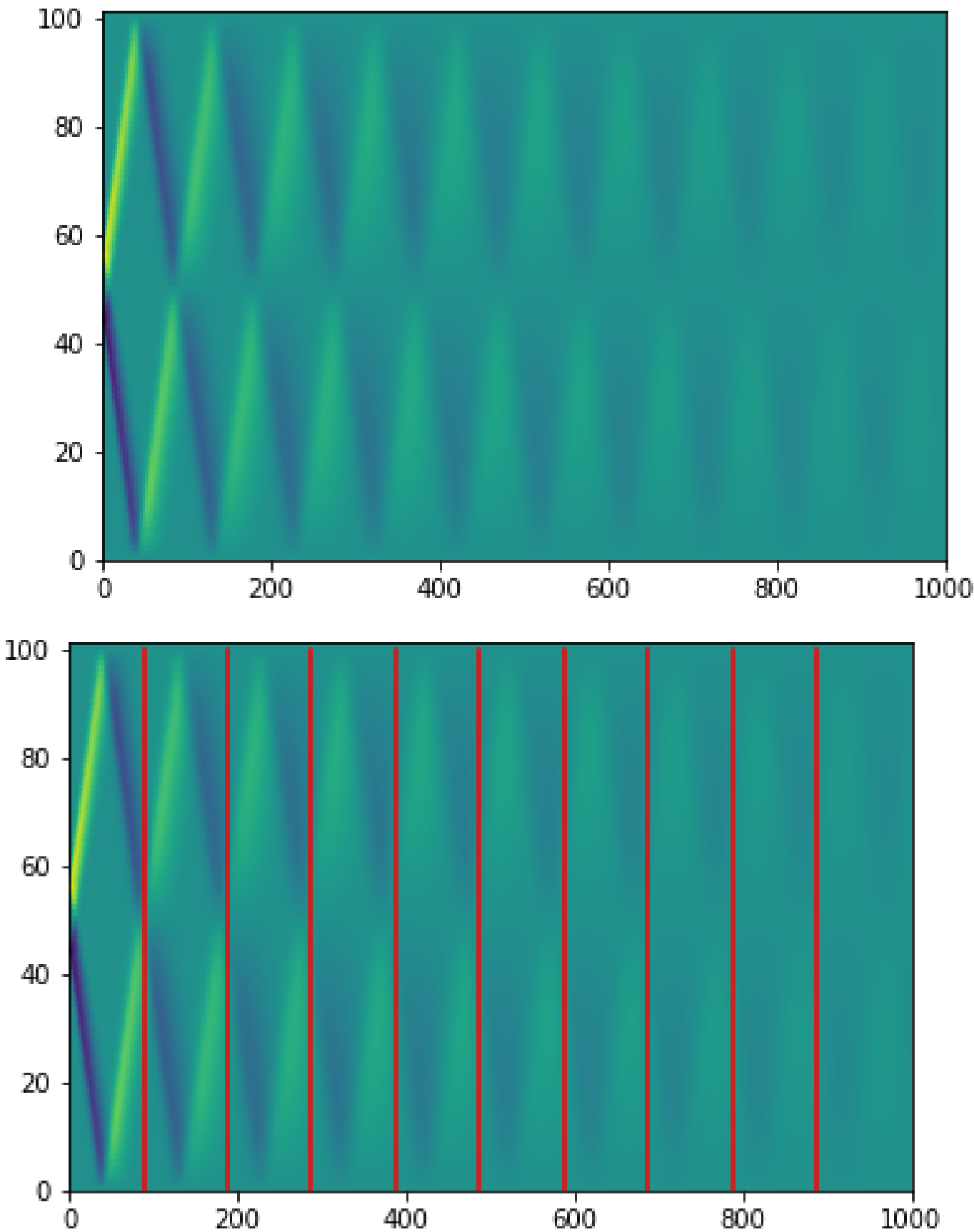


5.3 Плотность



Наблюдается цикличность Шаг 100 начиная с 95 Цикличность по времени 10 секунд

5.4 Скорость



Наблюдается цикличность Шаг 100 начиная с 88

5.5 Оценка точности полученного решения при возмущении ρ

t=10				
	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.128986	0.112162	0.0907778	0.0764018
delta_v	0.0218176	0.0175445	0.0163704	0.0129545
t=100				
	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.0743913	0.0691757	0.0612276	0.0511837
delta_v	0.00218672	0.00184025	0.00199757	0.0017028
t=1000				
	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.0653143	0.0458718	0.0378486	0.0350482
delta_v	1.01209e-05	1.90084e-05	1.93142e-05	8.73187e-06
t=10000				
	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.0652661	0.0437808	0.0288942	0.0213265
delta_v	1.43958e-14	2.9369e-08	7.82119e-07	1.22305e-06

5.6 Оценка точности полученного решения при возмущении V

t=10

	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.128986	0.112162	0.0907778	0.0764018
delta_v	0.0218176	0.0175445	0.0163704	0.0129545

t=100

	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.0743913	0.0691757	0.0612276	0.0511837
delta_v	0.00218672	0.00184025	0.00199757	0.0017028

t=1000

	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.0653143	0.0458718	0.0378486	0.0350482
delta_v	1.01209e-05	1.90084e-05	1.93142e-05	8.73187e-06

t=10000

	100/200	200/400	400/800	800/1600
delta_H	0.0653143	0.0458718	0.0378486	0.0350482
delta_v	1.01209e-05	1.90084e-05	1.93142e-05	8.73187e-06

5.7 Стабилизация синуса при разных k

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 2 + \sin K\pi x \\ u_0(x) \equiv 0, \quad x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

C=1, $\mu=0.1$, $\epsilon=0.05$, h=0.001, $\tau=0.1$

k	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
stabil_mom	55.8	14.5	4.8	4.5	3.1	2.1	1.6	1.2	1.0	0.9

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 1 \\ u_0(x) = \sin K\pi x \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

C=1, $\mu=0.1$, $\epsilon=0.05$, h=0.001, $\tau=0.1$

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
stabil_mom	57.4	7.8	3.2	2.8	2.9	3.0	3.2	3.3	3.5	3.6