

ОТЧЕТ

По реализации схемы А.Г. Соколова ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС для решения задачи о движении газа

1 Постановка задачи

Рассмотрим движение газа в одномерной области. Оно описывается системой дифференциальных уравнений :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \end{cases} \quad (1)$$

Где ρ - плотность газа, u - скорость газа, $p = p(\rho) = \rho^\gamma$ - давление газа (γ обычно равно 1.4). μ - вязкость газа, обычно в диапазоне $[0.0001, 0.1]$.

С начальными условиями

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0) \quad (2)$$

и граничными условиями непротекания:

$$u(t, X_0) = u(t, X_1) = 0. \quad (3)$$

Заметим, что в разностной схеме, описанной ниже, этих условий достаточно (Граничные условия на плотность газа не ставятся).

2 Разностная схема

Рассмотрим разностную схему А.Г. Соколова ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС на отрезке $[X_0, X_1]$ с равномерным разбиением с шагом h и шагом по времени τ . Т.е. $x_i = X_0 + i * h$, $i = 0, \dots, M$, $h = (X_1 - X_0)/M$ (для скорости).

Разбиение для плотности H отличается, $x_i = X_0 + (i + 1/2) * h$, $i = 0, \dots, M - 1$.

Рассмотрим приближение скорости V и приближение плотности H и распишем в этих обозначениях систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0, & 0 \leq m < M, n \geq 0, \\ (H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2}((\sigma\{\hat{H}\hat{V}, V\}V)_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{+1}, V\}V)_{\bar{x}}) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, & \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} = 0, & \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, & n \geq 0, \\ \hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0. \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\sigma\{H, V\} = H \frac{|V| - V}{2|V|} + H^{(-1)} \frac{|V| + V}{2|V|} = \begin{cases} H, & \text{если } V < 0, \\ H^{(-1)}, & \text{если } V \geq 0. \end{cases}$$

где $H^{(-1)} = H_{m-1}^n$

Определим $H_m^n = H_n(x_m)$ - значение плотности в точке x_m на временном шаге n ; Распишем первое уравнение для произвольного временного шага n и точки x_m :

$$\begin{aligned} & \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{\tau} + \\ & + \frac{(V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \\ & 0 \leq m < M, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Это система из M уравнений с M неизвестными H_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M-1$. Следовательно, можно решить эту систему и найти H_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M-1$.

Составим матрицу A $M \times M$ для решения этой системы, она трех-диагональная:

$$\begin{cases} a_{m,m-1} = \text{Coef}(H_{m-1}^{n+1}) = -\frac{V_m^n + |V_m^n|}{2h}, & m = 1, \dots, M \\ a_{m,m} = \text{Coef}(H_m^{n+1}) = \frac{1}{\tau} + \frac{V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|}{2h}, & m = 0, \dots, M \\ a_{m,m+1} = \text{Coef}(H_{m+1}^{n+1}) = \frac{V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|}{2h}, & m = 0, \dots, M-1 \\ b_m = \frac{H_m^n}{\tau}, & m = 0, \dots, M \end{cases} \quad (6)$$

Где $\text{Coef}(H_m^n)$ это коэффициент при H_m^n в уравнении.

Теперь распишем второе уравнение для произвольного временного шага n и точки x_m :

$$\begin{aligned}
& \frac{(H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1})V_m^{n+1} - (H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2\tau} \\
& - \frac{((|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{4h} + \\
& + \frac{((|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{4h} - \\
& - \frac{((|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{4h} + \\
& + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} = \\
& = \mu \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2} f_m^{n+1}, \\
& \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \neq 0, \\
& V_m^{n+1} = 0, \text{ при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0, \\
& 0 < m < M, n \geq 0, \\
& V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Это система из $M - 1$ уравнений и $M - 1$ неизвестной V_m^{n+1} , $m = 1, \dots, M - 1$, так как мы знаем $V_0^{n+1} = 0$, и $V_M^{n+1} = 0$.

Составим матрицу A $(M - 1) \times (M - 1)$ для решения этой системы, она трехдиагональная:

Если $H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \neq 0$, то

$$\begin{cases} a_{m,m-1} = \text{Coef}(V_{m-1}^{n+1}) = -\frac{(|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1}}{4h} - \frac{\mu}{h^2}, \\ a_{m,m} = \text{Coef}(V_m^{n+1}) = \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2\tau} + \frac{(|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1}}{4h} + \frac{2\mu}{h^2}, \\ a_{m,m+1} = \text{Coef}(V_{m+1}^{n+1}) = \frac{(|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1}}{4h} - \frac{\mu}{h^2}, \\ b_m = \frac{(H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2\tau} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} + \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2} f_m^{n+1}, \end{cases} \tag{8}$$

Если $H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0$, то

$$\begin{cases} a_{m,m-1} = \text{Coef}(V_{m-1}^{n+1}) = 0, \\ a_{m,m} = \text{Coef}(V_m^{n+1}) = 1, \\ a_{m,m+1} = \text{Coef}(V_{m+1}^{n+1}) = 0, \\ b_m = 0, \end{cases} \quad (9)$$

3 Решение

На каждой итерации решается 2 системы линейных уравнений: сначала для Н, атем для V. Они решаются методом прогонки.

4 Проверка невязки

Рассмотрим функции для проверки невязки :

$$\begin{cases} \rho = e^t(x + 1) \\ u = x(x - 1) \end{cases} \quad (10)$$

На отрезке по пространству и по времени $[0, 1]$, вязкость $\mu = 0.01$.

Построим новую систему дифференциальных уравнений, для которой эти функции будут являться решением, и сравним с ними решение, полученное программой.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = f_0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f + f_1, \end{cases} \quad (11)$$

Где

$$\begin{cases} f_0 = e^t(x + 1) + e^t(3x^2 - 1), \\ f_1 = e^t x(x^2 - 1) + e^t(2x(x^2 - 1)(x - 1) + 2x^3(x - 1) + x^2(x^2 - 1)) + \gamma e^t(e^t(x + 1))^{\gamma-1} - \mu \end{cases} \quad (12)$$

В каждой ячейке значения 3-х невязок : первая - $L_{2,h}$, вторая - C_h , третья - $\|x\|_2$.

Таблица невязок для Н:

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.0001	0.00001
0.1	1.715046e-01	2.438564e+00	5.005354e+00	9.664192e+00
	2.853975e-01	1.068528e+01	1.117180e+02	7.698708e+02
	4.487259e-01	2.371597e+01	1.581367e+02	9.578208e+02
0.01	1.971254e-02	1.646628e-02	1.662962e-02	1.664992e-02
	3.266910e-02	3.160195e-02	3.167248e-02	3.168116e-02
	5.116027e-02	1.608697e-01	5.246955e-01	1.664620e+00
0.0001	9.138907e-03	1.488073e-03	1.637004e-03	1.667097e-03
	1.483328e-02	3.326893e-03	3.192647e-03	3.180749e-03
	2.785230e-02	1.438916e-02	5.164376e-02	1.666722e-01
0.000001	8.998438e-03	6.319611e-04	1.437646e-04	1.636009e-04
	1.476457e-02	1.034910e-03	3.335590e-04	3.195915e-04
	2.800643e-02	6.316172e-03	4.530117e-03	1.635619e-02

Таблица невязок для V:

$\tau \backslash h$	1	0.1	0.001	0.0001
1	2.265398e-02	9.846926e-01	2.381708e+00	5.240725e+01
	3.161089e-02	3.708657e+00	1.613122e+01	3.108529e+02
	3.203757e-02	1.392566e+00	3.368244e+00	7.411505e+01
0.1	8.200595e-03	2.770304e-03	2.189140e-03	2.130651e-03
	1.145685e-02	3.947567e-03	3.151864e-03	3.072026e-03
	1.159739e-02	3.917802e-03	3.095911e-03	3.013195e-03
0.001	6.578740e-03	8.928189e-04	2.824992e-04	2.212076e-04
	9.205240e-03	1.249728e-03	4.035818e-04	3.193218e-04
	9.303743e-03	1.262637e-03	3.995143e-04	3.128348e-04
0.0001	6.414909e-03	7.038132e-04	9.009657e-05	2.830514e-05
	8.977915e-03	9.802615e-04	1.260776e-04	4.044741e-05
	9.072052e-03	9.953422e-04	1.274158e-04	4.002951e-05

5 Стабилизация

Рассмотрим изменение количества шагов до стабилизации в модели "скачок по плотности" при различной вязкости μ . На отрезке по пространству $[0, 10]$ с шагом h и шагом по времени τ

$$\mu = 0.1$$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.0001
0.1	181.4	185.7	198.2
0.01	181.32	185.61	189.84
0.0001	181.305	185.593	189.882

$\mu = 0.01$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.0001
0.1			
0.01	711.64	1043.20	1366.57
0.0001			

Где ∞ означает, что модель не сошлась за 1 000 000 итераций. Во всех случаях ошибка мат.баланса не превышала $1e - 14$. Для проверки на сходимость использовались условия: $L_{2,h}(V) < 1e-2$ и $\max(H) - \min(H) < 1e - 2$, где H и V - значения плотности и скорости на текущем шаге.

6 Масса

Рассмотрим отличие массы газа перед расчетом с массой газа после расчета в случае, как в предыдущем пункте.

$\mu = 0.1$

$\tau \backslash h$	0.1	0.01	0.0001
0.1	5.329071e-15	3.552714e-15	1.421085e-14
0.01	1.598721e-14	2.131628e-14	2.309264e-14
0.0001	9.769963e-14	1.829648e-13	2.131628e-14

7 Графики

Рассмотрим случай "скачек плотности" с параметрами: $\mu = 0.1$, $h = 0.1$, $\tau = 0.1$, на отрезке $[0,10]$. Далее приведены графики на некоторых шагах.

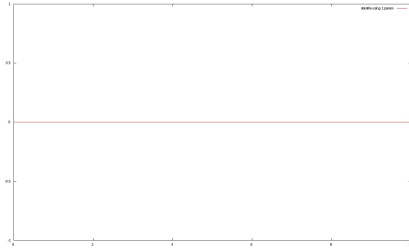


Рис. 1: Скорость на 0 шаге.

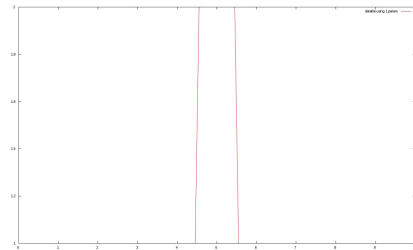


Рис. 2: Плотность на 0 шаге.

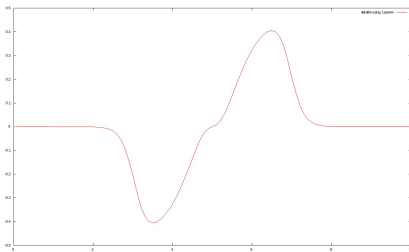


Рис. 3: Скорость на 11 шаге.

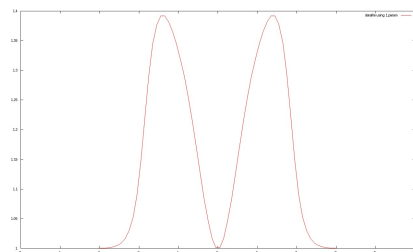


Рис. 4: Плотность на 11 шаге.

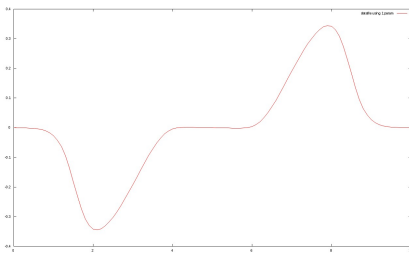


Рис. 5: Скорость на 21 шаге.

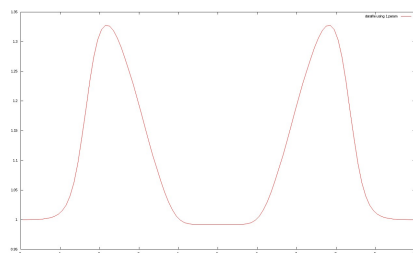


Рис. 6: Плотность на 21 шаге.

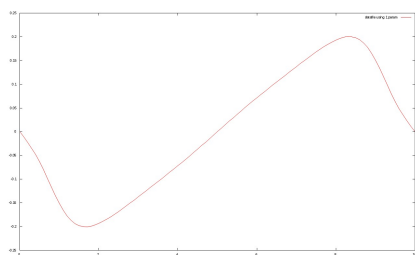


Рис. 7: Скорость на 101 шаге.

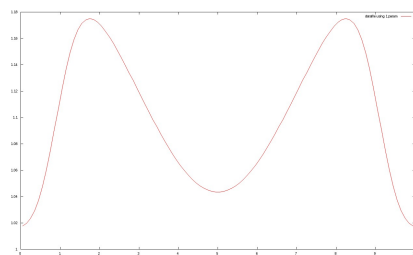


Рис. 8: Плотность на 101 шаге.

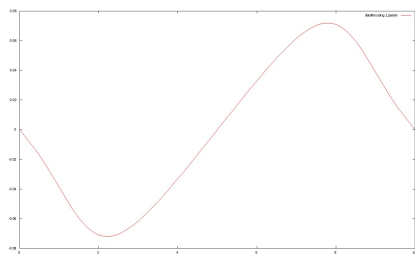


Рис. 9: Скорость на 521 шаге.

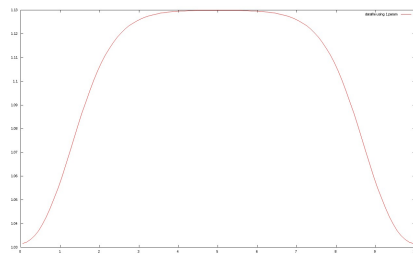


Рис. 10: Плотность на 421 шаге.