ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ
7 семестр

2019 г.

Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем

Попов А.В.

Содержание

1 Начально-краевая задача

Изучение свойств численного алгоритма и создание его программной реализации начинается с наиболее простых задач с постепенным их усложнением. Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ &\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ &p = p(\rho). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной неотрицательной константой.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times [0, X].$$

В уравнения входят еще две известные функции: давление газа p, зависящее от плотности, и вектор внешних сил f, являющийся функцией переменных Эйлера.

Часто систему (1.1) записывают в дивергентном виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ &p = p(\rho). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Эта система в случае гладких функций ρ и u эквивалентна системе (1.1). Для расчета разрывных решений лучше работают алгоритмы, которые аппроксимируют систему, записанную в дивергентном виде.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0,\,X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),\ x \in [0, X]. \tag{1.3}$$

Простейшими граничными условиями являются условия непротекания

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0,\ t \in [0, T]. \tag{1.4}$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

Дифференциальные уравнения системы (20.1) являются следствиями интегральных законов сохранения массы и импульса в случае достаточной гладкости функций плотности и скорости газа. Важными требованиями к вычислительным алгоритмам являются выполнение аналогов этих законов для сеточных функций. Численные методы, для которых выполняются один или несколько законов сохранения (но не все), называют консервативными. Если выполняются все законы сохранения, то метод называют полностью консервативным.

Еще одним важным свойством является выполнение условия неотрицательности функции плотности. В практикуме для части используемых схемы это условие выполняется автоматически. Для этого использовано два альтернативных подхода. Первый – это замена поиска функции ρ на функцию $g = ln(\rho)$. Во втором применяется специальная аппроксимация уравнения неразрывности, предложенная А.Г.Соколовым.

Хороший обзор результатов по поводу обоснования начально-краевых задач механики жидкости и газа можно найти в [5].

2 Основные обозначения

В заданиях практикума рассматривается пространственные области в виде отрезка $\bar{\Omega} = [0;\,X]$, где вводится равномерная сетка с шагом h: $\bar{\omega}_h = \{mh \mid m = 0, \ldots, M\}$, где $Mh = X$. На временном интервале $[0;\,T]$ также используется равномерная сетка: $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \ldots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $\bar{Q}_{\tau h} = \omega_\tau \times \bar{\omega}_{\bar{h}}$. Узлы сетки $\bar{\omega}_h$, попадающие на границу области ω, обозначим γ_h (граничные узлы), а попадающие в область ω через ω_h (внутренние узлы). Узелы $x = 0$ и $x = X$ будем обозначать γ_h^- и γ_h^+ соответственно.

Кроме сетки ω_h в ряде схем используются сдвинутые сетки с полуцелыми узлами. Через $\omega_h^{1/2}$ будем обозначать сетку $\omega_h^{1/2} = \{mh + h/2 \mid m = 0, \ldots, M-1\}$, а через $Q_{\tau h}^{1/2} = \omega_\tau \times \omega_h^{1/2}$.

Значение функции g, определенной на сетке $Q_{\tau h}$ (или на сетке $Q_{\tau h}^{1/2}$), в узле (n, m) будем обозначать через g_m^n. Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и m. Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом (n, m), используются следующие обозначения:

$$g_m^{n+1} = \hat{g}, \qquad g_{m\pm1}^n = g^{\pm1}.$$

Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_s = \frac{g_{m+1}^n + g_m^n}{2}, \quad g_{\bar{s}_k} = \frac{g_m^n + g_{m-1}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения, принятые в [1]:

$$g_t = \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \quad g_x = \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \quad g_{\overset{\circ}{x}} = \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \quad g_{\bar{x}} = \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}.$$

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах в ряде схем будут использоваться разностные аппроксимации против потока. Для этих выражений введем обозначения

$$\delta\{W,V\} = \frac{V+|V|}{2}W_{\bar{x}} + \frac{V-|V|}{2}W_x = \begin{cases} VW_{\bar{x}}, & \text{если } V \geq 0, \\ VW_x, & \text{если } V < 0; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\delta_1\{W,V\} = \begin{cases} (VW)_{\bar{x}}, & \text{если } V \geq 0, \\ (VW)_x, & \text{если } V < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

В схеме А.Г.Соколова в конвективных слагаемых узел шаблона, в котором нужно брать значение сеточной функции, зависит от знака компоненты вектора скорости. Для этих выражений используется обозначение

$$\sigma\{H,V\} = H\frac{|V|-V}{2|V|} + H^{(-1)}\frac{|V|+V}{2|V|} = \begin{cases} H, & \text{если } V < 0, \\ H^{(-1)}, & \text{если } V \geq 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

Определим используемые ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$:

$$(v,u) = h\sum_{x_m \in \omega_{\bar{h}}} v_m u_m, \quad [u,v] = (u,v) + 0,5h\sum_{x_m \in \gamma_h} v_m u_m,$$

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_m \in \bar{\omega}_h} |v_m|, \quad \|v\| = \sqrt{(v,v)}, \quad \|v\|_{L_{2,h}} = |[v]| = \sqrt{[v,v]}, \quad \|v\|_{\frac{1}{2}} = \sqrt{|[v]|^2 + |v|_1^2},$$

где через $|v|_1$ обозначена полунорма, задаваемая следующим образом:

$$|v|_1 = \sqrt{h\sum_{x_m \in \omega_h \cup \gamma_h^-} (v_x)^2}.$$

3 Схема с центральными разностями (ρ,u)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned}
&H_t + 0.5\,(V\hat{H}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{H})_{\overset{\circ}{x}} + H\hat{V}_{\overset{\circ}{x}}) = 0, \qquad x \in \omega_h, \\
&H_{t,0} + 0.5\,((V\hat{H})_{x,0} + H\hat{V}_{x,0}) - \\
&-0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0, \\
&H_{t,M} + 0.5\,((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H\hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
&+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0, \\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{\circ}{x}}) + \tilde{p}'(H)\hat{H}_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\tilde{p}(H) = \dfrac{p(H)}{H}$ и $\tilde{\mu} = \max\limits_m \dfrac{\mu}{H}$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{3.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{3.3}$$

4 Схема с центральными разностями (ρ,u) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а уравнения решаются последовательно методом "прогонки".

$$\begin{aligned}
&H_t + 0.5\,(V\hat{H}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{H})_{\overset{0}{x}} + HV_{\overset{0}{x}}) = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + 0.5\,((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) -\\
&-0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0,\\
&H_{t,M} + 0.5\,((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) +\\
&+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0,\\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{0}{x}}) + \frac{p(\hat{H})_{\overset{0}{x}}}{\hat{H}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{\hat{H}}\right) V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\tilde{\mu} = \max\limits_m \dfrac{\mu}{\hat{H}}$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{4.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{4.3}$$

5 Схема с односторонними разностями (ρ,u) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
&H_t + \delta_1\{\hat{H}, V\} = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} = 0,\\
&H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} = 0,\\
&\hat{H}V_t + \delta\{\hat{V}, \hat{H}V\} + p(\hat{H})_{\overset{0}{x}} = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{5.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{5.3}$$

6 Схема с центральными разностями (u,ρ) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а уравнения решаются последовательно методом "прогонки".

$$\begin{array}{l}
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{0}{x}}) + \dfrac{p(H)_{\overset{0}{x}}}{H} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \dfrac{\mu}{H}\right) V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h, \\
H_t + 0.5\,(\hat{V}\hat{H}_{\overset{0}{x}} + (\hat{V}\hat{H})_{\overset{0}{x}} + H\hat{V}_{\overset{0}{x}}) = 0, \qquad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5\,((\hat{V}\hat{H})_{x,0} + H_0\hat{V}_{x,0}) - \\
-0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0, \\
H_{t,M} + 0.5\,((\hat{V}\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M\hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0,
\end{array} \tag{6.1}$$

где $\tilde{\mu} = \max\limits_m \dfrac{\mu}{H}$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{6.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{6.3}$$

7 Схема с односторонними разностями (u,ρ) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
&HV_t + \delta\{\hat{V}, HV\} + p(H)_{\overset{0}{x}} = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + Hf, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_t + \delta_1\{\hat{H}, \hat{V}\} = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + (\hat{H}\hat{V})_{x,0} = 0,\\
&H_{t,M} + (\hat{H}\hat{V})_{\bar{x},M} = 0.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H^0_m = \rho_{0m}, \quad V^0_m = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{7.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n_0 = V^n_M = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{7.3}$$

8 Схема с центральными разностями (ρ,u) (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а уравнения решаются параллельно методом "прогонки".

$$\begin{aligned}
&H_t + 0.5\,(V\hat{H}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{H})_{\overset{0}{x}} + HV_{\overset{0}{x}}) = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + 0.5\,((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) -\\
&-0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0,\\
&H_{t,M} + 0.5\,((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) +\\
&+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0,\\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{0}{x}}) + \frac{p(H)_{\overset{0}{x}}}{H} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right) V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{8.1}$$

где $\tilde{\mu} = \max\limits_{m} \dfrac{\mu}{H}$.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H^0_m = \rho_{0m}, \quad V^0_m = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{8.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n_0 = V^n_M = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{8.3}$$

9 Схема с односторонними разностями (ρ,u) (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
&H_t + \delta_1\{\hat{H}, V\} = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} = 0,\\
&H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} = 0,\\
&HV_t + \delta\{\hat{V}, HV\} + p(H)_{\overset{0}{x}} = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + Hf, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{9.1}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H^0_m = \rho_{0m}, \quad V^0_m = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{9.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n_0 = V^n_M = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{9.3}$$

10 Схема с центральными разностями (ρ,ρu) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (20.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а уравнения решаются последовательно методом "прогонки"

$$\begin{aligned}
&H_t + 0.5\,(V\hat{H}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{H})_{\overset{0}{x}} + HV_{\overset{0}{x}}) = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + 0.5\,((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) -\\
&-0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0,\\
&H_{t,M} + 0.5\,((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) +\\
&+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0,\\
&(HV)_t + \frac{2}{3}(\hat{H}V\hat{V})_{\overset{0}{x}} + \frac{2}{3}\hat{H}V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + \frac{V^2}{3}\hat{H}_{\overset{0}{x}} + p(\hat{H})_{\overset{0}{x}} = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{10.1}$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$H^0_m = \rho_{0m}, \quad V^0_m = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{10.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n_0 = V^n_M = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{10.3}$$

11 Схема с односторонними разностями (ρ,ρu) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (1.1),(20.2),(20.3) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$
\begin{aligned}
&H_t + \delta_1\{\hat{H}, V\} = 0, \qquad x \in \omega_h,\\
&H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} = 0,\\
&H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} = 0,\\
&(HV)_t + \delta_1\{\hat{V}, \hat{H}V\} + p(\hat{H})_{\overset{\circ}{x}} = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций ρ_0 и u_0:

$$
H_m^0 = \rho_{0m}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{11.2}
$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$
V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{11.3}
$$

12 Схема с центральными разностями ($log(\rho)$,u)

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности систему (1.1) можно записать следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial ug}{\partial x} + (2-g)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x}\right) + \tilde{p}'(g)\frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,
\end{aligned}
\tag{12.1}
$$

где $g = ln(\rho)$ и $\tilde{p}'(g) = \dfrac{dp}{d\rho}(e^g)$.

Дополним систему (12.1) начальными и граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
&(g, u)|_{t=0} = (ln(\rho_0), u_0),\ \mathbf{x} \in [0, X],\\
&u(t, 0) = u(t, X) = 0,\ t \in [0, T].
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

Сеточную функцию, разностное приближение для функции g, обозначим G, а сеточный аналог скорости $\mathbf{u}$ обозначим $\mathbf{V}$. Обе функции заданы на сетке $\bar{\omega}_h$. Для поиска численного решения задачи (12.1)-(12.2) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$
\begin{aligned}
&G_t + 0.5\,(V\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{G})_{\overset{\circ}{x}} + 2\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} - GV_{\overset{\circ}{x}}) = f_0, \qquad x \in \omega_h,\\
&G_{t,0} + 0.5\,((V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}) -\\
&-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = (f_0)_0,\\
&G_{t,M} + 0.5\,((V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M}) +\\
&+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = (f_0)_M,\\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{\circ}{x}}) + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-G} \|_C$, а функция f_0 тождественно равна нулю.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и u_0:

$$G_m^0 = ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{12.4}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{12.5}$$

13 Схема с центральными разностями ($log(\rho)$,u) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (12.1)-(12.2) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а функции G и V на верхнем слое ищутся путем последовательного решения двух СЛАУ:

$$\begin{aligned}
&G_t + 0.5\,(V\hat{G}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{G})_{\overset{0}{x}} + (2-G)V_{\overset{0}{x}}) = f_0, \qquad x \in \omega_h, \\
&G_{t,0} + 0.5\,((V\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)V_{x,0}) - \\
&-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = (f_0)_0, \\
&G_{t,M} + 0.5\,((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)V_{\bar{x},M}) + \\
&+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = (f_0)_M, \\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{0}{x}}) + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_{\overset{0}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{13.1}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-\hat{G}} \|_C$, а функция f_0 тождественно равна нулю.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и u_0:

$$G_m^0 = ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{13.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{13.3}$$

14 Схема с центральными разностями (u,$log(\rho)$) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (12.1)-(12.2) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а функции V и G на верхнем слое ищутся путем последовательного решения двух СЛАУ:

$$\begin{aligned}
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{0}{x}}) + \tilde{p}'(G)G_{\overset{0}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h, \\
&G_t + 0.5\,(\hat{V}\hat{G}_{\overset{0}{x}} + (\hat{V}\hat{G})_{\overset{0}{x}} + (2-G)\hat{V}_{\overset{0}{x}}) = f_0, \qquad x \in \omega_h, \\
&G_{t,0} + 0.5\,((\hat{V}\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)\hat{V}_{x,0}) - \\
&-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = (f_0)_0, \\
&G_{t,M} + 0.5\,((\hat{V}\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)\hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
&+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = (f_0)_M,
\end{aligned} \tag{14.1}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-G} \|_C$, а функция f_0 тождественно равна нулю.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и u_0:

$$G^0_m = ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}^0_m = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{14.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n_0 = V^n_M = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{14.3}$$

15 Схема с центральными разностями $(log(\rho), u)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (12.1)-(12.2) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, а функции G и V на верхнем слое ищутся путем параллельного решения двух СЛАУ:

$$\begin{aligned}
&G_t + 0.5\,(V\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{G})_{\overset{\circ}{x}} + (2-G)V_{\overset{\circ}{x}}) = f_0, \qquad x \in \omega_h,\\
&G_{t,0} + 0.5\,((V\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)V_{x,0}) -\\
&-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)\,(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = (f_0)_0,\\
&G_{t,M} + 0.5\,((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)V_{\bar{x},M}) +\\
&+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)\,(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = (f_0)_M,\\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{\circ}{x}}) + \tilde{p}'(G)G_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{15.1}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-G} \|_C$, а функция f_0 тождественно равна нулю.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и u_0:

$$G^0_m = ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}^0_m = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{15.2}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V^n_0 = V^n_M = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{15.3}$$

16 Схема с односторонними разностями $(log(\rho), u)$

Решение разностной схемы (12.3)-(12.5) вследствие использования центральных разностей не является строго монотонным, а имеет незначительные осциляции. Для их устранения можно использовать схему с разностями против потока

$$\begin{aligned}
&G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + \hat{V}_{\overset{\circ}{x}} = 0, \quad m = 1, \ldots, M-1;\\
&G_t + \hat{V}_{\mathbf{x}} = 0, \quad m = 0;\\
&G_t + \hat{V}_{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad m = M;
\end{aligned} \tag{16.1}$$

$$\begin{aligned}
&V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad m = 1, \ldots, M-1;\\
&\hat{V} = 0, \qquad m = 0,\, M;
\end{aligned} \tag{16.2}$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-G} \|_C$.

Приведем запись уравнений (16.1)-(16.2) в индексной форме

$$
\begin{aligned}
&\frac{G_m^{n+1}-G_m^n}{\tau} + \frac{V_m^n+|V_m^n|}{2}\frac{G_m^{n+1}-G_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_m^n-|V_m^n|}{2}\frac{G_{m+1}^{n+1}-G_m^{n+1}}{h} + \frac{V_{m+1}^{n+1}-V_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0,\\
&m = 1,\dots,M-1,\\
&\frac{G_0^{n+1}-G_0^n}{\tau} + \frac{V_1^{n+1}-V_0^{n+1}}{h} = 0,\\
&\frac{G_M^{n+1}-G_M^n}{\tau} + \frac{V_M^{n+1}-V_{M-1}^{n+1}}{h} = 0,
\end{aligned}
\tag{16.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{V_m^{n+1}-V_m^n}{\tau} + \frac{V_m^n+|V_m^n|}{2}\frac{V_m^{n+1}-V_{m-1}^{n+1}}{h} +\\
&+\frac{V_m^n-|V_m^n|}{2}\frac{V_{m+1}^{n+1}-V_m^{n+1}}{h} + \tilde{p}'(G_m^n)\frac{G_{m+1}^{n+1}-G_{m-1}^{n+1}}{2h} =\\
&= \tilde{\mu}\frac{V_{m+1}^{n+1}-2V_m^{n+1}+V_{m-1}^{n+1}}{h^2} - (\tilde{\mu}-\mu e^{-G})\frac{V_{m+1}^n-2V_m^n+V_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n, \quad m = 1,\dots,M-1,\\
&V_0^{n+1} = 0, \quad V_M^{n+1} = 0.
\end{aligned}
\tag{16.4}
$$

17 Схема с односторонними разностями ($log(\rho)$,u) (последовательная)

$$
\begin{aligned}
&G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + V_{\overset{\circ}{x}} = 0, \quad m = 1,\dots,M-1;\\
&G_t + V_{\mathbf{x}} = 0, \quad m = 0;\\
&G_t + V_{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad m = M;
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu}-\mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, \qquad m = 1,\dots,M-1;\\
&\hat{V} = 0, \qquad m = 0,\, M;
\end{aligned}
\tag{17.2}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-\hat{G}} \|_C$.

18 Схема с односторонними разностями (u,$log(\rho)$) (последовательная)

$$
\begin{aligned}
&V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)G_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu}-\mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad m = 1,\dots,M-1;\\
&\hat{V} = 0, \qquad m = 0,\, M;
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu \| e^{-G} \|_C$.

$$
\begin{aligned}
&G_t + \delta\{\hat{G}, \hat{V}\} + \hat{V}_{\overset{\circ}{x}} = 0, \quad m = 1,\dots,M-1;\\
&G_t + \hat{V}_{\mathbf{x}} = 0, \quad m = 0;\\
&G_t + \hat{V}_{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad m = M;
\end{aligned}
\tag{18.2}
$$

19 Схема с односторонними разностями ($log(\rho)$,u) (параллельная)

$$
\begin{aligned}
&G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + V_{\overset{0}{x}} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1;\\
&G_t + V_{\mathbf{x}} = 0, \quad m = 0;\\
&G_t + V_{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad m = M;
\end{aligned}
\tag{19.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G) G_{\overset{0}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f, \qquad m = 1, \dots, M-1;\\
&\hat{V} = 0, \qquad m = 0,\ M;
\end{aligned}
\tag{19.2}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$.

20 Разностная схема А.Г.Соколова (ρ,ρu)

Система уравнений вязкого газа

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f,\\
&p = p(\rho).
\end{aligned}
\tag{20.1}
$$

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0,\ X]$:

$$
(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),\ x \in [0, X]. \tag{20.2}
$$

Простейшими граничными условиями являются условия непротекания

$$
u(t, 0) = u(t, X) = 0,\ t \in [0, T]. \tag{20.3}
$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

Функции H (сеточная плотность), заданная в узлах сетки $\omega_h^{1/2}$, и V (сеточная скорость), заданная в узлах сетки ω_h, ищутся по схеме, аппроксимирующей систему (20.1)

$$
H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\} V)_x = 0, \qquad 0 \le m < M,\ n \ge 0, \tag{20.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&(H_{\bar{s}} V)_t + \frac{1}{2}\Big((\sigma\{\hat{H}\hat{V}, V\} V)_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{(+1)}, V\} V)_{\bar{x}}\Big) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} =\\
&= \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}} f, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \ne 0,\\
&\hat{V} = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0,\\
&0 < m < M,\ n \ge 0,\\
&\hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0.
\end{aligned}
\tag{20.5}
$$

В формулах (20.4)-(20.5) были использованы обозначения

$$
\sigma\{H, V\} = H \frac{|V| - V}{2|V|} + H^{(-1)} \frac{|V| + V}{2|V|} = \begin{cases} H, & \text{если } V < 0,\\ H^{(-1)}, & \text{если } V \ge 0. \end{cases} \tag{20.6}
$$

Разностные уравнения (20.4)-(20.5) в индексах имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{H_m^{n+1}-H_m^n}{\tau}+\\
+\frac{(V_{m+1}^n-|V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1}+(V_{m+1}^n+|V_{m+1}^n|-V_m^n+|V_m^n|)H_m^{n+1}-(V_m^n+|V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h}=0,\\
0\le m<M,\ n\ge 0.
\end{gathered}
\tag{20.7}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{(H_{m-1}^{n+1}+H_m^{n+1})V_m^{n+1}-(H_{m-1}^n+H_m^n)V_m^n}{2\tau}-\\
-\frac{((|V_{m-1}^n|+V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1}+(|V_m^n|+V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{4h}+\\
+\frac{((|V_{m-1}^n|-V_{m-1}^n+|V_m^n|+V_m^n)H_{m-1}^{n+1}+(|V_{m+1}^n|+V_{m+1}^n+|V_m^n|-V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{4h}-\\
-\frac{((|V_m^n|-V_m^n)H_m^{n+1}+(|V_{m+1}^n|-V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{4h}+\\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{H_m^{n+1}+H_{m-1}^{n+1}}{2}\frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1}-(H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h}=\\
=\mu\frac{V_{m-1}^{n+1}-2V_m^{n+1}+V_{m+1}^{n+1}}{h^2}+\frac{H_{m-1}^{n+1}+H_m^{n+1}}{2}f_m^{n+1},\\
\text{при } H_{m-1}^{n+1}+H_m^{n+1}\ne 0,\\
V_m^{n+1}=0,\qquad \text{при } H_{m-1}^{n+1}+H_m^{n+1}=0,\\
0<m<M,\ n\ge 0,\\
V_0^{n+1}=V_M^{n+1}=0.
\end{gathered}
\tag{20.8}
$$

21 Разностная схема А.Г.Соколова (ρ,u)

В схеме (20.4)-(20.5) можно поменять второе уравнение так, чтобы оно аппроксимировало соответствующее уравнение системы (1.1). В результате получим следующую схему

$$H_t+(\sigma\{\hat H,V\}V)_x=0,\qquad 0\le m<M,\ n\ge 0,\tag{21.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\hat H_{\bar s}V_t+\hat H_{\bar s}\delta\{\hat V,V\}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\hat H_{\bar s}((\hat H)^{\gamma-1})_{\bar x}=\mu\hat V_{x\bar x}+\hat H_{\bar s}f,\qquad \text{при } \hat H_{\bar s}\ne 0,\\
&\hat V=0,\qquad \text{при } \hat H_{\bar s}=0,\\
&0<m<M,\ n\ge 0,\\
&\hat V_0=\hat V_M=0.
\end{aligned}
\tag{21.2}
$$

22 Разностная схема А.Г.Соколова (u,ρ)

$$
\begin{aligned}
&H_{\bar s}V_t+H_{\bar s}\delta\{\hat V,V\}+\frac{\gamma}{\gamma-1}H_{\bar s}((H)^{\gamma-1})_{\bar x}=\mu\hat V_{x\bar x}+H_{\bar s}f,\qquad \text{при } H_{\bar s}\ne 0,\\
&\hat V=0,\qquad \text{при } H_{\bar s}=0,\\
&0<m<M,\ n\ge 0,\\
&\hat V_0=\hat V_M=0.
\end{aligned}
\tag{22.1}
$$

$$H_t+(\sigma\{\hat H,\hat V\}\hat V)_x=0,\qquad 0\le m<M,\ n\ge 0,\tag{22.2}$$

23 Разностная схема А.Г.Соколова (ρ,u) (параллельная)

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0, \qquad 0 \le m < M,\ n \ge 0, \tag{23.1}$$

$$\begin{aligned}
&H_{\bar{s}}V_t + H_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + \frac{\gamma}{\gamma-1}H_{\bar{s}}((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + H_{\bar{s}}f, \qquad \text{при } H_{\bar{s}} \ne 0,\\
&\hat{V} = 0, \qquad \text{при } H_{\bar{s}} = 0,\\
&0 < m < M,\ n \ge 0,\\
&\hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0.
\end{aligned} \tag{23.2}$$

24 Отладочные тесты для одномерных задач

Зададим функции

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(t,x) = e^t(cos(\pi x/10) + 1.5),\\
&\tilde{u}(t,x) = cos(2\pi t)sin(\pi(x/10)^2).
\end{aligned} \tag{24.1}$$

Определим функции f_0 (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и f так, чтобы функции $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ удовлетворяли системе (1.1) с правой частью, составленной из этих функций.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\rho}\tilde{u}}{\partial x} = f_0,\\
&\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + f,\\
&p = p(\tilde{\rho}).
\end{aligned} \tag{24.2}$$

Таким образом, дифференциальная задача для системы с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(0,x) = cos(\pi x/10) + 1.5,\ \mathbf{x} \in [0,10],\\
&\tilde{u}(0,x) = sin(\pi(x/10)^2),\ \mathbf{x} \in [0,10],\\
&\tilde{u}(t,0) = u(t,10) = 0,\ t \in [0,1],
\end{aligned} \tag{24.3}$$

имеет гладкое точное решение в области $Q = [0,1] \times [0,10]$, задаваемое функциями (24.1).

Зададим две начально-краевых задачи для системы (1.1), начальные и граничные условия которых определяются следующим образом.

$$\begin{aligned}
&\rho_0(x) = 1, \quad x < 4,5 \text{ или } x > 5,5,\\
&\rho_0(x) = 2, \quad x \in [4,5; 5,5],\\
&u_0(x) \equiv 0, x \in [0,10],\\
&u(t,0) = u(t,10) = 0,\ t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{24.4}$$

$$\begin{aligned}
&u_0(x) = 0, \quad x < 4,5 \text{ или } x > 5,5,\\
&u_0(x) = 1, \quad x \in [4,5; 5,5],\\
&\rho_0(x) \equiv 1, x \in [0,10],\\
&u(t,0) = u(t,10) = 0,\ t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{24.5}$$

Функция f из правой части системы (1.1) считается равной нулю в обеих задачах.

Задание 1.

Первое задание состоит в написании программы, реализующей разностную схему. В отчет о выполнении задания должны быть включены следующие пункты.

1. Постановки дифференциальных задач.

2. Подробное описание алгоритмов разностных схем. В том числе обязательно должны быть приведены поточечная запись разностных уравнений и выражений, задающих элементы матриц и правых частей алгебраических задач, которые требуется решить.

3. Описание тестовых расчетов и полученных результатов:

а) расчет точного гладкого решения;

б) результаты расчета задач с негладкими данными, снабженные графическими иллюстрациями.

4. Отчет должен содержать полученные результаты о точности расчетов по разностным схемам, сравнительные выводы точности схем между собой и в зависимости от значения параметра μ. Значение этого параметра следует брать из диапазона $[0,001;\, 0,1]$.

25 Инструкция по использованию пакета LASPACK

Опишем правила вызова подпрограмм из пакета Laspack, использующихся для решении СЛАУ различными модификациями метода би-сопряженных градиентов.

1) Декларация матрицы и вектора с именами A и b:

$$QMatrix\ A;, \qquad Vector\ b;.$$

2) Отведение памяти для хранения матрицы A и вектора b размерности Dim (строки и столбцы имеют номера, начиная с 1 и кончая Dim):

$$Q\_Constr(\&A, "A", Dim, False, Rowws, Normal, True);,$$

$$V\_Constr(\&b, "b", Dim, Normal, True);.$$

3) Присвоить элементу вектора b с номером i значение переменной tmp

$$V\_SetCmp(\&b, i, tmp);.$$

4) Определить, что в строке матрицы A с номером i содержатся n отличных от нуля элементов

$$Q\_SetLen(\&A, i, n);.$$

5) Присвоить элементу матрицы A, находящемуся в строке с номером i и столбце с номером j значение переменной tmp (задаваемый элемент в списке отличных от нуля элементов строки имеет номер k от 0 до $n-1$):

$$Q\_SetEntry(\&A, i, k, j, tmp);.$$

6)Задать точность решения системы $Ax = b$ равной ε:

$$SetRTCAccuracy(\varepsilon);.$$

Параметр ε задаваемый этой процедурой определяет шаг n, на котором происходит завершение итерационного процесса решения системы $Ax = b$. Номер n определяется из условия, что

$$\|b - Ax_n\|_2 \le \varepsilon \|b\|_2, \tag{25.1}$$

где через x_n обозначено приближение, полученное на n-ом шаге.

7) Присвоить переменной tmp значение i-ой компоненты вектора b

$$tmp = V\_GetCmp(\&b, i);.$$

8) Освободить память, отведенную под матрицу A и вектор b,

$$Q\_Destr(\&A);, \qquad V\_Destr(\&b);.$$

Для решения системы $Ax = b$ с несимметричной матрицей в пакете $LASPack$ реализованы следующие методы.

9) Conjugate Gradient on the Normal Equations (CGN). Его применение осуществляется через вызов процедуры $CGNIter$. Ее прототип:

$$Vector\, CGNIter\,(\,QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\ PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

Первые три параметра задают элементы решаемой СЛАУ. Целочисленный параметр $MaxIter$ задает максимальное выполнимое число шагов итерационного метода. Таким образом, завершение итерационного процесса происходит в двух случаях: либо достигнута заданная точность на n-ом шаге (условие (25.1)), либо число итераций достигло значения $MaxIter$. Параметр $PrecondProc$ задает три возможных типа предобуславливателя: $JacobiPrecond$, $SSORPrecond$ и $ILUPrecond$. Параметр, задающий предобуславливатель может быть задан значением $NULL$. В этом случае итерационный процесс будет осуществляться без предобуславливателя. Последний параметр процедуры задает значение параметра ω в предобуславливателе. Значение этого параметра может быть любым, если предобуславливатель отсутствует.

Во всех следующих процедурах параметры имеют тот же смысл, что и в процедуре $CGNIter$.

10) Generalized Minimal Residual (GMRES). Его применение осуществляется через вызов процедуры $GMRES$. Ее прототип:

$$Vector\, GMRESIter\,(\,QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\ PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

11) BiConjugate Gradient (BiCGIter). Его применение осуществляется через вызов процедуры $GMRES$. Ее прототип:

$$Vector\ BiCGIter\,(\,QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\ PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

12) Quasi-Minimal Residual (QMR, without lock-ahead). Его применение осуществляется через вызов процедуры $QMRIter$. Ее прототип:

$$Vector\, QMRIter\,(\,QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\ PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

13) Conjugate Gradient Squared (CGS). Его применение осуществляется через вызов процедуры $CGSIter$. Ее прототип:

$$Vector\; CGSIter\,(\,QMatrix\; *A,\; Vector\; *x,\; Vector\; *b,\; int\; MaxIter,$$

$$PrecondProcType\; PrecondProc,\; double\; \omega);.$$

14) BiConjugate Gradient Stabilized (BiCGSTAB). Его применение осуществляется через вызов процедуры $BiCGSTAB$. Ее прототип:

$$Vector\; BiCGSTABIter\,(\,QMatrix\; *A,\; Vector\; *x,\; Vector\; *b,\; int\; MaxIter,$$

$$PrecondProcType\; PrecondProc,\; double\; \omega);.$$

Пакет Laspark в интернете в открытом доступе находится по адресу

$$http://ftp.wh2.tu-dresden.de/pub/FreeBSD/ports/i386/packages/math/.$$

26 Таблица номеров разностных схем

Фамилия	номер схемы
Балахничев	9
Бушуева	8
Васильева	7
Дермелев	5
Заславский	4
Игнатьев	3
Кашин	13
Кокшайский	22
Кузнецов	6
Лаптиев	20
Литвинова	23
Львова	14
Орешкин	12
Орловский	21
Пехтерев	15
Разумова	11
Сдобнов	10
Чумаков	16
Ясинский	17

Список литературы

[1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

[2] Ф.Б.Имранов, Г.М.Кобельков, А.Г.Соколов Разностная схема для баротропного газа с энергетическим неравенством и ее применение к задаче мелкой воды. /в печати/

[3] Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа. //Вычислительные методы и программирование. т.14, 2013 г. N 2. с. 516-523.

[4] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2ed., 2003.

[5] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики жидкостей и газов. Новосибирск: Наука, 1983, 320 с.

[6] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. - 624 с.

[7] Попов А.В. Gnuplot и его приложения. М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2015. graphics/gnuplot/docs/gdoc.pdf

[8] Chizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method. //Russ.J.Numer.Anal.Math.Modelling. 2003. V.18, N.5, P. 363-376.

[9] Ведерникова Э.Ю., Корнев А.А. К задаче о нагреве стержня. // Вест. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика и механика, 2014, N. 6, с. 10-15.

[10] Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерицкий А.В. О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации. // ЖВМиМФ, 2009, Т.49, N.12, с. 2167-2181.

[11] Корнев А.А. Численное моделирование процесса асимптотической стабилизации по краевым условиям квазидвумерного течения четырехвихревой структуры. // Математическое моделирование, 2016 (в печати).