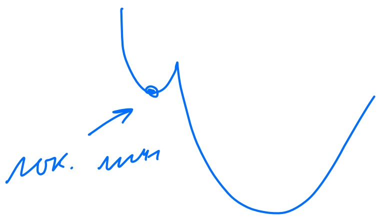
Минимум

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

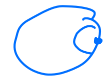
Локальный минимум

Точка x^* называется локальным минимумом функции f на $\mathbb{R}^d$ (локальным решением задачи минимизации f на $\mathbb{R}^d$), если существует $r > 0$ такое, что для любого $y \in B_2^d(r, x^*) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y - x^*\|_2 \leq r\}$ следует, что $f(x^*) \leq f(y)$.

$\forall y \in B_2^d \cap X$



$\min_{x \in X} f(x)$



$\forall y \in X$

Глобальный минимум

Точка x^* называется глобальным минимумом функции f на $\mathbb{R}^d$ (глобальным решением задачи минимизации f на $\mathbb{R}^d$), если для любого $y \in \mathbb{R}^d$ следует, что $f(x^*) \leq f(y)$.

Теорема об условии оптимальности локального минимума

Пусть x^* – локальный минимумом функции f на $\mathbb{R}^d$, тогда если f дифференцируема, то $\nabla f(x^*) = 0$.

Обратное неверно

Док-во: пусть $\nabla f(x^*) \neq 0$

$\triangleleft$ разложение в ряд в окр x^*

$$f(x) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*); x - x^* \rangle + o(\|x - x^*\|_2)$$

$$\lim_{x \to x^*} \frac{o(\|x - x^*\|_2)}{\|x - x^*\|_2} = 0$$

$\triangleleft$ $\hat{x} = x^* - \lambda \nabla f(x^*)$ $\quad \lambda > 0$

можно подобр λ: $\hat{x} \in$ окр., где x^* явл. лок. мин

$f(\hat{x}) \geq f(x^*)$ из опред. лок мин.

с другой стороны $\hat{x}$ в разложение

$$f(\hat{x}) = f(x^*) + \underbrace{\langle \nabla f(x^*), -\lambda \nabla f(x^*)\rangle}_{-\lambda \|\nabla f(x^*)\|_2^2} + o(\lambda \|\nabla f(x^*)\|_2)$$

подберем λ: $\quad o(\lambda \|\nabla f(x^*)\|_2) \le \frac{\lambda}{2} \|\nabla f(x^*)\|_2^2$

$$f(\hat{x}) = f(x^*) - \lambda \|\nabla f(x^*)\|_2^2 + o(\lambda \|\nabla f(x^*)\|_2)$$

$$\le f(x^*) - \underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{>0} \underbrace{\|\nabla f(x^*)\|_2^2}_{>0 \text{ в силу пред}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(\hat{x}) < f(x^*)$$ противоречие! $\blacksquare$

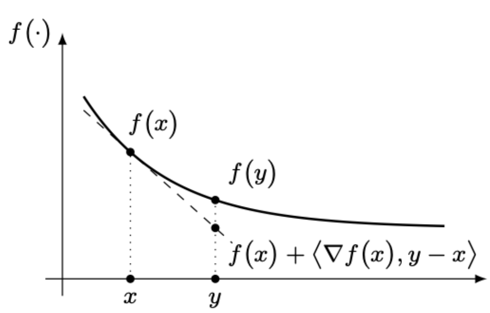
Выпуклость

Определение выпуклой функции

Пусть дана непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^d$ функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что она является выпуклой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$f(y) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle.$$

Физический смысл:

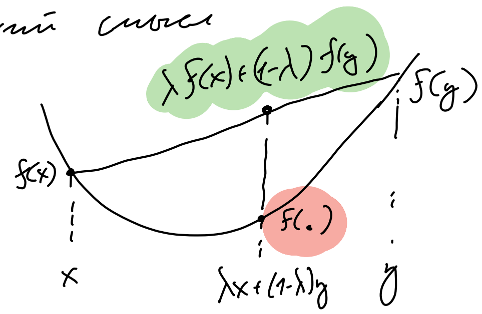


Определение выпуклой функции

Будем говорить, что она является выпуклой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ и для любого $\lambda \in [0; 1]$ выполнено

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

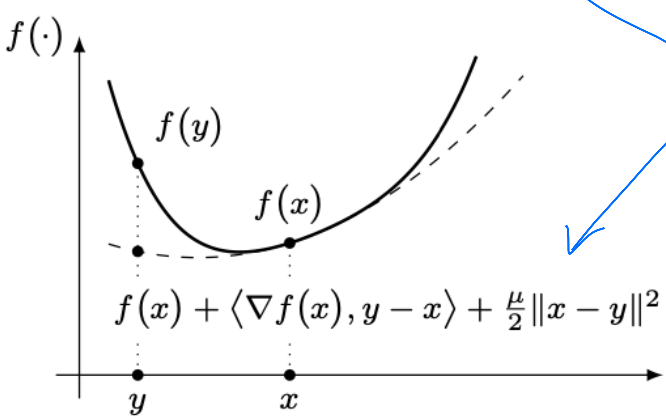
Физический смысл



Определение μ-сильно выпуклой функции

Пусть дана непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^d$ функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что она является μ-сильно выпуклой ($\mu > 0$), если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$f(y) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2}\|x - y\|_2^2.$$



Более сильное предпол. функции подпир. параболой

Определение μ-сильно выпуклой функции

Будем говорить, что она является μ-сильно выпуклой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ и для любого $\lambda \in [0; 1]$ выполнено

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \lambda(1-\lambda)\frac{\mu}{2}\|x - y\|_2^2$$

Теорема об условии оптимальности безусловной выпуклой задачи

Пусть дана выпуклая непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^d$ функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Если для некоторой точки $x^* \in \mathbb{R}^d$ верно, что $\nabla f(x^*) = 0$, то x^* – глобальный минимум f на всем $\mathbb{R}^d$.

Док-во:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x); y - x \rangle$$

подст. $x \quad x^* \quad x^* \quad x \quad x^*$

$$f(x) \geq f(x^*) + \underbrace{\langle \nabla f(x^*); x - x^* \rangle}_{0}$$

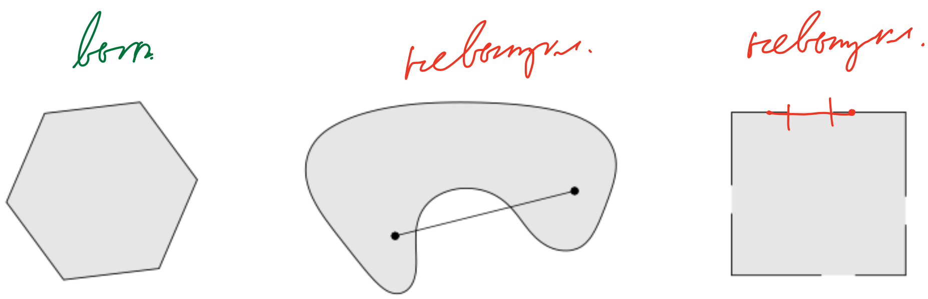
$f(x) \geq f(x^*)$ — по опред глоб. минимум

От $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \Rightarrow \min\limits_{x \in \mathcal{X}} f(x)$

Определение выпуклого множества

Множество $\mathcal{X}$ называется выпуклым, если для любых $x, y \in \mathcal{X}$ и для любого $\lambda \in [0; 1]$ следует, что

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{X}.$$



Теорема о минимумах выпуклых функций

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x),$$

где f – выпуклая, $\mathcal{X}$ - выпуклое. Тогда всякий локальный минимум f на $\mathcal{X}$ является и глобальным.

Док-во: x^* – лок. минимум

$\triangleleft \quad x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda) x^* \qquad x \in \mathcal{X}$

$\in \mathcal{X} \qquad\qquad \lambda \in [0; 1]$

пусть λ подбирается так, что $x_\lambda \in$ окр лок. мин x^*

$$f(x^*) \le f(x_\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)x^*)$$

по опред. лок. минимума

$$\le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^*)$$

опред. выпуклости

$$\lambda f(x^*) \le \lambda f(x) \qquad \lambda > 0$$

$$f(x^*) \le f(x) \quad \text{для любого } x \in \mathcal{X}$$

- для $\mathbb{R}^d$ f выпуклой: $\nabla f(x^*) = 0 \iff x^*$ – глоб. минимум

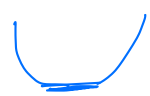
Теорема о минимумах выпуклых функций

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x),$$

где f – выпуклая, $\mathcal{X}$ - выпуклое. Тогда множество точек минимума $\mathcal{X}^*$ выпукло.

Док-во:



- пустое мн-во выпуклое
- один – выпукло
- пусть $x_1^*, x_2^* \in \mathcal{X}^*$ решения задачи

$$x_\lambda^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \qquad \lambda \in [0;1]$$

$\in \mathcal{X}$

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \le f(x_\lambda^*) \le \lambda f(x_1^*) + (1-\lambda) f(x_2^*)$$

опред. вып.

$$= \lambda \min_{\mathcal{X}} f(x) + (1-\lambda) \min_{\mathcal{X}} f(x)$$

$$= \min_{\mathcal{X}} f(x)$$

$$f(x_\lambda^*) = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Теорема о минимумах выпуклых функций

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x),$$

где f – *сильно* выпуклая, $\mathcal{X}$ - выпуклое. Тогда множество точек минимума $\mathcal{X}^*$ может состоять только из одного элемента.

обязательно состоит из 1 элемента

Док-во: от противного $x_1^* \neq x_2^* \in X^*$

$$\exists \quad x_\lambda^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \qquad \lambda \in [0;1]$$

$\in X$

$$\min_{x \in X} f(x) \le f(x_\lambda^*) \le \lambda \underbrace{f(x_1^*)}_{\min f} + (1-\lambda) \underbrace{f(x_2^*)}_{\min f}$$

опред. сил. вып.

$$- \lambda(1-\lambda) \frac{\mu}{2} \|x_1^* - x_2^*\|_2^2$$

$$\le \min_{x \in X} f(x) - \underbrace{\frac{\lambda(1-\lambda)\mu}{2}}_{>0} \underbrace{\|x_1^* - x_2^*\|_2^2}_{>0}$$

$\lambda \in (0;1)$

$$\min f(x) \le \min f(x) - \underbrace{\delta}_{>0}$$ противоречие ∎

Теорема о критерии сильной выпуклости

Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^d$. Тогда функция f является μ-сильно выпуклой тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu I.$$

знак полож. опред.

ед. матрица

$$(\nabla^2 f(x) - \mu I) \succeq 0$$

Гладкость

Определение L-гладкой функции

Пусть дана непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^d$ функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что данная функция имеет L-Липшицев градиент (говорить, что она является L-гладкой), если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2.$$

Липшицевость градиента

Теорема (свойство L - гладкой функции)

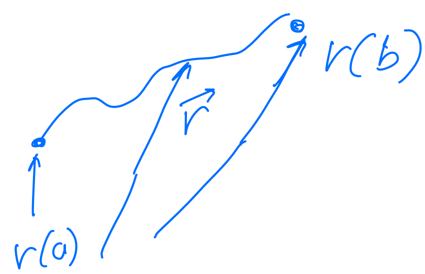
Пусть дана L - гладкая функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

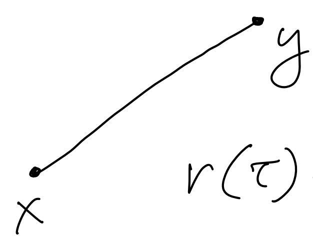
$$|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle| \leq \frac{L}{2}\|x - y\|_2^2.$$

Док-во:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \nabla f(x + \tau(y-x)); y - x\rangle d\tau$$

$$f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = \int_a^b \langle \nabla f(r(t)) \, d\vec{r}(t)\rangle$$





$$r(\tau) = x + \tau(y - x)$$

$$\tau \in [0;1]$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla f(x + \tau(y-x)) - \nabla f(x); y - x\rangle d\tau$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 \langle \nabla f(x); y - x\rangle \, d\tau}_{\langle \nabla f(x); y - x\rangle}$$

$$|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x); y - x \rangle|$$

$$= \left| \int_0^1 \langle \nabla f(x + \tau(y-x)) - \nabla f(x); y - x \rangle d\tau \right|$$

$|\sum| \leq \sum| |$

$$\leq \int_0^1 |\langle \nabla f(x + \tau(y-x)) - \nabla f(x); y - x \rangle| \, d\tau$$

КБШ: $|\langle a; b \rangle| \leq \|a\|_2 \cdot \|b\|_2$

$$\leq \int_0^1 \|\nabla f(x + \tau(y-x)) - \nabla f(x)\|_2 \cdot \|y - x\|_2 \, d\tau$$

L – липшицевый градиент

$$\leq \int_0^1 L \, \|\tau(y-x)\|_2 \cdot \|y - x\|_2 \, d\tau$$

$$= \int_0^1 L \|y - x\|_2^2 \cdot \tau \, d\tau$$

$\int_0^1 \tau \, d\tau = \frac{1}{2}$

$$= \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2 \qquad \blacksquare$$

Теорема (свойство L - гладкой функции)

Пусть дана L - гладкая функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle| \leq \frac{L}{2} \|x - y\|_2^2.$$

Определение μ-сильно выпуклой функции

Пусть дана непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^d$ функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что она является μ-сильно выпуклой ($\mu > 0$), если для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2.$$

L-гладкость $\Downarrow$ сильн. вып.

$$\frac{L}{2}\|x-y\|_2^2 \geq f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x); y-x \rangle \geq \frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2$$

$L \geq \mu$ $\quad$ $\mu = 0$ вып.

Физический смысл: подпорка сверху параболой