$$
\begin{cases}
u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \\
u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\
u_{xx} = v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}, \\
u_{yy} = v_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}, \\
u_{xy} = v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy} \\
\alpha = \xi + \eta, \\
\beta = \xi - \eta,
\end{cases} \tag{1}
$$

1 Задача 1.11

Классифицировать уравнение

$$
x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0. \tag{2}
$$

Характеристическое уравнение:

$$
x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0 \tag{3}
$$

откуда уравнение является уравнением гиперболического типа

$$
\begin{cases}
xdy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = Cx, \forall C \\
xdy = -ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x}, x \neq 0, y \neq 0, C \neq 0,
\end{cases}
$$

т. е.

$$
\begin{cases}
\xi = \frac{y}{x}, \\
\eta = xy, \\
\xi_x = -\frac{y}{x^2}, \\
\xi_y = \frac{1}{x}, \\
\xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \\
\eta_x = y, \\
\eta_y = x,
\end{cases}
$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), получаем первую каноническую форму:

$$
x^2\left(v_{\xi\xi}\frac{y^2}{x^4} + 2v_{\xi\eta}\left(-\frac{y^3}{x}\right) + v_{\eta\eta}y^2\right) - y^2\left(v_{\xi\xi}\frac{1}{x^2} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}x^2\right) = -2v_{\xi\eta}(x^2y + y^2) = 0 \tag{4}
$$

2 Задача 1.14

Классифицировать уравнение

$$
y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0. \tag{5}
$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$
y^2(dy)^2 - 2xydxdy + x^2(dx)^2 = (ydy - xdx)^2 = 0. \tag{6}
$$

$D = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа. Первый интеграл:

$$
ydy - xdx = 0 \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow y^2 - x^2 = C.
$$

Выберем ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = y^2 - x^2, \\ \xi_x = -2x, \\ \xi_y = 2y, \\ \xi_{xx} = -2, \\ \xi_{yy} = 2, \\ \eta = x, \\ \eta_x = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя эти выражения в (1) и (5), получаем первую каноническую форму:

$$y^2(v_{\xi\xi} \cdot 4x^2 + 2v_{\xi\eta}(-2x) + v_{\eta\eta} - 2v_\xi) + 2xy(v_{\xi\xi}(-4xy) + v_{\xi\eta}2y) + x^2(v_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + v_\xi \cdot 2) = \\ = -8v_{\xi\eta}xy^2 + 2v_\xi(x^2 - y^2) = 0 \tag{8}$$

3 Задача 1.8

Классифицировать уравнение

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0 \tag{9}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$y(dy)^2 + x(dx)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{x}{y}. \tag{10}$$

Возможны три случая.

При $\frac{x}{y} < 0$ уравнение является уравнением гиперболического типа:

$$\begin{cases} \sqrt{y}dy = -\sqrt{-x}d(-x) \Rightarrow \sqrt{y^3} + \sqrt{-x^3} = C, \\ \sqrt{y}dy = \sqrt{-x}d(-x) \Rightarrow \sqrt{y^3} - \sqrt{-x^3} = C. \end{cases}$$

(в случае $x > 0, y < 0$ x и y меняются местами).

Откуда

$$\begin{cases} \xi = y^{\frac{3}{2}} + (-x)^{\frac{3}{2}}, \\ \eta = y^{\frac{3}{2}} - (-x)^{\frac{3}{2}}, \\ \alpha = y^{\frac{3}{2}}, \\ \beta = (-x)^{\frac{3}{2}}, \\ \alpha_y = \frac{3}{2}\sqrt{y}, \\ \alpha_{yy} = \frac{3}{4\sqrt{y}}, \\ \beta_x = \frac{3}{2}\sqrt{-x}, \\ \beta_{xx} = \frac{3}{4\sqrt{-x}}. \end{cases} \tag{11}$$

Подставляя это в (1) и в (9), получаем вторую каноническую форму:

$$y\left(v_{\beta\beta}\left(-\frac{9}{4x}\right) + v_\beta\frac{3}{4\sqrt{-x}}\right) + x\left(v_{\alpha\alpha}\frac{9}{4y} + v_\alpha\frac{3}{\sqrt{y}}\right) = \frac{9x}{4y}v_{\alpha\alpha} + \frac{3x}{4\sqrt{y}}v_\alpha + \frac{3y}{4\sqrt{-x}}v_\beta - \frac{9y}{4x}v_{\beta\beta} = 0 \tag{12}$$

При $\frac{x}{y} > 0$ уравнение является уравнением эллиптического типа:

$$\sqrt{y}dy = \pm i\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{y^3} \pm i\sqrt{x^3} = C.$$

(в случае $x<0, y<0$ нужно заменить x и y на $-x$ и $-y$ соответственно).

Откуда

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{y^3}, \\ \eta = \sqrt{x^3}, \\ \xi_y = \frac{3}{2}\sqrt{y}, \\ \xi_{yy} = \frac{3}{4\sqrt{y}}, \\ \eta_x = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \\ \eta_{xx} = \frac{3}{4\sqrt{x}}. \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя в (1) и (9), получаем первую каноническую форму:

$$\frac{9x}{4y}v_{\xi\xi} + \frac{3x}{4y}v_{\xi} + \frac{3y}{4\sqrt{x}}v_{\eta} - \frac{9y}{4x}v_{\eta\eta} = 0 \tag{14}$$

Наконец на прямых $x = 0, y \neq 0$ и $x \neq 0, y = 0$ уравнение является уравнением параболического типа. При $x = 0, y \neq 0$:

$$y(dy)^2 = 0 \Rightarrow y = C. \tag{15}$$

Выберем ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = y, \\ \xi_x = 1, \\ \eta_y = 1. \end{cases} \tag{16}$$

Подставляя в (1) и (9), получим первую каноническую форму:

$$yv_{\xi\xi} + xv_{\eta\eta} = 0 \tag{17}$$

4 Задача 1.19

Классифицировать уравнение:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_x + u_y + u = 0 \tag{18}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - 2dxdy = dy(dy - 2dx) = 0 \tag{19}$$

Получаем, что уравнение является уравнением гиперболического типа и находим ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = y - 2x, \\ \alpha = y - x, \\ \beta = x, \\ \alpha_x = -1, \\ \alpha_y = 1, \\ \beta_x = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Подставляя в (1) и (18), получаем вторую каноническую форму:

$$(v_{\alpha\alpha} - 2v_{\alpha\beta} + v_{\beta\beta}) + 2(v_{\alpha\alpha}(-1) + v_{\alpha\beta}) + (v_{\alpha}(-1) + v_{\beta}) + v_{\alpha} + v = -v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_{\beta} + v = 0 \tag{21}$$

5 Задача 1.23

Классифицировать уравнение:

$$3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0 \tag{22}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$3(dy)^2 - dxdy = dy(3dy - dx) = 0. \tag{23}$$

Из него видим, что уравнение гиперболического типа и находим ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = 3y - x, \\ \xi_y = 1, \\ \eta_x = -1, \\ \eta_y = 3. \end{cases} \tag{24}$$

Подставляя это в (1) и в (22), получаем первую каноническую форму:

$$3v_{\eta\eta} + (-v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta}) + 3(-v_\eta) + (v_\xi + 3v_\eta) - v + y = -v_{\xi\eta} + v_\xi + 2v_{\eta\eta} - v + y = 0 \tag{25}$$