1 Задача 1194

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

и проходящую через линию:

$$x = 0,\, z = y^2$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}\,(1 = 2 = 3)$$

Найдём первые интегралы:

$$1 = 2 \Rightarrow xydx = y^2dy \Rightarrow d(x^2) = d(y^2) \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1$$

$$2 = 3 \Rightarrow \frac{dy}{y} = dz \Rightarrow d(\ln y) = dz \Rightarrow z - \ln y = C_2$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$z - \ln y = F(x^2 - y^2)$$

где $F(x, y)$ - произвольная дифференцируемая функция от x и y.

Подставим в это решение уравнение линии:

$$y^2 - \ln y = F(-y^2) \Rightarrow F(x) = -x + \ln\sqrt{-x}$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$z = \ln y - x^2 + y^2 - \ln\sqrt{x^2 - y^2}$$

2 Задача 1198

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$$

и проходящую через линию:

$$x = 1,\, yz + 1 = 0$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z(x-3y)} \, (1 = 2 = 3)$$

Найдём первые интегралы:

$$1 = 2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow xy = C_1$$

$$1 \cdot z + 2 \cdot 3z = 3 \Rightarrow dx + 3dy = \frac{dz}{z} \Rightarrow x + 3y - \ln|z| = C_2$$

Подставим в эти выражения уравнение кривой, чтобы найти связь между C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y = C_1, \\ 1 + 3y + \ln|y| = C_2 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$C_2 = 1 + 3C_1 + \ln|C_1| \Rightarrow x + 3y - \ln z = 1 + 3xy + \ln|xy|$$

Или, выражая z через x и y:

$$z = \exp\left(x + 3y - 1 - 3xy - \ln|xy|\right)$$

3 Задача 1203

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению:

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial x}{\partial y} = x - y$$

и проходящую через линию:

$$z = y = -x$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \, (1 = 2 = 3)$$

Найдём первые интегралы:

$$1 + 2 = -3 \Rightarrow dx + dy = -dz \Rightarrow x + y + z = C_1$$

$$1 \cdot 2x + 2 \cdot 2y = -3 \cdot 2z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(x + y + z)$$

Где $F(x)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Подставим в это соотношение уравнение кривой:

$$3x^2 = F(x)$$

Откуда итоговое решение имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y + z)^2$$

4 Задача 1204

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

и проходящую через линию:

$$x + y = 2z,\ xz = 1$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xz + y} = \frac{dz}{z}\ (1 = 2 = 3)$$

Найдём первые интегралы:

$$1 = 3 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{z}{x} = C_1$$

$$1 \cdot z + 3 \cdot x - 2 = 1 \Rightarrow \frac{xdz + zdx - dy}{xz - y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{xz - y}{x} = C_2$$

Подставим в найденные первые интегралы уравнение кривой и найдём соотношение между C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{x^2}, \\ C_2 = 1 - \frac{y}{x} = 1 - \frac{2z - x}{x} = 2 - 2\frac{z}{x} = 2 - 2C_1 \end{cases}$$

Откуда, подставляя значения первых интегралов, получаем:

$$\frac{xz - y}{x} = 2 - 2\frac{z}{x}$$

5 Задача 1206

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y$$

и проходящую через линию:

$$y = 2z,\ x + 2y = z$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}\,(1 = 2 = 3)$$

Найдём первые интегралы:

$$2 = 3 \Rightarrow ydy = zdz \Rightarrow z^2 - y^2 = C_1$$

$$1 = 2 + 3 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy + dz}{y + z} \Rightarrow \frac{y + z}{x} = C_2$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$F\left(z^2 - y^2, \frac{y + z}{x}\right) = 0$$

Где $F(x, y)$ - произвольная дифференцируемая функция двух аргументов. Подставим в неё уравнение кривой, предварительно преобразовав его:

$$\begin{cases} y = 2z, \\ x = z - 2y = -3z \end{cases}$$

$$F(-3z^2, -1) = 0$$

Таким образом, уравнение искомой поверхности имеет вид:

$$\begin{cases} F\left(z^2 - y^2, \frac{y+z}{x}\right) = 0, \\ F(-3x^2, -1) = 0 \end{cases}$$

6 Задача 1174

Найти общее решение уравнения:

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{yz} \, (1 = 2 = 3)$$

Найдём первые интегралы:

$$1 = 2 \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow y^2 - x^2 = C_1$$

$$1 = 3 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{z}{x} = C_2$$

Отсюда, общее решение имеет вид:

$$\frac{z}{x} = F(y^2 - x^2)$$

Где $F(x)$ - произвольная дифференцируемая функция.

7 Задача 1186

Найти общее решение уравнения:

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u} \, (1 = 2 = 3 = 4)$$

Найдём первые интегралы:

$$1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow \frac{dx + dy + dz}{2(x+y+z)} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u^2}{x+y+z} = C_1$$

$$1 - 2 = 4 \Rightarrow \frac{dx - dy}{y - x} = \frac{du}{u} \Rightarrow u(x-y) = C_2$$

$$2 - 3 = 4 \Rightarrow \frac{dy - dz}{z - y} = \frac{du}{u} \Rightarrow u(y-z) = C_3$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$F\left(\frac{u^2}{x+y+z}, u(x-y), u(y-z)\right) = 0$$

Где $F(x, y, z)$ - произвольная дифференцируемая функция.

8 Задача 1209

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению:

$$xy^3\frac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y}=y^3z$$

и проходящую через кривую:

$$x=-z^3,\, y=z^2$$

УЧП соответствует системе:

$$\frac{dx}{xy^3}=\frac{dy}{x^2z^2}=\frac{dz}{y^3z}\,(1=2=3)$$

Найдём первые интегралы:

$$1=3\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\frac{z}{x}=C_1$$

$$1\cdot z+3\cdot x=2\Rightarrow\frac{zdx+xdz}{xy^2z}=\frac{dy}{x^2z^2}\Rightarrow xzd(xz)=y^2dy\Rightarrow\frac{x^2z^2}{2}-\frac{y^3}{3}=C_2$$

Подставим сюда уравнение кривой, чтобы найти соотношение между C_1 и C_2:

$$\begin{cases}C_1=-\frac{1}{z^2},\\ C_2=\frac{z^8}{2}-\frac{z^6}{3}\end{cases}$$

Получаем, что $C_2=\frac{1}{2C_1^4}+\frac{1}{3C_1^3}$, откуда уравнение искомой поверхности имеет вид:

$$\frac{x^2z^2}{2}-\frac{y^3}{3}=\frac{x^4}{2z^4}+\frac{x^3}{3z^3}$$

75, 81, 83, 88, 72, 74, 76, 78, 155, 156

9 Задача 75

Найти экстремали функционала $J[y]=\int_0^\pi(4y\cos x+y'^2-y^2)dx, y(0)=y(\pi)=0$.

Экстремалями являются решения уравнения:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

Где $F(x, y, y') = 4y\cos x + y'^2 - y^2$.

$$F_y = 4\cos x - 2y$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}2y' = 2y''$$

Получили уравнение:

$$4\cos x - 2y - 2y'' = 0$$

Или:

$$y'' + y = 4\cos x$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{oo} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_{np} = x(a\sin x + b\cos x) \Rightarrow y'_{np} = x(a\cos x - b\sin x) + (a\sin x + b\cos x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''_{np} = x(-a\sin x - b\cos x) + (a(\cos x + \sin x) + b(\cos x - \sin x)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''_{np} + y_{np} = (a+b)\cos x + (a-b)\sin x = \cos x \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Таким образом, общее решение уравнения Эйлера имеет вид:

$$y_{no} = \left(C_1 + \frac{1}{2}x\right)\sin x + \left(C_2 + \frac{1}{2}x\right)\cos x$$

Для нахождения экстремалей подставим в решение граничные условия:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_2 + \frac{\pi}{2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_2 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Таким образом, экстремалей нет.

10 Задача 81

Найти экстремали функционала:

$$J[y(x)] = \int_a^b [2xy + (x^2 + e^y)y']dx, y(a) = A, y(b) = B$$

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = 2x + y'e^y$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}(x^2 + e^y) = 2x + y'e^y$$

Получили уравнение:

$$0 = 0$$

Таким образом, любая кривая, удовлетворяющая граничным условиям будет экстремалью.

11 Задача 83

Найти экстремали функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2)dx; y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ВЫпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = 2y$$

$$F_{y'} = \frac{d}{dx}(2y') = 2y''$$

Получаем уравнение:

$$2y - 2y'' = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Чтобы найти экстремали, подставим граничные условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + C_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1e^{\sqrt{2}} + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1}{2(e^{\sqrt{2}} - 2)}, \\ C_2 = 1 - C_2 \end{cases}$$

Таким образом, единственной экстремалью является функция $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, где C_1 и C_2 определяются из системы выше.

12 Задача 88

Найти экстремали функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^1 (2e^y - y^2)dx; y(0) = 1, y(1) = e$$

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = 2e^y - 2y$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Получили уравнение:

$$2e^y - 2y = 0$$

Или:

$$y = e^y$$

При подстановке $x = 0$ получаем противоречие:

$$1 = e$$

Т. е. экстремалей нет.

13 Задача 72

Найти экстремали функционала:

$$J[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx; y(1) = 1, y(2) = 0$$

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = 2y' + 2y$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 2y'' + 2y'$$

Получили уравнение:

$$2y - 2y'' = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} C_1 e + \frac{C_2}{e} = 1, \\ C_1 e^2 + \frac{C_2}{e^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{e+e^3}, \\ C_2 = \frac{e^3}{e^2+1} \end{cases}$$

Откуда экстремалью является функция:

$$y = \frac{e^x + e^{4-x}}{e^3 + e}$$

14 Задача 74

Найти экстремали функционала:

$$J[y] = \int_0^1 yy'^2 dx; y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}$$

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_y = y'^2$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx}(2yy') = 2y'^2 + 2yy''$$

Получили уравнение:

$$2yy'' - y'^2 = 0 \quad (1)$$

Положим $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'p$ и уравнение преобразуется к виду:

$$2yp'p - p'^2 = 0$$

Или:

$$p'(p' - 2py) = 0$$

Если $p' = 0$, то $p = C \Rightarrow y' = C \Rightarrow y = C_1 x + C_2$. Подставив эту функцию в уравнение (1), найдём, что $y = C$. В противном случае уравнение приводится к виду:

$$\frac{p'}{p} = 2y \Rightarrow p = Cy^2, C \neq 0$$

Откуда $y' = Cy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = C, C \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{C_1 x + C_2}, C_1 \neq 0.$

Объединяя это решение с предыдущим, получим:

$$y = \frac{1}{C_1 x + C_2}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_2} = 1, \\ \dfrac{1}{C_1 + C_2} = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} - 1, \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Получили единственную экстремаль:

$$y = \frac{\sqrt[3]{4}}{(1 - \sqrt[3]{4})x + \sqrt[3]{4}}$$

15 Задача 76

Найти экстремали функционала $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x} dx, y(0) = 0, y(1) = e^{-1}$.

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_y = (2y - 1)e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx}(2ye^{2x}) = e^{2x}(2y' + 4y)$$

Получили уравнение:

$$e^{2x}(2y' - 2y + 1) = 0$$

Или:

$$y' - y = \frac{1}{2}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = Ce^x - \frac{1}{2}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} C1 - \frac{1}{2} = 0, \\ Ce - \frac{1}{2} = e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{2}, \\ C = \frac{e^{-1} + 2^{-1}}{e} \end{cases}$$

Система несовместна, значит экстремалей нет.

16 Задача 78

Найти экстремали функционала $J[y] = \int_{-1}^{0}(y'^2 - 2xy)dx, y(-1) = 0, y(0) = 2$.

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = 2x$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}(2y') = 2y''$$

Получили уравнение:

$$y'' = x \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} -\frac{1}{6} - C_1 + C_2 = 0, \\ C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{11}{6}, \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Таким образом, единственной экстремалью является кривая

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{11}{6}x + 2$$

17 Задача 155

Исследовать функционал на экстремум: $J[y] = \int_2^3 \frac{x^3}{y'^2}dx; y(2) = 4, y(3) = 9$.

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = 0$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}\left(-2\frac{x^3}{y'^3}\right) = -2\frac{3x^2y'^3 - 3y'^2y''x^3}{y'^6} = 6\frac{x^3y'' - x^2y'}{y'^4}$$

Получили уравнение:

$$\begin{cases} x^2(xy'' - y') = 0, \\ y' \neq 0 \end{cases}$$

$x = 0$ и $y = 0$ - не решения, поэтому уравнение приводится к виду:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0 \Leftrightarrow (\ln y')' = (\ln|x|)' \Leftrightarrow y' = Cx, C \neq 0 \Leftrightarrow y = Cx^2 + C_1, C \neq 0$$

Допустимые значения C и C_1 найдём, исходя из граничных условий:

$$\begin{cases} 4C + C_1 = 4, \\ 9C + C_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1, \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Т. е. экстремум может достигаться только на кривой $y = x^2$. Эта кривая может быть включена в поле экстремалей $y = Cx^2$.

Найдём $F_{y'y'}$

$$F_{y'y'} = 6\frac{x^3}{y'^4} = |_{y=y_0} = 4x^2 = 0 \text{ при } x = 0$$

Это означает, что слабого экстремума на этой кривой нет, а значит, и сильного.

18 Задача 156

Исследовать функционал на экстремум: $J[y] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)dx; y(1) = 0, y(2) = 1$.

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_y = -2y'^3$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}(4xy'^3 - 6yy'^2) = 4y'^3 + 12xy'^2y'' - 6y'^3 - 12yy'y''$$

Получили уравнение:

$$12yy'y'' - 12xy'^2y'' = 0$$

Или:

$$y'y''(y - xy') = 0$$

Если $y'' = 0$, то $y = C_1 x + C_2$, иначе уравнение принимает вид:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = Cx, C \neq 0$$

Таким образом, все экстремали имеют вид:

$$y = C_1 x + C_2$$

Проверим краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Таким образом, экстремум может достигаться на экстремали $y_0 = x - 1$. Она может быть включена в поле экстремалей $y = x + C$.

$$F_{y'y'} = 12xy'^2 - 12yy' = 12y'(xy' - y) = |_{y=y_0} 12x - 12(x-1) = 12 > 0$$

Таким образом, на y_0 достигается слабый минимум функционала. При произвольных y' знак $F_{y'y'}$ не сохраняется, значит, сильного минимума нет.

19 Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

1.

$$\begin{cases} y(x) \in M, \\ z(x) \in N \end{cases} \to J[y, z] \in \mathbb{R}$$

Для поиска экстремума записывается система:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \dfrac{d}{dz} F_{z'} = 0 \end{cases}$$

20 Задача 107

$$\begin{cases} J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 - 2yz)dx, \\ y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ z(0) = 0, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \end{cases}$$

Записываем систему уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} -2z - 2y'' = 0, \\ -2(y + z'') = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + y'' = 0, \\ y + z'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y'', \\ y^{IV} - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \end{cases}$$

Подставив граничные условия, найдём:

$$y = z = \sin x$$

1.

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

Здесь $F \in C^{n+1}(D)$ и заданы $2n$ граничных условий:

$$\begin{cases} y(a) = y_0, \\ y(b) = y_1, \\ y'(a) = y'_0, \\ y'(b) = y'_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)} = y_0^{n-1}, \\ y^{(n-1)} = y_1^{n-1} \end{cases}$$

Уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} = 0$$

Решения этого уравнения - экстремали.

21 Задача 1

$$\begin{cases} J[y] = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)dx, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Запишем уравнение Эйлера-Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$$

$$F_y = -2y$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 2y^{IV}$$

Получили уравнение:

$$-2y + 2y^{IV} = 0$$

Или

$$y^{IV} - y = 0$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^x + C_2e^x + C_3\sin x + C_4\cos x$$

Подставим краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_4 = 1, \\ C_1e^{\frac{\pi}{2}} + C_2e^{\frac{\pi}{2}} + C_3 = 0, \\ C_1 - C_2 + C_3 = 0, \\ C_1e^{\frac{\pi}{2}} - C_2e^{\frac{\pi}{2}} - C_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_2 = C_3 = 0, \\ C_4 = 1 \end{cases}$$

Откуда единственной экстремалью является кривая $y = \cos x$

22 Условие Якоби

$$\begin{cases} J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \\ y(a) = A, \\ y(b) = B \end{cases}$$

Рассмотрим *уравнение Якоби*:

$$(F_y y - \frac{d}{dx} F_y y')u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'} u')|_{y=y_0} = 0$$

Где y_0 - проверяемая экстремаль.

Пусть $u(x)$ решение уравнения Якоби, удовлетворяющее условиям:

1. $u(a) = 0$
2. u(x) не обращается в нуль на $(a; b]$

Если такое решение существует, то экстремаль можно включить в поле экстремалей с центром в (a, A).

23 Задача 156

$$J[y] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)dx; y(1) = 0, y(2) = 1$$

Экстремаль уже найдена ранее: $y = x-1$. Проверим её включение в поле экстремалей с помощью условия Якоби. Выпишем уравнение Якоби:

$$(0 + \frac{d}{dx}(6y'^2))u - \frac{d}{dx}((12xy'^2 - 12yy')u') = 0$$

$$\frac{d}{dx}(y'^2)u - \frac{d}{dx}((2xy'^2 - 2yy')u') = 0$$

Подставим экстремаль:

$$-\frac{d}{dx}((2x - 2(x-1))u') = 0 \Rightarrow (x - x + 1)u' = C \Rightarrow u = Cx + C_1$$

Вспоминая, что $u(1) = 0$, получаем $u = C(x-1)$.

24 Задача 76

$$\begin{cases} J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}dx, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = \frac{1}{r} \end{cases}$$

Выпишем уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = (-2y-1)e^2x - \frac{d}{dx}(2y'e^{2x}) = (-2y-1)e^{2x} - 2y''e^{2x} - 2y' \cdot 2$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - \frac{1}{2}$$

Поле экстремалей не выделяется, нужно воспользоваться условием Якоби.