Собственные значения и собственные функции ЗШЛ с разными краевыми условиями:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
type & \lambda_n & X_n \\
I-I & \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 & \sin\frac{\pi n}{l}x \\
I-II & \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 & \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} \\
II-I & \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 & \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} \\
II-II & \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 & \cos\frac{\pi n}{l}x.
\end{array}$$

1 Задача 3.7

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{l}x, 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{1}$$

Найти $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$.

1.1 Решение

Собственные значения и собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \\ X_n = \sin\frac{\pi n}{l}x. \end{cases} \tag{2}$$

Общее решение ищем в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Подставим в начальное условие:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \sin\frac{\pi}{l}x,$$

откуда $C_1 = 1, C_n = 0, n \ne 1$ и окончательно:

$$u(x,t) = \exp\left\{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\sin\frac{\pi}{l}x \tag{3}$$

Тогда $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

2 Задача 3.9

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{5x}{2}, 0 \le x \le \pi. \end{cases} \tag{4}$$

Найти $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$. Нарисовать график $u(\pi,t)$.

2.1 Решение

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2, \\ X_n = \sin\frac{2n+1}{2}x. \end{cases}$$

Общее решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin\frac{2n+1}{2}x.$$

Подставив в начальное условие, получим:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{2n+1}{2}x = \sin\frac{5x}{2}.$$

Откуда $C_2 = 1, C_n = 0, n \neq 2$. Итого получаем:

$$u(x,t) = \exp\left\{-\left(\frac{5a}{2}\right)^2 t\right\} \sin\frac{5x}{2}. \tag{5}$$

Откуда $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0, u(\pi,t) = \exp\left\{-\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 t\right\} \sin\frac{5\pi}{2}$:

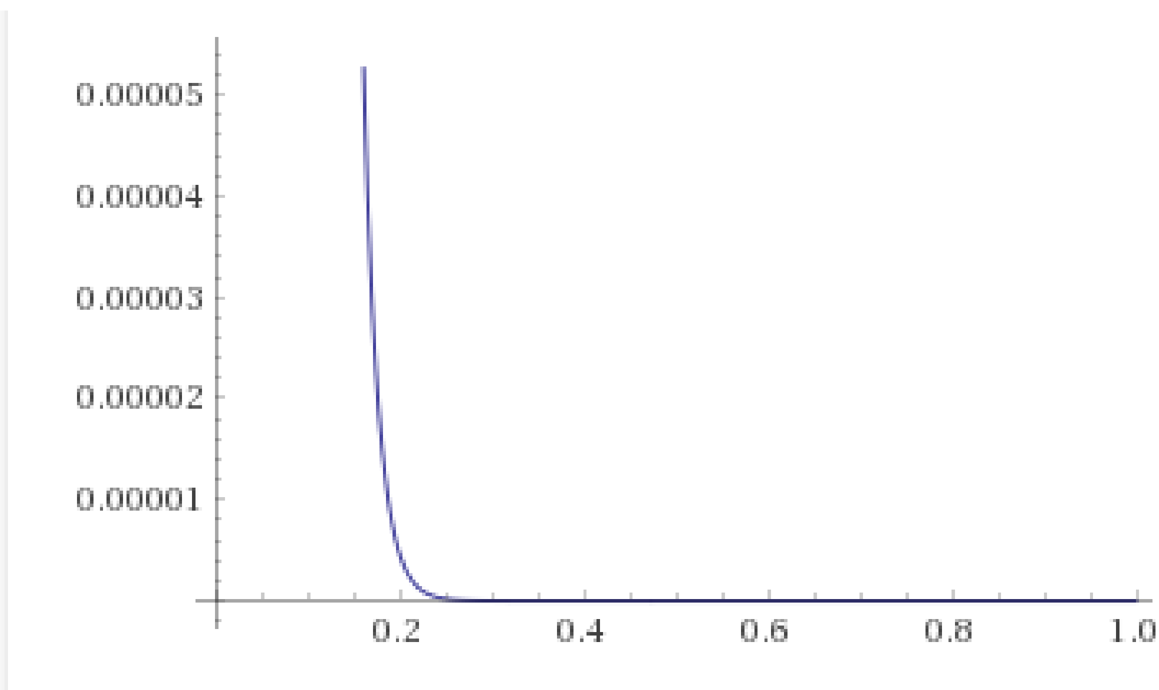

Рис. 1: график функции $u(\pi,t)$

3 Задача 3.10

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = x, 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{6}$$

Найти $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$.

3.1 Решение

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \lambda_n = (\pi n)^2, \\ X_n = \cos \pi n x. \end{cases}$$

Тогда общее решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \cos \pi n x$$

Подставляя в начальное условие, получим:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \pi n x = x$$

Найдём коэффициенты C_n:

$$C_0 = 2\int_0^1 x dx = 1,$$

$$C_n = 2\int_0^1 x \cos \pi n x dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x d(\sin \pi n x) = \frac{2}{\pi n}(x \sin \pi n x|_0^1 - \int_0^1 \sin \pi n x dx) =$$

$$= \frac{2}{(\pi n)^2}\cos \pi n x|_0^1 = \frac{2}{(\pi n)^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2, n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Итого получаем

$$u(x,t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)^2 e^{-(\pi(2n+1)a)^2 t} \cos \pi(2n+1)x. \tag{7}$$

Откуда $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 1$.

4 Задача 3.11

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u_1, u(1,t) = u_2, \\ u(x,0) = u_0 x, 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{8}$$

Найти $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$.

4.1 Решение

Найдём решение в виде $u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$, где $U(x,t) = a(t)x + b(t)$. Подставляя в граничные условия, получим:

$$\begin{cases} b(t) = u_1, \\ a(t) + b(t) = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = u_2 - u_1, \\ b(t) = u_1. \end{cases}$$

Откуда $u(x,t) = v(x,t) + (u_0 - u_1)x + u_1$. Подставляя это выражение в (7), получим:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = u_0 x - (u_2 - u_1)x - u_1 = (u_0 + u_1 - u_2)x - u_1. \end{cases} \tag{9}$$

Собственные значения и собственные функции для соответствующей задачи Штурма-Лиувилля будут:

$$\begin{cases} \lambda_n = (\pi n)^2, \\ X_n = \sin \pi n x. \end{cases}$$

Ищем решение задачи (8) в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin \pi n x.$$

Подставляя это представление в начальное условие, получим:

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \pi n x = (u_0 + u_1 - u_2)x - u_1.$$

Заметим, что подставив в (7) или (8) точку $(0,0)$, можно получить, что $u_1 = 0$. Исходя из этого, получим коэффициенты C_n:

$$C_n = \int_0^1 (u_0 - u_2) x \sin \pi n x dx = -\frac{u_0 - u_2}{\pi n} \int_0^1 x (d \cos \pi n x) = \frac{u_2 - u_0}{\pi n} (x \cos \pi n x|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi n x dx) =$$

$$= \frac{u_2 - u_0}{\pi n} \left((-1)^n - \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x|_0^1 \right) = (-1)^n \frac{u_2 - u_0}{\pi n}$$

Итого для $u(x,t)$ получаем:

$$u(x,t) = u_0 x + \frac{u_2 - u_0}{\pi n} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(\pi n a)^2 t} \sin \pi n x \tag{10}$$

В данном случае $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = u_0 x$.

5 Задача 3.12

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b(u - U), 0 < x < l, t > 0, b > 0, \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = U, t > 0, \\ u(x,0) = u_0, 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{11}$$

Найти $\lim_{t \to +\infty} u(x,t)$.

5.1 Решение

Для начала приведём задачу к однородной. Для этого будем искать решение задачи (10) в виде $u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$, где $U(x,t) = a(t)x + b(t)$. Подставляя это представление в граничные условия, найдём:

$$\begin{cases} a(t) = 0, \\ a(t)l + b(t) = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = 0, \\ b(t) = U. \end{cases}$$

Таким образом, $u(x,t) = v(x,t) + U$. Подставив это представление в (10), получим однородную задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - bv, 0 < x < l, t > 0, b > 0, \\ v_x(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = u_0 - U, 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{12}$$

Решение этой задачи будем искать в виде $v(x,t) = X(x)T(t)$. Подставив это представление в (11), получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) - bX(x)T(t) \Rightarrow X(x)(T'(t) + bT(t)) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'(t) + bT(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Получили задачу Штурма-Лиувилля для $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

и уравнение для $T(t)$:

$$T'(t) + (b + \lambda a^2)T(t) = 0. \tag{14}$$

Собственные значения и собственные функции задачи (12) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, \\ X_n = \cos\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}x. \end{cases}$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$T(t) = Ce^{-(b+\lambda_n a^2)t}$$

Поэтому общее решение задачи (11) ищем в виде ряда:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(b+\lambda_n a^2)t} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x. \tag{15}$$

Подставив (14) в начальное условие, получим:

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x = u_0 - U.$$

Найдём коэффициенты C_n:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l (u_0 - U)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x dx = \frac{2}{l}\frac{2l}{\pi(2n+1)}(u_0 - U)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\Big|_0^l = \frac{4(u_0 - U)}{\pi(2n+1)}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}$$

Откуда находим окончательный вид для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = U + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(u_0 - U)}{\pi(2n+1)} \sin\frac{\pi(2n+1)}{2} \exp\left\{-\left(b + \left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2\right)t\right\} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x. \tag{16}$$

Отсюда $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = U$.