1 Задача 10.2

Запишем силу Лоренца, действующую на заряды в пластине:

$$\vec{F}_L = q \times [\vec{v} \times \vec{B}]$$

В положении равновесия она равна силе поля, создаваемого зарядами:

$$\vec{F}_q = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -[\vec{v} \times \vec{B}]$$

По теореме Гаусса $Q = \oiint_S dS(\vec{D}, \vec{n}) = DS = \varepsilon_0 vB$

2 Задача 10.3

По закону Фарадея напряжение на концах каждой катушки одно и то же и равно $U = -\frac{d\Phi}{dt}$. С другой стороны, сила тока, протекающего через каждую катушку, одна и та же, и равна $I_i = \frac{I}{N}$. Отсюда получаем, что $L_i = \frac{\Phi_i}{I_i} = \frac{\Phi N}{I} = NL \Rightarrow L = \frac{L_i}{N}$.

3 Задача 10.4

Найдём магнитный поток через треугольник:

$$\Phi = \oiint_S (\vec{B}, \vec{n}) dS = \int_0^h \int_{-x}^x \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+d)} dy dx = \frac{\mu_0 I_1}{\pi} \int_0^h \frac{x}{x+d} dx = \frac{\mu_0 I_1}{\pi} \left(h - \ln\left(1 + \frac{d}{h}\right)\right)$$

Отсюда:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(h - \ln\left(1 + \frac{d}{h}\right)\right) \frac{dI}{dt} \Rightarrow I_i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2\mu_0 t}{\pi R \tau^2} I_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

Продифференцировав I_i по t, получим, что максимум достигается в точке $\frac{t}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и равен:

$$I_{i_{max}} = \frac{\mu_0}{\pi R} \sqrt{\frac{2}{e}} I_0 \left(h - \ln\left(1 + \frac{d}{h}\right)\right)$$

4 Задача 10.6

По закону Фарадея $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$. С другой стороны, по закону Ома для полной цепи $\varepsilon_i = IR = R\frac{dQ}{dt} \Rightarrow R\frac{dQ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Проинтегрировав по t от 0 до t_0, получим, что $RQ = -\Delta\Phi$.

Найдём изменение магнитного потока:

$$\Phi_0 = \oiint_S (\vec{B}, \vec{n}) dS = \int_c^{c+a} \int_0^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dy dx = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

$$\Phi_1 = \oiint_S (\vec{B}, \vec{n}) dS = -\int_{c-a}^{c} \int_0^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dy dx = \ldots = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \ln\left(\frac{c-a}{c}\right)$$

Тогда:

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\mu_0 b I}{\pi R} \ln\left(\frac{c+a}{c-a}\right)$$

5 Задача 10.7

Поскольку длина квадрата не изменилась, можно найти связь между стороной квадрата и радиусом круга:

$$4a = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\pi} a$$

Отсюда получаем новую площадь контура:

$$\pi r^2 = \pi \frac{4}{\pi^2} a^2 = \frac{4}{\pi} a^2 \Rightarrow \Delta\Phi = B = -B(1 - \frac{4}{\pi^2}) a^2 \Rightarrow Q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{B}{R}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) a^2$$

6 Задача 10.9

Магнитный поток через рамку равен:

$$\Phi = BScos(\omega t) = Babcos(\omega t)$$

Откуда по закону Фарадея получаем ЭДС:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega Babsin(\omega t)$$

7 Задача 10.10

Магнитный поток через рамку равен:

$$\Phi = BScos(\omega t) = abB_0 cos(\Omega t) cos(\omega t) = 1/2 abB_0 (cos((\Omega - \omega)t) + cos((\Omega + \omega)t)$$

Из закона Фарадея находим ЭДС:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = abB_0((\Omega - \omega) sin((\Omega - \omega)t + (\Omega + \omega) sin((\Omega + \omega)t)))$$

8 Задача 10.12

Поле соленоида однородно с индукцией: $B = \mu_0 n I$.

Из задачи 10.6 $\Delta\Phi = -RQ \Rightarrow BS = RQ \Rightarrow = \mu_0 n \frac{SI}{R}$.

9 Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

Материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

Закон Ома:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{ext}),$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

Закон Джоуля-Ленца:

$$\nu = \vec{j}\vec{E} = \lambda E^2 = \frac{j^2}{\lambda}$$

Теорема Умова-Пойнтинга:

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} - \frac{dQ}{dt} + \int_V \vec{j} dV$$

Где $W = \frac{1}{2}\int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV$, $\Pi = [\vec{E}\vec{H}]$. Потенциалы:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Квазистационарное приближение:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$$

10 Задача 11.1

Дано: $\lambda, l, R, B(t), k$.

$$B(t) = \begin{cases} kt, 0 \le r \le R_1, \\ 0, r > R_1, \end{cases}$$

$R_1 > r$

$$P-?$$

Из второго из уравнений Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Задача имеет цилиндрическую симметрию, поэтому задачу удобнее всего решать в цилиндрических координатах. Кроме того, нет явной зависимости поля от z и φ. Получаем уравнение:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = (0, 0, -k) \tag{1}$$

Воспользуемся представлением ротора в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\varphi & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial z}\right); -\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial E_r}{\partial z}; \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right)\right)$$

Откуда получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial E_r}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -kr, \end{cases}$$

Учитывая, что $\frac{E}{\partial \varphi} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0$, систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} = -kr \end{cases}$$

Откуда находим выражения для E_φ и E_z:

$$\begin{cases} E_\varphi = -\dfrac{kr}{2} + \dfrac{C_1}{r}, \\ E_z = C_2 \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку по условию задачи на оси цилиндра свободных зарядов нет, то поле при $r \to 0$ ограничено, поэтому $C_1 = 0$.

Для нахождения E_r и E_z воспользуемся четвёртым уравнением Максвелла. Так как свободных зарядов в цилиндре нет, то $\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho = 0$, или, в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$$

Откуда находим выражение для E_r:

$$E_r = \frac{C_3}{r} \tag{3}$$

Вспоминая, что на оси цилиндра нет свободных зарядов, окончательно получим, что $E_r = 0$. Таким образом, $\vec{E}$ имеет вид:

$$\vec{E} = (0; -\frac{kr}{2}; C_2) \tag{4}$$

Из закона Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, поэтому $\vec{j}$ имеет вид:

$$\vec{j} = (0, -\frac{kr}{2}\lambda; \lambda C_2) \tag{5}$$

Поскольку цилиндр ограничен, ток не может течь вдоль оси цилиндра, поскольку такой контур незамкнут, откуда $C_2 = 0$. Окончательно получаем, что $\vec{j} = -\frac{\lambda kr}{2}\vec{e}_\varphi$. Тогда объёмная плотность мощности равна:

$$\nu = \vec{j}\vec{E} = \lambda \frac{k^2 r^2}{4}$$

Мощность, заключённая в кольце, ограниченном радиусами r и $r + dr$:

$$dP = \lambda \frac{k^2 r^2}{4} dV = \lambda \frac{k^2 r^2 2\pi r dr}{4} = \frac{\pi \lambda k^2 l}{2} r^3 dr$$

Проинтегрировав по r от 0 до R, получим:

$$P = \frac{\pi \lambda k^2 l}{8} R^4$$

11 Задача 11.3

В проводнике, помещённом в нестационарное магнитное поле, циркулируют токи Фуко. Линии тока представляют собой окружности, центры которых лежат на оси Oz, причём зависимость плотности тока от времени t и от расстояния r рассматриваемой точки до оси Oz описывается законом $j(r,t) = kre^{-t/\tau}$. Определите индукцию магнитного поля в проводнике, если известно, что в момент времени $t = 0$ она была равна нулю во всём объёме проводника.

Поскольку задача имеет цилиндрическую симметрию, выгоднее всего использовать цилиндрические координаты. По закону Ома:

$$\vec{E} = \frac{1}{\lambda}\vec{j} = \left(0; \frac{ke^{-t/\tau}}{\lambda}; 0\right)$$

Далее, по первому уравнению Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$. Найдём $\operatorname{rot}\vec{E}$:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{kre^{-t/\tau}}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \left(0; 0; 2\frac{ke^{-t/\tau}}{\lambda}\right) \tag{6}$$

Тогда

$$B = -\int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}\vec{E}dt = -2\frac{k\tau}{\lambda}\int_{t_0}^{t} e^{-t/\tau}d(t/\tau) =$$
$$= 2\frac{k\tau}{\lambda}e^{-t/\tau}\Big|_{t_0}^{t} = 2\frac{k\tau}{\lambda}(e^{-t/\tau} - e^{-t_0/\tau}) \tag{7}$$

Из начальных условий $B(0) = 0$, откуда $t_0 = 0$, откуда

$$\vec{B}(t) = 2\frac{k\tau}{\lambda}(e^{-t/\tau} - 1)\vec{e}_z$$

12 Задача 11.4

Дано: U_0, d для плоскопараллельного диода. Рассчитать $\rho(x)$.

Из четвёртого уравнения Максвелла получим уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Из примера 11.2 известно распределение потенциала: $\varphi(x) = U_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$. Откуда и из уравнения Пуассона получим: $\rho(x) = -\varepsilon_0 U_0 \frac{4}{9} \left(\frac{d}{x}\right)^{2/3} \frac{1}{d^2}$

Выведем распределение потенциала:

Уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

Обозначим концентрацию электронов $n(x)$, тогда $\rho(x) = -en(x)$. Тогда плотность тока зависит от скорости электронов следующим образом:

$$\vec{j} = -en(x)\vec{v} \Rightarrow n(x) = \frac{j}{ev}$$

Скорость электронов находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi(x) = \frac{mv_0^2}{2} + e\varphi(0)$$

$v_0 << v$, поэтому положив $v \approx 0$, получим $v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}$. Подставив найденное значение в (8), получим уравнение для потенциала:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e\varphi}} = \alpha\varphi^{-1/2}$$

Где $\alpha = \frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e\varphi}}$.

Обозначим $p(\varphi) = \frac{d\varphi}{dx}$, тогда:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{dx}(p(\varphi)) = p\frac{dp}{d\varphi}$$

, поэтому уравнение принимает вид:

$$p\frac{dp}{d\varphi} = \alpha\varphi^{-1/2}$$

Интегрируя это уравнение, найдём:

$$p = 2\sqrt{\alpha}\varphi^{1/4} + C$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{\alpha}\varphi^{1/4} + C$$

Поскольку по условию катод окружен облаком электронов, на электрон у катода не действует сила, т. е. $E(0) = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0$, откуда $C = 0$. Интегрируя полученное уравнение второй раз, найдём:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3\sqrt{a}}{2}\right)^{4/3} + C_1$$

$C_1 = 0$, так как $\varphi(0) = 0$. Постоянная α находится из второго граничного условия: $\varphi(d) = U_0$. Окончательно потенциал имеет вид:

$$\varphi(x) = U_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$$

13 Задача 11.8

К плоскому воздушному конденсатору, обкладки которого имеют форму дисков с зазором d между ними, приложено переменное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$ с амплитудой U_0 и круговой частотой ω. Найти амплитуду H_0 и B_0 на расстоянии r от оси конденсатора, если радиус обкладок $R, r < R$. Между обкладками конденсатора помещён однородный диэлектрик с ε и μ.

Распределение тока проводимости вне пластин и токов смещения между ними обладает цилиндрической симметрией, поэтому создаваемое токами смещения магнитное поле имеет ту же симметрию. В силу теоремы о циркуляции $\vec{H}$ по окружности радиуса r с центром на оси конденсатора:

$$2\pi r H = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{d}{dt}(\pi r^2 D) = \pi r^2 \frac{dD}{dt} =$$
$$= \varepsilon_0 \varepsilon \pi r^2 \frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi r^2}{d} \frac{dU}{dt} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi r^2}{d} \omega U_0 \sin \omega t$$

Откуда получаем выражение для H и B:

$$H = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon r}{2d} \omega U_0 \sin \omega t \Rightarrow H_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon r}{2d} \omega U_0$$

$$B_0 = \mu \mu_0 H_0 = \mu \mu_0 \omega U_0 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon r}{2d}$$

14 Задача 11.9

Заряженный и отключённый от источника плоский конденсатор с круглыми пластинами пробивается электрической искрой вдоль своей оси.

Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислите полный поток электромагнитной энергии, вытекающей из пространства между обкладками.

Рассчитаем поле, возникающее в конденсаторе. Поле обладает цилиндрической симметрией, поэтому расчёт будем вести в цилиндрических координатах. Поле создаётся токами проводимости в направлении искры и токами смещения в противоположном направлении. Рассмотрим в качестве контура интегрирования окружность радиуса r с центром на оси конденсатора. По теореме о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = 2\pi r H = I - \frac{r^2}{R^2}I$$

Откуда

$$H = \frac{I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$H(R) = 0 \Rightarrow \Pi(R) = 0 \Rightarrow \int_S \vec{\Pi}d\vec{S} = 0$$

15 Задача 11.12

Цилиндрический электронный пучок радиусом R распространяется в свободном пространстве. Электроны пучка летят параллельно, их концентрация равна n, а кинетическая энергия каждого из них равна W. Найти величину и направление вектора Пойнтинга в любой точке пространства.

Задача обладает цилиндрической симметрией. По теореме Умова-Пойнтинга:

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_S \vec{\Pi}d\vec{S} - \frac{dQ}{dt} + \int_V \vec{j}dV$$

Второе слагаемое равно нулю, поскольку не происходит выделения тепла. Третье слагаемое равно нулю, поскольку нет внешних сил. Рассмотрим изменение энергии электромагнитого поля в малом цилиндре высотой d и радиусом r, соосном с пучком:

$$\frac{dW}{dt} = W\pi r^2 h$$

Используя формулу Остроградского-Гаусса, теорему Умова-Пойнтинга можно переписать в виде:

$$w = -div\vec{\Pi}$$

16 Законы Киргхофа

$$\sum_i I_i = 0$$

$$\sum_i U_i = \sum_j \varepsilon_j$$

17 Задача 12.2

Конденсатор заряжен до заряда q_0 подключен через ключ к сопротивлению R. Найти тепло, выделяющееся после замыкания ключа.

По второму правилу Киргхофа:

$$\frac{q}{C} + IR = 0$$

$$\frac{1}{C}\int Idt + IR = 0$$

$$\frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} = 0$$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$I_0 = \frac{q_0}{RC} \Rightarrow I(t) = \frac{q_0}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$Q = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{q_0^2}{RC^2}\exp{(-\frac{2t}{RC})}dt = \frac{q_0^2}{RC^2}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^t = \frac{q_0^2}{(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\Big)}$$

18 Задача 12.3

Конденсатор ёмкостью C, заряженный до разности потенциалов U_0, подключён к сопротивлению R параллельно с катушкой индуктивности L. Найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени.

В цепи возникнет колебательный процесс перетекания заряда между пластинами конденсатора. Из-за сопротивления колебания будут затухающими. Первое правило Киргхофа:

$$-(I_1 + I_2 + I_3) = 0$$

Вследствие параллельного соединения напряжения на конденсаторе, резисторе и катушке одинаковы.

$$I_2 = \frac{U_C}{R}$$

$$I_1 = C\frac{dU_C}{dt}$$

$$I_3 = \frac{1}{L}\int U_C dt$$

$$C\frac{dU}{dt} + \frac{U_C}{R} + \frac{1}{L}\int U_C dt = 0$$

$$U_C'' + \frac{U_C'}{RC} + \frac{1}{LC}U_C = 0 \text{ - уравнение затухающих колебаний}$$

Общее решение УЗО имеет вид:

$$U_C(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\delta t}$$

Где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \omega_0 = \frac{1}{LC}, \delta = \frac{1}{2RC}$. Для нахождения A и B нам нужны начальные условия:

1. $U(0) = U_0$.
2. $I_3(0) = 0 \Rightarrow I_1(0) = -I_2(0)$.

$$U_C'(t) = -\delta e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + e^{-\delta t}(-\omega A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)$$

$$U_C'(0) = \ldots \Rightarrow B = -\frac{\delta U_0}{\omega}$$

Источник переменного напряжения поключен к цепи, состоящей из последовательно подключённых сопротивления R, конденсатора C и катушки L. $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega_0 t$.

Переходим к комплексной амплитуде: $\varepsilon = \overline{\varepsilon_0}e^{i\omega t} \Rightarrow I \sim \overline{I}_0 e^{i\omega t+\varphi}$. Тогда можно получить комплексные выражения для падений напряжения:

$$\overline{U}_R = \overline{I}R$$

$$\overline{U}_C = \frac{1}{i\omega C}\overline{I}$$

$$\overline{U}_L = i\omega L\overline{I}$$

Комплексные коэффициенты, имеющие размерность сопротивления, называются *импедансами*.

$$Z_R = R, Z_C = \frac{1}{i\omega C}, Z_L = i\omega L$$

19 Задача 12.6

См. рисунок в учебнике. Каковы должны быть L, R_1, R_2, C, чтобы $I_R = 0$?

$I_R = 0 \Leftrightarrow U_{AB} = 0$, поэтому задача сведётся к последовательному и параллельному соединению проводников.

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{\varepsilon}}{Z_R + Z_L}$$

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{\varepsilon}}{Z_C + Z_R}$$

$$\overline{U_{CA}} = \overline{I_1} Z_{R_2}$$

$$\overline{U_{CB}} = \overline{I_2} Z_C$$

ДЗ: Задачи 12.6, 12.8, 12.13, 12.17, 12.34