Захаров, Дмитриев, Орлик "Уравнения математической физики". 6 вопросов, 3 теории, 3 задачи

1 Семинар 1

1.1 Уравнения в частных производных второго порядка

Это уравнения вида

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \tag{1}$$

Делаем замену

$$\begin{cases} u(x,y) = v(\xi,\eta), \\ \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases}$$

Тогда уравнение приводится к виду

$$\overline{a_{11}}v_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}v_{\xi\eta} + \overline{a_{22}}v_{\eta\eta} + f = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \tag{2}$$

Дискриминант:

$$D = (a_{12})^2 - a_{11}a_{22}$$

D $>$ 0 - гиперболический тип, D $<$ 0 - эллиптический, D = 0 - параболический.

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx}, \\ u_{yy} = v_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\eta_y^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}, \\ u_{xy} = v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta. \end{cases}$$

1.2 Задача 6

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \tag{4}$$

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + y(dx)^2 = 0 \tag{5}$$

Первый случай: $y < 0 \Rightarrow D = -y > 0$, откуда уравнение гиперболического типа.

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{-y}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -\int (-y)^{-\frac{1}{2}}d(-y) = -2\sqrt{-y}$$

Откуда

$$-2\sqrt{-y} = x + C$$

$$, \begin{cases} \xi = x + 2\sqrt{-y}, \\ \eta = -x + 2\sqrt{-y}. \end{cases}$$

Найдём u_{xx} и u_{yy}:

$$\begin{cases} \xi_{yy} = \frac{1}{2}\frac{-1}{(-y)^{\frac{3}{2}}}, \\ \eta_{yy} = \frac{1}{2}\frac{-1}{(-y)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{\xi\xi} * 1^2 + 2v_{\xi\eta} * 1 * (-1) + v_{\eta\eta} * 1 + v_\xi \frac{1}{2}\frac{-1}{(-y)^{\frac{3}{2}}} + v_\eta \frac{1}{2}\frac{-1}{(-y)^{\frac{3}{2}}}, \\ u_{yy} = -\frac{1}{y}v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta}\left(-\frac{1}{y}\right) + v_{\eta\eta}\left(-\frac{1}{y}\right) + v_\xi + v_\eta. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в исходное уравнение, получаем:

$$2v_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi+\eta}(v_\xi + v_\eta) = 0 \tag{6}$$

Второй случай: $y > 0 \Rightarrow D = -y < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{y}$, т. е. уравнение эллиптического типа.

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm i dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = \pm ix + C$$

Откуда

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = 2\sqrt{y}, \\ \xi_x = 1, \\ \eta_y = \frac{1}{\sqrt{y}}\eta_{yy} = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Подставляя вторые производные в исходное уравнение, получаем первую каноническую форму:

$$v_{\xi\xi} + y\left(v_{\eta\eta}\frac{1}{y} + \eta_n\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\right) = 0. \tag{7}$$

Третий случай: $y = 0$ - параболический вид. Выберем ξ и η:

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = x, \\ \xi_y = 1, \\ \eta_x = 1. \end{cases}$$

Подставив в исходное уравнение, получим первую каноническую форму:

$$v_{\eta\eta} = 0. \tag{8}$$

1.3 Задача 6\10

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0. \tag{9}$$

Характеристическое уравнение:

$$y^2(dy)^2 - x^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow ydx = \pm xdx \Rightarrow D = x^2y^2 \tag{10}$$

Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то получим $x^2 + y^2 = C$, откуда

$$\begin{cases} \xi = y^2 + x^2, \\ \eta = y^2 - x^2 \end{cases} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = y^2, \\ \beta = x^2, \end{cases} \quad (12)$$ После замены получим:

$$y^2(v_{\beta\beta} * 4x^2 + 2v_\beta) - x^2(v_{\alpha\alpha} * 4y^2 + 2v_\alpha) = 0 \tag{13}$$

Откуда

$$v_\beta 2y^2 - 2v_\alpha x^2 = 0 \tag{14}$$

Случай y = 0:

$$y = x = 0, u_{yy} = u_{xx} = 0, v_{\beta\beta} - v_{\alpha\alpha} + \frac{v_\beta}{2\alpha} + \frac{v_\alpha}{2\alpha} = 0 \tag{15}$$

1.4 Задача 15

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0. \tag{16}$$

Характеристическое уравнение:

$$x^2(dy^2) - 2xydxdy + y^2(dx)^2 = (xdy - ydx)^2 = 0 \tag{17}$$

Тогда $xdy = ydx \Rightarrow \frac{y}{x} = C$, откуда

$$\begin{cases} \xi = \frac{y}{x}, \\ \eta = x, \\ \xi_x = -\frac{y}{x^2}, \\ \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \\ \xi_{yy} = \frac{1}{x}, \\ \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2}, \\ \eta_x = 1. \end{cases} \tag{18}$$

Подставив это в (1), получим:

$$x^2\left(v_{\xi\xi}\left(\frac{2y}{x^3}\right)^2 - 2v_{\xi\eta}\frac{y}{x^2} + v_{\eta\eta} + v_\eta\frac{2y}{x^3}\right) + 2xy\left(v_{\xi\xi}\frac{1}{x}\left(-\frac{y}{x}^2\right) + v_{\xi\eta}\frac{1}{x} + v_\eta\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) + y^2v_{\xi\xi}\frac{1}{x^2} = 0 \tag{19}$$

После преобразований останется:

$$v_{\eta\eta} = 0 \tag{20}$$

1.5 Задача 24

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 2u_y + u = 0. \tag{21}$$

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = 0 \tag{22}$$

Дискриминант равен нулю $\Rightarrow . \begin{cases} \xi = y + x, \\ \eta = x, \\ \xi_x = 1, \\ \xi_y = 1, \\ \eta_x = 1, \end{cases} \quad (23)$

После подстановки:

$$v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} - 2(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}) + v_{\xi\xi} + 6u_\xi + 6u_\eta - 2u_\xi + u = 0. \tag{24}$$

Откуда

$$u_{\eta\eta} + 4u_\xi + 6u_\eta + u = 0. \tag{25}$$

Д. з.: 1.11, 1.14, 1.8, 1.19, 1.23 Начало в 12:15

2 Семинар 2

2.1 Уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_{avg}) + f(x,t), 0 < x < C \tag{26}$$

А также граничные/краевые условия.

Первого рода:

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{27}$$

Второго рода:

$$u_x(0,t) = \nu_1(t) \tag{28}$$

2.2 Задача 2.5

$$a^2 = 1, u_t = u_{xx}. \tag{29}$$

$U(x,t)$ - решение. $U_1(x,t) = U(x-c,t)$ - решение?

$$U_{1t}(x,t) = U_t(x-c,t), U_{1xx} = U_{xx}(x-c,t)$$

Т. е. решение.

$$U_2(x,t) = U(x,t-c)$$

$$U_{2t}(x,t) = U_t(x,t-c), U_{1xx} = U_{xx}(x,t-c)$$

Т. е. решение.

$$U_3(x,t) = U(cx,c^2t)$$

$$U_{3t}(x,t) = U_t(cx,c^2t) \cdot c^2$$

$$U_{3xx}(x,t) = U_{xx}(cx,c^2t) \cdot c^2$$

Т. е. решение.

$$U_4(x,t) = e^{-cx+c^2t} U(x-2ct,t)$$

$$U_{4t}(x,t) = e^{-cx+c^2t} c^2 U(x-2ct,t) + e^{-cx+c^2t}(U_x(x-2ct,t)(-2c) + U_t(x-2ct,t))$$

$$U_{4xx}(x,t) = e^{-cx+c^2t}(-c)^2 U(x-2ct,t) + e^{-cx+cx^2}(-c)U_x(x-2ct,t) + e^{-cx+cx^2} U_{xx}(x-2ct,t)$$

2.3 Задача 2.10

$$0 \le l \le x, u_1 = \text{const}, u_2 = \text{const} : \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_1, \\ u(l,t) = u_2, \\ u(x,0) = u_0 x. \end{cases} \tag{30}$$

2.4 Задача 2.11

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_{out}), \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(l,t) = u_{out}, \\ u(x,0) = u_0. \end{cases} \tag{31}$$

2.5 Задача 2.12

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) = -\frac{Q}{kS}, \\ u_x(l,t) = -\frac{Q}{kS}, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

2.6 Задача 2.17(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{33}$$

Ищем решение в виде:

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

где $U(x,t) = a(t)x + b(t)$. Подставив в (33), получим:

$$\begin{cases} b(t) = \mu_1, \\ a(t)l + b(t) = \mu_2. \end{cases} \tag{34}$$

Откуда $a(t) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{l}$.

Теперь рассмотрим другие краевые условия:

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1, \\ u_x(l,t) = \nu_2. \end{cases} \tag{35}$$

Воспользуемся той же заменой:

$$\begin{cases} b(t) = \mu_1, \\ a(t) = \nu_2. \end{cases} \tag{36}$$

Третий вариант:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \nu_1, \\ u_x(l,t) = \nu_2. \end{cases} \tag{37}$$

Ищем $U(x,t)$ в виде $U(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x$:

$$\begin{cases} b(t) = \nu_1, \\ 2Ca(t) = b(t) = \nu_2. \end{cases} \tag{38}$$

Откуда $a(t) = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2C}$.

2.7 Задача 3.1

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{39}$$

Ищем $u(x,t)$ в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда:

$$XT' = a^2 X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda. \tag{40}$$

Получили два уравнения

$$\begin{cases} X'' + = 0, X(0) = X(l) = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Характеристическое уравнение первой задачи:

$$k^2 + \lambda = 0. \tag{42}$$

Возможны три случая:

1. $\lambda > 0 \Rightarrow X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, C_1 = 0, C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{Z}$. Тогда $X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 x$.

2. $\lambda = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X = C_1 x + C_2, C_2 = 0, C_1 l = 0 \Rightarrow$ решений нет.

3. $\lambda < 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} x, C_1 + C_2 = 0, C_1(e^{\sqrt{-\lambda}l} + e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ и решений нет.

Решим теперь второе уравнение. Его решением будет $T(t) = Ce^{-\lambda a^2 t} = Ce^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$.

Общее решение будем искать в виде ряда $u = \sum_{n=1}^{n} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \sin\frac{\pi n}{l}x$. Для нахождения коэффициентов C_n воспользуемся граничным условием:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где} C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi \tag{43}$$

Решим задачу (33) на отрезке $[0,\pi]$ с начальным условием $u(x,0) = \sin 3x + 8\sin 5x$. В этих условиях

$$\lambda_n = n^2, x_n = \sin nx, u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx e^{-n^2 a^2 t}$$

$$\sin 3x + 8\sin 5x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx$$

Получили решение:

$$u = e^{-9a^2 t}\sin 3x + 8e^{-25a^2 t^2}\sin 5x$$

2.8 Задача 3.2

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 1 - x, 0 \le x \le 1, t > 0, \\ u(0,t) = t, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 3\sin(2\pi x). \end{cases} \tag{44}$$

Ищем решение в виде $u = U + v$, где $U = a(t)x + b(t)$. Тогда:

$$\begin{cases} b(t) = t, \\ a(t) + b(t) = 0 \Rightarrow a(t) = -t. \end{cases} \tag{45}$$

Получили что $U = -tx + t$. Запишем уравнение для v:

$$-x + 1 + v_t = \frac{1}{4}v_{xx} + 1 - x, v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, v(x,0) = 3\sin(2\pi x). \tag{46}$$

Из предыдущей задачи
$$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{1}{4}(\pi n)^2 t} \sin(\pi n x). \quad (47)$$
Подставим в начальное условие:
$$3\sin(2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x). \quad (48)$$
Тогда $u = -tx + t + 3\sin(2\pi x)e^{-\pi^2 t}$.

2.9 Задача 3.3

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 2t, x \in (0,\pi), \\ u(x,0) = \frac{1+\pi}{\pi}x - 1, \\ u(0,t) = t^2 - 1, \\ u(l,t) = t^2. \end{cases} \quad (49)$$
Ищем u в виде $u = U + v$, где $U = a(t)x + b(t)$. Тогда
$$\begin{cases} b(t) = t^2 - 1, \\ a(t)\pi + t^2 - 1 = t^2 \Rightarrow a(t) = \frac{1}{\pi}. \end{cases} \quad (50)$$
Подставив это в исходное уравнение, получм:
$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx}, \\ v(0,t) = 0, \\ v(\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = x. \end{cases} \quad (51)$$
Собственные значения $\lambda_n = n^2, X_n = \sin(nx), v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4n^2 t} \sin nx$. Подставляя в начальное условие, получим:
$$v(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)$$
$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \xi \sin(n\xi)d\xi = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\cos\xi)\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(\xi(\cos n\xi)\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(n\xi)d\xi = -\frac{2}{n}(-1)^n. \quad (52)$$
Тогда
$$u = \frac{x}{\pi} + t^2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}(-1)^n\right)e^{4n^2 t}\sin(nx). \quad (53)$$
Д. з. 2.5, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 3.3, 3.4

3 Семинар 3

Собственные значения и собственные функции ЗШЛ с разными краевыми условиями:
$$\begin{array}{|c|c|c|} \text{type} & \lambda_n & \mathrm{X}_n \\ \text{I - I} & \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 & \sin\frac{\pi n}{l}x \\ \text{I - II} & \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 & \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} \\ \text{II - I} & \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 & \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} \\ \text{II - II} & \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 & \cos\frac{\pi n}{l}x. \end{array} \quad (54)$$

3.1 Задача 3.5

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2 - 1, 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{55}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Получим две задачи:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda \tag{56}$$

Или

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(1) = 0, \\ T' + \lambda T = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Собственные значения:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, \tag{58}$$

$$X_n = \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \tag{59}$$

Для T_n получаем:

$$T = Ce^{-\lambda t}. \tag{60}$$

Ищем общее решение в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \tag{61}$$

Чтобы найти C_n, разложим правую часть краевого условия в ряд Фурье:

$$x^2 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \tag{62}$$

$$\begin{aligned} C_n = \frac{2}{l}\int_0^l (x^2-1)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x dx = \frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^l (x^2-1) d\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} = \\ = \frac{4}{\pi(2n+1)}\left((x^2-1)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}\Big|_0^l - \int_0^l \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} 2x dx \right) = \\ = \frac{1}{\pi^2}(2n+1)^2 \int_0^l x d\cos\frac{\pi(2n+1)}{2}x = \frac{16}{\pi^2}\left(x\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}\Big|_0^l - \dots \right) \end{aligned} \tag{63}$$

Откуда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 32}{\pi^3(2n+1)^3} \exp\left\{ -\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 \right\} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \tag{64}$$

3.2 Задача 3.6

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = 1, \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{65}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = U(x,t) + V(x,t)$, где $V(x,t) = A(t)x + B(t)$. Подставив в краевые условия, получим:

$$\begin{cases} A(t) = 1, \\ l + B(t) = 0, \end{cases} \tag{66}$$

т. е. $V = x - l$.

Для $V(x,t)$ получаем однородную задачу:

$$\begin{cases} V_t = V_{xx}, \\ V_x(0,t) = V(l,t) = 0, \\ V(x,0) = l - x. \end{cases} \tag{67}$$

Собственные значения и собственные функции ЗШЛ:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, \\ X_n = \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}. \end{cases} \tag{68}$$

Тогда V ищем в виде $V = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x$, где

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l (l-x)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x dx = \frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^l (l-x) d\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} x = \\ = \frac{4}{\pi(2n+1)}\left((l-x)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\bigg|_0^l + \int_0^l \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} x dx \right) = \\ = -\frac{8l}{\pi^2(4n+1)^2}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x 0^l = \frac{2l}{\pi^2(2n+1)^2} \tag{69}$$

Откуда

$$u = x - l + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2} \exp\left\{ -\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 t \right\} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x \tag{70}$$

3.3 Задача 3.8

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right), 0 \le x \le \pi. \end{cases} \tag{71}$$

Собственные значения и собственные функции:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2, \\ X_n = \cos\frac{2n+1}{2} x. \end{cases} \tag{72}$$

Ищем общее решение в виде
$$u=\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t}\cos\frac{2n+1}{2}x. \tag{73}$$
C_n находим с помощью разложения в ряд Фурье:
$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{2n+1}{2}x=\cos\frac{3x}{2}\Rightarrow C_1=1, C_n=0, n\neq 1. \tag{74}$$
Получаем, что $u(x,t)=e^{-\frac{9}{4}}a^2 t\cos\frac{3x}{2}$.

3.4 Задача next

$$\begin{cases} u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+1,\\ u(0,t)=t, u_x(1,t)=0,\\ u(x,0)=2\sin\frac{3}{2}\pi x. \end{cases} \tag{75}$$
Ищем решение в виде $u=U+V$, где $U=A(t)x+B(t)$. Подставляя в граничные условия, получим:
$$B=t, A=0. \tag{76}$$
Для V получаем задачу:
$$\begin{cases} v_t=\frac{1}{9}v_{xx},\\ v(0,t)=v_x(1,t)=0,\\ v(x,0)=2\sin\frac{3}{2}\pi x. \end{cases} \tag{77}$$
Собственные значения и собственные функции ЗШЛ:
$$\lambda_n=\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)^2, X_n=\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}x \tag{78}$$
Ищем решение в виде
$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n}\frac{1}{9}t\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}x. \tag{79}$$
Подставляя в начальное условие, получим:
$$v(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}x=2\sin\frac{3}{2}x \tag{80}$$
Откуда
$$u(x,t)=t+2\exp\left\{-\frac{\pi^2}{4}t\right\}\sin\frac{3}{2}\pi x. \tag{81}$$

3.5 Задача next2

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}-u,\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\\ u(x,0)=1. \end{cases} \tag{82}$$
Ищем решение в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$:
$$XT'=X''T-XT\Rightarrow\frac{X''}{X}=\frac{T'+T}{T}=-\lambda. \tag{83}$$

Получили две задачи:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + (\lambda + 1)T = 0. \end{cases} \tag{84}$$

Собственные значения и собственные функции ЗШЛ:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, X_n = \sin \frac{\pi n}{l}. \tag{85}$$

Для T получаем:

$$T(t) = Ce^{-(\lambda+1)t}. \tag{86}$$

Тогда общее решение ищется в виде:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\lambda+1)t} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{87}$$

Подставляя в начальное условие, находим C_n:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x \bigg|_0^l = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n). \tag{88}$$

Откуда для u:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n) \exp\left\{ - \left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 1 \right) t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{89}$$

3.6 Задача 3.14

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, h > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{90}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$XT' = a^2 X'' T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda \tag{91}$$

Получили задачи:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + a^2 \lambda T = 0. \end{cases} \tag{92}$$

Решаем ЗШЛ: 1. $\lambda > 0 \Rightarrow X = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Из граничных условий $C_2 = 0$ и $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}$. Собственными значениями будут решения последнего уравнения, а собственными функциями - функции $X_n = \cos \sqrt{\lambda_n} x$ Тогда общее решение имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \cos \sqrt{\lambda_n} x \tag{93}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \sqrt{\lambda_n} x \Rightarrow C_n = \frac{1}{|X_n|^2} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \sqrt{\lambda_n} \xi, \tag{94}$$

где

$$|X_n|^2 = \int_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_n} x dx \tag{95}$$

3.7 Задача 3.15

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, h > 0, \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{96}$$

Ищем решение в виде $u = X(x)T(t)$, получаем уравнения:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(l) = X'(0) - hX(0) = 0, \\ T' + \lambda T = 0. \end{cases} \tag{97}$$

В случае $\lambda > 0$:

$$X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \tag{98}$$

При подстановке граничных условий:

$$\begin{cases} C_2\sqrt{\lambda} - hC_1 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{99}$$

Откуда $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$. λ_n будут решениями этого уравнения, а собственные функции будут иметь вид: $X_n = \cos\sqrt{\lambda}x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x$

Д. з. 3.7, 9, 10, 11, 12

4 Семинар 4

ДЗ: 4.4, 4.6, 4.7, 4.8, 4.11

4.1 Задача 4.5

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f_0, 0 < x < l, t > 0, f_0 = \mathrm{const}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{100}$$

Собственные значения и собственные функции соответствующей ЗШЛ:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, \\ X_n = \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \end{cases} \tag{101}$$

Ищем решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0} u_n(t) \sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{102}$$

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_0 \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x dx = -\frac{4f_0}{\pi(2n+1)}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\Big|_0^l = \frac{4f_0}{\pi(2n+1)} \tag{103}$$

Получаем набор задач:

$$\begin{cases} u_n' = -a^2\lambda_n u_n + f_n, \\ u_n(0) = 0. \end{cases} \tag{104}$$

Решением этой задачи Коши будет функция

$$u_n = \frac{f_n}{a^2\lambda_n}(1 - e^{-a^2\lambda_n t}). \tag{105}$$

Тогда решение будет иметь вид:

$$u(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16f_0l^2}{\pi^3(2n+1)^3a^2}\left(1-\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2\right\}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \tag{106}$$

4.2 Задача 4.9

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+2, 0<x<\frac{\pi}{2}, t>0,\\ u(0,t)=2t, u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0, t>0,\\ u(x,0)=\sin 5x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{107}$$

Ищем решение в виде $u=U+v$, где $U=a(t)x+b(t)$. Подставляя в граничные условия, найдём, что $a(t)=0, b(t)=2t$. Для v получим задачу

$$\begin{cases} v_t=v_{xx},\\ v(0,t)=v_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0,\\ v(x,0)=\sin 5x.\end{cases} \tag{108}$$

Собственные задачи и собственные функции соответствующей ЗШЛ:

$$\begin{cases} \lambda_n=(2n+1)^2,\\ X_n=\sin(2n+1)x.\end{cases} \tag{109}$$

Ищем решение в виде $v=\sum_{n=0}^{\infty}C_ne^{-a^2\lambda_nt}\sin(2n+1)x$. Получим, что $C_2=1, C_n=0, n\neq 2$, откуда

$$u(x,t)=2t+e^{-25t}\sin 5x. \tag{110}$$

4.3 Задача 4.10

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+2+2\sin 5x,\\ u(0,t)=2t, u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0,\\ u(x,0)=0, 0\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{111}$$

Собственные значения и собственные функции те же, задача после редукции примет вид:

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+2\sin 5x,\\ v(0,t)=v_x(\frac{\pi}{2},t)=0,\\ v(x,0)=0.\end{cases} \tag{112}$$

Ищем решение в виде

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(t)\sin(2n+1)x. \tag{113}$$

Получим систему

$$\begin{cases} v_n'(t)=-\lambda_nv_n+f_n,\\ v_n(0)=0.\end{cases} \tag{114}$$

$f_2=2, f_n=0, n\neq 2\Rightarrow v_n=0, n\neq 2$. При $n=2$:

$$\begin{cases} v_2'=-25v_2+2,\\ v_2(0)=0.\end{cases} \tag{115}$$

Откуда $v_2=-\frac{2}{25}e^{-25t}+\frac{2}{25}$. Решение имеет вид:

$$u=2t+\left(\frac{2}{25}e^{-25t}+\frac{2}{25}\right)\sin 5x \tag{116}$$

4.4 Задача next

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = At, t > 0 \\ u(l,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{117}$$

Ищем решение в виде $u = U + v$, где $U = a(t)x + b(t)$. Подставляя в граничные условия, находим:

$$\begin{cases} a(t)l + At = 0, \\ b(t) = At, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = -\frac{A}{l}t, \\ b(t) = At. \end{cases} \tag{118}$$

Тогда $u = v + \frac{l-x}{l}At$. После редукции задача приобретёт вид:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - \frac{A(l-x)}{l}, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \tag{119}$$

Собственные значения и собственные функции ЗШЛ:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \\ X_n = \sin\frac{\pi n}{l}x \end{cases} \tag{120}$$

Найдём f_n:

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l (x-l)\sin\frac{\pi n}{l}x dx = \ldots = -\frac{2A}{\pi n}. \tag{121}$$

Ищем решение в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{122}$$

Из этого получим систему:

$$\begin{cases} v_n' = -a^2\lambda_n v_n + f_n, \\ v_n(0) = 0. \end{cases} \tag{123}$$

Решением этой задачи Коши будет функция $v_n = \frac{f_n}{a^2\lambda_n}(1 - e^{-a^2\lambda_n t})$. Решение задачи (117) будет иметь в таком случае вид:

$$u(x,t) = -\frac{At}{l}(x-l) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2Al^2}{\pi^3 n^3 d^2}\left(1 - \exp\left\{-a^2\ldots\right\}\right)\sin \tag{124}$$

4.5 Задача next2

Решить задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0, \\ u_x(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{125}$$

$$2\sin 2x \sin x = \cos x - \cos 3x$$

Ищем решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\cos(2n+1)x, \tag{126}$$

$$f_0 = 1, f_1 = -1, f_n = 0, n \notin \{0, 1\}$$

Получим систему

$$\begin{cases} u_n' = -a^2\lambda_n u_n + u_n + f_n, \\ u_n(0) = 0. \end{cases} \tag{127}$$

При $n > 1 u_n = 0$.

$$n = 1 :$$