1 Задача 4.11

$$X_1 = -0.114$$

$$X_2 = 0.196$$

$$H_0 : X_i \sim R[-0.5, 0.5]$$

$$H_1 : X_i \sim N(0, 0, 009)$$

$$\alpha = 0.1$$

Критерий - ?

$$L_0 = \frac{1}{1} \nVdash (\min X_i \geq -0.5) \nVdash (\max X_i \leq 0.5)$$

$$L_1 = \frac{1}{2\pi 0.009} \exp\left(-\frac{1}{2(0.009)^2 (X_1^2 + X_2^2)} \right)$$

$$\phi^*(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1, \frac{L_1}{L_0} \geq 0.5 \\ 0, \frac{L_1}{L_0} \leq 0.5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \phi^*(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1, \max |X_i| > 0.5 \\ 0, \max |X_i| \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{H_0} = 1\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 \leq C_\alpha) = \alpha \Rightarrow C_\alpha = \frac{\alpha}{\pi} \approx 0.0031$$

$$X_1^2 + X_2^2 = 0.0514 > 0.031$$

Таким образом, гипотезу нужно принять.

2 Задача 2

Найти характеристическую функцию распределения Коши:

$$\xi \sim \rho(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t, \xi) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + x^2)} e^{itx} dx = \\ = \lim_{R \to \infty} \oint_{\gamma_R} \frac{1}{\pi(1 + z^2)} e^{itz} dz = 2\pi i \, res_{z=i} f(z) = \\ = 2\pi i \lim_{z=i} \frac{1}{\pi(1 + i)} e^{itz} = e^{-t} \end{aligned}$$

С учётом чётности характеристической функции получим

$$\varphi(t,\xi) = e^{-|t|}$$

Пусть теперь $\xi_1, \dots, \xi_n \sim \rho(x)$. Найти распределение $\frac{\sum_{i=1}^n \xi}{n}$.

$$\varphi(t, \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}) = \mathbb{E} \exp it \frac{\sum_{i=1}^n \xi_n}{n} = \ldots = e^{-|t|}$$

3 Задача 3

Есть выборка из распределения Рэлея:

$$F(x,\theta) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\theta}}\right)^2}, x \geq -, \theta > 0$$

Найти оценку максимального правдоподобия и её свойства. Найдём распределение X_i:

$$\begin{cases} 0, x < 0, \\ 2e^{-\frac{x^2}{\theta}} \frac{x}{\theta}, x \geq 0 \end{cases}$$

Функция правдоподобия:

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^n 2e^{-\frac{X_i^2}{\theta}} \frac{X_i}{\theta} = 2^n \prod_{i=1}^n X_i \frac{e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i^2}}{\theta^n}$$

Откуда получаем, что $T(\mathbb{X}) = (\sum_{i=1}^n X_i)^2$ - достаточная оценка. По критерию факторизации, она является полной. Оценка максимального правдоподобия - $\theta = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$ Несмещённость оценки:

$$\mathbb{E}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}X_i^2 = \ldots = \theta$$

Из доказанного и закона больших чисел следует, что оценка также является состоятельной. Оценка является эффективной как функция достаточной статистики.

4 Задача 4

Дана выборка из логистического распределения:

$$\rho(x,\theta) = \frac{e^{-x+\theta}}{(1+e^{-x+\theta})^2}$$

Плотность распределения симметрична относительно θ, поэтому $\mathbb{E}X_i = \theta$, что и означает несмещённость и состоятельность.