1 Задача 1

Найти $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ для решения задачи

$$x' = \frac{x}{t} + \mu t e^{-x}, x(1) = 1$$

Продифференцируем задачу по μ, обозначив $u = \frac{\partial x}{\partial \mu}$:

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{t} + t(e^{-x} - \mu e^{-x} u), \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Подставляя $\mu = 0$, найдём:

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{t} + t e^{-x}, \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Теперь подставим $\mu = 0$ в начальное уравнение системы, чтобы найти x:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{t}, \\ x(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow x = t$$

Подставим полученное выражение для x в (1):

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{t} + t e^{-t}, \\ u(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' - \dfrac{u}{t} = t e^{-t}, \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Это линейное ОДУ первого порядка, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$u = Ct, \forall C$$

Найдём решение неоднородного уравнения в виде $u = C(t)t$:

$$u' - \frac{u}{t} = C't + C - C = te^{-t} \Rightarrow C' = e^{-t} \Rightarrow C(t) = C - e^{-t}$$

Тогда $u = Ct - te^{-t}, \forall C$. Вспоминая, что $u(1) = 0$, найдём окончательно, что $u(t) = \frac{t}{e} - \frac{t}{e^t}$.

2 Задача 2

Найти решение уравнения в виде степенного ряда до 4 степени:

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^3, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Ищем решение в виде: $y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + \ldots$. Тогда

$$y' = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + 4a_4(x-1)^3 + \ldots,$$

$$y^3 = a_0^3 + 3a_0^2 a_1(x-1) + (3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2)(x-1)^2 + (a_3 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3)(x-1)^3 + \ldots$$

Подставив это в начальное уравнение, получим:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + 4a_4(x-1)^3 + \ldots = a_0^3 + 3a_0^2 a_1(x-1) + (3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 + 1)(x-1)^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Или:

$$\begin{cases} a_1 = a_0^3, \\ 2a_2 = 3a_0^2 a_1, \\ 3a_3 = 3a_0^2 a_2 + 3a_0 a_1^2 + 1, \\ 4a_4 = a_3 + 6a_0 a_1 a_2 + a_1^3, \\ a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = \dfrac{3}{2}, \\ a_3 = \dfrac{17}{6}, \\ a_4 = \dfrac{77}{24} \end{cases}$$

Т. е. разложение имеет вид:

$$y = 1 + (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{17}{6}(x-1)^3 + \frac{77}{24}(x-1)^4 + \ldots$$

0:58:06

3 Задача 3

Исследовать на устойчивость нулевое решение:

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z-y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9-12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$$

Для начала линеаризуем систему:

$$\operatorname{tg}(z-y)-2x=-2x-y+z+o(\rho)$$

$$\sqrt{9-12x}-3e^y=3\sqrt{1-\frac{4}{3}x}-3(1+y+o(\rho))=3-\frac{3}{2}\frac{4}{3}x-3-3y+o(\rho)=-2x-3y+o(\rho)$$

$$\begin{cases} \dot{x}=-2x-y+z+o(\rho), \\ \dot{y}=-2x-3y+o(\rho), \\ \dot{z}=-3y \end{cases}$$

Найдём собственные значения этой системы:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -3-\lambda \\ 0 & -3 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=6+\lambda+3-\lambda(\lambda^2+5\lambda+6-2)=-\lambda^3-5\lambda^2-3\lambda+9=-\lambda^2(\lambda-1)-6\lambda(\lambda-1)-9(\lambda-1)=$$

$$=(\lambda-1)((\lambda-3)^2-18)=(\lambda-1)(\lambda-(3-3\sqrt{2}))(\lambda-(3+3\sqrt{2}))$$

В данном случае есть два положительных собственных значения $\lambda=1$ и $\lambda=3(1+\sqrt{2})$, поэтому система является неустойчивой. 1:25:30

4 Задача 4

Исследовать на устойчивость по определению:

$$\begin{cases} 2ty'=y-y^3, \\ y(1)=0 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$2ty'=y-y^3 \Rightarrow \frac{2dy}{y-y^3}=\frac{dt}{t}$$

$$\frac{2}{y-y^3}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}+\frac{C}{y+1}=\frac{A(y^2-1)+B(y^2+y)+C(y^2-y)}{y+1}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ B-C=0, \\ A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2, \\ B=C=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2dy}{y-y^3} = -2\int \frac{dy}{y} + \int \frac{d(y-1)}{y-1} + \int \frac{d(y+1)}{y+1} = \ln\left(C\frac{y^2-1}{y^2}\right), C \neq 0$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t$$

$$\frac{y^2-1}{y^2} = Ct \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 1 - Ct, C \neq 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{1-Ct}}, C \neq 0$$

При делении на $y - y^3$ мы не учли функции $y = 0$ и $y = \pm 1$. Все три функции также являются решениями. Граничному условию $y(1) = 0$ удовлетворяет только нулевое решение. Найдём решение, отвечающее граничному условию $y(1) = \delta, 0 < \delta < 1$:

$$\sqrt{\frac{1}{1-C}} = \delta \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{\delta^2}$$

Этому значению C соответствует функция:

$$y = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 - (\delta^2 - 1)t}}$$

Эта функция является убывающей на R_+, поэтому $y(t) < y(0) = \delta \forall t$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon : |y_\delta(t) - 0| < \varepsilon \, \forall t$, т. е. решение является устойчивым. Более того, оно асимптотически устойчиво, так как $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.