1 Задача 2.18

Найти интегралы:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2-2x+10}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)dx}{x^2-2x+10} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2-2x+10} =$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1+3i}\left(\frac{z}{z^2-2z+10}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i(\frac{1}{2}-\frac{i}{6})\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{3}+\pi i\right] = \frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{Res}_{z=-1+3i}f(z) = \lim_{z\to-1+3i} f(z)(z-(-1+3i)) = \frac{-1+3i}{-1+3i-(-1-3i)} = \frac{-1+3i}{6i} = \frac{1}{2}-\frac{i}{6}$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^4+1}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^4+1} = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^4+1} =$$

$$= \mathrm{Im}\left[2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{z}{z^4+1} + \mathrm{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\frac{z}{z^4+1}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[2\pi i\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0$$

$$\mathrm{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z}{z^4+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\mathrm{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z}{z^4+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$

3. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{(x^2+a^2)^2}, a \neq 0$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{(x^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\mathrm{Res}_{z=ai}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2a^2} = \frac{\pi}{4a^2}$$

$$\mathrm{Res}_{z=ai} = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+ai)^2}\right] = \lim_{z\to ai} -\frac{2x}{(x+ai)^3} = -\frac{2ai}{(2ai)^3} = \frac{1}{4a^2}$$

4. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)dx}{x^2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)dx}{x^2} = -\int_0^\infty \sin^2(x) d\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= -\frac{sin^2(x)}{x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin(x)\cos(x)dx}{x} = \int_0^\infty \frac{\sin(2x)d(2x)}{2x} = \frac{\pi}{2}$$

2 Задача 2.16

Вычислить интегралы:

3. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{z=i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^n}\right] = 2\pi i (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}$$

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^n}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{(z+i)^n}\right] = \frac{(-1)^n}{-2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

4. $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}, a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}2\pi i \mathrm{Res}_{z=ai}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right] = \frac{\pi}{4a}$$

$$\mathrm{Res}_{z=ai}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right] = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right] =$$
$$= \lim_{z\to ai}\left[\frac{2z(z+ai)^2 - 2(z+ai)z^2}{(z+ai)^4}\right] = \frac{-4a^2+2a^2}{-8a^3i} = -\frac{i}{4a}$$

3 Задача 2937

Каков будет ряд Фурье для тригонометрического многочлена:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)?$$

В общем случае ряд Фурье для \$(2l)\$-периодической функции на $[-l; l]$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_n \cos\frac{\pi k x}{l} + b_n \sin\frac{\pi k x}{l})$$

Или, при $l = \pi$, как в нашем случае:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos kx + b_n \sin kx)$$

Откуда видим, что $a_k = \alpha_k, k = \overline{0,n}$ и $a_k = 0, k > n$. Аналогично, $b_k = \beta_k, k = \overline{1,n}$ и $b_k = 0, k > n$.

Иными словами, ряд Фурье для тригонометрического многочлена имеет вид:

$$P_n(x) = \frac{2\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

4 Задача 2942

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Ряд Фурье на $(-\pi,\pi)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, n \in \mathbb{N}_0$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n \in \mathbb{N}$. Функция чётная, поэтому $b_n = 0\,\forall n$. Найдём a_n:

При $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi$$

При остальных n:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \\ = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} xd(\sin(nx)) = \frac{2}{\pi n}\left((x\sin nx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nxdx\right) = \\ = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\cos nx$$

5 Задача 2943

Разложить в ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ функцию:

$$f(x) = \begin{cases} ax, -\pi < x < 0; \\ bx, 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Где a и b - постоянные.

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

Где $\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, n \in \mathbb{N}_0, \beta_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n \in \mathbb{N}$.

Найдём коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} axdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bxdx = (b-a)\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx\cos nxdx = \\ = \frac{b-a}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2(b-a)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{p} ibx\sin nxdx = \\ = \frac{b+a}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx = -\frac{b+a}{\pi n}\int_{0}^{\pi} xd(\cos nx) = \\ = -\frac{b+a}{\pi n}\left((x\cos nx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nxdx \right) = \\ = -\frac{b+a}{\pi n}\left((-1)^n\pi - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n+1}\frac{b+a}{\pi n}$$

Собирая всё вместе, получаем:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(b-a)}{\pi n^2}\cos nx + (-1)^{n+1}\frac{b+a}{\pi n}\sin nx \right)$$

6 Задача 2958

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = |\cos x|$.

Функция $f(x)$ является π-периодической, поэтому достаточно её разложить на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для $2l$-периодической функции ряд Фурье на $(-l; l)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right)$$

Где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, n \in \mathbb{N}_0$$

,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, n \in \mathbb{N}$$

В нашем случае $l = \frac{\pi}{2}$, поэтому формулы приводятся к виду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx, n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx dx, n \in \mathbb{N}$$

Найдём коэффициенты:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2nx dx = \\ = \frac{2}{\pi} \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n-1)x dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)x dx \right) = \\ = \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1) dx \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1) dx \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \\ = (-1)^n \frac{2}{\pi(2n-1)} + (-1)^{n-1} \frac{2}{\pi(2n+1)} = (-1)^n \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 2nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi(2n+1)}\cos(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{2}{\pi(2n-1)} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

Итого, ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx - \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nx\right)$$

7 Задача 1

Найти и классифицировать особые точки функции:

$$g(z) = \frac{z^3 e^{1/z}}{(1-e^z)^2}$$

Предельной точкой может быть только точка $z = 0$. Проверим эту точку:

$$g(z) \sim_{z\to 0} \frac{z^3 e^{1/z}}{z^2} = z e^{1/z}$$

Последняя функция имеет существенную особую точку при $z = 0.(z_{n1} = \frac{1}{n}, z_{n2} = \frac{i}{n})$.

8 Задача 13.41(2)

Найти ДЛО, отображающее точки $z = -1, i, 1+i$ соответственно в точки $w = i, \infty, 1$.

Поскольку $f(i) = \infty$, то $f(z)$ имеет вид: $f(z) = \frac{az+b}{z-i}$. Запишем систему: $\LaTeX$

$$\begin{cases} \dfrac{b-ai}{-1-i} = i, \\ \dfrac{(a+b)+ai}{i} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ai+b = 1-i, \\ a+(1+i)b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = i, \\ b = -i, \end{cases}$$

Откуда $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{iz-i}{z-i}$$

9 Задача 13.46(2)

Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{w : |w| \leq 1\}$ так, чтобы:

$$w(2i) = 0, \, \arg w'(2i) = 0$$

Поскольку точки, симметричные относительно границы, перейдут в точки, симметричные относительно границы, то $f(-2i) = \infty$, что даёт общий вид отображения: LaTeX

$$f(z) = \alpha\frac{z-2i}{z+2i} \Rightarrow f'(z) = \alpha\frac{z+2i-z+2i}{(z+2i)^2} = \\ = \frac{4}{(z+2i)^2} \Rightarrow f(2i) = \frac{\alpha}{4i}$$

$$\arg\frac{\alpha}{4i} = 0 \Rightarrow \alpha \in i\mathbb{R}_+$$

Чтобы найти значение α, проверим, что значение на границе $z = 0$ переходит на границу:

$$f(z) = \alpha\frac{-i}{i} = -\alpha \Rightarrow \alpha = i$$

Таким образом, $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{iz+2}{z+2i}$$

10 Задача 13.50(2)

Отобразить конформно внутренность единичного круга $\{z : |z| < 1\}$ на внутренность единичного круга $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы:

$$w\left(\frac{1}{2}i\right) = 0, \, \arg w'\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

Симметричные относительно границы точки при ДЛО переходят в симметричные относительно границы, поэтому $w(2i) = \infty$, что даёт общий вид отображения:

$$w(z) = \alpha\frac{z-i/2}{z-2i} \Rightarrow w'(z) = \\ = \alpha\frac{z-2i-z+i/2}{(z-2i)^2} = -\alpha\frac{5i}{2(z-2i)^2} \Rightarrow w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{2\alpha}{5i}$$

$$\arg\frac{2\alpha}{5i} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathrm{R}_{+}$$

Найдём α из условия, что точка с границы $z = i$ переходит на границу:

$$w(i) = \alpha\frac{-i/2}{-i} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2$$

Итого, $w(z)$ имеет вид:

$$w(z) = \frac{2z-1}{z-2i}$$

11 Задача 13.39(2)

Найти общий вид ДЛО, переводящего верхнюю полуплоскость $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ на правую полуплоскость $\{w : \mathrm{Re}\, w > 0\}$. Пусть точка $z = a$ переходит в точку $w = 0$. Заметим, что $a \in \mathbb{R}$, так как только точки границы переходят в точки границы. Тогда $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{z-a}{cz+d}$$

Точки $z = a + i$ и $z = a - i$ симметричны относительно границы, следовательно, их образы будут также симметричны относительно границы:

$$\begin{cases} \dfrac{i}{(ca+d)+ci} = \alpha + i\beta, \\ \dfrac{-i}{(ca+d)-ci} = -\alpha + i\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{i(ca+d)}{(ca+d)^2+c^2}, \\ \beta = \dfrac{-ci}{(ca+d)^2+c^2} \end{cases}$$

Поскольку $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c, d \in i\mathbb{R}$, т. е. общий вид $f(z)$ таков:

$$f(z) = i\frac{z-a}{cz+d}, a, c, d \in \mathbb{R}$$

12 Задача 13.69

Доказать, что регулярные ветви функции $w = \sqrt{z}$ конформно отображают плоскость C с разрезом по неотрицательной части действительной оси соответственно на нижнюю и верхнюю полуплоскости.

Пусть $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$. Тогда

$$w(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\left(\arg z + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\arg z + \frac{\pi k}{2}\right)\right), k = 0, 1$$

Для первой ветви при $z \in \mathbb{C} \quad |w(z)| \in [0; \infty), \arg w(z) \in [0; \pi]$. Для второй при $z \in \mathbb{C} \quad |w(z)| \in [0; \infty), \arg w(z) \in [\pi; 2\pi]$, что и требовалось.

13 Задача 13.75(2)

Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область $\mathbb{C} \setminus [z_1, z_2]$.

1. Построим ДЛО, отображающее $\mathbb{C} \setminus [z_1, z_2]$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$:
   (a) Обозначим $z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$, тогда $f(z) = \frac{1}{2}\frac{z-z_0}{z_0}$ конформно отобразит исходную область на область $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$.
   (b) Отображением $g(z) = \frac{1}{z} - 1$ можно конформно отобразить область $\mathbb{C} \setminus [0; 1]$ на область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.
2. По предыдущей задаче, первая ветвь корня конформно отображает полученное множество на верхнюю полуплоскость.

Получили отображение:

$$f(z) = \sqrt{\frac{1}{\frac{z-z_0}{2z_0}} - 1} = \sqrt{\frac{2z_0}{z - z_0} - 1} = \sqrt{\frac{3z_0 - z}{z - z_0}}$$

Где под корнем подразумевается аналитическое продолжение арифметического квадратного корня.

14 Задача 13.74(1)

Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость круговую "луночку":

$$\{z : |z| < 1, |z - i| < 1\}$$

Для начала с помощью ДЛО "выпрямим"область$(A \to 0, B \to \infty)$. $A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, B = \frac{sqrt3}{2} + \frac{i}{2}$.

$$z_1 = \frac{z - z_A}{z - z_B}$$

$$C \to \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})}{=} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$D \to \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Таким образом, область перешла в угол. Угол можно перевести в верхнюю полуплоскость путём композиции поворота и возведения в степень.

$$z^2 = z_1 e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z^3 = z_2^{3/2} = z\sqrt{z}$$

Где в качестве $\sqrt{z}$ берётся аналитическое продолжение арифметического корня.

15 Задача 12.31

Вычислить интеграл: $\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2+a^2} = I, a > 0$

Посчитаем интеграл по контуру γ, составленному из двух полуокружностей радиусами R и ε:

$$\oint_\Gamma \frac{\ln z}{z^2+a^2} dz = I_M$$

Где $\ln z = \ln|z| + i\text{arg}z$. Рассмотрим $lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} I_M$

$$L = \lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0} 2\pi i \operatorname{res}_{z=ai} \frac{\ln z}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right)$$

С другой стороны:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = \int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{x^2+a^2} \to I$$

$$I_2 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln x dx}{x^2+a^2} = \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{\ln(-x)+i\pi}{(-x)^2+a^2} dx = \int_\varepsilon^R \frac{\ln x dx}{x^2+a^2} + i\pi \int_\varepsilon^R \frac{dx}{x^2+a^2} \to I + i\pi\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = \int_\pi^0 \frac{ln(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}+a^2} \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = \varepsilon i \int_\pi^0 \frac{\ln\varepsilon + i\varphi}{\varepsilon^2 e^2 i\varphi + a^2} d\varphi \to 0$$

$$I_4 = \int_0^\pi \frac{Re^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi}+a^2} Rie^{i\varphi} d\varphi \to 0$$

Таким образом, $\frac{\pi}{a}\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right) = I + I + i\frac{\pi^2}{2a} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2a}\ln a$

16 Задача 13.79

Найти образы при отображении $w = e^z, z = x + iy$:

1. Прямоугольной сетки $x = c, y = c, c \in \mathbb{R}$.
2. Прямых $y = kx + b, k, b \in \mathbb{R}$.
3. Полосы $\alpha < y < \beta, 0 \le \alpha < \beta < 2\pi$.
4. Полосы между прямыми $y = x, y = x + 2\pi$.
5. Рассмотрим образ прямой $x = c, c \in \mathbb{R}$. Точки на этой прямой имеют вид $z = c + yi, y \in \mathbb{R}$.

Тогда $w = e^z = e^c(\cos y + i \sin y)$, т. е. вертикальные прямые перейдут в окружности с центром в нуле и радиусом e^c.

Точки прямой $y = c, c \in \mathbb{R}$ имеют вид $z = x + ci, x \in \mathbb{R}$. Тогда $w = e^{ci} \cdot e^x$, т. е. образами горизонтальных прямых будут лучи, исходящие от начала координат.

1. $y = kx + b : e^z = e^{x+i(kx+b)} = e^{ib}e^x e^{ikx} = e^x(\cos(kx+b) + i \sin(kx+b))$

Таким образом, образом прямой будет спираль.

1. Образом будет угол между α и β.
2. Разобьём полосу вертикальными отрезками. Отрезки перейдут в полные окружности с центром в нуле без одной точки,

лежащей на спирали, в которую переходят границы, т. е. образ - вся плоскость без спирали.

17 Задача 13.82

Функция Жуковского: $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ Найти образы:

1. Единичного круга и его внутренности.

Пусть $z = Re^{i\varphi}$. Тогда $w = \frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi} + \frac{1}{R}e^{-i\varphi}\right) = \cos\varphi\frac{R+R^{-1}}{2} + i\sin\varphi\frac{R-R^{-1}}{2} \equiv x + iy$

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{x^2}{(\frac{1}{2}(R+R^{-1}))^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2}(R-R^{-1}))^2}$$

$$a^2 - b^2 = 1$$

Получили семейство софокусных эллипсов, переходящее при $R = 1$ в отрезок $[-1, 1]$. Внутренняя(и внешняя) часть единичного круга переходит в $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

1. Верхней полуплоскости.

Верхние полуокружности перейдут в нижние полуэллипсы. Верхние полуокружности с радиусами $\frac{1}{R}$ дадут верхние полуэллипсы.

18 Задача 13.84

Отобразить на верхнюю полуплоскость $w : \mathrm{Im} z > 0$ области:

1. $\{z : |z| < 1 \ \left[\frac{1}{2}; 1\right]\}$

Применим к области функцию Жуковского, получим $\mathbb{C}_{i+} \setminus \left[1; \frac{5}{4}\right]$. Применим ДЛО $w_1 = \frac{w+1}{w-\frac{5}{4}}$. Получим $C_{i+} \setminus \mathbb{R}_+$. Применение второй ветви корня даст $\mathbb{C}_+$.

13.79, 13.80, 13.82, 13.84(2, 4), 13.87

19 Задача 2961

Разложить функцию $f(x) = x^2$:

1. На $(-\pi; \pi)$
2. На $(0; \pi)$
3. На $(0; 2\pi)$
4. Ряд Фурье на $(-\pi; \pi)$ имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n \in N$$

Поскольку $y = x^2$ - чётная функция, $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2 d(\sin nx) = \frac{2}{\pi n}\left(x^2\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi xd(\cos nx) = \frac{4}{\pi n^2}\left(x\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nxdx\right) = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

Соотвественно, ряд имеет вид:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx, x\in[-\pi;\pi]$$

1. Ряд имеет вид $x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$. Для получения этого разложения разложим функцию $f(x) = x^2\operatorname{sgn}x$

$$a_n = 0\forall n\in\mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nxdx = \frac{2}{\pi n}x^2 d(\cos nx) = \frac{2}{\pi n}\left(x^2\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cos nxdx\right) =$$

$$= (-1)^n\frac{2\pi}{n} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi xd(\sin nx) = (-1)^n\frac{2\pi}{n} - \frac{4}{\pi n^2}\left(x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nxdx\right) =$$

$$= (-1)^n\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)$$

1. Продолжим периодически функцию на $\mathbb{R}$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nxdx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nxdx = \frac{4\pi}{n}$$

Соответственно, ряд будет иметь вид:

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx + \frac{4\pi}{n}\sin nx\right), x\in(0;2\pi)$$

20 Задача 2955

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x - [x]$.

Раскладываем по промежутку $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$\{x\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$$

$$a_0 = 2\int_0^1 xdx = 1$$

$$a_n = 2\int_{-1/2}^{1/2}\{x\}\cos 2\pi nxdx = 2\int_0^1 x\cos 2\pi nxdx = \frac{x\sin 2\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin 2\pi nxdx =$$
$$= \frac{1}{\pi n}\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n}\Big|_0^1 = 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2\pi nxdx = -\frac{x\cos 2\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos 2\pi nxdx = -\frac{1}{\pi n}$$

Откуда ряд имеет вид:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$$

21 Задача 2479

Пусть $f(x+\pi) \equiv -f(x)$. Какой вид имеет ряд Фурье для $f(x)$?

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(y-\pi)\cos n(y-\pi)dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0, n \in 2\mathbb{Z}$$

22 Задача 2

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-2\alpha x^2}}{x}dx = I(\alpha), \alpha > 0$$

Продифференцируем интеграл по параметру α:

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{-x^2 e^{-\alpha x^2} + 2x^2 e^{-2\alpha x^2}}{x} dx = \int_0^\infty (-x e^{-\alpha x^2} + 2x e^{-2\alpha x^2}) dx =$$

$$= \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \Big|_0^\infty - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha x^2} \Big|_0^\infty = 0$$

В силу признака Вейерштрасса полученный интеграл сходится равномерно на любой полупрямой $[\alpha_0; +\infty)$, поэтому дифференцирование правомерно.

Отсюда находим $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = C$$

Найдём C:

$$C = I(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x} dx = \Big|_{x=\sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{\sqrt{t}} d(\sqrt{t}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = -\frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2}$$

Поскольку $f(t) = e^{-t} \in C[0; \infty)$ и $\forall A > 0 \exists \int_A^\infty \frac{f(t)}{t} dt$, то справедлива формула Фруллани:

$$\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Окончательно получаем: $\$\$\int_0 \hat{}\infty\{\frac{}{e^{-\alpha\ x^2}} \text{ - } \mathrm{e}^{-2\alpha\ x^2}\}\mathrm{xdx} = \text{-}\ln 2\frac{}{2,\forall}\ \alpha >$