1 Задача 2

Вычислить интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-2\alpha x^2}}{x} dx = I(\alpha), \alpha > 0$$

Продифференцируем интеграл по параметру α:

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{-x^2 e^{-\alpha x^2} + 2x^2 e^{-2\alpha x^2}}{x} dx = \int_0^\infty (-xe^{-\alpha x^2} + 2xe^{-2\alpha x^2}) dx =$$
$$= \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha x^2}\Big|_0^\infty = 0$$

В силу признака Вейерштрасса полученный интеграл сходится равномерно на любой полупрямой $[\alpha_0; +\infty)$, поэтому дифференцирование правомерно.

Отсюда находим $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = C$$

Найдём C:

$$C = I(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x} dx = \Big|_{x=\sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{\sqrt{t}} d(\sqrt{t}) =$$
$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = -\frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2}$$

Поскольку $f(t) = e^{-t} \in C[0; \infty)$ и $\forall A > 0 \exists \int_A^\infty \frac{f(t)}{t} dt$, то справедлива формула Фруллани:

$$\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Окончательно получаем:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-2\alpha x^2}}{x} dx = -\frac{\ln 2}{2}, \forall \alpha > 0$$