Лектор Иновенков Игорь Николаевич. Рейтинговая система, экзамен.
Учебники:

1. Тихонов, Самарский. "уравнения математической физики"

2. Захаров, Дмитриев, ? "уравнения математической физики"

1 Классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Это уравнения вида

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{1}$$

Уравнение Монжа-Ампера:

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \pm 1$$

Будем рассматривать более простой вариант уравнения второго порядка:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

Уравнение вида (1) называется **квазилинейным**, если a_{11}, a_{12} и a_{22} зависят от x, y, u, u_x, u_y.

Уравнение вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \tag{2}$$

где a_{ij}, b_k, c, f - функции от x и y. Если $f \equiv 0$, то уравнение (2) называется **однородным**. Рассмотрим замену вида

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$$

Тогда частные производные u запишутся в виде

$$\begin{cases} u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, \\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y + u_\eta\eta\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{yx}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}, \end{cases}$$

Подставим эти формулы в (2):

$$u_{\xi\xi}\left(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2\right) + 2u_{\xi\eta}\left(a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y\right) + \\ + u_{\eta\eta}\left(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2\right) + F = 0$$

Или:

$$\overline{a_{11}}u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}}u_{\eta\eta} + F = 0 \tag{3}$$

Потребуем, чтобы $\overline{a_{11}} = 0$. Получим уравнение:

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0 \tag{4}$$

Если $\varphi(x, y) = C$, то $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$, откуда, выразив, например, φ_x, получим

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{5}$$

Уравнение (10) называется **характеристическим**.

$$\overline{a_{12}} - \overline{a_{11}a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y, \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

Расмотрим характеристическое уравнение:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0, a_{11} \neq 0$$

Его решение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то уравнение называется **гиперболическим**.

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то уравнение называется **параболическим**.

Остальные уравнения называются **эллиптическими**.

Пусть уравнение гиперболическое. Тогда $\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}} = 0$ и уравнение записывается в **первой канонической форме**:

$$u_{\xi\eta} = \Phi, \Phi = -\frac{F}{2\overline{a_{12}}} \tag{6}$$

Положим

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta, \\ \eta = \alpha - \beta, \end{cases} \tag{7}$$

Тогда уравнение записывается в виде:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \overline{\Phi}, \overline{\Phi} = 4\Phi, \tag{8}$$

Называемом **второй канонической формой**.

Перейдём теперь к уравнениям параболического типа. Для них ξ - интеграл (7), η - независимая от него функция, $a_12 = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Тогда

$$a_{11}\xi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$

$$\overline{a_{12}} = a_{11}\xi_x\eta_y + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0$$

Откуда

$$\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}} = 0, u_{\eta\eta} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{9}$$

Пусть теперь у нас уравнение эллиптического типа. Тогда ξ и η представимы в виде:

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta, \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases}$$

$$\xi_x = \alpha_x + i\beta_x,$$

$$\overline{a_{11}} = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 =$$
$$= a_{11} + \alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2 + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) + (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) = 0$$

Откуда

$$\overline{a_{12}} = a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y = 0$$

Рассмотрим случай постоянных коэффициентов:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + b_1 u_x + cu + f = 0, \\ u_{xx} + u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В гиперболическом случае:

Сделаем замену $u(x, y) = e^{\lambda x + \mu y}\nu(x, y)$. Получим:

$$e^{\lambda x+\mu y}(\nu_{xx} + 2\lambda\nu_x + \lambda^2\nu) - e^{+\mu y}(\nu_{yy} + 2\mu\nu_y + \mu^2\nu) + \\ + e^{\lambda x+\mu y}(b_1\nu_x + b_2\mu\nu) + e^{\lambda x+\mu y}(b_2\nu_y + b_2\mu\nu) + ce^{\lambda x+\mu y}\nu + f = 0$$

Таким образом, уравнения с постоянными коэффициентами приводятся к виду:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + cu + f = 0, \\ u_{xx} - u_y + cu + f = 0, \\ u_{xx} + u_{yy} + cu + f = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Частные случаи, которые мы будем рассматривать:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ или } \Delta u = 0, \\ u_{tt} = u_{xx}. \end{cases} \tag{12}$$

2 Уравнение непрерывности

Выведем **уравнение непрерывности**. Пусть P - плотность некоторой величины, $\vec{j}$ - плотность её потока, f - интенсивность её источника. Уравнение баланса для этой величины будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Delta V} P d\tau = -\oiint \vec{j} d\vec{j} + \iiint_{\Delta V} f dt \tag{13}$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = f \tag{14}$$

Уравнение теплопроводности

$$C_\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f(x, y, z, t) \tag{15}$$

3 Смешанная задача для уравнения в частных производных параболического типа

Уравнение + граничные условия + начальные условия:

$$\begin{cases} u|_\Sigma = u(M, t), M \in \Sigma \text{ - граничные условия первого рода} \\ \vec{q}|_\Sigma = \vec{\nu}(M, t), q = -k \operatorname{grad} u \text{ - граничные условия второго рода,} \\ -k\frac{\partial u}{\partial n}|_\Sigma = \nu_n(M, t), \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u_\sigma + \chi(M, t), M \in \Sigma \text{ - граничные условия третьего рода.} \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \nu_1(t), \\ u_x(l,t) = \nu_2(t), \\ u_x - h_1 u|_{x=0} = \theta_1(t), \\ u_x + h_2 u|_{x=l} = \theta_2(t). \end{cases} \tag{18}$$

Ищем решение типа $u(x,t) \in C^{2,1}((0,l)\times[0,T]) \cap C([0,l]\times[0,T])$. Тогда $f(x,t), \nu_1(t), \nu_2(t), \varphi(x)$ непрерывны. Также $\nu_1(0) = \varphi(0), \nu_2(0) = \varphi(l)$.

3.1 Метод разделения переменных

Рассмотрим простейший вариант смешанной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{19}$$

Ищем частное решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Получим:

$$\begin{cases} XT' = a^2 X'' T, \\ X(0)T(t) = 0, \\ X(l)T(t) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Откуда

$$\begin{cases} \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Обозначим

$$Lv = \frac{d^2 v}{dx^2}, Lv = \mu v \Rightarrow (Lv, v) \leq 0 \tag{22}$$

Решая уравнения, получим:

$$\begin{cases} X'' + = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \\ X(0) = C_1 = 0, X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{23}$$

$$T' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 = 0 \Rightarrow T_n(t) = e^{-\frac{\pi n a}{l}t} a_n \tag{24}$$

Получим систему частных решений $u_n(x,t) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$. Тогда общее решение будет иметь вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{t}, \tag{25}$$

Где φ_n - коэффициенты разложения $\varphi(x)$ в ряд Фурье.

Такая схема плохо работает при более общих начальных условиях.

3.2 Общая схема метода разделения переменных

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \\ l_1 u|_{x=0} = \mu_1(t), \\ l_2 u|_{x=l} = \mu_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{26}$$

1. Проверяем самосопряжённость задачи, т. е. что $L = L^*$. Если она не является самосопряжённой,

пытаемся привести её к таковой.

a) $L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$. Привести можно с помощью замены $u(x,t) = e^{\mu t}\nu(x,t)$.

b) $L = \frac{d^2}{dx^2}$. Привести не получается. Задача Самарского-Ионкина:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) \end{cases} \tag{27}$$

2. Приводим граничные условия к однородным.($f(kx,ky) = kf(x,y)$.) a)

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{28}$$

Ищем решения в виде $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$$\begin{cases} w(0,t) = \mu_1, \\ w(l,t) = \mu_2. \end{cases} \tag{29}$$

Проще всего взять $w(x,t) = (\mu_2 - \mu_1)\frac{x}{l} + \mu_1$. b)

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u_x(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{30}$$

Возьмём $w(x,t) = \mu_2(t)x + \mu_1$. c)

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1, \\ u_x(l,t) = \mu_2. \end{cases} \tag{31}$$

Ищем $w(x)$ в виде $w(x,t) = ax^2 + bx$.

1. Получили **задачу Штурма-Лиувилля**:

$$\begin{cases} LX + \lambda X = 0, \\ l_1 X|_{x=0} = 0, \\ l_2 X|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Теорема 1. *Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

1. Раскладываем правую часть, граничные условия и решение по собственным функциям:

$$
\begin{cases}
v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x), \\
\overline{f}(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), f_n(t) = \dfrac{1}{||x_n||^2} \displaystyle\int_o^l \overline{f}(x,t) X_n(x) dx, \\
\overline{\varphi}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \varphi_n = \dfrac{1}{||x_n||^2} \displaystyle\int_0^l \overline{\varphi}(x) X_n(x) dx.
\end{cases}
\tag{33}
$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{dv_n}{dt} + \lambda_n v_n + f_n(t) \right) X_n(x) = 0, \\
\sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n(0) - \varphi_n) X_n(x) = 0.
\end{cases}
\tag{34}
$$

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X(x) + w(x,t)
$$

3.3 Теорема существования

Рассмотрим задачу

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\
u(0,t) = 0, \\
u(l,t) = 0, \\
u(x,0) = \varphi(x).
\end{cases}
\tag{35}
$$

Методом, рассмотренным выше, получаем разложение:

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t \sin \frac{\pi n x}{l} (36)}
$$

$$
u_t(x,t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}
$$

$$
u_{xx}(x,t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi_n \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n x}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n x}{l}
$$

Оба ряда сходятся равномерно и являются непрерывными функциями $\Rightarrow$.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz_n}{dt} + \left(\dfrac{\pi n a}{l} z_n \right)^2 = f_n(t), \\
z_n(0) = 0.
\end{cases}
\tag{37}
$$

Тогда $z_n(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau) d\tau$, где

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU}{dt} + \left(\dfrac{\pi n a}{l} \right)^2 U = 0, \\
U(0) = 1
\end{cases}
\Rightarrow U(t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}
\tag{38}
$$

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \cdot e^{-t}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0, \\ u(x,t) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{40}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где u_1 и u_2 - решения систем

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\ u_1(0,t) = u_1(l,t) = 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{41}$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\ u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0, \\ u_2(x,0) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Решение задачи (41) записывается в виде:

$$u_1(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \tag{43}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n \xi}{l} \text{ - функция-источник.}$$

Выясним физический смысл функции-источника:

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi = \int_{x^*-\varepsilon}^{x^*+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)G(x,\xi,t)d\xi = G(x,\tilde{\xi},t)\int_{x^*-\varepsilon}^{x^*+\varepsilon} \varphi(\xi)d\xi = \frac{Q}{\varepsilon\rho}G(x,\xi,t). \tag{44}$$

Таким образом, функция-источник описывает влияние точечного источника тепла.

Дельта-функция Дирака:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ +\infty, x = 0, \end{cases} \tag{45}$$

причём $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$.

$$\forall g(x) \in C(R) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0).$$

Введём функцию

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x < 0. \end{cases} \tag{46}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x) = H(x)$$

$$H'(x) = \delta(x)$$

Решение задачи (42) имеет вид:

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{47}$$

Запись решений задач (41) и (42) в явном виде доказывает теорему существования.

Теорема 2 (Принцип максимума)**.** *Если* $u(x,t) \in C([0,l]\times[0,t])$ *и* $u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \le T$, *то* $\max_{[0,l]\times[0,T]} u(x,t) = \max_{x=0,x=l,t=0} u(x,t)$.

Доказательство. Пусть $\max_{x=0,x=l,t=0} u(x,t) = M$ и $\exists(x_0,t_0) \in (0,l)\times(0,T)$, в которой $u(x_0,t_0) = M+\varepsilon$. Тогда $u_x(x_0,t_0) = 0, u_{xx}(x_0,t_0) \le 0, u_t(x_0,t_0) \ge 0$. Введём функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t). \tag{48}$$

Для неё $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M+\varepsilon$. Выберем k так, чтобы $k(t_0-t) < kT < \frac{\varepsilon}{2}$. При таком k

$$max_{x=0,x=l,t=0} v(x,t) \le M + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{49}$$

Поскольку $v(x,t) \in C([0,l]\times[0,T])$, то $\exists(x_1,t_1)$, в которой $v(x_1,t_1) \ge M+\varepsilon$. В этой точке

$$v(x_1,t_1) = \max_{[0,l]\times[0,T]} v(x,t), v_{xx} = u_{xx} \le 0, v_t = u_t - k \ge 0. \tag{50}$$

Противоречие. □

Следствие 1. *Если*

$$\begin{cases} (u_1)_t = a^2(u_1)_{xx}, 0 < x < l, 0 < t, \\ u_1(0,t) = \nu_1(t), u_1(l,t) = nu_2(t), \\ u_1(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (u_2)_t = a^2(u_2)_{xx}, \\ u_2(0,t) = \overline{\nu_1}(t), u_2(l,t) = \overline{\nu_2}(t), \\ u_2(x,0) = \overline{\varphi_1}(x), \end{cases} \tag{51}$$

причём

$$\nu_1 \le \overline{\nu_1}, \nu_2 \le \overline{\nu_2}, \varphi \le \overline{\varphi} \forall (x,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{52}$$

то $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$.

Следствие 2. *Если* $|\nu_1(t)| \le \varepsilon, |\nu_2(t)| \le \varepsilon, |\varphi(x)| \le \varepsilon$, *то* $|u(x,t)| \le \varepsilon$, *т. е. задача (35) устойчива.*

3.4 Теорема единственности

Теорема 3 (Теорема единственности)**.** *Задача (35) имеет одно решение.*

Доказательство. Пусть есть два решения задачи (35): $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Положим $v(x,t)$. Тогда $v(x,t)$ - решение задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \tag{53}$$

Эта задача имеет только нулевое решение. □

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -u_t = u_{xx}, 0 < x < \pi, 0 < t < +\infty, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \varepsilon \sin x. \end{cases} \tag{54}$$

Её решением будет функция $u(x,t) = \varepsilon \sin x e^t \Rightarrow$ задача поставлена некорректно.

Рассмотрим теперь задачу другого типа:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \le T, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{55}$$

Рассмотрим функционал $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2 dx$. Так как $uu_t = uu_{xx}$, то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2 dx = \int_0^l uu_{xx} dx = uu_x - \int_0^l u_x^2 dx. \tag{56}$$

Тогда $E(t)$ - решение системы:

$$\frac{dE}{dt} \le 0, E(0) = 0, \tag{57}$$

откуда $E(t) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$.

3.5 Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \quad , ('''') . \tag{2}$$

Теорема 1 (Теорема единственности)**.** *Задача*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 < t, \\ v(x,0) = 0, \\ |v(x,t)| < 2M \end{cases} \tag{3}$$

где $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Введём функцию $V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$. Тогда $v|_{t=0} = \frac{2M}{L^2}x^2 \ge 0, v|_{x=\pm L} = 2M + \frac{a^2 t 4M}{L^2} > 2M$. Но $|v(x,t)| < V(x,t)$, а $\lim_{h\to+\infty} V(x,t) = 0 \Rightarrow v(x,t) \equiv 0$. □

Теорема 2 (Теорема существования)**.** *Существует решение задачи Коши:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ |u(x,t)| < M. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2. \tag{5}$$

Тогда $X(x) = C_1 e^{i\lambda x} + C_2 e^{-i\lambda x}, T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$. Решение записывается в виде $u_\lambda(x,t) = A(\lambda)e^{i\lambda x}e^{-a^2\lambda^2 t}$, $-\infty < \lambda < +\infty$.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda, \tag{6}$$

где

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty} \varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \tag{7}$$

или

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi, \tag{8}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}d\lambda. \tag{9}$$

Найдём аналитическое выражение для $G(x,\xi,t)$:

$$\begin{aligned} G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t\left(\lambda^2 - 2i\lambda\frac{x-\xi}{2a^2t} + \left(i\frac{x-\xi}{2a^2t}\right)^2 - \left(i\frac{x-\xi}{2a^2t}\right)^2\right)} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-i\sigma}^{+\infty-i\sigma} e^{-a^2tp^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}dp = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{-\infty-i\sigma}^{+\infty-i\sigma} e^{-z^2}dze^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}e^{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}. \end{aligned} \tag{10}$$

□

3.6 Метод подобия

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

Сделаем замену $x' = kx, t' = k^2 t$, тогда $u_{t'} = a^2 u_{xx}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t'}k^2, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}k, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}k^2. \tag{11}$$

Рассмотрим задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \begin{cases} u_0, x > 0, \\ 0, x < 0. \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\begin{cases} u_{t'} = a^2 u_{xx}, \\ u(x',0) = \begin{cases} u_0, x > 0, \\ 0, x < 0. \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

$$u(x,t) = u(x',t') = u(kx, k^2 t)$$

Положим $k = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, тогда $u(x,t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}4\right)$.

Ищем решение задачи