

Лабораторная работа: Исследование точечных отображений

Выполнил: Дорогостайский
Илья Ярославович,
группа J3114

22 февраля 2026 г.
Санкт-Петербург

Введение

В данной лабораторной работе будем исследовать поведение дискретных динамических систем, задаваемых точечным отображением

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n),$$

где \vec{x}_n — состояние системы в момент n , а \vec{f} — отображение, определяющее переход к следующему состоянию, на примере логистического отображения и его модификаций.

Будем использовать понятия предела, монотонности и ограниченности, изученные в рамках курса математического анализа, в данной работе для исследования рассматриваемых в качестве примера динамических систем последовательностей.

Смысл работы состоит в закреплении полученных знаниях на практике. Наша задача - научиться исследовать поведение последовательностей и изучить свойства последовательностей, задаваемых рекуррентно.

Ход работы:

- Проанализируем динамику логистического отображения при различных значениях параметров и начального условия.
- Исследуем влияние параметра r на поведение точечных отображений и изменение их качественных свойств.
- Ознакомимся с понятием неподвижной точки, определим условия её существования и количество.
- Изучим последовательности, порождаемые отображением, на предмет монотонности и наличия предела.
- Проанализируем существование циклов порядка t и их свойства для рассматриваемых отображений.
- Исследуем поведение циклов разных порядков с использованием построения лестниц Ламерей.
- Подтвердим полученные аналитические результаты с помощью графической визуализации.

Easy

Прежде чем приступить к практике, обозначим вводимые в рамках работы определения и поясним их.

Определение: Логистическим отображением называется функция вида

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

где r — параметр скорости прироста, x_n — состояние системы в некий момент n , а x_{n+1} — её же состояние в следующий момент. Также известны свойства логистического отображения, такие как:

$$r \in [0, 4],$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad x_n \in [0, 1].$$

NB: Логистическое отображение широко используется при описании динамических систем, например при исследовании скорости изменения численности популяций. В таком случае параметр r характеризует скорость роста популяции от момента n до момента $n + 1$ (фактор "рождаемости минус смертности")

Задача 1

Доказать утверждение:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Доказательство. (по методу математической индукции)

1) База индукции:

По определению логистического отображения $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$.

Тогда при $n = 1$ имеем:

$$x_1 = rx_0(1 - x_0).$$

Так как $0 < x_0 < 1$, имеем:

$$-1 < -x_0 < 0 \iff 0 < 1 - x_0 < 1$$

Тогда $0 < x_0(1 - x_0) < 1$. При $r \in (0, 1]$ получаем:

$$0 < rx_0(1 - x_0) < 1.$$

Итак,

$$0 < x_1 < 1.$$

2) Индукционное предположение:

Пусть для некоторого $k = n$ верно:

$$0 < x_k < 1.$$

Тогда докажем, что и $0 < x_{k+1} < 1$ через определение логистического отображения:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k).$$

Так как $0 < x_k < 1$, то $0 < 1 - x_k < 1$. Следовательно, $0 < x_k(1 - x_k) < 1$.
При $r \in (0, 1]$, получаем

$$0 < rx_k(1 - x_k) < 1.$$

Следовательно,

$$0 < x_{k+1} < 1.$$

3) Интерпретация:

Значит при $x_0 \in (0, 1)$ верно:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : 0 < x_n < 1.$$

Действительно, если про начальное состояние x_0 нам известно, что $x_0 \in (0, 1)$, тогда, исходя из формулы логистического отображения и ограничений, наложенных на r , после n итераций мы получим x_n , также не выходящее за пределы $(0, 1)$. Т.е. справедливо будет сказать:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

□

Задача 2

1. Как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_{n+1} от x_n ?

Заметим, что график зависимости x_{n+1} от x_n — это график функции

$$y = f(x) = rx(1 - x).$$

Рассмотрим этот график, чтобы изучить влияние параметра r на поведение функции:

- $f(0) = 0$ и $f(1) = 0$, т.е. график проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ при любом r .
- $f(x) = rx(1 - x) = -rx^2 + rx$ — квадратичная функция, график является параболой с ветвями, направленными вниз.
- Вершина параболы достигается при $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}.$$

Следовательно, параметр r масштабирует график по вертикали: чем больше r , тем выше вершина и тем больше значения x_{n+1} при фиксированном $x_n \in (0, 1)$.

- Так как $\max f(x) = \frac{r}{4}$, то при $r \in [0, 4]$ имеем $f(x) \leq 1$ на $[0, 1]$, что согласуется с оценкой $x_n \in [0, 1]$. При $r > 4$ член x_n может оказаться вне этого диапазона.
- **Вывод:** Параметр r не меняет значения f на $x = 0$, $x = 1$, но изменяет высоту и крутизну графика: при росте r парабола растягивается вверх, а максимум $\max f(x) = \frac{r}{4}$ растёт линейно.

2. Постройте эту функцию для нескольких различных значений r .

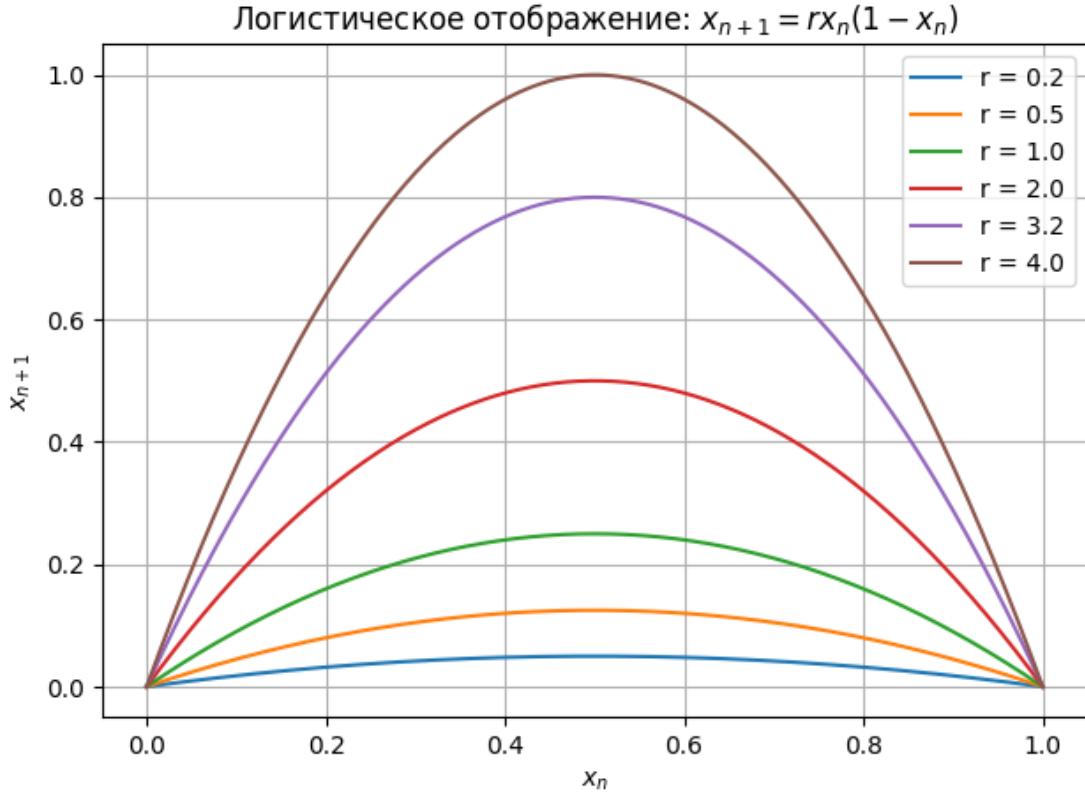


Рис. 1: Графики функции $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ при различных r .

Задача 3

1. Постройте графики зависимости x_{n+1} от x_n для различных значений r .

По условию варианта ($N = 0$) будем рассматривать точечное отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n), \quad r \in \left[0; \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}\right].$$

Рассмотрим график этой функции:

- $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$. Следовательно, график проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Также существует нуль при $x = -2$, однако он не принадлежит отрезку $[0, 1]$.
- $g(x) = r(2x - x^2 - x^3)$ - кубическая функция, графиком является кубическая парабола.
- Рассмотрим $g(x)$ при $x \in [0, 1]$:

$$x(1 - x)(2 + x) \geq 0.$$

так как $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \in [0, 1]$, получаем оценку $r \geq 0$

- Чтобы найти максимум функции, рассмотрим её производную:

$$g'(x) = r(2 - 2x - 3x^2).$$

Из уравнения $g'(x) = 0$ получаем:

$$2 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}.$$

Эта точка принадлежит $(0, 1)$ (т.к. $\frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.55$) Данная точка экстремума единственна на рассматриваемом промежутке, и проходя через неё $g'(x)$ меняет свой знак с + на -, следовательно, $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ - точка максимума функции на $(0, 1)$.

- Подставим это значение, чтобы оценить r :

$$\begin{aligned} \max g(x) &= r\left(2\frac{\sqrt{7}-1}{3} - \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{9} - \frac{(\sqrt{7}-1)^3}{27}\right) = \\ &= r\left(2\frac{\sqrt{7}-1}{3} - \frac{8-2\sqrt{7}}{9} - \frac{10\sqrt{7}-22}{27}\right) = r\frac{18(\sqrt{7}-1) - 3(8-2\sqrt{7}) - (10\sqrt{7}-22)}{27} = \\ &= r\frac{2(7\sqrt{7}-10)}{27}. \end{aligned}$$

Из $\max g(x) \leq 1$ следует:

$$r \leq \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}; \quad r \in [0, \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}]$$

2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Чем могут быть вызваны сходства/различия?

Исходя из рассмотренных свойств функции $g(x) = rx(1-x)(2+x)$, нетрудно выявить её сходства и различия сравнительно с функцией логистического отображения $f(x) = rx(1-x)$:

Сходства.

- В обоих случаях имеется точечное отображение вида $x_{n+1} = F(x_n)$, зависящее от параметра r , причём увеличение r приводит к увеличению значений $F(x)$ при фиксированном $x \in (0, 1)$ (r вертикально масштабирует график).
- Оба отображения имеют нули на $[0, 1]$ в точках $x = 0$ и $x = 1$:

$$f(0) = f(1) = 0, \quad g(0) = g(1) = 0,$$

поэтому их графики проходят через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, вне зависимости от r .

Различия.

- Логистическое отображение задаёт квадратичную функцию, а отображение $g(x) = rx(1-x)(2+x)$ - кубическую. Поэтому форма графиков будет отличаться: хотя на $[0, 1]$ внешне графики и схожи, кривая $g(x)$ не является параболой $f(x)$ и имеет иное распределение значений по x (даже при фиксированном r).

Очевидно, что сходства обусловлены общей структурой: оба отображения задаются итеративно и зависят от параметра r как от масштабирующего множителя.

В свою очередь, различия вызваны разной старшей степенью отображений, что меняет форму графика x_{n+1} от x_n и, как следствие, характер итераций.

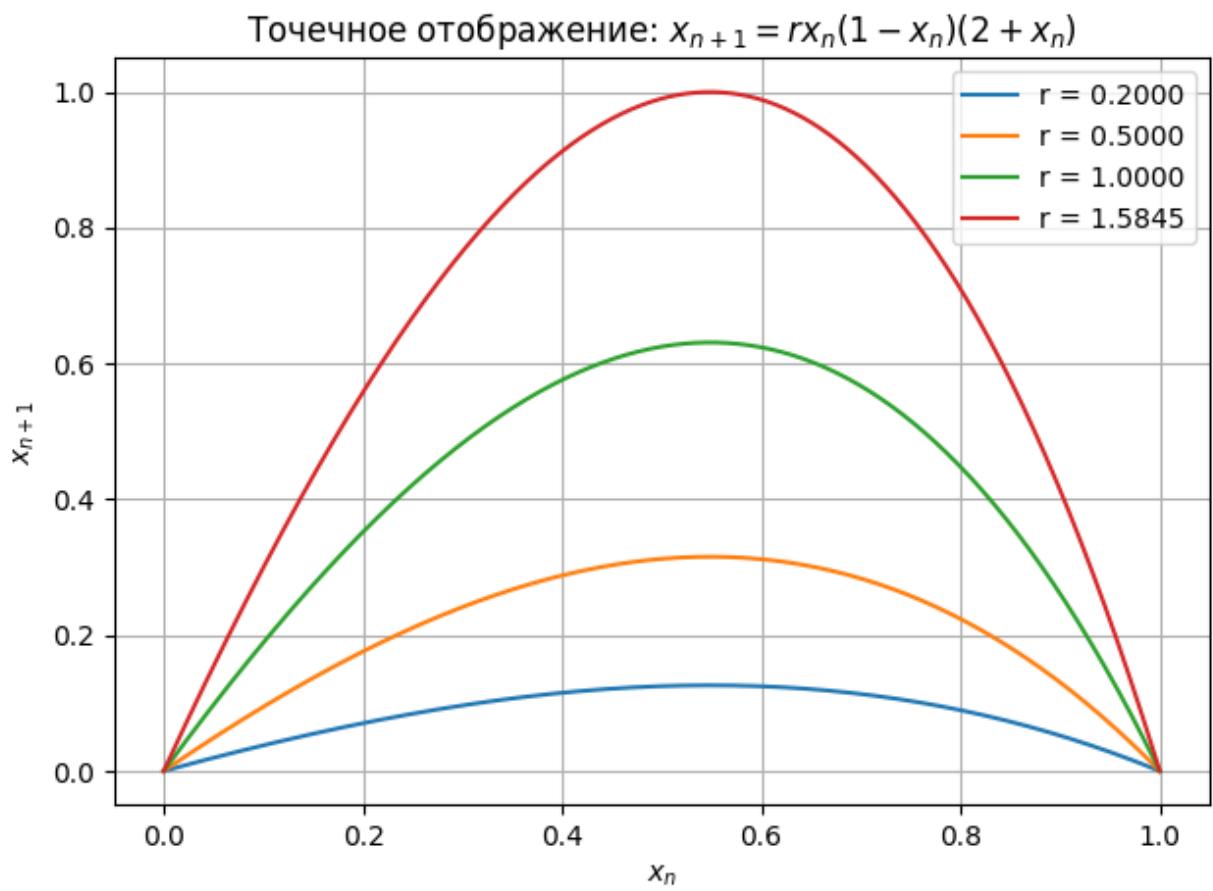


Рис. 2: Графики функции $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n)$ при различных r .

Normal

Прежде чем приступать к дальнейшим заданиям, рассмотрим вводимое в рамках работы определение неподвижной точки.

Определение. Точка x^* называется *неподвижной точкой* отображения $f(x)$, если

$$x^* = f(x^*).$$

Иными словами, при применении отображения неподвижная точка переходит сама в себя.

Задача 4

1. Найти все неподвижные точки логистического отображения.

Рассматривая $x_n = x^*$ в логистическом отображении $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, справедливо будет заметить, что:

$$x_n = rx_n(1 - x_n).$$

Найдём неподвижные точки, удовлетворяющие этому равенству, решив его:

$$\begin{aligned} x &= rx(1 - x) \iff rx - rx^2 - x = 0 \iff \\ &\iff -rx^2 + (r - 1)x = 0 \iff x(-rx + r - 1) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$x = 0,$$

$$-rx + r - 1 = 0.$$

Из второго уравнения:

$$rx = r - 1 \iff x = \frac{r - 1}{r}$$

Итак, мы нашли неподвижные точки:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{r - 1}{r}.$$

2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?

При $r = 0$, отображение $f(x) = rx(1 - x) = 0$, и уравнение $x = f(x)$ даёт единственное решение:

$$x = 0.$$

При $r = 1$, согласно найдённой неподвижной точке, имеем:

$$x_2 = \frac{1 - 1}{1} = 0,$$

т.е. обе формулы дают одну и ту же точку. Следовательно, при $r = 1$ неподвижная точка одна.

Итак:

$$\begin{cases} r = 0 \cup r = 1 & \text{одна неподвижная точка,} \\ r \in (0, 1) & \text{две различные неподвижные точки.} \end{cases}$$

3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

Уравнение неподвижных точек приводится к квадратному уравнению относительно x :

$$x = rx(1 - x) \iff -rx^2 + (r - 1)x = 0.$$

Квадратное уравнение может иметь не более двух действительных корней. Следовательно, максимальное количество неподвижных точек логистического отображения равно двум.

Задача 5

Условие. Пусть $x_0 \in (0; 1)$, $r \in (0; 1]$, и последовательность $\{x_n\}$ задана логистическим отображением:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1}),$$

1. Доказать, что $\{x_n\}$ монотонно убывает

Доказательство. По задаче 1 нам уже известно, что:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Таким образом имеем:

$$\begin{cases} x_n \in (0, 1) \\ (1 - x_n) \in (0, 1) \\ r \in (0, 1] \end{cases}$$

Отсюда следует, что $0 < r(1 - x_n) < 1$, тогда при $0 < x_n < 1$ будет верно:

$$x_n \cdot r(1 - x_n) < x_n$$

$$x_{n+1} < x_n.$$

Значит, последовательность $\{x_n\}$ строго монотонно убывает. \square

2. Определить, будет ли последовательность $\{x_n\}$ сходящейся при $r \in (0, 1]$. Подтвердить это графически.

Доказательство. По пункту 1 последовательность $\{x_n\}$ строго монотонно убывает. По задаче 1 также известно, что $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1$, значит $\{x_n\}$ ограничена снизу нулём.

Следовательно, по теореме о монотонной ограниченной последовательности у $\{x_n\}$ существует конечный предел. \square

NB: По рис.3 видно, что $\{x_n\}$ сходится к нулю. Нетрудно доказать это аналитически: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} rx_n(1 - x_n)$. Так как последовательность задана рекуррентно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

После преобразований получили:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{или} \quad r(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = 1.$$

При $r \in (0; 1]$ имеем $\frac{r-1}{r} \leq 0$, а так как $x_n > 0$ для всех n , то предел не может быть отрицательным. Следовательно,

$$\forall x_n \in \{x_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

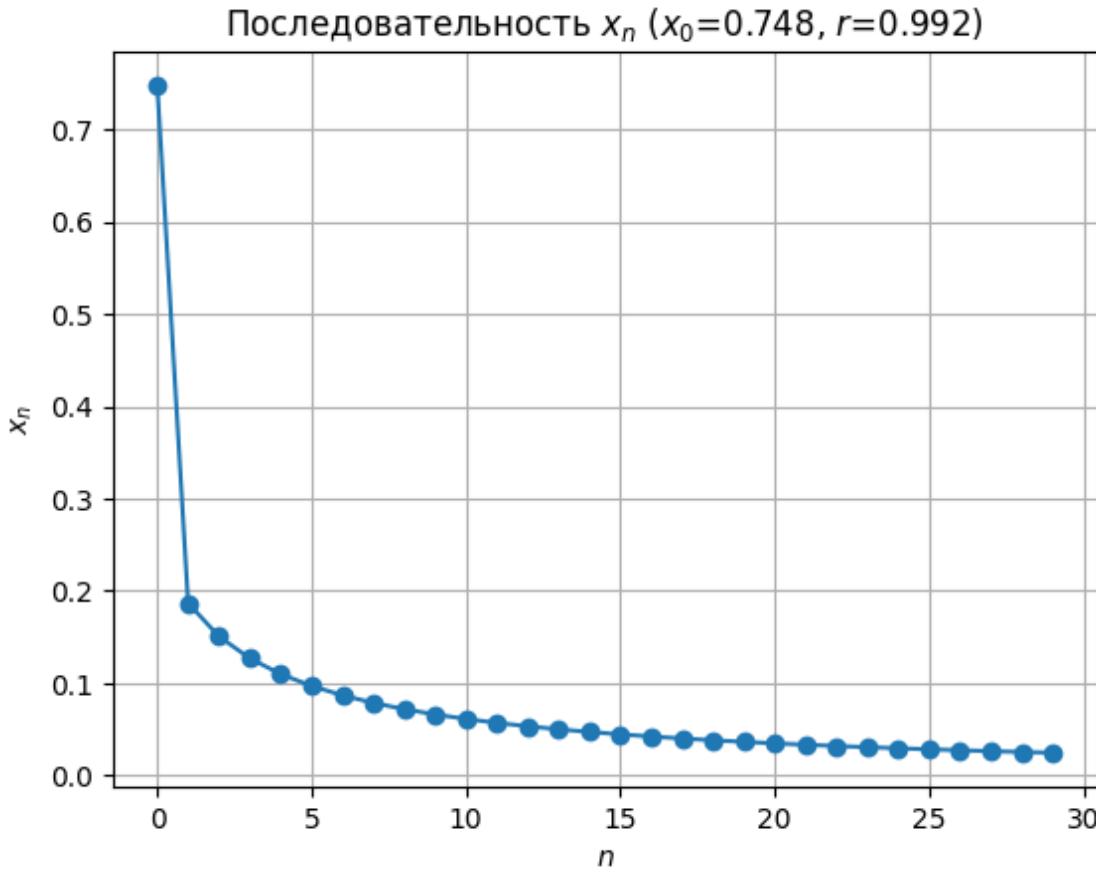


Рис. 3: График последовательности x_n при $r \in (0; 1]$.

Задача 6

Условие. Пусть $r \in (2; 3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$, где $x^* = \frac{r-1}{r}$ — ненулевая неподвижная точка логистического отображения.

1. Исследовать монотонность подпоследовательностей $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$.

1) Так как нам известны оценки $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$, сравним $x_n = f(x_{n-1})$ и $x^* = f(x^*)$:

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x^*) &= rx(1-x) - \frac{r-1}{r} = rx - rx^2 - \frac{r-1}{r} = rx - rx^2 - \frac{r-1}{r} + x - x = \\
 &= \left(-\frac{r-1}{r} + rx - x\right) - rx^2 + x = (rx - 1) \cdot \frac{r-1}{r} + (-rx + 1) \cdot x = \\
 &= -\left(x - \frac{r-1}{r}\right)(rx - 1) = -r\left(x - \frac{r-1}{r}\right)\left(x - \frac{1}{r}\right).
 \end{aligned}$$

При $r \in (2; 3)$ имеем: $0 < \frac{1}{r} < x^* < 1$.

Из полученного следует:

- Если $x > x^*$, то $(x - x^*) > 0$ и $\left(x - \frac{1}{r}\right) > 0$, значит $f(x) - f(x^*) < 0$, то есть

$$x > x^* \Rightarrow f(x) < f(x^*) = x^*.$$

- Если $\frac{1}{r} < x < x^*$, то $(x - x^*) < 0$ и $\left(x - \frac{1}{r}\right) > 0$, значит $f(x) - f(x^*) > 0$, то есть

$$x < x^* \Rightarrow f(x) > f(x^*) = x^*.$$

Таким образом, отображение f «перебрасывает» точку через x^* : если x_n лежит выше x^* , то $x_{n+1} = f(x_n)$ оказывается ниже, и наоборот.

2) Так как одна итерация меняет сторону относительно x^* , удобно рассмотреть двухшаговое отображение, определяющее каждую из подпоследовательностей:

$$g(x) = f(f(x)).$$

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}), \quad x_{2n+3} = g(x_{2n+1}).$$

Исследуем поведение $g(x)$ с помощью производной:

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

$$g'(x^*) = (f'(x^*))^2 = (2 - r)^2.$$

При $r \in (2; 3)$ имеем

$$0 < (2 - r)^2 < 1,$$

Это значит:

- $g(x)$ сохраняет сторону x ($g'(x^*) > 0$) (если xRx^* , то и $g(x)Rx^*$),
- $g(x)$ уменьшает расстояние до x^* ($|g'(x^*)| < 1$). (т.е. $|g(x) - x^*| < |x - x^*|$)

3) Так как $g(x)$ уменьшает расстояние до x^* , то

$$x_{2n+2} - x^* < x_{2n} - x^*, \quad x_{2n+2} < x_{2n}$$

Значит, подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ монотонно убывает.

Аналогично, для x_{2n+1} :

$$x_{2n+3} > x_{2n+1}.$$

Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$ монотонно возрастает.

2. Графически проверить это утверждение.

На рис. 4 видно, что чётные значения располагаются по одну сторону от x^* и монотонно приближаются к x^* , а нечётные — по другую сторону и также монотонно приближаются к x^* .

Задача 7

1. Для отображения $g(x_n)$, заданного вариантом, найти все неподвижные точки.

Напомним себе данное нам отображение:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x) = rx(1-x)(2+x), \quad r \in \left[0; \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}\right].$$

По определению, x^* — неподвижная точка, если $g(x^*) = x^*$. Решим уравнение:

$$rx^*(1-x^*)(2+x^*) = x^*.$$

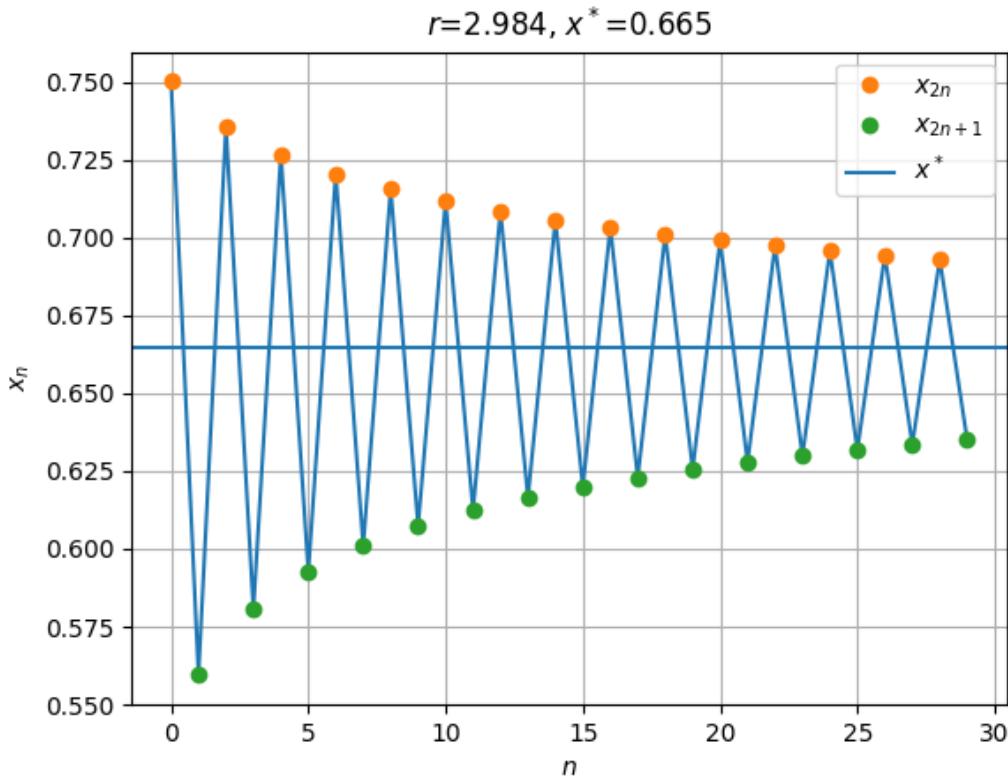


Рис. 4: Чётная и нечётная подпоследовательности x_n относительно x^* при $r \in (2; 3)$.

Очевидно, что $x_1 = 0$ — неподвижная точка. Для $x^* \neq 0$:

$$r(1-x^*)(2+x^*)=1 \iff r(2-x^*-(x^*)^2)=1 \iff (x^*)^2+x^*+\left(\frac{1}{r}-2\right)=0.$$

Отсюда получаем единственную ненулевую неподвижную точку:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9 - \frac{4}{r}}}{2}.$$

Note: Значение будет вещественно тогда и только тогда, когда

$$9 - \frac{4}{r} \geq 0 \iff r \geq \frac{4}{9}.$$

2. Найти диапазон r , при котором $\{x_n\}$ монотонно сходится к нулю.

Найдём условия, при которых для данной $\{x_n\}$ выполняется:

$$\forall n : 0 < x_{n+1} < x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Для $x \in (0, 1)$ рассмотрим формулу членов последовательности:

$$g(x) = rx(1-x)(2+x) \iff \frac{g(x)}{x} = r(1-x)(2+x)$$

На $(0, 1)$ имеем $0 < (1 - x)(2 + x) < 2$. Если $0 < r \leq \frac{1}{2}$, то для любого $x \in (0, 1)$ получаем

$$0 < r(1 - x)(2 + x) < r \cdot 2 \leq 1 \implies 0 < g(x) < x.$$

Применяя это к $x = x_n$, заключаем:

$$\forall n : 0 < x_{n+1} < x_n,$$

то есть $\{x_n\}$ ограничена снизу и строго убывает, следовательно у $\{x_n\}$ существует предел.

2.* Докажем, что предел этой функции равен неподвижной точке.

Так как $x_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то и $x_{n+1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Функция $g(x) = rx(1 - x)(2 + x)$ непрерывна на \mathbb{R} . Из её непрерывности следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n+1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right),$$

то есть предел последовательности является неподвижной точкой отображения.

NB: Аналогичное утверждение было приведено в качестве теоретической выкладки в задании, но меня смущило то, что при рассматриваемых $\{x_n\}$ и r приведённое утверждение как будто некорректно применять. Доказательство выше было перестраховкой на всякий.

Покажем, что при $0 < r \leq \frac{1}{2}$ других неотрицательных неподвижных точек, кроме 0, нет. Действительно, для $r \leq \frac{1}{2}$ выполнено $9 - \frac{4}{r} \leq 9 - 8 = 1$, поэтому

$$\frac{-1 + \sqrt{9 - \frac{4}{r}}}{2} \leq 0$$

Следовательно, при $0 < r \leq \frac{1}{2}$ единственная неподвижная точка на $[0, 1]$ — это 0. Итак, при $x_0 \in (0, 1)$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно сходится к нулю при $0 < r \leq \frac{1}{2}$. При $r = 0$ имеем $x_1 = 0$, то есть сходимость к нулю также имеет место. Итоговый диапазон:

$$r \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

3. Построить графики зависимости x_n от n для различных значений r .

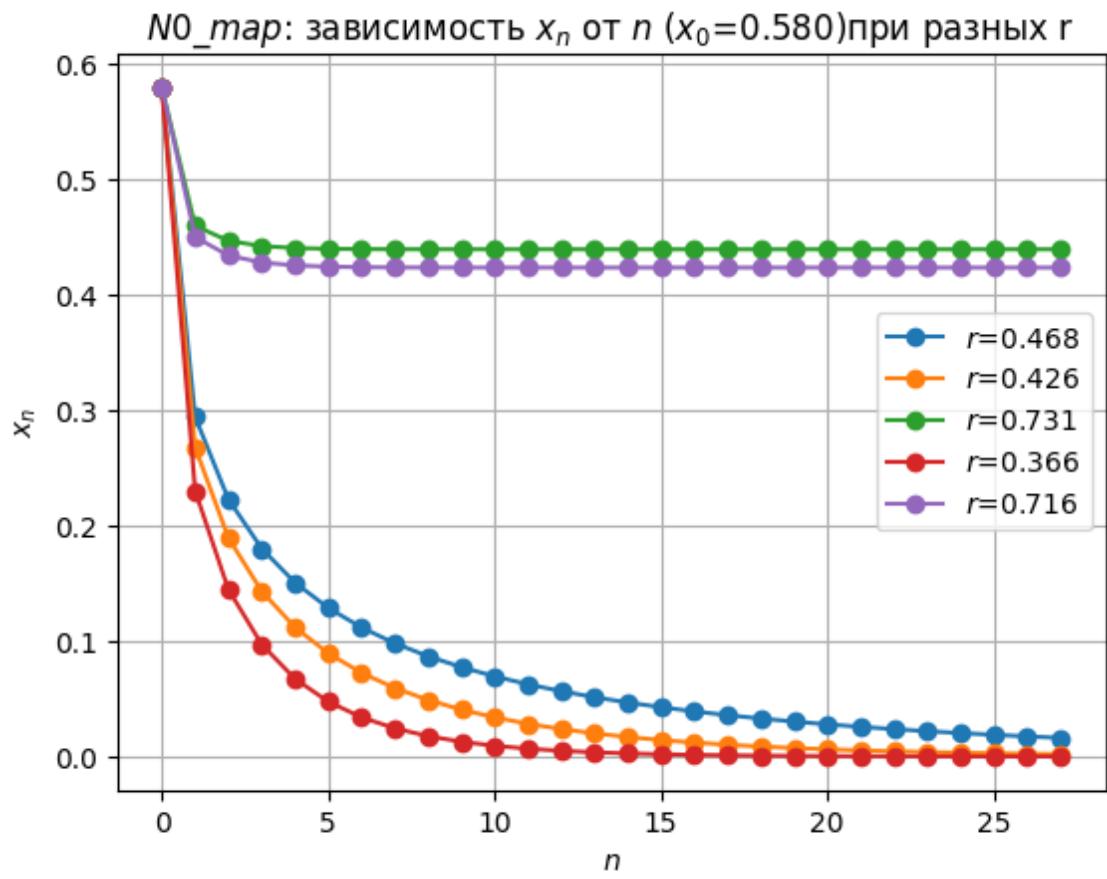


Рис. 5: Графики зависимости x_{n+1} от x_n при разных r .