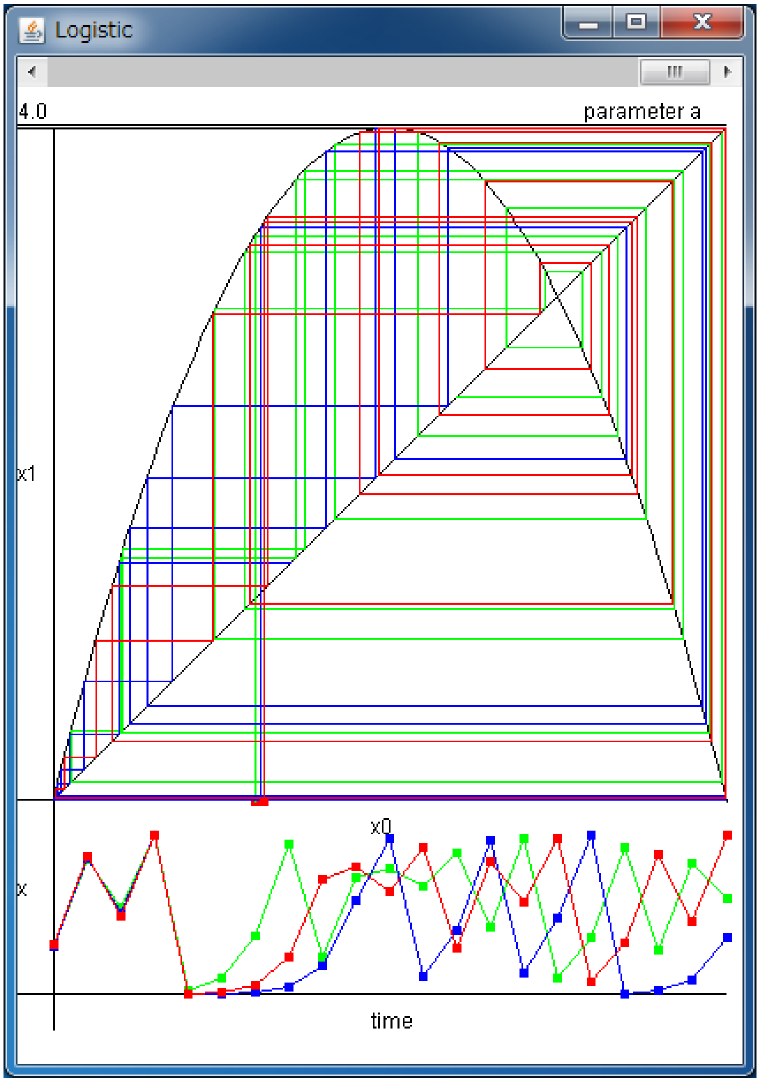

Лабораторная работа:

Исследование точечных отображений

Выполнил: Дорогостайский
Илья Ярославович,
группа J3114

23 февраля 2026 г.
Санкт-Петербург

Введение

В данной лабораторной работе будем исследовать поведение дискретных динамических систем, задаваемых точечным отображением

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n),$$

где $\vec{x}_n$ — состояние системы в момент n, а $\vec{f}$ — отображение, определяющее переход к следующему состоянию, на примере логистического отображения и его модификаций.

Будем использовать понятия предела, монотонности и ограниченности, изученные в рамках курса математического анализа, в данной работе для исследования рассматриваемых в качестве примера динамических систем последовательностей.

Смысл работы состоит в закреплении полученных знаниях на практике. Наша задача - научиться исследовать поведение поcследовательностей и изучить свойства последовательностей, задаваемых рекуррентно.

Ход работы:

- Проанализируем динамику логистического отображения при различных значениях параметров и начального условия.
- Исследуем влияние параметра r на поведение точечных отображений и изменение их качественных свойств.
- Ознакомимся с понятием неподвижной точки, определим условия её существования и количество.
- Изучим последовательности, порождаемые отображением, на предмет монотонности и наличия предела.
- Проанализируем существование циклов порядка m и их свойства для рассматриваемых отображений.
- Исследуем поведение циклов разных порядков с использованием построения лестниц Ламерея.
- Подтвердим полученные аналитические результаты с помощью графической визуализации.

Easy

Прежде чем приступить к практике, обозначим вводимые в рамках работы определения и поясним их.

Определение: *Логистическим отображением* называется функция вида

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

где r — параметр скорости прироста, x_n - состояние системы в некий момент n, а x_{n+1} - её же состояние в следующий момент. Также известны свойства логистического отображения, такие как:

$$r \in [0, 4],$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad x_n \in [0, 1].$$

***NB*:** Логистическое отображение широко используется при описании динамических систем, например при исследовании скорости изменения численности популяций. В таком случае параметр r характеризует скорость роста популяции от момента n до момента $n + 1$ (фактор "рождаемости минус смертности")

Задача 1

Доказать утверждение:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0, 1]: \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Доказательство. (по методу математической индукции)

1) База индукции:
По определению логистического отображения $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$.
Тогда при $n = 1$ имеем:

$$x_1 = rx_0(1 - x_0).$$

Так как $0 < x_0 < 1$, имеем:

$$-1 < -x_0 < 0 \iff 0 < 1 - x_0 < 1$$

Тогда $0 < x_0(1 - x_0) < 1$. При $r \in (0, 1]$ получаем:

$$0 < rx_0(1 - x_0) < 1.$$

Итак,

$$0 < x_1 < 1.$$

2) Индукционное предположение:
Пусть для некоторого $k = n$ верно:

$$0 < x_k < 1.$$

Тогда докажем, что и $0 < x_{k+1} < 1$ через определение логистического отображения:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k).$$

Так как $0 < x_k < 1$, то $0 < 1 - x_k < 1$. Следовательно, $0 < x_k(1 - x_k) < 1$.
При $r \in (0, 1]$, получаем

$$0 < rx_k(1 - x_k) < 1.$$

Следовательно,

$$0 < x_{k+1} < 1.$$

3) Интерпретация:
Значит при $x_0 \in (0, 1)$ верно:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0, 1]: \quad 0 < x_n < 1.$$

Действительно, если про начальное состояние x_0 нам известно, что $x_0 \in (0, 1)$, тогда, исходя из формулы логистического отображения и ограничений, наложенных на r, после n итераций мы получим x_n, также не выходящее за пределы $(0, 1)$. Т.е. справедливо будет сказать:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0, 1]: \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

$\square$

Задача 2

1. Как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_{n+1} от x_n?
Заметим, что график зависимости x_{n+1} от x_n — это график функции

$$y = f(x) = rx(1 - x).$$

Рассмотрим этот график, чтобы изучить влияние параметра r на поведение функции:

- $f(0) = 0$ и $f(1) = 0$, т.е. график проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ при любом r.
- $f(x) = rx(1 - x) = -rx^2 + rx$ - квадратичная функция, график является параболой с ветвями, направленными вниз.
- Вершина параболы достигается при $x = \frac{1}{2}$:

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}.$$

  Следовательно, параметр r масштабирует график по вертикали: чем больше r, тем выше вершина и тем больше значения x_{n+1} при фиксированном $x_n \in (0, 1)$.
- Так как $\max f(x) = \frac{r}{4}$, то при $r \in [0, 4]$ имеем $f(x) \le 1$ на $[0, 1]$, что согласуется с оценкой $x_n \in [0, 1]$. При $r > 4$ член x_n может оказаться вне этого диапазона.
- **Вывод:** Параметр r не меняет значения f на $x = 0, \quad x = 1$, но изменяет высоту и крутизну графика: при росте r парабола растягивается вверх, а максимум $\max f(x) = \frac{r}{4}$ растёт линейно.

2. Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

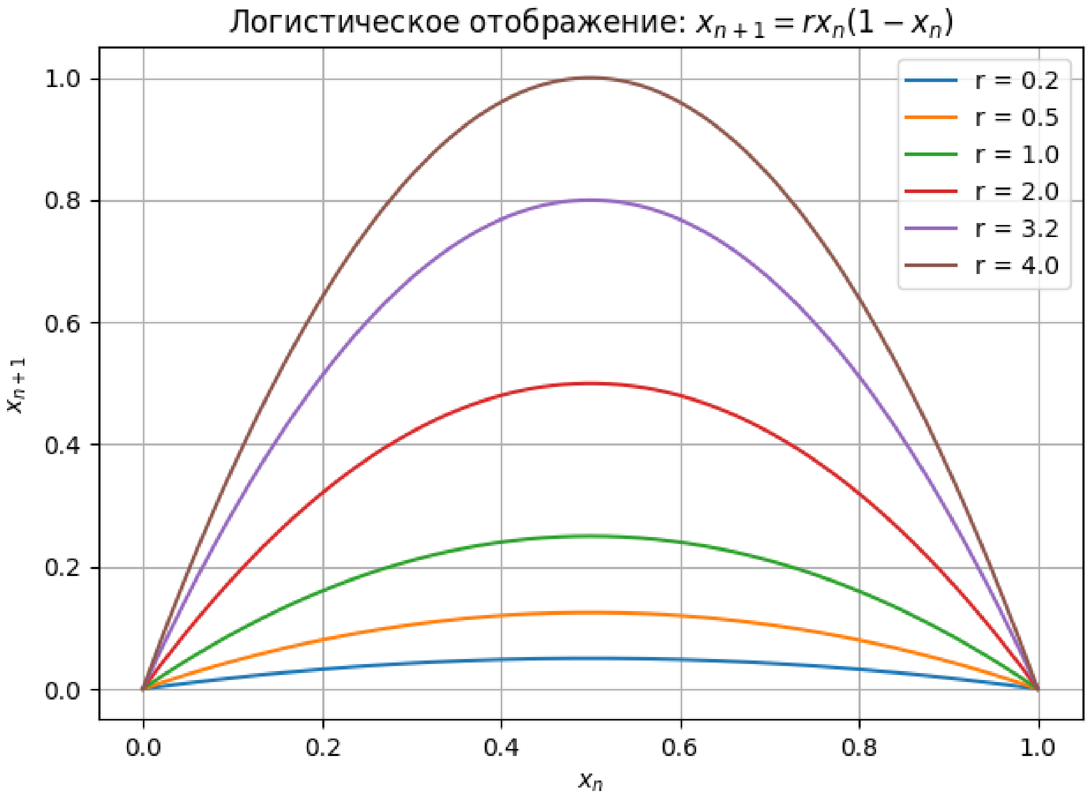

Рис. 1: Графики функции $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ при различных r.

Задача 3

1. Постройте графики зависимости x_{n+1} от x_n для различных значений r.
По условию варианта ($N = 0$) будем рассматривать точечное отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n), \qquad r \in \left[0;\ \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}\right].$$

Рассмотрим график этой функции:

- $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$. Следовательно, график проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Также существует нуль при $x = -2$, однако он не принадлежит отрезку $[0, 1]$.
- $g(x) = r(2x - x^2 - x^3)$ - кубическая функция, графиком является кубическая парабола.
- Рассмотрим $g(x)$ при $x \in [0, 1]$:

$$x(1 - x)(2 + x) \geq 0.$$

  так как $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \in [0, 1]$, получаем оценку $r \geq 0$
- Чтобы найти максимум функции, рассмотрим её производную:

$$g'(x) = r(2 - 2x - 3x^2).$$

Из уравнения $g'(x) = 0$ получаем:

$$2 - 2x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}.$$

Эта точка принадлежит $(0, 1)$ (т.к. $\frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.55$) Данная точка экстремума единственна на рассматриваемом промежутке, и проходя через неё $g'(x)$ меняет свой знак с $+$ на $-$, следовательно, $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ - точка максимума функции на $(0, 1)$.

- Подставим это значение, чтобы оценить r:

$$\max g(x) = r(2\frac{\sqrt{7} - 1}{3} - \frac{(\sqrt{7} - 1)^2}{9} - \frac{(\sqrt{7} - 1)^3}{9}) =$$

$$= r(2\frac{\sqrt{7} - 1}{3} - \frac{8 - 2\sqrt{7}}{9} - \frac{10\sqrt{7} - 22}{27}) = r\frac{18(\sqrt{7} - 1) - 3(8 - 2\sqrt{7}) - (10\sqrt{7} - 22)}{27} =$$

$$= r\frac{2(7\sqrt{7} - 10)}{27}.$$

Из $\max g(x) \leq 1$ следует:

$$r \leq \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}; \qquad r \in [0, \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}]$$

2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Чем могут быть вызваны сходства/различия?

Исходя из рассмотренных свойств функции $g(x) = rx(1 - x)(2 + x)$, нетрудно выявить её сходства и различия сравнительно с функцией логистического отображения $f(x) = rx(1 - x)$:

Сходства.

- В обоих случаях имеется точечное отображение вида $x_{n+1} = F(x_n)$, зависящее от параметра r, причём увеличение r приводит к увеличению значений $F(x)$ при фиксированном $x \in (0, 1)$ (r вертикально масштабирует график).
- Оба отображения имеют нули на $[0, 1]$ в точках $x = 0$ и $x = 1$:

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad g(0) = g(1) = 0,$$

  поэтому их графики проходят через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, вне зависимости от r.

Различия.

- Логистическое отображение задаёт квадратичную функцию, а отображение $g(x) = rx(1-x)(2+x)$ - кубическую. Поэтому форма графиков будет отличаться: хотя на [0,1] внешне графики и схожи, кривая $g(x)$ не является параболой $f(x)$ и имеет иное распределение значений по x (даже при фиксированном r).

Очевидно, что сходства обусловлены общей структурой: оба отображения задаются итеративно и зависят от параметра r как от масштабирующего множителя.

В свою очередь, различия вызваны разной старшей степенью отображений, что меняет форму графика x_{n+1} от x_n и, как следствие, характер итераций.

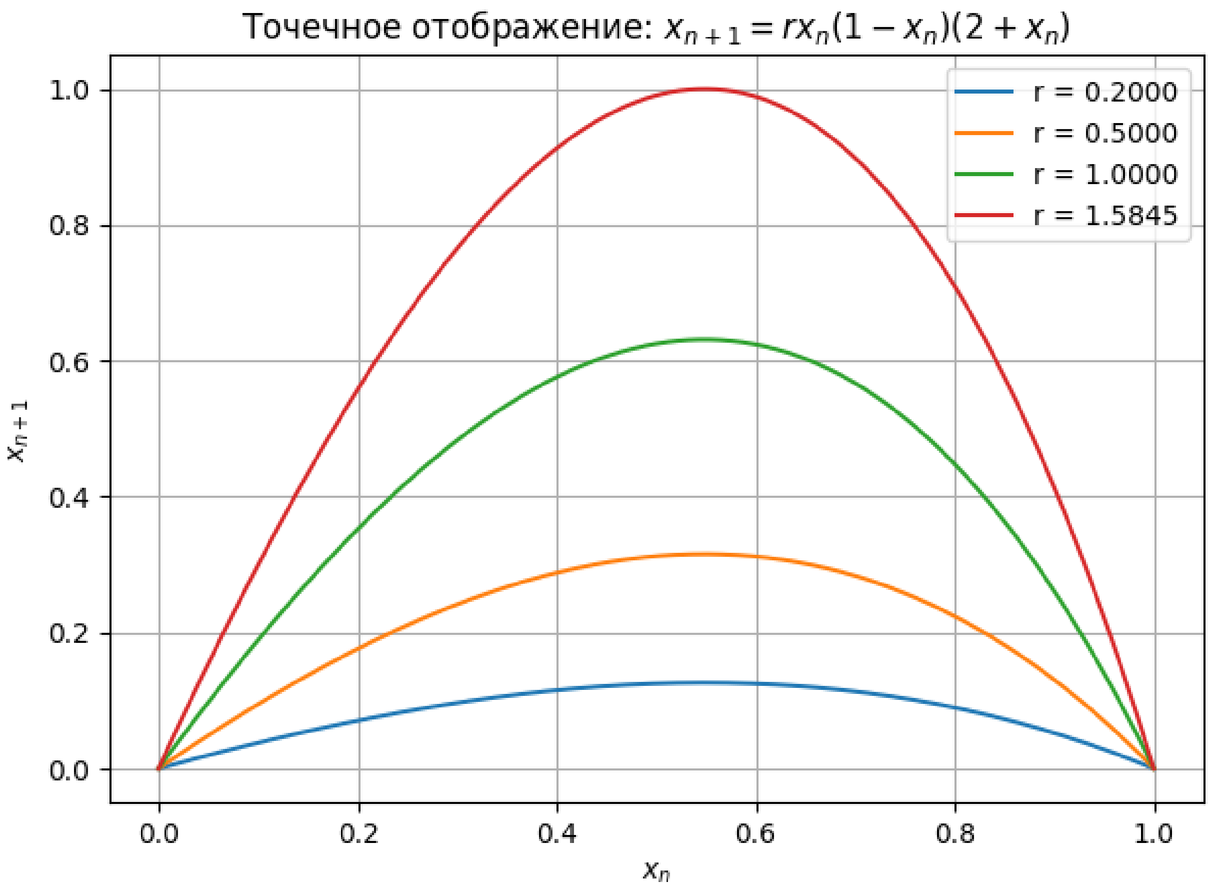

Рис. 2: Графики функции $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n)$ при различных r.

Normal

Прежде чем приступать к дальнейшим заданиям, рассмотрим вводимое в рамках работы определение неподвижной точки.

Определение. Точка x^* называется *неподвижной точкой* отображения $f(x)$, если

$$x^* = f(x^*).$$

Иными словами, при применении отображения неподвижная точка переходит сама в себя.

Задача 4

1. Найти все неподвижные точки логистического отображения.

Рассматривая $x_n = x^*$ в логистическом отображении $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, справедливо будет заметить, что:

$$x_n = rx_n(1 - x_n).$$

Найдём неподвижные точки, удовлетворяющие этому равенству, решив его:

$$x = rx(1 - x) \iff rx - rx^2 - x = 0 \iff$$

$$\iff -rx^2 + (r-1)x = 0 \iff x\big(-rx + r - 1\big) = 0$$

Отсюда получаем

$$x = 0,$$

$$-rx + r - 1 = 0.$$

Из второго уравнения:

$$rx = r - 1 \iff x = \frac{r-1}{r}$$

Итак, мы нашли неподвижные точки:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{r-1}{r}.$$

2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?

При $r = 0$, отображение $f(x) = rx(1-x) = 0$, и уравнение $x = f(x)$ даёт единственное решение:

$$x = 0.$$

При $r = 1$, согласно найдённой неподвижной точке, имеем:

$$x_2 = \frac{1-1}{1} = 0,$$

т.е. обе формулы дают одну и ту же точку. Следовательно, при $r = 1$ неподвижная точка одна. Итак:

$$\begin{cases} r = 0 \cup r = 1 & \text{одна неподвижная точка,} \\ r \in (0, 1) & \text{две различные неподвижные точки.} \end{cases}$$

3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

Уравнение неподвижных точек приводится к квадратному уравнению относительно x:

$$x = rx(1-x) \iff -rx^2 + (r-1)x = 0.$$

Квадратное уравнение может иметь не более двух действительных корней. Следовательно, максимальное количество неподвижных точек логистического отображения равно двум.

Задача 5

Условие. Пусть $x_0 \in (0;1)$, $r \in (0;1]$, и последовательность $\{x_n\}$ задана логистическим отображением:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n = rx_{n-1}(1-x_{n-1}),$$

.

1. Доказать, что $\{x_n\}$ монотонно убывает

Доказательство. По **задаче 1** нам уже известно, что:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0,1]: \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Таким образом имеем:

$$\begin{cases} x_n \in (0,1) \\ (1-x_n) \in (0,1) \\ r \in (0,1] \end{cases}$$

Отсюда следует, что $0 < r(1-x_n) < 1$, тогда при $0 < x_n < 1$ будет верно:

$$x_n \cdot r(1-x_n) < x_n$$

$$x_{n+1} < x_n.$$

Значит, последовательность $\{x_n\}$ строго монотонно убывает. □

2. Определить, будет ли последовательность $\{x_n\}$ сходящейся при $r \in (0,1]$. Подтвердить это графически.

Доказательство. По **пункту 1** последовательность $\{x_n\}$ строго монотонно убывает. По **задаче 1** также известно, что $\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 < x_n < 1$, значит $\{x_n\}$ ограничена снизу нулём.

Следовательно, по теореме о монотонной ограниченной последовательности у $\{x_n\}$ существует конечный предел. □

***NB*:** По рис.3 видно, что $\{x_n\}$ сходится к нулю. Нетрудно доказать это аналитически: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} rx_n(1-x_n)$. Так как последовательность задана рекуррентно, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r \lim\limits_{n\to\infty} x_n(1 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

После преобразований получили:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{или} \quad r(1 - \lim_{n\to\infty} x_n) = 1.$$

При $r \in (0;1]$ имеем $\frac{r-1}{r} \leq 0$, а так как $x_n > 0$ для всех n, то предел не может быть отрицательным. Следовательно,

$$\forall x_n \in \{x_n\} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

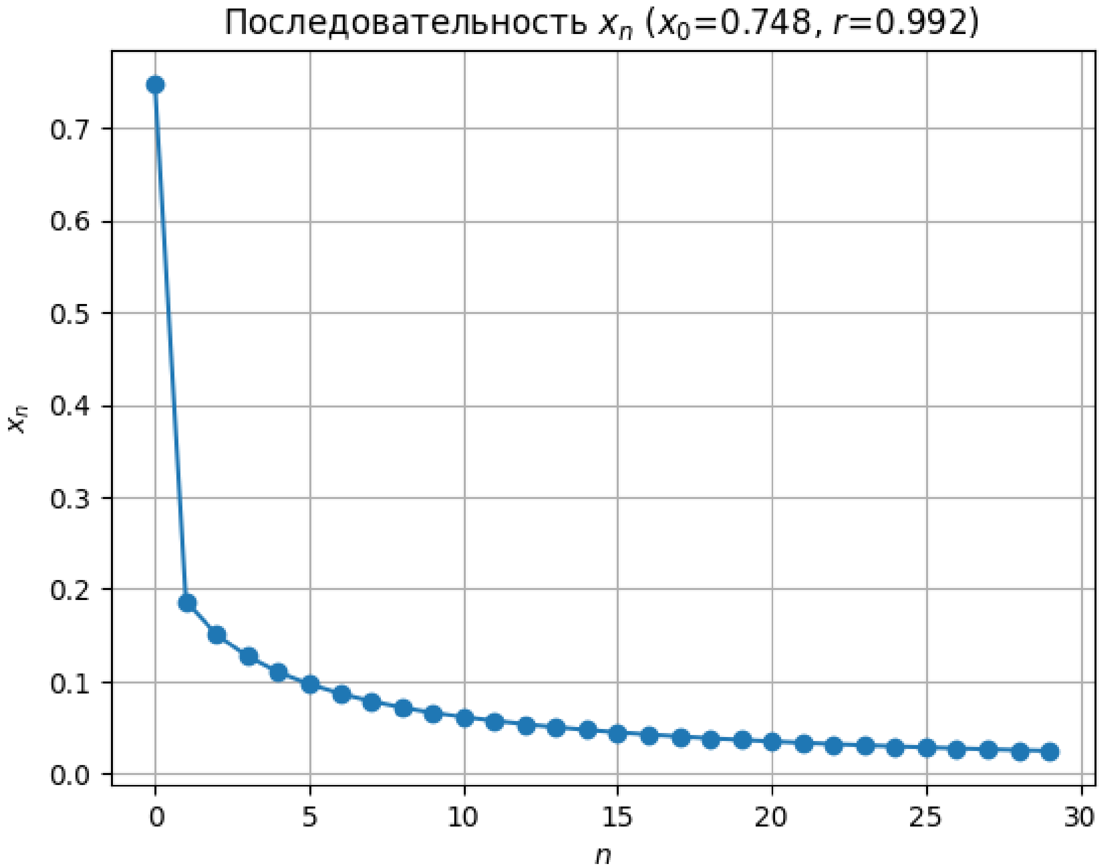

Рис. 3: График последовательности x_n при $r \in (0; 1]$.

Задача 6

Условие. Пусть $r \in (2; 3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$, где $x^* = \dfrac{r-1}{r}$ — ненулевая неподвижная точка логистического отображения.

1. Исследовать монотонность подпоследовательностей $\{x_{2n}\}$ **и** $\{x_{2n+1}\}$**.**

1) Так как нам известны оценки $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$, сравним $x_n = f(x_{n-1})$ и $x^* = f(x^*)$:

$$f(x) - f(x^*) = rx(1-x) - \frac{r-1}{r} = rx - rx^2 - \frac{r-1}{r} = rx - rx^2 - \frac{r-1}{r} + x - x =$$

$$= \left(-\frac{r-1}{r} + rx - x\right) - rx^2 + x = (rx-1) \cdot \frac{r-1}{r} + (-rx+1) \cdot x =$$

$$= -\left(x - \frac{r-1}{r}\right)\left(rx-1\right) = -r\left(x - \frac{r-1}{r}\right)\left(x - \frac{1}{r}\right).$$

При $r \in (2; 3)$ имеем: $0 < \dfrac{1}{r} < x^* < 1$.

Из полученного следует:

- Если $x > x^*$, то $(x - x^*) > 0$ и $\left(x - \dfrac{1}{r}\right) > 0$, значит $f(x) - f(x^*) < 0$, то есть

$$x > x^* \Rightarrow f(x) < f(x^*) = x^*.$$

- Если $\frac{1}{r} < x < x^*$, то $(x - x^*) < 0$ и $\left(x - \dfrac{1}{r}\right) > 0$, значит $f(x) - f(x^*) > 0$, то есть

$$x < x^* \Rightarrow f(x) > f(x^*) = x^*.$$

Таким образом, отображение f «перебрасывает» точку через x^*: если x_n лежит выше x^*, то $x_{n+1} = f(x_n)$ оказывается ниже, и наоборот.

2) Так как одна итерация меняет сторону относительно x^*, удобно рассмотреть двушаговое отображение, определяющее каждую из подпоследовательностей:

$$g(x) = f(f(x)).$$

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}), \qquad x_{2n+3} = g(x_{2n+1}).$$

Исследуем поведение $g(x)$ с помощью производной:

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

$$g'(x^*) = (f'(x^*))^2 = (2 - r)^2.$$

При $r \in (2; 3)$ имеем

$$0 < (2 - r)^2 < 1,$$

Это значит:

- $g(x)$ сохраняет сторону x $(g'(x^*) > 0)$ (если xRx^*, то и $g(x)Rx^*$),
- $g(x)$ уменьшает расстояние до x^* $(|g'(x^*)| < 1)$. (т.е. $|g(x) - x^*| < |x - x^*|$)

3) Так как $g(x)$ уменьшает расстояние до x^*, то

$$x_{2n+2} - x^* < x_{2n} - x^*, \qquad x_{2n+2} < x_{2n}$$

Значит, подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ монотонно убывает.
Аналогично, для x_{2n+1}:

$$x_{2n+3} > x_{2n+1}.$$

Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$ монотонно возрастает.

2. Графически проверить это утверждение.
На рис. 4 видно, что чётные значения располагаются по одну сторону от x^* и монотонно приближаются к x^*, а нечётные — по другую сторону и также монотонно приближаются к x^*.

Задача 7

1. Для отображения $g(x_n)$, заданного вариантом, найти все неподвижные точки.
Напомним себе данное нам отображение:

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad g(x) = rx(1 - x)(2 + x), \qquad r \in \left[0;\ \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}\right].$$

По определению, x^* — неподвижная точка, если $g(x^*) = x^*$. Решим уравнение:

$$rx^*(1 - x^*)(2 + x^*) = x^*.$$

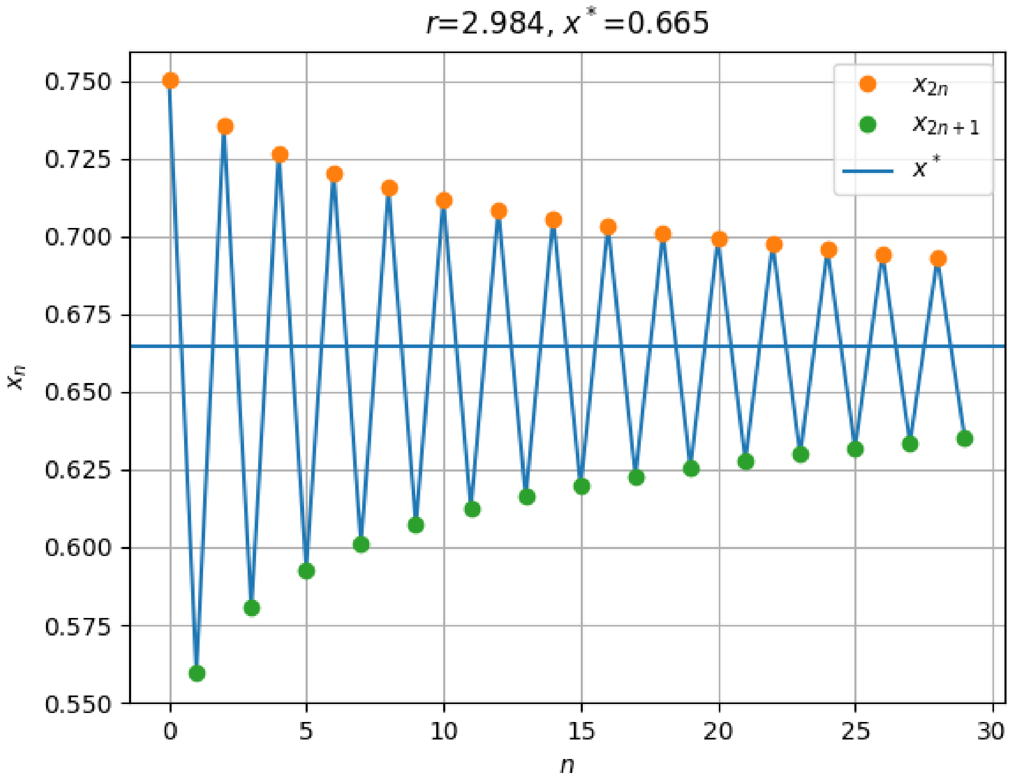

Рис. 4: Чётная и нечётная подпоследовательности x_n относительно x^* при $r \in (2; 3)$.

Очевидно, что $x_1 = 0$ — неподвижная точка. Для $x^* \neq 0$:

$$r(1 - x^*)(2 + x^*) = 1 \Longleftrightarrow r(2 - x^* - (x^*)^2) = 1 \Longleftrightarrow (x^*)^2 + x^* + \left(\frac{1}{r} - 2\right) = 0.$$

Отсюда получаем единственную ненулевую неподвижную точку:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9 - \frac{4}{r}}}{2}.$$

***Note*:** Значение будет вещественно тогда и только тогда, когда

$$9 - \frac{4}{r} \geq 0 \Longleftrightarrow r \geq \frac{4}{9}.$$

2. Найти диапазон r, при котором $\{x_n\}$ монотонно сходится к нулю.
Найдём условия, при которых для данной $\{x_n\}$ выполняется:

$$\forall n : 0 < x_{n+1} < x_n$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Для $x \in (0, 1)$ рассмотрим формулу членов последовательности:

$$g(x) = rx(1 - x)(2 + x) \Longleftrightarrow \frac{g(x)}{x} = r(1 - x)(2 + x)$$

На $(0,1)$ имеем $0 < (1-x)(2+x) < 2$. Если $0 < r \le \frac{1}{2}$, то для любого $x \in (0,1)$ получаем

$$0 < r(1-x)(2+x) < r \cdot 2 \le 1 \Longrightarrow 0 < g(x) < x.$$

Применяя это к $x = x_n$, заключаем:

$$\forall n : 0 < x_{n+1} < x_n,$$

то есть $\{x_n\}$ ограничена снизу и строго убывает, следовательно у $\{x_n\}$ существует предел.

2.* Докажем, что предел этой функции равен неподвижной точке.

Так как $x_n \to \lim_{n\to\infty} x_n$, то и $x_{n+1} \to \lim_{n\to\infty} x_n$.

Функция $g(x) = rx(1-x)(2+x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Из её непрерывности следует:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n+1}) = g(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

то есть предел последовательности является неподвижной точкой отображения.

***NB*:** Аналогичное утверждение было приведено в качестве теоретической выкладки в тех-задании, но меня смутило то, что при рассматриваемых $\{x_n\}$ и r приведённое утверждение как будто некорректно применять. Доказательство выше было перестраховкой на всякий.

Покажем, что при $0 < r \le \frac{1}{2}$ других неотрицательных неподвижных точек, кроме 0, нет. Действительно, для $r \le \frac{1}{2}$ выполнено $9 - \frac{4}{r} \le 9 - 8 = 1$, поэтому

$$\frac{-1 + \sqrt{9 - \frac{4}{r}}}{2} \le 0$$

Следовательно, при $0 < r \le \frac{1}{2}$ единственная неподвижная точка на $[0,1]$ — это 0. Итак, при $x_0 \in (0,1)$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно сходится к нулю при $0 < r \le \frac{1}{2}$. При $r = 0$ имеем $x_1 = 0$, то есть сходимость к нулю также имеет место. Итоговый диапазон:

$$r \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right].$$

3. Построить графики зависимости x_n от n для различных значений r.

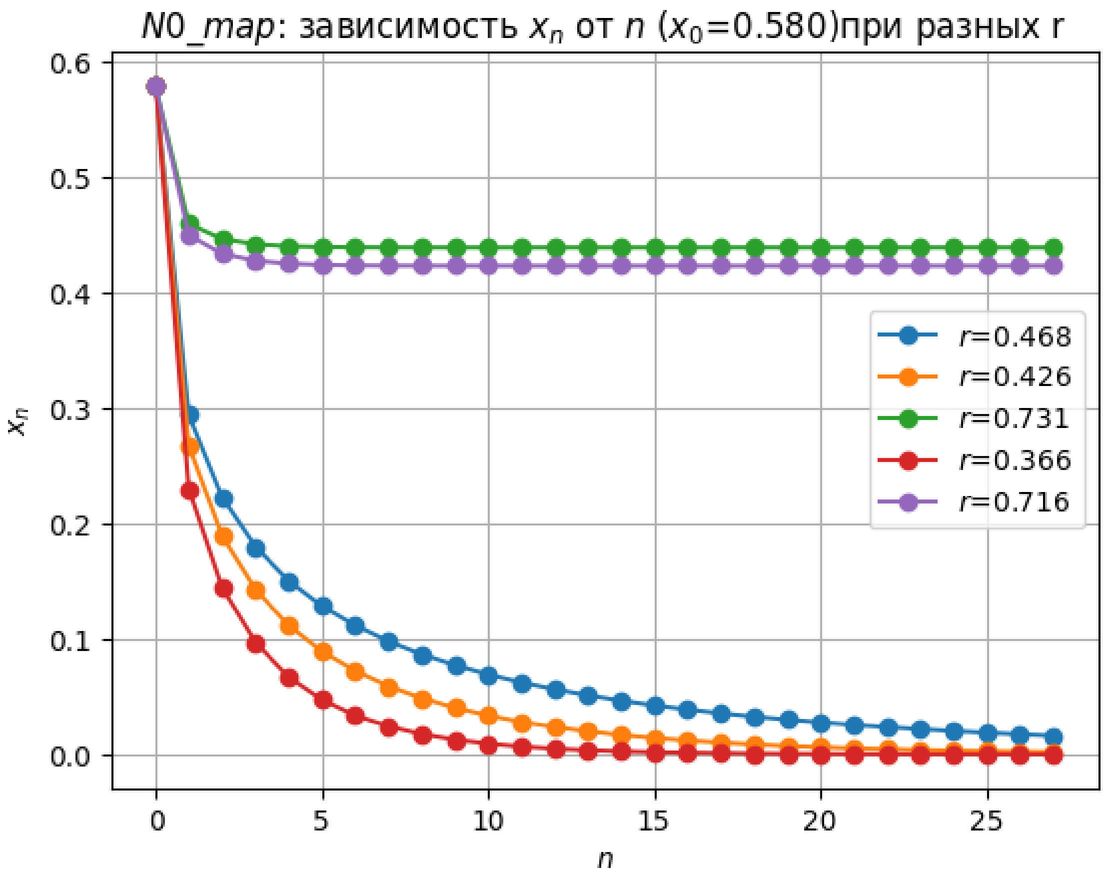

Рис. 5: Графики зависимости x_{n+1} от x_n при разных r.

Hard

Прежде чем приступать к дальнейшим заданиям, рассмотрим вводимые в рамках работы определения и понятия.

Определение. Точка x^* называется *периодической точкой порядка* $m \in \mathbb{N}$, если

$$f^{(m)}(x^*) = x^*,$$

где $f^{(m)}$ — m-кратная композиция f с собой.

Определение. Множество точек

$$\{x^*, f(x^*), f^{(2)}(x^*), \ldots, f^{(m-1)}(x^*)\}$$

называется *циклом порядка* m, если каждая из этих точек переходит в следующую, а последняя — в первую.

Задача 8.

Введём величину

$$r_\infty \approx 3.5699456.$$

1. Определить, как меняется длина цикла порядка m при $r \in (3, r_\infty]$

Всё так же рассматриваем логистическое отображение:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Вспомним его неподвижные точки:

$$x^* = 0$$

$$x^* = \frac{r-1}{r}.$$

Нам уже известно, что при $1 < r < 3$ последовательность $\{x_n\}$ стремится к точке x^*. При $r = 3$ величина $f'(x^*) = 2 - r$ по модулю становится равной 1, и дальнейшее увеличение r приводит к тому, что равенство $x_{n+1} = x_n$ уже не описывает предельное поведение последовательности, значит, возможно, на этом промежутке будут циклы большего порядка.

Для исследования возможного цикла порядка 2 рассмотрим уравнение

$$f^{(2)}(x) = x.$$

Вычисления дают

$$f^{(2)}(x) - x = -x\,(rx - r + 1)\left(r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1\right).$$

Первые два множителя соответствуют уже найденным неподвижным точкам. Оставшиеся решения определяются квадратным уравнением

$$r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Из выражения под корнем видно, что вещественные решения появляются при

$$(r-3)(r+1) \geq 0,$$

то есть при $r \geq 3$. Тогда наше предположение верно: начиная с $r > 3$ существуют точки, образующие цикл порядка $m = 2$.

При дальнейшем увеличении параметра r аналогичный анализ уравнения

$$f^{(4)}(x) = x$$

показывает появление новых решений, не совпадающих с решениями предыдущих уравнений, что соответствует возникновению цикла порядка 4. ЧТобы в этом убедиться, рассмотрим многочлены:

$$P_1(x) = f(x) - x, \qquad P_2(x) = f^{(2)}(x) - x, \qquad P_4(x) = f^{(4)}(x) - x.$$

Заметим, что из равенства $f(x) = x$ следует $f^{(2)}(x) = x$ и $f^{(4)}(x) = x$, а из $f^{(2)}(x) = x$ также следует $f^{(4)}(x) = x$. Поэтому множество корней P_1 содержится в множестве корней P_2, а множество корней P_2 содержится в множестве корней P_4.

Так как $f(x) = rx(1-x)$ является многочленом степени 2, то $f^{(k)}(x)$ является многочленом степени 2^k. Следовательно,

$$\deg P_1 = 2, \qquad \deg P_2 = 4, \qquad \deg P_4 = 16.$$

Уравнение $P_4(x) = 0$ имеет не более 16 корней (с учётом кратных), причём оно уже содержит все корни уравнения $P_2(x) = 0$, которых не более 4. Значит, в общем случае уравнение $f^{(4)}(x) = x$ обладает дополнительными корнями, отличными от корней уравнения $f^{(2)}(x) = x$. Эти новые корни и соответствуют появлению цикла порядка $m = 4$.

Аналогично, при переходе к $f^{(8)}(x) = x$ степень многочлена возрастает до $2^8 = 256$, и уравнение $f^{(8)}(x) = x$ содержит в качестве части решений как корни $f^{(4)}(x) = x$, так и новые корни, не встречавшиеся ранее; они соответствуют циклам более высокого порядка.

Отсюда следует, что при увеличении параметра r длина цикла не может увеличиваться плавно: период m всегда является натуральным числом, и при изменении r он может изменяться только скачками (переходом от одного целого значения к другому).

Таким образом, при $r \in (3, r_\infty)$ длина цикла m скачкообразно, но монотонно изменяется при росте параметра r.

2. Экспериментально установить ограничения, накладываемые на m для цикла

Для исследования использовалась функция **estimate_period**, которая по хвосту последовательности $\{x_n\}$ определяет минимальное m, удовлетворяющее условию

$$|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$$

для всех n на рассматриваемом участке.

Вычисления проводились для $r \in (3, r_\infty)$. Для каждого r строилась последовательность $\{x_n\}$ и оценивалась длина цикла m.

```python
import numpy as np

def estimate_period(seq: np.ndarray, skip: int = 500, tail_len: int = 1000, max_m: int = 512, eps: float = 1e-6) -> int:
    n = len(seq)
    end = min(n, skip + tail_len)
    tail = seq[skip:end]

    for m in range(1, max_m + 1):
        a = tail[m:]
        b = tail[:-m]
        if np.all(np.abs(a - b) < eps):
            return m
    return 0

def scan_periods(r_values: np.ndarray,x_0: float,n_steps: np.int64) -> np.ndarray:
    periods = np.empty(len(r_values), dtype=int)

    for i, r in enumerate(r_values):
        seq = generate_sequence(x_0, float(r), n_steps, "log")
        periods[i] = estimate_period(seq=seq)
    return periods
```

По полученному графику (рис. 6) зависимости $m(r)$ установлено следующее:

- возможные значения периода имеют вид $m = 0, 2, 4, 8, 16, \dots$;
- увеличение m происходит скачкообразно при увеличении r;
- других значений на интервале $(3, r_\infty]$ не наблюдается.

При допущении, что цикла периода 0 тривиальным образом не существует, экспериментально установлено, что на интервале $(3, r_\infty]$ длина цикла принимает только значения, являющиеся степенями двойки:

$$m = 2^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

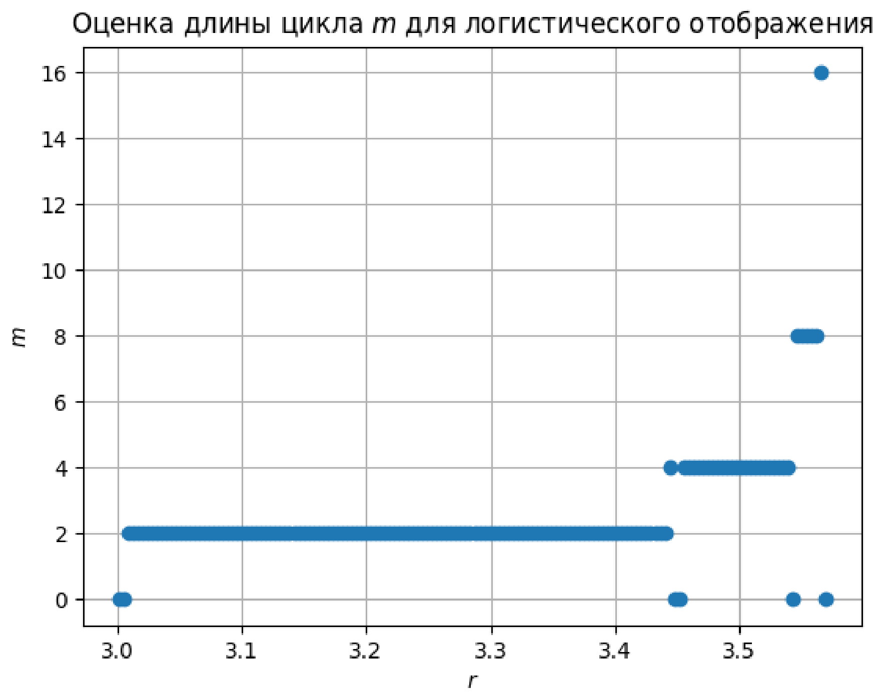

Рис. 6: Зависимость периода цикла от параметра r для логистического отображения

Задача 9.

Определение. *Лестница Ламерея* - это графический способ исследования динамики отображения $f(x)$, осуществляемый следующим образом:

- строится график функции $y = f(x)$ и прямая $y = x$;
- из точки $(x_0, 0)$ проводится вертикаль до пересечения с графиком $y = f(x)$;
- далее проводится горизонталь до прямой $y = x$;
- процесс повторяется.

1. Реализовать функцию, которая строит лестницу Ламерея для заданного r.

```
import numpy as np

def logistic_map(x: np.ndarray[np.float64], r: float) -> np.ndarray[np.float64]:
    return r * x * (1 - x)

def build_staircase(x_0: float, r: float, n_steps: np.ndarray) -> tuple[np.ndarray, np.ndarray]:

    x_array = np.empty(2 * int(n_steps) + 1)
    y_array = np.empty(2 * int(n_steps) + 1)

    x_n = x_0
    x_array[0] = x_n
    y_array[0] = x_n

    for k in range(int(n_steps)):
        x_next = float(logistic_map(x_n, r))

        x_array[2 * k + 1] = x_n
        y_array[2 * k + 1] = x_next

        x_array[2 * k + 2] = x_next
        y_array[2 * k + 2] = x_next

        x_n = x_next

    return x_array, y_array
```

В функции **build_staircase** на каждом шаге вычисляется $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, после чего добавляются две точки ломаной: (x_n, x_{n+1}) и (x_{n+1}, x_{n+1}). Таким образом реализуется стандартная схема лестницы Ламерея.

2. Сделать по графикам вывод о циклах различных порядков.

Из графиков видно, что после нескольких итераций лестница Ламерея начинает периодически описывать некоторую замкнутую фигуру.

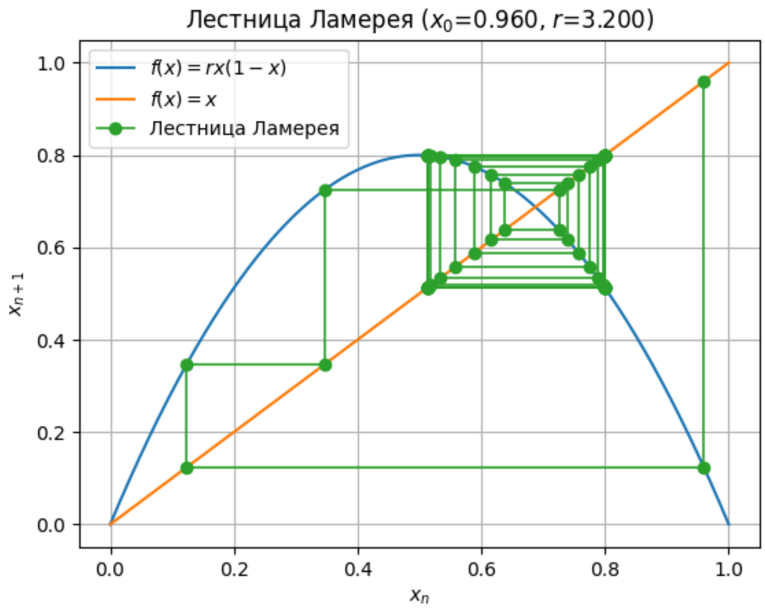

Рис. 7: Лестница Ламерея для логистического отображения (пример 1)

На рис.9 при $r = 3.2$ лестница попеременно проходит через две различные точки диагонали $f(x) = x$, то есть через две точки вида (x_n, x_n). Это означает выполнение $x_{n+2} = x_n$ при $x_{n+1} \neq x_n$, что описывает цикл порядка $m = 2$.

На рис.10 при $r = 3.5$ число различных диагональных точек увеличивается: траектория проходит через четыре различные точки (x_n, x_n) до возвращения в исходную. Тем самым выполняется $x_{n+4} = x_n$, что соответствует циклу порядка $m = 4$.

При дальнейшем увеличении параметра r (рис.11, $r = 3.5680$) число различных диагональных точек возрастает ещё больше, что свидетельствует о возникновении циклов более высокого порядка.

Таким образом, порядок цикла определяется числом различных точек пересечения лестницы с диагональю $y = x$: при двух таких точках реализуется цикл порядка 2, при четырёх — порядка 4, и при увеличении r наблюдается последовательное возрастание порядка цикла.

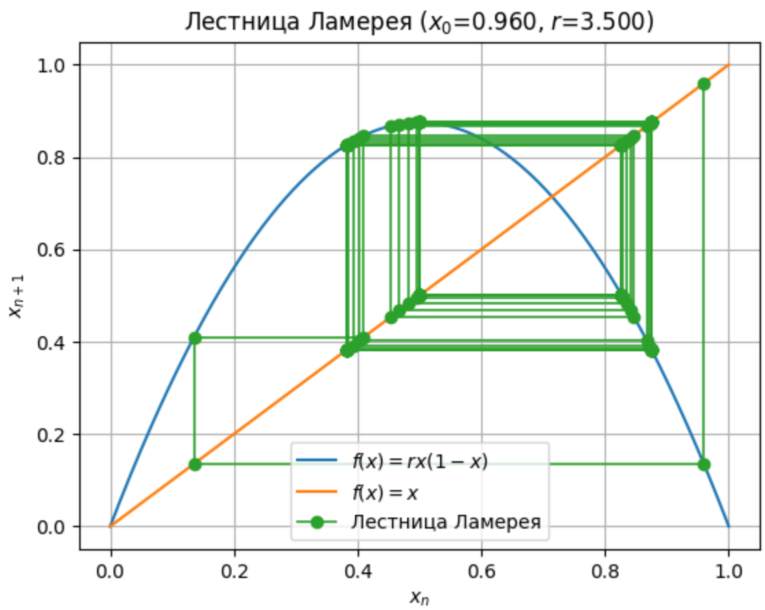

Рис. 8: Лестница Ламерея для логистического отображения (пример 2)

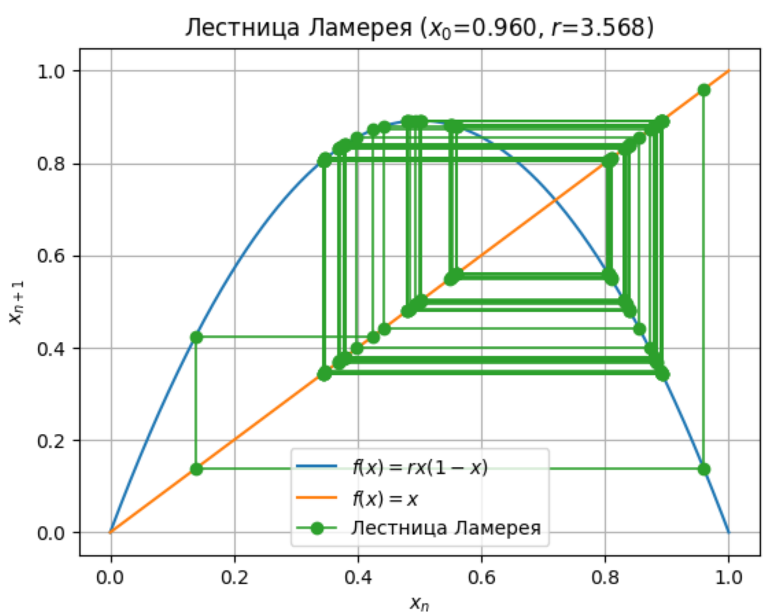

Рис. 9: Лестница Ламерея для логистического отображения (пример 3)

Задача 10.

1. Экспериментально исследовать изменение длины цикла при изменении параметра r для заданного вариантом отображения.

Рис. 10: Зависимость периода цикла от параметра r для отображения

Рис. 11: Лестница Ламерея для отображения(пример 1)

Рис. 12: Лестница Ламерея для отображения (пример 2)

2. Сравнить полученные графики с графиками логистического отображения.