

**Лабораторная работа:**  
Исследование точечных отображений

Выполнил: Дорогостайский  
Илья Ярославович,  
группа J3114

22 февраля 2026 г.  
Санкт-Петербург

# Введение

В данной лабораторной работе будем исследовать поведение дискретных динамических систем, задаваемых точечным отображением

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n),$$

где  $\vec{x}_n$  — состояние системы в момент  $n$ , а  $\vec{f}$  — отображение, определяющее переход к следующему состоянию, на примере логистического отображения и его модификаций.

Будем использовать понятия предела, монотонности и ограниченности, изученные в рамках курса математического анализа, в данной работе для исследования рассматриваемых в качестве примера динамических систем последовательностей.

**Смысл работы** состоит в закреплении полученных знаний на практике. Наша задача - научиться исследовать поведение последовательностей и изучить свойства последовательностей, задаваемых рекуррентно.

## Ход работы:

- Проанализируем динамику логистического отображения при различных значениях параметров и начального условия.
- Исследуем влияние параметра  $r$  на поведение точечных отображений и изменение их качественных свойств.
- Ознакомимся с понятием неподвижной точки, определим условия её существования и количество.
- Изучим последовательности, порождаемые отображением, на предмет монотонности и наличия предела.
- Проанализируем существование циклов порядка  $m$  и их свойства для рассматриваемых отображений.
- Исследуем поведение циклов разных порядков с использованием построения лестниц Ламерея.
- Подтвердим полученные аналитические результаты с помощью графической визуализации.

# Easy

Прежде чем приступить к практике, обозначим вводимые в рамках работы определения и поясним их.

**Определение:** *Логистическим отображением* называется функция вида

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

где  $r$  — параметр скорости прироста,  $x_n$  — состояние системы в некий момент  $n$ , а  $x_{n+1}$  — её же состояние в следующий момент. Также известны свойства логистического отображения, такие как:

$$r \in [0, 4],$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad x_n \in [0, 1].$$

**NB:** Логистическое отображение широко используется при описании динамических систем, например при исследовании скорости изменения численности популяций. В таком случае параметр  $r$  характеризует скорость роста популяции от момента  $n$  до момента  $n + 1$  (фактор "рождаемости минус смертности")

## Задача 1

**Доказать утверждение:**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

*Доказательство.* (по методу математической индукции)

### 1) База индукции:

По определению логистического отображения  $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$ .

Тогда при  $n = 1$  имеем:

$$x_1 = rx_0(1 - x_0).$$

Так как  $0 < x_0 < 1$ , имеем:

$$-1 < -x_0 < 0 \iff 0 < 1 - x_0 < 1$$

Тогда  $0 < x_0(1 - x_0) < 1$ . При  $r \in (0, 1]$  получаем:

$$0 < rx_0(1 - x_0) < 1.$$

Итак,

$$0 < x_1 < 1.$$

### 2) Индукционное предположение:

Пусть для некоторого  $k = n$  верно:

$$0 < x_k < 1.$$

Тогда докажем, что и  $0 < x_{k+1} < 1$  через определение логистического отображения:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k).$$

Так как  $0 < x_k < 1$ , то  $0 < 1 - x_k < 1$ . Следовательно,  $0 < x_k(1 - x_k) < 1$ .  
 При  $r \in (0, 1]$ , получаем

$$0 < rx_k(1 - x_k) < 1.$$

Следовательно,

$$0 < x_{k+1} < 1.$$

### 3) Интерпретация:

Значит при  $x_0 \in (0, 1)$  верно:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_n < 1.$$

Действительно, если про начальное состояние  $x_0$  нам известно, что  $x_0 \in (0, 1)$ , тогда, исходя из формулы логистического отображения и ограничений, наложенных на  $r$ , после  $n$  итераций мы получим  $x_n$ , также не выходящее за пределы  $(0, 1)$ . Т.е. справедливо будет сказать:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

□

## Задача 2

### 1. Как параметр $r$ влияет на поведение функции зависимости $x_{n+1}$ от $x_n$ ?

Заметим, что график зависимости  $x_{n+1}$  от  $x_n$  — это график функции

$$y = f(x) = rx(1 - x).$$

Рассмотрим этот график, чтобы изучить влияние параметра  $r$  на поведение функции:

- $f(0) = 0$  и  $f(1) = 0$ , т.е. график проходит через точки  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$  при любом  $r$ .
- $f(x) = rx(1 - x) = -rx^2 + rx$  - квадратичная функция, график является параболой с ветвями, направленными вниз.
- Вершина параболы достигается при  $x = \frac{1}{2}$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}.$$

Следовательно, параметр  $r$  масштабирует график по вертикали: чем больше  $r$ , тем выше вершина и тем больше значения  $x_{n+1}$  при фиксированном  $x_n \in (0, 1)$ .

- Так как  $\max f(x) = \frac{r}{4}$ , то при  $r \in [0, 4]$  имеем  $f(x) \leq 1$  на  $[0, 1]$ , что согласуется с оценкой  $x_n \in [0, 1]$ . При  $r > 4$  член  $x_n$  может оказаться вне этого диапазона.
- **Вывод:** Параметр  $r$  не меняет значения  $f$  на  $x = 0$ ,  $x = 1$ , но изменяет высоту и крутизну графика: при росте  $r$  парабола растягивается вверх, а максимум  $\max f(x) = \frac{r}{4}$  растёт линейно.

### 2. Постройте эту функцию для нескольких различных значений $r$ .

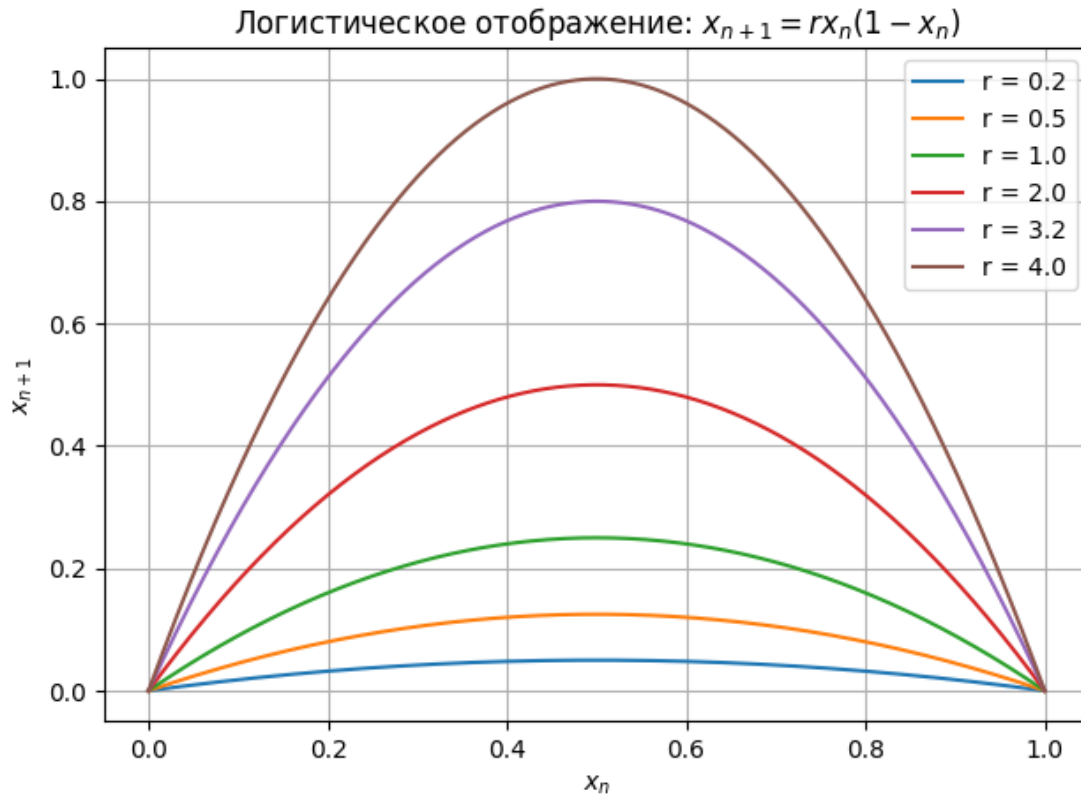


Рис. 1: Графики функции  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  при различных  $r$ .

### Задача 3

**1. Постройте графики зависимости  $x_{n+1}$  от  $x_n$  для различных значений  $r$ .**

По условию варианта ( $N = 0$ ) будем рассматривать точечное отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n), \quad r \in \left[0; \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}\right].$$

Рассмотрим график этой функции:

- $g(0) = 0$  и  $g(1) = 0$ . Следовательно, график проходит через точки  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . Также существует нуль при  $x = -2$ , однако он не принадлежит отрезку  $[0, 1]$ .
- $g(x) = r(2x - x^2 - x^3)$  - кубическая функция, графиком является кубическая парабола.
- Рассмотрим  $g(x)$  при  $x \in [0, 1]$ :

$$x(1 - x)(2 + x) \geq 0.$$

так как  $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \in [0, 1]$ , получаем оценку  $r \geq 0$

- Чтобы найти максимум функции, рассмотрим её производную:

$$g'(x) = r(2 - 2x - 3x^2).$$

Из уравнения  $g'(x) = 0$  получаем:

$$2 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}.$$

Эта точка принадлежит  $(0, 1)$  (т.к.  $\frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.55$ ). Данная точка экстремума единственна на рассматриваемом промежутке, и проходя через неё  $g'(x)$  меняет свой знак с  $+$  на  $-$ , следовательно,  $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$  - точка максимума функции на  $(0, 1)$ .

- Подставим это значение, чтобы оценить  $r$ :

$$\begin{aligned} \max g(x) &= r \left( 2 \frac{\sqrt{7}-1}{3} - \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{9} - \frac{(\sqrt{7}-1)^3}{9} \right) = \\ &= r \left( 2 \frac{\sqrt{7}-1}{3} - \frac{8-2\sqrt{7}}{9} - \frac{10\sqrt{7}-22}{27} \right) = r \frac{18(\sqrt{7}-1) - 3(8-2\sqrt{7}) - (10\sqrt{7}-22)}{27} = \\ &= r \frac{2(7\sqrt{7}-10)}{27}. \end{aligned}$$

Из  $\max g(x) \leq 1$  следует:

$$r \leq \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}; \quad r \in [0, \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}]$$

**2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Чем могут быть вызваны сходства/различия?**

Исходя из рассмотренных свойств функции  $g(x) = rx(1-x)(2+x)$ , нетрудно выявить её сходства и различия сравнительно с функцией логистического отображения  $f(x) = rx(1-x)$ :

**Сходства.**

- В обоих случаях имеется точечное отображение вида  $x_{n+1} = F(x_n)$ , зависящее от параметра  $r$ , причём увеличение  $r$  приводит к увеличению значений  $F(x)$  при фиксированном  $x \in (0, 1)$  ( $r$  вертикально масштабирует график).
- Оба отображения имеют нули на  $[0, 1]$  в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ :

$$f(0) = f(1) = 0, \quad g(0) = g(1) = 0,$$

поэтому их графики проходят через точки  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ , вне зависимости от  $r$ .

**Различия.**

- Логистическое отображение задаёт квадратичную функцию, а отображение  $g(x) = rx(1-x)(2+x)$  - кубическую. Поэтому форма графиков будет отличаться: хотя на  $[0, 1]$  внешне графики и схожи, кривая  $g(x)$  не является параболой  $f(x)$  и имеет иное распределение значений по  $x$  (даже при фиксированном  $r$ ).

Очевидно, что сходства обусловлены общей структурой: оба отображения задаются итеративно и зависят от параметра  $r$  как от масштабирующего множителя.

В свою очередь, различия вызваны разной старшей степенью отображений, что меняет форму графика  $x_{n+1}$  от  $x_n$  и, как следствие, характер итераций.

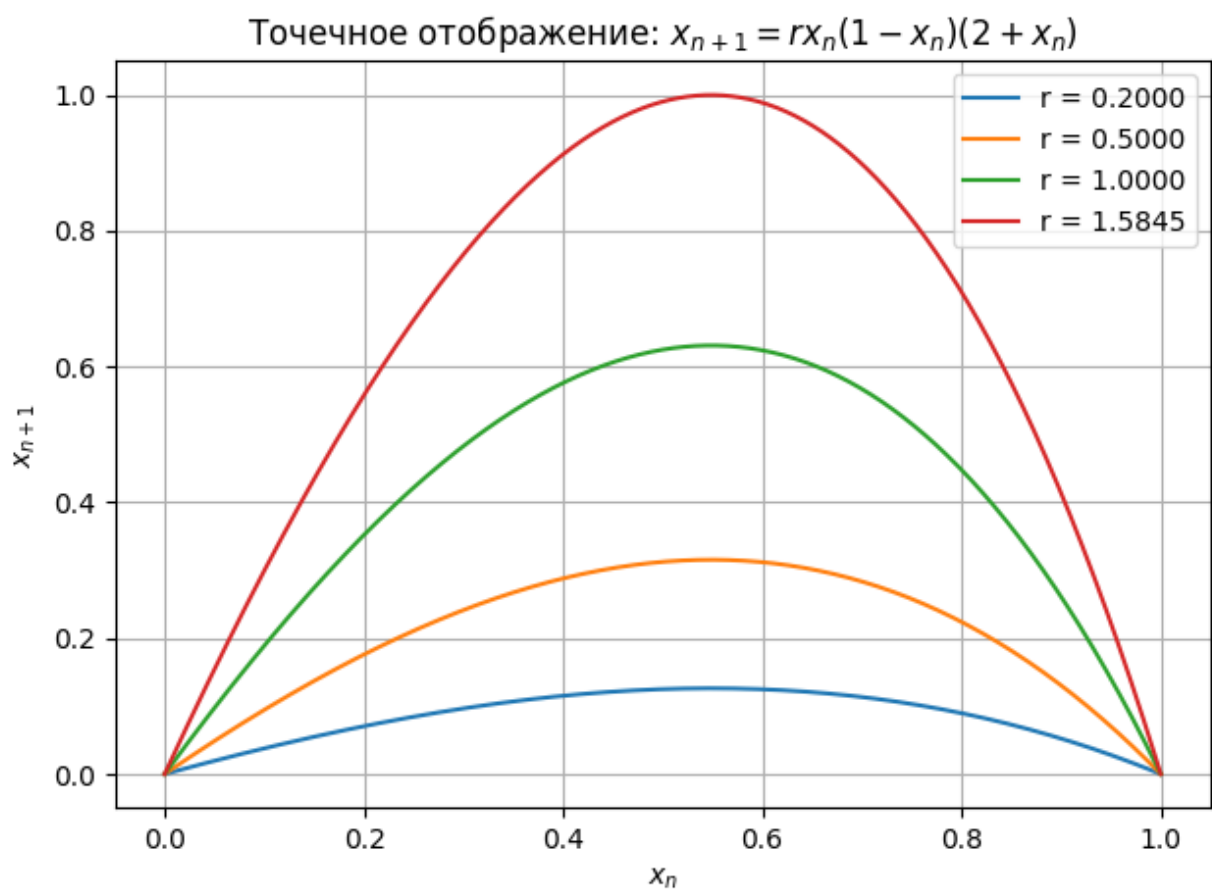


Рис. 2: Графики функции  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n)$  при различных  $r$ .

# Normal

Прежде чем приступить к дальнейшим заданиям, рассмотрим вводимое в рамках работы определение неподвижной точки.

**Определение.** Точка  $x^*$  называется *неподвижной точкой* отображения  $f(x)$ , если

$$x^* = f(x^*).$$

Иными словами, при применении отображения неподвижная точка переходит сама в себя.

## Задача 4

### 1. Найти все неподвижные точки логистического отображения.

Рассматривая  $x_n = x^*$  в логистическом отображении  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ , справедливо будет заметить, что:

$$x_n = rx_n(1 - x_n).$$

Найдём неподвижные точки, удовлетворяющие этому равенству, решив его:

$$\begin{aligned} x &= rx(1 - x) \iff rx - rx^2 - x = 0 \iff \\ &\iff -rx^2 + (r - 1)x = 0 \iff x(-rx + r - 1) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ -rx + r - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения:

$$rx = r - 1 \iff x = \frac{r - 1}{r}$$

Итак, мы нашли неподвижные точки:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{r - 1}{r}.$$

### 2. При каких $r$ отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?

При  $r = 0$ , отображение  $f(x) = rx(1 - x) = 0$ , и уравнение  $x = f(x)$  даёт единственное решение:

$$x = 0.$$

При  $r = 1$ , согласно найденной неподвижной точке, имеем:

$$x_2 = \frac{1 - 1}{1} = 0,$$

т.е. обе формулы дают одну и ту же точку. Следовательно, при  $r = 1$  неподвижная точка одна. Итак:

$$\begin{cases} r = 0 \cup r = 1 & \text{одна неподвижная точка,} \\ r \in (0, 1) & \text{две различные неподвижные точки.} \end{cases}$$

**3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?**

Уравнение неподвижных точек приводится к квадратному уравнению относительно  $x$ :

$$x = rx(1 - x) \iff -rx^2 + (r - 1)x = 0.$$

Квадратное уравнение может иметь не более двух действительных корней. Следовательно, максимальное количество неподвижных точек логистического отображения равно двум.

## Задача 5

**Условие.** Пусть  $x_0 \in (0; 1)$ ,  $r \in (0; 1]$ , и последовательность  $\{x_n\}$  задана логистическим отображением:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1}),$$

### 1. Доказать, что $\{x_n\}$ монотонно убывает

*Доказательство.* По задаче 1 нам уже известно, что:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Таким образом имеем:

$$\begin{cases} x_n \in (0, 1) \\ (1 - x_n) \in (0, 1) \\ r \in (0, 1] \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $0 < r(1 - x_n) < 1$ , тогда при  $0 < x_n < 1$  будет верно:

$$x_n \cdot r(1 - x_n) < x_n$$

$$x_{n+1} < x_n.$$

Значит, последовательность  $\{x_n\}$  строго монотонно убывает. □

### 2. Определить, будет ли последовательность $\{x_n\}$ сходящейся при $r \in (0, 1]$ . Подтвердить это графически.

*Доказательство.* По пункту 1 последовательность  $\{x_n\}$  строго монотонно убывает. По задаче 1 также известно, что  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1$ , значит  $\{x_n\}$  ограничена снизу нулём.

Следовательно, по теореме о монотонной ограниченной последовательности у  $\{x_n\}$  существует конечный предел. □

**NB:** По рис.3 видно, что  $\{x_n\}$  сходится к нулю. Нетрудно доказать это аналитически:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} rx_n(1 - x_n)$ . Так как последовательность задана рекуррентно, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ .

После преобразований получили:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{или} \quad r(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = 1.$$

При  $r \in (0; 1]$  имеем  $\frac{r-1}{r} \leq 0$ , а так как  $x_n > 0$  для всех  $n$ , то предел не может быть отрицательным. Следовательно,

$$\forall x_n \in \{x_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

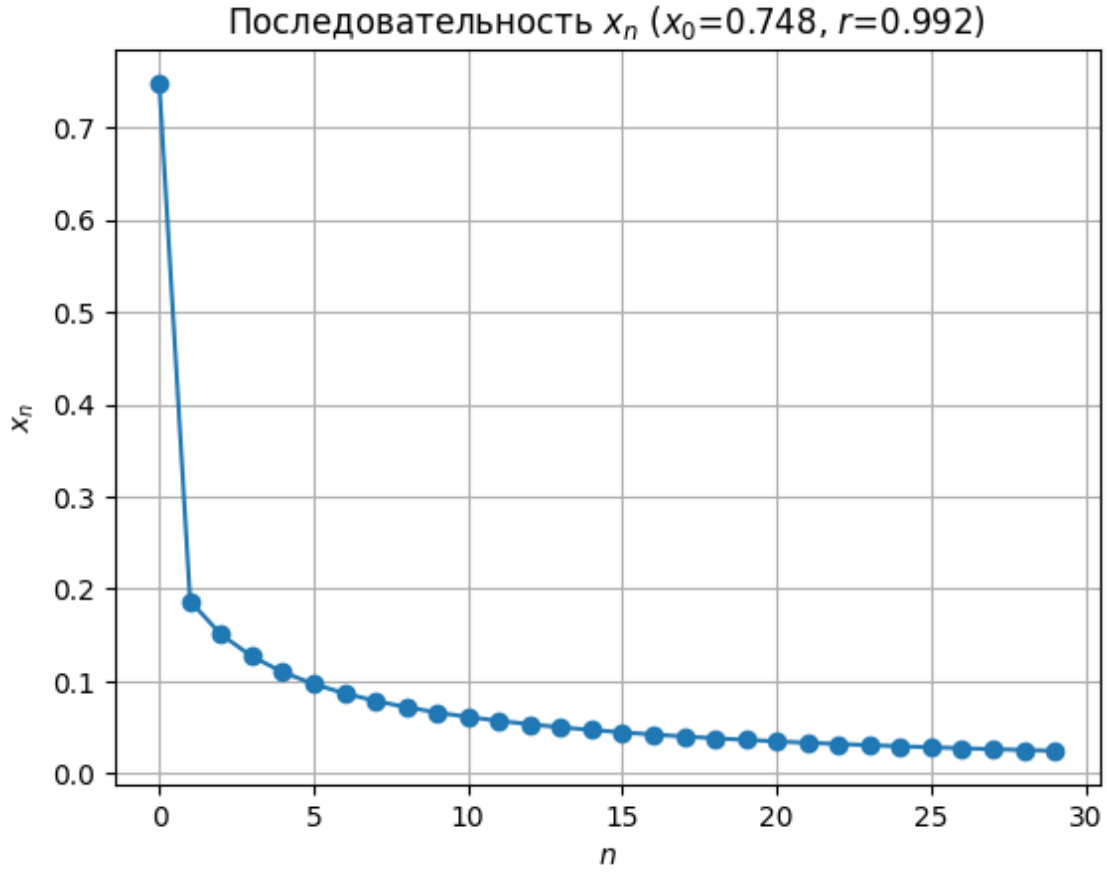


Рис. 3: График последовательности  $x_n$  при  $r \in (0; 1]$ .

## Задача 6

**Условие.** Пусть  $r \in (2; 3)$ ,  $x_{2n} > x^*$ ,  $x_{2n+1} < x^*$ , где  $x^* = \frac{r-1}{r}$  — ненулевая неподвижная точка логистического отображения.

**1. Исследовать монотонность подпоследовательностей  $\{x_{2n}\}$  и  $\{x_{2n+1}\}$ .**

1) Так как нам известны оценки  $x_{2n} > x^*$ ,  $x_{2n+1} < x^*$ , сравним  $x_n = f(x_{n-1})$  и  $x^* = f(x^*)$ :

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x^*) &= rx(1-x) - \frac{r-1}{r} = rx - rx^2 - \frac{r-1}{r} = rx - rx^2 - \frac{r-1}{r} + x - x = \\
 &= \left(-\frac{r-1}{r} + rx - x\right) - rx^2 + x = (rx - 1) \cdot \frac{r-1}{r} + (-rx + 1) \cdot x = \\
 &= -\left(x - \frac{r-1}{r}\right)(rx - 1) = -r\left(x - \frac{r-1}{r}\right)\left(x - \frac{1}{r}\right).
 \end{aligned}$$

При  $r \in (2; 3)$  имеем:  $0 < \frac{1}{r} < x^* < 1$ .

Из полученного следует:

- Если  $x > x^*$ , то  $(x - x^*) > 0$  и  $\left(x - \frac{1}{r}\right) > 0$ , значит  $f(x) - f(x^*) < 0$ , то есть

$$x > x^* \Rightarrow f(x) < f(x^*) = x^*.$$

- Если  $\frac{1}{r} < x < x^*$ , то  $(x - x^*) < 0$  и  $\left(x - \frac{1}{r}\right) > 0$ , значит  $f(x) - f(x^*) > 0$ , то есть

$$x < x^* \Rightarrow f(x) > f(x^*) = x^*.$$

Таким образом, отображение  $f$  «перебрасывает» точку через  $x^*$ : если  $x_n$  лежит выше  $x^*$ , то  $x_{n+1} = f(x_n)$  оказывается ниже, и наоборот.

**2)** Так как одна итерация меняет сторону относительно  $x^*$ , удобно рассмотреть двушаговое отображение, определяющее каждую из подпоследовательностей:

$$g(x) = f(f(x)).$$

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}), \quad x_{2n+3} = g(x_{2n+1}).$$

Исследуем поведение  $g(x)$  с помощью производной:

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

$$g'(x^*) = (f'(x^*))^2 = (2 - r)^2.$$

При  $r \in (2; 3)$  имеем

$$0 < (2 - r)^2 < 1,$$

Это значит:

- $g(x)$  сохраняет сторону  $x$  ( $g'(x^*) > 0$ ) (если  $xRx^*$ , то и  $g(x)Rx^*$ ),
- $g(x)$  уменьшает расстояние до  $x^*$  ( $|g'(x^*)| < 1$ ). (т.е.  $|g(x) - x^*| < |x - x^*|$ )

**3)** Так как  $g(x)$  уменьшает расстояние до  $x^*$ , то

$$x_{2n+2} - x^* < x_{2n} - x^*, \quad x_{2n+2} < x_{2n}$$

Значит, подпоследовательность  $\{x_{2n}\}$  монотонно убывает.

Аналогично, для  $x_{2n+1}$ :

$$x_{2n+3} > x_{2n+1}.$$

Следовательно, подпоследовательность  $\{x_{2n+1}\}$  монотонно возрастает.

## 2. Графически проверить это утверждение.

На рис. 4 видно, что чётные значения располагаются по одну сторону от  $x^*$  и монотонно приближаются к  $x^*$ , а нечётные — по другую сторону и также монотонно приближаются к  $x^*$ .

## Задача 7

**1. Для отображения  $g(x_n)$ , заданного вариантом, найти все неподвижные точки.** Напомним себе данное нам отображение:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x) = rx(1-x)(2+x), \quad r \in \left[0; \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}\right].$$

По определению,  $x^*$  — неподвижная точка, если  $g(x^*) = x^*$ . Решим уравнение:

$$rx^*(1-x^*)(2+x^*) = x^*.$$

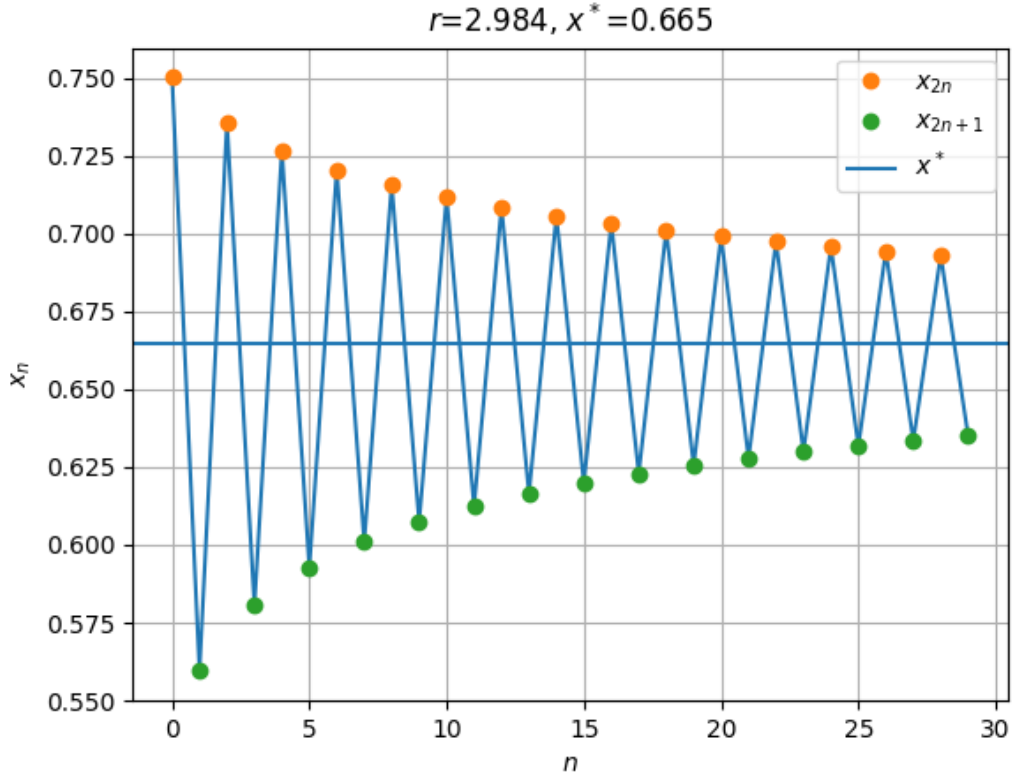


Рис. 4: Чётная и нечётная подпоследовательности  $x_n$  относительно  $x^*$  при  $r \in (2; 3)$ .

Очевидно, что  $x_1 = 0$  — неподвижная точка. Для  $x^* \neq 0$ :

$$r(1 - x^*)(2 + x^*) = 1 \iff r(2 - x^* - (x^*)^2) = 1 \iff (x^*)^2 + x^* + \left(\frac{1}{r} - 2\right) = 0.$$

Отсюда получаем единственную ненулевую неподвижную точку:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9 - \frac{4}{r}}}{2}.$$

**Note:** Значение будет вещественно тогда и только тогда, когда

$$9 - \frac{4}{r} \geq 0 \iff r \geq \frac{4}{9}.$$

**2. Найти диапазон  $r$ , при котором  $\{x_n\}$  монотонно сходится к нулю.**

Найдём условия, при которых для данной  $\{x_n\}$  выполняется:

$$\forall n : 0 < x_{n+1} < x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Для  $x \in (0, 1)$  рассмотрим формулу членов последовательности:

$$g(x) = rx(1 - x)(2 + x) \iff \frac{g(x)}{x} = r(1 - x)(2 + x)$$

На  $(0, 1)$  имеем  $0 < (1 - x)(2 + x) < 2$ . Если  $0 < r \leq \frac{1}{2}$ , то для любого  $x \in (0, 1)$  получаем

$$0 < r(1 - x)(2 + x) < r \cdot 2 \leq 1 \implies 0 < g(x) < x.$$

Применяя это к  $x = x_n$ , заключаем:

$$\forall n : 0 < x_{n+1} < x_n,$$

то есть  $\{x_n\}$  ограничена снизу и строго убывает, следовательно у  $\{x_n\}$  существует предел.

**2.\* Докажем, что предел этой функции равен неподвижной точке.**

Так как  $x_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то и  $x_{n+1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Функция  $g(x) = rx(1 - x)(2 + x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Из её непрерывности следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n+1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right),$$

то есть предел последовательности является неподвижной точкой отображения.

**NB:** Аналогичное утверждение было приведено в качестве теоретической выкладки в техзадании, но меня смутило то, что при рассматриваемых  $\{x_n\}$  и  $r$  приведённое утверждение как будто некорректно применять. Доказательство выше было перестраховкой на всякий.

Покажем, что при  $0 < r \leq \frac{1}{2}$  других неотрицательных неподвижных точек, кроме 0, нет. Действительно, для  $r \leq \frac{1}{2}$  выполнено  $9 - \frac{4}{r} \leq 9 - 8 = 1$ , поэтому

$$\frac{-1 + \sqrt{9 - \frac{4}{r}}}{2} \leq 0$$

Следовательно, при  $0 < r \leq \frac{1}{2}$  единственная неподвижная точка на  $[0, 1]$  — это 0. Итак, при  $x_0 \in (0, 1)$  последовательность  $\{x_n\}$  монотонно сходится к нулю при  $0 < r \leq \frac{1}{2}$ . При  $r = 0$  имеем  $x_1 = 0$ , то есть сходимости к нулю также имеет место. Итоговый диапазон:

$$r \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

**3. Построить графики зависимости  $x_n$  от  $n$  для различных значений  $r$ .**

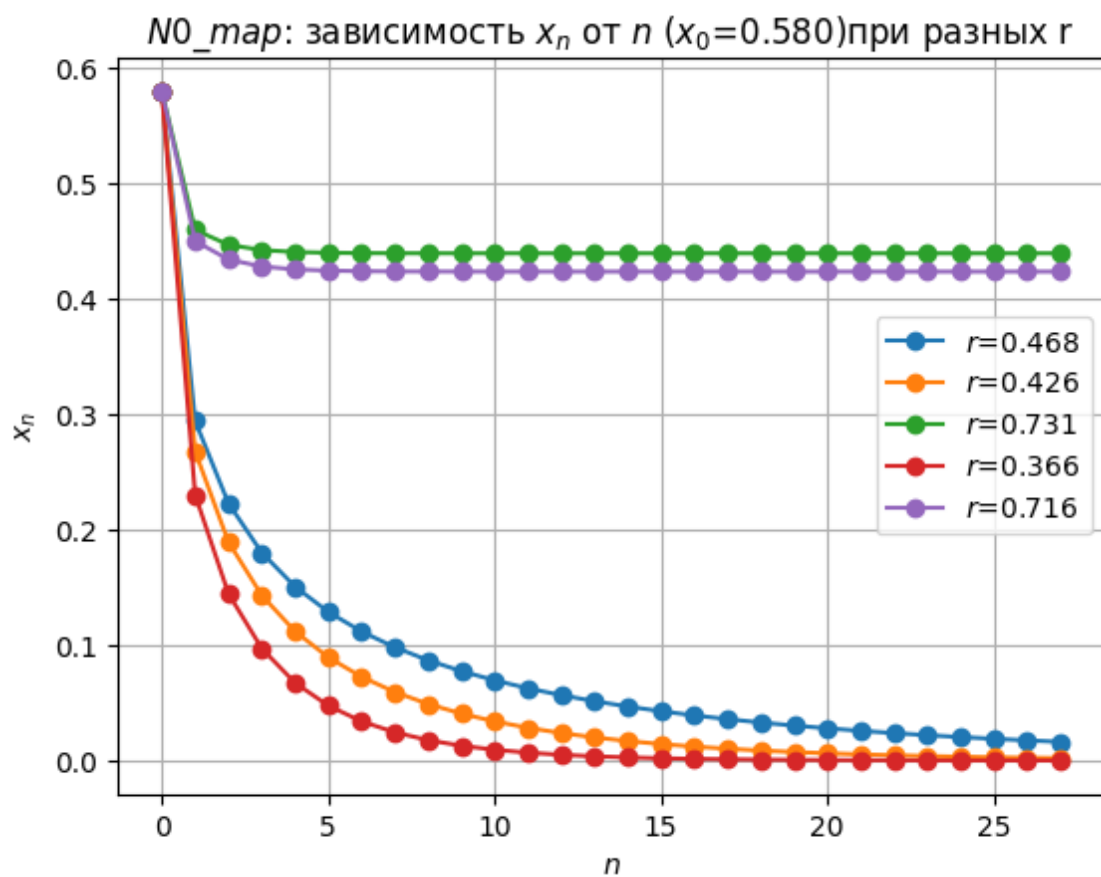


Рис. 5: Графики зависимости  $x_{n+1}$  от  $x_n$  при разных  $r$ .