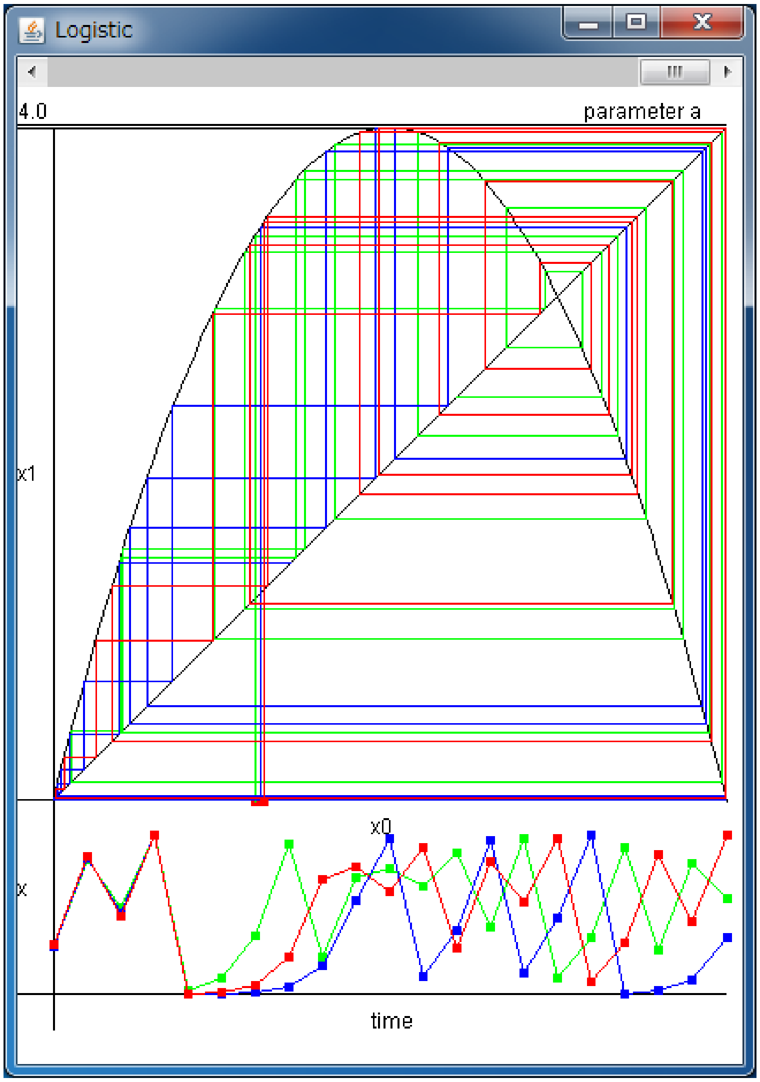

Лабораторная работа:

Исследование точечных отображений

Выполнил: Дорогостайский
Илья Ярославович,
группа J3114

22 февраля 2026 г.
Санкт-Петербург

Введение

В данной лабораторной работе будем исследовать поведение дискретных динамических систем, задаваемых точечным отображением

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n),$$

где $\vec{x}_n$ — состояние системы в момент n, а $\vec{f}$ — отображение, определяющее переход к следующему состоянию, на примере логистического отображения и его модификаций.

Будем использовать понятия предела, монотонности и ограниченности, изученные в рамках курса математического анализа, в данной работе для исследования рассматриваемых в качестве примера динамических систем последовательностей.

Смысл работы состоит в закреплении полученных знаниях на практике. Наша задача - научиться исследовать поведение посследовательностей и изучить свойства последовательностей, задаваемых рекуррентно.

Ход работы:

- Проанализируем динамику логистического отображения при различных значениях параметров и начального условия.
- Исследуем влияние параметра r на поведение точечных отображений и изменение их качественных свойств.
- Ознакомимся с понятием неподвижной точки, определим условия её существования и количество.
- Изучим последовательности, порождаемые отображением, на предмет монотонности и наличия предела.
- Проанализируем существование циклов порядка m и их свойства для рассматриваемых отображений.
- Исследуем поведение циклов разных порядков с использованием построения лестниц Ламерея.
- Подтвердим полученные аналитические результаты с помощью графической визуализации.

Easy

Прежде чем приступить к практике, обозначим вводимые в рамках работы определения и поясним их.

Определение: *Логистическим отображением* называется функция вида

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

где r — параметр скорости прироста, x_n - состояние системы в некий момент n, а x_{n+1} - её же состояние в следующий момент. Также известны свойства логистического отображения, такие как:

$$r \in [0, 4],$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad x_n \in [0, 1].$$

***NB*:** Логистическое отображение широко используется при описании динамических систем, например при исследовании скорости изменения численности популяций. В таком случае параметр r характеризует скорость роста популяции от момента n до момента $n + 1$ (фактор "рождаемости минус смертности")

Задача 1

Доказать утверждение:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0, 1]: \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

Доказательство. (по методу математической индукции)

1) База индукции:
По определению логистического отображения $x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$.
Тогда при $n = 1$ имеем:

$$x_1 = rx_0(1 - x_0).$$

Так как $0 < x_0 < 1$, имеем:

$$-1 < -x_0 < 0 \iff 0 < 1 - x_0 < 1$$

Тогда $0 < x_0(1 - x_0) < 1$. При $r \in (0, 1]$ получаем:

$$0 < rx_0(1 - x_0) < 1.$$

Итак,

$$0 < x_1 < 1.$$

2) Индукционное предположение:
Пусть для некоторого $k = n$ верно:

$$0 < x_k < 1.$$

Тогда докажем, что и $0 < x_{k+1} < 1$ через определение логистического отображения:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k).$$

Так как $0 < x_k < 1$, то $0 < 1 - x_k < 1$. Следовательно, $0 < x_k(1 - x_k) < 1$.
При $r \in (0, 1]$, получаем

$$0 < rx_k(1 - x_k) < 1.$$

Следовательно,

$$0 < x_{k+1} < 1.$$

3) Интерпретация:
Значит при $x_0 \in (0, 1)$ верно:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_n < 1.$$

Действительно, если про начальное состояние x_0 нам известно, что $x_0 \in (0, 1)$, тогда, исходя из формулы логистического отображения и ограничений, наложенных на r, после n итераций мы получим x_n, также не выходящее за пределы $(0, 1)$. Т.е. справедливо будет сказать:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in (0, 1] : \quad 0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1.$$

□

Задача 2

1. Как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_{n+1} от x_n?
Заметим, что график зависимости x_{n+1} от x_n — это график функции

$$y = f(x) = rx(1 - x).$$

Рассмотрим этот график, чтобы изучить влияние параметра r на поведение функции:

- $f(0) = 0$ и $f(1) = 0$, т.е. график проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ при любом r.
- $f(x) = rx(1 - x) = -rx^2 + rx$ - квадратичная функция, график является параболой с ветвями, направленными вниз.
- Вершина параболы достигается при $x = \frac{1}{2}$:

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}.$$

  Следовательно, параметр r масштабирует график по вертикали: чем больше r, тем выше вершина и тем больше значения x_n при фиксированном $x_{n-1} \in (0, 1)$.
- Так как $\max f(x) = \frac{r}{4}$, то при $r \in [0, 4]$ имеем $f(x) \leq 1$ на $[0, 1]$, что согласуется с оценкой $x_n \in [0, 1]$. При $r > 4$ член x_n может оказаться вне этого диапазона.
- **Вывод:** Параметр r не меняет значения f на $x = 0, \quad x = 1$, но изменяет высоту и крутизну графика: при росте r парабола растягивается вверх, а максимум $\max f(x) = \frac{r}{4}$ растёт линейно.

2. Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

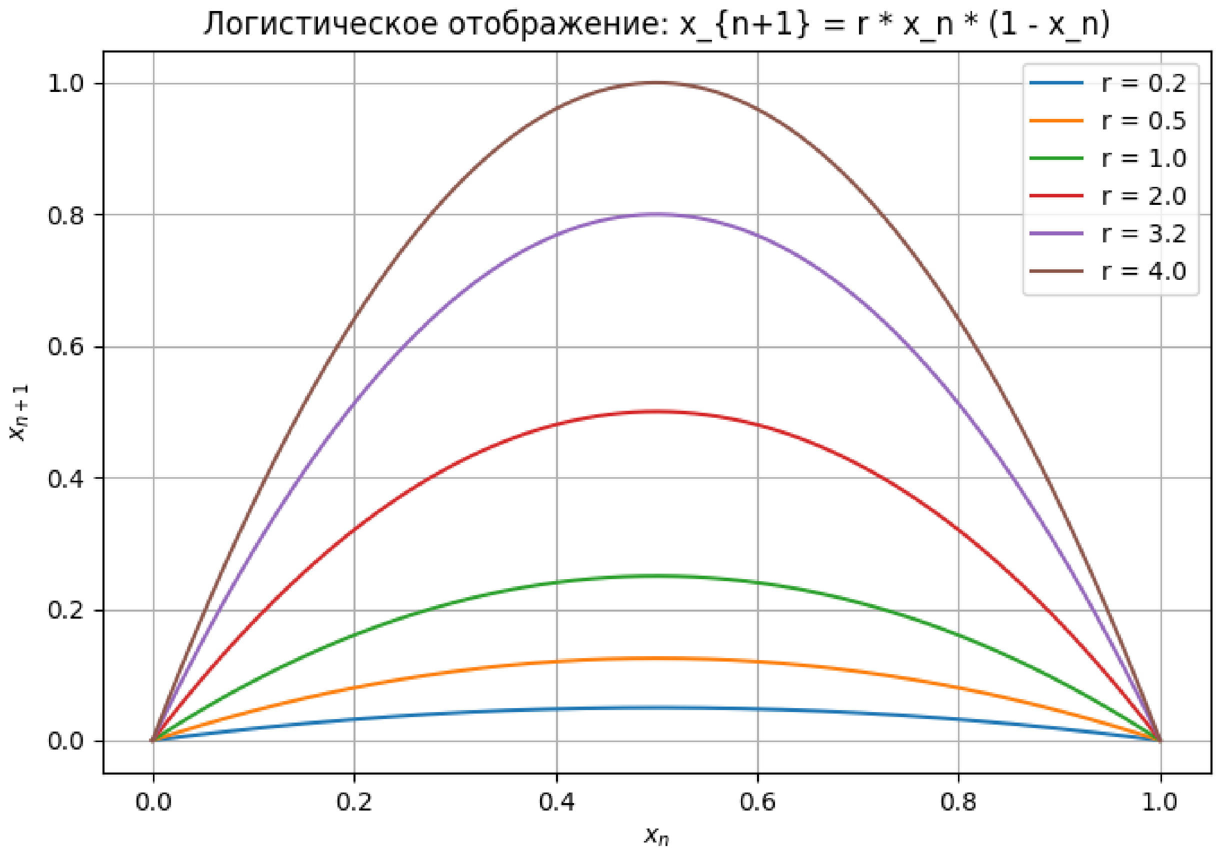

Рис. 1: Графики функции $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ при различных r.

Задача 3

1. Постройте графики зависимости x_{n+1} от x_n для различных значений r.
По условию варианта ($N = 0$) будем рассматривать точечное отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n), \qquad r \in \left[0;\ \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}\right].$$

Рассмотрим график этой функции:

- $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$. Следовательно, график проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Также существует нуль при $x = -2$, однако он не принадлежит отрезку $[0, 1]$.
- $g(x) = r(2x - x^2 - x^3)$ - кубическая функция, графиком является кубическая парабола.
- При $x \in [0, 1]$ выполняется: $x \geq 0$; $1 - x \geq 0$; $2 + x > 0$, следовательно,

$$g(x) = rx(1 - x)(2 + x) \geq 0.$$

- Чтобы найти максимум функции, рассмотрим её производную:

$$g'(x) = r(2 - 2x - 3x^2).$$

Из уравнения $g'(x) = 0$ получаем:

$$2 - 2x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}.$$

Эта точка принадлежит $(0, 1)$ (т.к. $\frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.55$) Данная точка экстремума единственна на рассматриваемом промежутке, и проходя через неё $g'(x)$ меняет свой знак с $+$ на $-$, следовательно, $x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ - точка максимума функции на $(0, 1)$.

- Подставим это значение, чтобы оценить r:

$$\max g(x) = r(2\frac{\sqrt{7} - 1}{3} - \frac{(\sqrt{7} - 1)^2}{9} - \frac{(\sqrt{7} - 1)^3}{9}) =$$

$$= r(2\frac{\sqrt{7} - 1}{3} - \frac{8 - 2\sqrt{7}}{9} - \frac{10\sqrt{7} - 22}{27}) = r\frac{18(\sqrt{7} - 1) - 3(8 - 2\sqrt{7}) - (10\sqrt{7} - 22)}{27} =$$

$$= r\frac{2(7\sqrt{7} - 10)}{27}.$$

Из $\max g(x) \leq 1$, следует

$$r \leq \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}.$$

2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Чем могут быть вызваны сходства/различия?

Исходя из рассмотренных свойств функции $g(x) = rx(1 - x)(2 + x)$, нетрудно выявить её сходства и различия сравнительно с функцией логистического отображения $f(x) = rx(1 - x)$:

Сходства.

- В обоих случаях имеется точечное отображение вида $x_{n+1} = F(x_n)$, зависящее от параметра r, причём увеличение r приводит к увеличению значений $F(x)$ при фиксированном $x \in (0, 1)$ (r вертикально масштабирует график).
- Оба отображения имеют нули на $[0, 1]$ в точках $x = 0$ и $x = 1$:

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad g(0) = g(1) = 0,$$

поэтому их графики проходят через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, вне зависимости от r.

Различия.

- Логистическое отображение задаёт квадратичную функцию, а отображение $g(x) = rx(1-x)(2+x)$ - кубическую. Поэтому форма графиков будет отличаться: хотя на [0,1] внешне графики и схожи, кривая $g(x)$ не является параболой $f(x)$ и имеет иное распределение значений по x (даже при фиксированном r).

Очевидно, что сходства обусловлены общей структурой: оба отображения задаются итеративно и зависят от параметра r как от масштабирующего множителя.

В свою очередь, различия вызваны разной старшей степенью отображений, что меняет форму графика x_{n+1} от x_n и, как следствие, характер итераций.

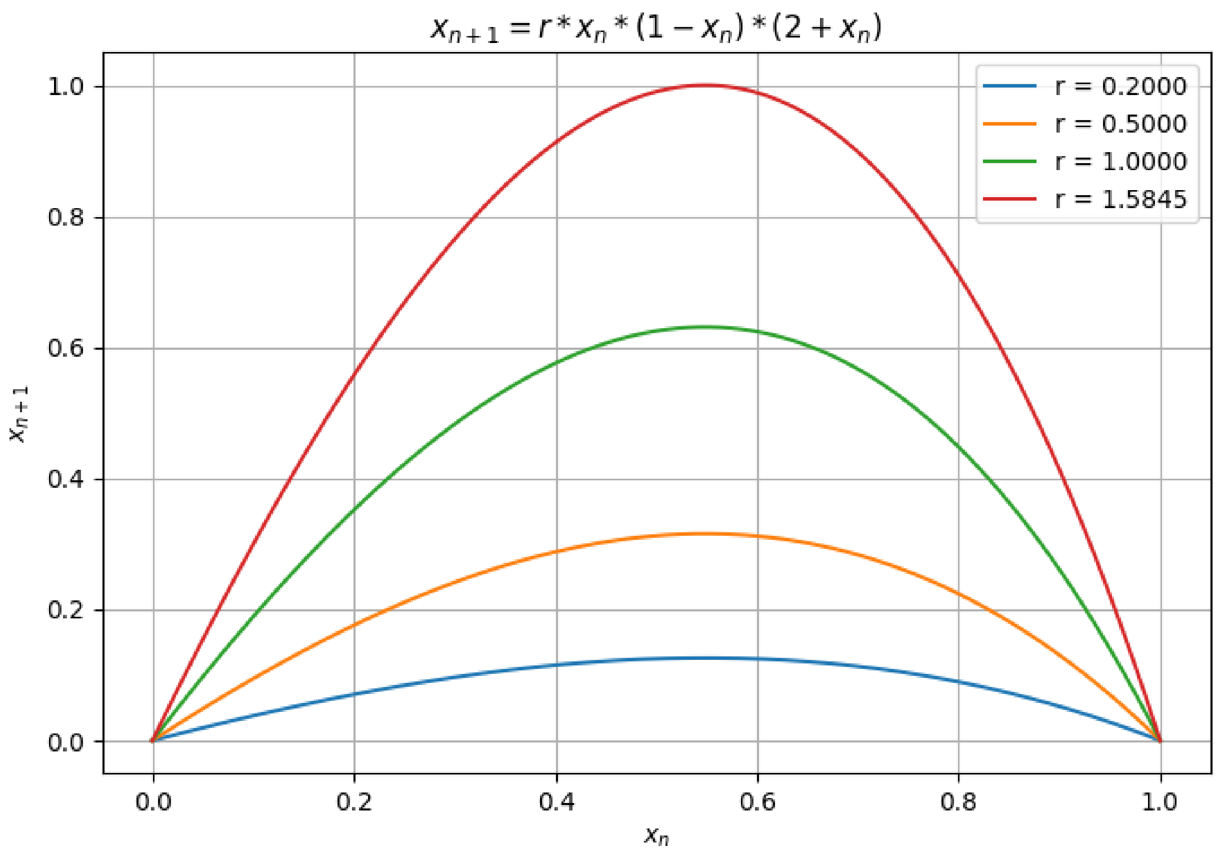

Рис. 2: Графики функции $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)(2 + x_n)$ при различных r.

Normal

Прежде чем приступать к дальнейшим заданиям, рассмотрим вводимое в рамках работы определение неподвижной точки.

Определение. Точка x^* называется *неподвижной точкой* отображения $f(x)$, если

$$x^* = f(x^*).$$

Иными словами, при применении отображения неподвижная точка переходит сама в себя.

Задача 4

1. Найти все неподвижные точки логистического отображения.

Рассматривая $x_n = x^*$ в логистическом отображении $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, справедливо будет заметить, что:

$$x_n = rx_n(1 - x_n).$$

Найдём неподвижные точки, удовлетворяющие этому равенству, решив его:

$$x = rx(1 - x) \iff rx - rx^2 - x = 0 \iff$$

$$\iff -rx^2 + (r - 1)x = 0 \iff \ x\big(- rx + r - 1\big) = 0$$

Отсюда получаем

$$x = 0,$$

$$-rx + r - 1 = 0.$$

Из второго уравнения:

$$rx = r - 1 \iff \ x = \frac{r-1}{r}$$

Итак, мы нашли неподвижные точки:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{r-1}{r}.$$

2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?

При $r = 0$, отображение $f(x) = rx(1 - x) = 0$, и уравнение $x = f(x)$ даёт единственное решение:

$$x = 0.$$

При $r = 1$, согласно найдённой неподвижной точке, имеем:

$$x_2 = \frac{1-1}{1} = 0,$$

т.е. обе формулы дают одну и ту же точку. Следовательно, при $r = 1$ неподвижная точка одна.

Итак:

$$\begin{cases} r = 0 \cup r = 1 & \text{одна неподвижная точка,} \\ r \in (0, 1) & \text{две различные неподвижные точки.} \end{cases}$$

3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

Уравнение неподвижных точек приводится к квадратному уравнению относительно x:

$$x = rx(1 - x) \iff -rx^2 + (r - 1)x = 0.$$

Квадратное уравнение может иметь не более двух действительных корней. Следовательно, максимальное количество неподвижных точек логистического отображения равно двум.

Задача 5