МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних занять з курсу “Моделювання складних систем в умовах невизначеностей” для студентів базового напряму підготовки 6.040301 “Прикладна математика”

Затверджено
на засіданні кафедри прикладної математики.
Протокол № від

Львів - 2018

Моделювання складних систем в умовах невизначеностей: метод. вказівки до лабораторних занять з курсу “Моделювання складних систем в умовах невизначеностей” для студентів базового напряму підготовки 6.040301 “Прикладна математика” / уклад.: М.О. Галущак, І.А. Рижа, П.Р. Курапов, М.М. Строчик. — Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2018. — 32 с.

Укладачі Галущак М.О., канд. техн. наук, асист.,
Рижа І.А., асист.,
Курапов П.Р., аспірант,
Строчик М.М., канд. фіз.-мат. наук, ст. викл.

Відповідальний за випуск

Рецензенти

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема: Методи статистичного оцінювання вхідних та вихідних параметрів.

Мета: Вивчення методів обчислення статистичних характеристик випадкових величин та побудови експериментальних функцій розподілу при статистичному моделюванні систем. Створення програмного забезпечення для аналізу випадкових величин.

Короткі теоретичні відомості

1. Точкове оцінювання

Статистичною оцінкою $\hat{\theta}$ невідомого параметра θ теоретичного розподілу називають функцію $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ від спостережуваних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Точковою називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом $\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результати n спостережень за випадковою ознакою X (вибірка).

Якість оцінок характеризується такими властивостями:

1. Незміщеність. *Незміщеною* називають точкову оцінку, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру при довільному об'ємі вибірки, тобто: $M(\hat{\theta}) = \theta$. Для незміщених оцінок систематична похибка оцінювання рівна 0.

2. Спроможність. Оцінка $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *спроможною оцінкою* параметра θ, якщо при збільшенні кількості випробувань вона збігається до оцінюваного параметру за ймовірністю, тобто:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} = 0 .$$

Якщо $M(\hat{\theta}_n) \to \theta$ і $D(\hat{\theta}_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\hat{\theta}_n$ – спроможна оцінка параметра θ.

3. Ефективність. Для оцінки параметра θ можна запропонувати декілька незміщених оцінок. Мірою точності оцінки $\hat{\theta}$ вважається її дисперсія. Нехай $\hat{\theta}_1$ і $\hat{\theta}_2$ – дві різні незміщені оцінки параметра θ. Якщо $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, то оцінку $\hat{\theta}_1$ називають *більш ефективною*, ніж оцінка $\hat{\theta}_2$.

Незміщеною і спроможною оцінкою математичного сподівання m_X генеральної сукупності є вибіркове середнє:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (1)$$

де x_i – елемент вибірки, n – об’єм вибірки.

Незміщеною і спроможною оцінкою дисперсії σ_X^2 генеральної сукупності є виправлена вибіркова дисперсія:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2. \qquad (2)$$

2. Інтервальне оцінювання

Точкова оцінка — це оцінка невідомого параметра θ одним числом. Проте деколи потрібно не тільки знайти для параметра θ відповідне числове значення, але й оцінити його точність і надійність. Іншими словами, знайти до яких похибок призведе заміна параметра θ на його точкову оцінку $\hat{\theta}$, і з яким рівнем надійності можна очікувати, що ці похибки не вийдуть за відомі межі.

Нехай для параметра θ з експерименту отримана незміщена оцінка $\hat{\theta}$. Визначимо деяку досить високу ймовірність γ (наприклад, $\gamma =$0,9; 0,95; 0,99) і знайдемо таке значення ε, для якого: $P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=\gamma$. Це означає, що з імовірністю γ невідомий параметр θ належатиме інтервалу $I_\gamma = (\hat{\theta}-\varepsilon;\hat{\theta}+\varepsilon)$. Ймовірність γ того, що інтервал I_γ покриє точку θ називають *рівнем надійності* або надійною ймовірністю, а інтервал I_γ — γ-*надійним інтервалом* для параметра θ. Межі інтервалу I_γ: $\theta_1 = \hat{\theta}-\varepsilon$ і $\theta_2 = \hat{\theta}+\varepsilon$ називають *надійними межами*.

Отже, *інтервальною* називають оцінку, яка визначається двома числами — кінцями інтервалу, що покриває оцінюваний параметр.

1. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) математичного сподівання m_X нормально розподіленої випадкової ознаки X по вибірковому середньому $\bar{x}$ при *відомому середньоквадратичному відхиленню* σ_X генеральної сукупності є інтервал надійності:

$$\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}, \qquad (3)$$

де n — об’єм вибірки, u_p — квантиль порядку p нормального розподілу $N(0,1)$, $\alpha = 1-\gamma$.

2. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) математичного сподівання m_X нормально розподіленої випадкової ознаки X по вибірковому середньому $\bar{x}$ при *невідомому середньому квадратичному відхиленню* σ_X генеральної сукупності є інтервал надійності:

$$\bar{x} - t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad (4)$$

де $t_{n-1;p}$ – квантиль порядку p розподілу Стьюдента з $(n-1)$ ступенями вільності, S^2 – виправлена вибіркова дисперсія (2), $\alpha = 1-\gamma$.

3. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) середнього квадратичного відхилення σ_X нормально розподіленої випадкової ознаки X по виправленому вибірковому середньому квадратичному відхиленню S при *невідомому математичному сподіванню* m_X генеральної сукупності є інтервал надійності:

$$(n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} < \sigma_X^2 < (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \qquad (5)$$

де $\chi^2_{n-1;p}$ — квантиль порядку p розподілу χ^2 з $(n-1)$ ступенями вільності, S^2 — виправлена вибіркова дисперсія (2), $\alpha = 1-\gamma$. Інтервальна оцінка (5) є несиметричною відносно S^2.

3. Побудова гістограми

Гістограма $f_n(x)$ відносних частот є статистичним аналогом (наближенням) щільності розподілу $f(x)$.

Для того, щоби побудувати гістограму, діапазон значень вибірки розбивається на m однакових інтервалів $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,r}$, де x_{i-1}, x_i – межі i-ого інтервалу. Кількість інтервалів групування обчислюється за формулою Стерджеса:

$$r = 1 + [3{,}322\lg(n)],$$

де $[\cdot]$ позначає цілу частину від числа, n — об'єм вибірки. Тоді ширина інтервалу h визначається зі співвідношення:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r},$$

де $x_{\max}$, $x_{\min}$ — найбільше і найменше значення з вибірки, відповідно. Початком першого інтервалу слід брати число $x_{\min} - \frac{h}{2}$.

Потім для кожного інтервалу підраховуються відносні частоти $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, де n_i — кількість вибіркових значень, які потрапили в i-й інтервал розбиття. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{r}\omega_i = 1$. Далі в прямокутній системі координат на осі абсцис відкладаються інтервали розбиття Δ_i і на кожному з них будуються прямокутники висотою відповідно $\frac{n_i}{nh}$. Ламана лінія, яка обмежує згори побудовану фігуру, називається *гістограмою* (відносних частот) вибірки. Площа ступінчастої фігури під графіком гістограми дорівнює одиниці.

Приклад 1. Кількість видобутого вугілля (у млн. т) на 30-ти випадково вибраних шахтах є такою: 4,2; 2,4; 4,9; 6,7; 4,5; 2,7; 3,9; 2,1; 5,8; 4,0; 2,8; 7,8; 4,4; 6,6; 2,0; 6,2; 7,0; 8,1; 0,7; 6,8; 9,4; 7,6; 6,3; 8,8; 6,5; 1,4; 4,6; 2,0; 7,2; 9,1. Побудувати інтервальний статистичний розподіл із довжиною кроку $h=2$ млн. т. Оцінити з надійністю $\gamma=0{,}999$ дійсну середню кількість видобутого вугілля m_X за допомогою інтервалу надійності, якщо середнє квадратичне відхилення кількості видобутого вугілля $\sigma_X = 5$ млн т.

Розв'язання. Інтервальний статистичний розподіл матиме вигляд:

$[x_{i-1}, x_i)$	2-4	4-6	6-8	8-10
n_i	9	7	10	4

Для визначення вибіркового середнього $\bar{x}$ побудуємо дискретний статистичний розподіл:

x_i^*	3	5	7	9
n_i	9	7	10	4

де x_i^* — середина i-го інтервалу розбиття. Очевидно, що:

$$n=\sum n_i=30.$$

Тоді

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i x_i^*}{n}=\frac{168}{30}=5{,}6.$$

Оскільки середнє квадратичне відхилення σ_X генеральної сукупності є відомим, то шуканий інтервал надійності для математичного сподівання m_X знайдемо за формулою (3). У цьому випадку $\gamma=0{,}999$, тому $\alpha=0{,}001$. З таблиці знаходимо $u_{1-\alpha/2}=u_{0{,}9995}=3{,}291$. Підставляючи значення $\bar{x}=5{,}6$, $u_{1-\alpha/2}=3{,}291$, $\sigma_X=5$, $n=30$ у формулу (3), отримуємо шуканий інтервал надійності $2{,}6<m_X<8{,}6$, який покриває невідоме математичне сподівання m_X з імовірністю 0,999.

Приклад 2. Здійснено 5 незалежних вимірювань опору конденсатора і отримано такі результати: 2,15; 2,18; 2,14; 2,16; 2,17. Оцінити справжній опір конденсатора і середнє квадратичне відхилення від цього значення за допомогою γ-надійних інтервалів з надійною ймовірністю 0,95.

Розв'язання. Вважається, що результати вимірювань мають нормальний розподіл $N(a,\sigma)$, причому обидва параметри $a = m_X$ і $\sigma = \sigma_X$ є невідомими. Потрібно знайти надійні інтервали для m_X – справжнього значення опору конденсатора та σ_X — середнього квадратичного відхилення від цього значення при $\gamma = 0{,}95$.

Обчислимо спочатку середнє вибіркове:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(2{,}15 + 2{,}18 + 2{,}14 + 2{,}16 + 2{,}17) = 2{,}16$$

і виправлену вибіркову дисперсію:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4}\left((-0{,}01)^2 + (0{,}02)^2 + (-0{,}02)^2 + (0{,}01)^2\right) = 2{,}5\cdot 10^{-4}.$$

Шуканий інтервал надійності для m_X знайдемо за формулою (4). У цьому випадку $\gamma = 0{,}95$, тому $\alpha = 0{,}05$. З таблиці знаходимо $t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{4;0{,}975} = 2{,}776$. Підставляючи значення $t_{n-1;1-\alpha/2} = 2{,}776$, $\bar{x} = 2{,}16$, $S = \sqrt{S^2} = 0{,}1581$, $n = 5$ у формулу (4), отримуємо $2{,}14 < m_X < 2{,}18$.

Шуканий інтервал надійності для σ_X знайдемо за формулою (5). З таблиці знаходимо $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} = \chi^2_{4;0{,}975} = 11{,}1$ і $\chi^2_{n-1;\alpha/2} = \chi^2_{4;0{,}0025} = 0{,}484$. Підставляючи значення $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} = 11{,}1$, $\chi^2_{n-1;\alpha/2} = 0{,}484$, $S^2 = 2{,}5\cdot 10^{-4}$, $n = 5$ у формулу (5), отримуємо $0{,}00009 < \sigma_X^2 < 0{,}0021$. Отже, шуканий інтервал надійності $0{,}0095 < \sigma_X < 0{,}0458$.

Порядок виконання роботи

1. Згенерувати випадкові послідовності за експоненціальним $Exp(\lambda)$ та нормальним $N(m,\sigma)$ законами розподілу з параметрами згідно індивідуального завдання (табл. 1.1).
2. Знайти точкові оцінки математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення отриманих випадкових послідовностей.
3. Для отриманої випадкової послідовності, згенерованої за нормальним законом, оцінити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення за допомогою γ–надійних інтервалів з рівнем надійності 0,95.
4. Побудувати інтервальні варіаційні ряди. Для кожного інтервалу знайти: частоту, відносну частоту і накопичену частоту.
5. Побудувати гістограми щільностей розподілу відповідних законів на основі отриманих випадкових послідовностей.

6. Оцінити значення параметрів теоретичних розподілів, використовуючи отримані оцінки.
7. Зробити висновки відносно отриманих результатів, використаних методів і засобів.
8. Оформити звіт за результатами виконаної роботи.

Таблиця 1.1.

Варіант	Значення вхідних даних			
	X_0	λ	m	σ
1	21387	0.01	10.0	0.50
2	15765	0.02	10.0	1.00
3	07645	0.03	10.0	1.50
4	19757	0.04	10.0	2.00
5	22547	0.05	10.0	2.50
6	11547	0.06	20.0	0.25
7	09781	0.07	20.0	0.50
8	16455	0.08	20.0	0.75
9	09677	0.09	20.0	1.00
10	21549	0.10	20.0	1.25
11	04969	0.11	30.0	1.50
12	09977	0.12	30.0	1.75
13	12119	0.13	30.0	2.00
14	19155	0.14	30.0	2.25
15	06997	0.15	30.0	2.50
16	13523	0.16	40.0	1.00
17	67831	0.17	40.0	1.25
18	98273	0.18	40.0	1.50
19	72181	0.19	40.0	1.75
20	57383	0.20	40.0	2.00
21	43913	0.21	50.0	0.50
22	39851	0.22	50.0	1.00
23	53987	0.23	50.0	1.50
24	23981	0.24	50.0	2.00
25	18497	0.25	50.0	2.50
26	89721	0.26	60.0	1.00
27	39873	0.27	60.0	1.50
28	26547	0.28	60.0	2.00
29	18607	0.29	60.0	2.50
30	71093	0.30	60.0	3.00

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Тема: Методи статистичного моделювання випадкових величин та випадкових векторів.

Мета: Вивчення методів статистичного моделювання випадкових величин. Здійснення програмної реалізації методу Монте–Карло.

Короткі теоретичні відомості

Метод Монте–Карло — загальна назва групи числових методів, заснованих на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Оскільки метод Монте-Карло потребує проведення великої кількості випробувань, його часто називають методом статистичних випробувань.

Імітаційне моделювання за методом Монте-Карло дає змогу побудувати математичну модель з невизначеними параметрами, і, знаючи їх ймовірнісні розподіли, а також зв’язок між змінами параметрів (кореляцію), отримати розподіл досліджуваної функції.

Імітаційна модель — це формальний опис логіки функціонування досліджуваної системи і взаємодії окремих її елементів у часі, що враховує найбільш суттєві причинно–наслідкові зв'язки, властиві системи та забезпечує проведення статистичних експериментів.

Не існує єдиного методу Монте–Карло, цей термін описує великий і широко використовуваний клас підходів. Проте ці підходи використовують в своїй основі єдиний шаблон:

1. Визначити область можливих вхідних даних.
2. Випадковим чином згенерувати вхідні дані із визначеної вище області за допомогою деякого заданого розподілу ймовірностей.
3. Виконати детерміновані обчислення над вхідними даними.
4. Проміжні результати окремих розрахунків звести у кінцевий результат.

Приклад 1. Оцінити середній час безвідмовної роботи системи, зображеної на рисунку 2.1.

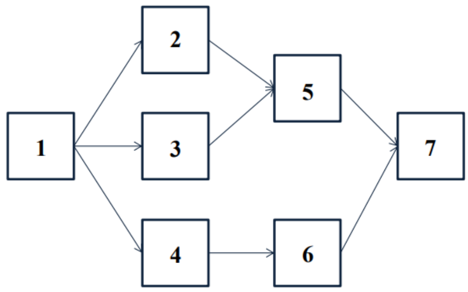


Рис.2.1. Схематичне представлення системи.

Система виконує свою функцію, якщо працюють послідовності блоків: $\{1,2,5,7\}$; $\{1,3,5,7\}$; $\{1,4,6,7\}$. Певні блоки можуть відмовити. Кожен блок характеризується часом безвідмовної роботи $\tau_i, i = \overline{1,7}$. Нехай ймовірність безвідмовної роботи $p_i(\tau_i), i = \overline{1,7},$ розподілена за законом Пуассона. Визначити надійність системи в цілому.

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину:

$$\gamma = \min\{\tau_1, \max[\min(\tau_4, \tau_6), \min[\max(\tau_2, \tau_3), \tau_5]], \tau_7\}.$$

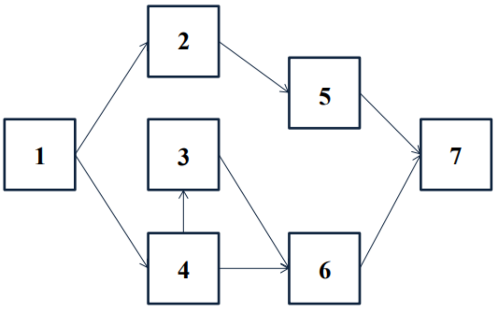
У одному досліді генерується значення всіх $\tau_i, i = \overline{1,7}$, відповідно до $p_i(\tau_i), i = \overline{1,7}$. Використовуючи отримані реалізації $\tau_i, i = \overline{1,7}$, за вищенаведеною формулою, обчислюємо реалізацію γ . Один дослід дає одну реалізацію (одне вибіркове значення) γ. Проводимо n дослідів (випробувань), отримуємо вибірку. Беремо середнє арифметичне часу безвідмовної роботи системи γ в якості оцінки надійності системи.

Порядок виконання роботи

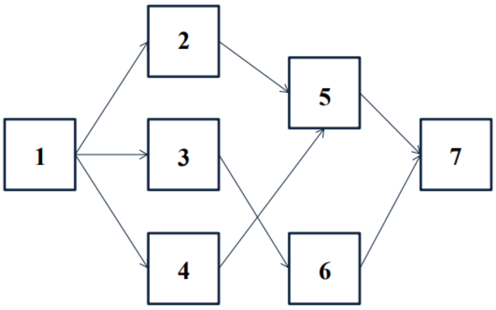
1. Для системи обраної згідно індивідуального завдання (див. табл.2.1.) оцінити значення γ, використовуючи методи статистичного моделювання випадкових величин.
2. Зробити висновки відносно отриманих результатів, використаних методів і засобів.
3. Оформити звіт за результатами виконаної роботи.

Таблиця 2.1.

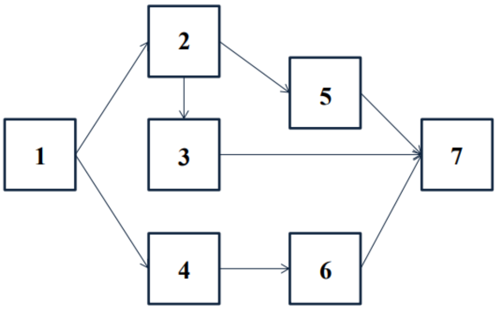
Варіант 1



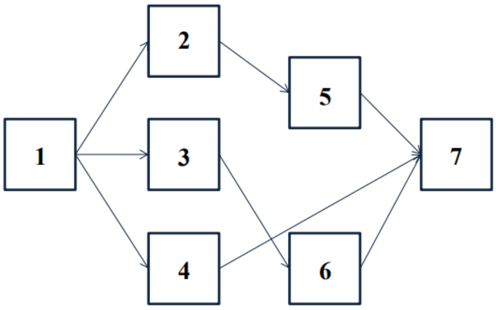
Варіант 2



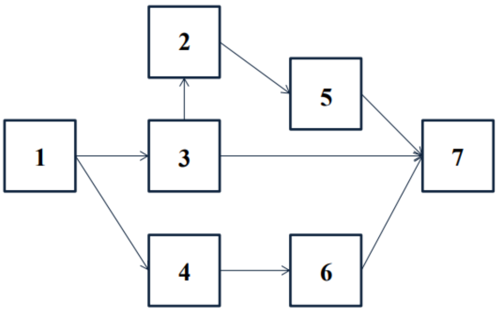
Варіант 3



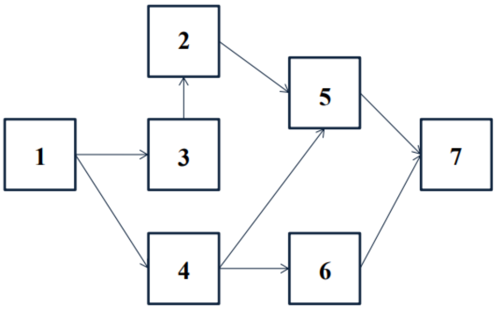
Варіант 4



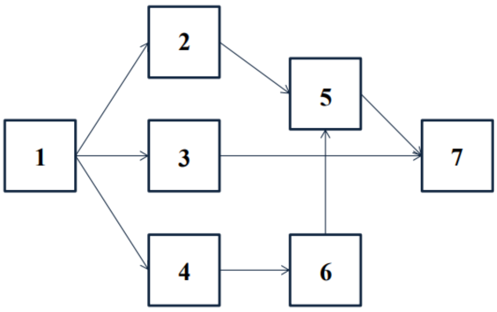
Варіант 5



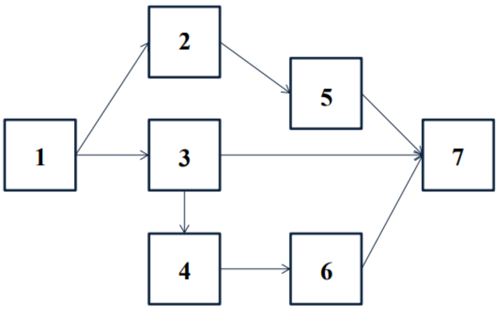
Варіант 6

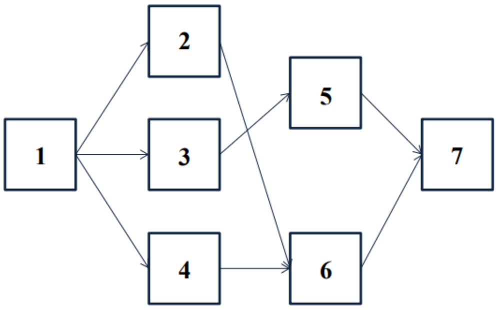
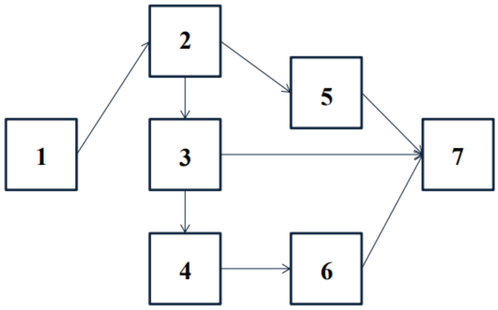
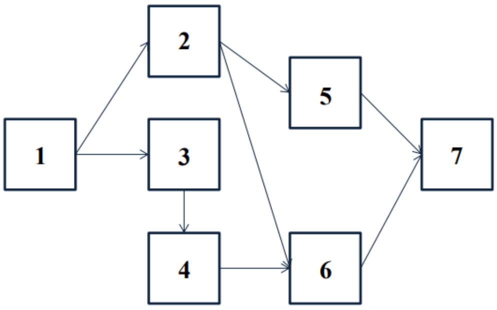
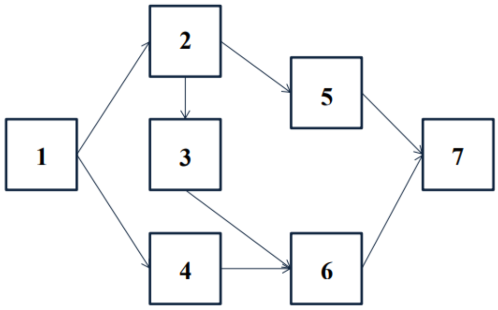
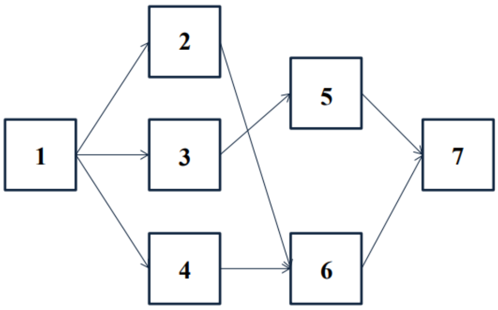
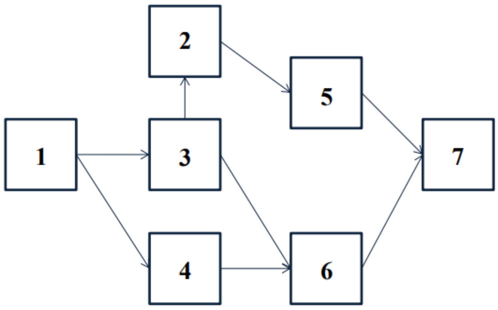
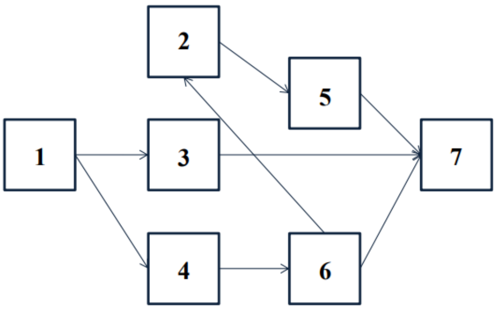
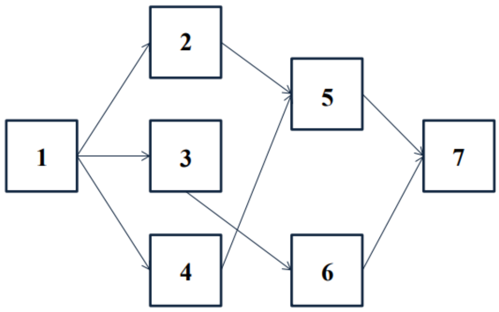


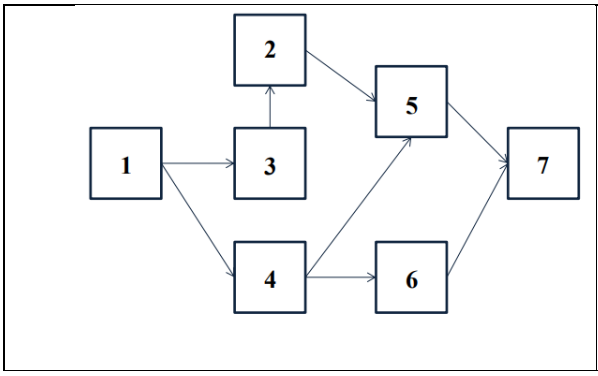
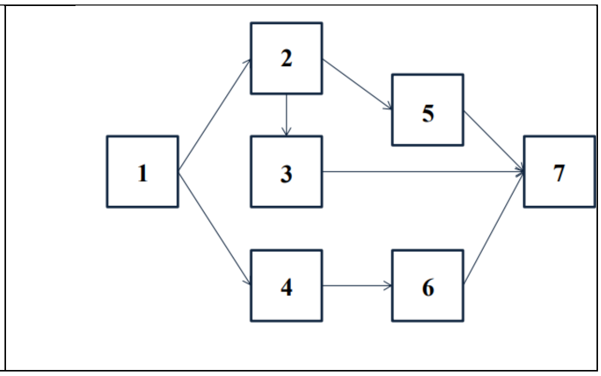
Варіант 7



Варіант 8



Варіант 9 	Варіант 10 
Варіант 11 	Варіант 12 
Варіант 13 	Варіант 14 
Варіант 15 	Варіант 16 
Варіант 17	Варіант 18


2
5
1
3
7
4
6

2
5
1
3
7
4
6

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Тема: Інтервальна арифметика

Мета: Вивчення застосування методів інтервальної арифметики до розв'язування інтервальних СЛАР. Програмна реалізація операцій з інтервалами та визначення їх параметрів

Короткі теоретичні відомості

Розв'язування інтервальних СЛАР.

Нехай $\hat{A}$ — інтервальна матриця, тобто матриця, елементами якої є дійсні інтервали. Розв'язати систему рівнянь:

$$\hat{A}x = B$$

де x — інтервальний вектор невідомих $x = (x_1,...,x_n)$, $B = (B_1,...,B_n)$ — відомий інтервальний вектор.

Об'єднаною множиною розв'язків заданої системи лінійних рівнянь називають множину:

$$\Omega\left(\hat{A}, B\right) = \left\{x \in L\left(R^n\right) \middle| \left(\exists A \in \hat{A}\right)\left(\exists b \in B\right)\left(Ax = B\right)\right\}.$$

На практиці використовують знаходження оцінки, оскільки точне значення Ω неможливе в зв'язку з експоненціальним ростом з розмірністю вектора x.

Якщо відома $\hat{A}^{-1} \supseteq \left\{A^{-1} \middle| A \in \hat{A}\right\}$, то зовнішньою оцінкою є :

$$\Omega\left(\hat{A}, B\right) \subseteq \hat{A}^{-1}B.$$

*Приклад:*Розглянемо інтервальну СЛАР: $\hat{A}x = B$, де:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} [2;4] & [-2;0] \\ [-1;1] & [2;4] \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} [-1;1] \\ [0;2] \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ де } a = [2;4],\ b = [-2;0],\ c = [-1;1],\ d = [2;4]$$

$$a \cdot d - b \cdot c = [2;4] \cdot [2;4] - [-2;0] \cdot [-1;1] = [4;16] - [-2;2] = [2;18] \not\subset 0.$$

Отже, невласних матриць в $\hat{A}$немає.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a \cdot d - b \cdot c} & \dfrac{b}{b \cdot c - a \cdot d} \\ \dfrac{c}{b \cdot c - a \cdot d} & \dfrac{a}{a \cdot d - b \cdot c} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $d = [2;4] \notin 0$, то вираз можна переписати:

$\dfrac{d}{a\cdot d-b\cdot c}=\dfrac{1}{a-\dfrac{b\cdot c}{d}}$ — кожна змінна входить по одному разу, отже:

$$a_{11}=\frac{1}{a-\dfrac{b\cdot c}{d}}=\frac{1}{[2;4]-\dfrac{[-2;0]\cdot[-1;1]}{[2;4]}}=\frac{1}{[2;4]-[-1;1]}=\frac{1}{[1;5]}=\left[\frac{1}{5};1\right]=a_{22}$$

(тому що d=a).

Оскільки $b=[-2;0]\in 0$, то

$$a_{12}^{-}=\min_{a,b,c,d}\frac{b}{b\cdot c-a\cdot d},\ a_{12}^{+}=\max_{a,b,c,d}\frac{b}{b\cdot c-a\cdot d}.$$

Оскільки змінна b входить двічі, знайдемо екстремуми функції відносно b :

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{b\cdot c-a\cdot d}\right)=\frac{b\cdot c-a\cdot d-b\cdot c}{(b\cdot c-a\cdot d)^2}=-\frac{a\cdot d}{(b\cdot c-a\cdot d)^2}<0;\ \forall b.$$

Отже функція спадає для всіх b, тому:

$$a_{12}^{-}=\min_{a,b,c,d}\frac{b}{b\cdot c-a\cdot d}:\frac{b^{+}}{b^{+}\cdot c-a\cdot d}=\frac{0}{0\cdot[-1;1]-[2;4]\cdot[2;4]}=[0;0],$$

$$a_{12}^{+}=\max_{a,b,c,d}\frac{b}{b\cdot c-a\cdot d}:\frac{b^{-}}{b^{-}\cdot c-a\cdot d}=\frac{-2}{-2\cdot[-1;1]-[4;16]}=\frac{-2}{[-18;-2]}=\left[\frac{1}{9};1\right].$$

Отже $a_{12}=[0;1]$.

Оскільки $c=[-1;1]\supset 0$, то:

$$a_{21}^{-}=\min_{a,b,c,d}\frac{c}{b\cdot c-a\cdot d};\ a_{21}^{+}=\max_{a,b,c,d}\frac{c}{b\cdot c-a\cdot d}.$$

Оскільки змінна c входить двічі, знайдемо екстремуми функції відносно c:

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{c}{b\cdot c-a\cdot d}\right)=\frac{b\cdot c-a\cdot d-b\cdot c}{(b\cdot c-a\cdot d)^2}=-\frac{a\cdot d}{(b\cdot c-a\cdot d)^2}<0;\quad \forall c.$$

Отже:

$$a_{21}^{-}=\min_{a,b,c,d}\frac{c}{b\cdot c-a\cdot d}:\frac{c^{+}}{b^{+}\cdot c-a\cdot d}=\frac{1}{1\cdot[-2;0]-[4;16]}=\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{18}\right],$$

$$a_{21}^{+}=\max_{a,b,c,d}\frac{c}{b\cdot c-a\cdot d}:\frac{c^{-}}{b^{-}\cdot c-a\cdot d}=\frac{-1}{-1\cdot[-2;0]-[4;16]}=\left[\frac{1}{16};\frac{1}{2}\right],$$

$$a_{21}=\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right].$$

Тоді обернена матриця матиме вигляд:

$$\hat{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\left[\frac{1}{5};1\right] & [0;1]\\ \left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{5};1\right]\end{pmatrix}.$$

Знаходимо оцінку для множини розв'язків:

$$\hat{A}^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}\left[\frac{1}{5};1\right] & [0;1]\\ \left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{5};1\right]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}[-1;1]\\ 0;2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1;3\\ -\frac{1}{2};\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Завдання

Нехай задано скінченний дійсний інтервал $[a,b],\ a\le b$ згідно індивідуального завдання (табл. 3.1).

1) Здійснити програмну реалізацію таких операцій з інтервалами: додавання, віднімання, множення, ділення.

2) Обчислити: середину, ширину, радіус та абсолютне значення заданого інтервалу.

Таблиця 3.1.

№ варіанту	Інтервал	№ варіанту	Інтервал
1	$[0.007,1]$	11	$[-15.2,1.7]$
2	$[12.54,25.77]$	12	$[10,10.007]$
3	$[-5.63,1.5]$	13	$[4.87,12]$
4	$[-8.4,-1.58]$	14	$[-15.6,-12.77]$
5	$[-18.7,51.11]$	15	$[28.001,31.5]$
6	$[0.08,1.13]$	16	$[20.2,25.5]$
7	$[30.4,41.7]$	17	$[-60.4,0.99]$
8	$[-10,10.97]$	18	$[10.5,50.4]$
9	$[17,17.07]$	19	$[10.8,11.9]$
10	$[0,0.051]$	20	$[0.06,1.005]$

Розв'язати СЛАР[1]: $\hat{A}\cdot x=B$, де $\hat{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ згідно індивідуального завдання (табл. 3.2.).

[1] У випадку коли СЛАР не можна розв'язати на заданому інтервалі –підібрати власний інтервал, на якому розв'язок існує.

Таблиця 3.2.

1	$a=[1, 2], b=[-1, 2], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
2	$a=[-1, 2], b=[1, 2], c=[-1, 0], \; d=[1, -4]; \; b_1=[1, 2], \; b_2=[0, 2]$
3	$a=[1, 3], b=[-1, 3], c=[-2, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
4	$a=[1, 2], b=[-1, 3], c=[-1, 0], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
5	$a=[1, 2], b=[-1, 2], c=[-1, 1], \; d=[1, 3]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[1, 2]$
6	$a=[1, 2], b=[-1, 0], c=[-1, 1], \; d=[1, 2]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
7	$a=[1, 2], b=[-1, 2], c=[0, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
8	$a=[1, 2], b=[-1, 0], c=[-1, 1], \; d=[1, 2]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
9	$a=[1, 4], b=[-1, 2], c=[-1, 3], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
10	$a=[-1, 0], b=[-1, 2], c=[-1, 0], \; d=[1, 4]; \; b_1=[1, 2], \; b_2=[0, 2]$
11	$a=[1, 2], b=[-1, 2], c=[-1, 1], \; d=[1, 3]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[1, 2]$
12	$a=[1, 2], b=[-2, 2], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 2], \; b_2=[0, 2]$
13	$a=[1, 2], b=[-1, 2], c=[-1, 2], \; d=[1, 3]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
14	$a=[1, 3], b=[-1, 2], c=[-1, 0], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
15	$a=[1, 2], b=[1, 2], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[1, 2]$
16	$a=[1, 2], b=[-1, 2], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 1], \; b_2=[0, 2]$
17	$a=[1, 4], b=[-1, 3], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 2], \; b_2=[0, 2]$
18	$a=[1, 2], b=[-1, 1], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 0], \; b_2=[0, 2]$
19	$a=[1, 4], b=[1, 4], c=[-1, 1], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 2], \; b_2=[0, 2]$
20	$a=[1, 2], \; b=[-1, 0], \; c=[-1, 2], \; d=[1, 4]; \; b_1=[-1, 0], b_2=[0, 3]$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Тема: Експертні системи на основі нечіткого логічного висновку.

Мета: Ознайомитись з експертними системами з нечіткою логікою. Побудувати модуль регулятора з використанням пакету Matlab Fuzzy Logic Toolbox.

Короткі теоретичні відомості

Експертні системи призначенні для розв'язання важко формалізованих задач з нечіткими даними. Існує запропонована Ньюелом класифікація експертних задач на основі таких особливостей:

- відсутність алгоритмів розв'язання задачі;
- задача не може бути описана тільки числовими даними, необхідно застосувати символьні дані: ознаки, характеристики, поняття;
- неможливо сформувати точні цілі задачі, можлива їх множина;
- наявність складних зв'язків та неточності у даних задачі.

Ньюел запропонував ідею, суть якої полягала в тому, щоб подати довготривалу пам'ять людини як послідовність правил типу "людина-дія", названих **продукціями**, а оперативну пам'ять подати як набір ситуацій. Кожне правило по суті має вигляд: "Якщо розпізнана ситуація ***S*** в оперативній пам'яті, то реалізується дія ***A***." Дія приводить до зміни змісту оперативної пам'яті. Після зміни змісту виникає нова ситуація, яка активізує нові правила.

Ньюел використав процедуру активації правил і зміну пам'яті для того, щоб змоделювати процес пошуку людиною розв'язку проблеми і назвав отриману систему "**продукційною системою**".

Поширеність моделей знань на основі правил-продукцій обумовлена такими характеристиками:

1. Продукційні правила адекватно відображають знання людини у вигляді асоціативних міркувань, емпіричних спостережень, навичок. Це забезпечує моделювання знань на поверхневому рівні, без відображення глибинної суті знань і причинних зв'язків;
2. Правила є ефективним способом подання висновків у формі рекомендацій, директив, стратегій, які обумовлюються певними фактами-знаннями з людського досвіду;
3. Правила також забезпечують природній спосіб опису процесів, які виникають і керуються в складному і швидкозмінному зовнішньому середовищі.

Схематично продукція подається у формі символьного виразу:

Продукція=умова+наслідок.

Найбільш поширеним є подання правил у формі логічних тверджень:

Якщо (умова), то (наслідок, дія);

Якщо (умова 1, умова 2, умова 3) то (наслідок 1, наслідок 2).

Система продукцій утворює модель знань для розв’язання задачі. Основні переваги продукційних моделей:

1. Природність виведення розв’язків за аналогією з міркуваннями експерта або фахівця;
2. Можливість приєднання нечітких обчислень для знань з нечіткими даними.

Основні вимоги до побудови системи правил:

- **Повнота.** Набір правил вважають повним, якщо для не порожньої бази фактів є досяжним логічний висновок для кожного правила;
- **Коректність.** Правило є коректним, якщо воно не містить рекурсивних висновків(викликів) для самого себе;
- **Несуперечливість.** Два правила є суперечливими, якщо вони за однакових умов породжують різні висновки.

Функції та структура нечіткої системи

Нехай нечітка система здійснює вибір варіантів рішень на основі залежності вихідної величини від декількох вхідних величин. Припустимо, що математична модель залежності виходу від входів відсутня і замість неї використовується база експертних правил у вигляді нечітких висловлювань "*if - then*" у термінах лінгвістичних змінних та нечітких множин.

Тоді функціональність нечіткої системи прийняття рішень визначається такими кроками:

1) перетворення чітких вхідних змінних на нечіткі, тобто визначення ступеня відповідності входів кожній із нечітких множин;
2) обчислення правил на основі використання нечітких операторів та застосування імплікації для отримання вихідних значень правил;
3) агрегування нечітких виходів правил у загальне вихідне значення;
4) перетворення нечіткого виходу правил на чітке значення.

Структура системи з нечіткою логікою зображена на рисунку.1 Система побудована за схемою багатошарової штучної нейромережі, яка складається з вхідного, двох прихованих та вихідного шару.

Перший шар зображає входи системи, другий шар — нечіткі лінгвістичні змінні, третій шар — правила над нечіткими змінними, четвертий шар — виходи правил. Ваги усіх шарів, крім останнього, дорівнюють 1. Ваги зв'язків між шаром правил та вихідним шаром визначаються алгоритмом навчання.

Входи $\overline{x} = (x_i \mid i = 1...n)$ (наприклад, тиск, об'єм) та вихід у (наприклад, температура) є чіткими контрольованими величинами. Кожен параметр $x_i, i = 1..n$ має нечіткий відповідник у вигляді лінгвістичної змінної, $\tilde{X}_i = (A_{i,j} \mid j = 1..m_i)$. Лінгвістична змінна і $\tilde{X}_i$ складається з m_i термів $A_{i,j}$, кожен з яких є нечіткою множиною.

Правила $R_k,\ k = 1, \ldots, N$ перевіряють значення кожної лінгвістичної змінної, тому максимально можлива кількість правил дорівнює

$$N_{\max} = \prod_{i=1}^{n} m_i.$$

Реальну кількість правил позначимо через $N \le N_{\max}$.

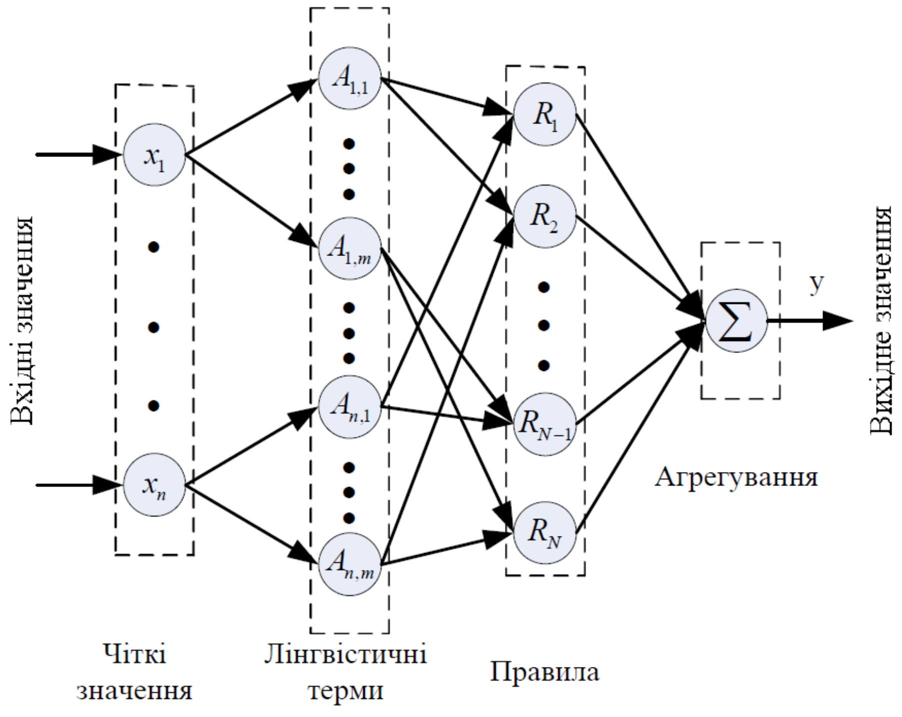


Рис 4.1. Структура системи нечіткого логічного виведення

Вихід правила — це лінгвістична змінна $\tilde{Y} = \{B_j \mid j = 1..m\}$, яка набуває значення одного із термів B_j.

Для узагальнення правил відбувається агрегування їх нечітких виходів в одну нечітку множину з її подальшим перетворенням на чітке вихідне значення *y*.

Фазифікація входів

Фазифікація полягає у перетворенні чітких вхідних величин $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ до нечітких множин $A' = (A_1', A_2', ..., A_n')$. У більшості випадків для цього використовуються синглетонні моделі.

Синглетон чіткого значення x_i є нечіткою множиною $A_i'(x, \mu_{A_i'}(x))$ з функцією належності

$$\mu_{A_i'}(x) = \begin{cases} 1, x = x_i; \\ 0, x \neq x_i. \end{cases}$$

При фазифікації чіткого входу x_i визначають ступені його відповідності кожному лінгвістичному терму $A_{i,j}$ з функціями належності $\mu_{A_i'}(x),\ j = 1..m_i$. Ці ступені є значеннями функцій належності $\mu_{A_i'}(x)$ у точці і $x = x_i$, або інакше — значенням $A_{i,j}(x_i),\ i = 1..n$.

Нечітке логічне виведення

Нечіткі вхідні значення системи перетворюються на вихідні на основі правил нечіткої логіки, що характерно для експертних систем прийняття рішень. Нехай система прийняття рішень здійснює перетворення значень n вхідних лінгвістичних змінних $\tilde{X} = (\tilde{X}_i \mid i = 1..n)$ у вихідну лінгвістичну змінну $\tilde{Y} = R(\tilde{X})$ згідно з базою правил $R = (R_k \mid k = 1..N)$. Правила R акумулюють знання експертів у вигляді нечіткої імплікації $R = A \to B$, яку можна розглядати як нечітку множину на декартовому добутку носіїв вхідних та вихідних розмитих множин. Процес отримання нечіткого результату B' з нечітких вхідних множин A' на основі знань $A \to B$ можна зобразити у такому вигляді

$$B' = A' \bullet R = A' \bullet (A \to B),$$

де $\bullet$ — композиційне правило нечіткого виведення.

На практиці для нечіткого виведення використовується максимінна композиція, а нечітка імплікація реалізується знаходженням мінімуму функцій належності.

Для імітації роботи експертної системи за схемою імплікації використовується множина нечітких продукційних правил, кожне з яких будується у вигляді умовного оператора:

if *логічний вираз* ***then*** *оператор,*

де *логічний вираз* — висловлювання, побудоване на основі базових логічних операцій над нечіткими величинами; *оператор* — результуюче рішення.

Правила можуть визначати відношення відповідності (is) між вхідними лінгвістичними змінними $\tilde{X}$ та їх нечіткими термами $\{A_{i,j} \mid i=1..n;\ j=1..m_i\}$. Використання нечітких умовних правил є природнім для подання знань експертами і спрощує їх машинне опрацювання.

Загалом до правила можуть входити усі можливі комбінації лінгвістичних термів для усіх вхідних змінних, об’єднаних логічними операціями.

Слід зазначити, що за допомогою перетворень нечітких множин будь-яке правило, що містить у лівій частині як кон’юнкції, так і диз'юнкції, можна перетворити на систему правил, у лівій частині яких будуть або тільки кон’юнкції, або тільки диз'юнкції. Для визначення нечіткої кон’юнкції можна використати знаходження мінімуму, а для нечіткої диз'юнкції — знаходження максимуму двох функцій належності.

Розрізняють дві моделі логічного виведення: **Мамдані** (Mamdani) та **Такагі-Суджено** (Takagi-Sugeno).

Модель **Мамдані** оперує лише з лінгвістичними змінними та нечіткими множинами і перетворює нечіткі входи на нечіткі виходи. Наприклад, для моделі Мамдані правила мають вигляд:

$$R_k : if\ \tilde{X}_1\ is\ A_{1,k}\ and\ \tilde{X}_n\ is\ A_{n,k}\ then\ \tilde{Y}\ is\ B_k\,,$$

де $A_{i,k} \in \tilde{X}_i$ — нечіткі множини для вхідних та $B_k \in B$ — нечіткі множини для вихідної лінгвістичної змінної, які використовуються в k-му правилі ($k=1..N$). Операція *and* інтерпретується як t-норма нечітких множин.

Модель **Такагі–Суджено** оперує з чіткими величинами, лінгвістичними змінними та нечіткими множинами і перетворює чіткі входи у чіткі виходи. Правила моделі Такагі–Суджено можуть мати вигляд:

$$R_k : if\ x_1\ is\ A_{1,k}\ and\ x_n\ is\ A_{1,n}\ then\ y = o_k\,,$$

де o_k – завершальне значення k-го правила, вихідний сигнал або керуюча дія.

Для повноти бази нечітких правил повинні виконуватися такі умови:

1) для будь–якого терму вхідної змінної існує хоча б одне правило, в якому цей терм використовується у лівій частині правила;
2) існує хоча б одне правило для кожного лінгвістичного терму вихідної змінної.

Для багатовходових систем застосовується механізм логічного виведення, характерною рисою якого є використання рівнів істинності передумов правил.

Для кожного правила R_k, $k=1,\dots,N$ визначається рівень його істинності a_k стосовно входів. Рівень істинності є дійсним числом, яке характеризує ступінь відповідності нечітких входів системи $A'_i, i=1..n$ заданим у правилах нечітким множинам $A_{i,j}(j=1..m_i)$:

$$\alpha_k = \min_{i=1}^{n}[\max_{X_i}(A'_i \wedge A_{i,j})]$$

де X_i — простір визначення входів A'_i, i $=1..n$; операція $\wedge$ — нечітка кон'юнкція.

При використанні вхідних синглетонів механізм логічних виведень спрощується, оскільки ступінь істинності правил може бути визначений на основі фазифікованих входів:

$$\max_{X_i}(A'_i(x_i) \wedge A_{i,j}) = A_{i,j}(x_i).$$

У цьому випадку обчислення рівня істинності k-го правила буде формуватися за формулою:

$$\alpha_k = \min_i(A_{i,j}(x_i)).$$

Кожне із правил є нечіткою імплікацією, яка визначає вихідне значення залежно від рівня істинності лівої частини правила. Ступінь впевненості виведення задається функцією належності відповідного вихідного терму B_k. Використовуючи один зі способів побудови нечіткої імплікації, одержимо нові нечіткі змінні, або відповідні ступені впевненості в значенні виходів при застосуванні відповідного правила до заданих входів. Так, на основі визначення нечіткої імплікації за Мамдані, як мінімуму лівої й правої частин правила, маємо:

$$B'_k = \min(\alpha_k, B_k),\ k=1..N$$

де B'_k — зрізи вихідних нечітких множин на рівні α_k.

Завершальним кроком нечіткого логічного виведення є агрегування виходів правил. Один з основних способів акумуляції — нечітка диз'юнкція вихідних множин, або, інакше, знаходження максимуму отриманих функцій належності. Як результат, отримаємо значення агрегованого виходу:

$$B' = \max_{1 \le k \le N}\left(B'_k\right).$$

Дефазифікація виходів

Після визначення індивідуальних виходів правил здійснюється дефазифікація агрегованого виходу. В загальному етап дефазифікації є необов'язковим і використовується за необхідності перетворення виведених нечітких лінгвістичних змінних до точного значення.

Існує декілька методів дефазифікації — метод середнього центру, перший максимум, середній максимум, висотна дефазифікація. Наприклад, метод середнього центру, або центроїдний метод, визначається центром ваги вихідної нечіткої множини:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j B'(y_j)}{\sum_{j=1}^{m} B'(y_j)}.$$

Для моделі Такагі–Суджено вихідні множини правил задаються у вигляді синглетонів з функціями належності

$$\mu_{o_k(y_k)} = \begin{cases} 1, & y_k = o_k \\ 0, & y_k \neq o_k \end{cases},$$

де o_k – вихідне значення k-го правила.

Тоді результуюче чітке вихідне значення системи прийняття рішень обчислюється зважуванням значень активованих правил:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k}.$$

Завдання

У сауні температура повинна бути комфортною. Існує три різних режими в електричних печах. Піч може працювати в повну потужність, половину потужності, і може бути вимкнена.

Коли працює на половинні потужності, то забезпечує сталу температуру. При роботі в режимі повної потужності температура зростає, і, коли електрична піч вимкнена, температура знижується. Температуру можливо виміряти.

Синтезуйте нечіткий контролер для електричної печі. Використовуйте MatlabFuzzyToolbox і нечітку модель Мамдані або Такагі-Сугено(парні варіанти). Вхідними даними є: зміна температури і температура.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Тема: Побудова нейронної мережі для апроксимації обраної функції, використовуючи функції пакета *NeuralNetworksToolbox*.

Мета: Вивчити моделі однорівневого та багаторівневого персептронів, алгоритми їх навчання і методи прогнозування. Навчитись прогнозувати довільні математичні функції, дослідити якісні характеристики навчання і прогнозування.

Теоретичні відомості

Дослідження у сфері штучних нейронних мереж (НМ) пережили три періоди активізації. Перший пік у 40–х роках був зумовлений піонерською роботою У. Мак-Калока і У. Пітса. Другий виник у 60-их роках завдяки теоремі сходження персептрона Ф. Розенблата і роботі М. Мінського та С. Пейперта, які вказали обмежені можливості найпростішого персептрона. Через дослідження М. Мінського і С. Пейперта зник ентузіазм у більшості дослідників, особливо тих, хто працював у галузі обчислювальних наук. Затишшя у сфері НМ тривало майже 20 років. З початку 80–х років штучні НМ знову привернули увагу дослідників. Це було пов’язано з енергетичним підходом Д. Хопфілда та алгоритмом зворотного поширення помилки для навчання багаторівневого персептрона (багаторівневі мережі прямого поширення), що вперше запропонував П. Вербос і незалежно розробили інші автори.

Серед головних проблем, які вирішують за допомогою штучних НМ і які цікавлять вчених та інженерів, можна визначити такі:

- **класифікація образів:** мета задачі — вказати приналежність вхідного образу (наприклад, речового сигналу або рукописного символу), поданого як вектор ознак, до одного або кількох завчасно визначених класів. До таких застосувань належать розпізнавання букв, мови, класифікація сигналу електрокардіограми, клітин крові тощо;
- **кластеризація/категоризація:** при розв’язанні задач кластеризації, знаної як класифікація образів «без вчителя», відсутня навчальна вибірка з позначками класів. Алгоритм кластеризації будують на основі образів і розташовують подібні образи в один кластер. Відомі випадки застосування кластеризації для здобуття знань, скорочення обсягу даних і дослідження їх властивостей;
- **апроксимація функцій:** припустимо, що існує вибірка $((x_1,y_1), (x_2,y_2)..., (x_n,y_n))$ (пари даних вхід–вихід), що генерується відомою функцією F(x), котра спотворюється через шум. Задача апроксимації зводиться до находження оцінки невідомої функції $F_n(x)$. Апроксимація функцій необхідна при розв’язанні численних інженерних задач моделювання;

- **передбачення / прогноз:** нехай задані n дискретних точок $\{y(t_1), y(t_2)..., y(t_n)\}$ у послідовні проміжки часу $t_1, t_2..., t_n$.. У задачі потрібно передбачити значення $y(t_{n+1})$ у певний майбутній момент часу t_{n+1}. Передбачення / прогноз має значний вплив на прийняття рішень у бізнесі, науці та техніці. Передбачення цін на фондовій біржі та прогноз погоди — це типові застосування технології передбачення / прогнозу;
- **оптимізація:** численні проблеми в математиці, статистиці, техніці, науці, медицині й економіці можна розглядати як проблеми оптимізації. Задача алгоритму оптимізації — находження такого рішення, що задовольняє систему обмежень і максимізує або мінімізує цільову функцію. Задача комівояжера з класу NP-повних — це класичний приклад задачі оптимізації;
- **асоціативна пам'ять:** у моделі розрахунків фон Неймана звернення до пам'яті можливе лише за допомогою адреси, що не залежить від змісту пам'яті. Крім того, якщо допущена помилка в розрахунку адреси, то можна знайти зовсім іншу інформацію. Асоціативна пам'ять (пам'ять, що адресується за змістом) доступна після визначення заданого змісту. Вміст пам'яті можна викликати навіть у результаті часткового входження або за спотвореним змістом. Асоціативна пам'ять надзвичайно важлива при створенні мультимедійних інформаційних баз даних;
- **управління:** розглянемо динамічну систему, задану сукупністю $\{u(t), y(t)\}$, де $u(t)$ — вхідний керуючий вплив, а $y(t)$ — вихід системи в момент часу t. У системах управління з еталонною моделлю головна мета управління — це розрахунок такого вхідного впливу $u(t)$, при якому система прямує по бажаній траєкторії, що диктує еталонна модель. Прикладом є оптимальне управління двигуном.

ЗАВДАННЯ

Студент повинен виконати три завдання за наведеними нижче прикладами.

Завдання 1

Побудуємо нейронну мережу для апроксимації обраної функції, використовуючи функції пакета *Neural Networks Toolbox*. До складу пакету входить більше 160 різних функцій, що дають можливість створювати, навчати і досліджувати нейронні мережі. Для виконання роботи необхідно запустити *Matlab* і перейти в командне вікно.

Створимо узагальнено-регресійну нейронну мережу (мережа типу *GRNN*) з ім'ям *«A»*, що реалізовує функціональну залежність між входом і виходом виду $y=x^2$ на відрізку [-1, 1], використовуючи такі експериментальні дані:

x = [-1 -0.8 -0.5 -0.2 0 0.1 0.3 0.6 0.9 1],

y = [1 0.64 0.25 0.04 0 0.01 0.09 0.36 0.81 1].

Перевірку якості відновлення наведеної залежності здійснимо, використовуючи дані контрольної вибірки x_1 = [-0.9 -0.7 -0.3 0.4 0.8], яким відповідають значення y_1 = [0.81 0.49 0.09 0.16 0.64].

Процедура створення та використання даної нейронної мережі описується наступним чином, необхідно в командному вікні *Matlab* ввести команди:

***x*= [-1 -0.8 -0.5 -0.2 0 0.1 0.3 0.6 0.9 1];** % Завдання вхідних значень
***y*= [1 0.64 0.25 0.04 0 0.01 0.09 0.36 0.81 1];** % Завдання цільових значень
***A*= *newgrnn*(*x*, *y*, 0.01);** % Створення нейронної мережі з відхиленням 0.01
***Y*1 = *sim*(*A*, [-0.9 -0.7 -0.3 0.4 0.8])** % Опитування нейронної мережі

Результат розрахунку за наведеними вище командами показано на рис. 6.1:

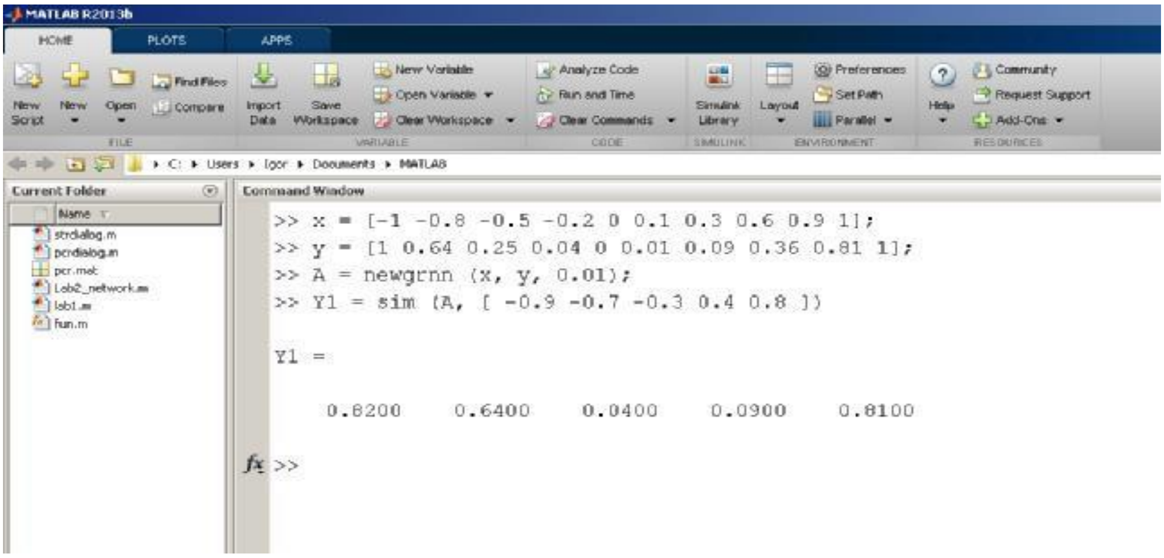


Рис. 6.1. Створення та використання даної нейронної мережі

Розраховано вектор: *Y*1 = 0.8200 0.6400 0.0400 0.0900 0.8100

Як видно, точність апроксимації в даному випадку вийшла не дуже високою — максимальна відносна похибка апроксимації становить 30,61 %.

Можна спробувати поліпшити якість апроксимації за рахунок підбору величини відхилення, але в умовах прикладу прийнятний результат легко досягається при використанні мережі з радіальними базисними елементами типу *newrbe*.

Введемо наступні команди:

```
A= newrbe(x, y);
Yl = sim(A, [ -0.9 -0.7 -0.3 0.4 0.8 ]) % Опитування нейронної мережі
```

Результат: *Y*1 = 0.8100 0.4900 0.0900 0.1600 0.6400

Результати можуть відрізнятися від наведених вище.

Неважко побачити, що застосування мережі типу *newrb* призводить тут не просто до інтерполяції заданих навчальною вибіркою значень, а дійсно до точного відновлення заданої залежності — принаймні, для використаних точок контрольної послідовності.

Створену мережу можна зберегти для подальшого використання набором в командному рядку команди *save('A')*; при цьому буде створений файл *A.mat*, тобто файл з ім'ям нейронної мережі і розширенням mat. У наступних сеансах роботи цю мережу можна завантажити, використовуючи функцію *load ('A').* Природно, допустимі всі інші форми запису операторів *save* і *load*.

Завдання 2

Розглянемо тепер завдання відновлення деякої, взагалі кажучи, невідомої залежності за наявними експериментальними даними з використанням лінійної нейронної мережі.

Нехай експериментальна інформація задана значеннями

x = [1.0 1.5 3.0 -1.2], *y* = [0.5 1.1 3.0 -1.0].

Створимо вектори входу і цілей:

```
x = [1.0 1.5 3.0 -1.2];y = [0.5 1.1 3.0 -1.0];
```

Тепер створимо лінійну нейронну мережу:

```
b = newlind(x, y); % Створення лінійної нейронної мережі з ім'ям b
```

Проведемо опитування мережі для значення входу, рівного 3.0 (цьому, згідно з експериментальними даними, відповідає цільове значення 3.0) (рис. 6.2).

```
y1 = sim(b, 3.0) % Опитування мережі
```

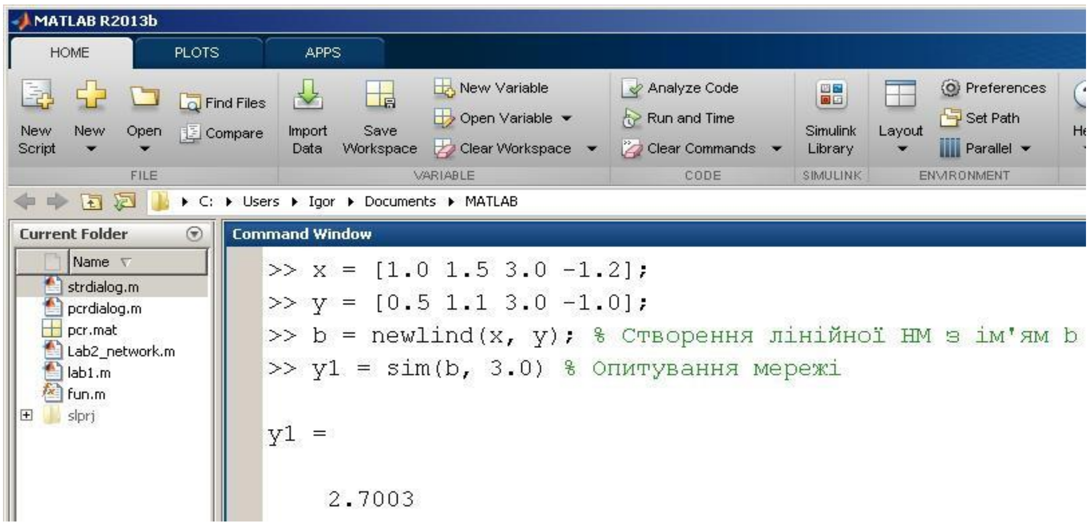


Рис. 6.2. Опитування мережі

Результат: y1 = 2.7003

Похибка відновлення за даними навчальної вибірки в даному випадку – 10%. Зазначимо, що в умовах як першого, так і другого прикладу дати будь-яку оцінку граничної величини похибки апроксимації неможливо, особливо для значень входів, що виходять за межі діапазону входів навчальної послідовності.

На жаль, це є характерною особливістю нейромережевих моделей. Для переважної кількості завдань, що вирішуються за допомогою апарату нейронних мереж - не тільки для задач класифікації або прогнозу - будь-яких імовірнісних оцінок точності одержаних рішень отримати не вдається.

Завдання 3

У середовищі *Matlab* необхідно побудувати і навчити нейронну мережу для апроксимації заданої таблицею функції, $y_i = f(x_i)$, $i = 1,20$. Розробити програму, яка реалізує нейромережевий алгоритм апроксимації і виводить результати апроксимації у вигляді графіків.

Нехай у середовищі Matlab необхідно побудувати і навчити нейронну мережу для апроксимації заданої таблицею функції $y_i = f(x_i)$ = [2.09 2.05 2.19 2.18 2.17 2.27 2.58 2.73 2.82 3.04 3.03 3.45 3.62 3.85 4.19 4.45 489 5.06 5.63 5.91], $i = 1,20$.

У математичному середовищі Matlab створюємо новий *M*–File, в якому записуємо код програми створення і навчання нейронної мережі з використанням вбудованих функцій пакету мереж *Neural Networks Toolbox*.

Для вирішення скористаємося функцією *newff*() – створення «класичної» багатошарової НС з навчанням за методом зворотного поширення помилки.

Для цього введемо наступні команди:

```
P = zeros(1,20);
for i = 1:20 % створення масиву
P(i) = i*0.1; % вхідні дані (аргумент)
end
T=[2.09 2.05 2.19 2.18 2.17 2.27 2.58 2.73 2.82 3.04 3.03 3.45 3.62 3.85 4.19
4.45 489 5.06 5.63 5.91]; % цільові значення (значення функції)
net = newff(P,T,5); % створення нейронної мережі
net.trainParam.epochs = 100; % завдання числа епох навчання
net=train(net,P,T); % навчання мережі
y = sim(net,P); % опитування навченої мережі
figure (1); hold on; xlabel ('P');
ylabel ('T'); plot(P,T,P,y,'o'), grid;
```

Варіанти індивідуальних завдань

Створити НС, що реалізовує функціональну залежність між входом і виходом виду вказаним за варіантом на відрізку [-*N*, *N*] (*N*– номер студента за списком групи):

1. $Y = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2;$	3. $Y = \ln(Nx);$
2. $Y = \sin(Nx);$	4. $Y = 0{,}5\cos(Nx);$

Застосовуючи різні алгоритми навчання нейронної мережі (*newgrnn, newrbe*, *newlind*, *newff)*, визначити похибку апроксимації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Томашевський В.М. Моделювання систем. — Київ: Видавнича група BHV, 2005. — 352 с.

2. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло. — НГУ Новосибирск, 2010. — 300 с.

3. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – Москва: Академия, 2006. — 368 с.

4. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — Москва: Мир, 1987. — 360 с.

5. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. — Москва: Издательство «XYZ», 2007. — 607 с.

6. Сявавко М.С. Математика прихованих можливостей. — Острог: Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2011. — 396 с.

7. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. Прикладные нечеткие системы. — Москва: Мир, 1993. — 368 с.

8. Костробій П.П., Рижа І.А. Конспект лекцій: Математичне моделювання нечітких систем. — Львів: Растр–7, 2017. — 121 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІКИ

до лабораторних занять з курсу “Моделювання складних систем в умовах невизначеностей” для студентів базового напряму підготовки 6.040301 “Прикладна математика”

Укладачі Галущак М.О., канд. техн. наук, асист.,
Рижа І.А., асист.,
Курапов П.Р., аспірант,
Строчик М.М., канд. фіз.-мат. наук, ст. викл.

Редактор
Комп’ютерне верстання