Зразок виконання розрахункової №1

1) Метод Гауса

Постановка задачі:

Розв'язати СЛАР методом Гаусса з вибором головного елемента у стовпчику, детально описати кожен крок прямого і зворотнього ходу. Зробити перевірку коренів.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ -5 & -1 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad f := [-5; -24; -14; -20; -34]$$

Метод Гаусса можна застосовувати, коли всі головні мінори матриці A відмінні від нуля. Запобігти цьому можна використовуючи метод Гаусса з вибором головного елемента у стовпці. Основна ідея методу полягає у тому, щоб на кожному кроці головним елементом вибрати найбільший за модулем елемент у стовпці. Цього можна досягнути переставлянням рядків.

k-тий крок методу Гаусса з вибором головного елемента є такий:

1. Пошук головного елемента у стовпці.

Знаходимо $m \geq k$ таке, що

$$|a_{mk}^{(k-1)}| = \max(|a_{ik}^{(k-1)}|, \ i \geq k)$$

2. Обчислюємо:

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j = \overline{k+1, n}$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - l_{ik} f_k^{(k-1)}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$$|l_{ik}| < 1.$$

Зробивши $n-1$ крок ($k = \overline{1, n-1}$) методу Гаусса і звівши матрицю до верхньої трикутної, робимо зворотній хід методу Гауса за такими формулами:

$$x_n = f_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}$$

$$x_i = \left(f_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right) / a_{ii}^{(i-1)}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Надалі для р-зку будемо використовувати ці формули. Тепер переходимо до 1-го кроку розв'язування с-ми.

Крок 1. Запишемо розширену матрицю. Вибираємо головний елемент в 1-му стовпці. Знаходимо значення: l_{ik}, $a_{ij}^{(k)}$, $f_i^{(k)}$. На даному етапі $k = 1$, $i = \overline{2, 5}$

1.

$$\bar{A} := \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 & 2 & -5 \\ -5 & -1 & -5 & -1 & 4 & -24 \\ 3 & 1 & -4 & -7 & 2 & -14 \\ -2 & 1 & -5 & 4 & 0 & -20 \\ -1 & 4 & -9 & 1 & 3 & -34 \end{array}\right]$$

2.

Вибираємо у першому стовпці максимальний за модулем елемент.

$$\max_{i=1,..,5}(|a_{i1}|) = -5$$

Головний елемент $a_{21} = -5$, тому переставляємо 2-гий і 1-ший рядки місцями. Отримаємо:

$$\bar{A} := \left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -1 & -5 & -1 & 4 & -24 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & -7 & 2 & -14 \\ -2 & 1 & -5 & 4 & 0 & -20 \\ -1 & 4 & -9 & 1 & 3 & -34 \end{array}\right]$$

3.

Знайдемо:

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{1}{5}$$

$$a_{21}^{(1)} = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - l_{21} \cdot a_{12}^{(0)} = -2 - \left(\left(-\frac{1}{5}\right)(-1)\right) = -2 - \frac{1}{5} = -\frac{11}{5}$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - l_{21} \cdot a_{13}^{(0)} = 0 - \left(\left(-\frac{1}{5}\right)(-5)\right) = -1$$

$$a_{24}^{(1)} = a_{24}^{(0)} - l_{21} \cdot a_{14}^{(0)} = -4 - \left(\left(-\frac{1}{5}\right)(-1)\right) = -4 - \frac{1}{5} = -\frac{21}{5}$$

$$a_{25}^{(1)} = a_{25}^{(0)} - l_{21} \cdot a_{15}^{(0)} = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$f_2^{(1)} = f_2^{(0)} - l_{21} \cdot f_1^{(0)} = -5 - \frac{24}{5} = -\frac{49}{5}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{3}{5}$$

$$a_{31}^{(1)} = 0$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - l_{31} \cdot a_{12}^{(0)} = 1 - \left(\left(-\frac{3}{5}\right)(-1)\right) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - l_{31} \cdot a_{13}^{(0)} = -4 - \left(\left(-\frac{3}{5}\right)(-5)\right) = -7$$

$$a_{34}^{(1)} = a_{34}^{(0)} - l_{31} \cdot a_{14}^{(0)} = -7 - \left(\left(-\frac{3}{5}\right)(-1)\right) = -7 - \frac{3}{5} = -\frac{38}{5}$$

$$a_{35}^{(1)} = a_{35}^{(0)} - l_{31} \cdot a_{15}^{(0)} = 2 - \left(\left(-\frac{3}{5}\right)(4)\right) = 2 + \frac{12}{5} = \frac{22}{5}$$

$$f_3^{(1)} = f_3^{(0)} - l_{31} \cdot f_1^{(0)} = -14 - \left(\left(-\frac{3}{5}\right)(-24)\right) = -14 - \frac{3 \cdot 24}{5} = -\frac{142}{5}$$

$$l_{41} = \frac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{2}{5}$$

$$a_{41}^{(1)} = 0$$

$$a_{42}^{(1)} = a_{42}^{(0)} - l_{41} \cdot a_{12}^{(0)} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$a_{43}^{(1)} = a_{43}^{(0)} - l_{41} \cdot a_{13}^{(0)} = -5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = -3$$

$$a_{44}^{(1)} = a_{44}^{(0)} - l_{41} \cdot a_{14}^{(0)} = 4 + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$$

$$a_{45}^{(1)} = a_{45}^{(0)} - l_{41} \cdot a_{15}^{(0)} = 0 - \frac{2}{5} \cdot 4 = -\frac{8}{5}$$

$$f_4^{(1)} = f_4^{(0)} - l_{41} \cdot f_1^{(0)} = -20 - \frac{2}{5}(-24) = \frac{48}{5} - 20 = -\frac{52}{5}$$

$$l_{51} = \frac{a_{51}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{5}$$

$$a_{51}^{(1)} = 0$$

$$a_{52}^{(1)} = a_{52}^{(0)} - l_{51} \cdot a_{12}^{(0)} = 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$$

$$a_{53}^{(1)} = a_{53}^{(0)} - l_{51} \cdot a_{13}^{(0)} = -9 + 1 = -8$$

$$a_{54}^{(1)} = a_{54}^{(0)} - l_{51} \cdot a_{14}^{(0)} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$a_{55}^{(1)} = a_{55}^{(0)} - l_{51} \cdot a_{15}^{(0)} = 3 - \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{11}{5}$$

$$f_5^{(1)} = f_5^{(0)} - l_{51} \cdot f_1^{(0)} = -34 + \frac{24}{5} = -\frac{146}{5}$$

Крок 1 завершено. Запишемо отриману матрицю.

$$\bar{A} := \left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -1 & -5 & -1 & 4 & -24 \\ 0 & -11/5 & -1 & -21/5 & 14/5 & -49/5 \\ 0 & 2/5 & -7 & -38/5 & 22/5 & -142/5 \\ 0 & 7/5 & -3 & 22/5 & -8/5 & -52/5 \\ 0 & 21/5 & -8 & 6/5 & 11/5 & -146/5 \end{array}\right]$$

Крок 2. На даному етапі $k=2,\ i=\overline{3,5}$

Вибираємо максимальний за модулем елемент у 2-гому стовпці

$$\max_{i=2,\dots,5}(|a_{i2}|)=\frac{21}{5}\ ;\quad a_{52}=\frac{21}{5}$$

Переставляємо 2 і 5 рядки місцями, отримаємо:

$$\bar{A}:=\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -1 & -5 & -1 & 4 & -24\\ 0 & 21/5 & -8 & 6/5 & 11/5 & -146/5\\ 0 & 2/5 & -7 & -38/5 & 22/5 & -142/5\\ 0 & 7/5 & -3 & 22/5 & -8/5 & -52/5\\ 0 & -11/5 & -1 & -24/5 & 14/5 & -49/5 \end{array}\right]$$

Знаходимо:

$$l_{32}=\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{21}=\frac{2}{21}$$

$$a_{32}^{(2)}=0$$

$$a_{33}^{(2)}=a_{33}^{(1)}-l_{32}\cdot a_{23}^{(1)}=-7+\frac{16}{21}=-\frac{131}{21}$$

$$a_{34}^{(2)}=a_{34}^{(1)}-l_{32}\cdot a_{24}^{(1)}=-\frac{38}{5}-\frac{12}{21\cdot 5}=\frac{-798-12}{21\cdot 5}=\frac{-810}{21\cdot 5}=-\frac{54}{7}$$

$$a_{35}^{(2)}=a_{35}^{(1)}-l_{32}\cdot a_{25}^{(1)}=\frac{22}{5}-\frac{22}{21\cdot 5}=\frac{462-22}{21\cdot 5}=\frac{440}{21\cdot 5}=\frac{88}{21}$$

$$f_3^{(2)}=f_3^{(1)}-l_{32}\cdot f_2^{(1)}=-\frac{142}{5}+\frac{146\cdot 2}{21\cdot 5}=\frac{292-2982}{21\cdot 5}=\frac{-2690}{21\cdot 5}=\frac{-538}{21}$$

$$l_{42}=\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}=\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{21}_3}=\frac{1}{3}$$

$$a_{42}^{(2)}=0$$

$$a_{43}^{(2)}=a_{43}^{(1)}-l_{42}\cdot a_{23}^{(1)}=-3+\frac{1}{3}\cdot 8=-\frac{1}{3}$$

$$a_{44}^{(2)}=a_{44}^{(1)}-l_{42}\cdot a_{24}^{(1)}=\frac{22}{5}-\frac{6}{15}=\frac{60}{15}=4$$

$$a_{45}^{(2)}=a_{45}^{(1)}-l_{42}\cdot a_{25}^{(1)}=-\frac{8}{5}-\frac{11}{15}=-\frac{35}{15}=-\frac{7}{3}$$

$$f_4^{(2)}=f_4^{(1)}-l_{42}\cdot f_2^{(1)}=-\frac{52}{5}+\frac{146}{15}=-\frac{2}{3}$$

$$l_{52}=\frac{a_{52}^{(1)}}{a_{22}}=-\frac{11}{5}\cdot\frac{5}{21}=-\frac{11}{21}$$

$$a_{52}^{(2)}=0$$

$$a_{53}^{(2)}=a_{53}^{(1)}-l_{52}a_{23}^{(1)}=-1-\left(\left(-\frac{11}{21}\right)(-8)\right)=-1-\frac{88}{21}=-\frac{109}{21}$$

$$a_{54}^{(2)}=a_{54}^{(1)}-l_{52}a_{24}^{(1)}=-\frac{21}{5}-\left(\left(-\frac{11}{21}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\right)=-\frac{25}{7}$$

$$a_{55}^{(2)}=a_{55}^{(1)}-l_{52}\cdot a_{25}^{(1)}=\frac{14}{5}-\left(-\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{11}{21}\right)\right)=\frac{14}{5}+\frac{121}{21\cdot 5}=\frac{294+121}{21\cdot 5}=$$

$$=\frac{415}{21\cdot 5}=\frac{83}{21}$$

$$f_5^{(2)}=f_5^{(1)}-l_{52}\cdot f_2^{(1)}=-\frac{49}{5}-\left(\left(-\frac{11}{21}\right)\left(-\frac{146}{5}\right)\right)=-\frac{49}{5}-\frac{1606}{21\cdot 5}=$$

$$=\frac{-1029-1606}{21\cdot 5}=\frac{-2635}{21\cdot 5}=-\frac{527}{21}$$

Крок 2 завершено. Запишемо отриману матрицю після 2-ої ітерації.

$$\bar{A}:=\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -1 & -5 & -1 & 4 & -24\\ 0 & 21/5 & -8 & 6/5 & 11/5 & -146/5\\ 0 & 0 & -131/21 & -54/7 & 88/21 & -538/21\\ 0 & 0 & -1/3 & 4 & -7/3 & -2/3\\ 0 & 0 & -109/21 & -25/7 & 83/21 & -527/21 \end{array}\right]$$

Крок 3. На цьому етапі $k=3,\ i=4,5$

Вибираємо максимальний за модулем елемент у 3-му стовпці:

$$\max_{i=3,\dots,5}(|a_{i3}|)=-\frac{131}{21}\ ;\quad a_{33}=-\frac{131}{21}$$

Переставляти рядки не потрібно. Тому шукаємо l_{43}, a_{ij}, f_i

$$l_{43}=\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}=-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{\cancel{21}^{7}}{131}\right)=\frac{7}{131}$$

І т. д.

$$\bar{A}:=\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -1 & -5 & -1 & 4 & -24\\ 0 & \frac{21}{5} & -8 & \frac{6}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{146}{5}\\ 0 & 0 & -\frac{131}{21} & -\frac{54}{7} & \frac{88}{21} & -\frac{538}{21}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{578}{131} & -\frac{335}{131} & \frac{92}{131}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1223}{578} & -\frac{1223}{289} \end{array}\right]$$

Крок 5. Всі ітерації прямого ходу методу Гаусса виконано. Тепер можна перейти до зворотнього ходу

$$\det\bar{A}\neq 0$$

$$a_{55}^{(4)}\cdot x_5=f_5^{(4)}\ \Rightarrow\ x_5=\frac{f_5^{(4)}}{a_{55}^{(4)}}$$

$$x_5=-\frac{\cancel{1223}}{\cancel{289}}\cdot\frac{\cancel{578}^{2}}{\cancel{1223}}=-2$$

$$x_5=-2$$

$$a_{44}^{(3)}\cdot x_4+a_{45}^{(3)}\cdot x_5=f_4^{(3)}$$

$$\frac{578}{131}x_4+\left(-\frac{335}{131}\right)(-2)=\frac{92}{131}$$

$$\frac{578}{131}x_4=\frac{92}{131}-\frac{670}{131}=-\frac{578}{131}$$

$$x_4=-\frac{\cancel{578}}{\cancel{131}}\cdot\frac{\cancel{131}}{\cancel{578}}=-1$$

$$x_4=-1$$

$$a_{33}^{(2)}\cdot x_3+a_{34}^{(2)}\cdot x_4+a_{35}^{(2)}\cdot x_5=f_3^{(2)}$$

$$-\frac{131}{21}x_3-\frac{54}{7}x_4+\frac{88}{21}x_5=-\frac{538}{21}$$

$$-\frac{131}{21}x_3+\frac{54}{7}-\frac{176}{21}=-\frac{538}{21}$$

$$-\frac{131}{21}x_3=-\frac{538}{21}+\frac{176}{21}-\frac{162}{21}=\frac{14}{21}-\frac{538}{21}=-\frac{524}{21}$$

$$x_3=-\frac{\cancel{524}^{4}}{\cancel{21}}\cdot\left(\frac{-\cancel{21}}{\cancel{131}}\right)=4$$

$$x_3=4$$

$$a_{22}^{(1)}\cdot x_2+a_{23}^{(1)}\cdot x_3+a_{24}^{(1)}\cdot x_4+a_{25}^{(1)}\cdot x_5=f_2^{(1)}$$

$$\frac{21}{5}x_2-8\cdot x_3+\frac{6}{5}x_4+\frac{11}{5}x_5=-\frac{146}{5}$$

$$\frac{21}{5}x_2-32-\frac{6}{5}-\frac{22}{5}=-\frac{146}{5}$$

$$\frac{21}{5}x_2=-\frac{146}{5}+\frac{28}{5}+32=-\frac{118}{5}+\frac{160}{5}=\frac{42}{5}$$

$$x_2=\frac{\cancel{42}^{2}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{21}}=2$$

$$x_2=2$$

І т. д.

$$a_{11}^{(0)} \cdot x_1 + a_{12}^{(0)} \cdot x_2 + a_{13}^{(0)} \cdot x_3 + a_{14}^{(0)} \cdot x_4 + a_{15}^{(0)} \cdot x_5 = f_1^{(0)}$$

$$-5x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 = -24$$

$$-5x_1 - 2 - 20 + 1 - 8 = -24$$

$$-5x_1 = -24 + 20 - 1 + 2 + 8 = 5$$

$$-5x_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

$$x_1 = -1$$

Зворотній хід метод Гауса завершено.

$$X = (-1, 2, 4; -1, -2)^T$$

Зробимо перевірку

$$-5x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 = -24$$

$$5 - 2 - 20 + 1 - 8 = -24$$
$$-24 = -24$$

$$1x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -5$$

$$-1 - 4 + 4 - 4 = -5$$
$$-5 = -5$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 = -14$$
$$-3 + 2 - 16 + 7 - 4 = -14$$
$$-14 = -14$$

$$-2x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 0x_5 = -20$$
$$2 + 2 - 20 - 4 = -20$$
$$-20 = -20$$

$$-1x_1 + 4x_2 - 9x_3 + x_4 + 3x_5 = -34$$
$$1 + 8 - 36 + (-1) - 6 = -34 \quad \Rightarrow \quad -34 = -34$$

2) Метод прогонки

Завдання: Розв'язати СЛАР методом прогонки. Дослідити виконання умов збіжності, детально описати кожен крок прямого і зворотного ходу. Зробити перевірку коренів.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad f = [-12, 2, -13, 6, 6, 28, 8]^T$$

Отже, маємо наступну СЛАР:

$$\begin{cases} 6x_0 - 6x_1 = -12 \\ 2x_0 + 10x_1 - 6x_2 = 2 \\ 3x_1 + 10x_2 - 3x_3 = -13 \\ -4x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 6 \\ -5x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 6 \\ -6x_4 + 12x_5 + 4x_6 = 28 \\ 4x_5 - 4x_6 = 8 \end{cases}$$

• Перевіримо умову стійкості методу прогонки (тобто умови переваги діагональних елементів):

$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \ i = \overline{1, N-1}$

$|c_0| \geq |b_0|$ і $|c_N| \geq |a_N|$, де $\underline{N = 6}$

0) $c_0 = -6$, $b_0 = -6 \Rightarrow |c_0| \geq |b_0| \Rightarrow 6 \geq 6 \Rightarrow 6 = 6$.

1) $c_1 = -10$, $b_1 = -6$, $a_1 = 2 \Rightarrow |c_1| \geq |b_1| + |a_1| \Rightarrow 10 \geq 8 \Rightarrow 10 > 8$

2) $c_2 = -10$, $b_2 = -3$, $a_2 = 3 \Rightarrow |c_2| \geq |b_2| + |a_2| \Rightarrow 10 \geq 6 \Rightarrow 10 > 6$

3) $c_3 = -10$, $b_3 = -4$, $a_3 = -4 \Rightarrow |c_3| \geq |b_3| + |a_3| \Rightarrow 10 \geq 8 \Rightarrow 10 > 8$

4) $c_4 = -10$, $b_4 = -3$, $a_4 = -5 \Rightarrow |c_4| \geq |b_4| + |a_4| \Rightarrow 10 \geq 8 \Rightarrow 10 > 8$

5) $c_5 = -12$, $b_5 = 4$, $a_5 = -6 \Rightarrow |c_5| \geq |b_5| + |a_5| \Rightarrow 12 \geq 10 \Rightarrow 12 > 10$

6) $c_6 = 4$, $a_6 = 4 \Rightarrow |c_6| \geq |a_6| \Rightarrow 4 \geq 4 \Rightarrow 4 = 4$. +

Оскільки всі умови: $|C_0| \geq |B_0|$, $|C_N| \geq |a_N|$ і $|C_i| \geq |a_i| + |B_i|$, $i = \overline{1, N-1}$, де $N=6$ – виконуються і серед даних нерівностей є строгі нерівності (нерівності 1)-5)), то метод є стійким, а отже і збіжним. Бо, з вище сказаного забезпечується, що $c_i - a_i \alpha_i \neq 0$ і $|\alpha_i| \leq 1$, $i = \overline{1, N}$. +

• <u>Прямий хід.</u>

<u>Крок 0:</u> З першого р-ння системи: $C_0 = -6$, $b_0 = -6$, $f_0 = 12$. Тоді за формулами $\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}$, $\beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$ знаходимо α_1 і β_1:

$\underline{\alpha_1} = \frac{-6}{-6} = 1$, $\underline{\beta_1} = \frac{12}{-6} = -2$. +

<u>Крок 1:</u> З другого р-ння системи: $C_1 = -10$, $b_1 = -6$, $f_1 = -2$, $a_1 = 2$. За формулами методу прогонки $\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}$, $\beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}$, $i = \overline{1, N-1}$, де $N=6$, шукаємо α_2 і β_2.

$$c_1 - a_1\alpha_1 = -10 - 2 \cdot 1 = -12$$

$$\underline{\alpha_2} = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}, \quad \underline{\beta_2} = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - a_1\alpha_1} = \frac{-2 + 2\cdot(-2)}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}.$$ +

<u>Крок 2:</u> З третього р-ння системи: $C_2 = -10$, $b_2 = -3$, $f_2 = 13$, $a_2 = 3$.
З формул кроку 1, де $\underline{i=2}$ шукаємо α_3, β_3:

$$C_2 - a_2\alpha_2 = -10 - 3 \cdot \frac{1}{2} = -10 - \frac{3}{2} = -\frac{23}{2}.$$

$$\underline{\alpha_3} = \frac{b_2}{c_2 - a_2\alpha_2} = \frac{-3}{-\frac{23}{2}} = -3 \cdot \left(-\frac{2}{23}\right) = \frac{6}{23}.$$ +

$$\underline{\beta_3} = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{c_2 - a_2\alpha_2} = \frac{13 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{23}{2}} = \left(13 + \frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{23}\right) = \frac{29}{\cancel{2}}\left(-\frac{\cancel{2}}{23}\right) = -\frac{29}{23}.$$

<u>Крок 3:</u> З четвертого р-ння системи: $C_3 = -10$, $b_3 = -4$, $f_3 = -6$, $a_3 = -4$.
З формул кроку 1, де $\underline{i=3}$ шукаємо α_4, β_4:

$$c_3 - a_3\alpha_3 = -10 + 4 \cdot \frac{6}{23} = -\frac{230}{23} + \frac{24}{23} = -\frac{206}{23}.$$

$$\underline{\alpha_4} = \frac{b_3}{c_3 - a_3\alpha_3} = \frac{-4}{-\frac{206}{23}} = -4\cdot\left(-\frac{23}{206}\right) = \frac{46}{103}.$$

(2)

$$\underline{\beta_4} = \frac{f_3 + a_3\beta_3}{c_3 - a_3\alpha_3} = \frac{-6 - 4\left(-\frac{29}{23}\right)}{\left(-\frac{206}{23}\right)} = \left(-6 + \frac{116}{23}\right)\left(-\frac{23}{206}\right) = \left(-\frac{22}{\cancel{23}}\right)\left(-\frac{\cancel{23}}{206}\right) = \frac{22}{206} = \frac{11}{103}.$$

Крок 4: З п'ятого р-ння системи: $c_4=-10, b_4=-3, f_4=-6, a_4=-5$.

З формул кроку 1, де $i=4$ шукаємо α_5, β_5:

$$c_4-a_4\alpha_4=-10+5\cdot\left(\frac{46}{103}\right)=\frac{230}{103}-\frac{1030}{103}=-\frac{800}{103}.$$

$$\alpha_5=\frac{b_4}{c_4-a_4\alpha_4}=\frac{-3}{-\frac{800}{103}}=-3\cdot\left(-\frac{103}{800}\right)=\frac{309}{800}.$$

$$\beta_5=\frac{f_4+a_4\beta_4}{c_4-a_4\alpha_4}=\frac{-6-5\left(\frac{11}{103}\right)}{-\frac{800}{103}}=\left(-6-5\left(\frac{11}{103}\right)\right)\cdot\left(-\frac{103}{800}\right)=\left(-\frac{55}{103}-\frac{618}{103}\right)\left(-\frac{103}{800}\right)$$

$$=\frac{673}{800}.$$

Крок 5: З шостого р-ння системи: $c_5=-12, b_5=4, f_5=-28, a_5=-6$.

З формул кроку 1, де $i=5$ шукаємо α_6, β_6:

$$c_5-a_5\alpha_5=-12+6\cdot\frac{309}{800}=\frac{1854}{800}-\frac{9600}{800}=-\frac{7746}{800}$$

$$\alpha_6=\frac{b_5}{c_5-a_5\alpha_5}=\frac{4}{-\frac{7746}{800}}=4\cdot\left(-\frac{800}{7746}\right)=-\frac{1600}{7746}.$$

$$\beta_6=\frac{f_5+a_5\beta_5}{c_5-a_5\alpha_5}=\frac{-28-6\cdot\frac{673}{800}}{-\frac{7746}{800}}=\left(-28-6\cdot\frac{673}{800}\right)\cdot\left(-\frac{800}{7746}\right)=\left(-\frac{4038}{\cancel{800}}-\right.$$

$$\left.-\frac{22400}{\cancel{800}}\right)\left(-\frac{\cancel{800}}{7746}\right)=\frac{26438}{7746}=\frac{13219}{3873}.$$

+

Крок 6: Оскільки $N=6$, то формули з кроку 1 ми не можемо використати. Тому використаємо наступну: $\beta_{N+1}=\frac{f_N+a_N\beta_N}{c_N-a_N\alpha_N}$.

З останнього р-ння системи: $c_6=4, f_6=-8, a_6=4$.

Тоді $\beta_{N+1}=|N=6|=\beta_7=\frac{f_6+a_6\beta_6}{c_6-a_6\alpha_6}=(*)$

- $c_6-a_6\alpha_6=4-4\left(-\frac{1600}{3873}\right)=\frac{6400+15492}{3873}=\frac{21892}{3873}$
- $f_6+a_6\beta_6=-8+4\left(\frac{13219}{3873}\right)=\frac{52876}{3873}-\frac{30984}{3873}=\frac{21892}{3873}$

$$(*)=\frac{\cancel{21892}}{\cancel{3873}}\cdot\frac{\cancel{3873}}{\cancel{21892}}=\underline{1}.$$

+

На цьому крої прямий хід завершено.

• Зворотній хід.

Крок 1: Оскільки $\beta_{N+1} = X_N$, де $N=6$, то $\beta_7 = X_6 = 1$

$X_6 = 1$.

Крок 2: Згідно формул зворотнього ходу методу прогонки:

$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$, $i = \overline{N-1, 0}$ шукаємо x_5 $(i=5)$

$$x_5 = \alpha_6 x_6 + \beta_6 = -\frac{1600}{3873} \cdot 1 + \frac{13219}{3873} = \frac{11619}{3873} = 3 \quad +$$

Крок 3: За формулою кроку 2, де $i=4$ шукаємо x_4:

$$x_4 = \alpha_5 x_5 + \beta_5 = \frac{309}{800} \cdot 3 + \frac{673}{800} = \frac{927+673}{800} = \frac{1600}{800} = 2 \quad +$$

Крок 4: За формулою кроку 2, де $i=3$ шукаємо x_3:

$$x_3 = \alpha_4 x_4 + \beta_4 = \frac{46}{103} \cdot 2 + \frac{11}{103} = \frac{92+11}{103} = \frac{103}{103} = 1 \quad +$$

Крок 5: За формулою кроку 2, де $i=2$ шукаємо x_2:

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3 = \frac{6}{23} \cdot 1 + \left(-\frac{29}{23}\right) = -\frac{23}{23} = -1 \quad +$$

Крок 6: За формулою кроку 2, де $i=1$ шукаємо x_1:

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2 = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} = 0 \quad +$$

Крок 7: За формулою кроку 2, де $i=0$ шукаємо x_0:

$$x_0 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 = 1 \cdot 0 - 2 = -2. \quad +$$

На даному кроці зворотній хід завершено. З розв'язком заданої СЛАР буде наступний вектор X_i: $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (-2, 0, -1, 1, 2, 3, 1)^T$.

• Для того, щоб переконатись в тому чи вірний розв'язок зробимо перевірку, підставивши значення вектора X в систему $Ax=f$.

1) З першого рівняння системи:

$6x_0 - 6x_1 = -12$; $x_0 = (-2)$, $x_1 = 0$. Тоді:

$6\cdot(-2) - 6\cdot 0 = -12$

$-12 = -12$.

2) З другого рівняння системи:

$2x_0 + 10x_1 - 6x_2 = 2$; $x_0 = (-2)$, $x_1 = 0$, $x_2 = (-1)$. Тоді:

$2\cdot(-2) + 10\cdot 0 - 6(-1) = 2$

$-4 + 6 = 2$

$2 = 2$

3) З третього рівняння системи:

$3x_1 + 10x_2 - 3x_3 = -13$; $x_1 = 0$, $x_2 = (-1)$, $x_3 = 1$. Тоді:

$3\cdot 0 + 10\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -13$

$-10 - 3 = -13$

$-13 = -13$

4) З четвертого рівняння системи:

$-4x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 6$; $x_2 = (-1)$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Тоді:

$-4(-1) + 10\cdot 1 - 4\cdot 2 = 6$

$4 + 10 - 8 = 6$

$14 - 8 = 6$

$6 = 6$

+

5) З п'ятого р-ння системи:

$-5x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 6$; $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$. Тоді

$-5(1) + 10\cdot 2 - 3\cdot 3 = 6$

$-5 + 20 - 9 = 6$

$-14 + 20 = 6$

$6 = 6$

6) З шостого р-ння системи:

$-6x_4 + 12x_5 + 4x_6 = 28$; $x_4 = 2$, $x_5 = 3$, $x_6 = 1$. Тоді

$-6\cdot 2 + 12\cdot 3 + 4\cdot 1 = 28$

$-12 + 36 + 4 = 28$

$40 - 12 = 28$

$28 = 28$

7) З останнього р-ння системи:

$4x_5 - 4x_6 = 8$; $x_5 = 3$, $x_6 = 1$. Тоді:

$4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 8$

$12 - 4 = 8$

$8 = 8$.

+

• Оскільки, після підстановки вектора X в систему рівності 1)-7) справдились, то СЛАР розв'язана правильно. І розв'язком є: $X = (-2, 0, -1, 1, 2, 3, 1)$.