

第二章 连续系统的时域分析

2.1 冲激响应、阶跃响应

① 冲激响应: $\delta(t)$ 所引起的零状态响应

$$h(t) = T[\delta(t)]$$

② 阶跃响应 $\varepsilon(t)$ 所引起的零状态响应

$$g(t) = T[\varepsilon(t)]$$

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \text{ 则 } h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

定义卷积积分: $(-\infty, +\infty)$ 上 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \text{ 为 } f_1(t) \text{ 与 } f_2(t) \text{ 卷积积分}$$

$$\text{记为 } f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \leftarrow \text{反映了系统的基本属性}$$

$$\Delta \text{ 连续卷积 } f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

性质:

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad \text{左边} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) = f(t) \quad (f(t) \text{ 的延拓})$$

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

$$f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$$

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \text{做一次变上限积分}$$

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t \varepsilon(t) \quad f(t) * t \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\eta} f(\lambda) d\lambda d\eta$$

$$\Delta \text{ 离散卷积和 } f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) f_2(n-m)$$

$$\text{性质: } f(n) * \delta(n) = f(n)$$

$$f(n) * \delta(n-n_0) = f(n-n_0)$$

$$f(n) * \varepsilon(n) = \sum_{m=-\infty}^n f(m)$$

$$\varepsilon(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$$

Δ 卷积的时移特性

$$\text{若 } f_1(t) * f_2(t) = g(t)$$

$$\text{则 } f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = g(t-t_1-t_2)$$

$$\text{证明 } f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2)$$

$$= f_1(t) * \delta(t-t_1) * f_2(t) * \delta(t-t_2)$$

$$= g(t) * \delta(t-t_1-t_2)$$

$$= g(t-t_1-t_2)$$

卷积存在的条件 ① 两信号都有始或都有终

② 其中一信号是时限的

Δ 微积分性质

$$\text{若 } f_1(t) * f_2(t) = f(t)$$

$$\text{则 ① } f_1(t) * f_2'(t) = f'(t)$$

$$\text{② } f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

$$\text{③ } f_1'(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = f(t)$$

$$\text{④ } f_1^{(k)}(t) * f_2^{(l)}(t) = f^{(k+l)}(t)$$

条件: 求导的函数在 $-\infty$ 处为 0

或积分的函数在 $-\infty$ 至 $+\infty$ 上积分为 0

Δ 尺度变换性质

$$f_1(t) * f_2(t) = f(t)$$

$$\text{则 } f_1(at) * f_2(at) = \frac{1}{|a|} f(t)$$

△ 求解全响应

① 经典解 | 齐次解
特解

② 零输入+零状态

求解方法见书

△ 0^- 与 0^+ 值

$y(0^+)$ 与 $y'(0^+)$ 在 $f(t)$ 作用下的输出

$y(0^-)$ 与 $y'(0^-)$ 无输入条件下的输出

待定系数法

例 $y''(t) + 2y'(t) + y = f''(t) + 2f(t)$, $f(t) = \delta(t)$

解 设 $y''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_0(t)$

积 $y'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\varepsilon(t) + r_1(t)$

$r_0(t)$ 中不含冲激 $\Leftrightarrow r_1(t)$ 中不含跳变

积 $y(t) = a\delta(t) + b\varepsilon(t) + r_2(t)$ 合并对 $c\varepsilon(t) + r_1(t)$ 的积分

代入得 $a\delta''(t) + (2a+b)\delta'(t) + (c+2b+a)\delta(t) + [J = \delta'(t) + 2\delta(t)]$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ c+2b+a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$$

$\therefore y''(t) = \delta''(t) - 2\delta'(t) + 5\delta(t) + r_0(t)$ *

积 $y'(0^+) = y'(0^-) + y'(t)$ 在 0 处变化值
 $y'(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 5\varepsilon(t) + r_1(t)$

$$\therefore y'(0^+) = y'(0^-) + 5 = 4$$

$$y(t) = \delta(t) - 2\varepsilon(t) + r_2(t)$$

$$\therefore y(0^+) = y(0^-) - 2 = -1$$

△ 零输入响应: 和齐次解形式一样, 含有未知数, 但代入 $y(0^-)$ 与 $y'(0^-)$ 可求

△ $y(0^+) - y(0^-)$, $y'(0^+) - y'(0^-)$ 可用于求解零状态响应

$y(0^+)$, $y'(0^+)$ 可求全响应

$y(0^-)$, $y'(0^-)$ 可求零输入响应

全响应 = 零输入 + 零状态

△ 零输入响应 (y_{zi})

与求齐次解步骤相同, 并代入 $y(0^-)$, $y'(0^-)$

应有 $y_{zi}(0^-) = y_{zi}(0^+)$

△ 零状态响应

全响应 = 齐次解 + 特解

零状态响应 = 零状态齐次解 + 零状态特解

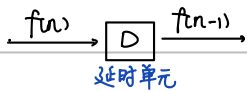
齐次解 = 零状态齐次 + 零输入

总结 $y(t) = \text{齐次解} + \text{特解}$

$$= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \text{ 齐次解} + y_{zs}(t) \text{ 特解}$$

$$= y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

△ 差分方程



△ 有限长序列的卷积

对位相乘

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ & & \uparrow & \\ & & k=0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & \\ & \uparrow & & \\ & k=0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{左端点 } k=-3$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 1 \end{array} \quad \text{右端点 } k=2$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 0 \ 1 \\ 3 \ 6 \ 0 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 5 \ 7 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

\uparrow
 $k=0$

△ 差分方程的时域求解

齐次解 $a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = 0$

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_N = 0$$

△ 零输入响应: 任意初始条件都可以

零状态响应: $y_{zs}(0), y_{zs}(1)$ 等等

△ 单位样值响应

输入 = $\delta(n)$ 时零状态响应

齐次解法: $h(n) - 5h(n-1) + 6h(n-2) = \delta(n) - 3\delta(n-2)$

适用于右端为 $\delta(n)$ 的移位的线性组合

令 $h(n) - 5h(n-1) + 6h(n-2) = \delta(n)$ 求得后

由线性和时不变性求输出

△ 两矩形信号卷积

