*ES413 Sinais e Sistemas*

# Informações Gerais

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**

# Tópicos

- **Objetivos**
- **Conteúdo**
- **Referências**
- **Avaliação**
- **Estrutura de Apoio**

# Objetivos

- **Principal Objetivo**
  - Tratamento abrangente de sistemas e sinais lineares em nível introdutório, compreendendo:
    - Ferramentas para modelagem, análise e processamento de sinais lineares contínuos e discretos;
    - Ferramentas para modelagem, análise e projeto de sistemas lineares contínuos e discretos.
- **Objetivos Secundários**
  - Fundamentar estudante para conjunto de disciplinas que lidam sinais e sistemas, tais como, processamento de sinais, princípios de comunicação, sistemas de controle, circuitos elétricos, robótica, etc.

# Conteúdo

- Introdução (Lathi – Cap. 01; Chaparro – Cap 00):
  - Tratamento contínuo ou discreto, complexo ou real;.
- Sinais contínuos no tempo (Lathi – Cap. 01; Chaparro - Cap 01):
  - Classificação, tipos, tamanho, representação por sinais básicos, operações básicas;
- Sistemas (Lathi – Cap. 02; Chaparro – Cap 02):
  - Resposta de entrada zero, resposta ao impulso unitário, resposta de estado zero, integral de convolução, solução por equações diferenciais, estabilidade e comportamento;
- Transformada de Laplace (Lathi – Cap. 04; Chaparro – Cap 03):
  - Definição, propriedades, inversa, análise de sistemas LTI;
- Série de Fourier (Lathi – Cap. 06; Chaparro – Cap 04):
  - Exponencial e trigonométrica; respostas de sistemas LTIC a entradas periódicas;
- Transformada de Fourier (Lathi – Cap. 07; Chaparro – Cap 05):
  - Definição e transformada inversa, propriedades, representação espectral;

# Conteúdo

- Aplicações de análise por Laplace (Lathi – Cap. 04; Chaparro – Cap 06):
  - Diagrama de blocos e sistemas clássicos de controle;
- Aplicações de análise por Fourier (Lathi – Cap. 07; Chaparro – Cap 07):
  - Comunicações e filtragens analógicas.
- Teoria da amostragem (Lathi – Cap. 08; Chaparro – Cap 08):
  - Amostragem uniforme, reconstrução de sinais.
- Sinais e sistemas discretos no tempo (Lathi – Cap. 03; Chaparro – Cap 09):
  - Sinais, sistemas, somatório de convolução, causalidade e estabilidade;
- Transformada-Z (Lathi – Cap. 05; Chaparro – Cap 10):
  - Definições e transformada inversa, soluções de equações de diferenças;
- Análise por Fourier de sinais e sistemas discretos no tempo (Lathi – Cap. 09; Chaparro – Cap 11):
  - Transformada discreta de Fourier.

# Conteúdo

- Ao final do curso, os alunos devem conhecer:
  - Análise básica de sinais contínuos e discretos;
  - Análise básica de sistemas contínuos e discretos;
  - Análise no domínio do tempo, incluindo integral e somatório de convolução;
  - Transformada de Laplace e funções de transferência;
  - Série de Fourier (revisão) e Transformada de Fourier;
  - Teorema de amostragem e reconstruções de sinais;
  - Transformação z;

# Referências

- **Livros texto**
  - Lathi, B. P. Sedra, A. S. (2017). *Linear Systems and Signals*. Oxford University Press; 3rd edition.
  - Lathi, B. P. (2004). *Linear Systems and Signals*. Oxford University Press; 2nd edition.
  - Chaparro, L. (2014). *Signals and Systems using MATLAB*. Academic Press; 2 edition.
- **Livro para Exercícios**
  - Hsu, H. (2013). *Schaum's Outline of Signals and Systems*. McGraw-Hill; 3rd edition.
- **Livros para consulta**
  - Alkin, O. (2014). *Signals and Systems: A MATLAB® Integrated Approach*. CRC Press. ISBN-13: 9781466598539.
  - Oppenheim, A. V. & Verghese, G. C. (2015). *Signals, Systems and Inference*. Prentice Hall, 1st edition.
  - Palani, S. (2021). *Signals and Systems*. Springer; 2nd edition.
  - Phillips, C., Parr, J. & Riskin, E. (2014). *Signals, Systems, & Transforms*, Pearson, 5th Edition.

# Avaliação

- **Avaliações**
  - Prova 1: Sinais e sistemas contínuos no tempo;
  - Prova 2: Sinais e sistemas discretos no tempo;
- **Datas**
  - Prova 01: 15/08/2023;
  - Prova 02: 21/09/2023;
  - Projeto: 28/09/2023;
  - Prova final: 03/10/2023;
- **Calendário**
  - Início das aulas: 29/05/2023;
  - Término das aulas: 30/09/2023;

# Estrutura de Apoio

- **Google Classroom**
  - Transparências, atividades, exercícios recomendados, links interessantes;
  - Comunicação;
- **Monitoria**
  - Horários para dúvidas (a definir pelo monitor);
  - Exercícios em sala de aula;
- **Programas para praticar**
  - Scilab (10 Mb):

    (http://scilabsoft.inria.fr/download/index_download.php?page=release.html;;
  - Matlab (pago);
  - Julia (MIT).

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Sinais e Sistemas Lineares

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**
**Depto. of Sistemas de Computação**
**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 1

# Conteúdo

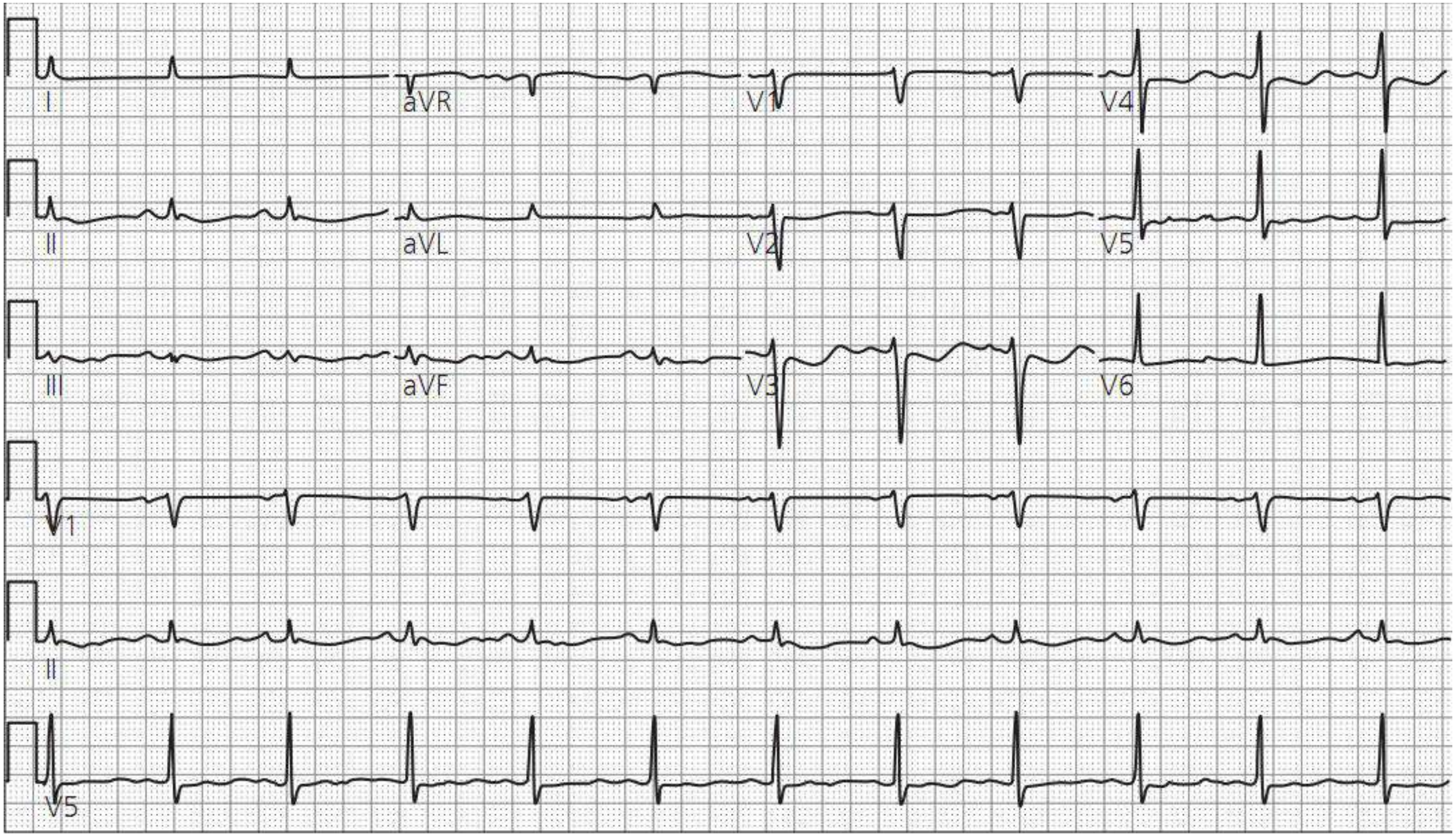
- **Sinais**
  - Tamanho de um Sinal
  - Operações Úteis com Sinais
  - Classificação de Sinais
  - Modelos Úteis com Sinais
  - Funções Pares e Ímpares
- **Sistemas**
  - Definições
  - Classificação de Sistemas
  - Modelos de Sistemas

# Sinais e Sistemas (i)

- **Definições**
  - Sinais (Lathi):
    - Um sinal é um conjunto de dados ou informações. Um sinal pode ser função do tempo (e.g., sinal de televisão, sinal vendas mensais de uma corporação) ou do espaço (carga elétrica distribuída em um corpo). Neste curso se tratará de sinais que são funções do tempo, embora a análise seja válida para outras variáveis independentes.
  - Sistemas (Lathi):
    - Formalmente, um sistema é uma entidade que pode processar um ou mais sinais (entrada do sistema) e produzir um ou mais sinais (saída do sistema). Sistemas podem modificar ou extrair informações adicionais de um sinal.

# Sinais e Sistemas (ii)

- **Exemplo de Sinais**
  - Eletrocardiograma:

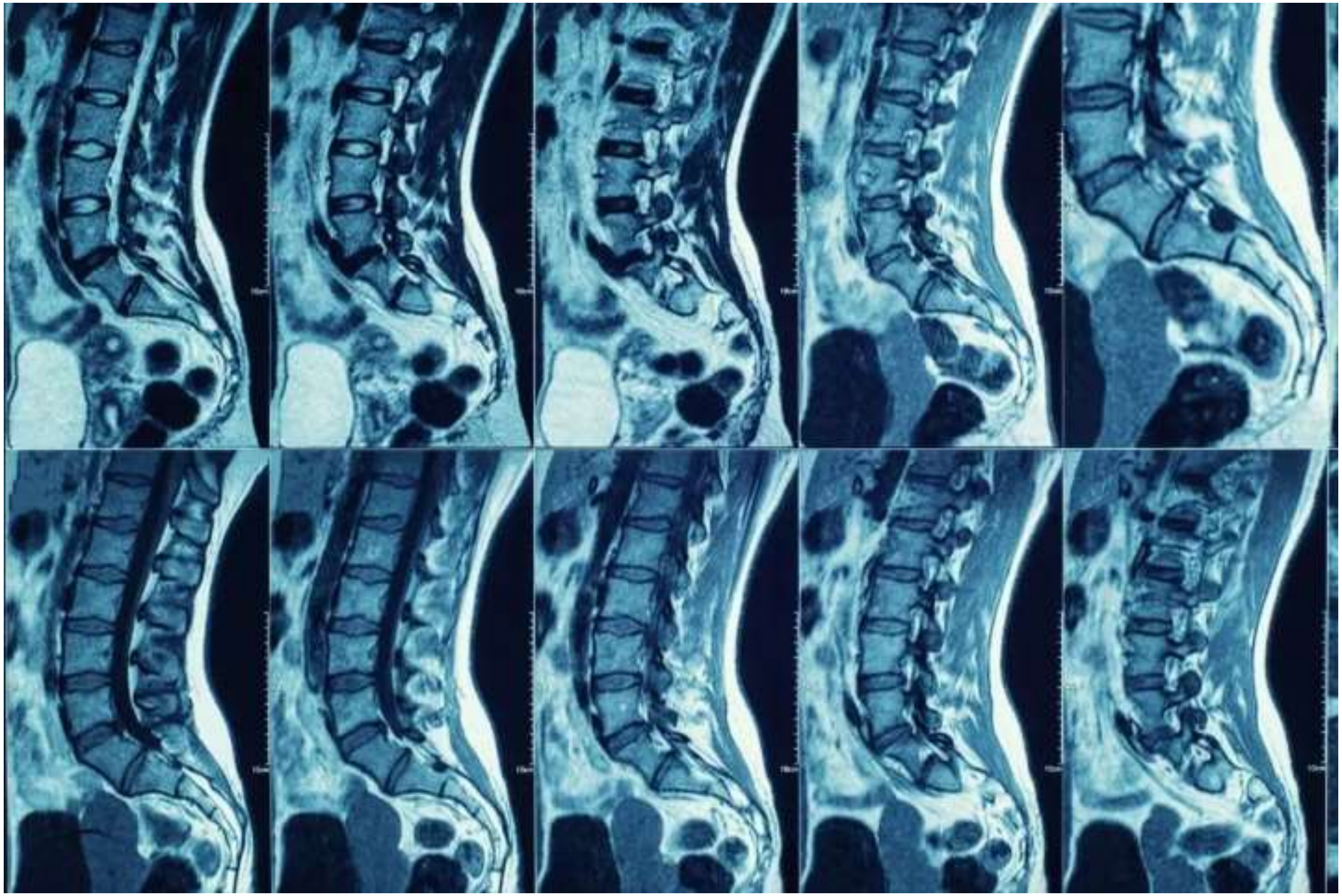


# Sinais e Sistemas (ii)

- **Exemplo de Sinais**
  - Índice BOVESPA:

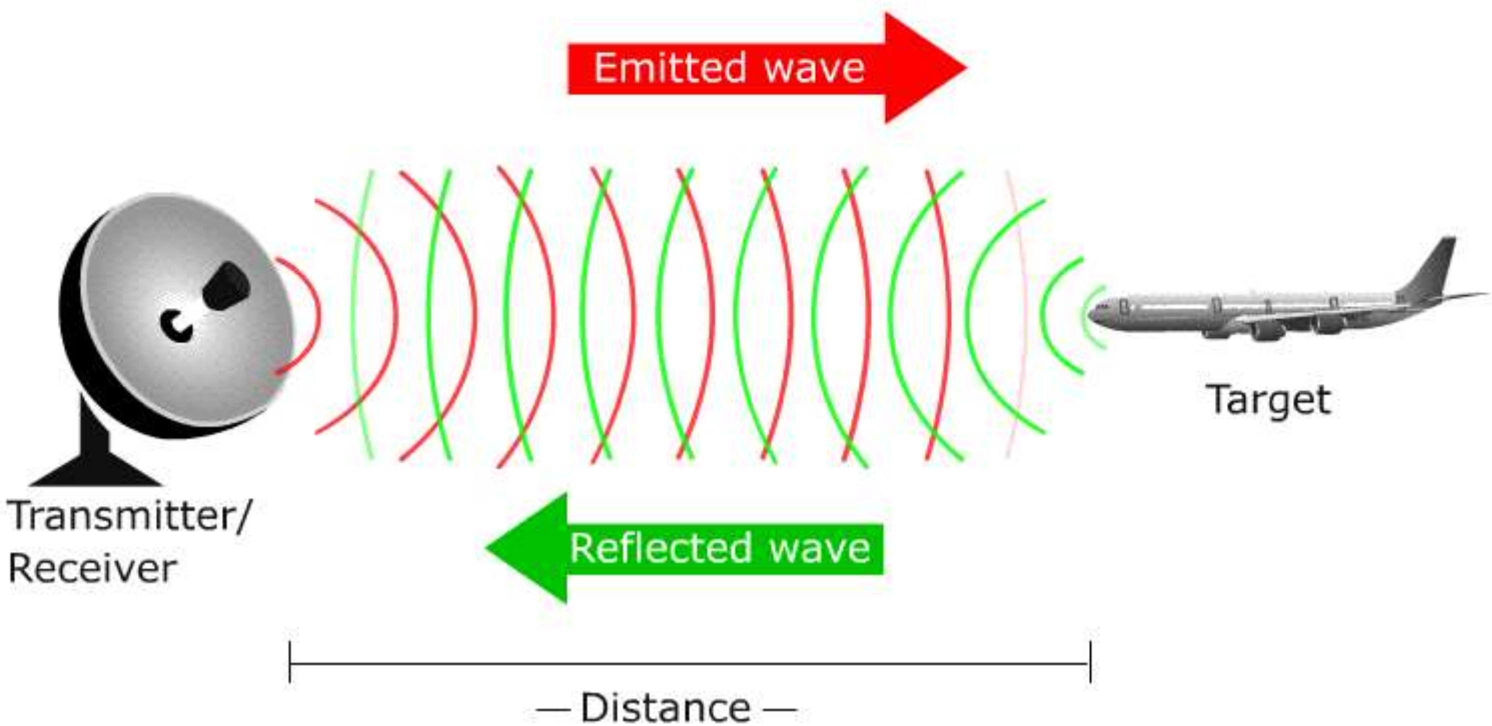
# Sinais e Sistemas (ii)

- **Exemplo de Sinais**
  - Ressonância Magnética da coluna:



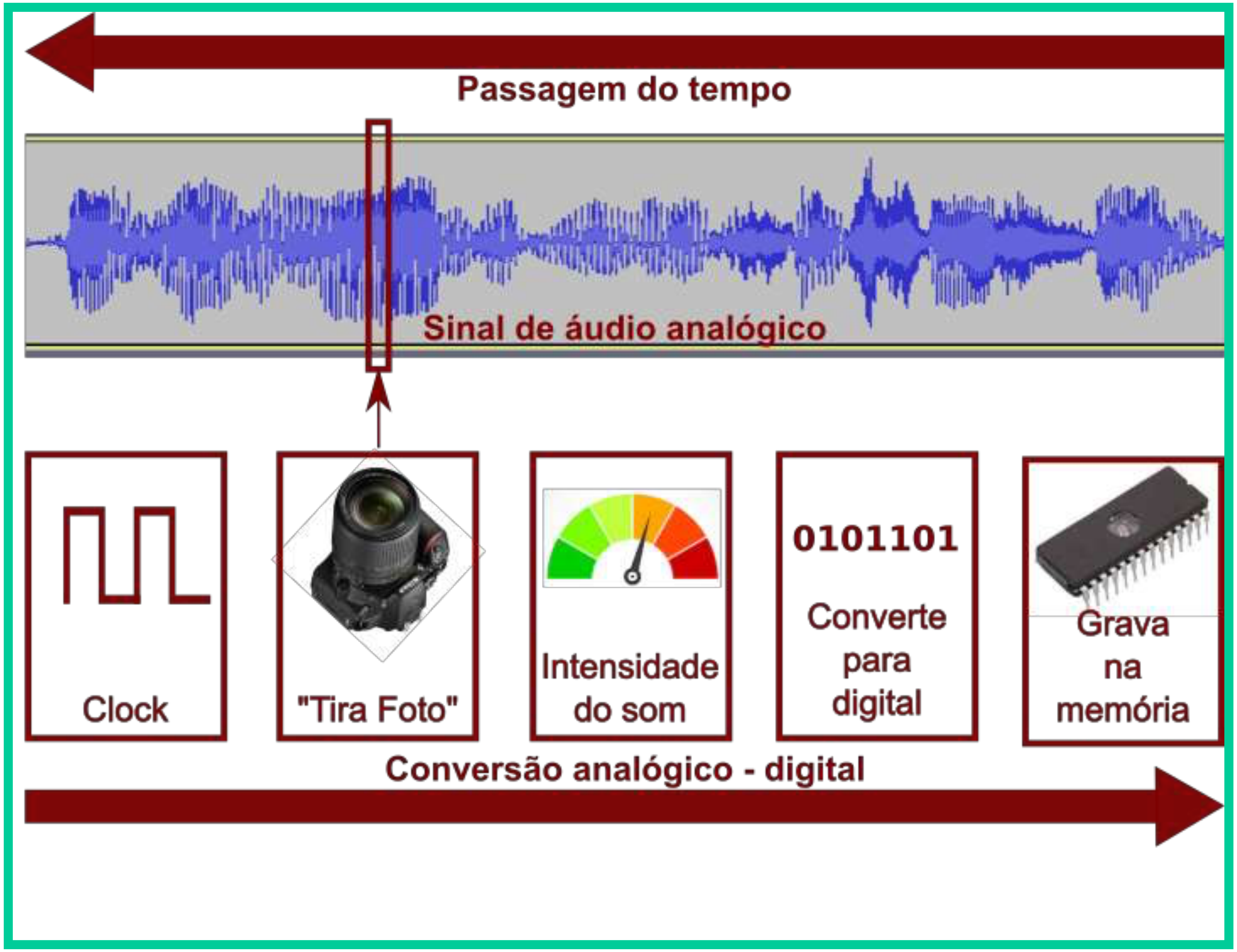
# Sinais e Sistemas (ii)

- **Exemplo de Sinais**
  - Sinal de radar:



# Sinais e Sistemas (ii)

- **Exemplo de Sinais**
  - Sinal de áudio:

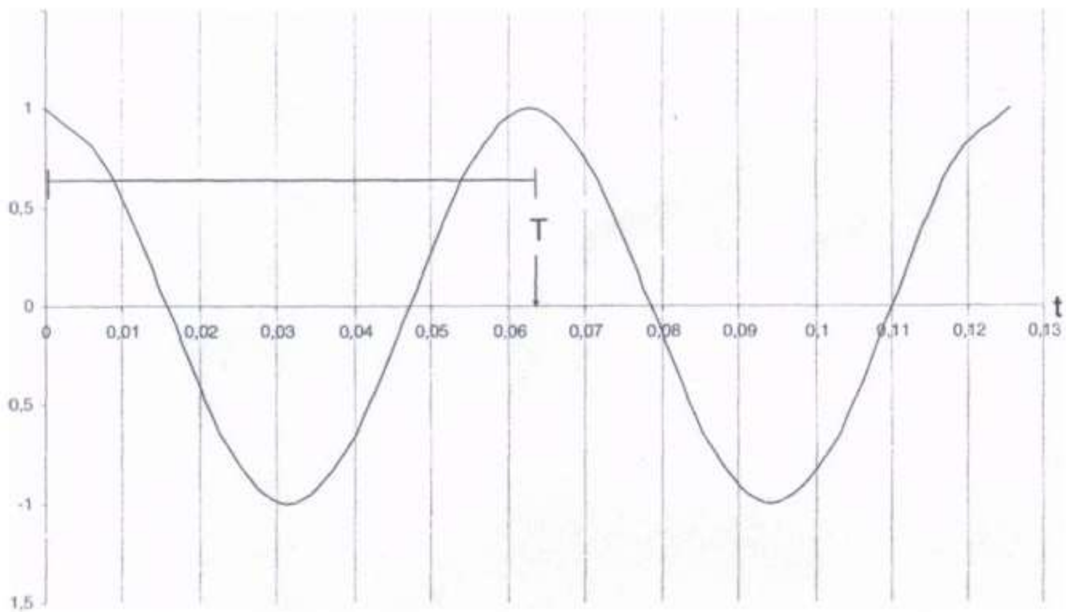


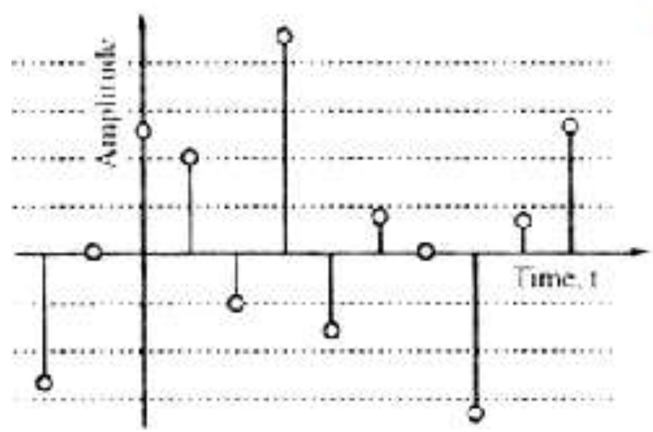
# Sinais e Sistemas (iv)

- **Tipos de Sinais**
  - Sinais contínuos são funções de um argumento real.
    - $x(t)$ é um sinal no qual $t$ pode assumir qualquer valor real.
    - $x(t)$ pode ter valor constante ou nulo para um intervalo de valores de $t$.
  - Sinais discretos no tempo são funções de um argumento que só pode assumir valores discretos pertencentes a um conjunto.
    - $x[n]$ é um sinal no qual $n \in \{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$.
      - Usualmente emprega-se um índice ao invés da variável tempo quando se trata de sinais discretos.
  - Tanto para sinais contínuos como para sinais discretos, o valor de $x$ pode ser real ou complexo.

# Sinais e Sistemas (v)

- **Tipos de Sinais**
  - Sinais analógicos: Amplitude pode assumir qualquer valor real ou complexo em um dado intervalo de amplitude,
    - O sinal ao lado analógico e contínuo no tempo.
  - Sinais digitais: Amplitude pode assumir qualquer valor real ou complexo em conjunto discreto de valores,
    - O sinal ao lado é digital e discreto no tempo.



# Sinais e Sistemas (vi)

- **Tipos de Sistemas**
  - Exemplos de sistemas contínuos no tempo com um sinal de entrada função de $x(t)$ e um sinal de saída $y(t)$:
    - $y(t) = x(t) + x(t\text{-}1)$.
    - $y(t) = x^2(t)$.


  - Exemplos de sistemas discretos no tempo com um sinal de entrada função de $x(n)$ e um sinal de saída $y(n)$:
    - $y[n] = x[n] + x[n\text{-}1]$
    - $y[n] = x^2[n]$

# Tamanho de Sinais (i)

– O tamanho de um sinal deve levar em conta sua amplitude que varia ao longo do tempo, e a duração deste sinal.

- **Energia de um Sinal**

  – Seja um sinal $x(t)$ que pode assumir valores reais positivos e negativos. Define-se energia deste sinal como a integral ao longo do tempo do valor de $x(t)$ elevado ao quadrado. Logo, elimina-se o cancelamento mútuo de partes das integrais com sinais opostos que pode avaliar erradamente o tamanho do sinal. O sinal energia pode ser definido como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt, \quad \text{para valores reais.}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt, \quad \text{para valores complexos.}$$

$$E_x \text{ é finito se e só se } x(t) \rightarrow 0 \text{ se } |t| \rightarrow \infty.$$

# Tamanho de Sinais (ii)

- **Potência de um Sinal**
  - Se a amplitude de $x(t)$ não convergir para zero com o passar do tempo, emprega-se uma medida da energia no tempo, a potência de um sinal.

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt, \quad \text{para um sinal real.}$$

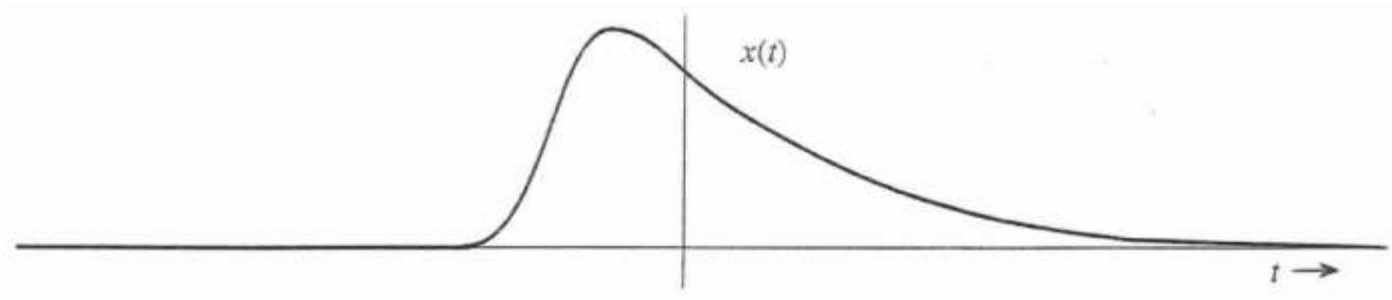
$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt, \quad \text{para um sinal complexo.}$$

$$\mathrm{RMS}_{\mathrm{x}} = \sqrt{P_x}$$

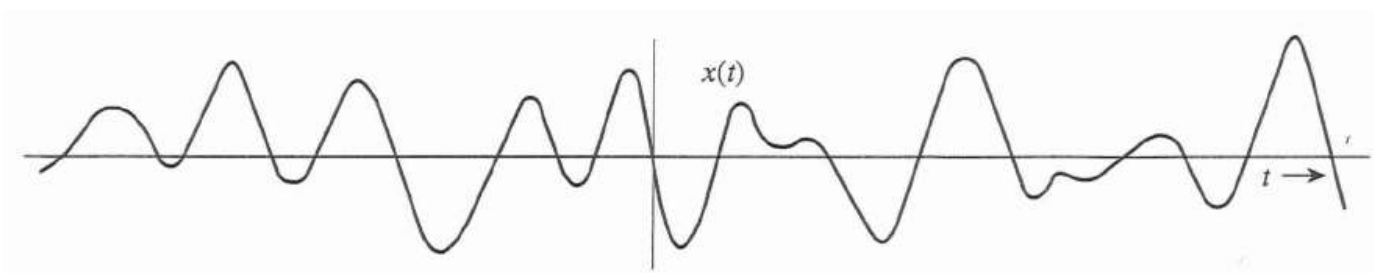
  - Em geral, a media de uma grandeza calculada para um longo intervalo de tempo, aproximando-se do infinito, existe se a grandeza é periódica ou tem regularidade estatística. Caso esta condição não seja verdadeira, a média pode não existir como no caso da função rampa.

# Tamanho de Sinais (iii)

- **Exemplos de Sinais que têm Energia e Potência Finitos**
  - Sinal com energia finita e potência zero




  - Sinal com potência finita e energia infinita;



# Tamanho de Sinais (iv)

- **Exemplo: Cálculo de tamanho de um sinal**

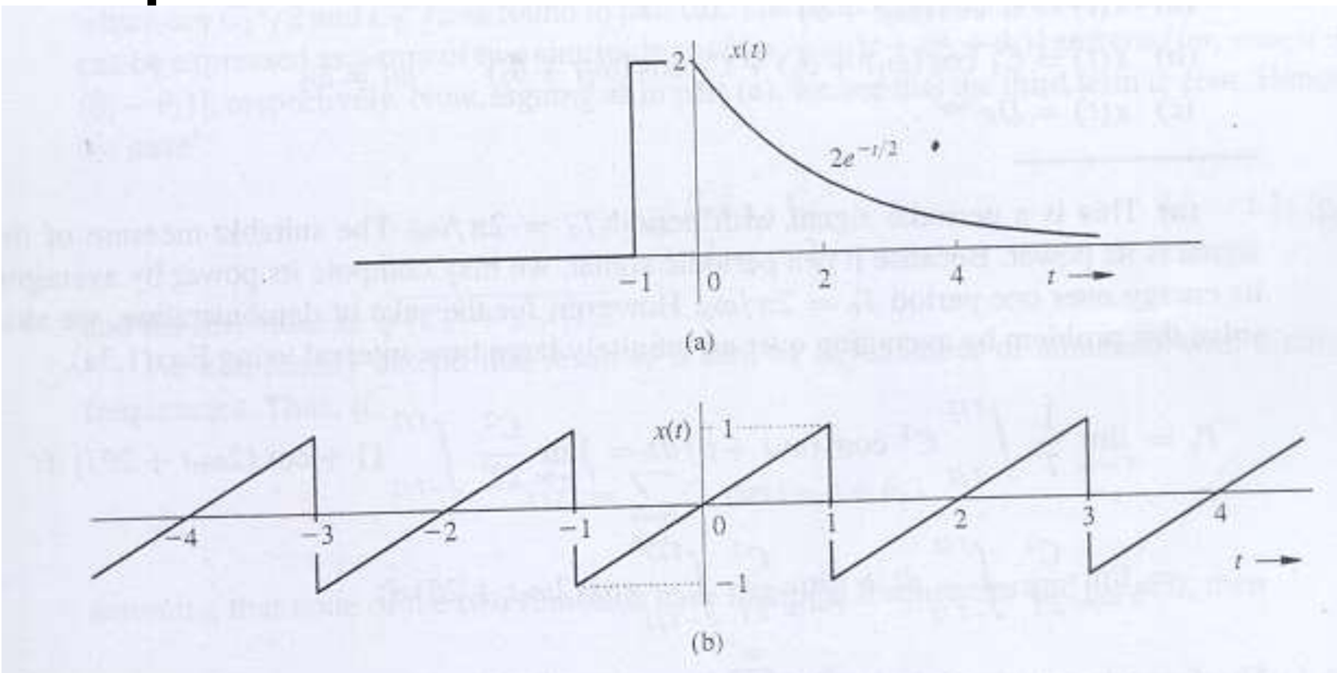


Figure 1.2

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0^2\,dt + \int_{-1}^{0} 2^2\,dt + \int_{0}^{\infty}\left(2e^{\frac{-t}{2}}\right)^2 dt = 0+4+4=8$$

$$P_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3},$$

# Tamanho de Sinais (v)

- **Exemplo: Determine a valor da potência e o valor rms:**

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)$$

Como este é um sinal periódico ($T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$), calcula-se a potência do sinal tomando a energia média ao longo de um período:

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C^2\cos^2(\omega_0 t + \theta)dt \therefore$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}[1+\cos(2\omega_0 t + 2\theta)]dt = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}1dt +$$

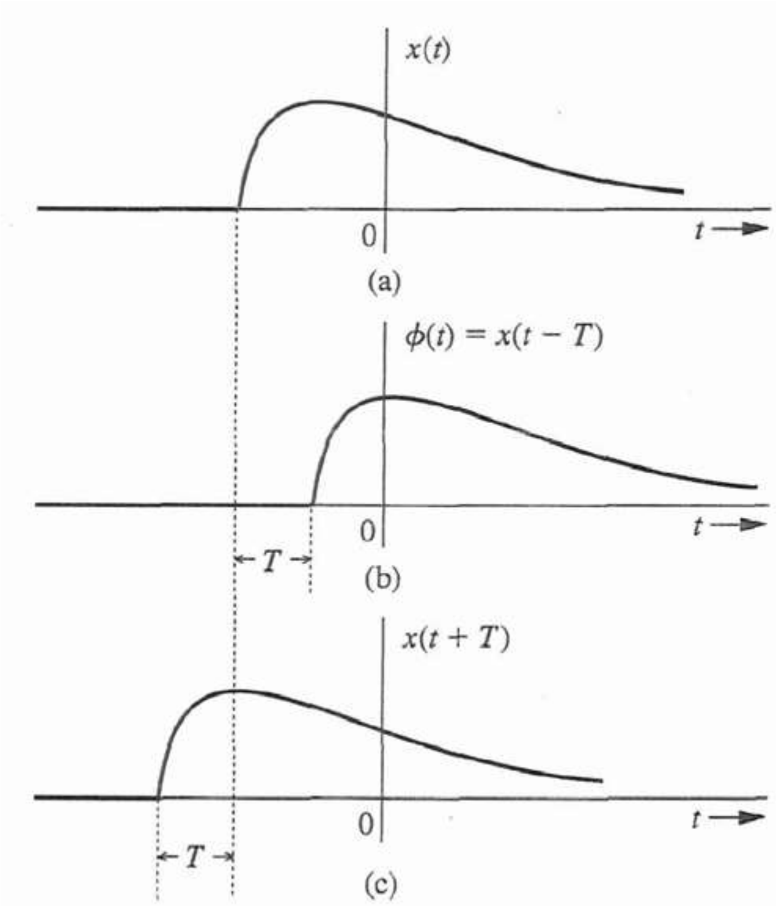
$$+\lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_0 t + 2\theta)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{C^2}{2T}t\Big|_{-T/2}^{T/2} + 0 \therefore$$

$$P_x = \frac{C^2}{2} \Rightarrow \mathrm{RMS_x} = \frac{\sqrt{2}C}{2}.$$

Lembre-se que $\cos^2\phi = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi)$

# Operações com Sinais (i)

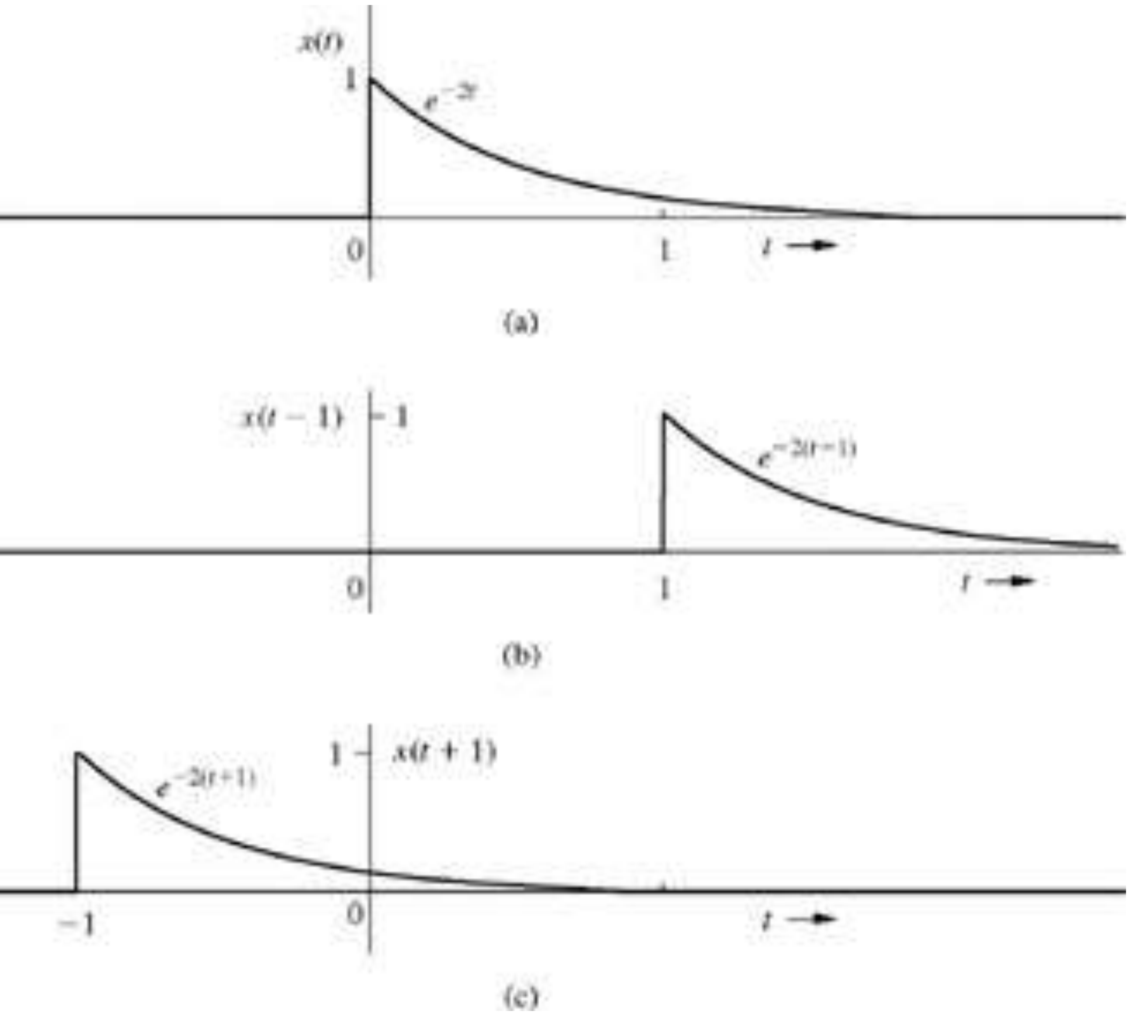
- **Deslocamento no Tempo (“Time Shifting”)**
  - Seja um sinal $x(t)$ e este mesmo sinal defasado de $T$ segundos:




  - Seja original;
  - Sinal em atraso;
  - Sinal em avanço;

# Operações com Sinais (ii)

- **Exemplo: Deslocamento no tempo**



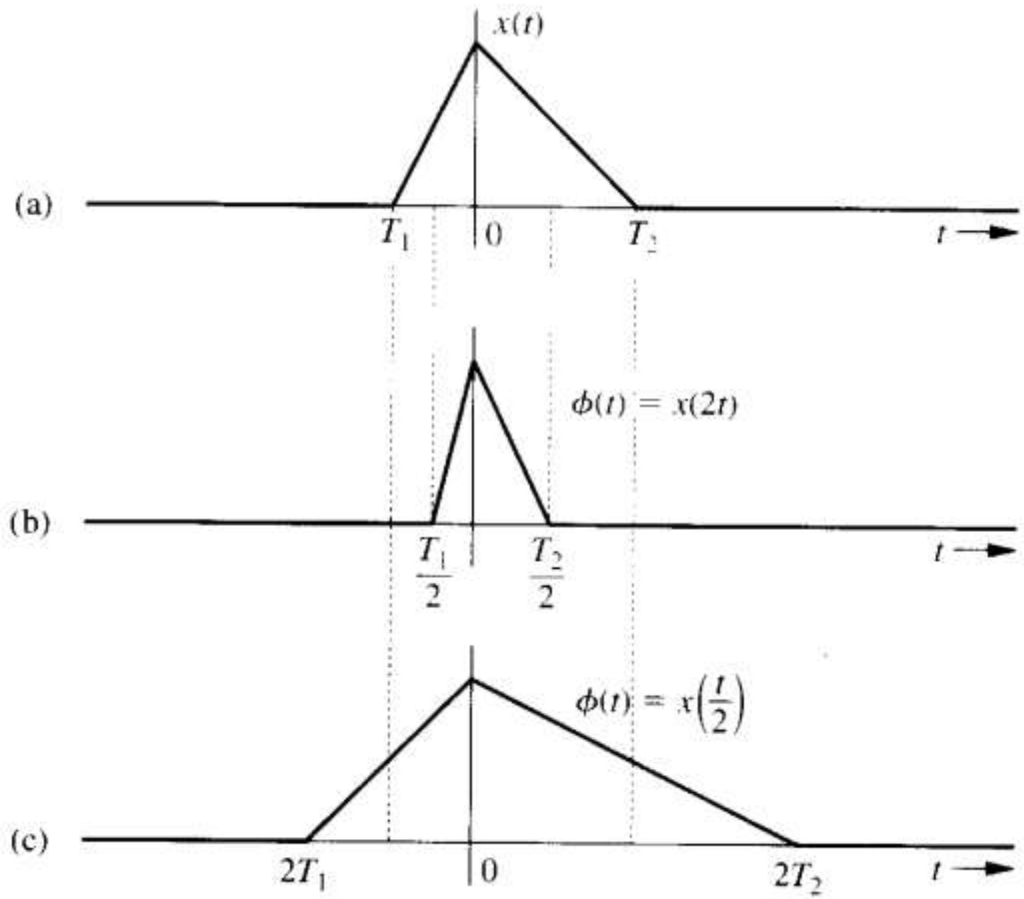

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$x_d(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t-1 \geq 0 \\ 0 & t-1 < 0 \end{cases}$$

$$x_a(t) = x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t+1 \geq 0 \\ 0 & t+1 < 0 \end{cases}$$

# Operações com Sinais (iii)

- **Escalonamento no Tempo ("Time Scaling")**
  - Compressão ou expansão de um sinal $x(t)$ no tempo:




$$x(t)$$

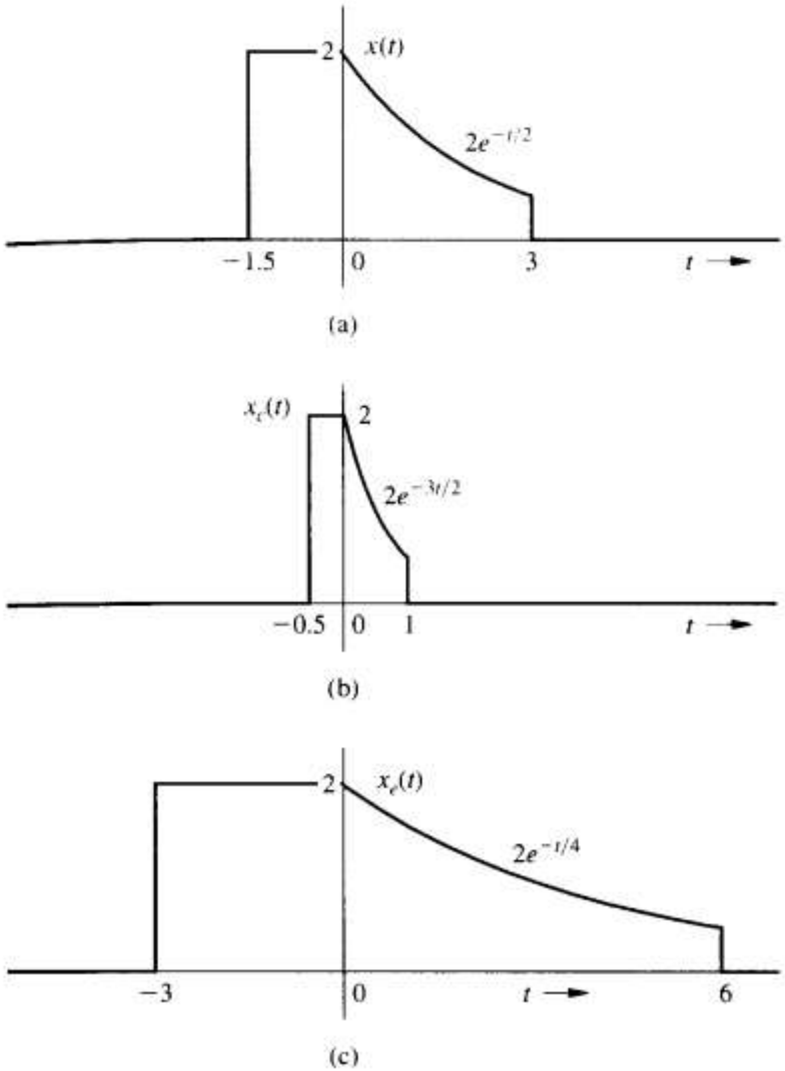
$$\phi(t) = x(at) = x(2t)$$

$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) = x\left(\frac{t}{2}\right)$$

**Figure 1.6** Time scaling a signal.

# Operações com Sinais (iv)

- **Exemplo: Escalonamento no Tempo**




$$x(t) = \begin{cases} 2 & -1{,}5 \le t < 0 \\ 2e^{-t/2} & 0 \le t < 3 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

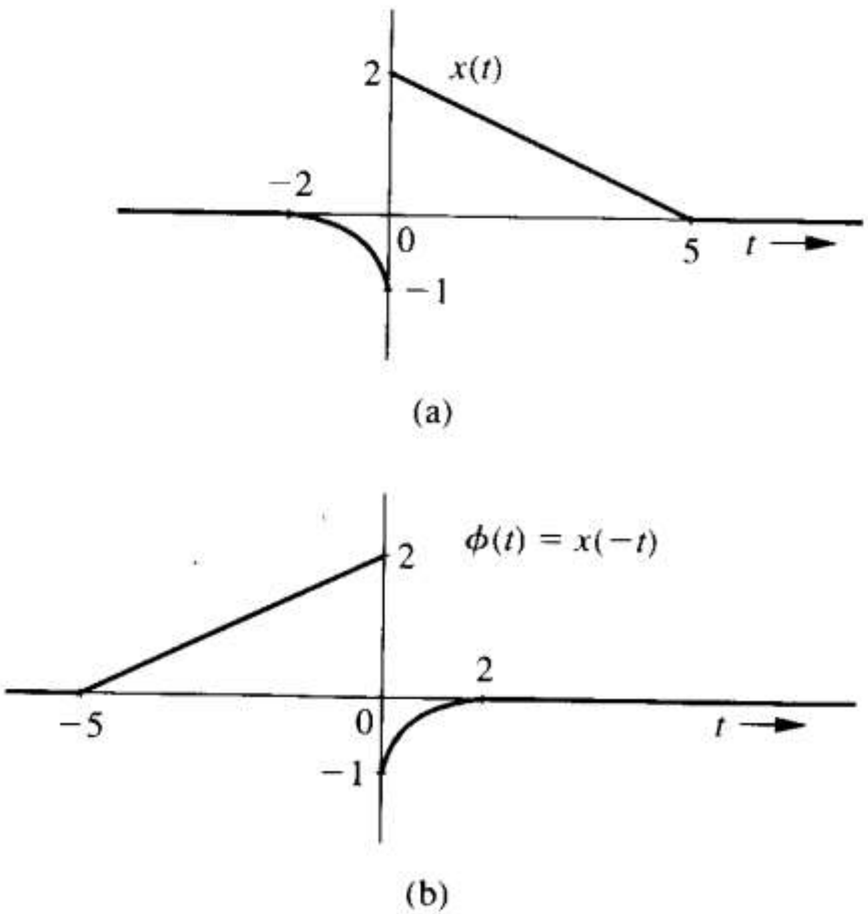
$$x_c(t) = x(3t) = \begin{cases} 2 & -1{,}5 \le 3t < 0 \ \text{ ou } -0{,}5 \le t < 0 \\ 2e^{-3t/2} & 0 \le 3t < 3 \ \text{ ou } \ 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

$$x_a(t) = x(t/2) = \begin{cases} 2 & -1{,}5 \le t/2 < 0 \ \text{ ou } \ -3 \le t < 0 \\ 2e^{-t/4} & 0 \le t/2 < 3 \ \text{ ou } \ 0 \le t < 6 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

**Figure 1.7**

# Operações com Sinais (v)

- **Reversão no Tempo ("Time Reversal")**
  - O sinal $x(t)$ é rotacionado em 180° em torno do eixo vertical:




$$x(t)$$

$$\phi(t) = x(-t)$$

**Figure 1.8**

# Operações com Sinais (vi)

- **Exemplo: Reversão no Tempo**

$$x(t) = \begin{cases} e^{t/2} & -5 < t \leq -1 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

$$x(-t) = \begin{cases} e^{-t/2} & -5 < -t \leq -1 \text{ ou } 1 \leq t < 5 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

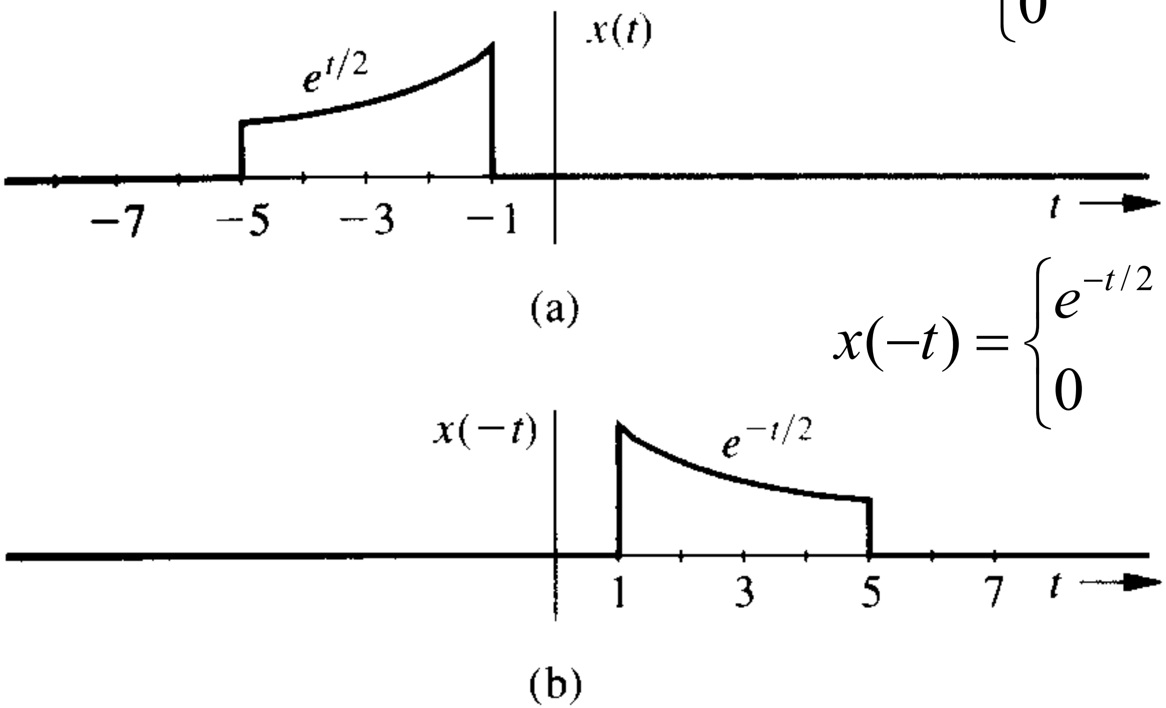



**Figure 1.9**

# Operações com Sinais (vii)

- **Operações Combinadas**
  - Pode-se fazer uso de mais de uma das operações mostradas. A alternativa mais geral é realizar as operações, $x(at\text{-}b)$, de acordo com duas possíveis seqüências:
    - Deslocar $x(t)$ no tempo para obter $x(t\text{-}b)$. Em seguida, escalone no tempo o sinal deslocado para obter $x(at\text{-}b)$.
    - Escalone no tempo $x(t)$ para obter $x(at)$. Deslocar $x(at)$ no tempo por $b/a$ para obter $x(at\text{-}b)$. Em ambos os casos, se a for negativo, o escalonamento no tempo envolve inversão no tempo.

# Classificação de Sinais (i)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo;**
- **Sinais Analógicos e Digitais;**
- **Sinais Periódicos e Aperiódicos;**
- **Sinais de Energia e Potência;**
- **Sinais Determinísticos e Probabilísticos.**

# Classificação de Sinais (ii)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo**
  - Sinais Contínuos no Tempo: são especificados continuamente no tempo;
  - Sinais Discretos no Tempo: são especificados apenas em valores discretos de tempo.
- **Sinais Analógicos e Digitais**
  - Sinais Analógicos: Amplitude pode assumir qualquer valor em um intervalo determinado;
  - Sinais Digitais: Amplitude pode assumir apenas valores em um conjunto de possibilidades.

# Classificação de Sinais (iii)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo**

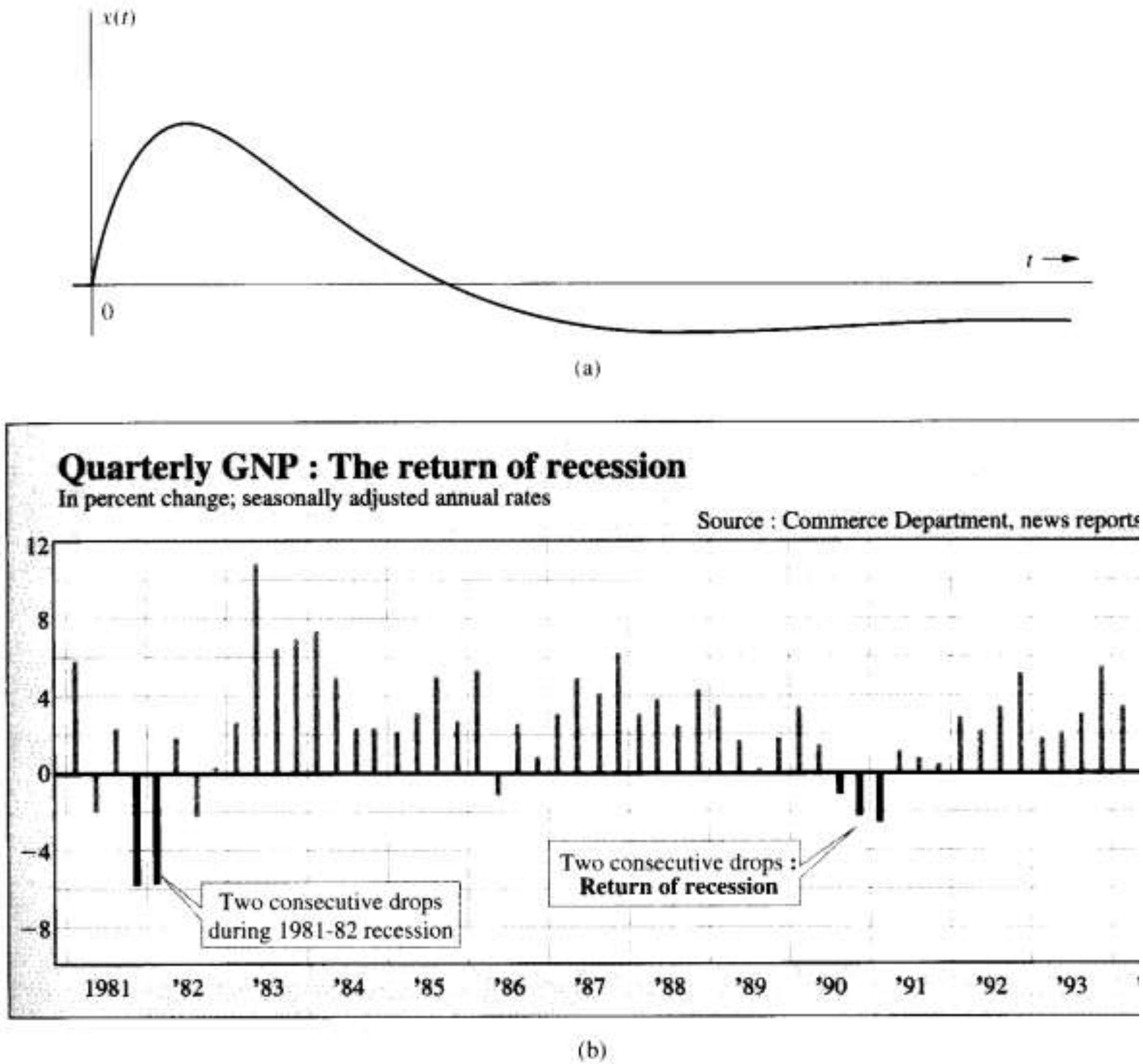



**Figure 1.10** **(a)** Continuous-time and **(b)** discrete-time signals.

# Classificação de Sinais (iv)

- **Sinais Analógicos e Digitais**

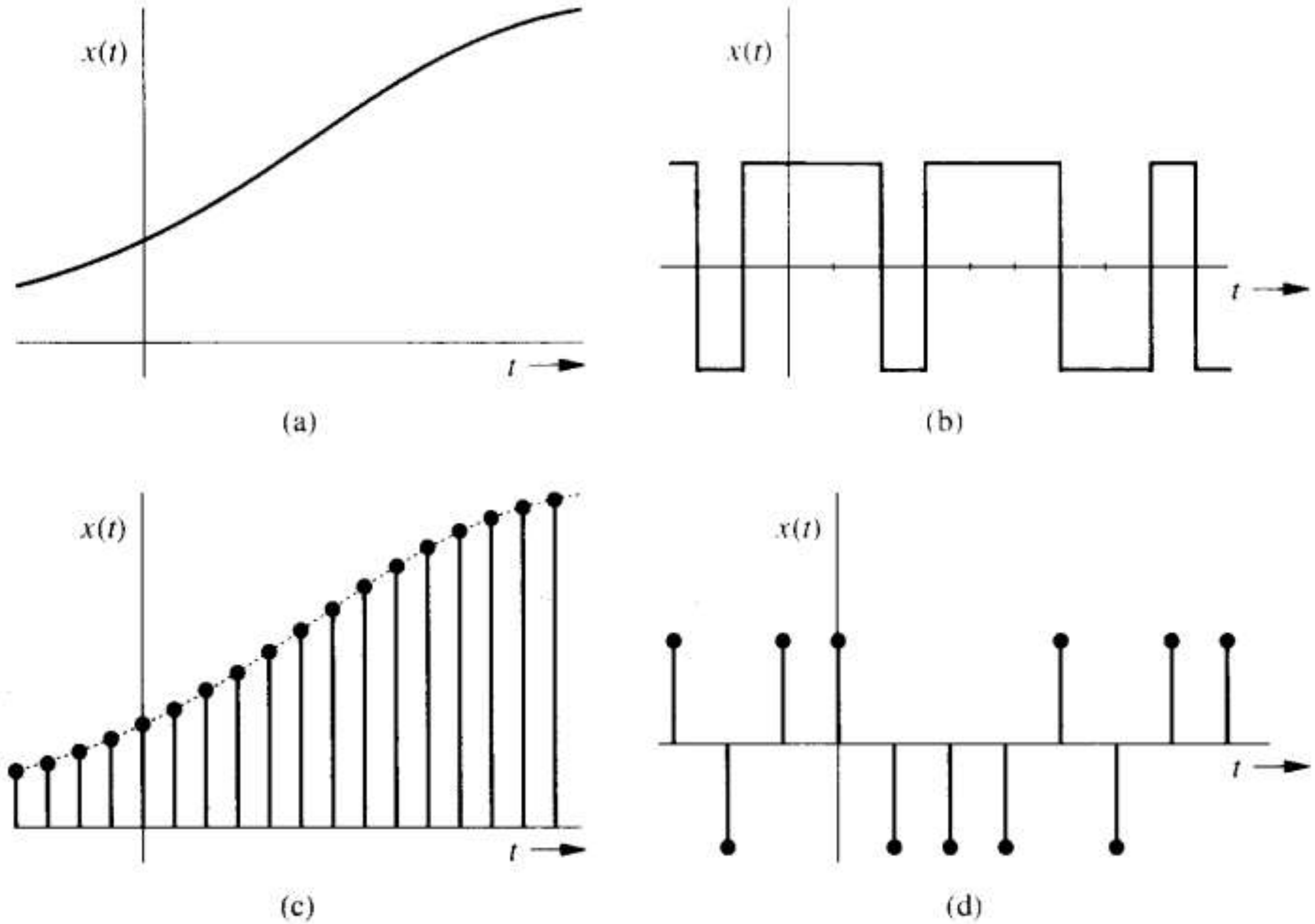
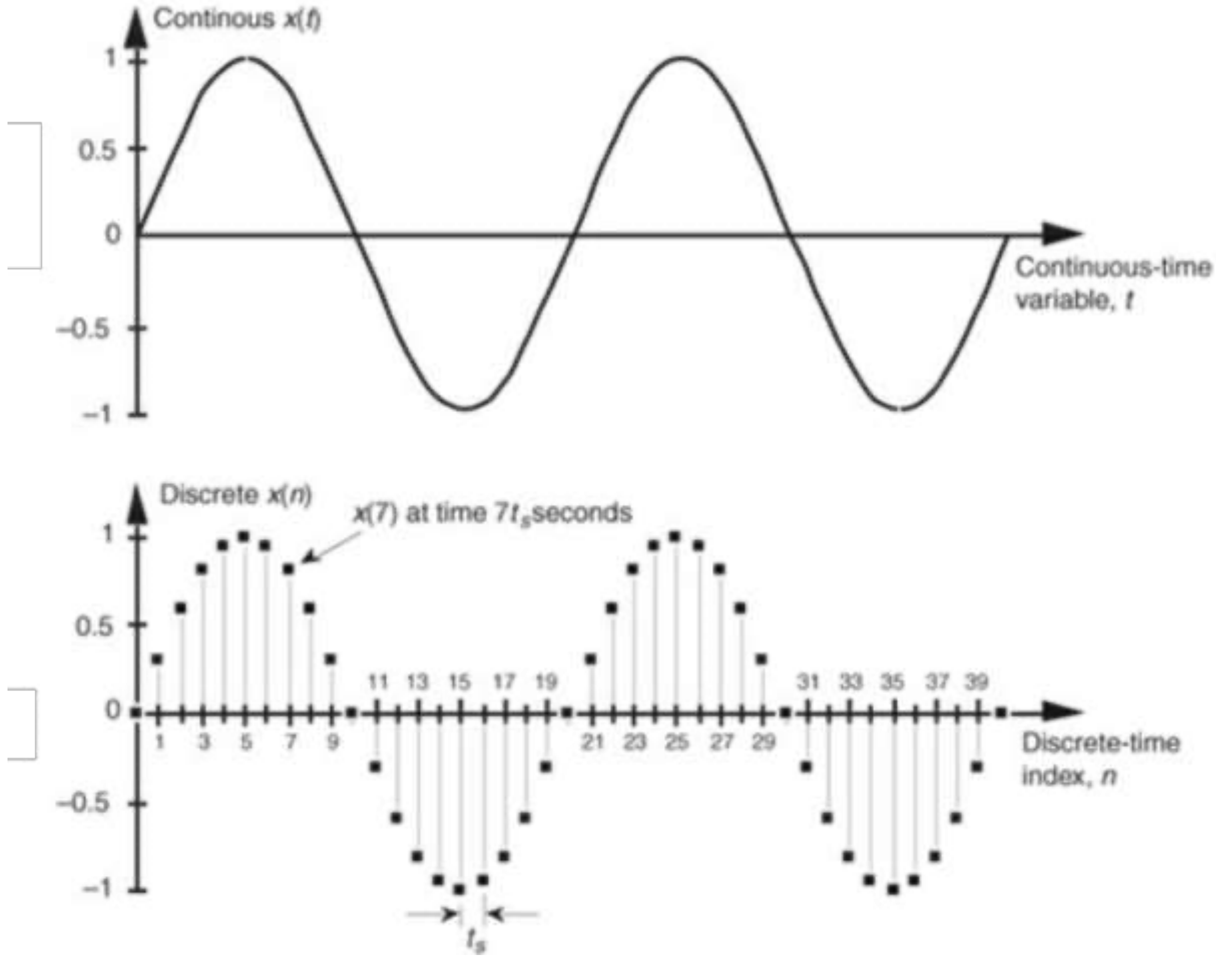



**Figure 1.11** Examples of signals: **(a)** analog, continuous time, **(b)** digital, continuous time, **(c)** analog, discrete time, and **(d)** digital, discrete time.

# Classificação de Sinais (iii)

- **Sinais Contínuos e Discretos no Tempo**
  - Discretização de um sinal contínuo:



# Classificação de Sinais (v)

- **Sinais Periódicos e Aperiódicos**
  - Sinal Periódico: Um sinal $x(t)$ é periódico se para alguma constante inteira positiva o valor do sinal se repete:

    $$x(t) = x(t + T_0), \qquad \forall t$$

    - O menor valor que satisfaz a condição de periodicidade é chamado de período fundamental de $x(t)$.
    - Um valor particular de $x(t)$ pode ser gerado por extensão periódica de qualquer segmento de $x(t)$.
    - A área sob o sinal $x(t)$ para um intervalo de tempo igual a um período é a mesma.
    - O sinal $x(t)$ que não é permanente, é causal se $x(t)=0,\ t<0$.
  - Sinal Aperiódico: É todo o sinal que não é periódico.

# Classificação de Sinais (vi)

- **Sinais Periódicos e Aperiódicos**

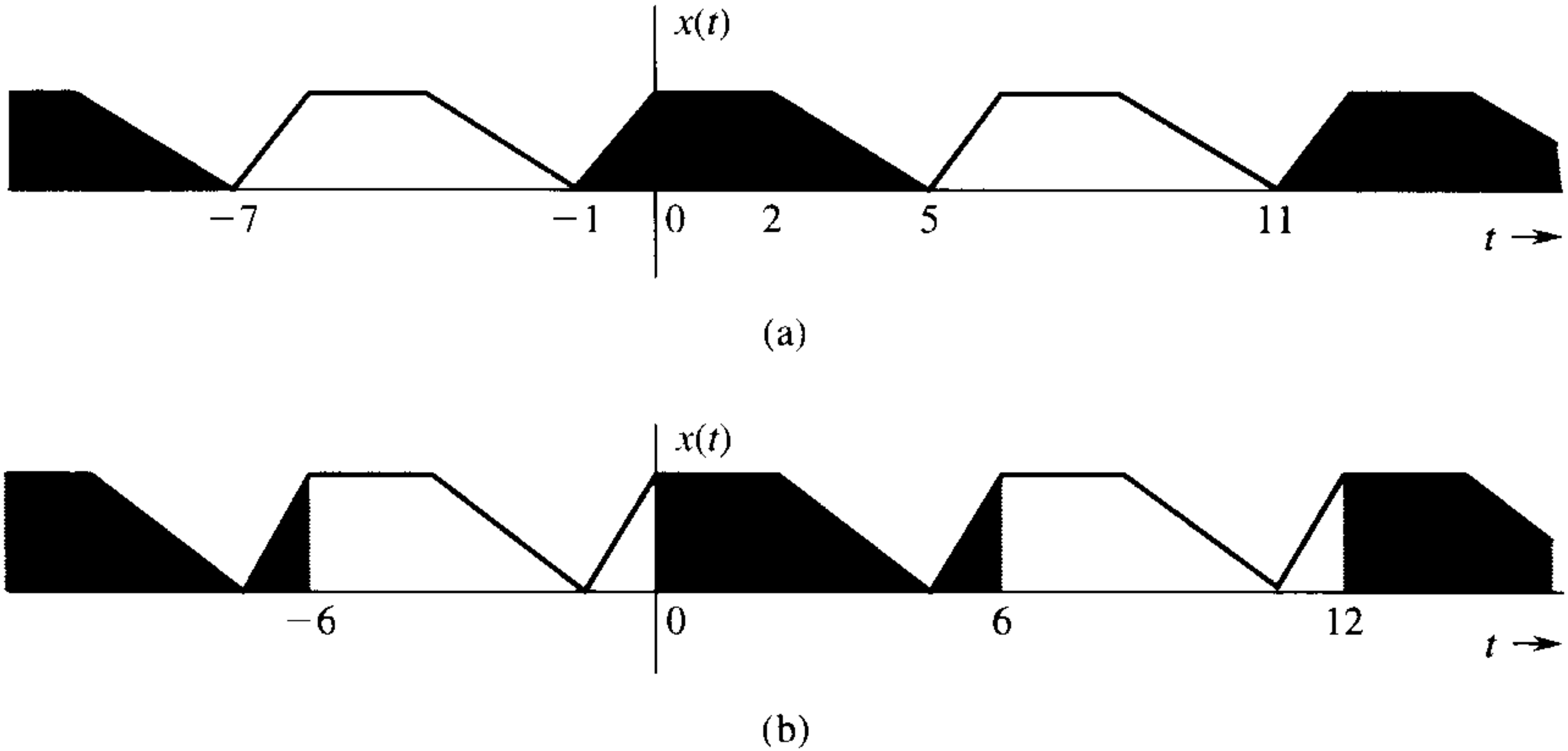
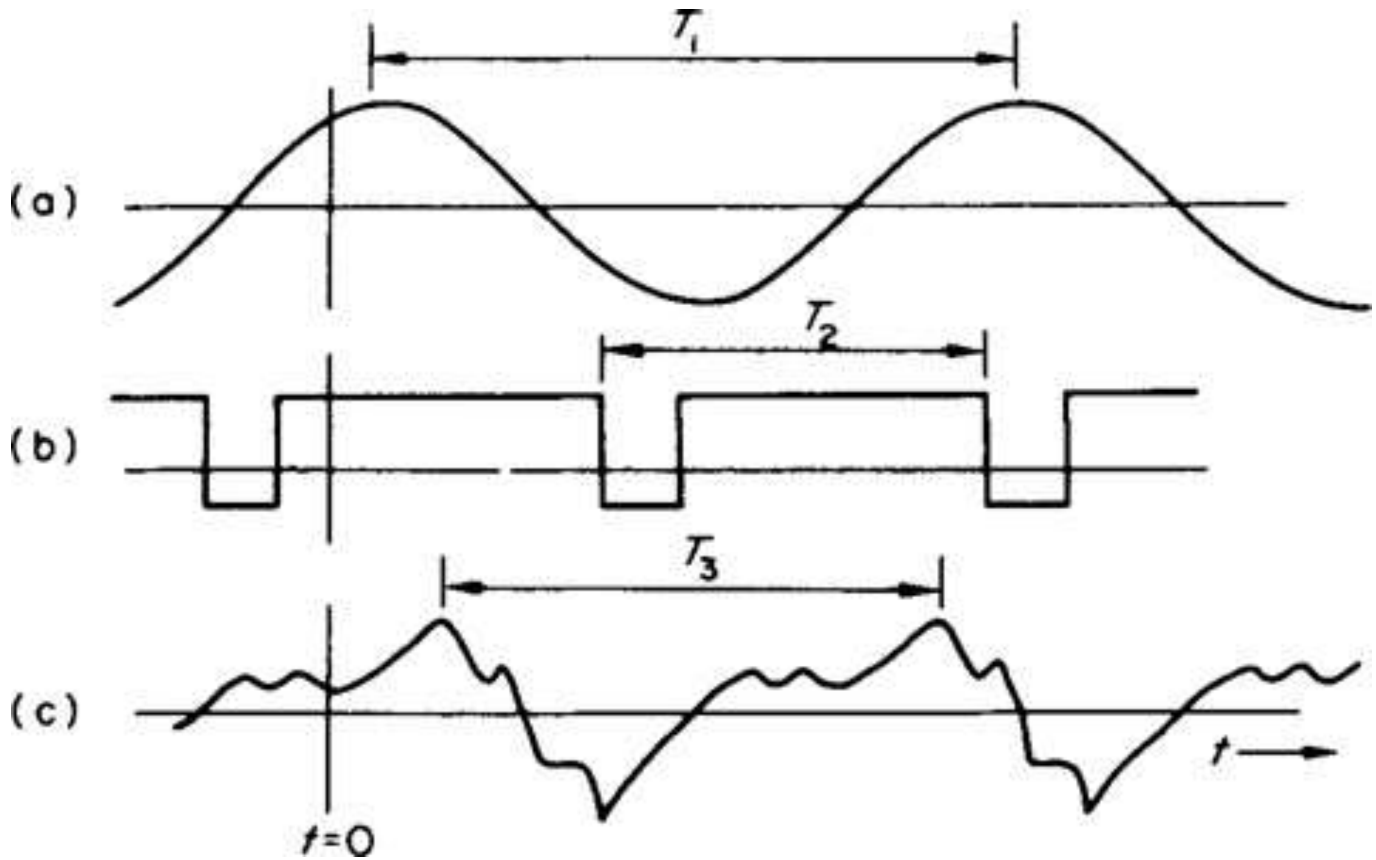



**Figure 1.13** Generation of a periodic signal by periodic extension of its segment of one-period duration.

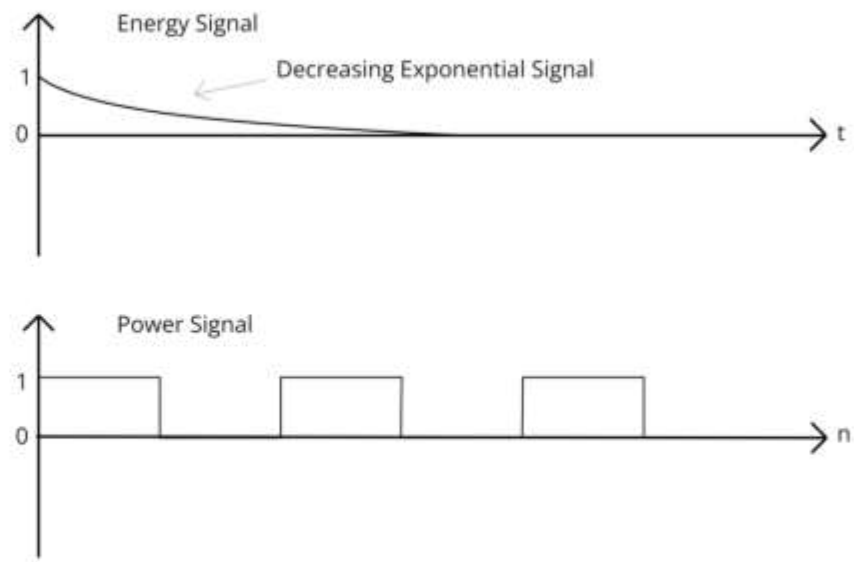
# Classificação de Sinais (vi)

- **Sinais Periódicos e Aperiódicos**
  - Diferentes sinais periódicos



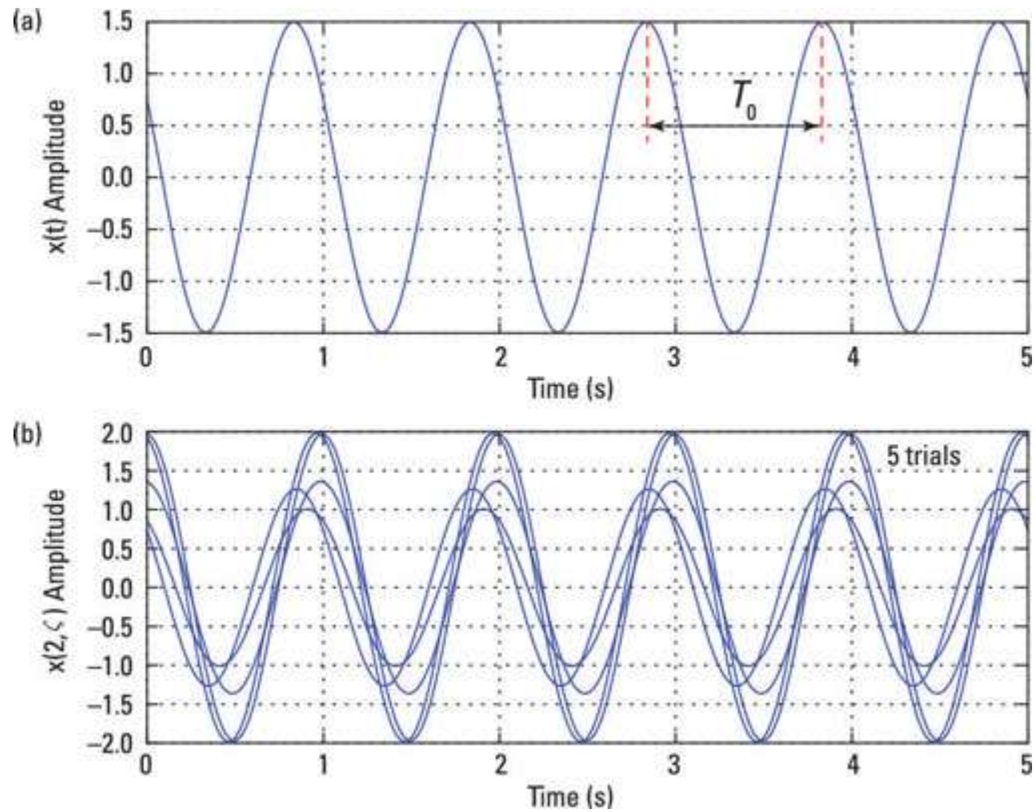
# Classificação de Sinais (vii)

- **Sinais de Energia e Potência**
  - Um sinal com energia finita é um sinal de energia (Figura 1.2(a)). Um sinal com energia finita tem potência zero. Todos sinais do mundo real têm energia finitas e são sinais de energia;
  - Um sinal com potência diferente de zero e finita é um sinal de potência (Figura 1.2(b)). Um sinal com potência finita tem energia infinita. Um sinal de potência verdadeiro é impossível de ser gerado na prática pois tem energia e duração infinitas;



# Classificação de Sinais (vii)

- **Sinais Determinísticos e Probabilísticos**
  - Sinal Determinístico: Aquele que conhece-se completamente sua descrição física (forma gráfica ou matemática);
  - Sinal Probabilístico: Aquele que não se pode prever precisamente. Possui descrição probabilística tal como valor médio;



# Alguns Sinais Úteis (i)

- **Motivação:**
  - Alguns sinais particulares, expressos por funções, têm importante papel na área de sinais e sistemas. Tipicamente, eles são utilizados como padrões de testes e são empregados para representar outros sinais.
- **Funções que serão tratadas:**
  - Função Degrau Unitário;
  - Função Impulso Unitário;
  - Função Exponencial.

# Alguns Sinais Úteis (ii)

- **Função Degrau Unitário**
  - Na maioria dos casos de estudo, lida-se com sinais causais (só existem a partir de *t=0*). Estes sinais podem ser descritos em termos da função degrau unitária que é definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Utilizar um sinal a partir de $t = 0$: Multiplica-se o sinal

por $u(t)$. Por exemplo, forma causal da exponencial é $e^{-at}u(t)$.

  - A função degrau unitário é útil para definir em uma única expressão (válida para todo *t*) uma função com diferentes descrições matemáticas em intervalos de tempo distintos. Por exemplo, a função pulso retangular de 2 a 4: $x(t)=u(t-2)-u(t-4)$.

# Alguns Sinais Úteis (iii)

- **Função Degrau Unitário**

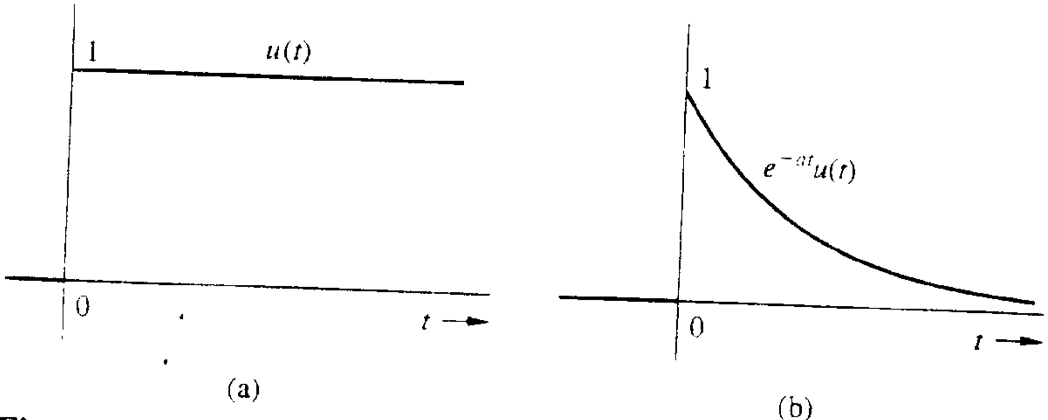



**Figure 1.14** **(a)** Unit step function $u(t)$. **(b)** Exponential $e^{-at}u(t)$.

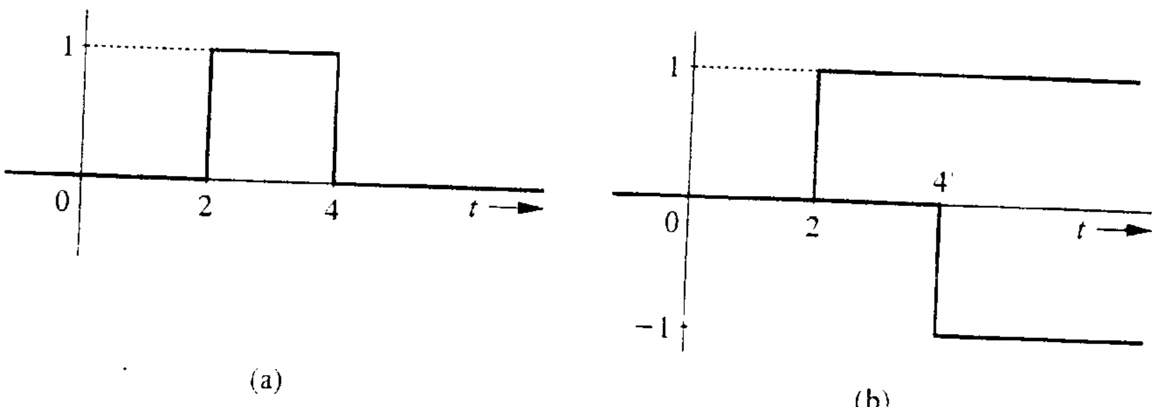



**Figure 1.15** Representation of a rectangular pulse by step functions.

# Alguns Sinais Úteis (iv)

- **Exemplo:** Descreva o sinal da Figura 1.16a

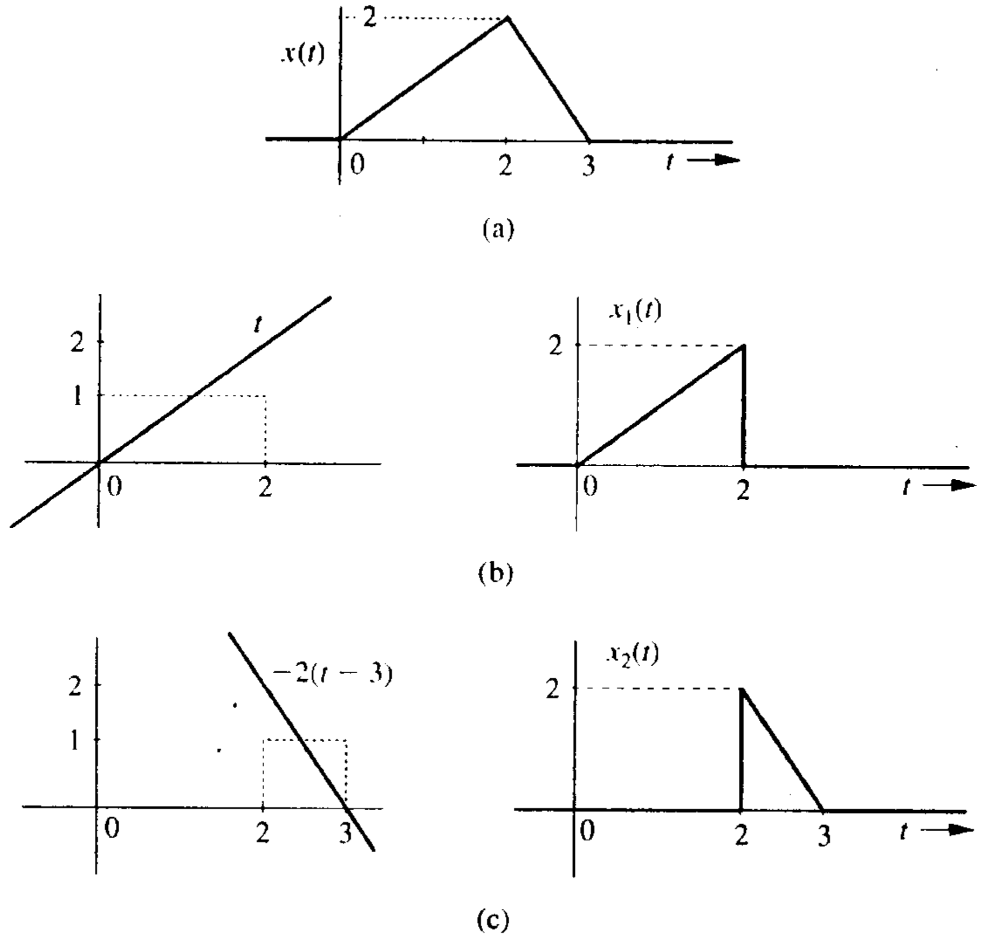



**Figure 1.16** Representation of a signal defined interval by interval.

# Alguns Sinais Úteis (v)

- **Exemplo:** Descrição dos sinais mostrados
  - O sinal em foco pode ser dividido em dois componentes que utilizam a função rampa.

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= t\left[u(t)\text{-}u(t\text{-}2)\right] \\
x_2(t) &= -2(t-3)\left[u(t\text{-}2)-u(t-3)\right] \\
x(t) &= x_1(t)+x_2(t) \\
&= tu(t)-tu(t\text{-}2)-2tu(t\text{-}2)+2tu(t-3)+6\left[u(t\text{-}2)-u(t-3)\right] \\
&= tu(t)-3\left[t-2\right]u(t\text{-}2)+2\left[t-3\right]u(t\text{-}3)
\end{aligned}
$$

# Alguns Sinais Úteis (vi)

- **Função Impulso Unitário**
  - Esta função foi inicialmente definida por P. Dirac como:

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

O impulso pode ser definido como um pulso retangular com largura $\varepsilon$ e altura $1/\varepsilon$, no qual $\varepsilon \to 0 \Rightarrow 1/\varepsilon \to \infty$.

O impulso é representado por uma seta.

Outros pulsos tais como exponencial, triangular ou Gaussiana, podem ser usados para gerar a função impulso unitária por aproximação.

# Alguns Sinais Úteis (vii)

- **Função Impulso Unitário**

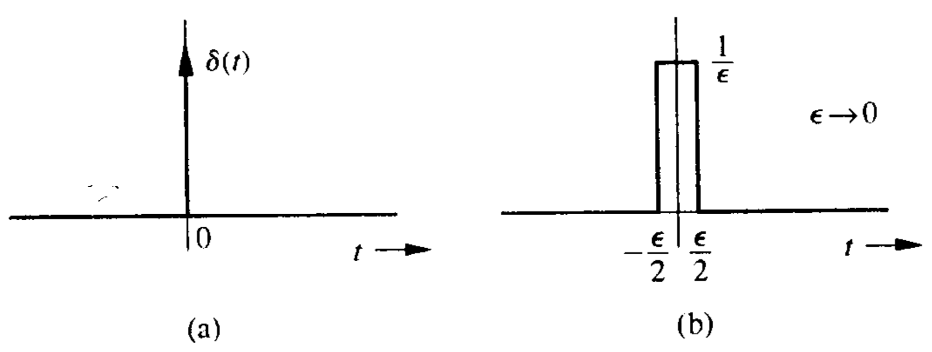



**Figure 1.19** A unit impulse and its approximation.

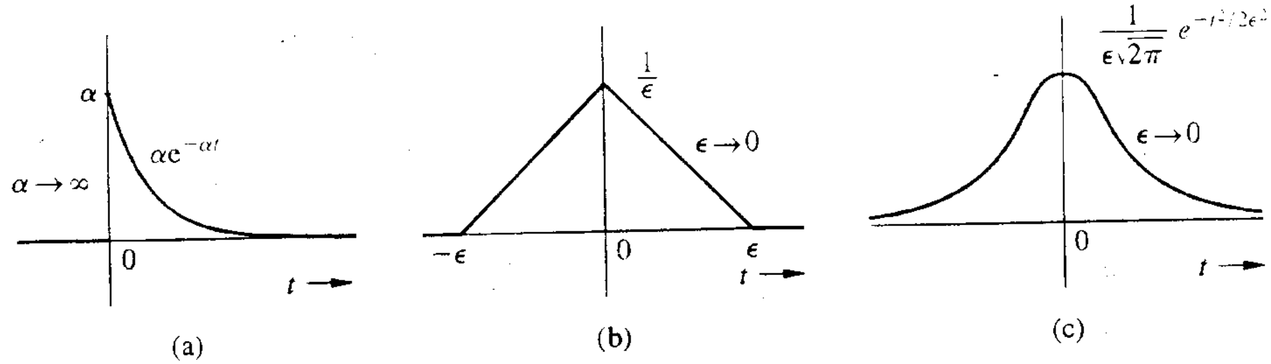



**Figure 1.20** Other possible approximations to a unit impulse.

# Alguns Sinais Úteis (viii)

- **Função Impulso Unitário:**
  - Produto de um Impulso Unitário por uma outra função contínua em *t=0*. Logo tem-se que

    $\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$, este produto resulta em um impulso localizado em $t = 0$, com valor igual àquele da função no instante do impulso $(\phi(0))$. Analogamente, generaliza-se:

    $$\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$$

  - Propriedade de amostragem de $\delta(t)$: A área sob o produto de uma função com $\delta(t)$ é igual ao valor da função no instante de ocorrência do impulso.

    $$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t-T)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(T)\delta(t-T)dt = \phi(T)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-T)dt = \phi(T)$$

# Alguns Sinais Úteis (ix)

- **Função Impulso Unitário:**
  - Impulso Unitário como uma Função Generalizada: A definição de Dirac não é matematicamente rigorosa pois:
    - A função impulso não define uma única função. Por exemplo, $\delta(t) + d\delta(t)/dt$ satisfaz a definição.
    - $\delta(t)$ não é uma função pois não é definida para $t=0$.
    - Assim, ao invés de definir $\delta(t)$ como uma função ordinária (definida por seu valor em qualquer instante de tempo), define-se como uma função generalizada (definida como seus efeitos sobre outras funções).
  - A função impulso é definida pela propriedade de amostragem:
    - Note que a propriedade de amostragem é conseqüência da definição clássica de $\delta(t)$.

# Alguns Sinais Úteis (x)

- **Função Impulso Unitário:**
  - Impulso Unitário como uma Função Generalizada:
    - A derivada de $u(t)$ não existe, no sentido ordinário, em $t=0$, contudo ela existe no sentido generalizado e é igual a $\delta(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} {du}/{dt}\, \phi(t)dt = u(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\dot{\phi}(t)dt =$$

$$\phi(\infty) - 0 - \int_{0}^{\infty} \dot{\phi}(t)dt = \phi(\infty) - \phi(t)\Big|_{0}^{\infty} = \phi(0)$$

Assim ${du}/{dt}$ satisfaz a propriedade de amostragem de $\delta(t)$, logo

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$

# Alguns Sinais Úteis (xi)

- **Função Exponencial:** Seja $s$ um número complexo: $s=\sigma+j\omega$:

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}e^{j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t + j\,\mathrm{sen}\;\omega t)$$

Para o conjugado de $s^*$ $(s^* = \sigma - j\omega)$, tem-se:

$$e^{s^*t} = e^{(\sigma-j\omega)t} = e^{\sigma t}e^{-j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t - j\,\mathrm{sen}\;\omega t)$$

e tem-se que $\quad e^{\sigma t}\cos\omega t = 1/2\left(e^{st} + e^{s^*t}\right)$

Fómula de Euler $(e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\;\theta) \Rightarrow e^{st}$ generaliza $e^{j\omega t}$.

para $s$: freqüência complexa. Casos especiais envolvendo $e^{st}$:

Constante $k = ke^{st}, \quad s = 0;$

Função exponencial monotônica $e^{\sigma t} \quad (\omega = 0, s = \sigma);$

Senoidal $\cos\omega t \quad (\sigma = 0, s = \pm j\omega);$

Exponencial variando senoidalmente $e^{\sigma t}\cos\omega t \quad (s = \sigma \pm j\omega).$

# Alguns Sinais Úteis (xii)

- **Função Exponencial:** Ilustrações dos casos especiais.

  Exponencial variando senoidalmente $e^{\sigma t}\cos\omega t \quad (s=\sigma\pm j\omega)$.

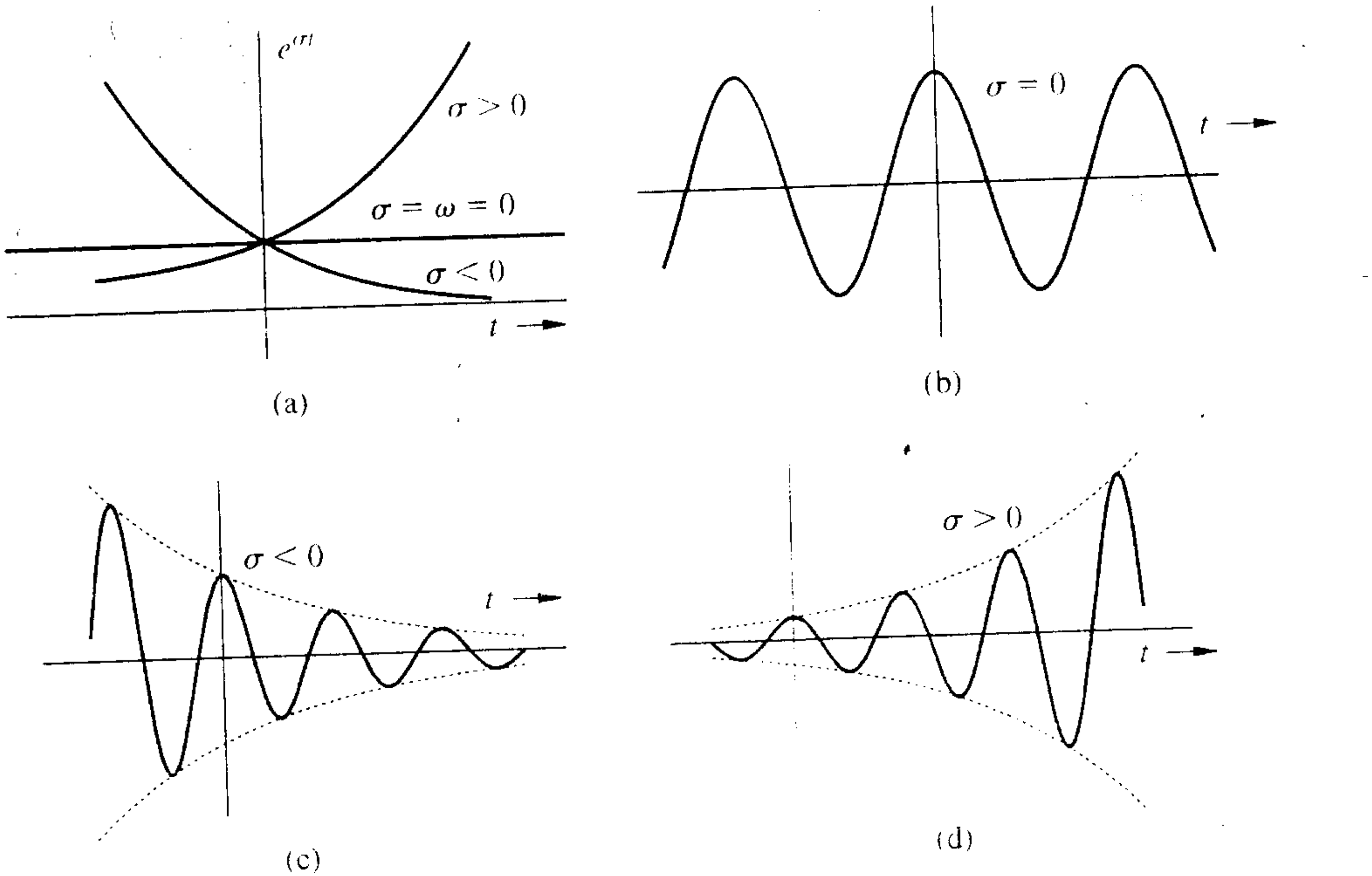



**Figure 1.21** Sinusoids of complex frequency $\sigma + j\omega$.

# Funções Pares e Ímpares (i)

- **Definições:**

Uma função par é definida como $x_e(t) = x_e(-t)$

Uma função impar é definida como $x_o(t) = -x_o(-t)$

  – Uma função par é simétrica com respeito ao eixo vertical enquanto que uma função ímpar é assimétrica.

- **Conteúdo:**
  – Propriedades de Funções Pares e Ímpares;
  – Componentes Pares e Ímpares de um sinal.

# Funções Pares e Ímpares (ii)

- **Propriedades**
  - Multiplicando função par por uma ímpar tem-se função ímpar.
  - Multiplicando duas funções ímpares tem-se função par.
  - Multiplicando duas funções pares tem-se função par.
  - Área

$$\text{Para a função par: } \int_{-a}^{a} x_e(t)dt = 2\int_{0}^{a} x_e(t)dt$$

$$\text{Para a função ímpar: } \int_{-a}^{a} x_o(t)dt = 0$$

- Estes resultados são válidos sob a hipótese que não há impulso ou suas derivadas na origem.

# Funções Pares e Ímpares (iii)

- **Componentes**
  - Qualquer sinal $x(t)$ pode ser expresso como um somatório de funções pares e ímpares porque:

$$x(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) - \frac{1}{2}x(-t) \therefore$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] + \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right] = x_e(t) + x_o(t)$$

Expressão verdadeira se o $1^0$ componente for par e o $2^0$ for ímpar.

Por exemplo, seja $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right]$$

# Funções Pares e Ímpares (iv)

- **Exemplo:**

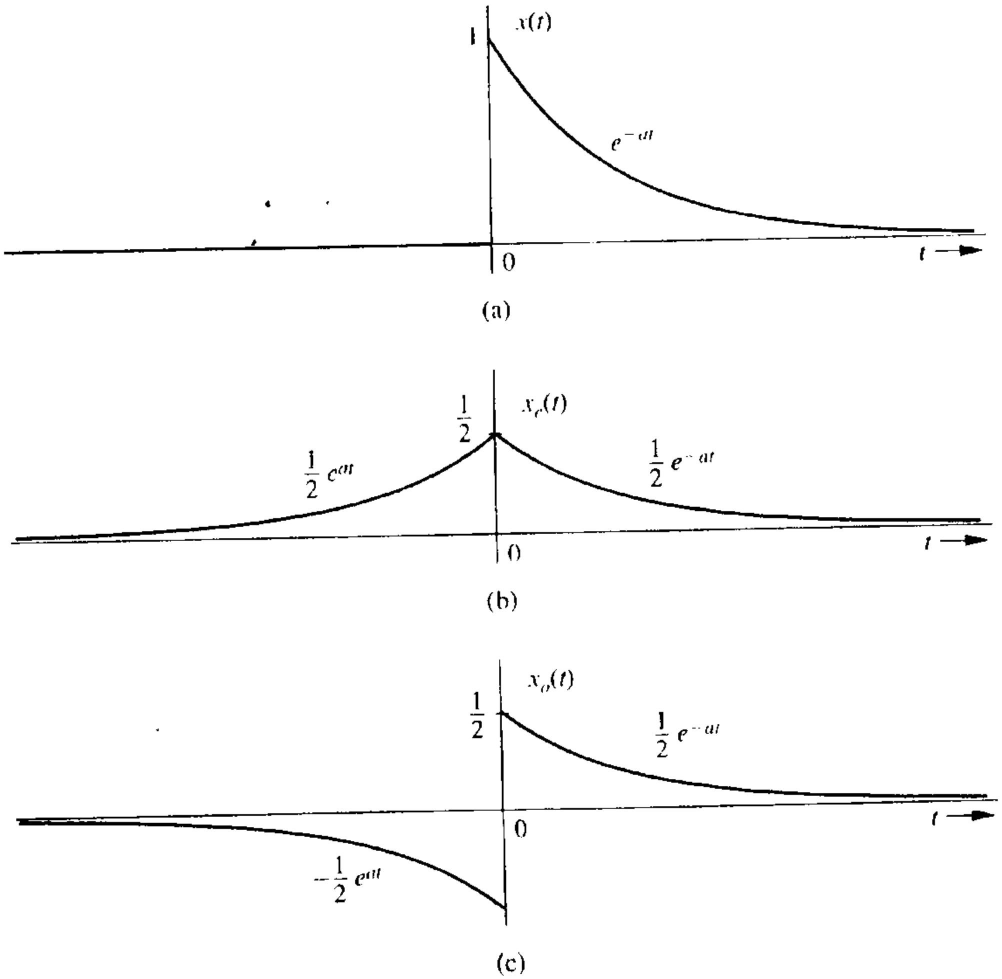



**Figure 1.24** Finding even and odd components of a signal.

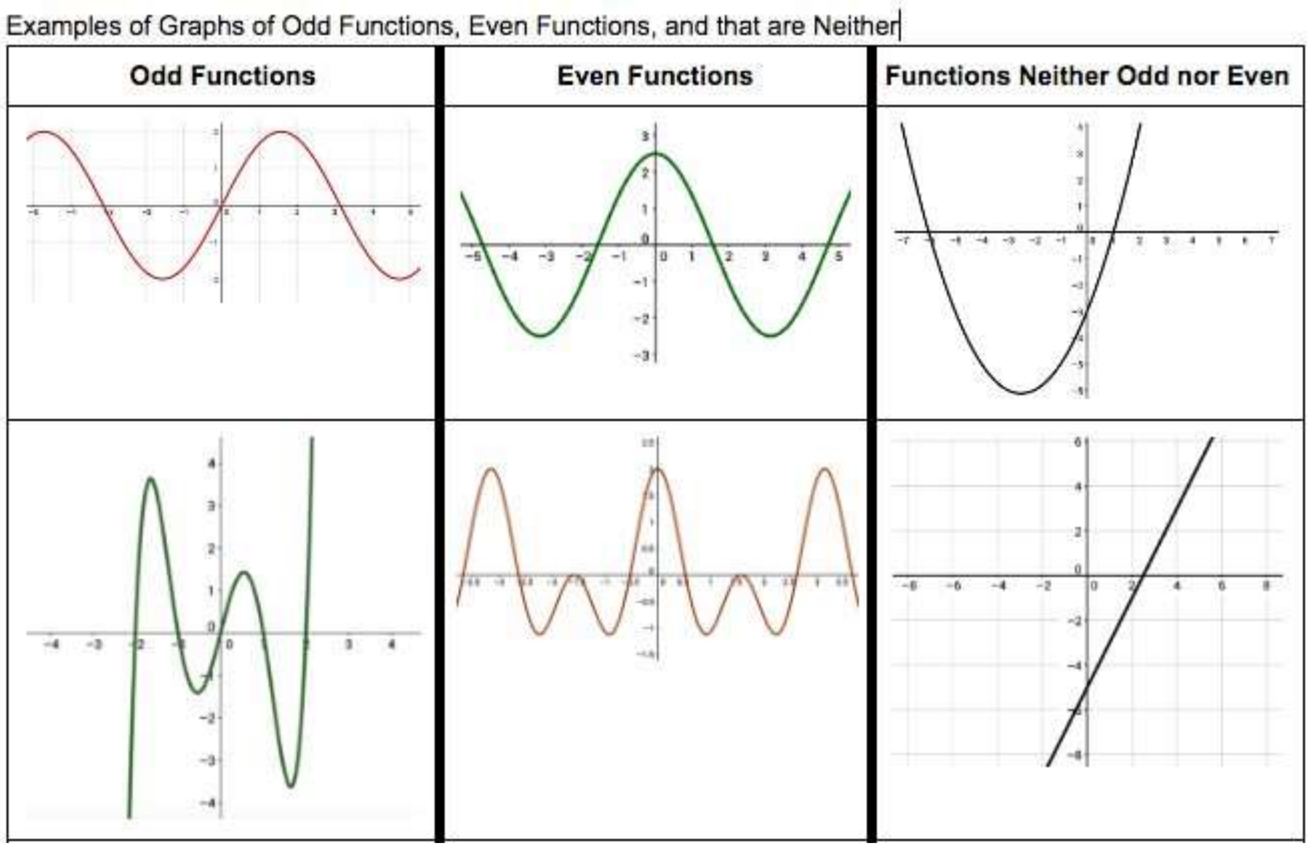
$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right]$$

# Funções Pares e Ímpares (iv)

- **Exemplo:**



# Sistemas (i)

- **Introdução**
  - Um sistema é usado para modificar ou extrair informações adicionais de um sinal.
    - Um sistema físico é formado por um conjunto de componentes interconectados caracterizados por suas relações terminais (relação entre entrada e saída).
    - Um sistema é regido por “leis” derivadas das interconexões (e.g., circuito elétrico).
    - O modelo matemático descreve a relação entre entrada e saída baseada nas leis mencionadas.
    - Um sistema pode ser esquematicamente representado por um retângulo com informações sobre suas entradas e saídas.
    - Áreas de estudo: modelagem, análise e projeto.

# Sistemas (ii)

- **Introdução**

MASTER 6

– Exemplo de sistema:

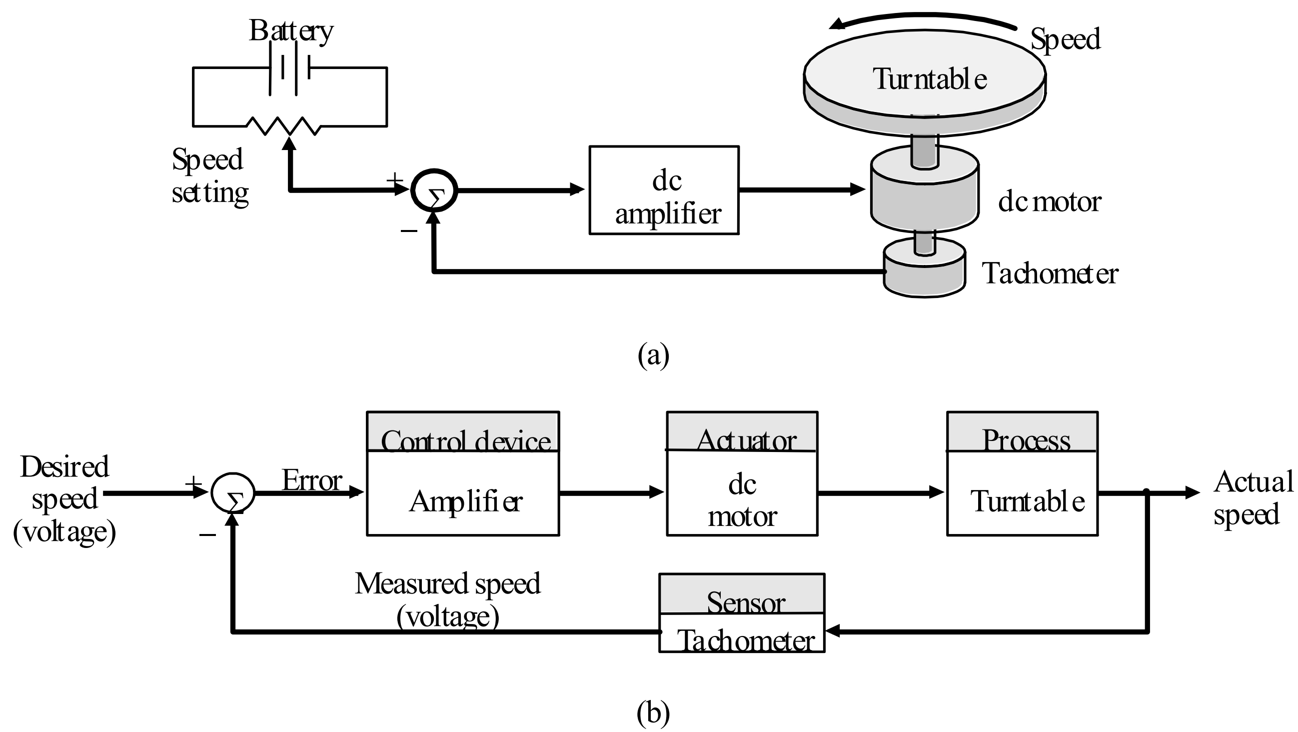



**Figure 1.21 (a) Closed-loop control of the speed of a turntable (b) Block diagram model**

# Classificação de Sistemas (i)

- **Sistemas Lineares e não Lineares**
- **Sistemas de Parâmetros Constantes e de Parâmetros Variáveis no Tempo**
- **Sistemas Instantâneos (sem Memória) e Dinâmicos (com Memória)**
- **Sistemas Causais e não Causais**
- **Sistemas Contínuos e Discretos no Tempo**
- **Sistemas Analógicos e Digitais**
- **Sistemas Inversíveis e não Inversíveis**
- **Sistemas Estáveis e Instáveis**

# Classificação de Sistemas (ii)

- **Quantidade de Entradas e Saídas de um Sistema**
  - Os sistemas aqui discutidos podem ser definidos de acordo com a relação entre excitação e sua resposta, entrada e saída ou causa e efeito. Para tal, serão considerados sistemas que podem ter entradas e saídas simples ou múltiplas.
  - A relação entre o número de entradas e saídas divide os sistemas nos seguintes grupos:
    - (i) <u>SISO</u> (single-input single-output);
    - (ii) <u>MIMO</u> (multiple-input multiple-output);
    - (iii) <u>SIMO</u> (single-input multiple-output);
    - (iv) <u>MISO</u> (multiple-input single-output).
  - As próximas discussões valem para qualquer tipo de sistema embora sejam apresentadas para sistemas SISO.

# Classificação de Sistemas (iii)

- **Sistemas Lineares e não Lineares**

Seja um sistema descrito por $x(t) \rightarrow y(t), \quad t \geq t_0$

Ele é linear se possui a propriedade da superposição :

$$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \rightarrow k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

onde superposição = aditividade + homogeneidade

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t), \quad t \geq t_0$$

$$kx(t) \rightarrow ky(t), \quad t \geq t_0$$

# Classificação de Sistemas (iv)

- **Sistemas Lineares e não Lineares:** Exemplo

O sistema abaixo é linear?

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

Considere duas instâncias deste sistema :

$$\frac{dy_1}{dt} + 3y_1(t) = x_1(t) \quad \text{e} \quad \frac{dy_2}{dt} + 3y_2(t) = x_2(t)$$

Multiplicando a primeira equação por $k_1$ e a segunda por $k_2$ :

$$\frac{d}{dt}\left[k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)\right] + 3\left[k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)\right] = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

# Classificação de Sistemas (v)

- **Sistemas Lineares e não Lineares**
  - A conseqüência direta do princípio da superposição:

    Para entrada nula, a saída do sistema é resposta de entrada zero

    $$x(t_0) = 0 \Rightarrow y(t) = y_{ez}(t)$$

    Para estado inicial nulo, tem-se resposta de estado-zero

    $$\text{condições iniciais} = 0 \Rightarrow y(t) = y_{ez}(t)$$

  - Na natureza a maioria dos sistemas são não–lineares. Estes podem ser aproximados por sistemas lineares para partes do seu domínio.

# Classificação de Sistemas (vi)

- **Sistemas Invariante no Tempo e Variante no Tempo**

$$S:(x(t))\rightarrow y(t);\quad \Delta(T):(y(t))\rightarrow y_{SD}(t-T)$$

$$\Delta(T):(x(t))\rightarrow x(t-T);\quad S:(x(t-T))\rightarrow y_{DS}(t-T)$$

  - Sistema Invariante no Tempo: É definido como aquele cujos parâmetros não variam ao longo do tempo, por isto pode ser chamado de sistema de parâmetros constantes.
    - A saída é a mesma se aplicada um atraso na entrada ou na saída do sistema (Figura 1.28).

$$y_{SD}(t-T)=y_{DS}(t-T)$$

  - Sistema Variante no Tempo: Os parâmetros descritores do sistema são variantes no tempo.

$$y_{SD}(t-T)\neq y_{DS}(t-T)$$

# Classificação de Sistemas (vii)

- **Sistemas Invariante e Variante no Tempo**

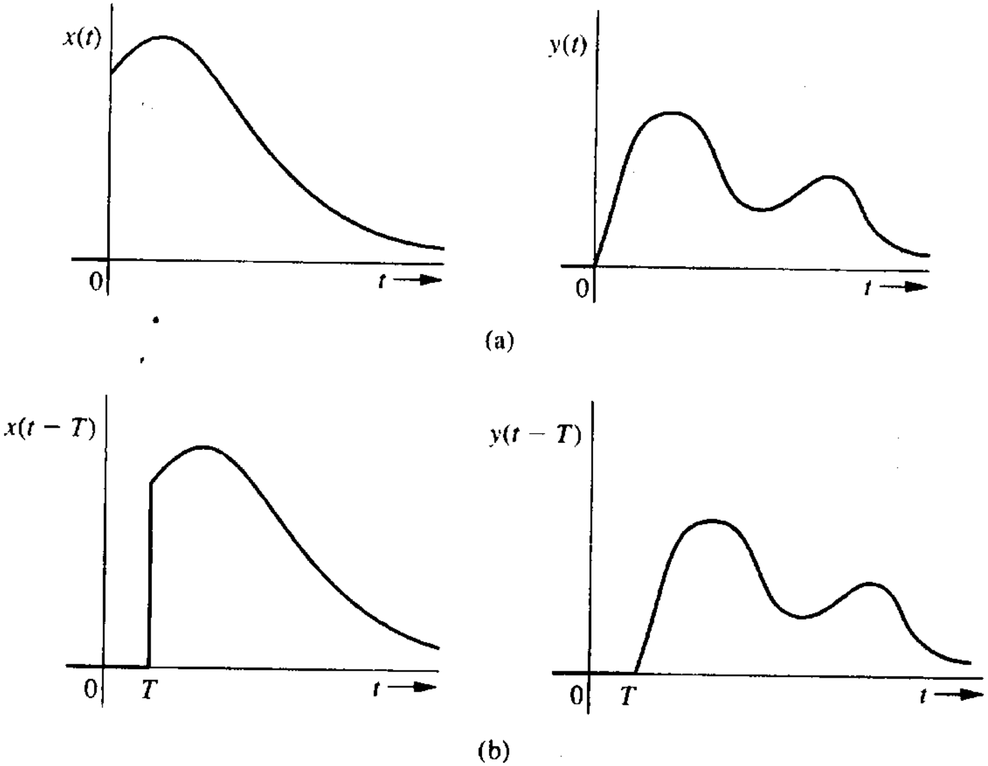
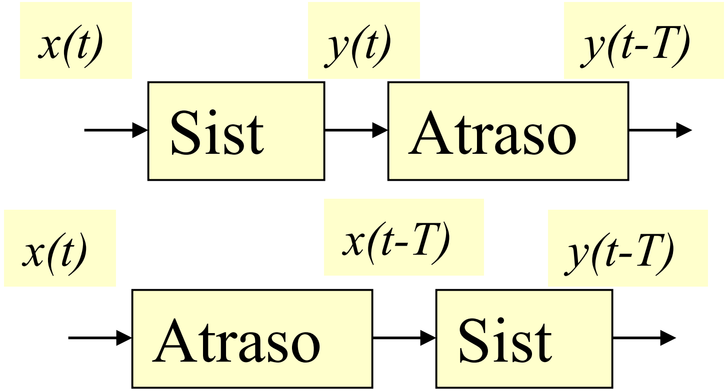



**Figure 1.28** Time-invariance property.



# Classificação de Sistemas (viii)

- **Sistemas Instantâneos e Dinâmicos**
  - Sistema Instantâneo: É aquele no qual a saída em qualquer instante de tempo depende apenas da entrada neste instante de tempo. Este sistema é chamado de sistema sem memória.
    - Sistema sem memória; Condições iniciais sempre nulas.
  - Sistema Dinâmico: É aquele que a saída depende da entrada atual e da história do sistema (sistema com memória).
    - Sistema com memória: Condições iniciais pode ser diferentes de zero.
    - Um sistema cuja saída depende de informações dos últimos $T$ instantes de tempo é chamado sistema de memória finita.

# Classificação de Sistemas (ix)

- **Sistemas Causal e Não-causal**
  - Sistema Causal: Um sistema é causal se a saída em algum instante $t_0$ depende apenas da entrada para o tempo anterior a $t_0$. Chama-se sistema físico ou não-antecipativo. Logo, a saída depende apenas dos valores de entrada presentes e passados.
    - Qualquer sistema do mundo real que opere em tempo real, tem que ser causal.
  - Sistema Não-causal: É um sistema que viola a condição de causalidade. Pode-se chamar sistema antecipativo.
    - Usabilidade de sistemas Não-causais:
      - Sistemas com variáveis independentes diferentes do tempo (e.g., espaço);
      - Alguns sistemas em processamento de sinais (e.g., sinais de fala têm todos os dados de entrada pré-gravados.

# Classificação de Sistemas (x)

- **Sistemas Causal e Não-causal** - Exemplo
  - Entrada: $x(t) = u(t)$

    Saída Não-causal: $y(t) = x(t\text{-}2)+x(t+2)$ – <u>fisicamente impossível</u>

    Realização do sistema Não-causal : $\hat{y}(t) = y(t\text{-}2)=x(t)+x(t\text{-}4)$

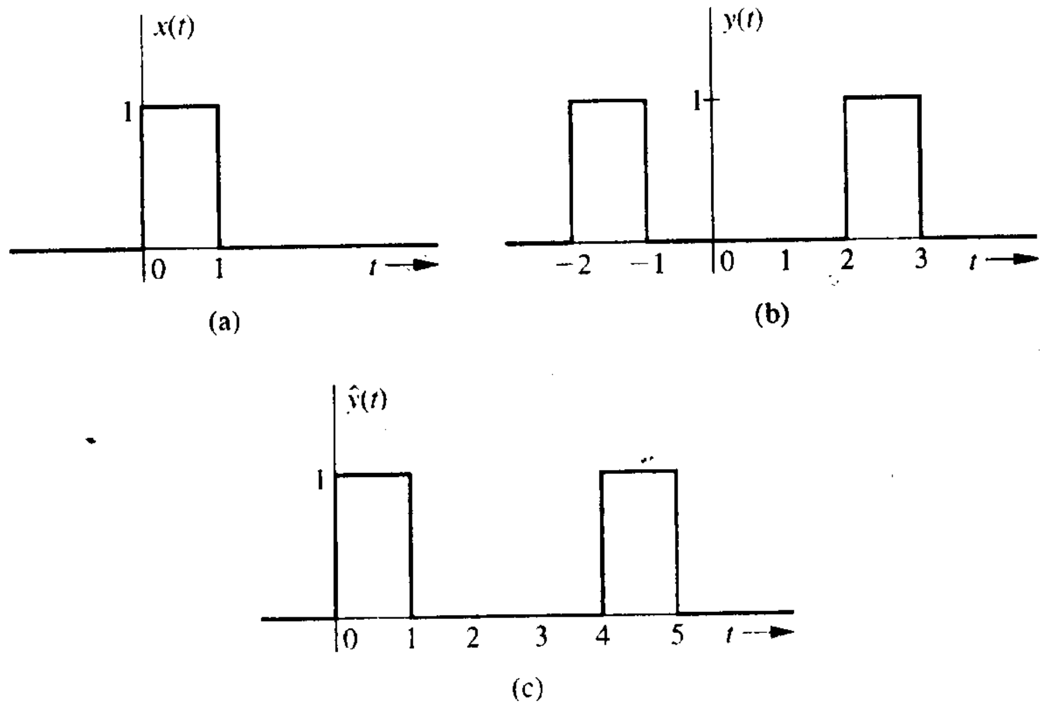



**Figure 1.30** A noncausal system and its realization by a delayed causal system.

# Classificação de Sistemas (xi)

- **Sistemas Contínuo no Tempo e Discreto no Tempo**
  - Sistema Contínuo no Tempo: É aquele cujos sinais de entrada e saída são contínuos no tempo (definidos ou especificados para um intervalo contínuo de tempo).
    - Exemplo: O controle de um elevador.
  - Sistema Discreto no Tempo: É aquele cujos sinais de entrada e saída são discretos no tempo (definidos ou especificados para instantes discretos de tempo).
    - Exemplo: Um computador digital.
    - São exemplos de sinais discretos: estudos populacionais, problemas de amortização, modelos de renda nacional, rastreamento por radar, sinais contínuos amostrados.

# Classificação de Sistemas (xii)

- **Sistemas Contínuo no Tempo e Discreto no Tempo** - Exemplo

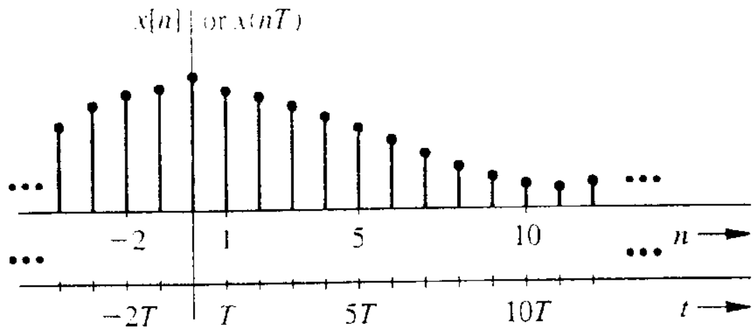



**Figure 1.31** A discrete-time signal.

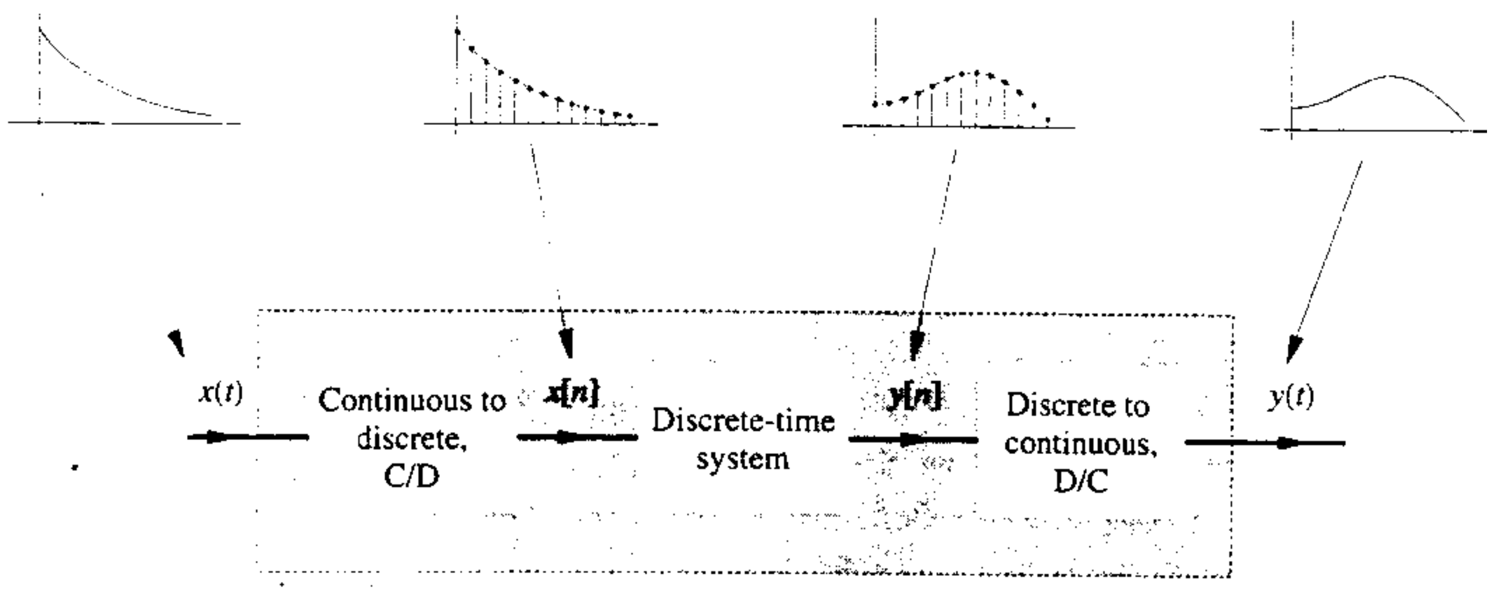


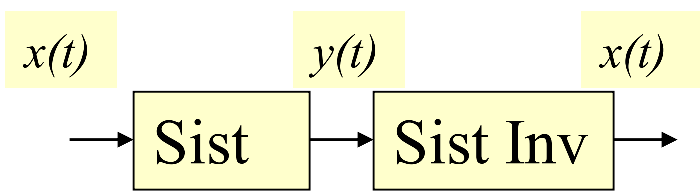

**Figure 1.32** Processing continuous-time signals by discrete-time systems.

# Classificação de Sistemas (xiii)

- **Sistemas Analógico e Digital**
  - Sistema Analógico: É aquele em que seus sinais de entrada e saída são analógicos.
  - Sistema Digital: É aquele em que seus sinais de entrada e saída são digitais.
- **Sistemas Estável e Instável**
  - Estabilidade é definida como interna ou externa, assim tem-se:
    - Estabilidade Externa (BIBO): Se toda entrada limitada no sistema resulta em uma saída também limitada.
    - Estabilidade Interna: Relacionada a variáveis internas ao sistema que devem possuir valores limitados e convergentes.
  - Um sistema é dito instável se a condição de estabilidade não for atendida.

# Classificação de Sistemas (xiv)

- **Sistemas Inversível e Não-inversível**
  - Sistema Inversível: É aquele em que se pode obter a entrada a partir de sua saída.
    - Demanda relação entrada-saída biunívoca.
    - A operação inversa é obtida pelo sistema inverso. É útil quando sinais são distorcidos durante processamento.
      - Exemplo: um integrador ideal e um derivador ideal.




  - Sistema Não-inversível: É aquele em não é possível obter a entrada a partir de sua saída.
    - Exemplo: Algumas entradas diferentes que resultam em uma mesma saída como ocorre em um retificador.

# Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (i)

– Descrição em termos de medições da entrada e da saída nos seus terminais. Apresenta-se expressões para alguns tipos de sistemas.

- **Sistemas Elétricos**

– Em geral, usa-se as relações tensão-corrente de cada elemento do sistema com restrições e propriedades advindas da interconexão de vários componentes do sistema (Leis de Kirchhof).

Notação compacta : $\dfrac{d^i y(t)}{dt^i} = D^i y(t);$

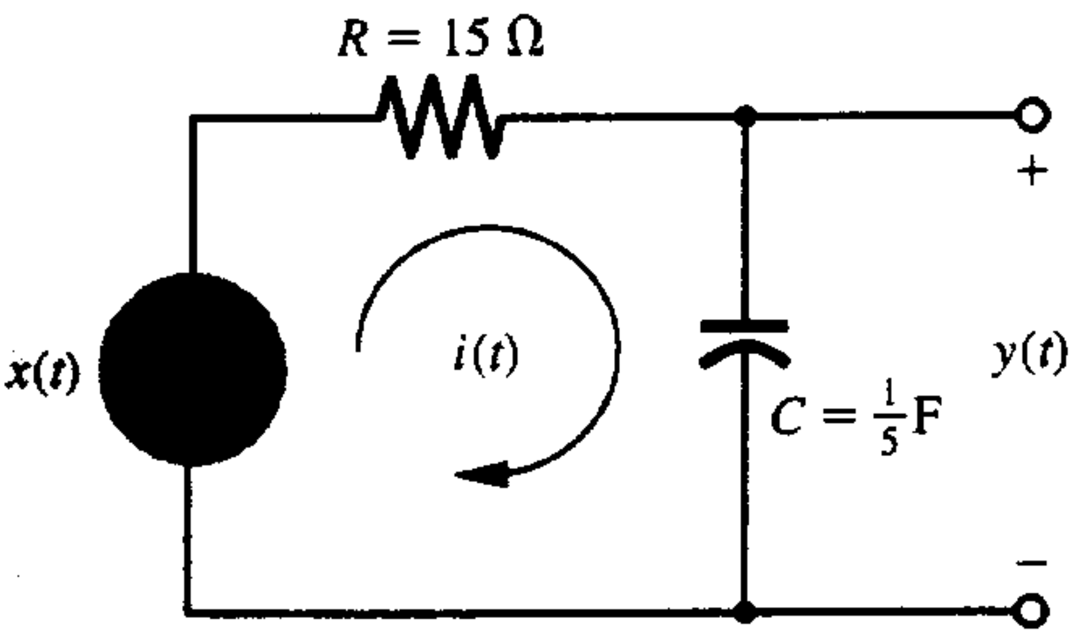
Exemplo, $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \therefore \left(D^2 + 3D + 2\right)y(t) = Dx(t)$

Operador diferencial é o inverso do operador integral : $\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = \dfrac{1}{D}y(t),$

recomenda - se usar equações diferenciais pois $D$ e $1/D$ não são comutáveis.

# Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (ii)

- **Sistemas Elétricos**: Exemplo
  – Encontre equação descrevendo o sistema *RC*:




Lei de Kirchhoff de tensões :

$$\sum_i v_i(t) = 0, \text{em um loop.}$$

$$x(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = 0 \therefore$$

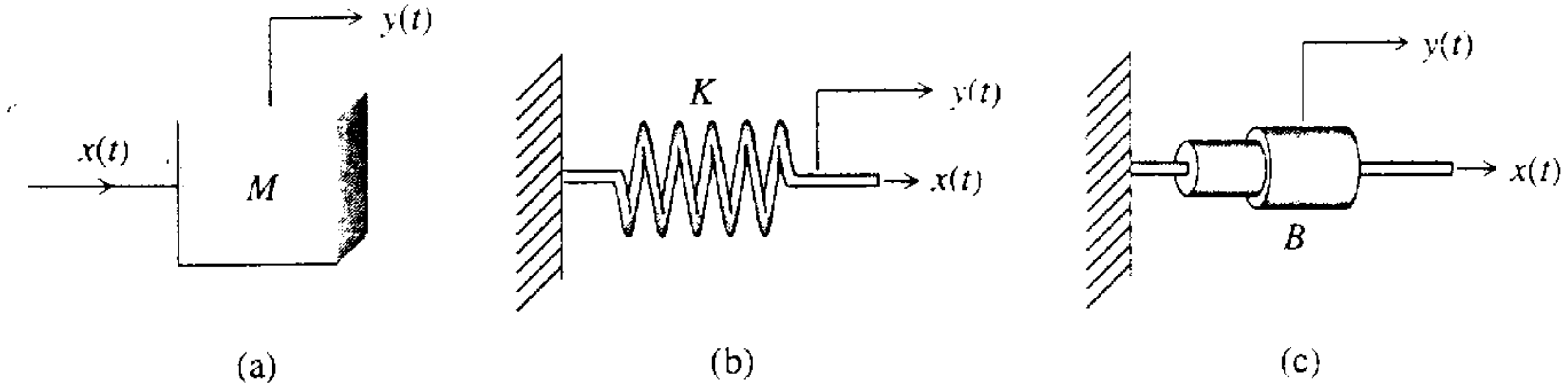
$$x(t) = 15i(t) + 5\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \therefore$$

$$x(t) = 15i(t) + \frac{5}{D}i(t) = x(t) \therefore$$

$$Dx(t) = 15(D+5)i(t)$$

# Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (iii)

- **Sistemas Mecânicos**: Comportamento (movimento) em 1D.
  - Sistemas Translacionais: Elementos básicos:




Para massa $M$: $x(t) = M\,(\mathrm{d}^2 y(t)/\mathrm{d}t^2) = M\mathrm{D}^2 y(t)$;

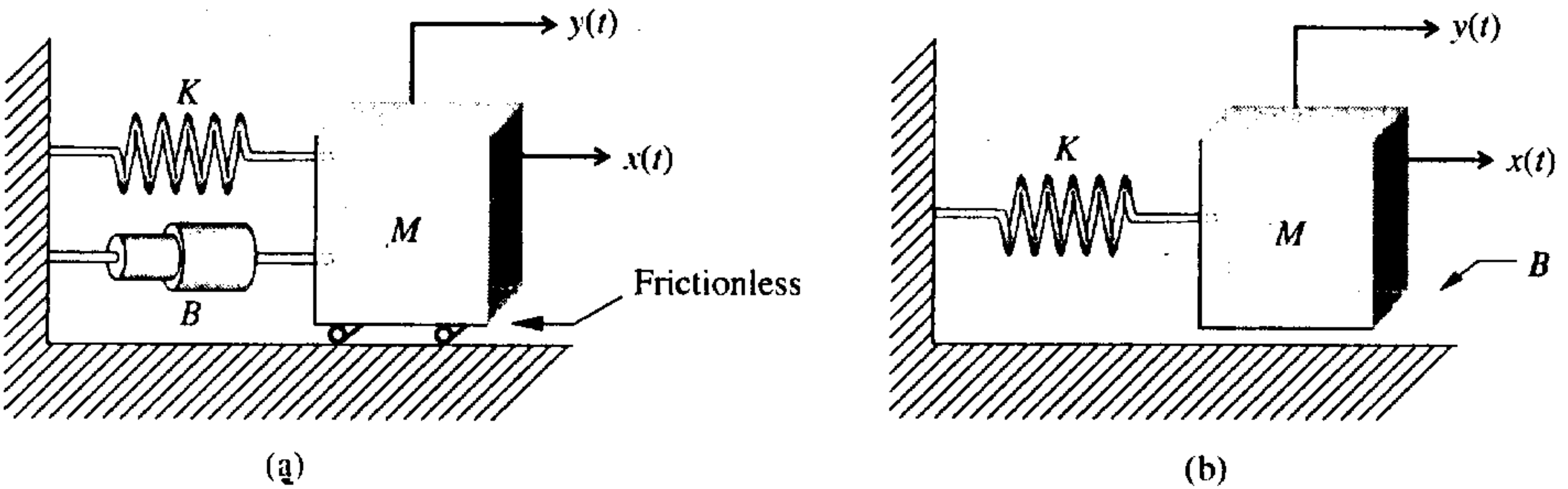
Para freio: $B$: $x(t) = B\,(\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t) = B\mathrm{D}y(t)$;

Para força: $x(t) = K\, y(t)$

onde $M$, $B$. $K$ são massa, coeficientes de amortecimento e de rigidez.

# Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (iv)

- **Sistemas Mecânicos**: Exemplo de Sistema Translacional:
  - Encontre equação descrevendo a relação entrada-saída *RC*:




Os sistemas das figuras (a) e (b) são equivalentes:

$M\,(d^2y(t)/dt^2) = -\,B\,(dy(t)/dt) - K\,y(t) + x(t)\ \therefore\ (MD^2y + BD + K)\,y(t) = x(t)$

# Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (v)

- **Sistemas Mecânicos**: Comportamento (movimento) em 1D.
  - Sistemas Rotacionais: Movimento do corpo em torno de um dado eixo. As variáveis são posição e velocidade angular, e torque. Os elementos do sistema são massa rotacional (ou momento de inércia), molas rotacionais e freio amortecedor rotacional.

    O torque ($\tau$) pode ser descrito como:

  Para massa $J$: $\tau(t) = J\,(\mathrm{d}^2\theta(t)/\mathrm{d}t^2) = J\mathrm{D}^2\theta(t)$;

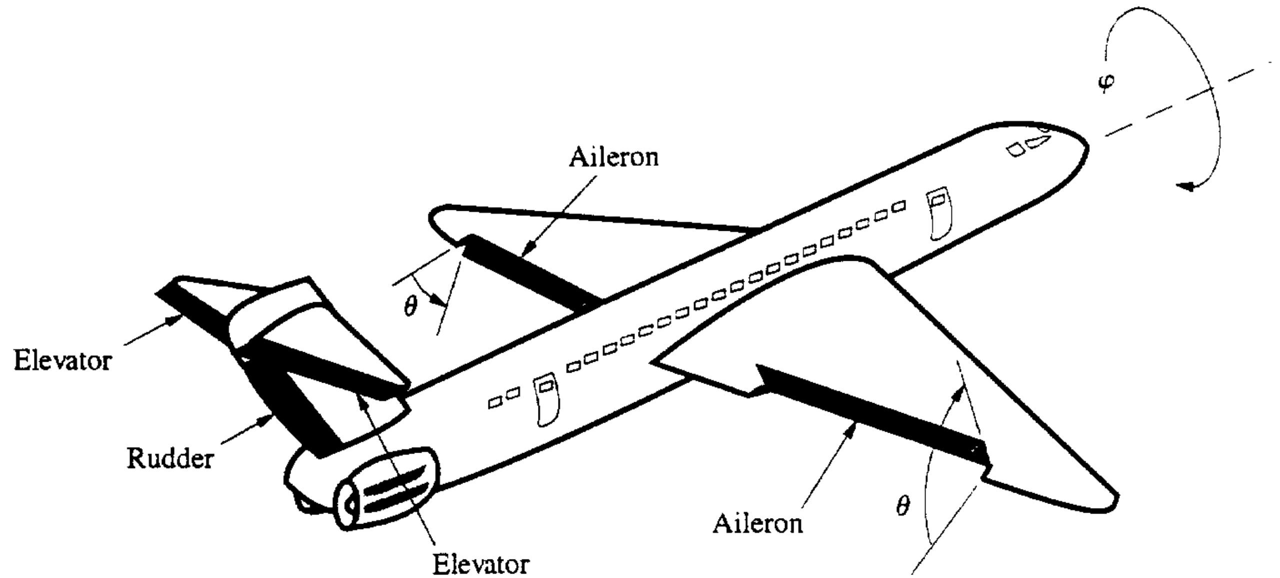
  Para freio: $B$: $\tau(t) = B\,(\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t) = B\mathrm{D}\theta(t)$;

  Para força: $\tau(t) = K\,\theta(t)$;

  onde $M$, $B$. $K$ são momento de inércia, coeficientes rotacionais de amortecimento e de rigidez da mola.

# Modelo de Sistema: Descrição Entrada-Saída (vi)

- **Sistemas Mecânicos**: Controle de altitude (elevadores, leme e *ailerons*).

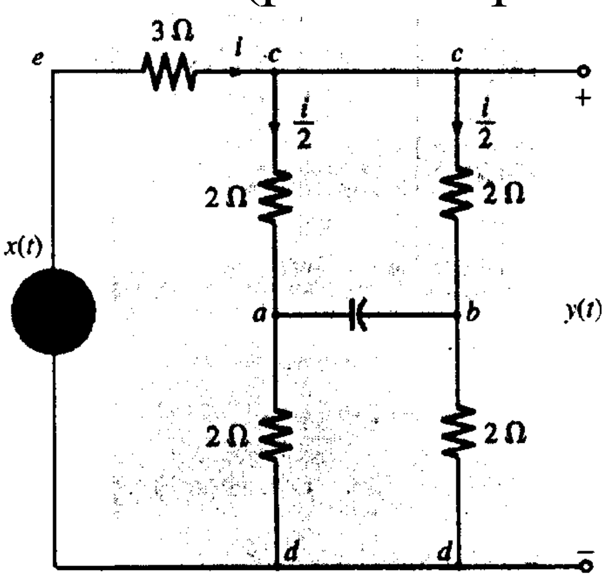


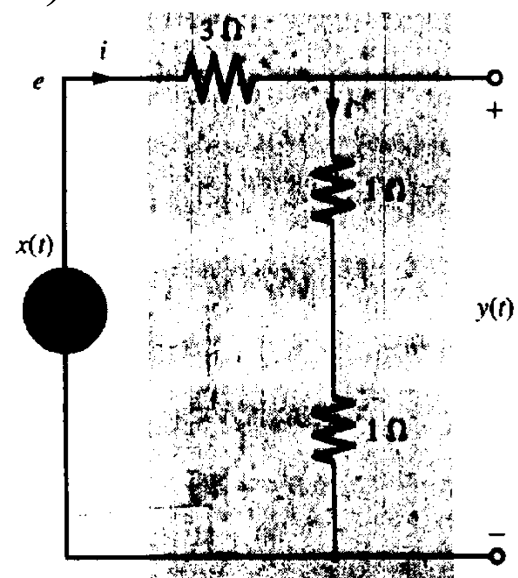

O ângulo de giro, $\varphi$, é função das deflexões nos ailerons: $(J\mathrm{D}^2+B\mathrm{D})\varphi(t) = c\theta(t)$;

Re-escrevendo em função da velocidade angular: $(J\mathrm{D}+B)\omega(t) = c\theta(t)$;

# Descrição Interna e Externa de Sistemas (i)

- **Descrição Externa de um Sistema**:
  - É aquela obtida a partir de medidas nos terminais externos deste sistema. Descrição entrada-saída é uma descrição deste tipo.
- **Descrição Interna de um Sistema** :
  - É aquela capaz de prover informação sobre todos os sinais no sistema. Descrição por variáveis de estado é um exemplo.
  - Exemplo: Não encontra saída correta para capacitor com carga inicial e entrada nula (pois a ddp é nula).



# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 1.1-1 até 1.1-6, 1.1-9.
  - 1.2-1 até 1.2-6.
  - 1.3-1 até 1.3-3, 1.3-5 até 1.3-6.
  - 1.4-1, 1.4-2, 1.4-4 até 1.4-6, 1.4-10.
  - 1.5-1, 1.5-2, 1.5-7, 1.5-8, 1.5-11.
  - 1.7-1 até 1.7-3, 1.7-7 até 1.7-9, 1.7-11, 1.7-12.
  - 1.8-1, 1.8-3 até 1.8-6.

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Análise no Domínio do Tempo de Sistemas Contínuos

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 2

# Conteúdo

- **Introdução**
- **Resposta de Entrada Zero**
- **Resposta ao Impulso Unitário**
- **Resposta de Estado Zero**
- **Solução Clássica de Equações Diferenciais**
- **Estabilidade de Sistemas**
- **Parâmetros e Comportamento do Sistema**

# Análise no Tempo de SLCT (i)

- **Introdução**
  - Serão considerados sistemas diferenciais lineares para análise.
    - Serão tratados sistemas lineares invariantes e contínuos no tempo (LTIC), descritos por:

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

$$= b_{N-M} \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_N x(t)$$

onde $a_i$ e $b_i$ são constantes. Pode-se rescrever com o uso de $D$:

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y(t) =$$

$$= (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) x(t)$$

ou, em termos de polinômio: $Q(D) y(t) = P(D) x(t)$

# Análise no Tempo de SLCT (ii)

- **Introdução**
  - Valores de $M$ e $N$, contudo não deve ocorrer $M > N$ pois:
    - A expressão anterior atuaria como diferenciador (função de transferência) de ordem ($M$-$N$). Isto poderia levar o sistema a instabilidade (BIBO) pois a derivada de uma entrada degrau unitário será ilimitada (função impulso unitário).
    - Em geral, um sinal de ruído é rápido, gerando valores altos de derivadas. Logo o diferenciador aumenta seu efeito.

Recomenda-se, portanto, utilizar: $M \leq N$.

Esta hipótese será assumida daqui para frente.

Como o sistema definido é linear, sua resposta total é dada por:

Resposta total = Resposta de Entrada Zero + Resposta de Estado Zero

# Resposta de Entrada Zero (i)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Este componente é a resposta do sistema para entrada nula.

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_0(t) = 0 \therefore Q(D) y_0(t) = 0$$

Para a combinação linear resultar em zero, todas derivadas existem

e são da mesma forma. Esta é uma proriedade de função exponencial :

$$y_0(t) = ce^{\lambda t} \Rightarrow Dy_0(t) = c\lambda e^{\lambda t} \Rightarrow D^2 y_0(t) = c\lambda^2 e^{\lambda t} \ldots \Rightarrow D^N y_0(t) = c\lambda^N e^{\lambda t}$$

Desta forma, o polinômio assume a forma :

$$Q(D) y_0(t) = c(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N) e^{\lambda t} = 0$$

Como, por hipótese $y_0(t) \neq 0$ e $c \neq 0$, então tem - se que

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0 \therefore$$

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

# Resposta de Entrada Zero (ii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

<u>Para raízes distintas:</u>

Tem-se $N$ possíveis soluções para $Q(D)y_0(t) = 0$, dados por:

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \;\; ,..., \;\; y_{N-1}(t) = c_{N-1} e^{\lambda_{N-1} t}, y_N(t) = c_N e^{\lambda_N t}$$

onde $c_1, c_2 \;\; ,..., \;\; c_{N-1}, c_N$ são constantes arbitrárias

Cada solução satisfaz individualmente o polinômio $Q(D)y_0(t) = 0$:

$$Q(D)y_1(t) = Q(D)y_2(t) = \;,...,\; = Q(D)y_{N-1}(t) = Q(D)y_N(t) = 0$$

Como o sistema é linear, tem-se:

$$Q(D)[(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \;,...,\; + c_N y_N(t)] = 0$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \;,...,\; + c_N e^{\lambda_N t}$$

# Resposta de Entrada Zero (iii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes distintas:

O polinômio $Q(\lambda)$ é relacionado com as características do sistema. Assim, chama-se $Q(\lambda)$ de polinômio característico do sistema e $Q(\lambda) = 0$ de equação característica do sistema. As raízes desta equação são chamadas de raízes características, valores característicos, freqüências naturais e autovalores. As exponenciais $e^{\lambda_i t}, i = 1, \ldots, N$, no sistema de entrada zero são chamadas de modos característicos, modos naturais ou modos. Estes influenciam na resposta completa. A resposta de entrada zero é uma combinação linear dos modos característicos do sistema.

# Resposta de Entrada Zero (iv)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes repetidas:

Seja a equação $Q(D)y_0(t) = (D^2 - 2D\lambda + \lambda^2)y_0(t) = (D-\lambda)^2 y_0(t) = 0,$

com solução $y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$, provada por substituiç ão direta

De modo análogo, a equação diferencal $(D-\lambda)^r y_0(t) = 0,$

tem os modos característicos: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t} \;\; ,..., \;\; t^{r-1}e^{\lambda t}$

Assim, a solução é dada por: $y_0(t) = (\, c_1 + c_2 t + \;\ldots\; + c_r t^{r-1})e^{\lambda t}.$

Assim para um sistema com o polinômio característico:

$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r(\lambda - \lambda_{r+1}) \;\ldots\; (\lambda - \lambda_N)$

tem os modos característicos: $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., \;\; t^{r-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_{r+1}t}, ..., \;\; e^{\lambda_N t}$

e solução: $y_0(t) = (\, c_1 + c_2 t + \;\ldots\; + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1}t} + \;\ldots\; + c_N e^{\lambda_N t}.$

# Resposta de Entrada Zero (v)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes complexas:

– O procedimento é o mesmo que aquele para raízes reais. Nesta caso ter-se-á modos característicos complexos e forma de solução complexa.

– Pode-se optar por não se trabalhar com a forma complexa:

Raízes complexas ocorrem aos pares : $y_0(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$,

Para um sistema real, a resposta é real se $c_1$ e $c_2$ são conjugados :

$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta}$ e $c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$, isto resulta :

$$y_0(t) = \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha - j\beta)t} = \frac{c}{2} e^{\alpha t} \left(e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}\right) \therefore$$

$$y_0(t) = c e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

# Resposta de Entrada Zero (vi)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Exemplo Calcule a resposta de entrada zero para a equação:

$(D^2+3D+2)\, y(t) = Dx(t)$. Para $y_0(0)= 0$; $Dy_0(0)= -5$;

A equação característica do sistema é $\lambda^2+3\lambda +2= 0$,

As raízes características (autovalores) são: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$;

Modos característicos: $\mathrm{e}^{-t}$, $\mathrm{e}^{-2t}$, logo, a resposta de entrada zero:

$y_0(\mathrm{t})= c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-2t}$ e $Dy_0(\mathrm{t})= - c_1\mathrm{e}^{-t} - 2c_2\mathrm{e}^{-2t}$ , assim a solução é

$y_0(0)= c_1\mathrm{e}^0 + c_2\mathrm{e}^0 \therefore \quad c_1 + c_2 = 0$ e

$Dy_0(\mathrm{t})= - c_1\mathrm{e}^0 - 2c_2\mathrm{e}^0 \therefore - c_1 - 2c_2 = -5$, logo, $c_1 = -5$, $c_2 = 5$;

A resposta de entrada zero é $y_0(\mathrm{t})= - 5\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{-2t}$

# Resposta de Entrada Zero (vii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Exemplo: Calcule a resposta de entrada zero para a equação:

$(D^2+6D+9)y(t)=(3D+5)x(t)$, para $y_0(0)=3$, $Dy_0(0)= -7$.

A equação carcaterística do sistema é $\lambda^2+6\lambda+9=0$,

Para o qual as raízes características são $\lambda_1=-3, \lambda_2=-3$;

os modos característicos são : $e^{-3t}, te^{-3t}$ e a solução dada por :

$y_0(t)= \ (c_1+c_2t)e^{-3t}$. Para achar as constantes, calcula-se :

$Dy_0(t)= \ -3c_1e^{-t}+c_2(e^{-3t}-3te^{-3t})$, a solução do sistema de equações é :

$$\left.\begin{array}{l} y_0(0)=3= \ c_1e^0+c_2.0.e^0 \ \therefore c_1=3 \\ Dy_0(0)= -7 \ = \ -3c_1e^0+c_2(e^0-3te^0) \therefore -3c_1+c_2=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2=2.$$

A resposta de entrada zero é $y_0(t)= \ (3+2t)e^{-3t}$.

# Resposta de Entrada Zero (viii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Exemplo: Calcule a resposta de entrada zero para a equação:

$$(D^2+4D+40)y(t)=(D+2)x(t), \quad \text{para} \;\; y_0(0)=2,\; Dy_0(0)=16.78.$$

A equação característica do sistema é $\lambda^2+4\lambda+40=0$,

As raízes características são $\lambda_1=-2+j6, \quad \lambda_2=-2-j6$;

os modos característicos : $e^{(-2+j6)t}, e^{(-2-j6)t}$. A solução na forma é :

$y_0(t)= \; ce^{-2t}\cos(6t+\theta)$. Para achar as constantes, calcula-se :

$Dy_0(0)= \; 2ce^{-2t}\cos(6t+\theta)-6ce^{-2t}\,\text{sen}\,(6t+\theta)$, a solução é dada por :

$$\left.\begin{aligned} y_0(0)=2= \; ce^0\cos(0+\theta) \therefore c\cos\theta=2 \\ Dy_0(0)=16.78. \therefore -2c\cos\theta-6c\,\text{sen}\,\theta \;=-5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c\cos\theta=2 \\ c\,\text{sen}\,\theta=-3{,}463 \end{cases}$$

# Resposta de Entrada Zero (ix)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Calculando as constantes:

$$\begin{cases} c\cos\theta = 2 \\ c\,\text{sen}\,\theta = -3{,}463 \end{cases}, \quad \text{elevando ambos os termos ao quadrado}$$

$$(c\cos\theta)^2 = (2)^2; \qquad (c\,\text{sen}\,\theta)^2 = (-3{,}463)^2$$

Somando-se as duas equações tem-se:

$$(c\cos\theta)^2 + (c\,\text{sen}\,\theta)^2 = (2)^2 + (-3{,}463)^2 \therefore c^2 = 16 \therefore c = 4.$$

Acha-se o ângulo de fase:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3{,}463}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

A resposta de entrada zero é $y_0(t) = 4e^{-2t}\cos\left(6t - \frac{\pi}{3}\right)$.

# Resposta de Entrada Zero (x)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Condições Iniciais na Prática
    - Em problemas reais, as condições iniciais devem ser geradas a partir das situações físicas.
    - As condições iniciais imediatamente anteriores a $t=0$, em geral, são diferentes das condições iniciais imediatamente após a aplicação da entrada.

      Notações: $t = 0^-$ e $t = 0^+$
    - Imediatamente antes da aplicação da entrada, tem-se a resposta de entrada zero.

# Resposta de Entrada Zero (xi)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Independência das Resposta de Entrada Zero e Estado Zero:
    - Estes dois componentes do sistema são mutuamente independentes. Isto é, as duas respostas coexistem sem haver interferência de uma sobre a outra.
  - Condições Auxiliares para Solução de Equações Diferenciais:
    - Em geral, para se determinar unicamente $y(t)$ a partir de sua $N$-ésima derivada, são necessárias $N$ informações (restrições) sobre $y(t)$. Tais restrições são geralmente chamadas de condições auxiliares e recebem denominação particular para quando $t$=0: condições iniciais.

# Resposta ao Impulso Unitário (i)

- **Fundamentos**
  - Se for conhecida a resposta de um sistema a uma entrada impulso, pode-se determinar a resposta do sistema a uma entrada arbitrária $x(t)$.
  - Apresenta-se um método para determinar a resposta ao impulso unitário de um sistema LTIC descrito pela equação diferencial de ordem N: $Q(D)y(t)=P(D)x(t)$. Onde $Q(D)$ e $P(D)$ são polinômios, onde . Para esta restrição, o caso mais geral é $M=N$.

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y(t) =$$

$$= (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) x(t)$$

  - $h(t)$ é a resposta de um sistema para uma entrada impulso em $t=0$, com todas as condições iniciais nulas em $t = 0^-$. Esta entrada gera armazenamento de energia, implicando em condições iniciais não nulas em $t = 0^+$.

# Resposta ao Impulso Unitário (ii)

- **Fundamentos**
  - Como não há entrada após o impulso ter sido aplicado, o sistema responderá à condição inicial recém-criada.
  - Assim, a resposta ao impulso $h(t)$ é formada a partir dos modos característicos do sistema:

    $$h(t) = \text{termos dos modos característicos} \qquad t \geq 0^+$$

  - Em $t=0$ pode haver no máximo um impulso, gerando:

    $$h(t) = A_0\delta(\mathrm{t}) + \text{termos dos modos característicos} \qquad t \geq 0$$

  - Assumindo $x(t)$ como um impulso unitário, tem-se que

    $$(D^N + a_1D^{N-1} + \ldots + a_N)h(t) = (b_0D^N + b_1D^{N-1} + \ldots + b_N)\delta(t),$$

    Substituindo-se a expressão para $h(t)$, tem-se como resposta :

    $$h(t) = b_0\delta(t) + \text{modos característicos, com } b_0 = 0 \text{ para } M < N.$$

# Resposta ao Impulso Unitário (iii)

$D^2h($

- **Fundamentos**
  - Exemplo: Calcule a resposta ao impulso para o sistema:

$(D^2+5D+6)y(t)=(D+1)x(t),\quad \text{como } M<N \Rightarrow b_0=0,$

Equação característica é $\lambda^2+5\lambda+6=0 \therefore \lambda_1=-2, \lambda_2=-3;$

Resposta ao impulso (só modos caract.) : $h(t)=(c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t})u(t)$

para $x(t)=\delta(t)$ e $y(t)=h(t) \Rightarrow D^2h(t)+5Dh(t)+6h(t) = D\delta(t)+\delta(t)$

Condições iniciais $h(0^-)=\dot{h}(0^-)=0$; e sejam $h(0^+)=K_1; \dot{h}(0^+)=K_2$

Devido ao impulso : $\dot{h}(0)=K_1\delta(t);\ D^2h(t)=K_1\dot{\delta}(t)+K_2\delta(t) \Rightarrow$

$K_1\dot{\delta}(t)+K_2\delta(t)+5K_1\delta(t)+6h(0)=\dot{\delta}(t)+\delta(t) \therefore$

$5K_1+K_2=1;\quad K_1=1 \Rightarrow K_1=1, K_2=-4.$

$$\left.\begin{aligned} h(0^+)&=(c_1e^0+c_2e^0)=K_1=1 \therefore c_1+c_2=1 \\ \dot{h}(0^+)&=(-2c_1e^0-3c_2e^0)=K_2=-4 \therefore -2c_1-3c_2=-4 \end{aligned}\right\} \therefore c_1=-1; c_2=2$$

# Resposta ao Impulso Unitário (iv)

- **Resposta Impulso Unitário**
  - Método de Casamento de Impulso Simplificado:
    - Busca reduzir procedimento para determinar $h(t)$.

Seja o sistema LTIC definido por:

$Q(D)y(t) = P(D)x(t) \therefore$

$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_N)y(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_N)x(t)$

a resposta ao impulso unitário $h(t)$ é: $h(t) = b_0\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$,

onde $y_n(t)$ é combinação linear dos modos característicos do sistema de

condições iniciais: $y_n(0) = y_n^{|}(0) = \ldots = y_n^{N-2}(0) = 0, \quad y_n^{N-1}(0) = 1$

determinadas para que não haja derivadas que gerem discontinuidades

Para $M < N \Rightarrow b_0 = 0$, logo $b_0\delta(t) = 0$

# Resposta ao Impulso Unitário (v)

- **Resposta Impulso Unitário**
  - Exemplo: determine a resposta ao impulso *h(t)*.

$(D^2+3D+2)y(t)=Dx(t),$ sistema de segunda ordem $(N=2)$,

eq. característica : $(\lambda^2+3\lambda+2)=0 \Rightarrow \quad \lambda_1=-1, \quad \lambda_2=-2$

Logo : $y_n(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \Rightarrow \dot{y}_n(t)=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}.$

As condições iniciais são : $y_n(0)=0, \quad \dot{y}_n(0)=1.$

Assim, tem-se que : $\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ 1=-c_1-2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=-1 \end{cases}$

Lembre-se : $h(t)=[P(D)y_n(t)]u(t),$ onde $P(D)y_n(t)=Dy_n(t),$

Portanto, $h(t)=[P(D)y_n(t)]u(t)=\dot{y}_n(t)u(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})u(t)$

# Resposta de Estado Zero (i)

- **Introdução**
  - Resposta para condições inicias nulas.
  - Uso do princípio da superposição para encontrar a resposta de um sistema a um sinal de entrada arbitrário $x(t)$. Considere

Pulso básico $p(t) = 1$, para largura $\Delta\tau$ iniciando em $t = 0$;

Entrada $x(t)$ é somatório de pulsos retangulares estreitos;

Assim, um pulso iniciando em $t = n\Delta\tau$ com altura $x(n\Delta\tau)$ é expresso :

$x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau)$. Portanto, o sinal de entrada $x(t)$ é dado por :

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau,$$

onde $[x(n\Delta\tau)/\Delta\tau]p(t - n\Delta\tau)$ é um pulso com altura $[x(n\Delta\tau)/\Delta\tau]$.

Assim, para $\Delta\tau \to 0 \Rightarrow [x(n\Delta x)/\Delta\tau\,] \to \infty$ e área permanece $x(n\Delta\tau)$.

# Resposta de Estado Zero (ii)

- **Introdução**

O pulso aproxima-se do impulso : $x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)$, para $\Delta\tau \to 0$

Logo, $x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$

Encontra-se o par entrada-saída para a entrada *x(t)* :

Entrada *(x(t))* $\rightarrow$ Saída *(y(t))*

$\delta(t) \rightarrow h(t)$

$\delta(t - n\Delta\tau) \rightarrow h(t - n\Delta\tau)$

$[x(n\Delta x)\Delta\tau]\delta(t - n\Delta\tau) \rightarrow [x(n\Delta x)\Delta\tau]h(t - n\Delta\tau)$

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau \rightarrow \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

# Resposta de Estado Zero (iii)

- **Introdução**

Portanto : $y(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau \therefore$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Esta é a resposta do sistema $y(t)$ para uma entrada arbitrária $x(t)$ em termos da resposta ao impulso $h(t)$. Logo, conhecendo-se este último, pode-se determinar $y(t)$ para qualquer entrada.
  - Note que a resposta do sistema para qualquer entrada é determinada pela resposta ao impulso, que por sua vez, é construída a partir dos modos característicos do sistema.

# Resposta de Estado Zero (iv)

- **Introdução**

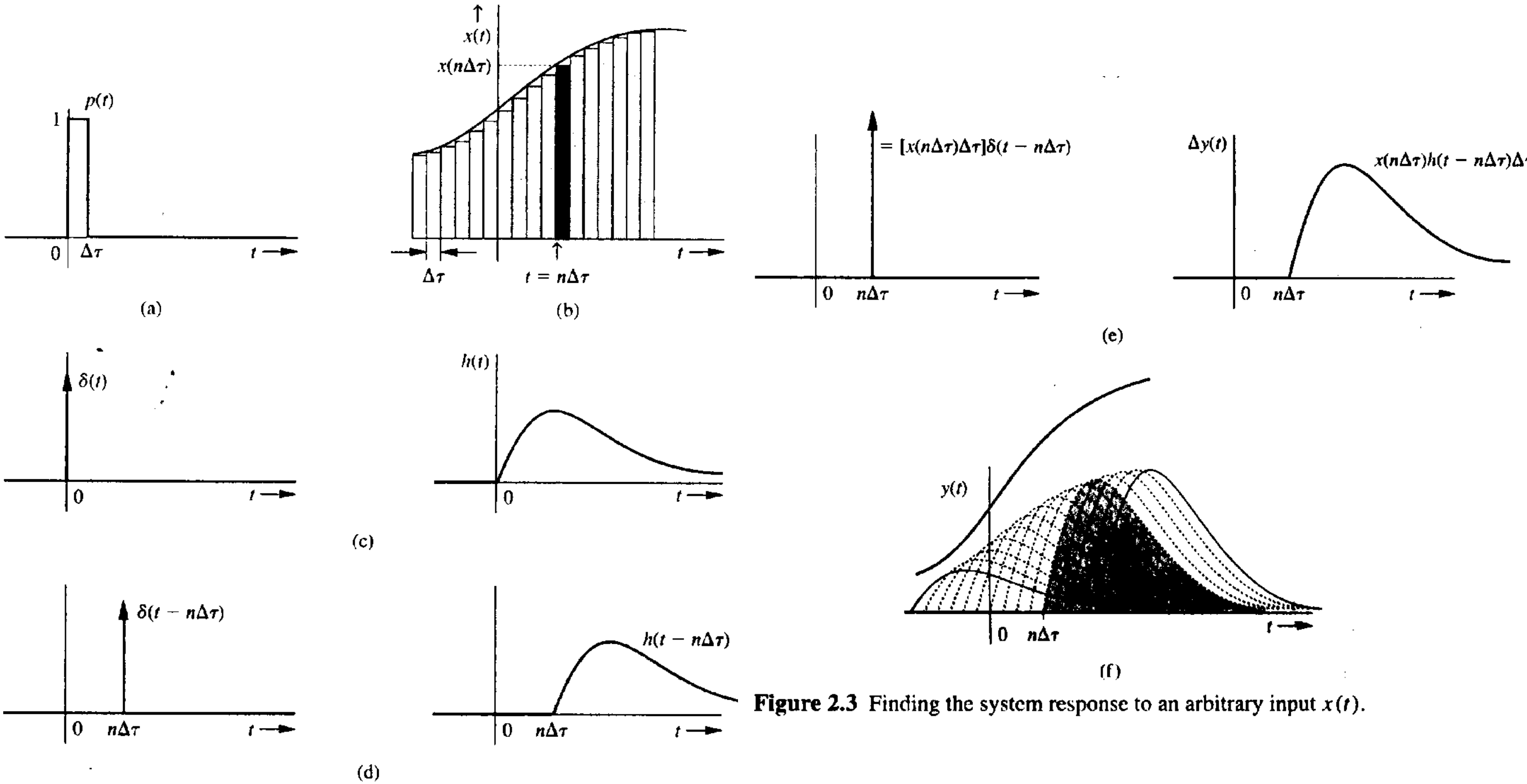



**Figure 2.3** Finding the system response to an arbitrary input $x(t)$.

# Resposta de Estado Zero (v)

- **Integral de Convolução**
  - A integral de convolução de duas funções é definida como:

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau,\text{com propriedades relevantes:}$$

Propriedade Comutativa :

$$x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$$

prova - se mudando a variável $z=t-\tau \Rightarrow d\tau=-dz$

$$x_1(t)*x_2(t)=-\int_{\infty}^{-\infty}x_1(t-z)x_2(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(z)x_1(t-z)dz=x_2(t)*x_1(t)$$

Propriedade Distributiva :

$$x_1(t)*[x_2(t)+x_3(t)]=x_1(t)*x_2(t)+x_1(t)*x_3(t)$$

Propriedade Associativa :

$$x_1(t)*[x_2(t)*x_3(t)]=[x_1(t)*x_2(t)]*x_3(t)$$

# Resposta de Estado Zero (vi)

- **Integral de Convolução**

Propriedade de Deslocamento : para $x_1(t) * x_2(t) = c(t)$, logo

$$x_1(t) * x_2(t-T) = x_1(t-T) * x_2(t) = c(t-T) \quad \text{e}$$

$$x_1(t-T_1) * x_2(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$$

Convolução com um Impulso : $x(t) * \delta(t) = x(t)$

Propriedade da Largura :

Duração (largura) de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é $T_1$ e $T_2$ $\Rightarrow$ duração de $c(t)$ é $T_1 + T_2$.

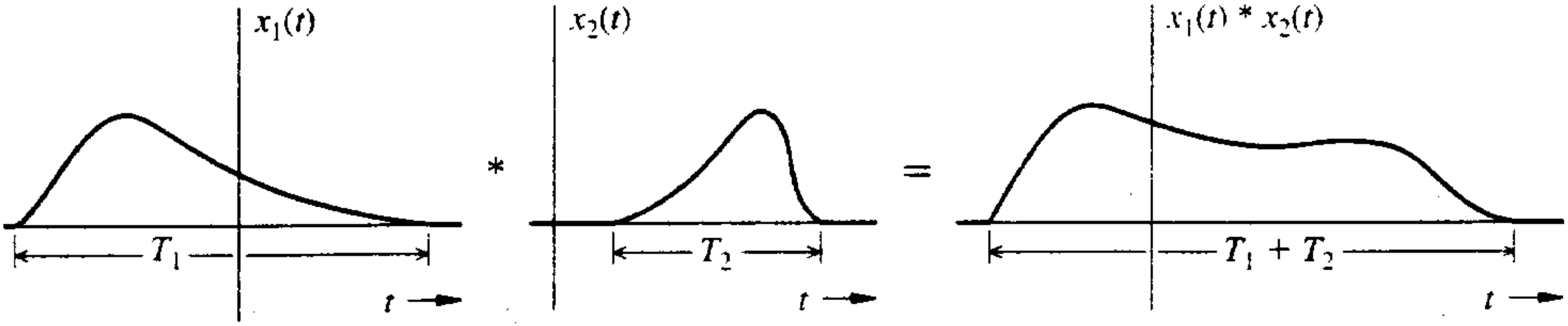



**Figure 2.4** Width property of convolution.

# Resposta de Estado Zero (vii)

- **Integral de Convolução**

Resposta de Estado Zero e Causalidade:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Para sistema causal e com estado zero

- A resposta só é iniciada após o início da entrada;

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} \int_{0^-}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0^-}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

O limite considerado será o da integral mesmo que denotato por 0.

# Resposta de Estado Zero (viii)

- **Integral de Convolução**
  - Exemplo: Considere um sistema LTIC cuja resposta ao impulso $h(t)$ é dada abaixo. Determine a resposta $y(t)$ para a entrada $x(t)$.

$$h(t) = e^{-2t}u(t); \quad x(t) = e^{-t}u(t)$$

Ambos os sinais são causais, logo tem-se que:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \qquad t \geq 0, \text{ assim a integral se torna:}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau, \qquad t \geq 0$$

$$y(t) = e^{-2t}\int_0^t e^{-\tau}e^{2\tau}d\tau = e^{-2t}(e^t - 1) = e^{-t} - e^{-2t}, \qquad t \geq 0$$

Lembrando que $y(t) = 0$ para $t < 0$, então $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

# Resposta de Estado Zero (ix)

- **Integral de Convolucão**

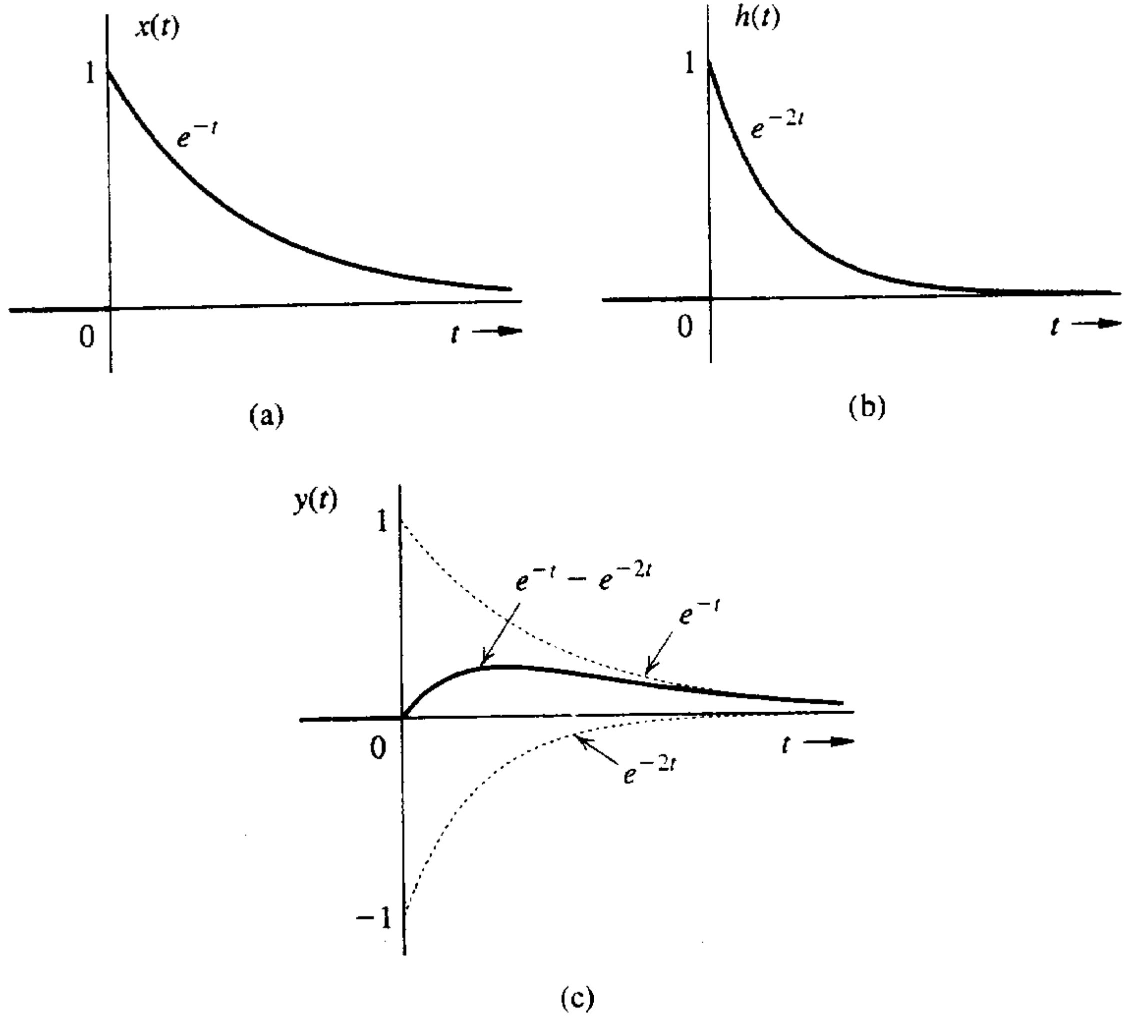



**Figure 2.6** Convolution of $x(t)$ and $h(t)$.

# Resposta de Estado Zero (x)

- **Integral de Convolução**

**TABLE 2.1** Convolution Table

| No. | $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x(t)$ | $\delta(t - T)$ | $x(t - T)$ |
| 2 | $e^{\lambda t}u(t)$ | $u(t)$ | $\dfrac{1 - e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$ |
| 3 | $u(t)$ | $u(t)$ | $tu(t)$ |
| 4 | $e^{\lambda_1 t}u(t)$ | $e^{\lambda_2 t}u(t)$ | $\dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}u(t) \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$ |
| 5 | $e^{\lambda t}u(t)$ | $e^{\lambda t}u(t)$ | $te^{\lambda t}u(t)$ |
| 6 | $te^{\lambda t}u(t)$ | $e^{\lambda t}u(t)$ | $\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$ |
| 7 | $t^N u(t)$ | $e^{\lambda t}u(t)$ | $\dfrac{N!\,e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}}u(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\dfrac{N!\,t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}u(t)$ |
| 8 | $t^M u(t)$ | $t^N u(t)$ | $\dfrac{M!\,N!}{(M+N+1)!}t^{M+N+1}u(t)$ |

# Resposta de Estado Zero (xi)

- **Integral de Convolução**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | $te^{\lambda_1 t}u(t)$ | $e^{\lambda_2 t}u(t)$ | $\dfrac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2)te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}u(t)$ |
| 10 | $t^M e^{\lambda t}u(t)$ | $t^N e^{\lambda t}u(t)$ | $\dfrac{M!\,N!}{(N+M+1)!}t^{M+N+1}e^{\lambda t}u(t)$ |
| 11 | $t^M e^{\lambda_1 t}u(t)$ | $t^N e^{\lambda_2 t}u(t)$ | $\displaystyle\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^k M!(N+k)!\,t^{M-k}e^{\lambda_1 t}}{k!(M-k)!(\lambda_1-\lambda_2)^{N+k+1}}u(t)$ |
| | $\lambda_1 \neq \lambda_2$ | | $\displaystyle+\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k N!(M+k)!\,t^{N-k}e^{\lambda_2 t}}{k!(N-k)!(\lambda_2-\lambda_1)^{M+k+1}}u(t)$ |
| 12 | $e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$ | $e^{\lambda t}u(t)$ | $\dfrac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t} - e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha+\lambda)^2+\beta^2}}u(t)$ |
| | | | $\phi = \tan^{-1}[-\beta/(\alpha+\lambda)]$ |
| 13 | $e^{\lambda_1 t}u(t)$ | $e^{\lambda_2 t}u(-t)$ | $\dfrac{e^{\lambda_1 t}u(t) + e^{\lambda_2 t}u(-t)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 > \mathrm{Re}\,\lambda_1$ |
| 14 | $e^{\lambda_1 t}u(-t)$ | $e^{\lambda_2 t}u(-t)$ | $\dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}u(-t)$ |

# Resposta de Estado Zero (xii)

- **Integral de Convolução**
  - Resposta a Entradas Complexas: Para um sistema LTIC real ($h(t)$ real) então a parte real da entrada gera uma resposta real enquanto que a parte imaginária gera uma resposta imaginária. As duas respostas são somadas para gerar a resposta completa.

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t), \text{ para } h(t) \text{ sendo real, tem-se}$$
$$y(t) = h(t) * [x_r(t) + jx_i(t)] = h(t) * x_r(t) + h(t) * jx_i(t) \therefore$$
$$y(t) = y_r(t) + jy_i(t)$$

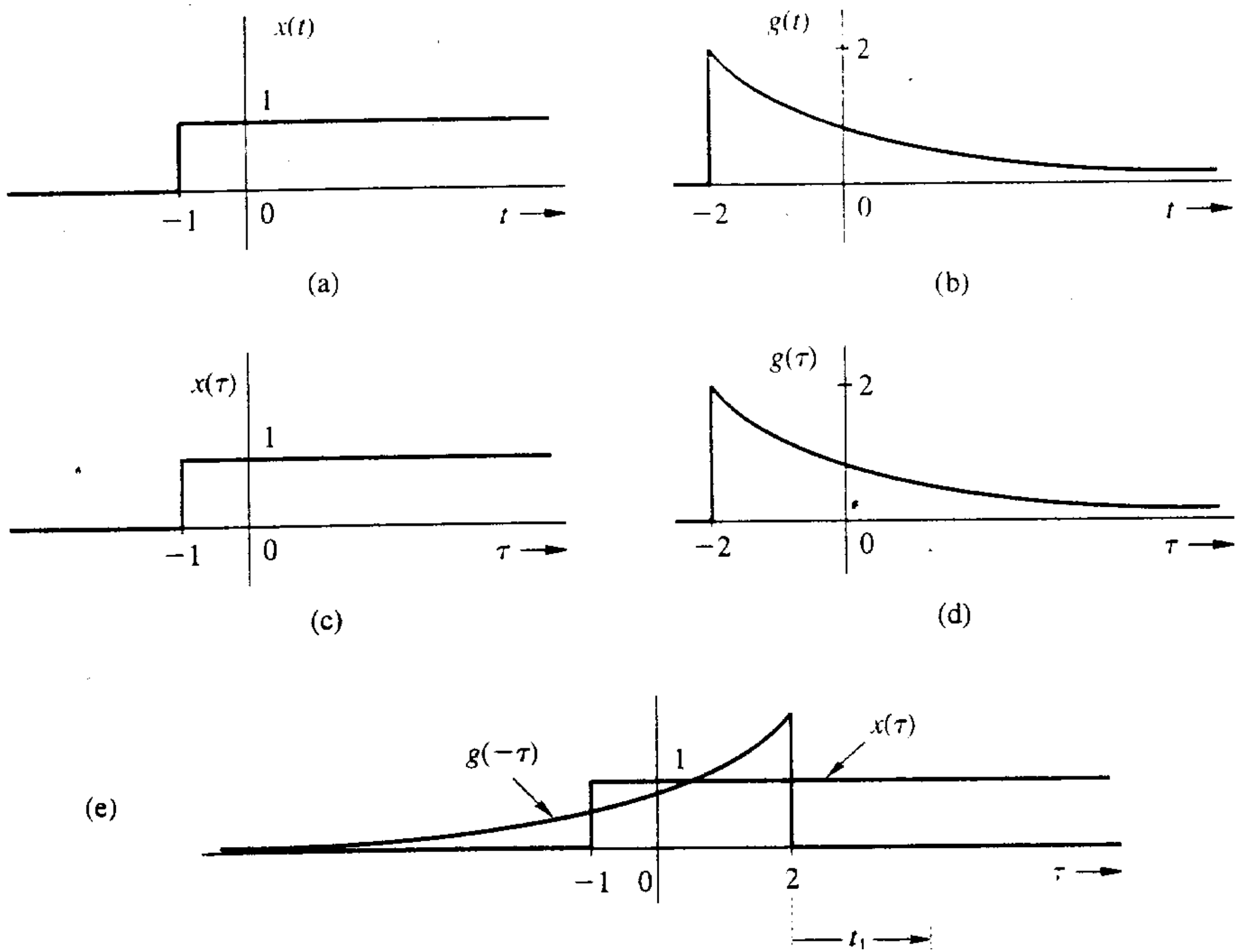
  - Resposta a Entradas Múltiplas: Aplica-se o princípio da superposição. Cada entrada é considerada separadamente e a soma das saídas individuais determina a saída total dos sistema.

# Resposta de Estado Zero (xiii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Possibilita interpretação gráfica que é útil para avaliar a integral de convolução de sinais complexos.
  - Permite a visualização do resultado da integral, freqüentemente útil para tarefas tais como amostragem ou filtragem.
  - Viabiliza o cálculo da integral para sinais que não possuam descrição analítica, mas apenas gráfica.
  - Note que a integral não se faz com respeito a $t$, que é apenas um parâmetro do processo (e não a variável independente).
  - A integral de convolução só existe para o período de tempo em que a moldura móvel coexiste com o gráfico fixo.
  - Pode-se calcular graficamente $x(t)*g(t)$ ou $g(t)*x(t)$.

# Resposta de Estado Zero (xiv)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**



# Resposta de Estado Zero (xv)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

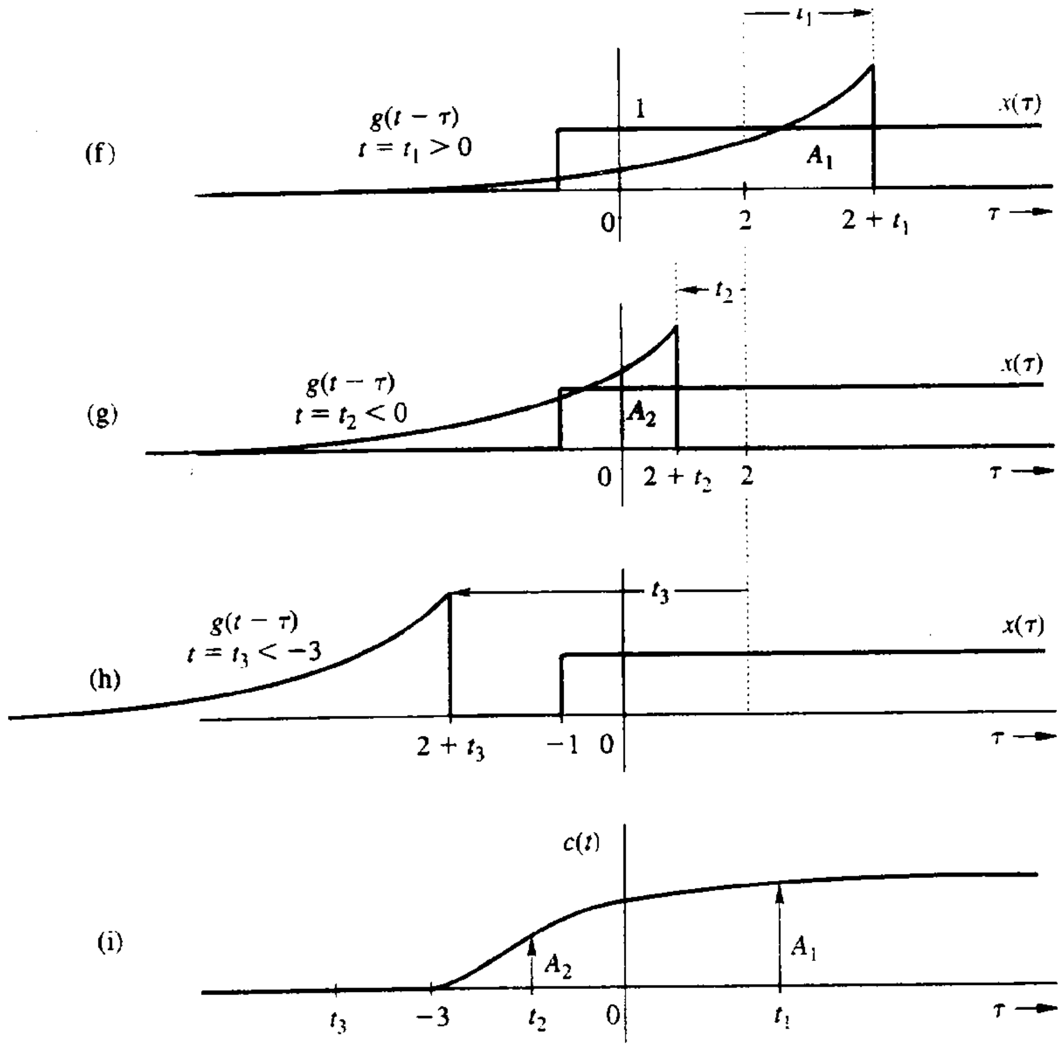



**Figure 2.7** Graphical explanation of the convolution operation.

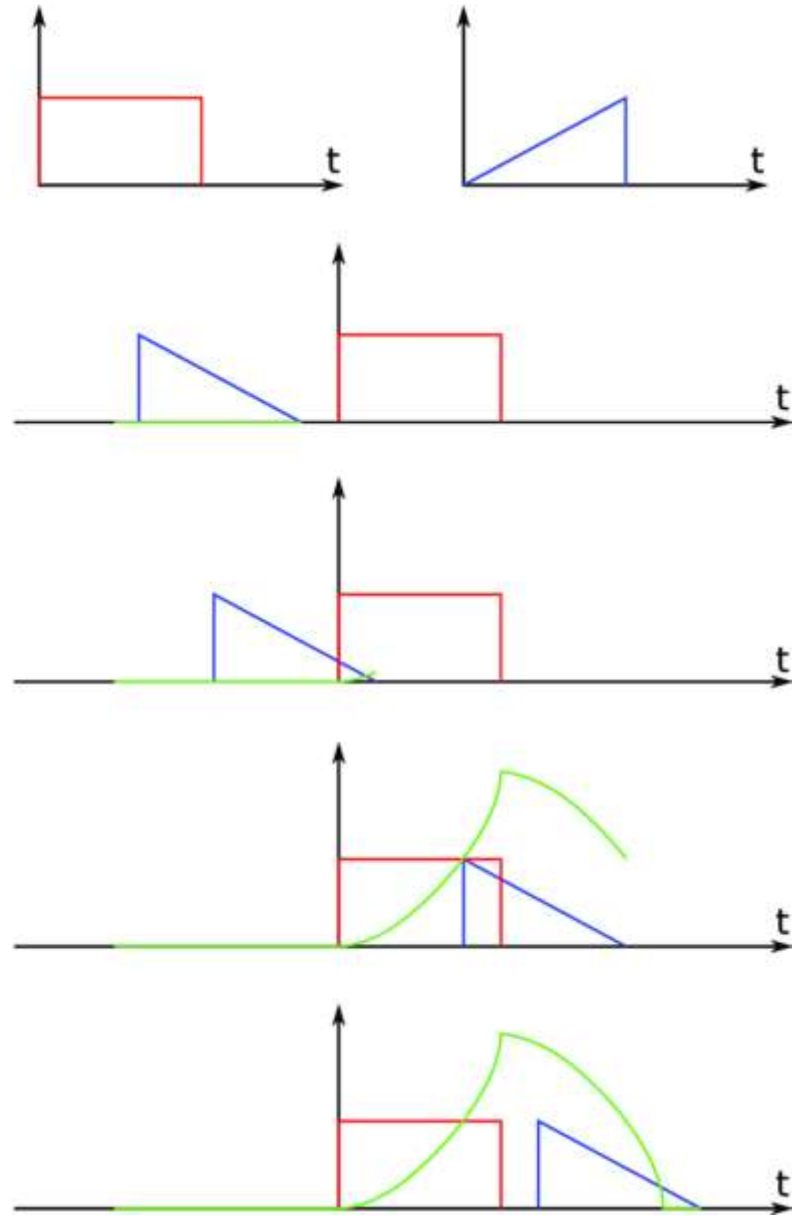
# Resposta de Estado Zero (xvi)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Procedimento Gráfico:

1. Mantenha a função $x(\tau)$ fixa.
2. Visualize a função $g(\tau)$ como uma moldura rígida. Rotacione a moldura em torno do eixo vertical para obter $g(-\tau)$.
3. Desloque $g(-\tau)$ ao longo do eixo $\tau$ por $t_0$ (em unidade de tempo do problema) para obter $g(t_0 - \tau)$.
4. A área sob o produto de $x(\tau)$ e $g(t_0 - \tau)$ é $c(t_0)$ o valor da integral de convolução para $t = t_0$.
5. Repita o procedimento, deslocando a moldura sobre o eixo $\tau$, para obter $c(t)$ para $\forall t$.

# Resposta de Estado Zero (xvii)

- **Solução Gráfica para Integral de Convolução:**
  - Visualização da operação:
    - Giro e atraso da função que vai se mover (função azul) com respeito à moldura fixa (função vermelha);
    - Posicionamento da função azul à esquerda, posição de partida em $-\infty$;
    - Determinação dos intervalos de integração e calculo da integral (função verde);



# Resposta de Estado Zero (xvii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo: Determine graficamente a $y(t)= x(t)*h(t)$.

$$x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Como as funções a serem convoluídas só vão se sobrepor para $t > 0$:

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

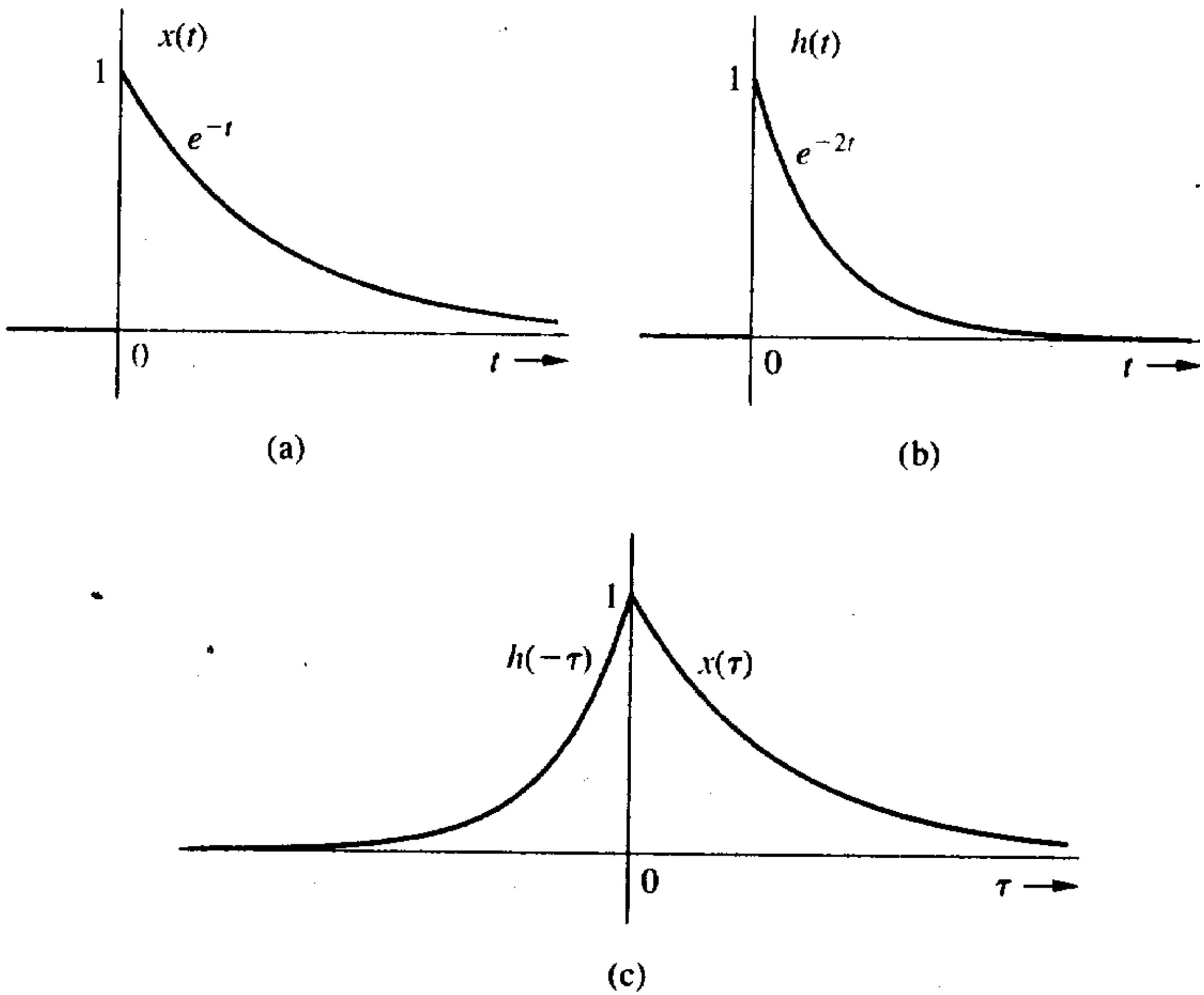
As funções a convoluir : $x(\tau) = e^{-\tau}$, $h(t-\tau) = e^{-2(t-\tau)}$, logo,

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-2t}(e^{t}-1) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Logo, $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

# Resposta de Estado Zero (xviii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo:



# Resposta de Estado Zero (xix)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo:

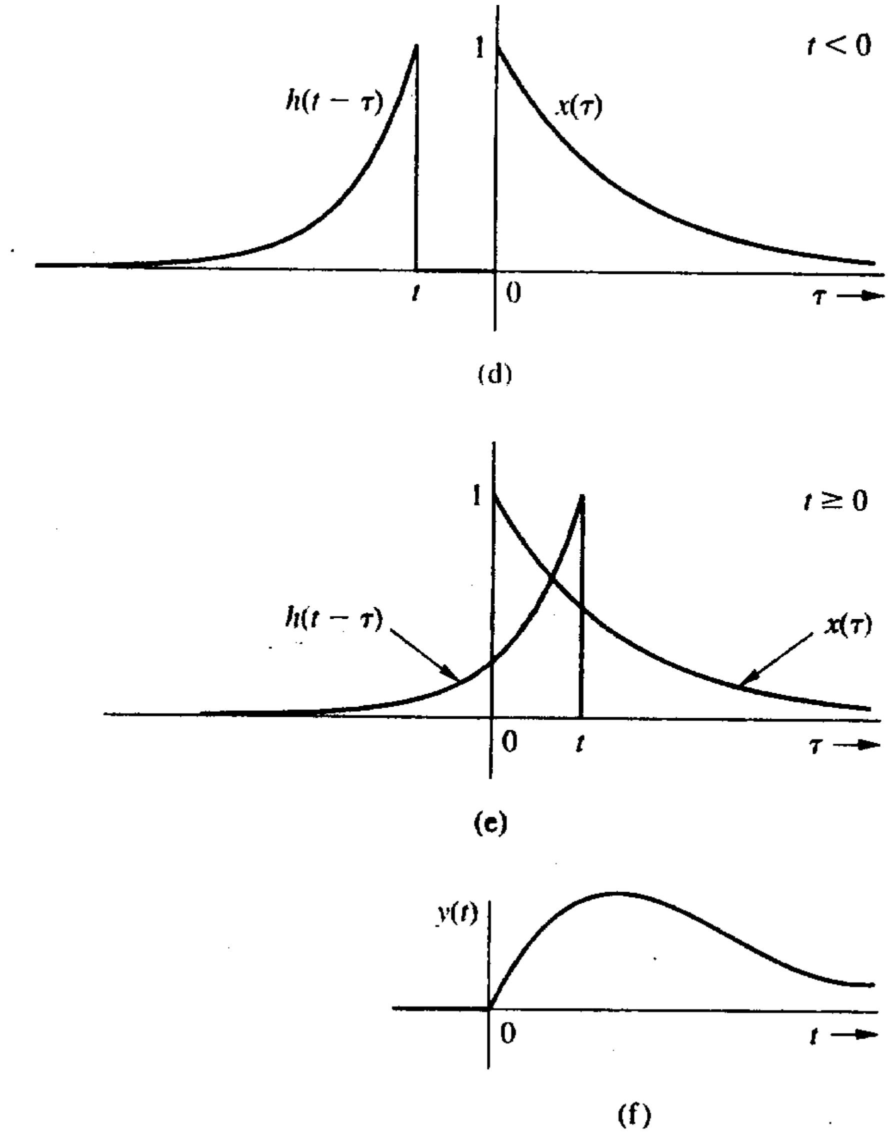



**Figure 2.8** Convolution of $x(t)$ and $h(t)$.

# Resposta de Estado Zero (xx)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo: Determine graficamente a $y(t) = x(t) * h(t)$.

$$x(t) = 1u(t),\ g(t) = \begin{cases} 2e^{-t}u(t) \\ -2e^{2t}u(-t) \end{cases} \Rightarrow g(t-\tau) = \begin{cases} 2e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) \\ -2e^{2(t-\tau)}u(-t+\tau) \end{cases}$$

Cálculo para $t < 0$, a superposição ocorre para $\tau \geq 0$:

$$c(t) = \int_0^\infty x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty -2e^{2(t-\tau)}d\tau = -e^{2t}$$

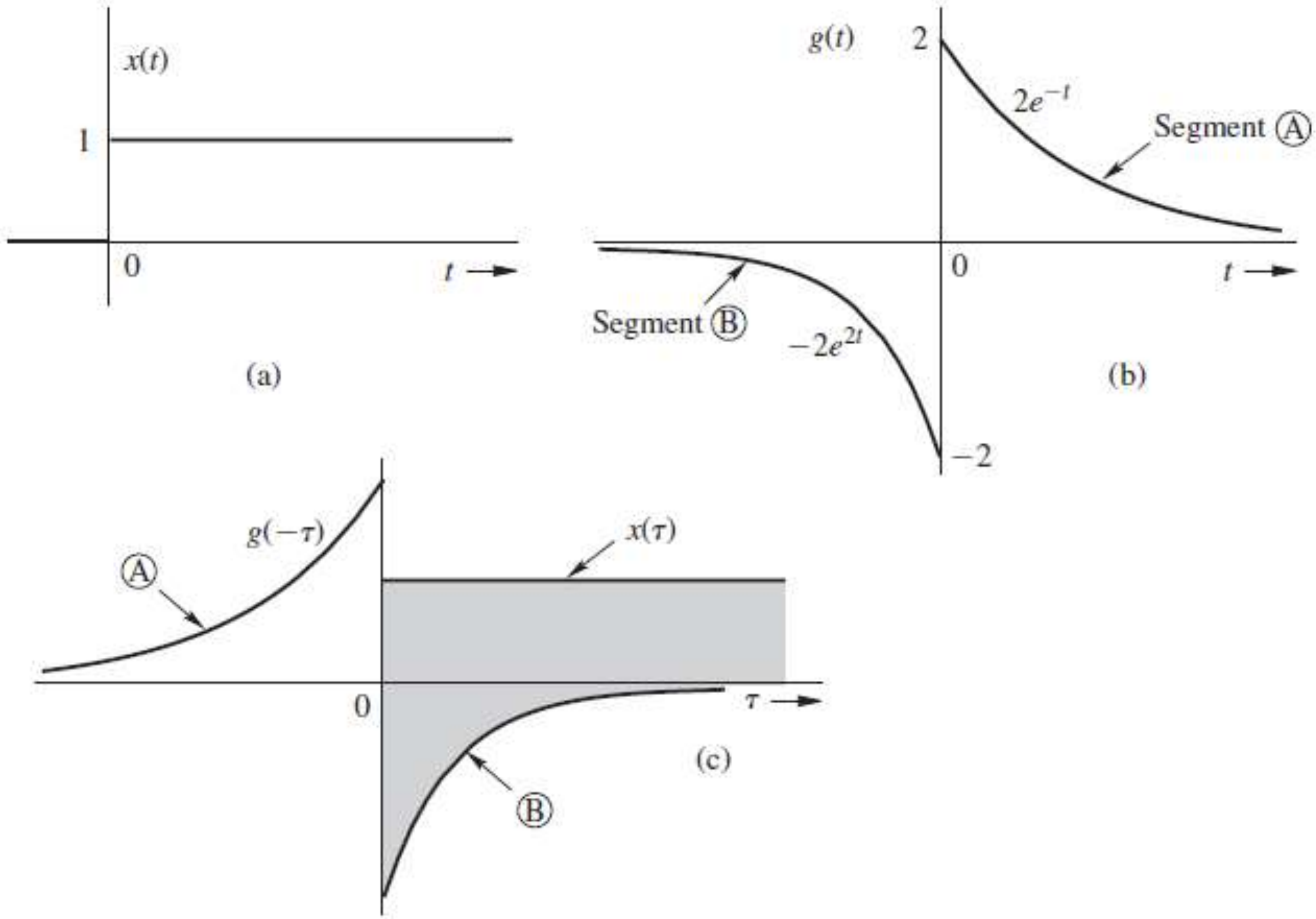
Cálculo para $t \geq 0$, a superposição ocorre para $\tau \geq 0$:

$$c(t) = \int_0^\infty x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.2e^{-(t-\tau)}d\tau + \int_t^\infty 1(-2e^{2(t-\tau)})d\tau \therefore$$

$$c(t) = 2(1-e^{-t}) - 1 = 1 - 2e^{-t}$$

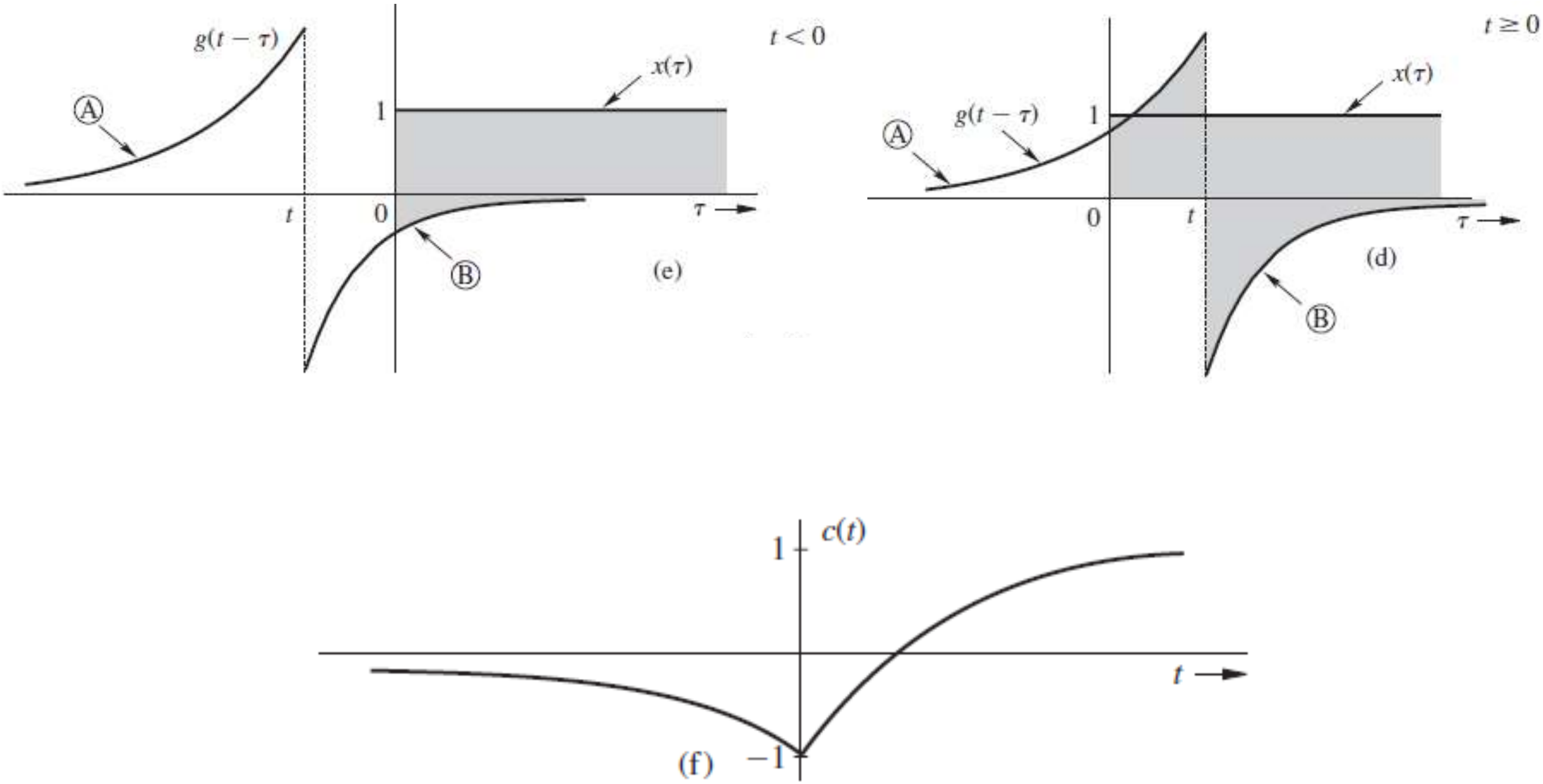
# Resposta de Estado Zero (xxi)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo:



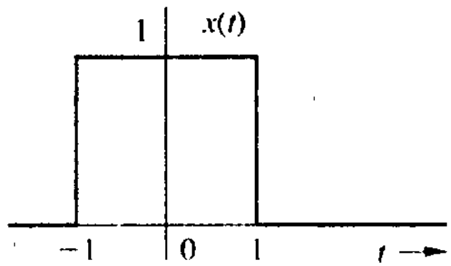
# Resposta de Estado Zero (xxii)

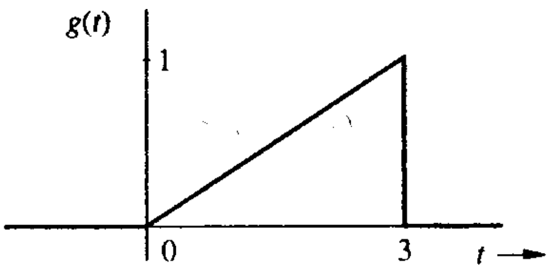
- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo:



# Resposta de Estado Zero (xxiii)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo: Encontre a integral de convolução da figura:




As funções da figura acima são : $x(t)=1$ e $g(t)=t/3$.

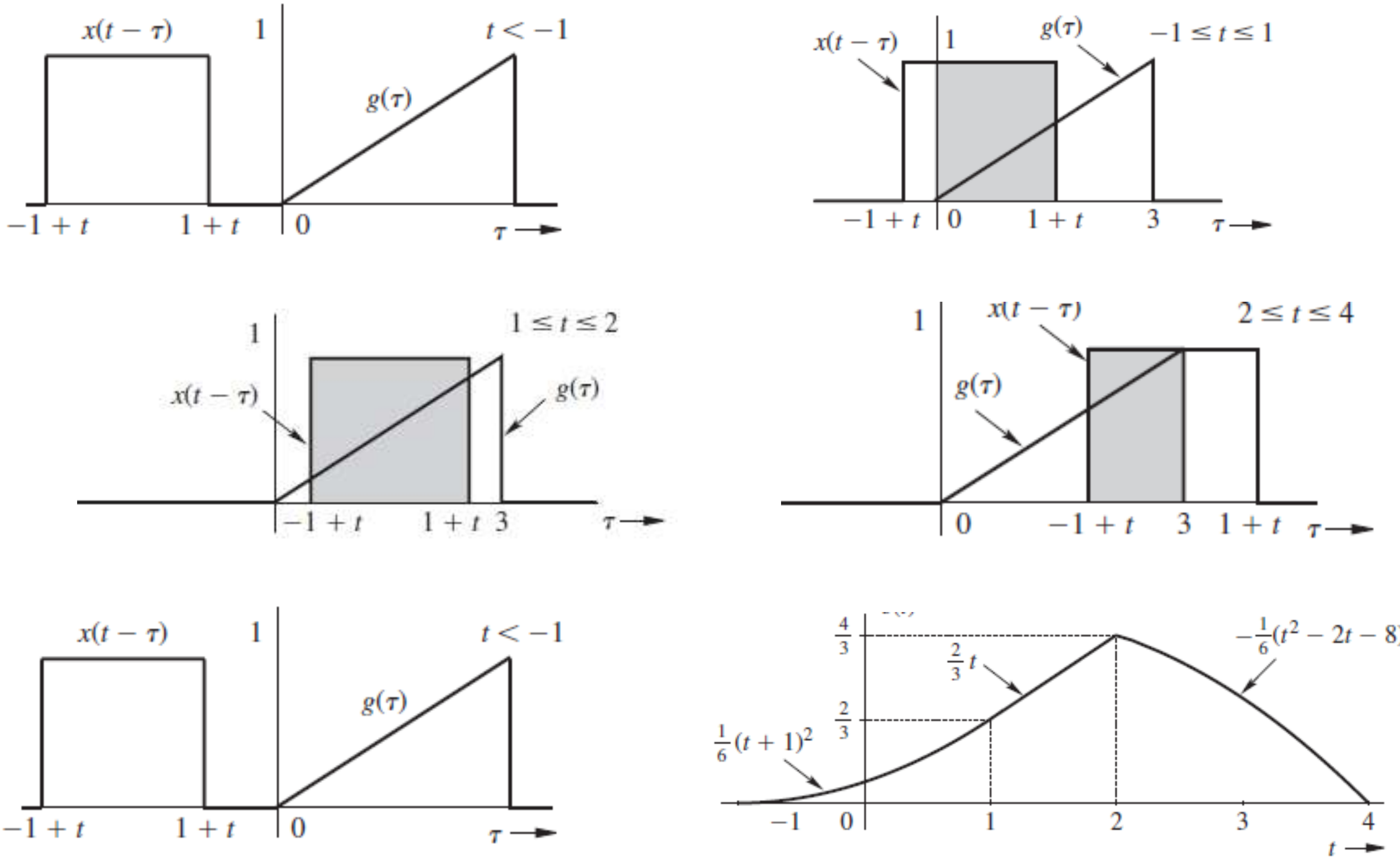
A convolução é $c(t)=g(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\tau/3.1d\tau \therefore$

$$c(t)=\int_{-\infty}^{0}0.1d\tau+\int_{0}^{1+t}\tau/3.1d\tau+\int_{-1+t}^{1+t}\tau/3.1d\tau+\int_{-1+t}^{3}\tau/3.1d\tau+\int_{4}^{\infty}0.1d\tau \therefore$$

$$c(t)=\underbrace{0}_{t\leq -1}+\underbrace{\frac{1}{6}(t+1)^2}_{-1\leq t\leq 1}+\underbrace{\frac{2}{3}t}_{1\leq t\leq 2}-\underbrace{\frac{1}{6}(t^2-2t-8)}_{2\leq t\leq 4}+\underbrace{0}_{t\geq 4}$$

# Resposta de Estado Zero (xxiv)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**

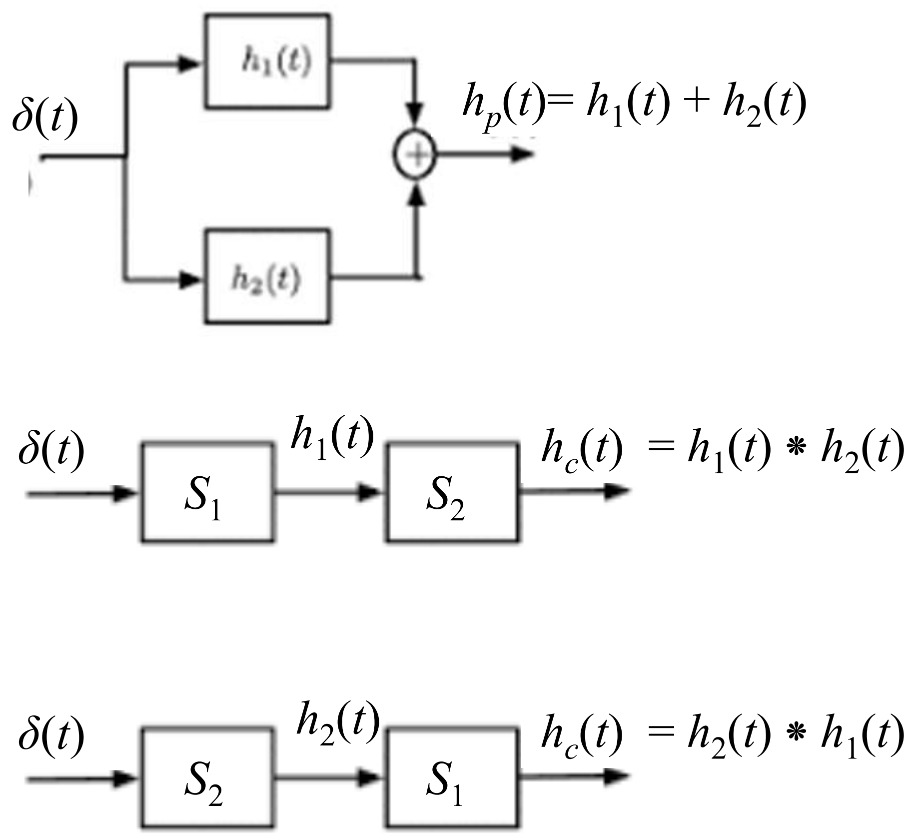


# Resposta de Estado Zero (xxv)

- **Integral de Convolução: Solução Gráfica**
  - Largura da função convolvida: O tempo (largura) que um sinal de duração $T_1$ leva para passar completamente por um outro sinal de duração $T_2$, tempo em que estes sinais tenham alguma superposição, é dado por $T_1 + T_2$.
  - Papel de funções sem existência física: Estas, analiticamente tratáveis como a função impulso ou a função exponencial incessante, produzem conhecimento sobre o comportamento do sistema e sua resposta a entradas arbitrárias.

# Resposta de Estado Zero (xxvi)

- **Integral de Convolução: Sistemas Interconectados**
  - Sistema complexo composto por subsistemas mais simples e portanto mais facilmente caracterizados. Vai-se considerar dois tipos de interconexões: paralela e cascata.



# Resposta de Estado Zero (xxvii)

- **Integral de Convolução: Sistemas Interconectados**
  - Comutatividade da convolução usada com integrador ideal.
  - Diferenciador ideal e integrador ideal para produzir um sistema inversor, recuperando um dado sinal de entrada.

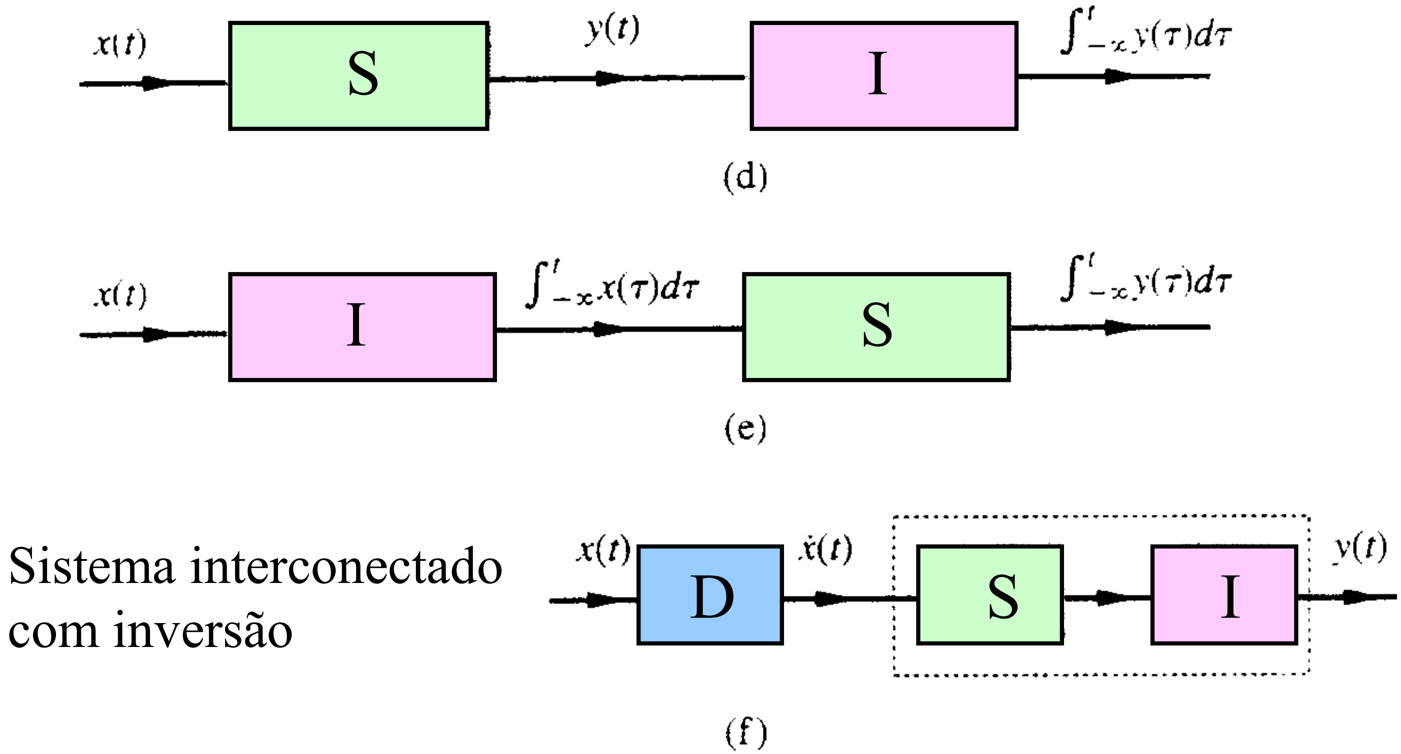



**Figure 2.15** Interconnected systems.

# Resposta de Estado Zero (xxviii)

- **Integral de Convolução: Função Exponencial Incessante** $(e^{st})$
  - Função característica: Entrada para qual um sistema responde da mesma forma, a exponencial é o único caso.

Para um sistema, sejam sua resposta ao impulso $h(t)$ e sua entrada $e^{st}$

($s$ é uma variável complexa) então a resposta do sistema $y(t)$ é:

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \;\therefore$$

$y(t) = H(s) e^{st}$, esta é uma propriedade fundamental de todo sistema LTI

onde $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$, válido para integral finita.

$H(s)$ é uma constante para um dado valor de $s$.

Função de transferência : $H(s) = \left. \dfrac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}} \right|_{\text{entrada} = \text{incessante} \exp(st)}$

# Resposta de Estado Zero (xxix)

- **Integral de Convolução: Função Exponencial Incessante** $(e^{st})$
  - A função de transferência, em geral, só tem sentido para sistema LTIC. Tal função pode ser expressa em termos de polinômio:

Considerando-se a exponencial incessante e sua resposta,

na forma de polinômio: $H(s)[Q(D)e^{st}] = P(D)e^{st}$

Como $D^r e^{st} = \dfrac{d^r e^{st}}{dt^r} = s^r e^{st} \Rightarrow \begin{cases} P(D)e^{st} = P(s)e^{st} \\ Q(D)e^{st} = Q(s)e^{st} \end{cases}$

Conclui-se que a função de transferência é $H(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

# Resposta de Estado Zero (xxx)

- **Integral de Convolução: Resposta Total**
  - Resposta total = Resposta entrada-zero + Resposta estado-zero=

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{R}} c_k t^{k-1} e^{\lambda_k t} + \sum_{\mathrm{k}=R+1}^{\mathrm{N}} c_k e^{\lambda_k t} + x(t) * h(t), \text{ para autovalores repetidos e distintos}$$

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} c_k e^{\lambda_k t} + x(t) * h(t), \text{ para autovalores distintos}$$

A discussão a seguir considera o caso de autovalores distintos.

Exemplo : circuito RLC : entrada é fonte de tensão, saída é a corrente,

$L = 1H$, $R = 3\Omega$, $C = 0.5F$, $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$

$$\text{corrente total} = \underbrace{\left(-5e^{-t} + 5e^{-2t}\right)}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{\left(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}\right)}_{\text{estado zero}}, \quad t \geq 0$$

# Resposta de Estado Zero (xxxi)

- **Integral de Convolução: Resposta Total**

$$\text{corrente total} = (-5e^{-t} + 5e^{-2t}) + (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}) \therefore$$

$$\text{corrente total} = (-5e^{-t} - 5e^{-t}) + (5e^{-2t} + 20e^{-2t}) - 15e^{-3t} \therefore$$

$$\text{corrente total} = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{\text{resposta natural } y_n(t)} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{\text{respota forçada } y_\phi(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

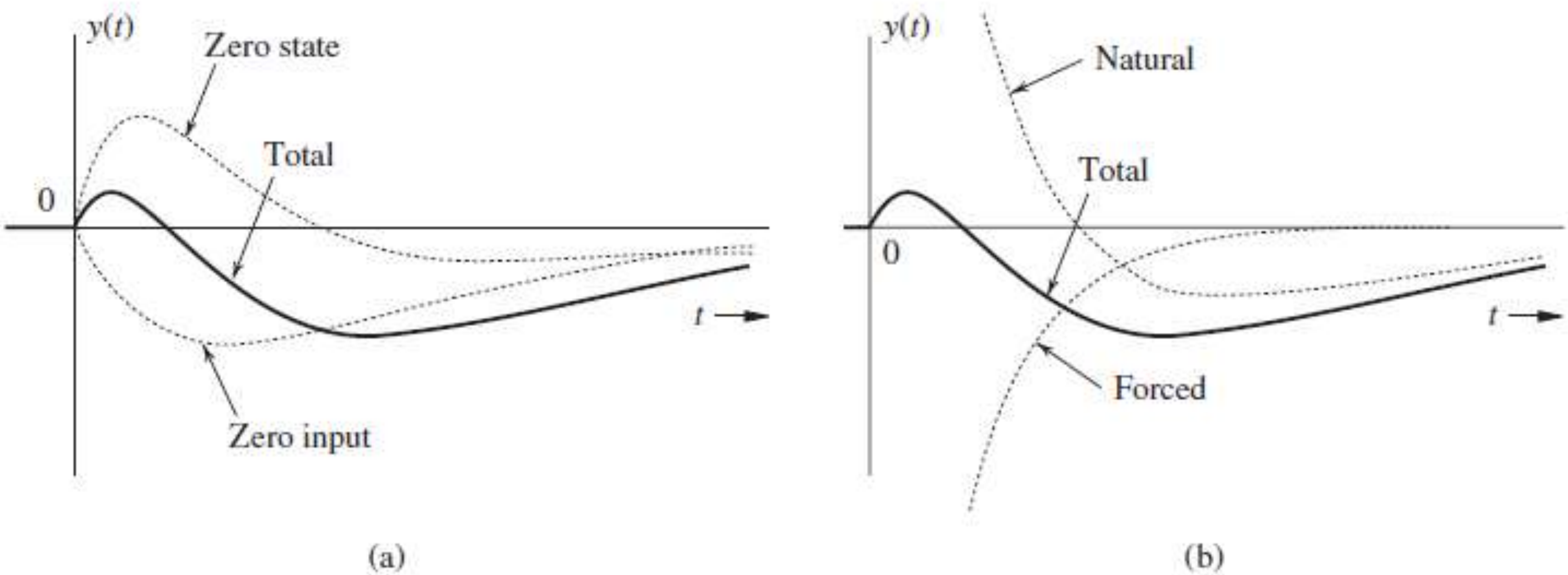



Figure 2.16 Total response and its components.

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (i)

- **Introdução**
  - Soluciona-se com componente natural e componente forçado. Para análise e síntese de sistemas este método possui perdas.
    - A resposta natural do sistema (solução homogênea ou solução complementar) é formada por todos os termos envolvendo os modos característicos do sistema.
    - A resposta forçada do sistema (solução particular) compõe-se dos termos que não envolvem os modos característicos.

$$\text{resposta total} = y(t) = y_n(t) + y_\phi(t) \Rightarrow$$

$$Q(D)[y_n(t) + y_\phi(t)] = P(D)x(t) \therefore \begin{cases} Q(D)y_n(t) = 0 \\ Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t) \end{cases}$$

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (ii)

- **Resposta Forçada**

  Método dos coeficientes indeterminados

  – Método simples de ser calculada para entradas que produzem número finito de derivadas independentes. Casos importantes são:

    - Função exponencial: As derivadas são da mesma tipo.
    - Polinômio em *t*: As derivadas são polinômios em *t*.

  – A resposta forçada é portanto uma combinação linear da função de entrada ($x(t)$) e suas derivadas.

  $Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t)$, os coeficientes não determinados são calculados igualando-se termos dos dois lados da igualdade.

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (iii)

- **Resposta Forçada**

  Método dos coeficientes indeterminados

  – A tabela mostra algumas funções de entrada e a saída forçada:

| Entrada | Saída |
|---|---|
| $e^{\zeta t}, \quad \zeta \neq \lambda_i \quad (i = 1,2,\ldots,N)$ | $\beta e^{\zeta t}$ |
| $e^{\zeta t}, \quad \zeta = \lambda_i \quad (i = 1,2,\ldots,N)$ | $\beta t e^{\zeta t}$ |
| $k$ (um valor constante) | $\beta$ |
| $\cos(\omega t + \theta)$ | $\beta \cos(\omega t + \theta)$ |
| $(t^r + \alpha_{r-1} t^{r-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0) e^{\zeta t}$ | $(\beta_r t^r + \beta_{r-1} t^{r-1} + \ldots + \beta_1 t + \beta_0) e^{\zeta t}$ |

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (iv)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo : Resolva a equação diferencial : $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$

para uma entrada $x(t) = t^2 + 5t + 3$, e $y(0^+) = 2,\ \dot{y}(0^+) = 3.$

Polinômio característico : $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, assim :

$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$

Para $x(t)$ acima, a resposta forçada é $y_\phi(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$

Para o polinômio acima tem-se : $(D^2 + 3D + 2)y_0(t) = Dx(t) \therefore$

$\therefore 2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5 \therefore$

$$\begin{cases} 2\beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 + 6\beta_2 = 2 \\ 2\beta_0 + 3\beta_1 + 2\beta_2 = 5 \end{cases} \therefore \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_0 = 1 \end{cases}$$

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (v)

- **Solução Clássica de Equações Diferenciais: Resposta Forçada**

  A solução forçada é $y_\phi(t) = t + 1, \quad t \geq 0$

  A solução completa e sua derivada são :

  $$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + t + 1 \quad t \geq 0$$

  $$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} + 1$$

  $$\text{Para } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = K_1 + K_2 + 1 \\ 3 = -K_1 - 2K_2 + 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} K_1 = 4 \\ K_2 = -3 \end{cases}$$

  Finalmente tem-se que $y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1 \quad t \geq 0$

  – Este requer condições para *t* imediatamente após o instante *t=0*, porque no instante imediatamente anterior a *t=0*, apenas o componente de entrada zero existe.

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (v)

- **Resposta Forçada**
  - Sinal exponencial é do mesmo tipo.

$Q(D)[\beta e^{\zeta t}] = P(D)e^{\zeta t}, \quad$ lembre-se que $D^r e^{\zeta t} = \zeta^r e^{\zeta t}$

Consequentemente: $Q(D)e^{\zeta t} = Q(\zeta)e^{\zeta t}$ e $P(D)e^{\zeta t} = P(\zeta)e^{\zeta t} \Rightarrow$

$$\beta Q(\zeta)e^{\zeta t} = P(\zeta)e^{\zeta t} \therefore \beta = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = H(\zeta)$$

Para a entrada $x(t) = e^{\zeta t}u(t)$, a resposta forçada é dada por

$$y_\phi(t) = H(\zeta)e^{\zeta t} \quad t \geq 0 \Rightarrow$$

Resposta total do sistema para $x(t)$ é: $y(t) = \sum_{j=1}^{N} K_j e^{\lambda_j t} H(\zeta)e^{\zeta t}$,

onde as constantes $K_j$ são calculadas pelas condições auxiliares.

# Solução Clássica de Equações Diferenciais (vi)

- **Resposta Forçada**
  - O método clássico, por vezes, é relativamente simples quando comparado com o método para encontrar os componentes com entrada e estado zero. Contudo, o método clássico apresenta as seguintes limitações:
    - Geração de resposta completa, não permitindo a identificação de cada componente da resposta.
    - Impossibilidade de ser aplicado a qualquer classe de entradas (lembre-se da restrição com respeito às derivadas de $x(t)$).
    - As condições auxiliares são definidas para o instante imediatamente após o zero.

# Estabilidade de Sistemas (i)

- **Estabilidade BIBO**
  - Exemplo ilustrativo: Um cone acomodado em um de seus estados de equilíbrio (estados em que o cone pode permanecer para sempre): colocado sobre sua base circular (i), sobre seu vértice no cume (ii) e sobre sua lateral (iii). Se levemente perturbado em seu estado atual, o cone:
    - O cone no estado (i) retorna à sua posição original após a perturbação: Equilíbrio estável.
    - O cone no estado (ii) move-se cada vez para mais distante de seu estado original: Equilíbrio instável.
    - O cone no estado (iii) nem move-se para mais distante de seu estado original nem volta a seu estado de equilíbrio: Equilíbrio neutro.
    - Pequenas perturbações causam resposta pequena (equilíbrio estável) ou respostas ilimitadas (equilíbrio instável).

# Estabilidade de Sistemas (ii)

- **Estabilidade BIBO**
  - Se toda entrada limitada produzir saída limitada no sistema, este é dito estável BIBO. Em contraste, se alguma entrada limitada resultar em resposta ilimitada o sistema é definido com instável BIBO.

Para um sistema LTIC

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow |y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau,$$

Como $x(t)$ é limitada, logo $|x(t-\tau)| < K_1 < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau,$

Logo a condição necessária e suficiente para estabilidade BIBO é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty.$$

Se a $h(t)$ for absolutamente integrável, então o sistema é BIBO estável.

# Estabilidade de Sistemas (iii)

- **Estabilidade BIBO**
  - A condição $M \leq N$ é necessária mas não suficiente, pois se M>N então o sistema é instável (derivação de função impulso).
  - Este é um critério de estabilidade externa pois pode ser verificada a partir de medidas nos terminais externos.
  - A estabilidade externa (BIBO) pode não indicar corretamente a estabilidade interna. Nem sempre o comportamento interno de um sistema pode ser verificado a partir dos terminais externos.
    - Existe equivalência entre estabilidade interna e externa para sistema que é controlável (pode-se controlar seu estado a partir de entradas externas) e observável (sabe-se o estado a partir do monitoramento da saída).
    - A estabilidade interna implica na estabilidade externa.

# Estabilidade de Sistemas (iv)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**
  - Um sistema LTI e causal é internamente estável se ele permanecer em um dado estado (estado de equilíbrio) indefinidamente, na ausência de entrada externa.
    - Todo modo característico de um sistema estável surgido como resultado de condições iniciais diferentes de zero, deve tender a zero quando o tempo tende a infinito.
    - Se ao menos um dos modos, crescer com o passar do tempo, o sistema é rotulado como instável.
    - Se alguns modos nem decrescem a zero nem crescem indefinidamente, enquanto outros modos decrescem a zero, este é um sistema marginalmente estável.
    - A estabilidade interna é também chamada de estabilidade assintótica ou estabilidade no sentido de Lyapunov.

# Estabilidade de Sistemas (v)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

Seja um sistema LTIC definido pelo polinômio : $Q(D)y(t) = P(D)x(t)$,

a localização das raízes características determinam a estabilidade interna.

Para modos carcterísticos da forma $e^{\lambda_k t}$ e $te^{\lambda_k t}$, tem-se que o sistema é :

- Assintoticamente estável se

modos $\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para $\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \forall \lambda_k$.

- Instável se

modos $\rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty, \exists \lambda_K / \operatorname{Re}\lambda_k > 0$.

- Marginalmente estável se

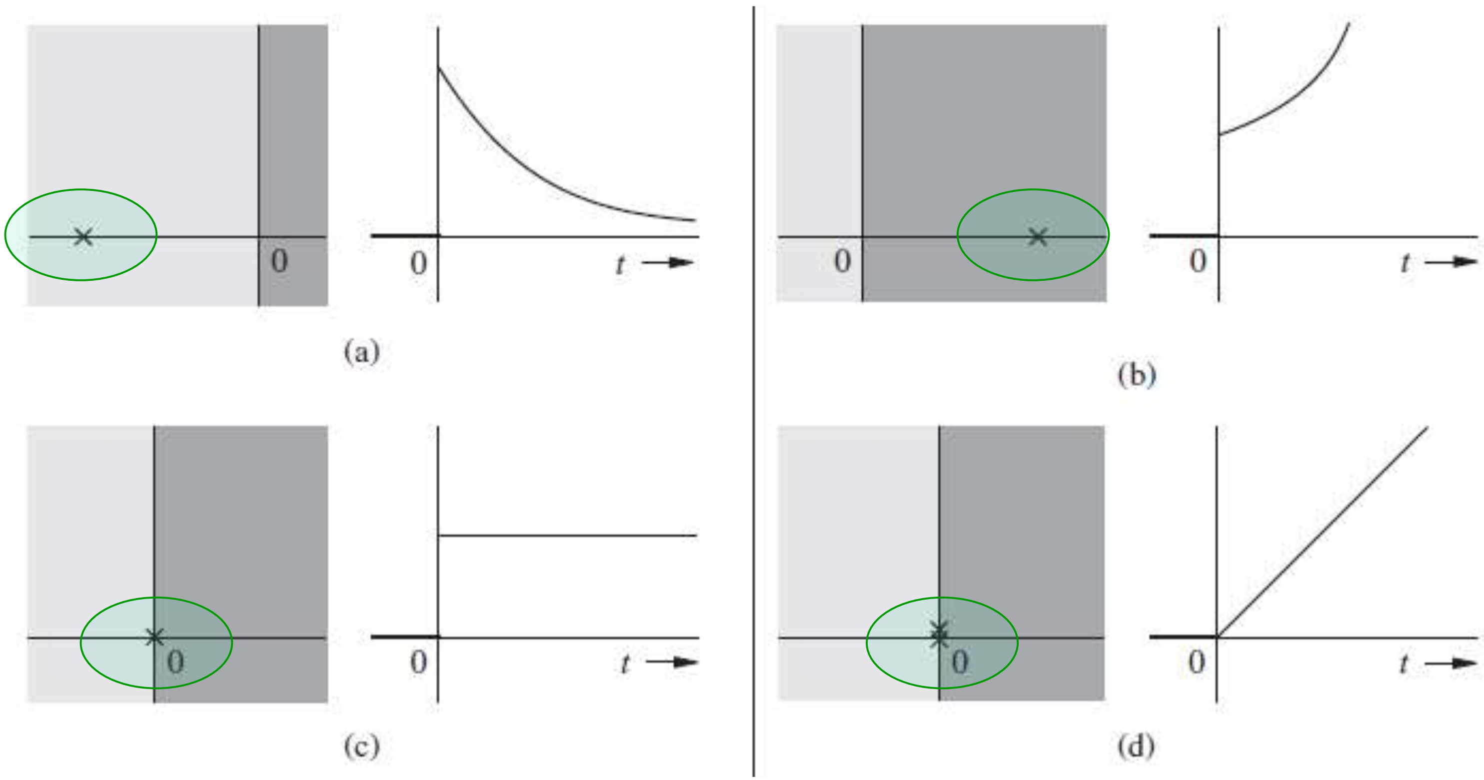
modos geram senoides quando $t \rightarrow \infty$ para $\operatorname{Re}\lambda_k = 0, \forall \lambda_k$.

Cabe observar que raízes imaginárias repetidas tornam o sistema instável.

# Estabilidade de Sistemas (vi)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**
  - Localização das raízes características e seus modos característicos

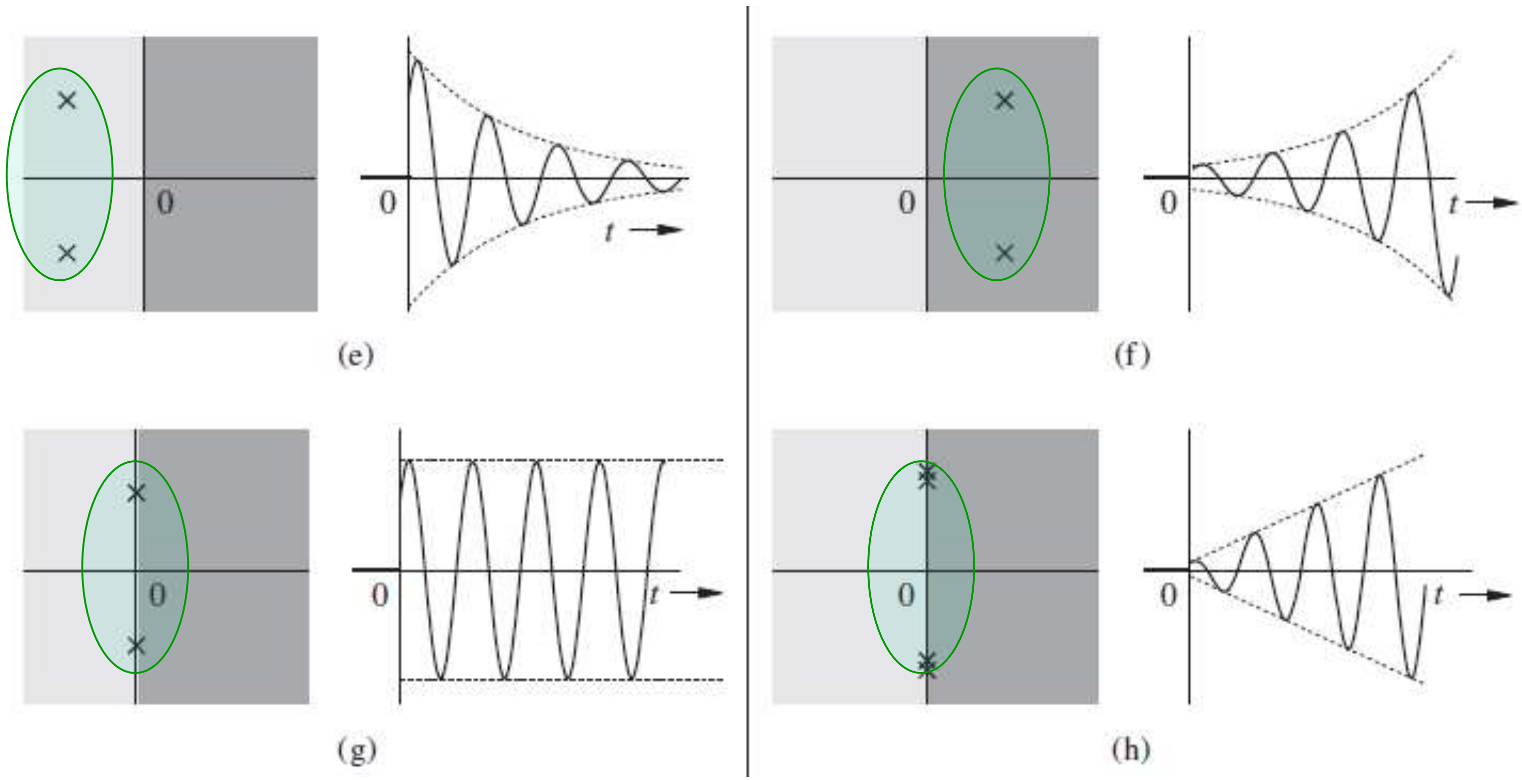
| Posição das raízes características | Resposta de entrada zero | Posição das raízes características | Resposta de entrada zero |
|---|---|---|---|



# Estabilidade de Sistemas (vii)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**
  - Localização das raízes características e seus modos característicos

Posição das raízes características | Resposta de entrada zero | Posição das raízes características | Resposta de entrada zero



# Estabilidade de Sistemas (viii)

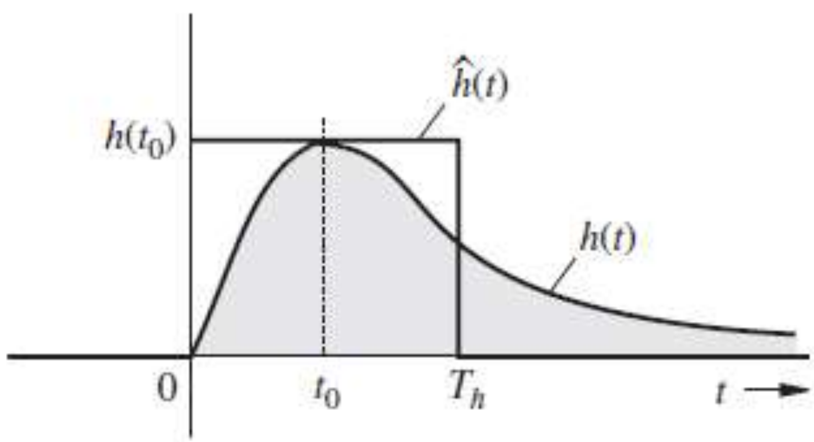
- **Estabilidade Interna (Assintótica)**
  - Sumário:
    - Um sistema LTIC é assintoticamente estável, se e só se, todas suas raízes características (autovalores), distintas ou com repetição, estão no semiplano esquerdo.
    - Um sistema LTIC é instável, se e só se, uma ou ambas condições forem verdadeiras: (i) ao menos uma das raízes características está no semiplano direito; (ii) existem raízes repetidas sobre o eixo imaginário.
    - Um sistema LTIC é marginalmente estável, se e só se, não existirem raízes características no semiplano direito e existirem raízes não repetidas sobre o eixo imaginário.

# Estabilidade de Sistemas (ix)

- **Relação entre Estabilidade Interna e Externa**
  - Estabilidade interna (de entrada zero) é determinada para condições iniciais não nulas e entrada nula, enquanto que a estabilidade externa (de estado zero) é determinada com condições iniciais nulas e entrada diferente de zero.
  - Estabilidade interna assegura estabilidade externa mas o inverso não é verdadeiro.

# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (i)

- **Comportamento Depende dos Modos Característicos**
  - O comportamento do sistema depende dos modos característicos em termos de módulo, tempo e precisão.
- **Tempo de Resposta de um Sistema: A sua Constante de Tempo**
  - Uma entrada é respondida após algum tempo de sua aplicação. Tal intervalo de tempo é chamado constante de tempo do sistema.




  - $T_h$ é o tempo para responder plenamente a um impulso.
  - A rapidez de um sistema é indicada por sua constante de tempo: quanto maior for a constante de tempo, mais lento é sua resposta

# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (ii)

- **Tempo de Resposta de um Sistema: A sua Constante de Tempo**

Não existe uma uma definição única de duração efetiva de um sinal para qualquer sistema. No exemplo anterior, a duração é definida pela largura de um pulso retangular $\hat{h}(t)$ em um instante de tempo adequado, no caso, o máximo valor de $h(t)$. assim,

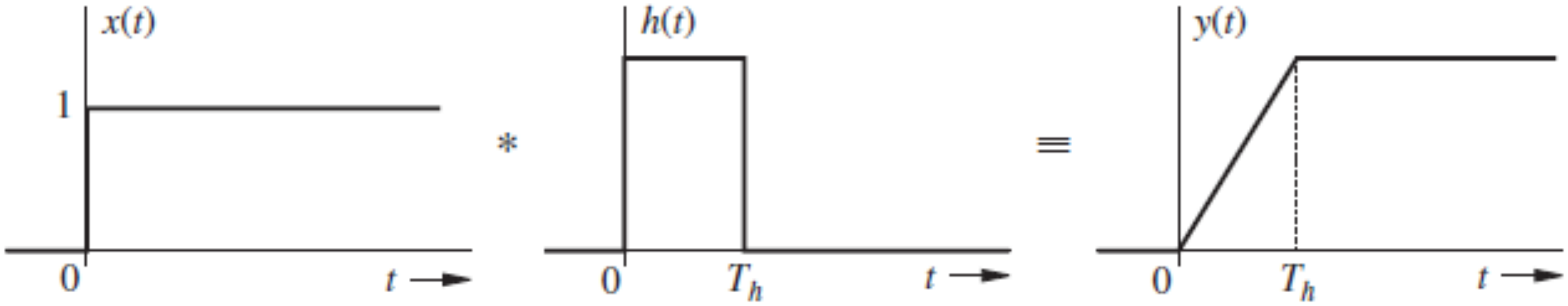
$$T_h h(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \therefore T_h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt}{h(t_0)}$$

Para um sistema com um só modo : $h(t) = Ae^{\lambda t}u(t)$, para $\lambda$ negativo e real.

$$T_h = \frac{1}{A}\int_0^{\infty} Ae^{\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}$$

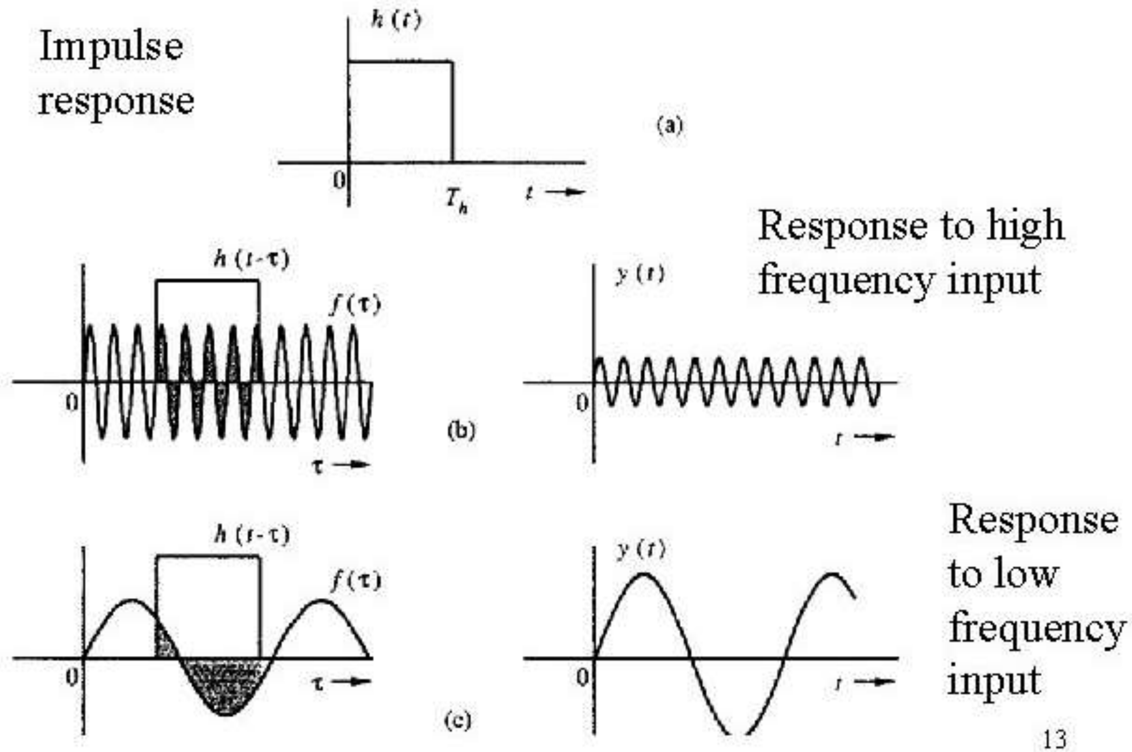
# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (iii)

- **Constante de Tempo e Tempo de Subida**
  - Tempo necessário, em um sistema, para a resposta ao degrau unitário subir de 10 % a 90% de seu valor de estado permanente.
    - A resposta $y(t)$ ao degrau de um sistema é a convolução de $u(t)$ com $h(t)$. Se esta for um pulso retangular de largura $T_h$. Tem-se que o tempo de subida $T_r = T_h$.



# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (iv)

- **Constante de Tempo e Filtragem**
  - Sistema com uma constante de tempo *Th* atua como um filtro passa-baixa com frequência de corte *fc=1/Th*: Sinais de entrada com frequência superior a *fc* Hertz são suprimidos.




  - Convolução com alta frequência
  - Convolução com baixa frequência

# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (v)

- **Constante de Tempo e Dispersão do Pulso (Espalhamento)**
  - A transmissão de um pulso por um sistema causa dispersão ou espalhamento de pulso. Isto é, o pulso de saída é mais largo que o pulso de entrada. Esta característica é importante em sistemas de comunicações nos quais as informações são transmitidas por amplitudes de pulso. Deseja-se evitar que a dispersão cause interferência ou superposição de sinais.
    - Para uma entrada $x(t)$ com largura de pulso $T_x$ tem-se uma saída cuja saída $y(t)$ tem largura $T_y$. Logo,

      $$T_y = T_x + T_h$$

    - O tempo de espalhamento é igual à constante de tempo ou ao tempo de subida do sistema.

# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (vi)

- **Constante de Tempo e Taxa de Transmissão de Informação**
  - Em sistema de comunicações por pulso, que transmitem informação por amplitude de pulso, a taxa de transmissão de informação é proporcional a taxa de transmissão de pulso. Para evitar destruição da informação devido a dispersão dos pulsos durante sua transmissão através do canal, a taxa de informação não deve exceder a largura de banda do canal de comunicação.
    - Como o pulso espalha-se por $T_h$ segundos, então dois pulsos consecutivos devem distar $T_h$ segundos para evitar interferência. Assim, a taxa de transmissão de pulsos não pode ultrapassar $1/T_h$ pulsos/segundo.

# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 2.2-1 até 2.2-7.
  - 2.3-1 até 2.3-4.
  - 2.4-4 até 2.4-10, 2.4-12, 2.4-14 até 2.4-18, 2.4-22 até 2.4-25, 2.4-28 e 2.4-29, 2.4-31, 2.4-34.
  - 2.5-1 até 2.5-4.
  - 2.6-1 até 2.6-3, 2.6-5 e 2.6-6.
  - 2.7-1 até 2.7-2.

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Análise no Domínio do Tempo de Sistemas Discretos

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 3

# Conteúdo

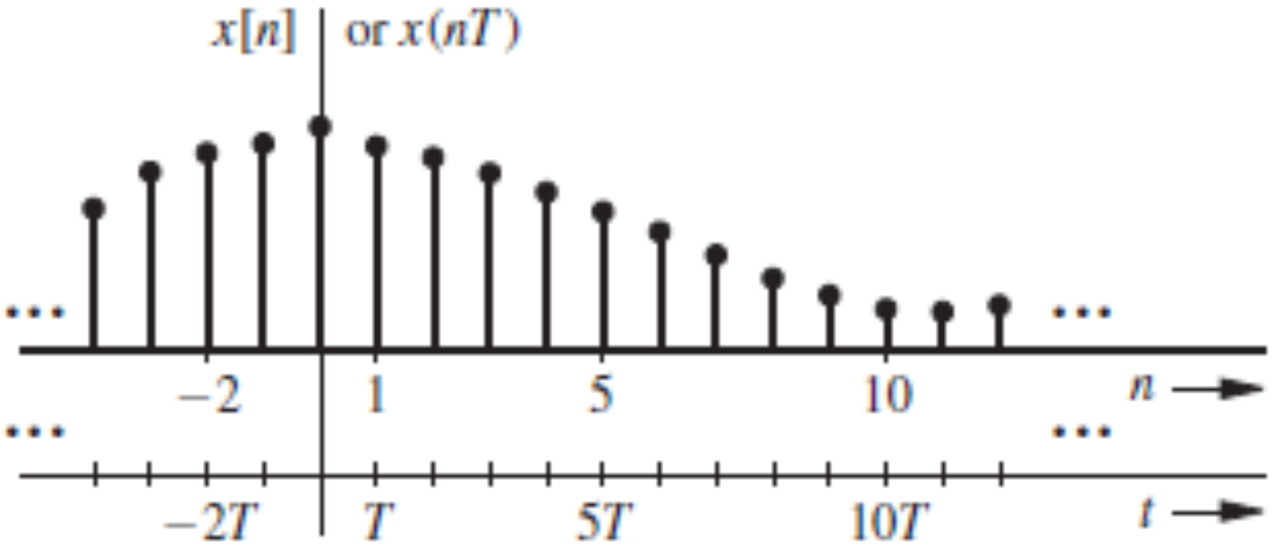
- **Introdução**
- **Operações Úteis com Sinais**
- **Alguns Modelos Úteis de Sinais Discretos no Tempo**
- **Exemplos de Sinais Discretos no Tempo**
- **Equações de Sistemas Discretos no Tempo**
- **Resposta de Entrada Zero**
- **Resposta ao Impulso Unitário**
- **Resposta de Estado Zero**
- **Solução Clássica de Equações de Diferenças**
- **Estabilidade de Sistemas**
- **Parâmetros e Comportamento do Sistema**

# Análise no Tempo de SLDT (i)

- **Introdução**
  - Sistemas discretos são caracterizados por entradas e saídas discretas. Um computador digital é um exemplo típico.
  - Sinal discreto no tempo é basicamente uma seqüência de números que aparecem em situações discretas no tempo (e.g., estudos populacionais, problemas de amortização, modelos de renda nacional, rastreamento de radar) ou em amostragens de sinais contínuos no tempo (e.g., sistemas de dados amostrados e filtragem digital).
    - Notação: $x[n]$ denota o $n$-ésimo número na seqüência rotulada por $x$.
    - Um sinal discreto proveniente de amostragem de $x(t)$ pode ser expresso por $x(nT)$, onde $T$ é o intervalo de amostragem. Lembre-se que $x[n]=x(nT)$.

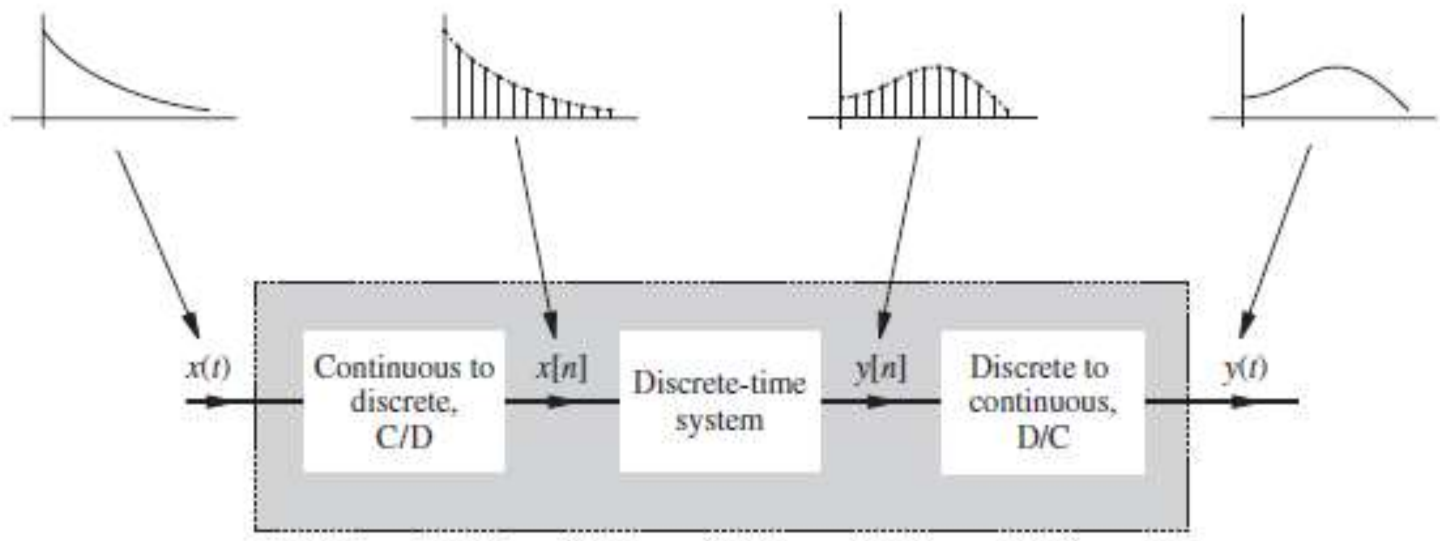
# Análise no Tempo de SLDT (ii)

- **Introdução**
  - Exemplo de sinal discreto no tempo: $x(nT) = e^{-nT} = e^{-0.1n}$



# Análise no Tempo de SLDT (iii)

- **Introdução**
  - Filtros digitais processam sinais contínuos por sistemas discretos. Conversores C/D e D/C são usados neste tipo de configuração. Este processamento é esboçado abaixo:



# Tamanho de Sinais Discretos (i)

- **Energia de um Sinal**
  - Seja um sinal $x[n]$, define-se energia deste sinal como o somatório ao longo do tempo do valor de $x[n]$ elevado ao quadrado, quando este somatório é finito:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2, \quad \text{para valores reais ou complexos.}$$

$$|x[n]| \to 0, \quad \text{para} \quad |n| \to \infty \quad \text{de modo contrário, o somatório não convege.}$$

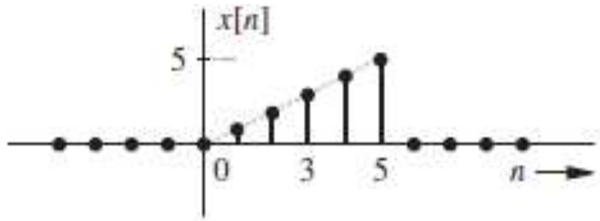
- **Potência de um Sinal**
  - Se a amplitude de $x[n]$ não convergir para zero com o passar do tempo, emprega-se a potência de um sinal, definida como (para o valor calculado finito e diferente de zero):

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2, \quad \text{para valores reais ou complexos.}$$

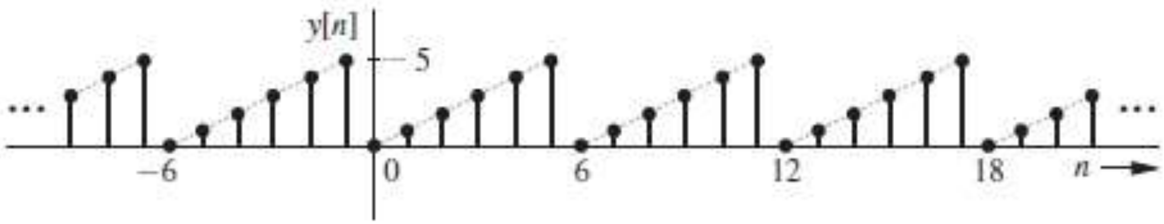
Existem $2N+1$ amostras no intervalo considerado.

# Tamanho de Sinais Discretos (ii)

- **Exemplo**
  - Determine a energia e a potência do sinal $x[n]$ nas figuras (a) e (b), respectivamente.




(a)

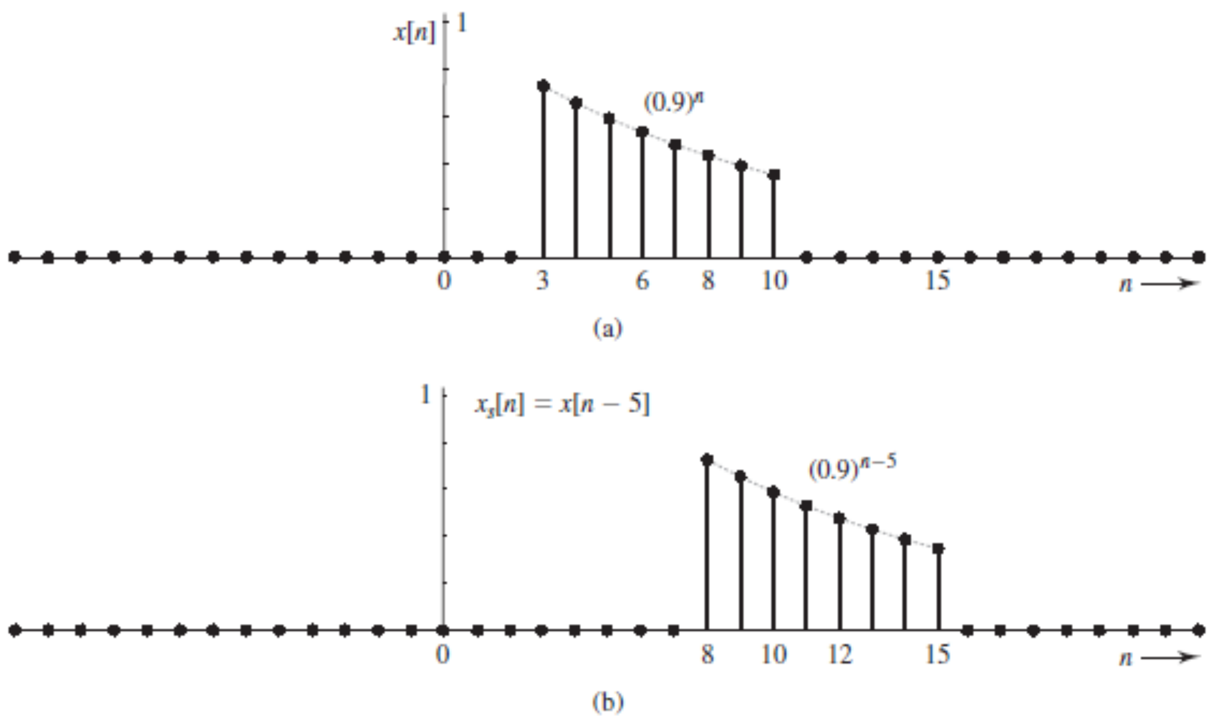



(b)

$$E_x = \sum_{n=0}^{5} n^2 = 55\,; \qquad P_x = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{55}{6}.$$

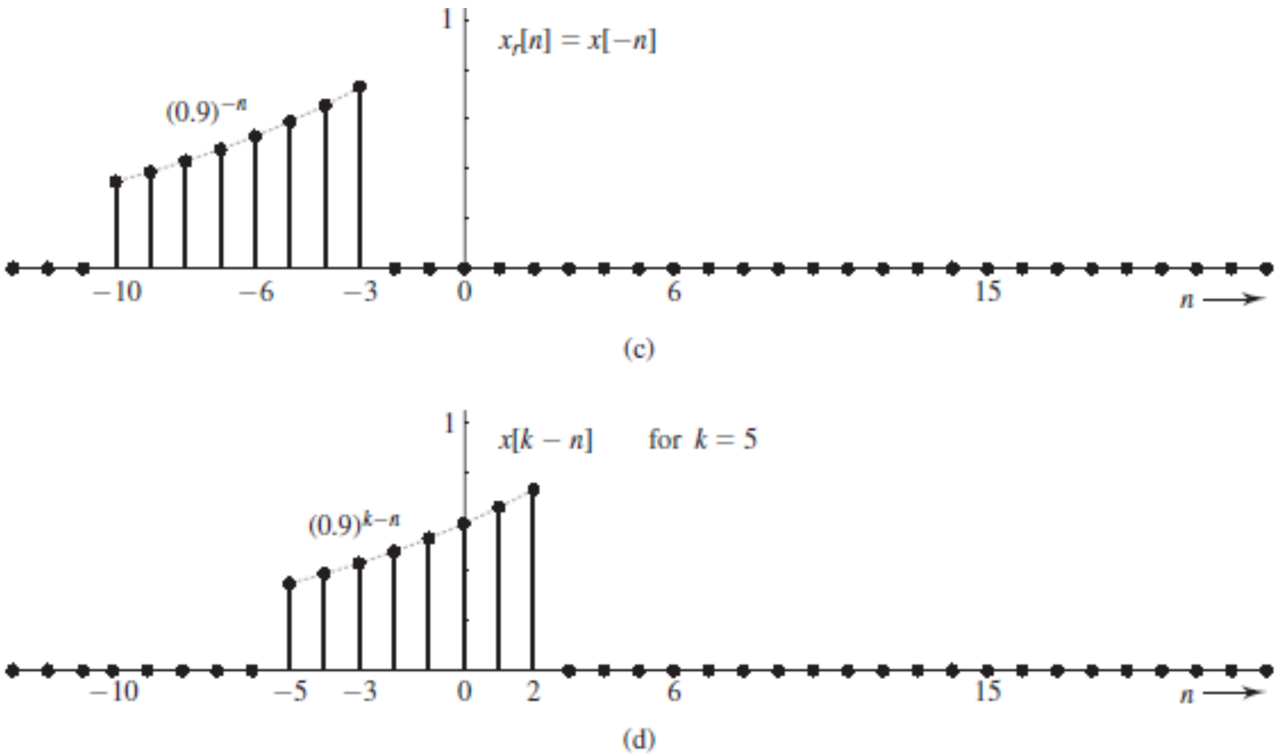
# Operações com Sinais Discretos (i)

- **Deslocamento no Tempo: ("Time Shifting")**
  - Seja um sinal $x[n]$ e este mesmo sinal defasado de $M$ unidades: $x_s[n] = x[n\text{-}M]$, para $M$=5;



# Operações com Sinais Discretos (i)

- **Reversão no Tempo (“Time Reversal”)**
  - Seja um sinal $x[n]$ e este mesmo sinal rotacionado em torno do eixo vertical: $x_r[n] = x[-n]$. Tem-se também o sinal defasado $x[k-n]$, para $k$=5:



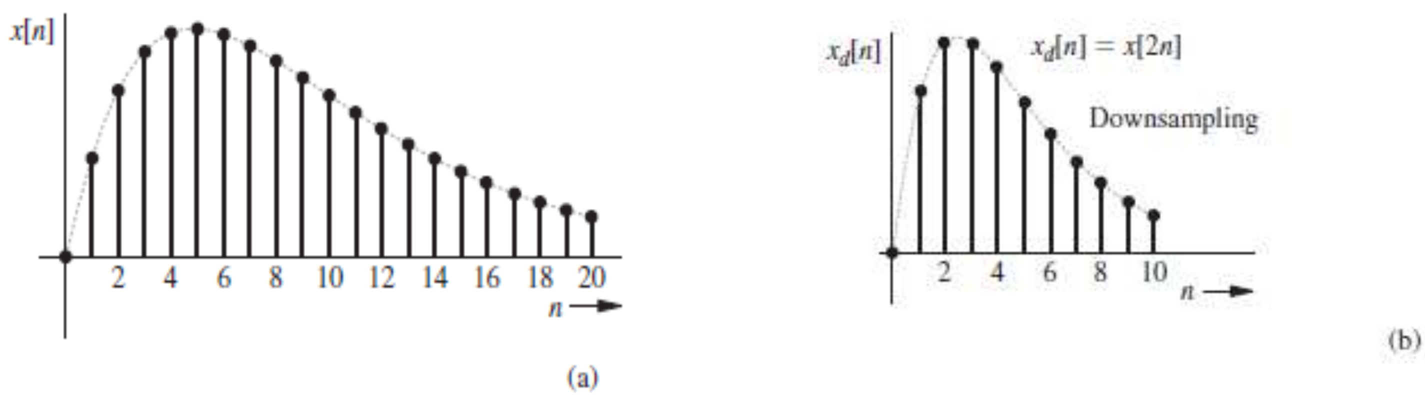
(c)


(d)

# Operações com Sinais Discretos (iii)

- **Alteração de Taxa de Amostragem: Decimação ("Decimation")**
  - Seja um sinal $x[n]$ e este sinal comprimido por um fator $M$:

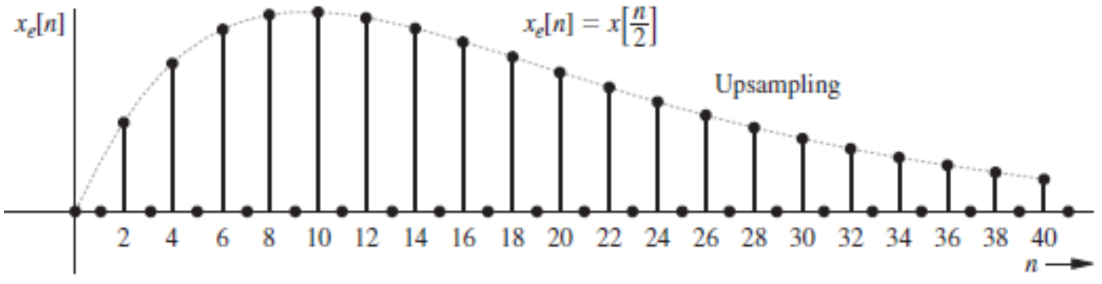
    $x_d[n] = x[Mn]$, onde M é um valor inteiro. Seleciona-se todas as amostras múltiplas de M e coloca-se zero para as demais. Esta operação é chamada de decimação ("decimation").



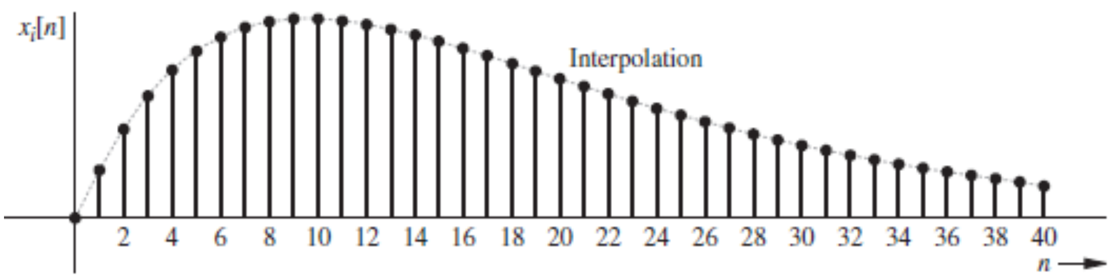
# Operações com Sinais Discretos (iv)

- **Alteração de Taxa de Amostragem: Interpolação ("Interpolation")**
  - Seja um sinal $x[n]$, o sinal interpolado é gerado em dois passos: expande-se o sinal e em seguida atualiza-se os valores com zero através de um método de interpolação apropriado.

$$\text{Expansão}: x_e[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L \ldots \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$




(c)




(d)

# Alguns Sinais Discretos Úteis (i)

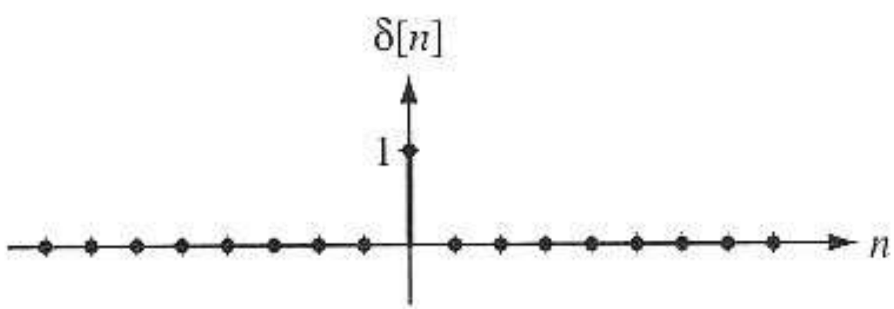
- **Motivação:**
  - Tipicamente, eles são comumente utilizados no estudo de sinais e sistemas discretos no tempo.
- **Funções que serão tratadas:**
  - Função Impulso Discreta;
  - Função Degrau Unitário Discreta;
  - Função Exponencial Discreta;
  - Função Senoidal Discreta.

# Alguns Sinais Discretos Úteis (ii)

- **Função Impulso Unitário Discreta**
  - Esta é a a contrapartida de função impulso contínua no tempo, uma função delta de Kronecker, definida por:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases},$$ também chamada de da seqüência impulso unitário.

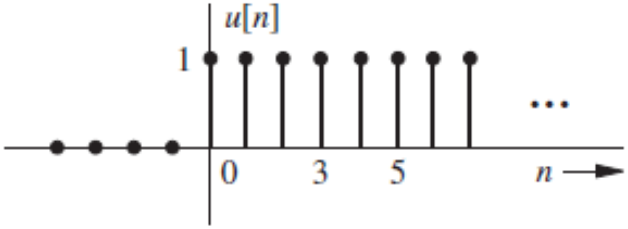
$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 1\ , & n = 0 \\ 0\ , & n \neq 0 \end{cases}}$$



# Alguns Sinais Discretos Úteis (iii)

- **Função Degrau Unitário Discreta**
  – Esta é a contrapartida de função degrau contínua no tempo, definida por:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

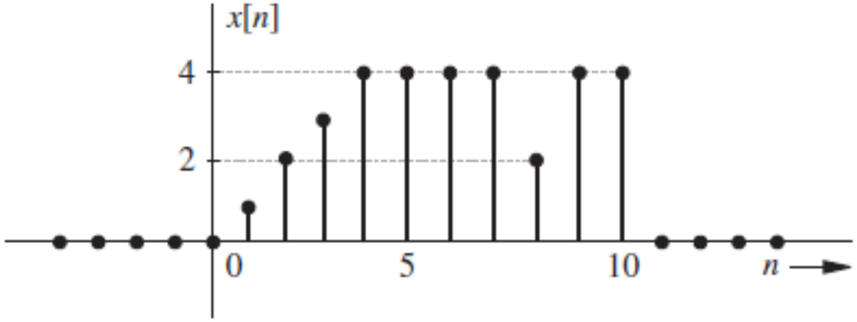



(a)

$x[n]=x_1[n]+x_2[n]+x_3[n] \therefore$

$x[n]=n(\mathrm{u}[n]-u[n-5])+$

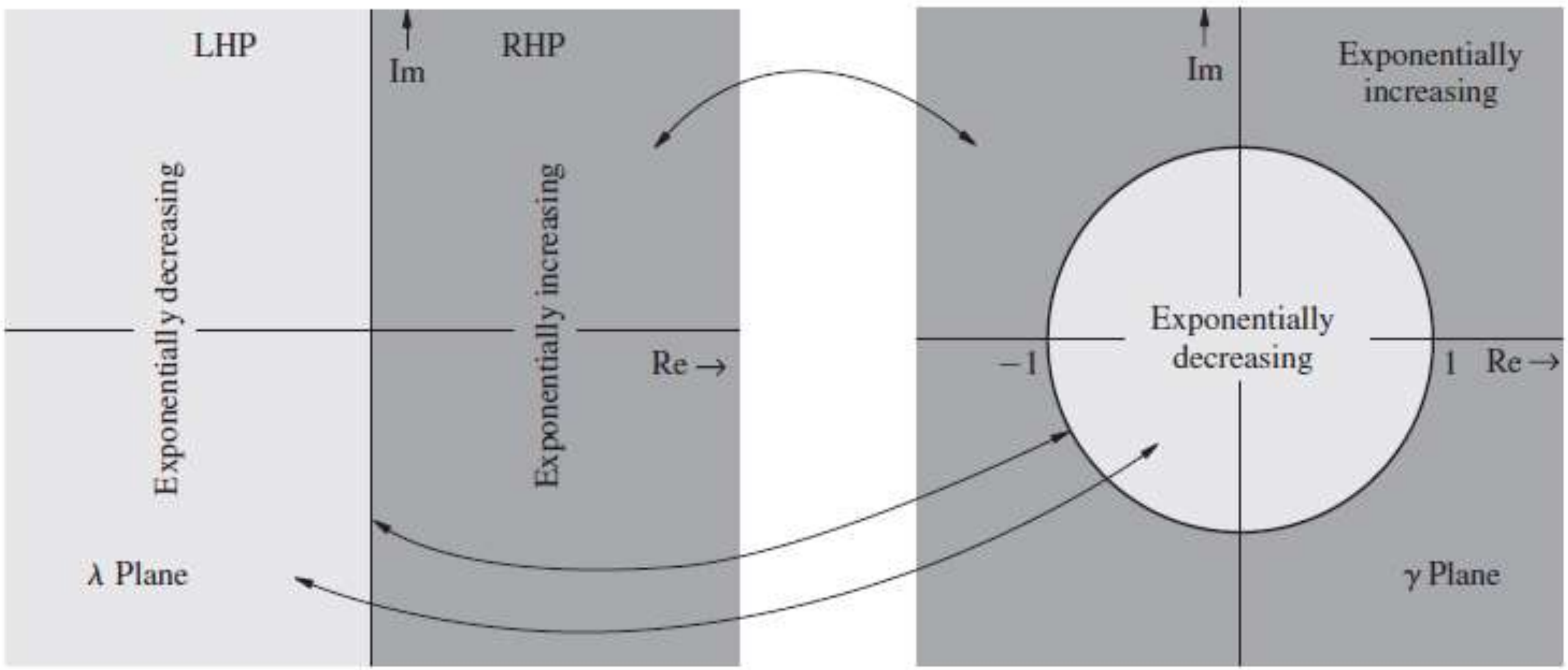
$4(\mathrm{u}[n-5]-u[n-11])\ -2\ \delta[n-8]$




(b)

# Alguns Sinais Discretos Úteis (iv)

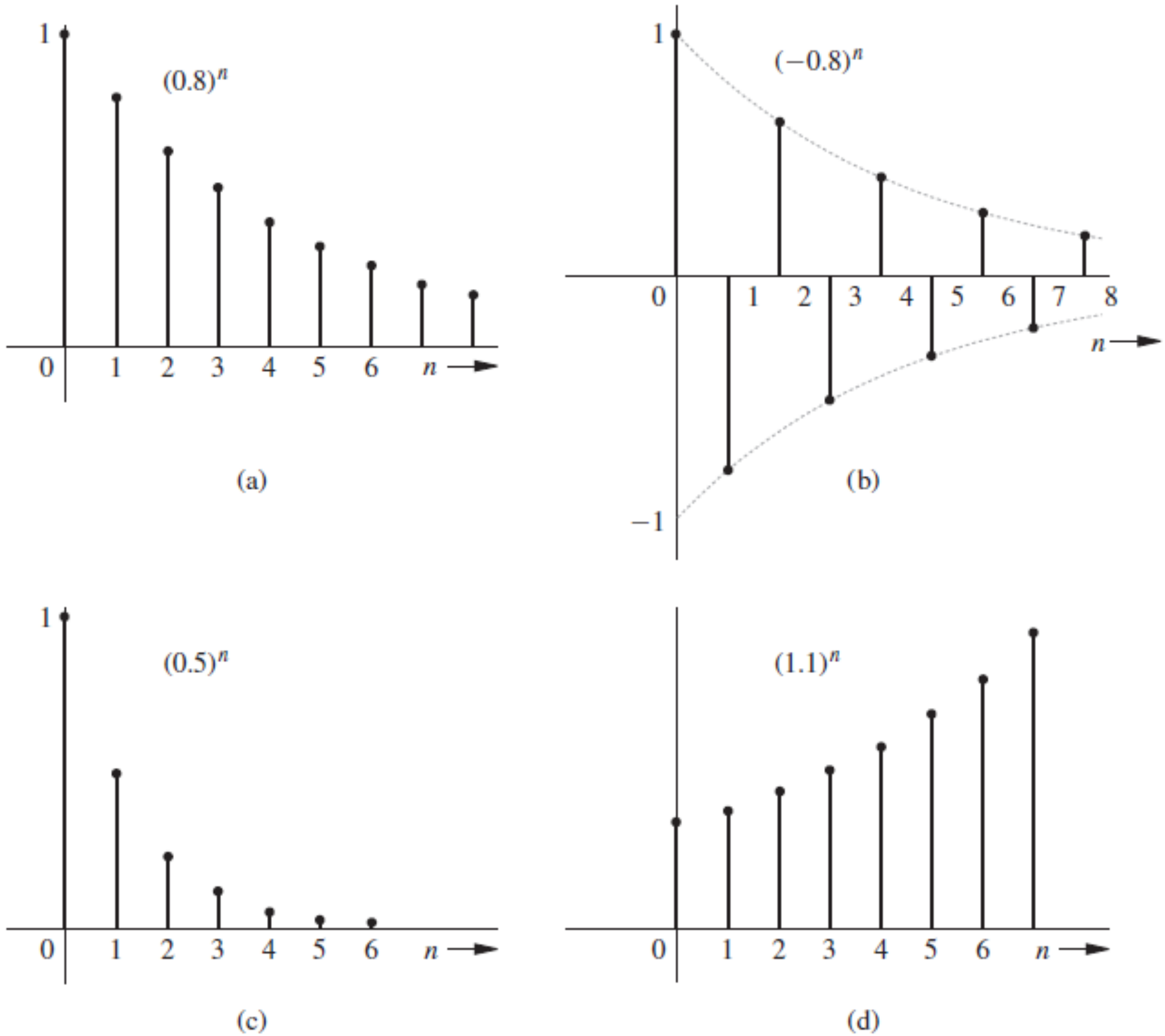
- **Função Exponencial Discreta**
  - Esta função é expressa como: $e^{\lambda n} = \gamma^n \quad (\gamma = e^{\lambda} \text{ ou } \lambda = \ln \gamma)$




(a) (b)

# Alguns Sinais Discretos Úteis (v)

- **Função Exponencial Discreta:** Exemplos



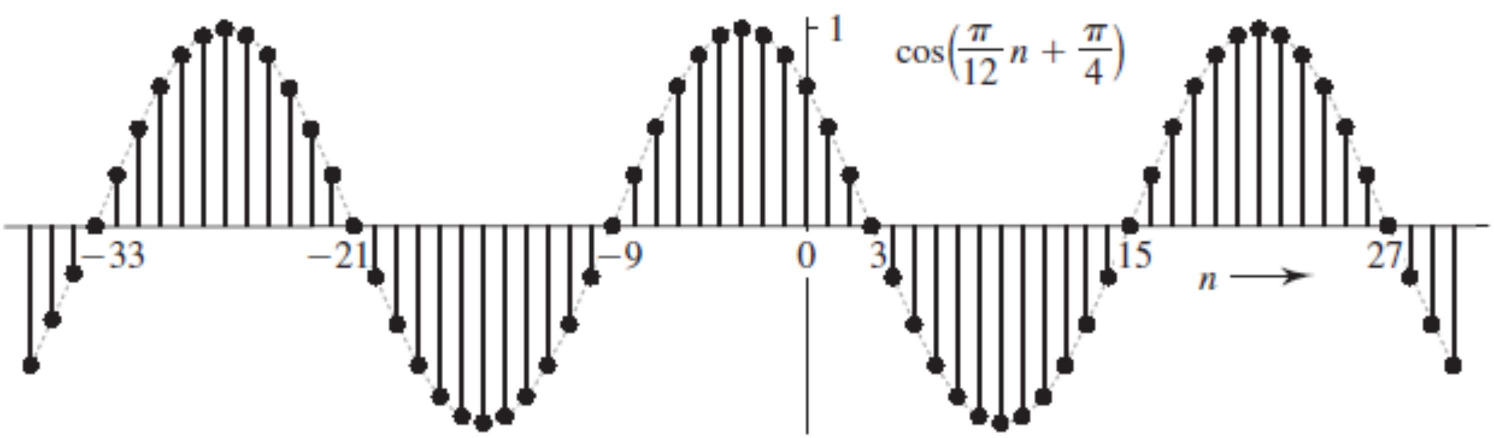
# Alguns Sinais Discretos Úteis (vi)

- **Função Senoidal Discreta**

Em sua forma geral: $C\cos(\Omega n+\theta)$, onde $C$ é a amplitude, $\theta$ é a fase em radianos, $\Omega n$ é um ângulo em radianos e a freqüência $\Omega$ é dada em radianos por amostra. A função senoidal pode também ser expressa por:

$C\cos(\Omega n+\theta) = C\cos(2\pi Fn+\theta)$, onde $F = 1/N_0$ (amostras/ciclo).

– Exemplo



# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (i)

- **Caderneta de Poupança** (sinal inerentemente discreto no tempo): Um correntista deposita dinheiro ($x[n]$) em sua caderneta de poupança a cada intervalo de tempo $T$ (1 mês). O banco deposita juros ($r$) em cada $T$ e envia extrato da conta ($y[n]$) ao depositante. Determine a equação relacionando a saída e a entrada.

  O saldo é : $y[n]=y[n-1]+ry[n-1]+x[n]= (1+r)y[n-1]+x[n]$,

  Logo, $y[n]-ay[n-1]=x[n]$, para $a=1+r$,

  equivalentemente pode-se escrever: $y[n+1]-ay[n]=x[n+1]$,

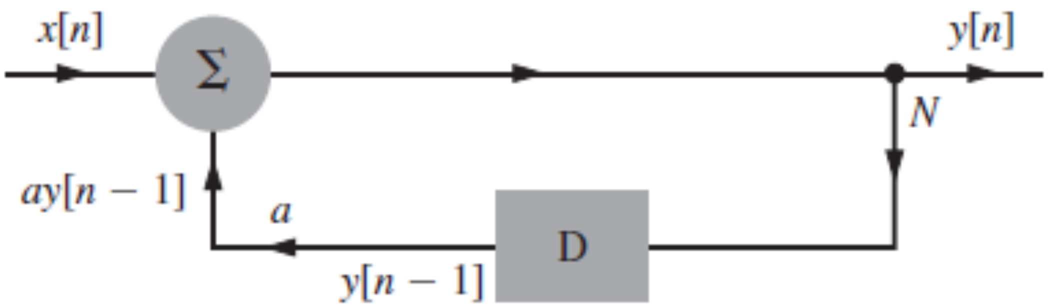
  – Uma retirada é representada por uma entrada negativa.

  – Para um empréstimo, $y[0]=-M$, onde $M$ é o valor emprestado.

  – A expressão com o atraso é chamada de forma de operador de atraso, enquanto que a expressão com avanço é forma de operador de avanço. A primeira forma é natural pois é causal (portanto realizável).

# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (ii)

- **Caderneta de Poupança** (sinal inerentemente discreto no tempo):
  - Representação do sistema por diagrama de blocos (realização do sistema de conta poupança):



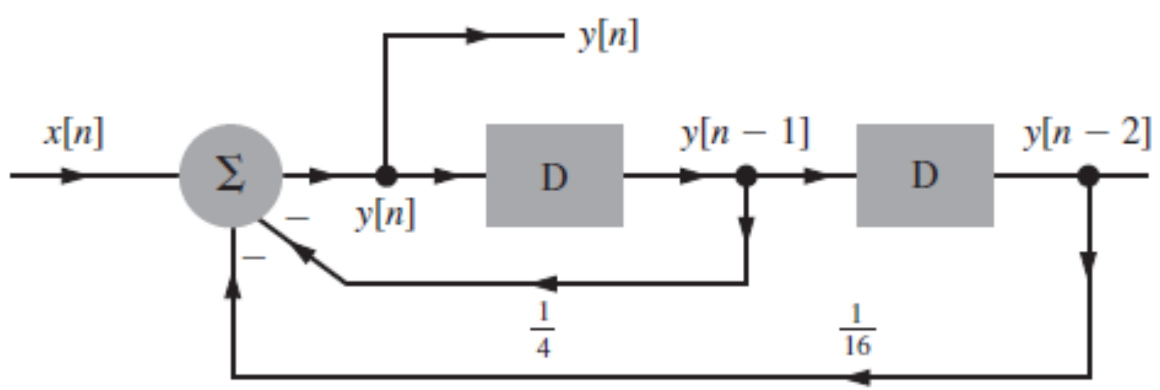

  - Emprega-se os operadores básicos: somador, multiplicador escalar e atrasador.
  - Utiliza-se $N$ um nodo de coleta de sinal (*pickoff node*).

# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (iii)

- **Estimativa de Vendas** (sinal inerentemente discreto no tempo): No $n$-ésimo semestre de um curso universitário, $x[n]$ estudantes estão matriculados em uma dada matéria e todos devem comprar seu livro texto que tem três semestres de vida. A editora vende $y[n]$ destes livros neste semestre. Em média, ¼ dos livros em boas condições são re-vendidos pelos estudantes. Escreva a saída em função da entrada:

O saldo é : $y[n]+1/4\ y[n-1]+ 1/16y[n-2]=x[n]$,

Logo, $y[n]=-1/4y[n-1]-1/16y[n-2]+x[n]$,



# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (iv)

- **Diferenciador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto): Projete um sistema discreto para diferenciar um sinal contínuo. Este diferenciador é usado em um sistema de áudio tendo um sinal de entrada com largura de banda inferior a 20 kHz.
  - A saída $y(t)$ é a derivada da entrada $x(t)$. Os processador discreto $G$ processa amostras da entrada $x(t)$ e produz saída $y[n]$. Emprega-se amostras a cada $T$ segundos: $x[n] = x(nT)$; e $y[n] = y(nT)$.

$$y(t) = \frac{dx}{dt}, \text{ para } t = nT \text{ tem-se } y(nT) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=nT} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}[x(nT) - x[(n-1)T]],$$

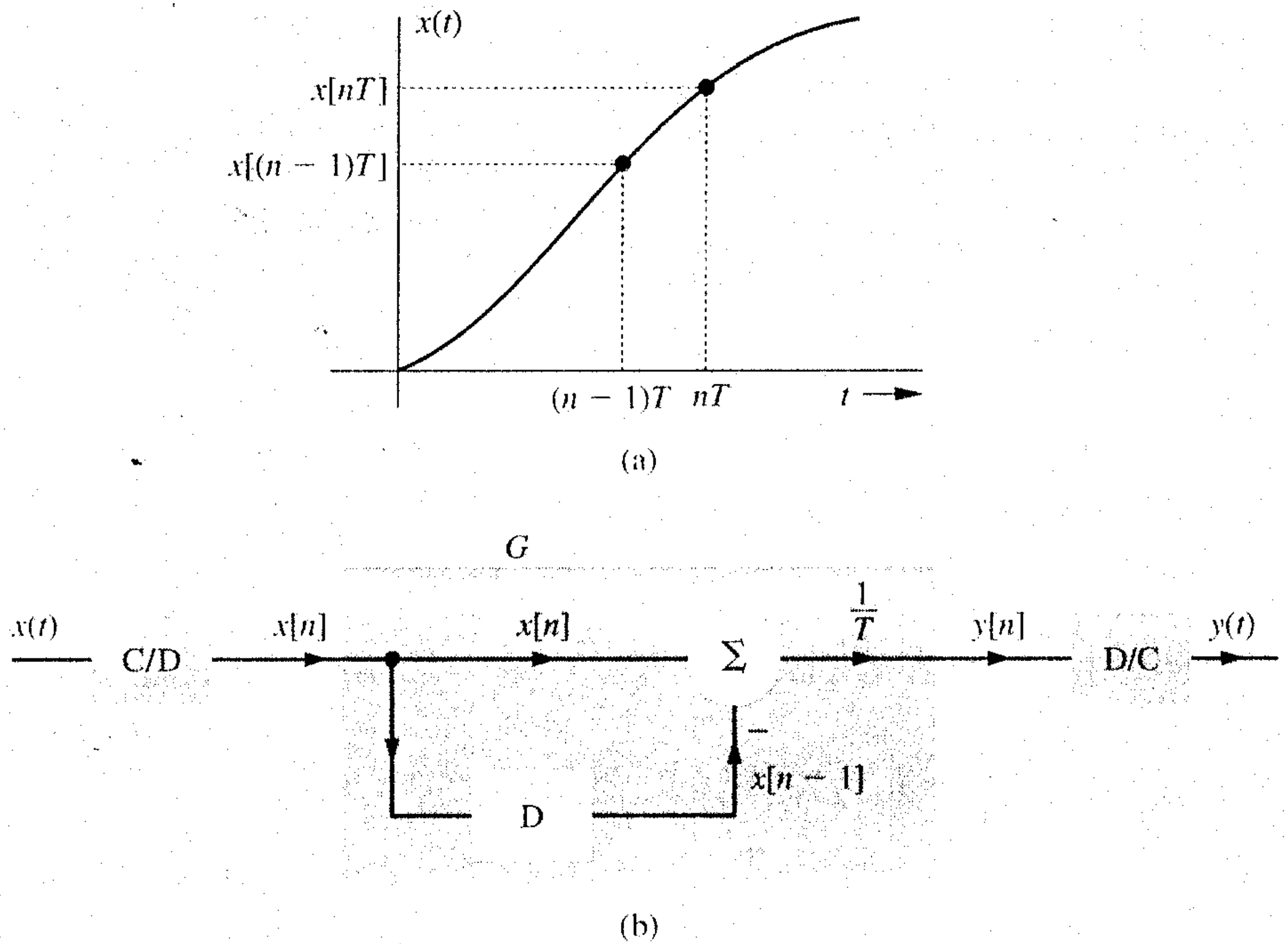
$$\text{usando notação para sistemas discretos}: y[n] = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\{[x[n] - x[n-1]]\}$$

$$\text{Assumindo sinal de amostragem suficientemente pequeno (diferente de 0)}:$$

$$y[n] = \frac{1}{T}\{[x[n] - x[n-1]]\}$$

# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (v)

- **Diferenciador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto):



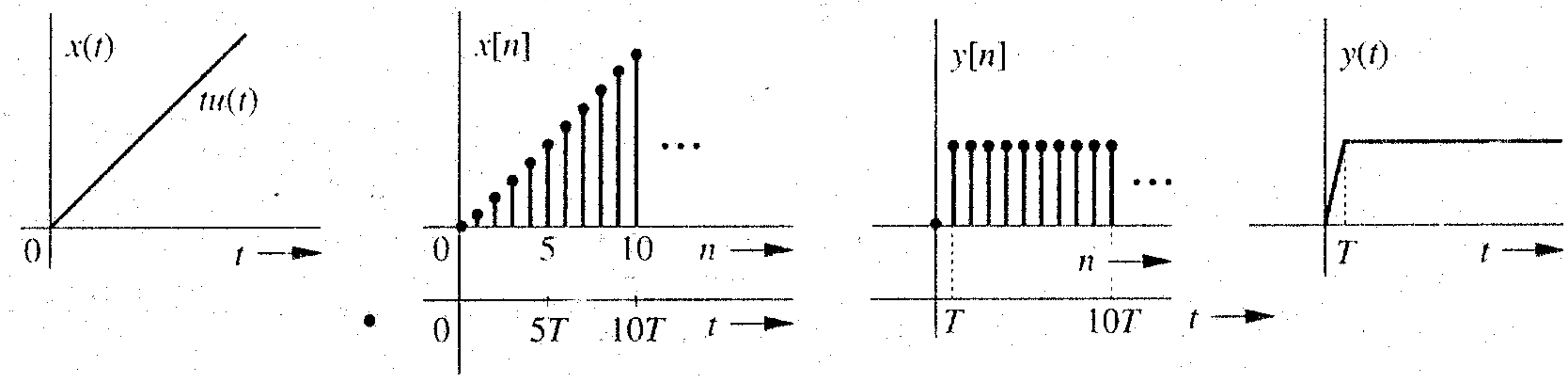

– Intervalo de amostragem: $T \leq \dfrac{1}{2 \times \text{maior freqüência}} = \dfrac{1}{40000} = 25\mu s$

# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (vi)

- **Diferenciador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto):

$$x[n] = x(t)\big|_{t=nT} = t\big|_{t=nT}, \qquad t \geq 0$$

$$x[n] = nT, \qquad n \geq 0$$




(c) (d) (e) (f)

# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (vii)

- **Integrador Digital** (sinal contínuo processado p/ sist. discreto): Projete um integrador digital seguindo as mesmas linhas que o diferenciador digital do exemplo anterior.

$$\text{Intergrador}: y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau, \text{em } t = nT \text{ tem-se } y(nT) = \lim_{T\to 0} \sum_{k=-\infty}^{n} x(kT)T,$$

$$\text{usando notação para sistemas discretos}: y[n] = \lim_{T\to 0} T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Assumindo sinal de amostragem suficientemente pequeno (diferente de 0):

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k], \quad \text{forma não recursiva.}$$

Este é um exemplo de um sistema acumulador.

O integrador digital também é expresso por sua forma recursiva:

$$y[n] - y[n-1] = Tx[n]$$

# Sistemas Discretos no Tempo: Exemplos (viii)

– A forma disdretizada de uma equação diferencial resulta em uma equação de diferenças:

Seja a equação diferencial de $1^a$ ordem: $\dfrac{dy}{dt} + cy(t) = x(t)$

Para amostragem uniforme $T$, usa-se a definição de derivada para $t = nT$:

$\lim\limits_{T \to 0} \dfrac{y[n] - y[n-1]}{T} + cy[n] = x[n]$, para $T \neq 0$ mas com valor muito pequeno:

$y[n] + \alpha y[n-1] = \beta x[n]$, onde $\alpha = -\dfrac{1}{1+cT}$ e $\beta = \dfrac{T}{1+cT}$.

- Ordem de equação de diferenças: definida pela diferença de maior ordem.

- Eq. diferencial pode ser aproximada por eq. de diferenças de mesma ordem

- Filtros digitais e sistemas discretos são usados como sinônimos.

- Filtros analógicos e sistemas contínuos são usados como sinônimos.

# Sistemas Discretos no Tempo: Vantagens (i)

– Vantagens do Processamento Digital de Sinais:

- Operação de sistemas digitais pode tolerar variações nos valores de sinais, resultando em precisão e estabilidade maior que sistemas analógicos.
- Sistemas digitais não demandam mesmo grau de precisão de sistemas analógicos. Sistemas digitais complexos podem ser implementados em um chip empregando circuitos VLSI.
- Filtros digitais são flexíveis: podem ser facilmente alterados por programação. Implementações em hardware permitem uso de microprocessadores, miniprocessadores, chaves digitais, e circuitos VLSI.
- Circuitos digitais podem modelar grande quantidade de filtros.

# Sistemas Discretos no Tempo: Vantagens (ii)

– Vantagens do Processamento Digital de Sinais:
  - Sinais digitais podem ser barata e facilmente armazenados em mídias magnéticas.
  - Sinais digitais podem ser codificados para produzir erros muito baixos e alta fidelidade.
  - Filtros digitais podem ser compartilhados no tempo.
  - Reprodução com sistemas digitais é confiável e sem deterioração. Mensagens analógicas como fotocópia e filmes perdem precisão para cada estágio sucessivo de reprodução.

# Sistemas Discretos no Tempo: Classificação (i)

- **Classificação de Sistemas Discretos**

  - Linearidade e Invariância no Tempo

  A definição de linearidade é idêntica a sistemas contínuos

  Sistemas invariantes no tempo são aqueles nos quais seus parâmetros não mudam ao longo do tempo.

  – Sistemas Causais e Não Causais

  Um sistema discreto é causal se sua saída em qualquer instante $n = k$ depende apenas dos valores de entrada $x[n]$ para $n \leq k$.

  - Sistemas Inversíveis e Não Inversíveis

  Um sistema é inversível se for encontrado um outro sistema tal que a conexão de ambos em cascata resulta em um sistema identidade.

# Sistemas Discretos no Tempo: Classificação (ii)

- **Classificação de Sistemas Discretos**

- Sistemas Estáveis e Instáveis

A estabilidade pode ser interna e externa. A estabilidade BIBO é análoga ao conceito em sistemas contínuos.

– Sistemas com e sem Memória

Conceitos também idênticos àqueles de sistemas contínuos.

# Equações de Sistemas Discretos (i)

- Serão tratados sistemas lineares invariantes e discretos no tempo (LTID), descritos por (forma com termos em avanço):

$$y[n+N]+a_1y[n+N-1]+\ldots+a_{N-1}y[n+1]+a_Ny[n]=$$
$$=b_{N-M}x[n+M]+b_{N-M+1}x[n+M-1]+\ldots+b_{N-1}x[n+1]+b_Nx[n]$$

esta é uma equação linear de diferenças, cuja ordem é $Max(N,M)$.

Assume-se que $a_0=1$ sem perda de generalidade.

Condição de Causalidade: A saída não depende de entradas futuras, logo $M\leq N$. Para um caso geral, $M=N$, pode-se expressar:

$$y[n+N]+a_1y[n+N-1]+\ldots+a_{N-1}y[n+1]+a_Ny[n]=$$
$$=b_0x[n+N]+b_1x[n+N-1]+\ldots+b_{N-1}x[n+1]+b_Nx[n]$$

Pode-se escrever a expressão na forma com operador de atraso:

$$y[n]+a_1y[n-1]+\ldots+a_{N-1}y[n-N+1]+a_Ny[n-N]=$$
$$=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\ldots+b_{N-1}x[n-N+1]+b_Nx[n-N]$$

# Equações de Sistemas Discretos (ii)

- **Solução Recursiva de Equação de Diferenças**

A equação anterior pode ser expressa como a seguir :

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \ldots - a_N y[n-N] +$$
$$+ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \ldots + b_{N-1} x[n-N+1] + b_N x[n-N]$$

  – A saída é calculada a partir de *2N+1* parcelas de informação: *N* valores anteriores de saída, *N* valores anteriores de entrada e o valor atual de entrada.

  – Em princípio, este método reflete o modo como um computador resolve uma equação recursiva de diferenças: Dados a entrada e as condições iniciais.

  – Se o método for não recursivo, então a saída é computada apenas a partir das entradas, sem utilizar as saídas prévias.

# Equações de Sistemas Discretos (iii)

- **Exemplo**

Resolva, de modo iterativo : $y[n]-0.5y[n-1]=x[n]$, onde

Condições iniciais $y[-1]=16$, entrada causal $x[n]=n^2$ (início em $n=0$).

Esta equação pode ser re-escrita : $y[n]=0.5y[n-1]+x[n]$

Para $n=0$, obtem-se : $y[0]=0.5y[-1]+x[0]=0.5(16)+(0)^2=8$

Para $n=1$, obtem-se : $y[1]=0.5y[0]+x[1]=0.5(8)+(1)^2=5$

Para $n=2$, obtem-se : $y[2]=0.5y[1]+x[2]=0.5(5)+(2)^2=6.5$

Para $n=3$, obtem-se : $y[3]=0.5y[2]+x[3]=0.5(6.5)+(3)^2=12.25$

Para $n=4$, obtem-se : $y[4]=0.5y[3]+x[4]=0.5(12.25)+(4)^2=22.125$

# Equações de Sistemas Discretos (iv)

- **Notação Operacional**
  - Analogamente a sistemas contínuos no tempo, Emprega-se uma notação operacional: o operador *E*.

O operador é aplicado da seguinte forma :

$$Ex[n] \equiv x[n+1]; \quad E^2 x[n] = x[n+2]; \ldots E^N x[n] = x[n+N]$$

Exemplos :

Equação de diferenças de $1^a$ ordem $y[n+1] - ay[n] = x[n+1]$

Pode ser re-escrita : $Ey[n] - ay[n] = Ex[n] \therefore (E-a)y[n] = Ex[n]$

Equação de diferenças de $2^a$ ordem $y[n+2] + \frac{1}{4}y[n+1] + \frac{1}{16}y[n] = x[n+2]$

Pode ser re-escrita : $(E^2 + \frac{1}{4}E + \frac{1}{16})y[n] = E^2 x[n]$

# Equações de Sistemas Discretos (v)

- **Notação Operacional**
  - Expressão geral para equação de diferenças de ordem *N*:

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \ldots + a_{N-1} E + a_N) y[n] =$$

$$(b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \ldots + b_{N-1} E + b_N) x[n]$$

Alternativamente, tem-se que:

$Q[E] y[n] = P[E] x[n],$ onde os polinômios são definidos como

$$Q[E] = E^N + a_1 E^{N-1} + \ldots + a_{N-1} E + a_N$$

$$P[E] = b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \ldots + b_{N-1} E + b_N$$

  - Resposta de sistemas LTID: A solução geral deste sistema é formada pelos componentes de entrada zero e de estado zero.

# Resposta de Entrada Zero (i)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Este componente é a resposta do sistema para entrada nula.

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \ldots + a_{N-1}E + a_N)y_0[n] = 0 \therefore Q[E]y_0[n] = 0$$

Para a combinação linear resultar em zero, todas equações de diferenças existem e são da mesma forma. Esta é uma proriedade da função exponencial: $E^k\{\gamma^n\} = \gamma^{k+n} = \gamma^k\gamma^n$, onde o termo $\gamma^k$ é uma constante.

$$y_0[n] = c\gamma^n \Rightarrow E^k y_0[n] = y_0[n+k] = c\gamma^{k+n}$$

Desta forma, o polinômio assume a forma :

$$Q[E]y_0[n] = c(\gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\gamma + a_N)\gamma^n = 0$$

A solução não - trivial do polinômio característico ($Q[\gamma] = 0$) é :

$$Q[\gamma] = \gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\gamma + a_N = 0 \therefore$$

$$Q[\gamma] = (\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\ldots(\gamma - \gamma_N) = 0$$

# Resposta de Entrada Zero (ii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

<u>Para raízes distintas:</u>

Tem-se $N$ possíveis soluções para $Q[E]y_0[n]=0$, dados por:

$$y_1[n]=c_1\gamma_1^n,\ y_2[n]=c_2\gamma_2^n,\ldots,y_N[n]=c_n\gamma_N^n$$

onde $c_1,c_2,\ldots,c_N$ são constantes arbitrárias

e $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_N$ são raízes características

Cada solução satisfaz individualmente o polinômio $Q[E]y_0[n]=0$:

Como o sistema é linear, tem-se:

$$Q[E][(c_1\gamma_1^n+c_2\gamma_2^n+\ldots+c_n\gamma_N^n]=0$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$y_0[n]=c_1\gamma_1^n+c_2\gamma_2^n+\ldots+c_n\gamma_N^n$$

# Resposta de Entrada Zero (iii)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

Para raízes repetidas:

Para um sistema com o polinômio característico:

$$Q[\gamma] = (\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2})\ldots(\gamma - \gamma_N)$$

tem os modos característicos: $\gamma_1^n, n\gamma_1^n, n^2\gamma_1^n, \ldots, n^{r-1}\gamma_1^n, \gamma_{r+1}^n, \ldots, \gamma_N^n$

e solução: $y_0[n] = (c_1 + c_2 n + \ldots + c_r n^{r-1})\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \ldots + c_N \gamma_N^n.$

Para raízes complexas:

– Estas raízes aparecem sempre aos pares.

– O procedimento é o mesmo que aquele para raízes reais. Nesta caso ter-se-á modos característicos complexos e forma de solução complexa.

# Resposta de Entrada Zero (iv)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**

  Para raízes complexas:

  – Pode-se optar por não se trabalhar com a foram complexa:

Par de raízes complexas na forma polar:

$$\gamma = |\gamma| e^{j\beta} \qquad \text{e} \qquad \gamma^* = |\gamma| e^{-j\beta}$$

A resposta de entrada zero é dada por:

$$y_0[n] = c_1 \gamma^n + c_2 (\gamma^*)^n = c_1 |\gamma|^n e^{j\beta n} + c_2 |\gamma|^n e^{-j\beta n} \therefore$$

Sejam os coeficientes $c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta}$ e $c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$, isto resulta:

$$y_0[n] = \frac{c}{2} |\gamma|^n \left(e^{j(\beta n + \theta)} + e^{-j(\beta n + \theta)}\right) \therefore y_0[n] = c|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta),$$

onde $c$ e $\theta$ são constantes determinadas a partir das condições auxiliares.

# Resposta de Entrada Zero (v)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Ex: Calcule a resposta de entrada zero para o sistema LTID.

$$y[n+2]-0.6y[n+1]-0.16y[n]=5x[n+2],$$

para $y[-1]=0,\ \ y[-2]=25/4,\ \ x[n]=4^{-n}u[n].$

A equação carcaterística é $\gamma^2-0.6\gamma-0.16=(\gamma+0.2)(\gamma-0.8)$

os modos característicos são : $(-0.2)^n,(0.8)^n$ e a solução dada por :

$$y_0[n]=\ c_1(-0.2)^n+c_2(0.8)^n.$$

Para achar as constantes, faz-se $n=-1$ e $n=-2$ na equação acima :

$$\left.\begin{aligned}
y_0[-1]=0=\ c_1(-0.2)^{-1}+c_2(0.8)^{-1}\therefore -5c_1+(5/4)\ c_2=0\\
y_0[-2]=25/4=\ c_1(-0.2)^{-2}+c_2(0.8)^{-2}\therefore 25c_1+(25/16)c_2=25/4
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow c_1=1/5,\quad c_2=4/5.$$

A resposta de entrada zero é $y_0[n]=1/5(-0.2)^n+4/5(0.8)^n.$

# Resposta de Entrada Zero (v)

- **Resposta para Condições Internas do Sistema**
  - Ex: Calcule a resposta de entrada zero para o sistema LTID.

$$(E^2+6E+9)y[n]=(2E^2+6E)x[n]$$

para $y[-1]=-1/3, \; y[-2]=-2/9 \;\; x[n]=4^{-n}u[n].$

A equação carcaterística é $\gamma^2+6\gamma+9=(\gamma+3)(\gamma+3)$

os modos característicos são : $(-3)^n, n(-3)^n$ e a solução dada por :

$$y_0[n]= \; (c_1+c_2n)(-3)^n.$$

Para achar as constantes, faz-se $n=-1$ e $n=-2$ na equação acima :

$$\left.\begin{aligned} y_0[-1]=-1/3 \therefore \; (c_1+c_2(-1))(-3)^{-1}=-1/3 \therefore -c_1+c_2=-1 \\ y_0[-2]=-2/9 \therefore \; (c_1+c_2(-2))(-3)^{-2}=-2/9 \therefore c_1-2c_2=-2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow c_1=4, \quad c_2=3.$$

A resposta de entrada zero é $y_0[n]= \; (4+3n)(-3)^n.$

# Resposta ao Impulso Unitário (i)

- **Fundamentos**
  - Considere o sistema de n-ésima ordem especificado pela equação:

$$(E^N + a_1 E^{N-1} + \ldots + a_{N-1}E + a_N)y[n] =$$

$$= (b_0 E^N + b_1 E^{N-1} + \ldots + b_{N-1}E + b_N)x[n]$$

ou $\quad Q[E]y[n] = P[E]x[n]$

A resposta ao impulso é a solução desta equação para entrada impulso e condições iniciais nulas :

$$Q[E]h[n] = P[E]\delta[n]$$

s.a. $\qquad h[-1] = h[-2] = \ldots = h[-N] = 0$

# Resposta ao Impulso Unitário (ii)

- **Fundamentos**
  - Exemplo: Calcule a resposta ao impulso para o sistema: :

$$y[n]-0.6y[n-1]-0.16y[n-2]=5x[n]$$

A resposta ao impulso é a solução da equação :

$$h[n]-0.6h[n-1]-0.16h[n-2]=5\delta[n]$$

s.a. $\quad h[-1]=h[-2]=0$

Fazendo $n=0$, tem-se : $h[0]-0.6h[-1]-0.16h[-2]=5(1) \therefore h[0]=5$

Fazendo $n=1$, tem-se : $h[1]-0.6h[0]-0.16h[-1]=5(0) \therefore h[1]=3$

Continuando desta forma, determina-se os próximos termos de $h[n]$.

Esta solução é útil para se determinar a solução de forma fechada.

# Resposta ao Impulso Unitário (iii)

- **A Solução de Forma Fechada**
  - A resposta ao impulso unitário $h[n]$ tem as características:
    - A entrada é nula exceto para $n$=0, implica resposta formada por modos característicos do sistema.
    - Em $n$=0, tem-se valor diferente de zero.

A forma geral de $h[n]$ é expressa como : $h[n] = A_0\delta[n] + y_c[n]u[n]$

onde $y_c[n]$ é a combinação linear dos modos característicos do sistema.

Como $Q[E]h[n] = P[E]\delta[n] \Rightarrow Q[E](A_0\delta[n] + y_c[n]u[n]) = P[E]\delta[n]$

Como $y_c[n]$ é feito de modos característicos, tem-se $Q[E](y_c[n]u[n]) = 0$

Logo, $Q[E](A_0\delta[n]) = P[E]\delta[n]$

# Resposta ao Impulso Unitário (iv)

- **A Solução de Forma Fechada**

Lembrando que $Q[E](A_0\delta[n]) = P[E]\delta[n] \therefore$

$A_0(\delta[n+N] + a_1\delta[n+N-1] + \ldots + a_N\delta[n]) = b_0\delta[n+N] + \ldots + b_N\delta[n]$

Faz-se $n = 0$, emprega-se $\delta[m] = 0\ \forall m \neq 0$, e $\delta[0] = 1$, obtem-se

$A_0 a_N = b_N \therefore A_0 = \dfrac{b_N}{a_N}$, finalmente resultando em

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N}\delta[n] + y_c[n]u[n]$$

Os coeficientes desconhecidos de $y_c[n]$ são determinados a partir do conhecimento dos $N$ valores de $h[n]$.

# Resposta ao Impulso Unitário (iv)

- **A Solução de Forma Fechada**
  - Exemplo: Determine a resposta ao impulso do exemplo anterior

$$y[n]-0.6y[n-1]-0.16y[n-2]=5x[n]$$

Esta equação pode ser re-escrita na forma avançada :

$y[n+2]-0.6y[n+1]-0.16y[n]=5x[n+2]$ ou

$$(E^2-0.6E-0.16)y[n]=5E^2x[n]$$

O polinômio característico é : $\gamma^2-0.6\gamma-0.16=(\gamma+0.2)(\gamma-0.8)$

Modos característicos : $(-0.2)^n$ e $(0.8)^n \Rightarrow y_c[n]=c_1(-0.2)^n+c_2(0.8)^n$

Como $b_N=0 \Rightarrow A_0=0$, resultando em $h[n]=[c_1(-0.2)^n+c_2(0.8)^n]u[n]$

Como $h[-1]=h[-2]=0$, por substituição direta na forma interativa,

encontra-se $h[n]=[(-0.2)^n+4(0.8)^n]u[n]$

# Resposta de Estado Zero (i)

- **Introdução**
  - Resposta $y[n]$ para condições inicias nulas no sistema discreto de entrada arbitrária $x[n]$ diferente de zero.
    - Esta situação é comum a todos sistemas tratados nesta seção, a não ser quando dito o contrário.

Sinal de entrada $x[n]$ expresso como soma de componentes impulso :

A componente $x[n]$ em $n = m$ é $x[m]\delta[n-m]$, logo escreve-se :

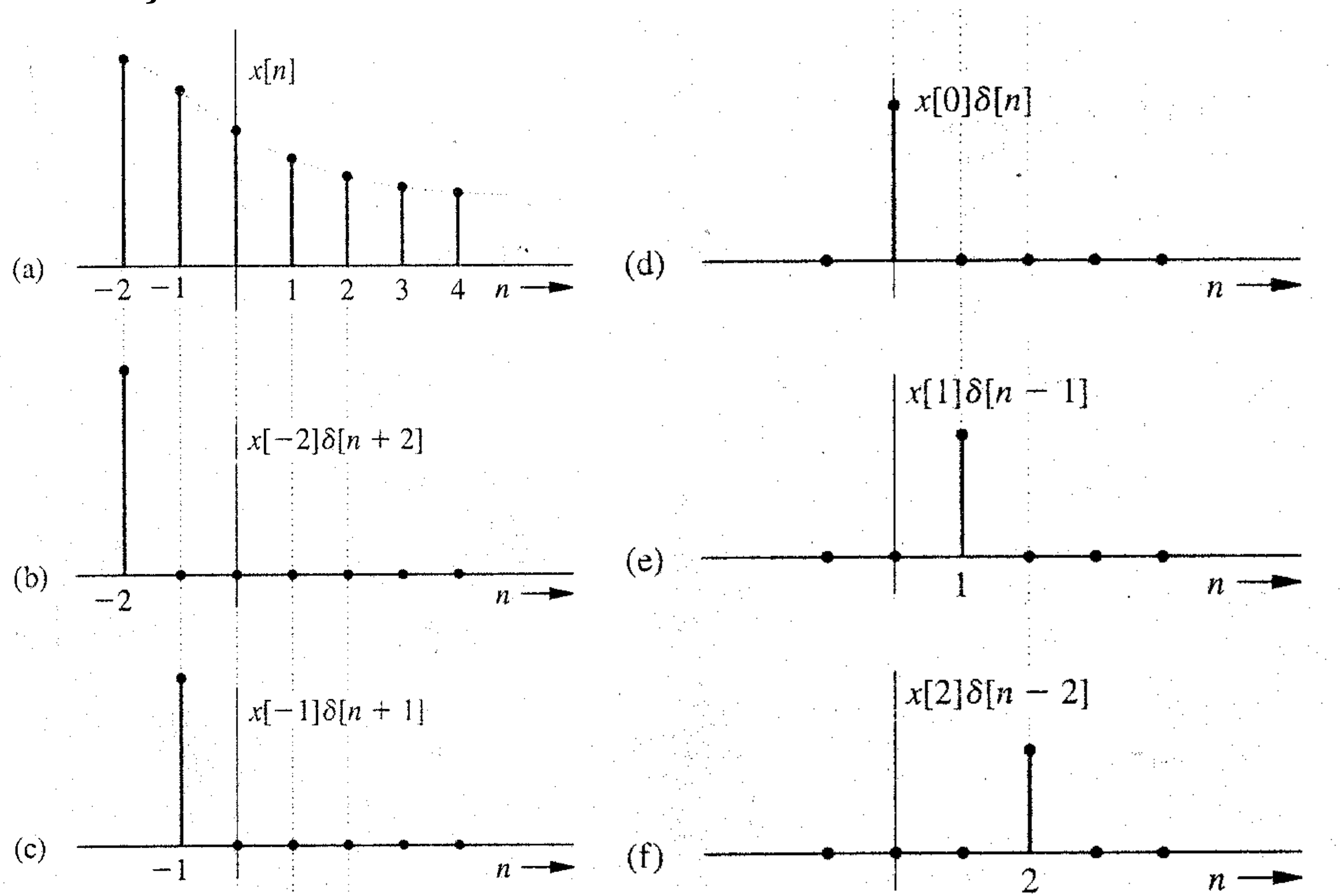
$$x[n] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots + x[-1]\delta[n+1] + \ldots$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m],$$

Para sistemas lineares, sua resposta para qualquer entrada arbitrária é obtida somando-se sua resposta às suas componentes impulso.

# Resposta de Estado Zero (ii)

- **Introdução**



# Resposta de Estado Zero (iii)

- **Introdução**

A notação abaixo indica a entrada e sua correspondente saída :

$x[n] \Rightarrow y[n]$, em particular $\delta[n] \Rightarrow h[n]$.

Devido à invariância no tempo, $\delta[n-m] \Rightarrow h[n-m]$

Devido à linearidade : $x[m]\delta[n-m] \Rightarrow x[m]h[n-m]$

$$\text{e} \quad \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]}_{x[n]} \Rightarrow \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]}_{y[n]}$$

Logo, $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$

# Resposta de Estado Zero (iv)

- **Somatório de Convolução**
  - O somatório de convolução de duas funções é definido como:

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m], \text{com as propriedades relevantes:}$$

Comutativa : $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$

Distributiva : $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$

Associativa : $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$

Deslocamento no tempo :

$x_1[n] * x_2[n] = c[n]$, então $\quad x_1[n-m] * x_2[n-p] = c[n-m-p]$

Convolução com um impulso : $x[n] * \delta[n] = x[n]$

Largura : Sejam $x_1[n]$ e $x_2[n]$ sinais com larguras $W_1$ e $W_2$ finitas, então

$c[n] = x_1[n] * x_2[n]$, tem largura $W_1 + W_2$.

A largura de um sinal é o número de elementos (comprimento) menos um.

# Resposta de Estado Zero (v)

- **Somatório de Convolução**
  - Causalidade e Resposta de Estado Zero

Considere a resposta do sistema : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m],$

para um sinal de entrada $x[n]$ causal, então $x[m] = 0$ para $m < 0$;

para um sistema causal (i.e. $h[n]$ causal), então $h[n-m] = 0$ para $m > n$.

Para sinal e sistema causais : $y[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m]h[n-m]$

  - Somatório de convolução a partir de uma tabela: Pode-se utilizar uma tabela de somatórios de convolução para determinar outros somatórios de convolução mais complexos.

# Resposta de Estado Zero (vi)

- **Somatório de Convolução**
  - Exemplo: Determine $c[n]$ para o sistema LTID:

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= (0.8)^n u[n] \\ g[n] &= (0.3)^n u[n] \end{aligned}\right\}, \quad \text{então} \quad \left\{\begin{aligned} x[m] &= (0.8)^m u[m] \\ g[n-m] &= (0.3)^{n-m} u[n-m] \end{aligned}\right.$$

$$c[n] = x[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g[n-m], \text{como o sinal e o sistema são causais :}$$

$$c[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m]g[n-m] \therefore c[n] = \sum_{m=0}^{n} (0.8)^m u[m](0.3)^{n-m} u[n-m]$$

$$c[n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{n} (0.8)^m (0.3)^{n-m}, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \therefore c[n] = (0.3)^n \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{0.8}{0.3}\right)^m u[n]$$

$$c[n] = (0.3)^n \frac{(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}}{(0.3)^n (0.8 - 0.3)} u[n] = 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}]u[n]$$

# Resposta de Estado Zero (vii)

- **Somatório de Convolução**
  - Exemplo: A resposta de estado zero para o sistema LTID:

$$y[n+2]-0.6y[n+1]-0.16y[n]=5x[n+2]$$

A entrada é $x[n]= 4^{-n}u[n]$ e a resposta ao impulso unitário é

$h[n]=[(-0.2)^n+4(0.8)^n]u[n].$ Assim, a resposta é :

$$y[n]=x[n]*h[n]=(0.25)^n u[n]*[(-0.2)^n u[n]+4(0.8)^n u[n]]\therefore$$

$$y[n]=(0.25)^n u[n]*(-0.2)^n u[n]+(0.25)^n u[n]*4(0.8)^n u[n]$$

Tabela de somatórios de convolução : $x_1[n]=\gamma_1^n u[n];\quad x_2[n]=\gamma_2^n u[n];$

$$x_1[n]*x_2[n]=\left[\frac{\gamma_1^{n+1}-\gamma_2^{n+1}}{\gamma_1-\gamma_2}\right]u[n],\qquad \text{então}$$

$$y[n]=\left[\frac{\gamma_1^{n+1}-\gamma_2^{n+1}}{\gamma_1-\gamma_2}\right]u[n]+4\left[\frac{\gamma_1^{n+1}-\gamma_3^{n+1}}{\gamma_1-\gamma_3}\right]u[n]$$

# Resposta de Estado Zero (viii)

- **Somatório de Convolução**
  - Exemplo: continuação:

$$y[n]=\left[\frac{\gamma_1^{n+1}-\gamma_2^{n+1}}{\gamma_1-\gamma_2}\right]u[n]+4\left[\frac{\gamma_1^{n+1}-\gamma_3^{n+1}}{\gamma_1-\gamma_3}\right]u[n]\therefore$$

$$y[n]=\left[\frac{(0.25)^{n+1}-(-0.2)^{n+1}}{(0.25)-(-0.2)}\right]u[n]+4\left[\frac{(0.25)^{n+1}-(0.8)^{n+1}}{(0.25)-(0.8)}\right]u[n]\therefore$$

$$y[n]=(2.22[(0.25)^{n+1}-(-0.2)^{n+1}]-7.27[(0.25)^{n+1}-(0.8)^{n+1}])u[n]\therefore$$

$$y[n]=[-5.05(0.25)^{n+1}-2.22(-0.2)^{n+1}+7.27(0.8)^{n+1}]u[n],$$

lembrando que $\gamma^{n+1}=\gamma.\gamma^n$, a resposta pode ser re-escrita :

$$y[n]=[-1.26(0.25)^n+0.444(-0.2)^n+5.81(0.8)^n]u[n]\therefore$$

$$y[n]=[-1.26(4)^{-n}+0.444(-0.2)^n+5.81(0.8)^n]u[n]$$

# Resposta de Estado Zero (ix)

– Resposta para Entradas Complexas

- A parte real da entrada gera a parte real da resposta e a parte imaginária da entrada gera a parte imaginária da resposta. Logo,

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n] \quad \text{e} \quad y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$$

$$\text{logo,}\ x_r[n] \Rightarrow y_r[n] \quad \text{e} \quad x_i[n] \Rightarrow y_i[n]$$

– Entradas Múltiplas

- Entradas múltiplas para um sistema LTI são tratadas empregando o princípio da superposição.

# Resposta de Estado Zero (x)

- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**
  - Procedimento Gráfico:

O somatório de convolução de sinais causais $x[n]$ e $g[n]$ é dado por:

$$c[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m]g[n-m]$$

O somatório de convolução pode ser determinado pelo procedimento:

0. Trace o gráfico de $x[m]$ e $g[m]$ como funções de $m$.

1. Inverta a função $g[m]$ em torno do eixo verical $(m = 0)$ e obtenha $g[-m]$.

2. Desloque $g[-m]$ por $n$ unidades e obtenha $g[n-m]$. Para $n > 0$, move-se à direita (atraso); para $n < 0$, move-se à esquerda (avanço).

3. Multiplique $x[m]$ por $g[n-m]$, adicione todos produtos e obtenha $c[n]$.

O procedimento é repetido para cada valor de $n$ no intervalo $-\infty$ a $\infty$.

# Resposta de Estado Zero (xi)

- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo: Determine graficamente a $c[n] = x[n] * g[n]$.

$$x[n] = (0.8)^n, \; g[n] = (0.3)^n, \quad \text{logo,} \;\; x[m] = (0.8)^m, \; g[n-m] = (0.3)^{n-m}$$

As duas funções se sobrepoêm no intervalo $0 \leq m \leq n$, assim :

$$c[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m] g[n-m] = \sum_{m=0}^{n} (0.8)^m (0.3)^{n-m} = (0.3)^n \sum_{m=0}^{n} \left( \frac{0.8}{0.3} \right)^m \;\; \therefore$$

$$c[n] = 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}], \qquad n \geq 0.$$

Para $n < 0$, não existe sobreposição entre $x[m]$ e $g[n-m]$, logo,

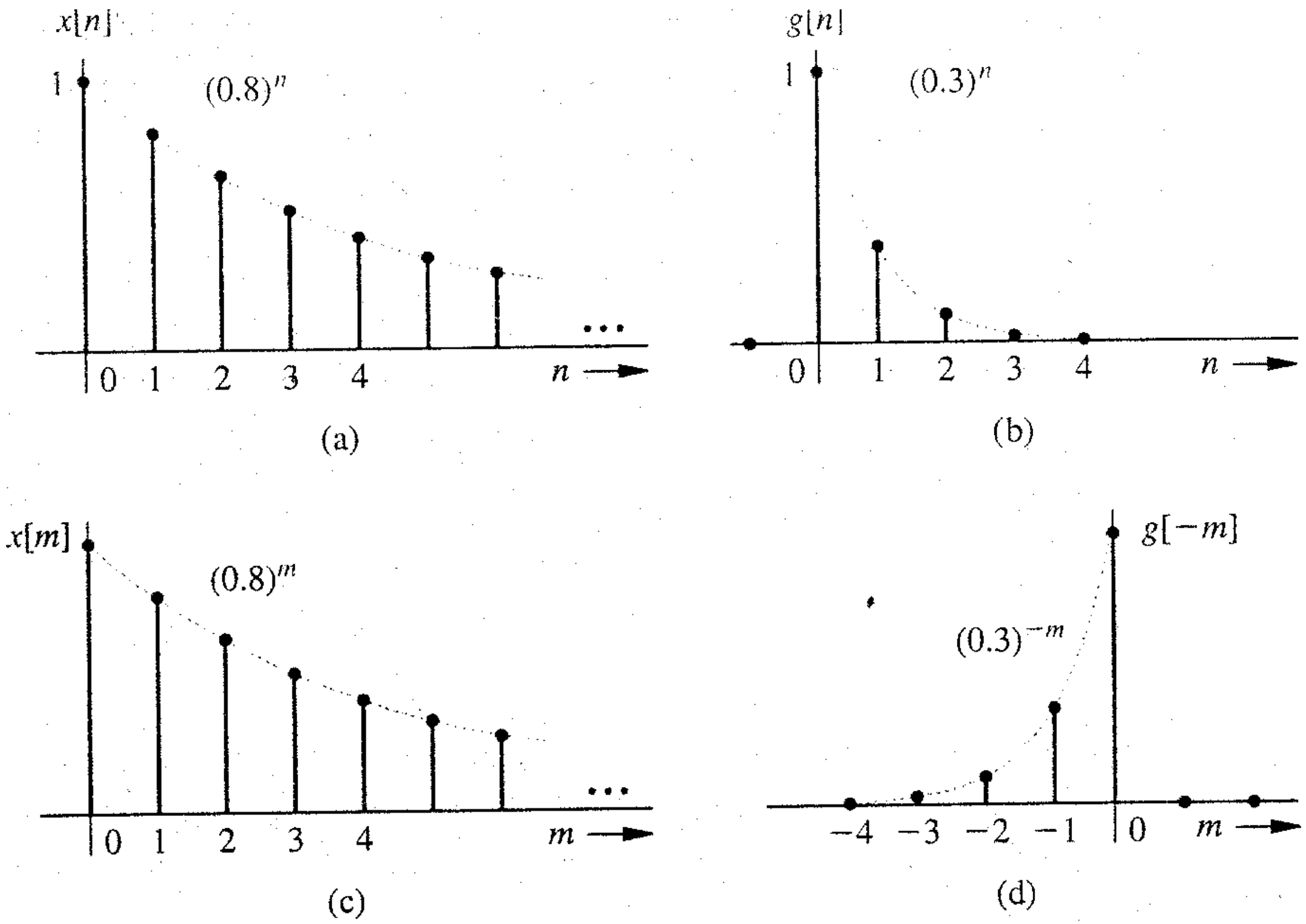
$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}], & n \geq 0 \end{cases}$$

Logo, $c[n] = 2[(0.8)^{n+1} - (0.3)^{n+1}] u[n]$

A Figura (h), a seguir, mostra a situação geral para $n \geq 0$.

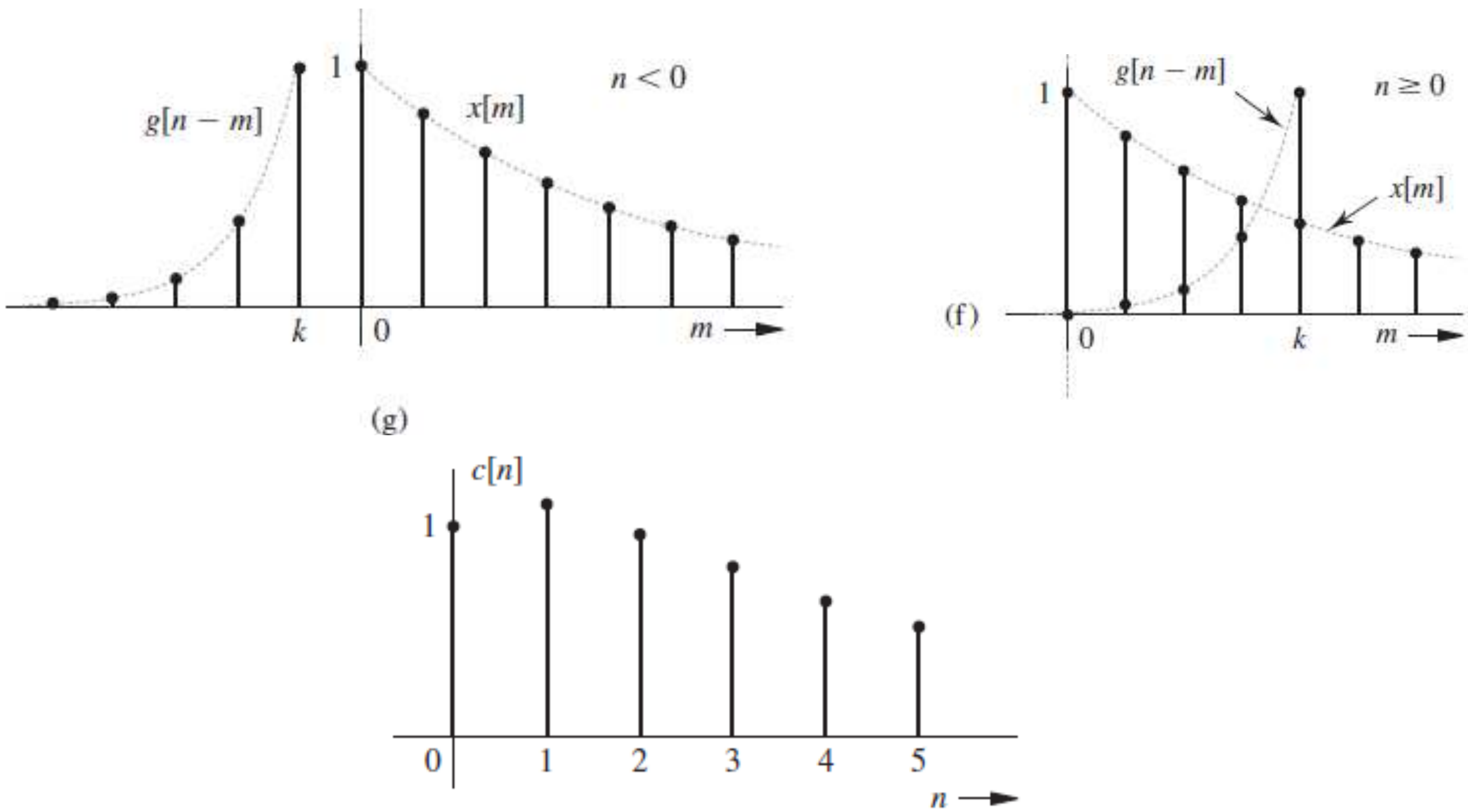
# Resposta de Estado Zero (xii)

- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo: Representação gráfica



# Resposta de Estado Zero (xiii)

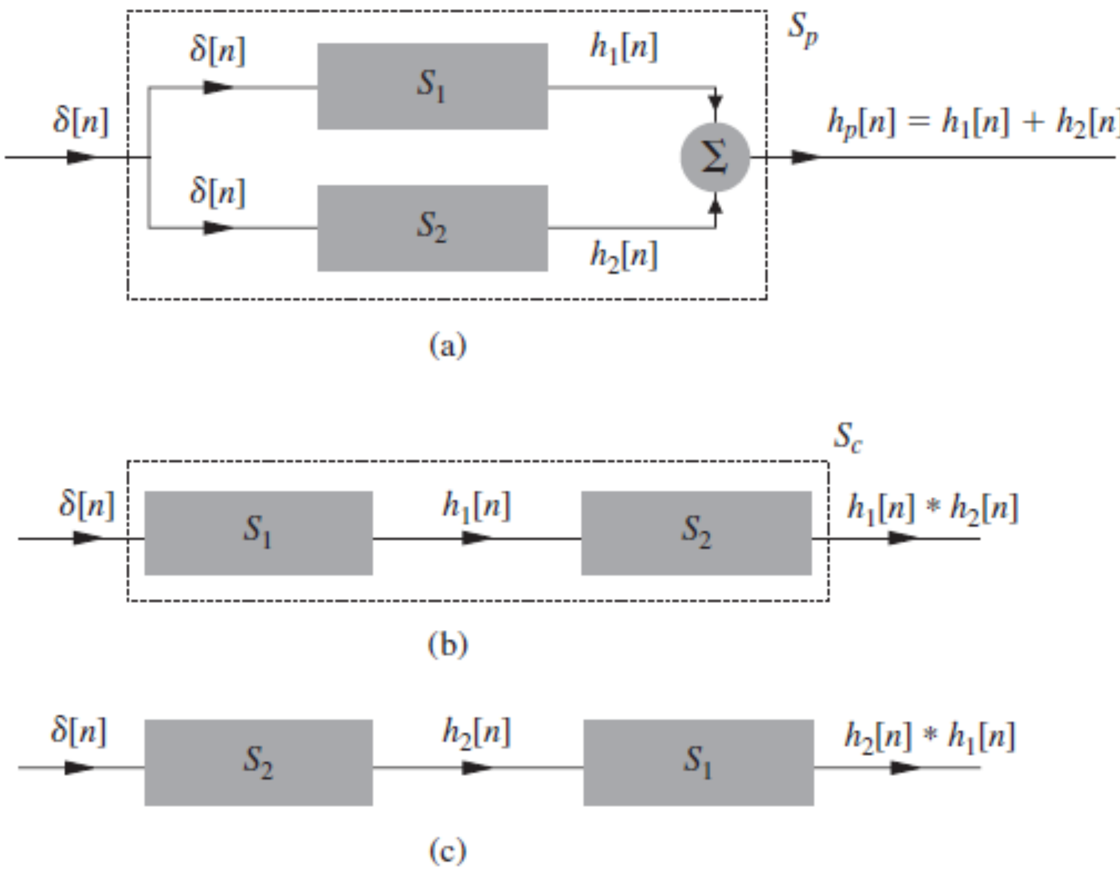
- **Somatório de Convolução: Solução Gráfica**
  - Exemplo: Representação gráfica




(h)

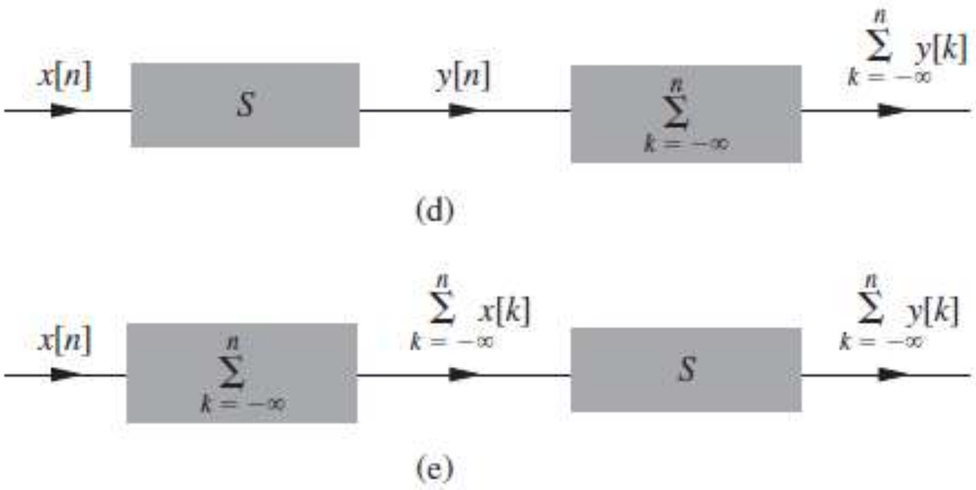
# Resposta de Estado Zero (xv)

- **Somatório de Convolução: Sistemas Interconectados**
  - Sistema composto por subsistemas mais simples para se gerar a resposta ao impulso de sistemas em paralelo ou em cascata.



# Resposta de Estado Zero (xvi)

- **Somatório de Convolução: Sistemas Interconectados**
  - Sistema LTID composto por sistema $S$ com resposta ao impulso $h[n]$ seguido de acumulador.




A resposta $g[n]$ ao degrau unitário de um sistema LTID, com resposta ao impulso $h[n]$, é :

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

# Resposta de Estado Zero (xvii)

- **Somatório de Convolução: Sistemas Interconectados**
  - Sistema Inverso: $h[n] * h_i[n] = \delta[n]$
  - Analogia entre operadores de sistemas contínuos e sistemas discretos: integrador e acumulador, diferenciador e diferença para trás.

$$\text{Acumulador}: y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]; \quad \text{Diferença para trás}: y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Exemplo de sistema inverso considerando a resposta ao impulso :

$$\text{do acumulador}: \; h_{acc}[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

$$\text{da diferença para trás}: \; h_{bdf}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$h_{acc}[n] * h_{bdf}[n] = u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

# Resposta de Estado Zero (xviii)

- **Somatório de Convolução: Função Exponencial Incessante** $(z^n)$
  - Função característica: Entrada para qual um sistema responde da mesma forma, a exponencial é o único caso.

Seja um sistema LTID com resposta ao impulso $h[n]$ e entrada $z^n$

então a resposta do sistema $y[n]$ é:

$$y[n] = h[n] * z^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] * z^{n-m} = z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] * z^{-m} \therefore$$

$$y[n] = H[z]z^n, \text{ onde } H[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] * z^{-m}, \text{ válido para somatório finito.}$$

$H[z]$ é uma constante para um dado valor de $z$.

$$\text{Função de transferência : } H[z] = \left.\frac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}}\right|_{\text{entrada}=\text{exponencial incessante } z^n}$$

# Resposta de Estado Zero (xix)

- **Somatório de Convolução: : Função Exponencial Incessante** $(z^n)$
  - A função de transferência para sistema LTID, com sinal de entrada não-causal pode ser expressa em termos de polinômio:

$$\text{Tem-se que } H[z] = \frac{\text{sinal de saída}}{\text{sinal de entrada}}\bigg|_{\text{entrada}=z^n}$$

Na forma de polinômio a exponencial incessante e sua resposta :

$$H[z][Q[E]z^n] = P[E]z^n$$

$$\text{Como} \quad E^k z^n = z^{n+k} = z^n z^k \;\therefore \begin{cases} P[E]z^n = P[z]z^n \\ Q[E]z^n = Q[z]z^n \end{cases}$$

$$\text{Conclui-se que a função de transferência é } H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

# Resposta de Estado Zero (xx)

- **Somatório de Convolução: Resposta Total**
  - Resposta total = Resposta entrada-zero + Resposta estado-zero=

$$
\begin{cases}
\underbrace{\sum_{j=1}^{N} c_j \gamma_j^n}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{estado zero}}, \text{ para autovalores distintos} \\
\underbrace{\sum_{j=1}^{r} n^{j-1} c_j \gamma_1^n + \sum_{j=r+1}^{N} c_j \gamma_j^n}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{estado zero}}, \text{ para autovalores repetidos e distintos}
\end{cases}
$$

$$\text{Exemplo : Sistema : } y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2]$$

$$\text{Com condições iniciais : } y[-1] = 0, \quad y[-2] = 25/4 \text{ e entrada } (4)^{-n} u[n]$$

$$\text{resp} = \underbrace{0.2(-0.2)^n + 0.8(0.8)^n}_{\text{entrada zero}} \underbrace{-1.26(4)^n + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n)}_{\text{estado zero}}$$

# Solução Clássica de Equações de Diferenças (i)

- **Determinação das Respostas Natural e Forçada**
  - A resposta natural de um sistema consiste de todos termos de modos característicos na resposta.
  - A resposta forcada é composta pelos termos remanescentes que não forem de modos característicos.

resposta total $= y[n] = y_c[n] + y_\phi[n]$, logo,

$$Q[E](y_c[n] + y_\phi[n]) = P[E]x[n] \therefore \begin{cases} Q[E]y_c[n] = 0 \\ Q[E]y_\phi[n] = P[E]x[n] \end{cases}$$

- Na resposta natural, as constantes arbitrarias são determinadas a partir, em geral, das condições auxiliares ($y[0], y[1], \ldots, y[n-1]$) ao invés das condições iniciais ($y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$).

- Cálculo de resposta forçada por método de coeficientes indeterminados.

# Solução Clássica de Equações de Diferenças (ii)

- **Resposta Forçada**
  - A tabela mostra algumas funções de entrada e a saída forçada:

| Entrada | Saída |
|---|---|
| $r^n, \quad r \neq \gamma_i \quad (i = 1,2,\ldots,N)$ | $cr^n$ |
| $r^n, \quad r = \gamma_i \quad (i = 1,2,\ldots,N)$ | $cnr^n$ |
| $\cos(\beta n + \theta)$ | $c\cos(\beta n + \phi)$ |
| $\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i n^i\right) r^n$ | $\left(\sum_{i=0}^{m} c_i n^i\right) r^n$ |

# Solução Clássica de Equações de Diferenças (iii)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo :

Resolva a equação de diferenças : $(E^2 - 5E + 6)y[n] = (E - 5)x[n]$, com entrada $x[n] = (3n + 5)u[n]$ e condições auxiliares $y[0] = 4$, $y[1] = 13$.

Polinômio característico : $\gamma^2 - 5\gamma + 6 = (\gamma - 2)(\gamma - 3)$, assim :

Logo, a resposta natural é $y_c[n] = B_1(2)^n + B_2(3)^n$

Pale tabela anterior, a resposta forçada é $y_\phi[n] = c_1 n + c_0$

Considerando a resposta forçada, tem-se que :

$$y_\phi[n+1] = c_1(n+1) + c_0 = c_1 n + c_1 + c_0$$

$$y_\phi[n+2] = c_1(n+2) + c_0 = c_1 n + 2c_1 + c_0$$

$$x[n] = 3n + 5 \qquad \text{e} \qquad x[n+1] = 3(n+1) + 5 = 3n + 8$$

# Solução Clássica de Equações de Diferenças (iv)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo (continuação):

Lembre que $Q[E]y_\phi[n] = P[E]x[n]$ logo tem-se:

$$y_\phi[n+2] - 5y_\phi[n+1] + 6y_\phi[n] = x[n+1] - 5x[n] \therefore$$

$$c_1 n + 2c_1 + c_0 - 5(c_1 n + c_1 + c_0) + 6(c_1 n + c_0) = 3n + 8 - 5(3n+5) \therefore$$

$2c_1 n - 3c_1 + 2c_0 = -12n - 17,$ por comparação tem-se

$$\left.\begin{array}{l} 2c_1 = -12 \\ -3c_1 + 2c_0 = -17 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -6 \\ c_0 = -\dfrac{35}{2} \end{cases} \Rightarrow y_\phi[n] = -6n - \frac{35}{2}$$

Resposta total: $y[n] = y_c[n] + y_\phi[n] = B_1(2)^n + B_2(3)^n - 6n - \dfrac{35}{2} \quad n \geq 0$

# Solução Clássica de Equações de Diferenças (v)

- **Resposta Forçada**

- Exemplo (continuação):

$$\text{Resposta total}: y[n] = y_c[n] + y_\phi[n] = B_1(2)^n + B_2(3)^n - 6n - \frac{35}{2} \quad n \geq 0$$

As condições auxiliares são usadas para determinar $B_1$ e $B_2$:

$$y[0] = 4 = B_1(2)^0 + B_2(3)^0 - 6(0) - \frac{35}{2} \therefore B_1 + B_2 = \frac{43}{2}$$

$$y[1] = 13 = B_1(2)^1 + B_2(3)^1 - 6(1) - \frac{35}{2} \therefore 2B_1 + 3B_2 = \frac{73}{2}$$

$$\begin{cases} (B_1 + B_2)(-2) = \dfrac{43}{2}(-2) \\ 2B_1 + 3B_2 = \dfrac{73}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} -2B_1 - 2B_2 = -\dfrac{86}{2} \\ 2B_1 + 3B_2 = \dfrac{73}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} B_2 = \dfrac{73}{2} - \dfrac{86}{2} = -\dfrac{13}{2} \\ B_1 = \dfrac{43}{2} - B_2 = 15 \end{cases}$$

$$\text{Resposta total}: y[n] = y_c[n] + y_\phi[n] = 15(2)^n - \frac{13}{2}(3)^n - 6n - \frac{35}{2}$$

# Solução Clássica de Equações de Diferenças (vi)

– O método clássico requer condições auxiliares pois em $n = -1, -2, \ldots, -N$ apenas a componente de entrada zero existe e neste método, não se pode separar as componentes de entrada zero e estado zero. Logo, as condições iniciais devem ser aplicadas à resposta total que se inicia em n=0. Logo precisa-se de condições auxiliares: $y[0], y[1], \ldots, y[N-1]$.

  - Se forem informadas condições iniciais $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$. então pode-se usar procedimento iterativo para se obter as condições auxiliares $y[0], y[1], \ldots, y[N-1]$.

O sistema especificado pela equação $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$

tem resposta forçada para a entrada exponencial $x[n] = r^n$ dada por

$$y_\phi[n] = H[r]r^n \qquad \text{onde} \begin{cases} r \neq \gamma_i \quad \text{(modo característico)} \\ H[r] = \dfrac{P[r]}{Q[r]} \end{cases}$$

# Estabilidade de Sistemas (i)

- **Estabilidade BIBO**
  - Se toda entrada limitada produzir saídas limitadas no sistema, este é dito estável BIBO. Em contraste, se alguma entrada limitada resultar em resposta ilimitada o sistema é definido com instável BIBO. Assim, para um sistema LTID:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \therefore$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]||x[n-m]|,$$

$$\text{Se } x[n] \text{ limitada, então } |x[n-m]| < K_1 < \infty \quad \text{e} \quad |y[n]| \leq K_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|.$$

Condição necessária e suficiente para estabilidade BIBO:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < K_2 < \infty.$$

# Estabilidade de Sistemas (ii)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

Seja um sistema LTID definido pelo polinômio : $Q(E)y[n] = P(E)x[n]$.

Para modos carcterísticos $\gamma^n$, com $\gamma$ complexo, tem-se que o sistema é :

- Assintoticamente estável : $\gamma^n \to 0$ quando $n \to \infty$ para $|\gamma| < 1$.

- Instável : $\gamma^n \to \infty$ quando $n \to \infty$, para $|\gamma| > 1$.

- Marginalmente estável : $|\gamma|^n = 1$ quando $n \to \infty$ para $|\gamma| = 1$.

Estes resultados são válidos também para raízes repetidas.

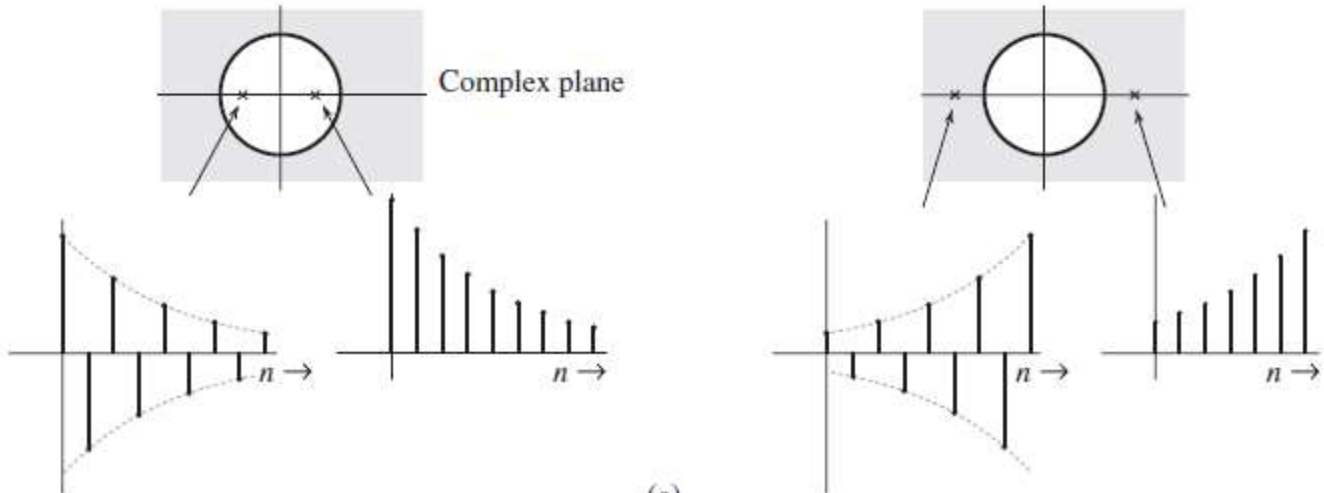
Raízes imaginárias repetidas e $|\gamma| = 1$ tornam o sistema instável, pois modos característicos $n^{r-1}\gamma^n$, então $\left|n^{r-1}\gamma^n\right| = n^{r-1} \to \infty$ se $n \to \infty$

# Estabilidade de Sistemas (iii)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

-Raízes reais

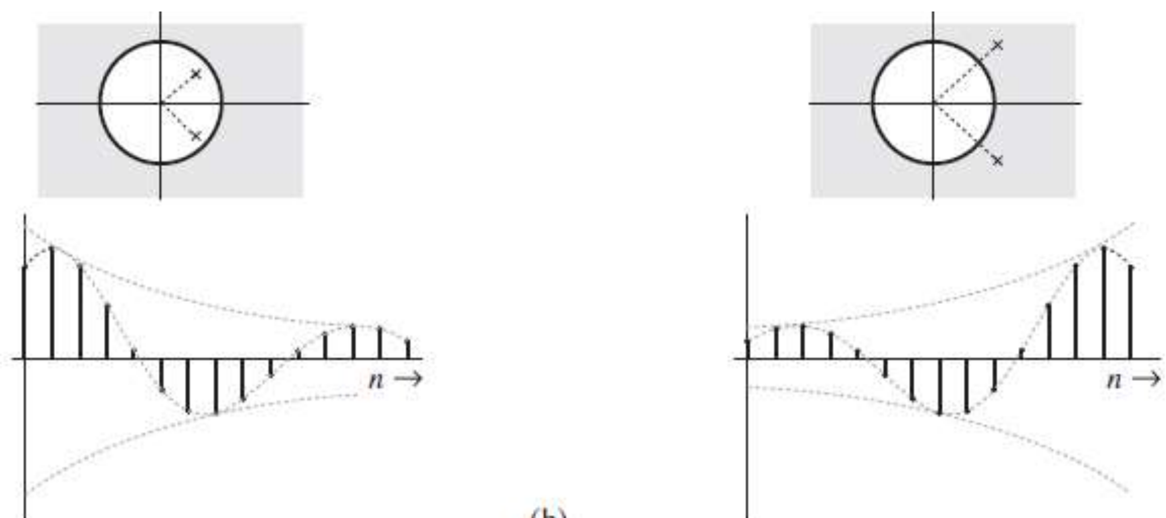
Dentro e fora do círculo de raio1.



(a)

-Raízes complexas

Dentro e fora do círculo de raio1.



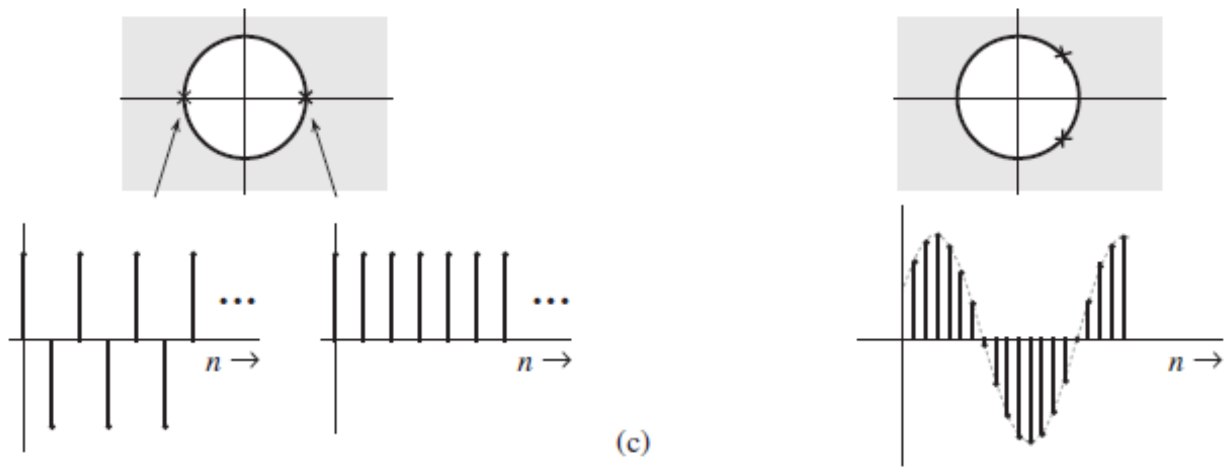
(b)

# Estabilidade de Sistemas (iv)

- **Estabilidade Interna (Assintótica)**

- Raízes simples sobre o círculo de raio 1 :

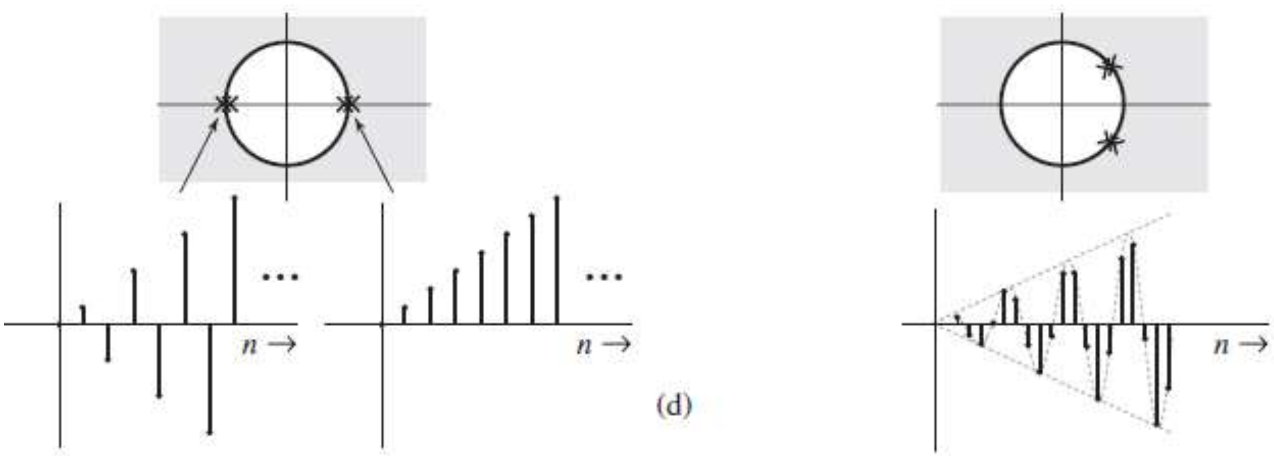
Reais reais e complexas.




(c)

-Raízes repetidas sobre o círculo de raio 1:

Raízes reais e complexas.




(d)

# Estabilidade de Sistemas (v)

- **Definição de Estabilidade Interna**
  - Um sistema LTID é assintoticamente estável se e só se todas raízes características (simples ou repetidas) estiverem dentro do circulo unitário.
  - Um sistema LTID é instável se e só se for verdade ao menos uma das condições: (i) ao menos uma das raízes está fora do círculo unitário; (ii) existem raízes repetidas sobre o circulo unitário.
  - Um sistema LTID é marginalmente estável se e só se não existirem raízes características fora do círculo unitário e se houver algumas raízes não repetidas sobre o circulo unitário.
- **Relação entre Estabilidade Interna e Externa**
  - Estabilidade interna é determinada para condições iniciais não nulas e entrada nula enquanto que a externa é determinada com condições iniciais nulas e entrada diferente de zero.
  - Estabilidade interna assegura estabilidade externa mas o inverso não é verdadeiro.

# Parâmetros e Comportamento de Sistemas (i)

- **O comportamento de um sistema LTID (com respeito aos seus parâmetros):**
  – Depende dos modos característicos em termos de módulo, tempo e precisão.
  – Responde fortemente a entradas similares a seus modos característicos e pobremente a entradas muito diferentes.
  – Tem seu tempo de resposta indicado pela largura da resposta ao impulso.
  – Dispersa, em geral, pulsos discretos no tempo que são aplicados a sistemas discretos no tempo.
  – Tem a quantidade de dispersão e a taxa de transmissão de informação determinadas pela constante de tempo do sistema.

# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 3.1-1, 3.1-2, 3.1-4
  - 3.2-1 até 3.2-4.
  - 3.3-1,  3.3-3, 3.3-5 até 3.3-7.
  - 3.4-1 até 3.4-5, 3.4-7 até 3.4-9, 3.4-11 e 3.4-13.
  - 3.5-1 até 3.5-5.
  - 3.6-1 até 3.6-5 3.6-7.
  - 3.7-1 até 3.7-4.
  - 3.8-1 até 3.8-5, 3.8-10, 3.8-11, 3.8-16 e 3.8-17.
  - 3.9-1 até 3.9-8.
  - 3.10-1 até 3.10.-6.

# Análise de Sistemas Contínuos por Transformada de Laplace

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**
**Depto. of Sistemas de Computação**
**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 4

# Conteúdo

- **Introdução**
- **A Transformada de Laplace**
- **A Transformada Inversa**
- **Propriedades da Transformada de Laplace**
- **Solução de Equações Diferenciais e Integro-diferenciais**
- **Diagrama de Blocos**
- **Realização de Sistemas**

# Autor

Pierre Simon, Marquis de Laplace (23/03/1749 a 05/03/1827, foi um matemático, astrônomo e físico francês organizador da astronomia matemática, sumarizando e ampliando o trabalho de predecessores nos 5 volumes de Mécanique Céleste (Mecânica celeste) (1799-1825).

Ele também formulou a equação de Laplace. A transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática. O operador diferencial de Laplace, da qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome.

Ele se tornou conde do Império em 1806 e foi nomeado marquês em 1817, depois da restauração dos Bourbons.

# Transformada de Laplace (i)

- **Definições**
  - Decompõe-se o sinal $f(t)$ em sinais exponenciais complexos da forma $exp(st)$ onde $s$ é uma variável complexa (freqüência complexa do sinal).
  - Dado um sinal $x(t)$, a transformada (bilateral) de Laplace é:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-s\,t}\, dt$$

  - A transformada (bilateral) inversa de Laplace é definida como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\, e^{st} ds \quad , \quad \text{onde}$$

    - $c$ é uma constante que assegura a convergência da integral;
    - $x(t)$ é um sinal no domínio do tempo;
    - $X(s)$ é um sinal no domínio da freqüência.

# Transformada de Laplace (ii)

- **Observações**
  - Simbolicamente, tem-se que:

$$X(s) = L[x(t)] \qquad \text{e} \qquad x(t) = L^{-1}[X(s)], \text{ logo pode-se inferir}$$

$$x(t) = L^{-1}\{L[x(t)]\} \qquad \text{e} \qquad X(s) = L\{L^{-1}[X(s)]\}$$

  - O par de transformada de Laplace pode também ser indicado por:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

    - Esta transformada, chamada de bilateral ou dois-lados pode tratar de sinais que existam em todo intervalo de tempo, isto é, sinais causais ou não-causais.
    - A Transformada Unilateral (ou de um lado) de Laplace, a ser definida posteriormente, só considera sinais causais.

# Transformada de Laplace (iii)

- **Características**
  - Linearidade deste operador:

    Sejam os pares $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s); \quad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$

    então $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$

    Prova

$$L[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]e^{-st}dt =$$

$$a_1\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt + a_2\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-st}dt = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

  - Região de convergência (ROC):
    - A região de convergência (ou região de existência) de $X(s)$ é o conjunto de valores de $s$ para os quais existe a integral que define a transformada de Laplace.

# Transformada de Laplace (iv)

– Exemplo:

Determine $X(s)$ e sua região de convergência para $x(t) = e^{-at}u(t)$

Por definição $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\,e^{-st}\,dt$, como $u(t) = 0, \quad t < 0$, então

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt = -\frac{1}{s+a}\, e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(s+a) > 0 \\ \infty & \mathrm{Re}(s+a) < 0 \end{cases}$$

Logo $\quad X(s) = \dfrac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s+a) > 0$

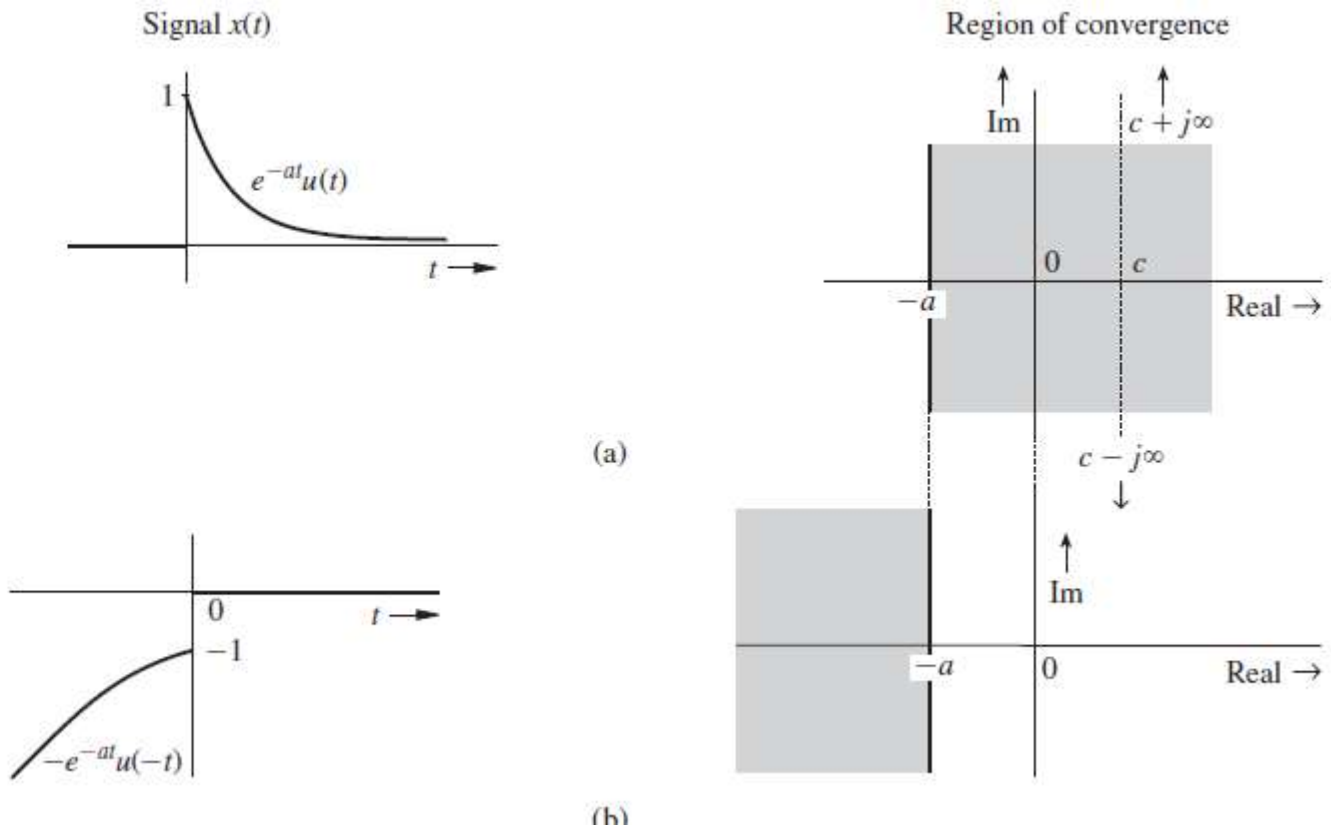
ou $\quad e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}\, s > -a$

A região de convergência de $X(s)$ é $\mathrm{Re}\, s > -a$.

# Transformada de Laplace (v)

– Exemplo:

- Os sinais $e^{-at}\,u(t)$ e $-\,e^{-at}\,u(-t)$ têm a mesma transformada de Laplace mas regiões de convergência diferentes.



# Transformada de Laplace (vi)

- **Observações**
  - Região de convergência para sinais de duração finita: Este sinal é caracterizado como existindo apenas no intervalo $[t_1, t_2]$. Para um sinal de duração finita que seja absolutamente integrável, a ROC é todo o plano s.
    - Isto ocorre pois a exponencial (da definição de transformada de Laplace) é finita, uma vez que é integrada no intervalo finito de existência do sinal.
  - Papel de ROC: Requerido para avaliar a transformada inversa de Laplace. A operação para achar tal Transformada requer integração no plano complexo. O caminho de integração deve estar no ROC (ou existência) para $X(s)$.

# Transformada de Laplace (vii)

- **Transformada Unilateral de Laplace**
  - Transformada na qual todos sinais são restringidos a serem causais. É um caso especial da transformada bilateral.
    - Ela é necessária para que exista correspondência um-para-um, entre $x(t)$ e $X(s)$, quando não se tem especificado o ROC (como ilustrado no exemplo anterior).
    - Os limites de integração passam a ser zero e infinito.
  - Transformada Unilateral de Laplace $X(s)$ de um sinal $x(t)$:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

    - O limite inferior assegura a inclusão da resposta ao impulso e permite o uso das condições iniciais (no instante do limite inferior) para solucionar equações diferenciais empregando transformada de Laplace.

# Transformada de Laplace (viii)

- **Transformada Unilateral de Laplace**
  - Em princípio não há diferenças entre as transformadas de Laplace unilateral e bilateral.
    - A transformada unilateral é a transformada bilateral que lida com subclasse de sinais que existem a partir de $t$=0.
    - A expressão para a transformada inversa permanece inalterada em ambos os casos.
  - Existência da transformada unilateral de Laplace:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt, \quad \text{onde} \left|e^{-j\omega t}\right| = 1$$

logo a integral converge se $\int_{0^-}^{\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right| dt < \infty$

# Transformada de Laplace (ix)

– Exemplo: Determine as transformadas de Laplace a seguir

(a) $\delta(t)$; (b) $u(t)$; (c) $\cos\omega_0 t\, u(t)$.

(a) $L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1,$

usou - se propriedade de amostragem $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$

(b) $L[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\; dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s},\quad \operatorname{Re} s > 0$

(c) Lembre - se que $\cos\omega_0 t\, u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right]u(t),$ logo

$$L[\cos\omega_0 t\, u(t)] = \frac{1}{2} L\left[e^{j\omega t}u(t) + e^{-j\omega t}u(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right] \therefore$$

$$L[\cos\omega_0 t\, u(t)] = \frac{s}{s^2 + (\omega_0)^2},\ \operatorname{Re}(s \pm j\omega_0) = \operatorname{Re}(s) > 0$$

# A Transformada Inversa (i)

- **Determinação da Transformada Inversa**
  - Busca-se expressar X(s) como o somatório de funções mais simples que podem ser encontradas em tabelas.

$$\text{Exemplo : Encontre a Transformada Inversa de } \frac{7s-6}{s^2-s-6}$$

$$\frac{7s-6}{s^2-s-6} = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{7s-6}{\cancel{(s+2)}(s-3)}\right|_{s=-2} = \frac{-14-6}{-2-3} = 4$$

$$k_2 = \left.\frac{7s-6}{(s+2)\cancel{(s-3)}}\right|_{s=3} = \frac{21-6}{3+2} = 3$$

$$\text{Logo,} \quad X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3} \Rightarrow x(t) = (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)$$

# A Transformada Inversa (ii)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : Encontre a Transformada Inversa de $X(s) = \dfrac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$

onde $X(s)$ é uma função imprópria onde $M = N$.

$$X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2} = \frac{2s^2+5}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{2s^2+5}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7$$

$$k_2 = \left.\frac{2s^2+5}{(s+1)\cancel{(s+2)}}\right|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

Logo, $\quad X(s) = 2 + \dfrac{7}{s+1} - \dfrac{13}{s+2} \Rightarrow x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$

# A Transformada Inversa (iii)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : Encontre a Transforma da Inversa de $X(s) = \dfrac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

$$X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s+5-j3)(s+5+j3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+5-j3} + \frac{k_2^*}{s+5+j3} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{6(s+34)}{\cancel{s}(s+5-j3)(s+5+j3)}\right|_{s=0} = \frac{6\times 34}{34} = 6$$

$$k_2 = \left.\frac{6(s+34)}{s\cancel{(s+5-j3)}(s+5+j3)}\right|_{s=-5+j3} = \frac{29+j3}{-3-j5} = -3+4j$$

$$k_2^* = -3-j4, \text{ em forma polar } \; -3+j4 = (\sqrt{3^2+4^2})e^{j\tan^{-1}(4/-3)} = 5e^{j\tan^{-1}(4/-3)}$$

$$\text{Logo,} \qquad X(s) = \frac{6}{s} + \frac{5e^{j\tan^{-1}(4/-3)}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j\tan^{-1}(4/-3)}}{s+5+j3}$$

$$\Rightarrow x(t) = [6+10e^{-5t}\cos(3t+126.9^0)]u(t)$$

# Propriedades da Transformada de Laplace (i)

- **Motivação:**
  - Úteis para encontrar a Transformada de Laplace e para se determinar soluções de equações Integro-diferenciais.

- **Deslocamento no Tempo:**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então para } t_0 \geq 0, \text{tem-se } x(t-t_0) \Leftrightarrow X(s)\,e^{-st_0}$$

Esta propriedade pode ser alternativamente expressa como :

$$\text{Se} \quad x(t)u(t) \Leftrightarrow X(s), \text{então } x(t-t_0)u(t-t_0) \Leftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0.$$

- **Deslocamento na Freqüência:**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \quad x(t)e^{s_0 t} \Leftrightarrow X(s-s_0)$$

- **Propriedade de Diferenciação no Tempo**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \quad \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow sX(s) - x(0^-), \quad \text{e em geral}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

# Propriedades da Transformada de Laplace (ii)

- **Propriedade de Integração no Tempo:**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s}, \quad \text{e}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s}$$

- **Escalonamento:**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \;\; x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- **Convolução no Tempo e Convolução na Freqüência**

Considere $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$.

Convolução no tempo $\quad x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$

Convolução na freqüência $\quad x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow (1/2\pi j)[X_1(s) * X_2(s)]$

# Propriedades da Transformada de Laplace (iii)

- **Adição e Multiplicação Escalar**

Adição $x_1(t)+x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s)+X_2(s)$

Multiplicação por escalar $kx_1(t) \Leftrightarrow kX_1(s)$

- **Propriedade de Diferenciação na Freqüência:**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \quad -tx(t) \Leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$$

- **Propriedade de Integração na Freqüência:**

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \quad \frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^{\infty} X(\tau)d\tau$$

- **Valor Inicial**

Terorema do valor inicial : Se $x(t)$ e sua $dx(t)/dt$ têm Transforma das de Laplace, então $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$, desde que o limite exista.

- **Valor final**

Terorema do valor final : Se $x(t)$ e sua $dx(t)/dt$ têm Transforma das de Laplace, então $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$, caso não haja pólos no RHP ou no eixo imaginário.

# Propriedades da Transformada de Laplace (iii)

- **Valor Inicial e valor final (preliminares)**
  - **Definição:** $f : [a, b] \to \mathscr{R}$ é ***contínua por partes*** ou ***seccionalmente contínua*** em $[a, b]$ se:

(i) $F \in C([a,b] - \{t_1,\dots,t_n\})$ isto é $f$ só não é contínua no conjunto finito $\{t_1,\dots,t_n\}$ de $[a,b]$;

(ii) Existem os limites laterais nos pontos $t_1,\dots, t_n$, ou seja, as descontinuidades são apenas de salto, ou seja,

$$\exists f(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} f(t) = \lim_{\delta \to 0^+} f(t_k + \delta) \text{ e } \exists f(t_k^-) = \lim_{t \to t_k^-} f(t) = \lim_{\delta \to 0^+} f(t_k - \delta).$$

  - **Definição:** $f : ]0, +\infty[ \to \mathscr{R}$ é de ***ordem exponencial*** em $]0,+\infty[$ se $\exists C, \alpha \in \mathscr{R}$, $C > 0$, tq: $f(t) \le Ce^{\alpha t}, \forall t > 0$.
  - **Definição:** $E = \{ f : ]0,+\infty[ \to \mathscr{R} : f$ seccionalmente contínua e de ordem exponencial em $]0,+\infty[\}$
  - Olhar http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/transformada_de_laplace_0.pdf

# Propriedades da Transformada de Laplace (iii)

**Teorema: (Valor Inicial)**

*Hipótese:* $f, f' \in E$ .

*Tese:* $\lim_{s \to +\infty} sL\,[f](s) = \lim_{t \to 0} f(t)$ .

*Prova:* $L\,[f'](s) = sL\,[f](s) - f(0^+)$ e $f' \in E \Rightarrow \lim_{s \to +\infty} L\,[f'](s) = 0$ . Portanto,

$$\lim_{s \to +\infty} sL\,[f](s) = f(0^+) = \lim_{t \to 0} f(t) .$$

# Propriedades da Transformada de Laplace (iii)

**Teorema: (Valor Final)**

*Hipótese:* $f, f'$ *seccionalmente contínuas e limitadas sobre* $[0,+\infty[$, *com* $f'$ *integrável em* $[0,+\infty[$.

*Tese:*
$$\lim_{s\to 0^+} sL[f](s) = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

*Prova:* $L[f'](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt \Rightarrow \lim_{s\to 0^+} L[f'](s) = \lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt$.

Pela convergência uniforme obtida pelo teste de Weierstrass, uma vez que
$$\left|e^{-st} f'(t)\right| \le |f'(t)|,\ \forall t>0 \text{ e } \int_0^{+\infty} |f'(t)|dt < +\infty,$$
temos que

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{s\to 0^+} e^{-st} f'(t)dt.$$

De modo que,
$$\lim_{s\to 0^+} L[f'](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} f'(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \left[f(T) - f(0^+)\right]$$

Portanto,
$$\lim_{s\to 0^+} \left(sL[f](s) - f(0^+)\right) = \lim_{s\to 0^+} L[f'](s) = \lim_{t\to+\infty} \left(f(t) - f(0^+)\right) \quad \square$$

# Propriedades da Transformada de Laplace (iv)

- **Exemplo**

Determine os valores iniciais e finais de $y(t)$ para $Y(s)$ dado por :

$$Y(s) = \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}$$

Assim tem-se que

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}\right] = \lim_{s\to\infty} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}\right] = \lim_{s\to 0} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = 6$$

# Soluções de Equações (i)

- **Soluções de Equações Integro-diferenciais**
  - A transformada de Laplace substitui equações diferenciais por equações algébricas na resolução do sistema dinâmico seguindo as operações:
    - Obtenção das equações diferenciais;
    - Obtenção das transformadas de Laplace das equações diferenciais;
    - Resolução das equações algébricas para as variáveis de interesse;
    - Obtenção da transformada inversa de Laplace da solução encontrada.

# Soluções de Equações (ii)

- **Equações Diferenciais**
  - Resolve-se equações diferenciais com coeficientes constantes. Lembre-se que a Transformada de Laplace de uma equação diferencial é uma equação algébrica.
  - Exemplo:

Resolva a ED linear de segunda ordem: $(D^2+5D+6)y(t)=(D+1)x(t)$

com condições iniciais $y(0^-)=2$ e $\dot{y}(0^-)=1$, e entrada $x(t)=e^{-4t}u(t)$

Re-escrevendo a expressão: $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$

Pelas propriedades das Transformadas de Laplace tem-se:

$$y(t)\Leftrightarrow Y(s); \quad \frac{dy(t)}{dt}\Leftrightarrow sY(s)-y(0^-)=sY(s)-2$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}\Leftrightarrow s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-)=s^2Y(s)-2s-1$$

# Soluções de Equações (iii)

– Exemplo (continuação):

Ainda pelas propriedades das Transformadas de Laplace tem-se :

$$x(t) = e^{-4t}u(t) \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+4}; \quad \frac{dx(t)}{dt} = sX(s) - x(0^-) = \frac{s}{s+4}$$

Assim, tem-se : $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\dfrac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) \Leftrightarrow$

$$\left[s^2Y(s) - 2s - 1\right] + 5\left[sY(s) - 2\right] + 6Y(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4} \therefore$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) - (2s + 11) = \frac{s+1}{s+4} \therefore Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s^2 + 5s + 6)(s+4)} \therefore$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3} + \frac{k_3}{s+4} = \frac{13/2}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{3/2}{s+4}$$

Logo : $y(t) = \left(\dfrac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \dfrac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)$

# Soluções de Equações (iv)

– Componentes de Entrada Zero e Estado Zero da Resposta:

No exemplo anterior, tem - se que :

$$(s^2+5s+6)Y(s)-(2s+11)=\frac{s+1}{s+4}\;\therefore\;(s^2+5s+6)Y(s)=\underbrace{(2s+11)}_{\text{cond.iniciais}}+\underbrace{\frac{s+1}{s+4}}_{\text{entrada}}$$

$$\therefore Y(s)=\underbrace{\frac{2s+11}{(s^2+5s+6)}}_{\text{componente entrada zero}}+\underbrace{\frac{s+1}{(s+4)(s^2+5s+6)}}_{\text{componente estado zero}}$$

$$\therefore Y(s)=\left[\frac{7}{s+2}-\frac{5}{s+3}\right]+\left[\frac{-1/2}{s+2}+\frac{2}{s+3}-\frac{3/2}{s+4}\right]$$

$$\therefore y(t)=\underbrace{\left(7e^{-2t}-5e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{resposta entrada zero}}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}+2e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)}_{\text{resposta estado zero}}$$

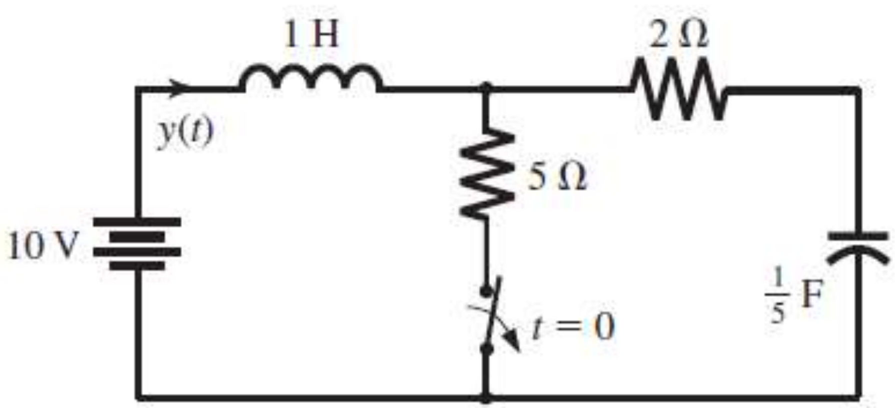
# Soluções de Equações (v)

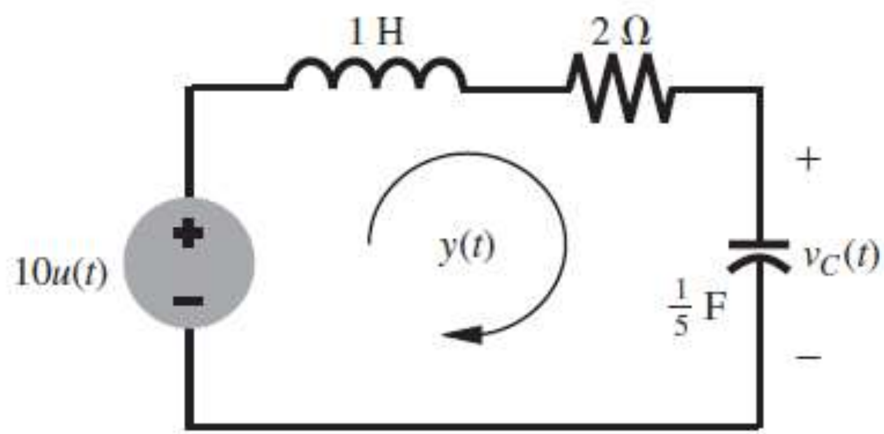
– Comentários sobre Condições Iniciais:

- As condições iniciais em zero menos são satisfeitas pela resposta de entrada zero, e não pela resposta total.
- A resposta total satisfaz as condições iniciais no tempo zero mais, condições estas, em geral, distintas daquelas em zero menos.

# Soluções de Equações (vi)

– Exemplo: Na figura abaixo, a chave é fechada por um longo período antes do tempo *t=0*, quando ela é aberta instantaneamente. Determine a corrente no indutor $y(t)$, para $t \geq 0$.



# Soluções de Equações (vii)

– Exemplo (continuação):

Condições iniciais : $y(0^-) = 2; \quad v_C(0^-) = 10$ e entrada $= 10u(t)$

Com a chave aberta, a equação do laço é :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + 5\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = 10u(t)$$

Para $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$, então $\dfrac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$ e

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} y(\tau)d\tau}{s}$$

Para a corrente no capacitor : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0^-} y(\tau)d\tau = q_C(0^-) = Cv_C(0^-) = \frac{1}{5}(10) = 2$

Assim, tem-se que $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{s} + \frac{2}{s}$

# Soluções de Equações (viii)

– Exemplo (continuação):

Encontrando a transformada de Laplace da equação de laço:

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)+5\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=10u(t)\Leftrightarrow sY(s)-2+2Y(s)+\frac{5Y(s)}{s}+\frac{10}{s}=\frac{10}{s}$$

$$\therefore\left[s+2+\frac{5}{s}\right]Y(s)=2\therefore Y(s)=\left(2\Big/\left(s+2+\frac{5}{s}\right)\right)$$

Transforma da Inversa: $re^{-at}\cos(bt+\theta)u(t)\Leftrightarrow\dfrac{As+B}{s^2+2as+c},$

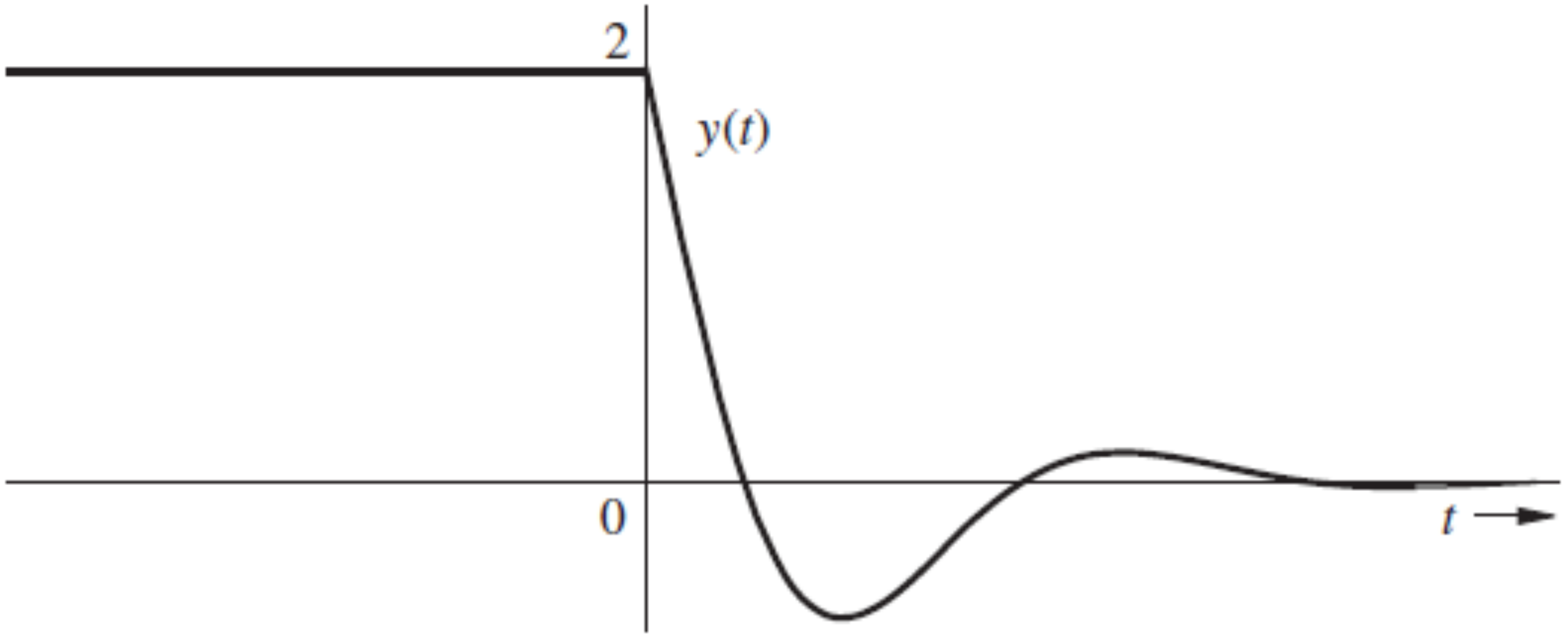
onde $r=\sqrt{\dfrac{A^2c+B^2-2ABa}{c-a^2}};\quad \theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{Aa-B}{A\sqrt{c-a^2}}\right);\quad b=\sqrt{c-a^2}$

$$r=\sqrt{20/4}=\sqrt{5};\quad b=2;\quad \theta=\tan^{-1}(2/4)=26.6^0$$

Concluindo: $y(t)=\sqrt{5}\,e^{-t}\cos(2t+26.6^0)u(t)$

# Soluções de Equações (ix)

– Exemplo (continuação):



# Resposta de Estado Zero (i)

- **Expressão Geral de um Sistema LTIC**

Seja o sistema LTIC de ordem $N : Q(D)y(t) = P(D)x(t)$ ou,

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y(t) =$$

$$= (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) x(t)$$

Para a resposta de estado zero, o sistema é inicialmente relaxado, isto é,

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = \ldots = \frac{d^{(N-2)} y(0^-)}{dt^{(N-2)}} = \frac{d^{(N-1)} y(0^-)}{dt^{(N-1)}} = 0$$

Além disto, a entrada é causal, isto é,

$$x(0^-) = \frac{dx(0^-)}{dt} = \frac{d^2 x(0^-)}{dt^2} = \ldots = \frac{d^{(N-2)} x(0^-)}{dt^{(N-2)}} = \frac{d^{(N-1)} x(0^-)}{dt^{(N-1)}} = 0$$

Assim, tem-se as transformadas de Laplace e sua derivação no tempo

$$y(t) \Leftrightarrow Y(s), \quad x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Leftrightarrow s^k X(s)$$

# Resposta de Estado Zero (ii)

- **Expressão Geral de um Sistema LTIC**

Logo, a Transformada de Laplace para o sistema LTIC é :

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N)Y(s) = (b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \ldots + b_{N-1}s + b_N)X(s)$$

$$\therefore Y(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \ldots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N} X(s) \therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$$

Esta é a função de transferência da equação diferencial aqui tatada.

– Interpretação Intuitiva da Transformada de Laplace

  - Pode-se expressar quase todos os sinais de utilidade prática como um somatório de exponenciais incessantes sobre um intervalo contínuo de freqüências.
  - Como $s$ é uma freqüência complexa de $exp(st)$, por isto, o método com a Transformada de Laplace é chamado de método do domínio da freqüência.

# Resposta de Estado Zero (iii)

– Exemplo:

Ache a resposta do sistema LTIC: $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$

Condições iniciais: $y(0^-)=\dot{y}(0^-)=0$ e entrada $=3e^{-5t}u(t)$

$\underbrace{(D^2+5D+6)}_{Q(D)}y(t)=\underbrace{(D+1)}_{P(D)}x(t)$, por conseqüência

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s+1}{s^2+5s+6},\quad \text{e também } X(s)=L[3e^{-5t}u(t)]=\frac{3}{s+5}$$

assim a saída é $Y(s)=H(s)X(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}\dfrac{3}{s+5}=\dfrac{3(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+5)}$

Assim, $Y(s)=-\dfrac{2}{s+5}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}$,

finalmente $y(t)=(-2e^{-5t}-e^{-2t}+3e^{-3t})u(t)$

# Resposta de Estado Zero (iv)

– Exemplo:

Encontre as funções de transferência

(a) Um atrasador ideal de $T$ de segundos : $y(t) = x(t-T)$

$$\Leftrightarrow Y(s) = X(s)e^{-sT} \therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-sT}$$

(b) Um diferenciador ideal : $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$

$$\Leftrightarrow Y(s) = sX(s) \therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = s$$

(c) Um integrador ideal : $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s}X(s) \therefore H(s) = \frac{1}{s}$$

# Estabilidade (i)

- **Critério de Estabilidade Assintótico**
  - Para $P(s)$ e $Q(s)$ sem fatores comuns, o critério pode ser expresso em termos de pólos da função de transferência de um sistema:
    - Um sistema LTIC é assintoticamente estável se e só se todos pólos (simples ou repetidos) da função de transferência $H(s)$ estão no semiplano esquerdo (parte real negativa).
    - Um sistema LTIC é instável se ao menos uma das duas condições for verdade: (i) ao menos um pólo de $H(s)$ encontra-se no semiplano direito; (ii) houver pólos repetidos de $H(s)$ sobre o eixo imaginário.
    - Um sistema LTIC é marginalmente estável se e só se não houver pólos de $H(s)$ no semiplano direito e houver pólos não-repetidos sobre o eixo imaginário.
  - A localização dos pólos de $H(s)$ dentro de um mesmo semi-plano não influencia na estabilidade de um sistema.

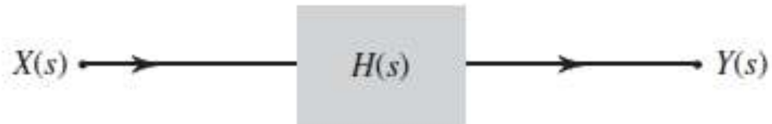
# Diagrama de Blocos (i)

- **Introdução**
  - Um sistema grande pode ser formado por número enorme de componentes tais como ocorre no diagrama de um circuito de rádio ou um receptor de televisão. Pode-se, então, resolver este problema através do emprego de subsistemas interconectados que podem ser caracterizados em termos de relações entrada-saída. Em particular, um sistema linear pode ser caracterizado por sua função de transferência $H(s)$. Os subsistemas podem ser interconectados em cascata, paralelo e por realimentação.
  - A função de transferência relaciona variáveis controladas com controladoras, representando relação causa-efeito de maneira esquemática através de <u>diagrama de blocos</u>. Este diagrama é definido como um bloco operacional e unidirecional que representa a função de transferência de variáveis de interesse.

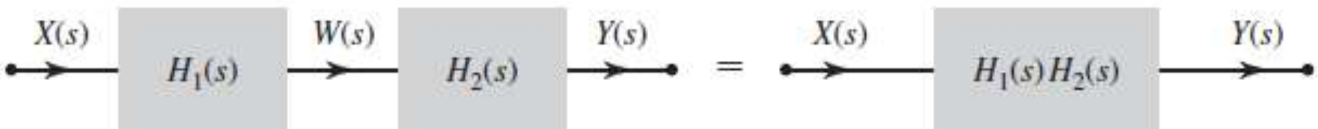
# Diagrama de Blocos (ii)

– Exemplos:

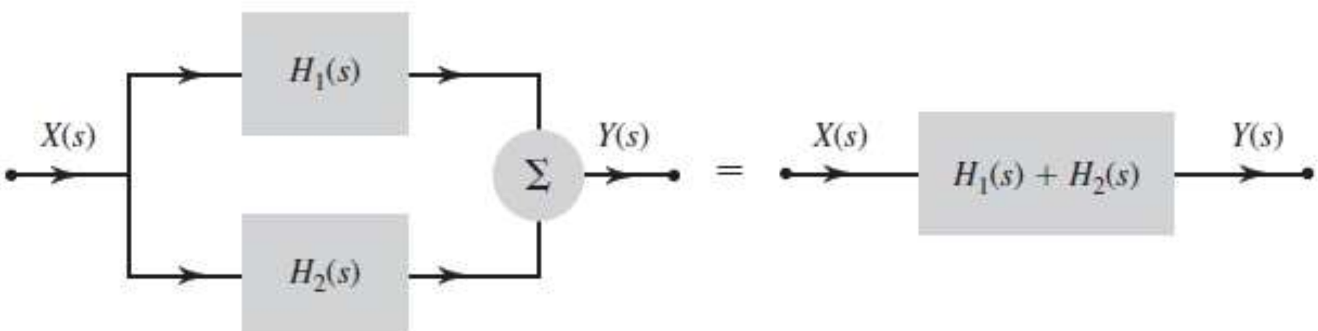
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W(s)}{X(s)}\frac{Y(s)}{W(s)} = H_1(s)H_2(s)$$




(a)



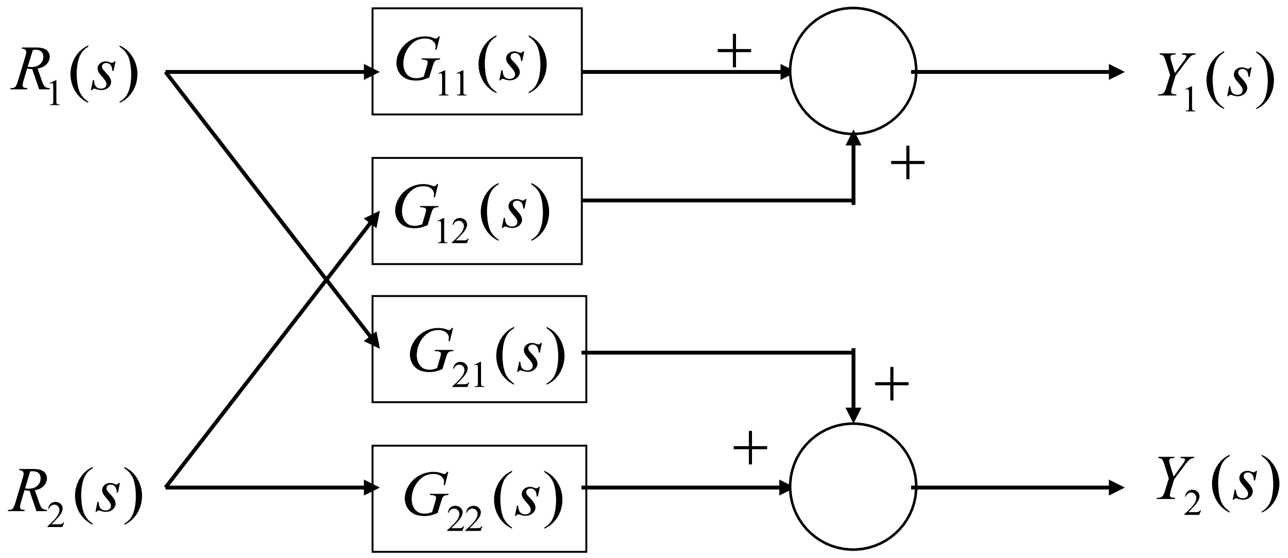

(b)



# Diagrama de Blocos (iii)

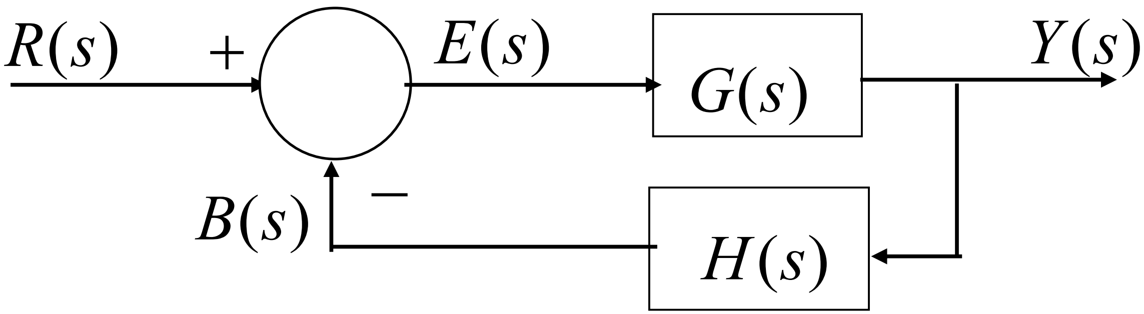
– Exemplo: Sistema multivariáveis

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$



# Diagrama de Blocos (iv)

– Exemplo: Função de transferência de um sistema de malha fechada.




Tem-se que $E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s)$,

como $Y(s) = G(s)E(s)$, então $Y(s) = G(s)\left[R(s) - H(s)Y(s)\right] \therefore$

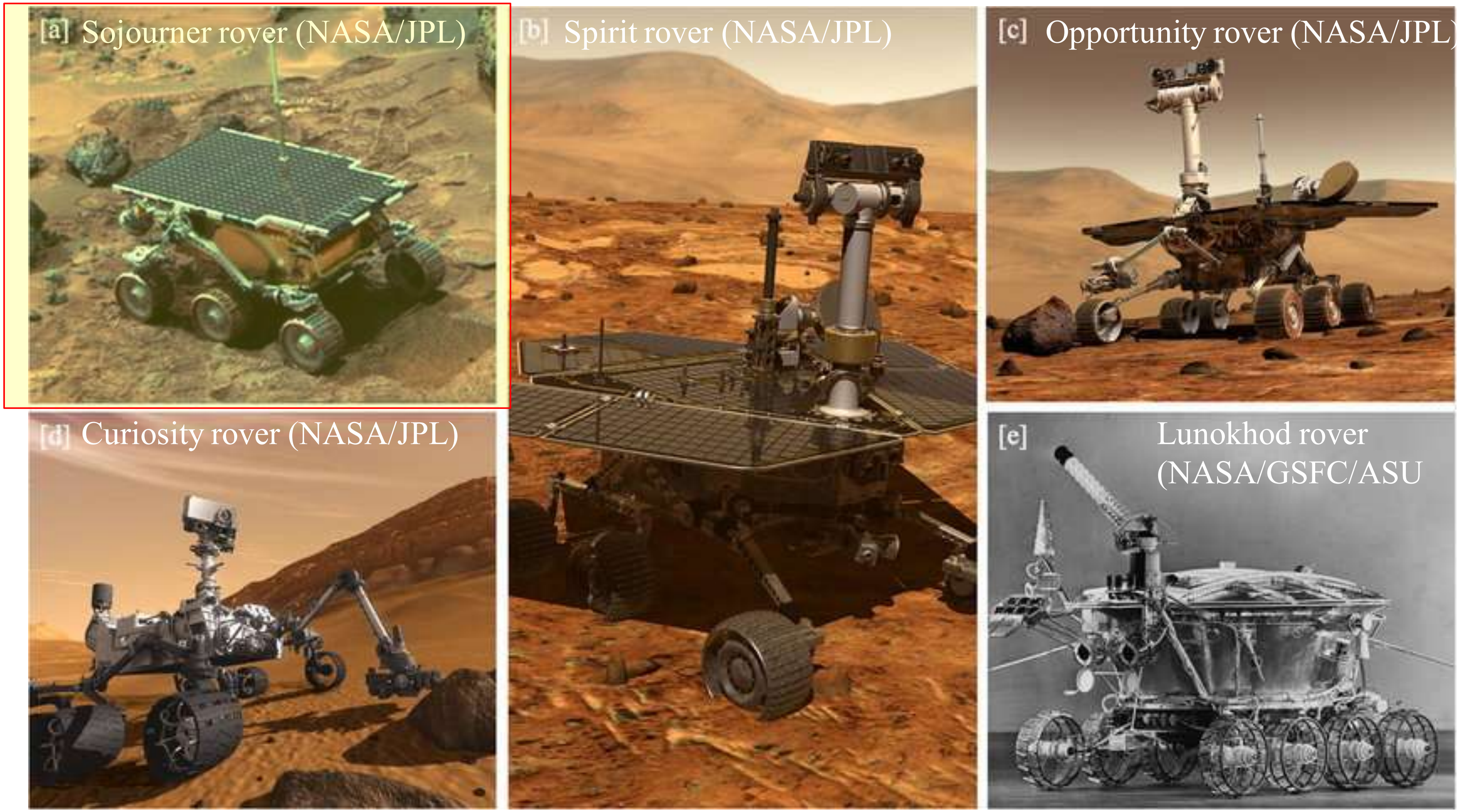
$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)Y(s) \therefore \left[1 + G(s)H(s)\right]Y(s) = G(s)R(s) \therefore$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Um diagrama de blocos pode ser reduzido a outro mais simples através de técnicas de reduções para estes diagramas.

# Diagrama de Blocos (v)

– Exemplo: robôs com rodas para exploração planetária.



# Diagrama de Blocos (vi)

– Exemplo: Sistema de controle para o rover: (a) malha aberta (sem realimentação); (b) malha fechada (com realimentação).

MASTER 47

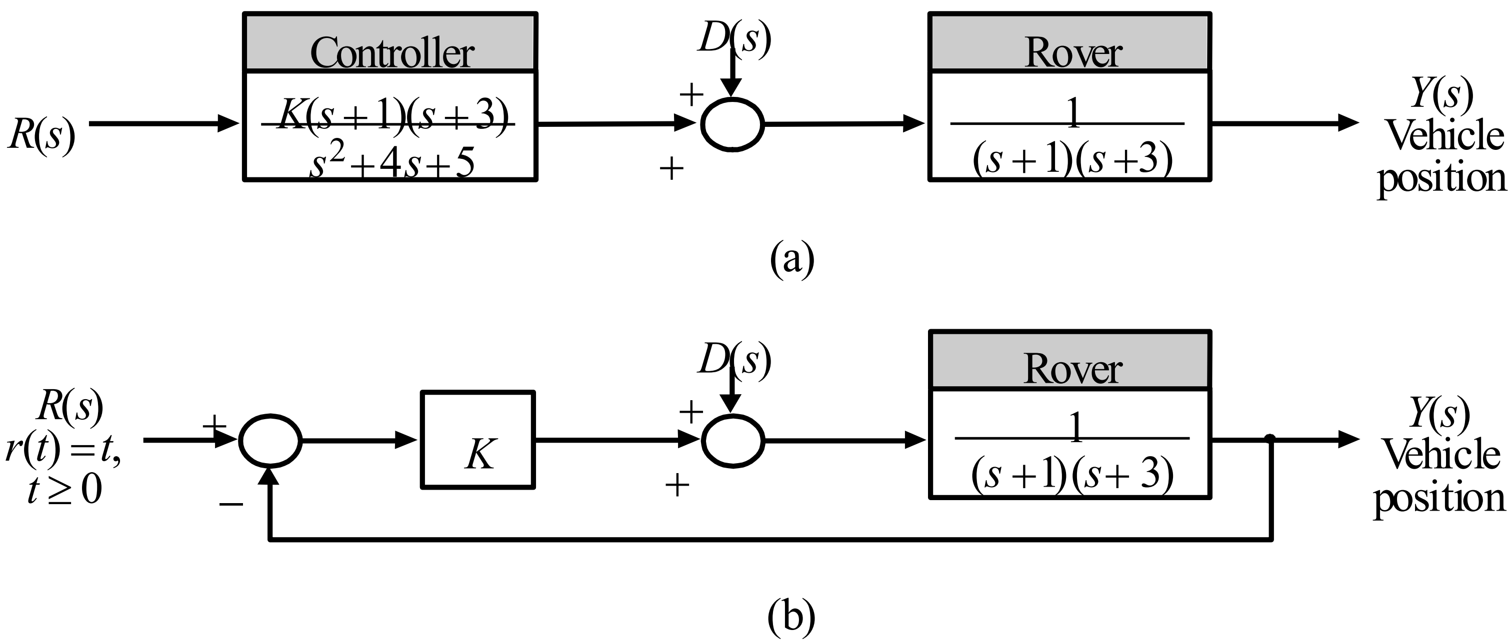



**Figure 4.25** **Control system for rover; (a) open-loop (without feedback) and (b) closed-loop with feedback. The input is *R*(*s*) = 1/*s*.**

# Realização de Sistemas (i)

- **Introdução**
  - Método sistemático de realização (ou implementação) de uma função de transferência arbitrária. A realização caracteriza-se por:
    - Constituir-se em um problema de síntese;
    - Existir, em geral, mais de uma maneira de ocorrer;
    - Empregar integradores, diferenciadores, adicionadores e multiplicadores.
  - O problema de realização estuda como encontrar uma representação (por variáveis de estado) de um sistema LTI a partir de uma função de transferência.

# Realização de Sistemas (ii)

- **Realização: Forma Direta I (DFI)**
  - Inicialmente será exposto um caso particular: realização de um sistema de terceira ordem:

$$H(s)=\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}\;\therefore$$

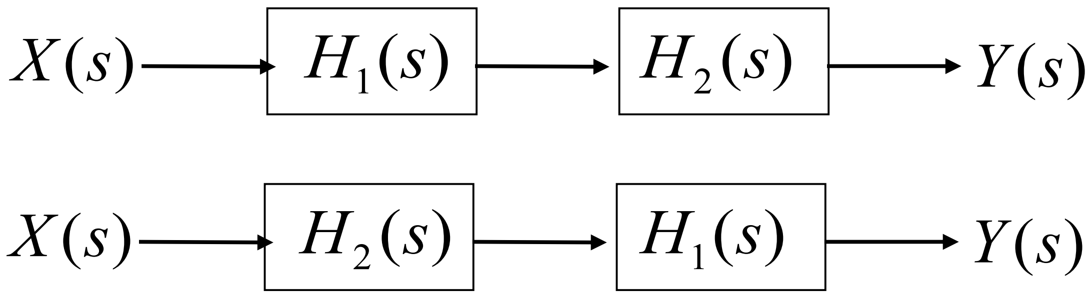
$$H(s)=\left(b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}\right)=H_1(s).H_2(s)$$

Pode-se realizar $H(s)$ por conexão em cascata de $H_1(s)$ e $H_2(s)$.

Por causa da propriedade comutativa, a opção anterior é equivalente a uma conexão em cascata com as posições dos blocos invertidas.

# Realização de Sistemas (iii)

- **Realização: DFI**



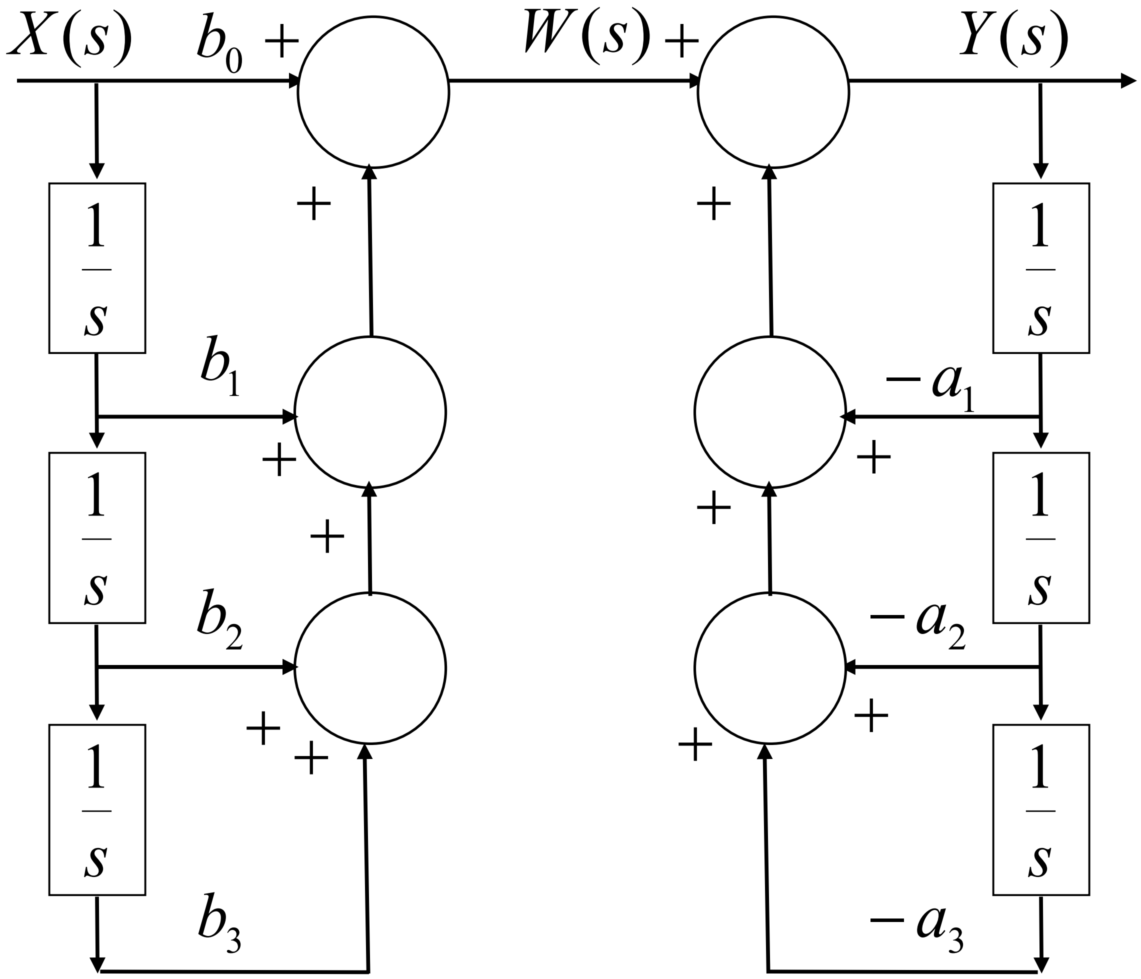

– Este sistema é descrito pelas equações:

$$W(s) = \left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right) X(s)$$

$$Y(s) = \left( \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \right) W(s) \therefore W(s) = \left( 1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right) Y(s)$$

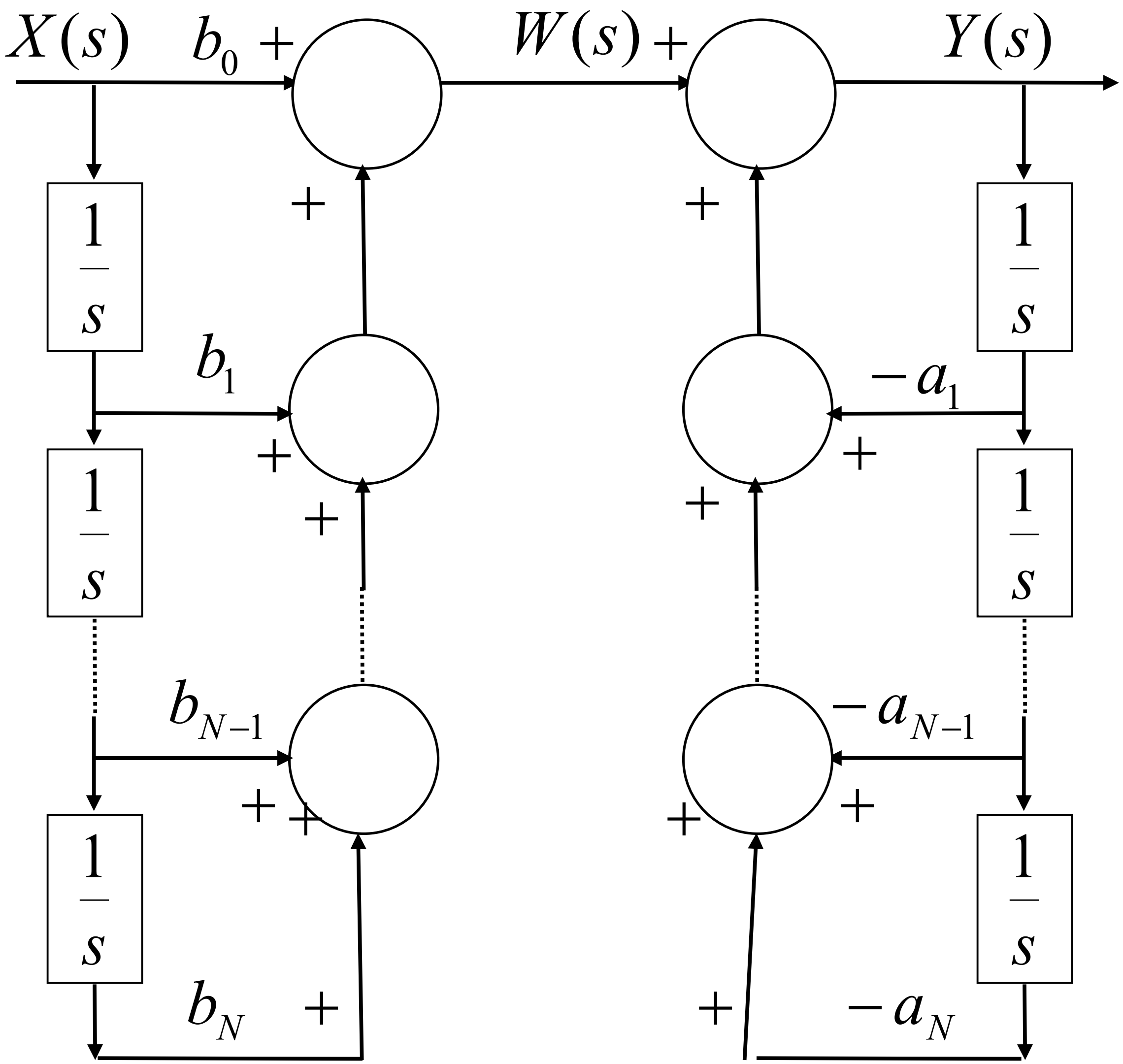
# Realização de Sistemas (iv)

- **Realização: DFI**



# Realização de Sistemas (v)

- **Realização: DFI**




Sistemas de ordem N:

Note que é necessário 2N integradores para realizar tal sistema.

Neste tipo de realização, primeiro realiza-se $H_1(s)$ e depois $H_2(s)$.

# Realização de Sistemas (vi)

- **Realização: Forma Direta II (DFII)**
  - Inicialmente realiza-se $H_2(s)$ e depois $H_1(s)$. Com respeito ao caso anterior, a ordem dos blocos é invertida. Para o sistema anterior de terceira ordem, tem-se:

$$H(s) = \left( \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \right) \left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right) = H_2(s).H_1(s)$$

  - A mesma situação é estendida para um sistema de ordem $N$.

# Realização de Sistemas (vii)

- **Realizações Cascata e Paralela:**
  - Uma função de transferência $H(s)$ pode ser expressa como um produto de funções de transferência ou como uma soma:

$$H(s) = \left(\frac{4s+28}{(s+1)(s+5)}\right) = \left(\frac{4s+28}{(s+1)}\right)\left(\frac{1}{(s+5)}\right) = H_1(s).H_2(s)$$

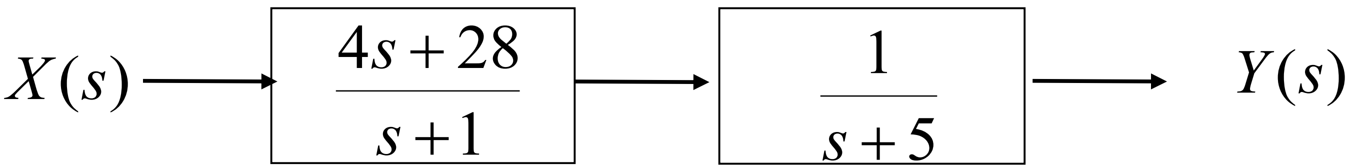
alternativamente, tem-se que

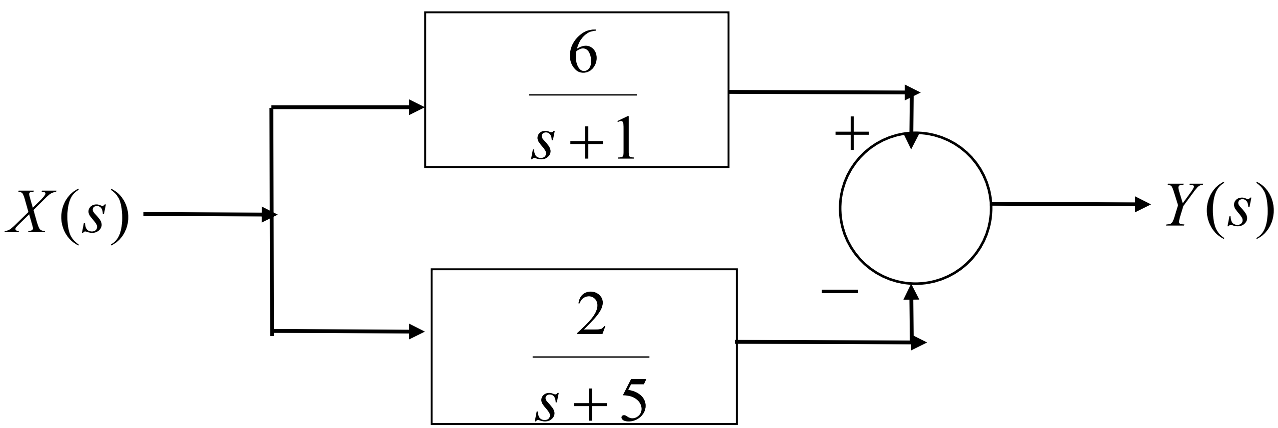
$$H(s) = \left(\frac{4s+28}{(s+1)(s+5)}\right) = \left(\frac{6}{(s+1)}\right) - \left(\frac{2}{(s+5)}\right) = H_3(s) - H_4(s)$$

Do ponto de vista prático, as formas paralela a algumas cascatas são preferíveis às formas diretas pois aquelas tendem a ser menos sensíveis a pequenas variações de parâmetros no sistema uma vez que no último caso, todos coeficientes interagem entre si.

# Realização de Sistemas (viii)

- **Realizações Cascata e Paralela:**
  - Realizações da função anterior:



# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 4.1-1 até 4.1-3.
  - 4.2-1, 4.2-3 até 4.2-5.
  - 4.3-1 até 4.3-3, 4.3-5 até 4.3-9, 4.3-12.
  - 4.5-1 até 4.5-3.
  - 4.6.1 até 4.6.10

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Análise de Sistemas Discretos por Transformada-*z*

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 5

# Conteúdo

- **Introdução**
- **A Transformada-*z***
- **A Transformada Inversa**
- **Propriedades da Transformada-*z***
- **Solução de Equações Lineares de Diferenças**

# Transformada-*z* (i)

– A contraparte da transformada de Laplace para sistemas discretos no tempo é a transformada-*z*. Esta ferramenta transforma equações de diferenças em equações algébricas.

- **Definições**
  – Dado um sinal $x[n]$, a transformada-*z* (bilateral) é definida como:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \qquad \text{onde } z \text{ é uma variável complexa.}$$

  – A transformada-*z* (bilateral) inversa é definida como:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X[z] z^{n-1} dz$$

    - Tem-se uma integração no sentido anti-horário em torno de um caminho fechado no plano complexo.
    - A inversa será considerada através de tabela.

# Transformada-$z$ (ii)

- **Definições**: A transformada - $z$ e sua inversa são denotadas como :

$$X[z] = Z\{x[n]\} \quad \text{ou} \quad x[n] \Leftrightarrow X[z] \quad \text{e} \quad x[n] = Z^{-1}\{X[z]\}$$

Analogamente à transformada de Laplace :

$$Z^{-1}[Z\{x[n]\}] = x[n] \qquad \text{ou} \qquad Z[Z^{-1}\{X[z]\}] = X[z]$$

  – A Transformada-z Unilateral: A transformada (bilateral) inversa pode não ser única enquanto que a transformada unilateral o é. Esta última pode apenas lidar com sinais e sistemas causais. Na prática, o termo transformada-$z$, em geral, significa transformada-$z$ unidirecional. Esta é definida como:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad \text{onde } z \text{ é uma variável complexa.}$$

  – A expressão da inversa permanece a mesma.

# Transformada-$z$ (iii)

- **Características**
  - Linearidade da transformada-$z$:

    Sejam $x_1[n] \Leftrightarrow X_1[z]$ e $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[z]$

    então $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \Leftrightarrow a_1 X_1[z] + a_2 X_2[z]$

    A prova decorre diretamente da definição de transformada - $z$.

  - Região de convergência (ROC):
    - A região de convergência (ou região de existência) de $X[z]$ é o conjunto de valores de $z$ para os quais existe (é convergente) o somatório que define a transformada-$z$.

# Transformada-$z$ (iv)

– Exemplo:

Determine $X[z]$ e sua região de convergência para $x[n] = \gamma^n u[n]$

Por definição $X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n u[n] z^{-n}$, como $u[n] = 1, \quad n \geq 0$, então

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n = 1 + \left(\frac{\gamma}{z}\right) + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^3 + \ldots + \ldots$$

Para a progressão geométrica $(|v| < 1)$: $1 + v + v^2 + v^3 + \ldots = \dfrac{1}{1 - v}$

Logo $\quad X[z] = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\gamma}{z}} = \dfrac{z}{z - \gamma} \qquad \left|\dfrac{\gamma}{z}\right| < 1$ ou $|z| > |\gamma|$

A região de convergência de $X[z]$ é $|z| > |\gamma|$.

# Transformada-$z$ (vi)

- **Observações**
  - O papel de ROC é avaliar a transformada-$z$ inversa que é calculada empregando-se integração de caminho fechado no plano complexo, em torno da origem, satisfazendo a condição de convergência. A transformada-$z$ unilateral possui a propriedade de unicidade logo a inversa é única. Consulte tabela para inversas.

Considere $X[z]=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x[n]}{z^n},$ a transformada - $z$ existe se

$|X[z]| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|/|z^n| < \infty,\ \forall x[n]$ que cresça mais lentamente que

a exponencial $(r_0)^n$, para algum $r_0$, satifaz a condição : $|x[n]| \leq (r_0)^n$,

logo tem - se que $|X[z]| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{|z|}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{r_0}{|z|}} \qquad |z| > r_0$

# Transformada-$z$ (vii)

- Exemplo : Determine $X[z]$ dos sinais discretos abaixo.

Lembre-se que $X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \frac{x[3]}{z^3} + \ldots$

(a) $x[n] = \delta[n]; \qquad X[z] = 1 + 0 + 0 + \ldots$

(b) $x[n] = u[n]; \qquad X[z] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$

(c) $x[n] = \cos\beta n\, u[n];$ como $\cos\beta n = \left(e^{j\beta n} + e^{-j\beta n}\right)/2$ e $\gamma^n u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-\gamma}$

então $X[z] = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{j\beta}} + \frac{z}{z-e^{-j\beta}}\right] = \frac{z(z-\cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1} \qquad |z| > 1$

(d) $x[n] = u[n] - u[n-5]$

$X[z] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^4} \qquad z \neq 0$

# Transformada-$z$ Inversa (i)

- **Determinação da Transformada Inversa**
  - Busca-se expressar $X[z]$ como o somatório de funções mais simples que podem ser encontradas em tabelas.

$$\text{Exemplo: Encontre a transformada - } z \text{ inversa de } \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)} = \frac{k_1}{z-2} + \frac{k_2}{z-3} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{8z-19}{\cancel{(z-2)}(z-3)}\right|_{z=2} = \frac{16-19}{2-3} = 3$$

$$k_2 = \left.\frac{8z-19}{(z-2)\cancel{(z-3)}}\right|_{z=3} = \frac{24-19}{3-2} = 5$$

$$\text{Logo,} \quad X[z] = \frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3} \Rightarrow x[n] = [3(2)^{n-1} + 5(3)^{n-1}]u[n]$$

# Transformada-$z$ Inversa (ii)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : Encontre a transformada - $z$ inversa de $\dfrac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$

$$X[z]=\frac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}\;\therefore\;\frac{X[z]}{z}=\frac{(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

$$\frac{X[z]}{z}=\frac{k}{z-1}+\frac{a_0}{(z-2)^3}+\frac{a_1}{(z-2)^2}+\frac{a_2}{z-2}\Rightarrow$$

$$k=\left.\frac{(2z^2-11z+12)}{\cancel{(z-1)}(z-2)^3}\right|_{z=1}=\frac{2-11+12}{(1-2)^3}=-3$$

$$a_0=\left.\frac{(2z^2-11z+12)}{(z-1)\cancel{(z-2)^3}}\right\|_{z=2}=\frac{8-22+12}{2-1}=-2$$

$$\frac{X[z]}{z}=-\frac{3}{z-1}-\frac{2}{(z-2)^3}+\frac{a_1}{(z-2)^2}+\frac{a_2}{z-2}$$

# Transformada-$z$ Inversa (iii)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : (continuação) transformada - $z$ inversa de $\dfrac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$

$$\frac{X[z]}{z}=\frac{(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}=-\frac{3}{z-1}-\frac{2}{(z-2)^3}+\frac{a_1}{(z-2)^2}+\frac{a_2}{z-2}$$

Igualando - se os coeficientes dos termos de potência de $z$ : $a_1=-1;\ a_2=3.$

$$\frac{X[z]}{z}=-3\frac{1}{z-1}-2\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^2}+3\frac{1}{z-2}$$

Como $\gamma^n u[n]\Leftrightarrow\dfrac{z}{z-\gamma}$ e $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{\gamma^m m!}\gamma^m u[n]\Leftrightarrow\dfrac{z}{(z-\gamma)^{m+1}}$

Resulta $x[n]=\left[-3-2\dfrac{n(n-1)}{8}(2)^n-\dfrac{n}{2}(2)^n+3(2)^n\right]u[n]\ \therefore$

$$x[n]=-\left[3+\frac{1}{4}(n^2+n-12)(2)^n\right]u[n]$$

# Transformada-z Inversa (iv)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : Encontre a transformada - $z$ inversa de $\dfrac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)}$

$$X[z] = \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)} = \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z-3-j4)(z-3+j4)}$$

Cálculo dos coeficinetes por método dos fatores de primeira ordem :

$$\frac{X[z]}{z} = \frac{2(3z+17)}{(z-1)(z-3-j4)(z-3+j4)} = \frac{k_1}{(z-1)} + \frac{k_2}{(z-3-j4)} + \frac{k_3}{(z-3+j4)} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{2(3z+17)}{\cancel{(z-1)}(z^2-6z+25)}\right|_{z=1} = \frac{2(3+17)}{(1-6+25)} = 2$$

# Transformada-$z$ Inversa (v)

- **Determinação da Transformada Inversa**

Exemplo : (continuação) transformada - $z$ inversa de $\dfrac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)}$

$$k_2 = \left.\frac{2(3z+17)}{(z-1)(z\cancel{-3-j}4)(z-3+j4)}\right|_{z=3+j4} = \frac{2(9+j12+17)}{(3+j4-1)(3+j4-3+j4)}$$

$$= \frac{52+j24}{(2+j4)(j8)} \therefore k_2 = \frac{52+j24}{16j-32} \therefore k_2 = \frac{13+j8}{4j-8} \therefore k_2 = 1.6e^{-j2.246}$$

$$k_3 = \left.\frac{2(3z+17)}{(z-1)(z-3-j4)(z\cancel{-3+j}4)}\right|_{z=3-j4} = \frac{2(9-j12+17)}{(3-j4-1)(3-j4-3-j4)}$$

$$= \frac{52-j24}{(2+j4)(-j8)} \therefore k_3 = \frac{52-j24}{-16j+32} \therefore k_3 = \frac{13-j8}{-4j+8} \therefore k_2 = 1.6e^{j2.246}$$

Finalmente $\quad x[n] = [2+3.2(5)^n \cos(0.927n-2.246)]u[n]$

# Propriedades da Transformada-$z$ (i)

- **Motivação:**
  – Úteis para para encontrar a transformada-$z$ e para se determinar soluções de equações lineares de diferenças.
- **Deslocamento à Direita no Tempo (Atraso):**

$$x[n-m]u[n] \Leftrightarrow z^{-m}X[z] + z^{-m}\sum_{n=1}^{m} x[-n]z^{n}$$

- **Deslocamento à Esquerda no Tempo (Avanço):**

$$x[n+m]u[n] \Leftrightarrow z^{m}X[z] - z^{m}\sum_{n=0}^{m-1} x[n]z^{-n}$$

- **Convolução:**

Considere $x_1[n] \Leftrightarrow X_1[z]$ e $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[z]$

Convolução no tempo $x_1[n] * x_2[n] \Leftrightarrow X_1[n]X_2[n]$

# Propriedades da Transformada-*z* (ii)

- **Resposta de Sistema LTID**

  Equação entrada - saída : $y[n] = x[n] * h[n]$

  Sabendo – se que $h[n] \Leftrightarrow H[z]$, então $Y[z] = X[z]H[z]$

- **Multiplicação por $\gamma^n$ (Escalonamento no Domínio-*z*):**

  Se $x[n]u[n] \Leftrightarrow X[z]$, então $\gamma^n x[n]u[n] \Leftrightarrow X[z/\gamma]$

- **Multiplicação por *n*:**

  Se $x[n]u[n] \Leftrightarrow X[z]$, então $nx[n]u[n] \Leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}X[z]$

- **Reversão no Tempo:**

  Se $x[n] \Leftrightarrow X[z]$, então $x[-n] \Leftrightarrow X[1/z]$

- **Valores Iniciais e Finais:**

  Para $x[n]$ causal, valor inicial : $x[0] = \lim_{z\to\infty} X[z]$;

  valor final : $\lim_{N\to\infty} x[N] = \lim_{z\to 1}(z-1)X[z]$, se os limites existirem.

# Soluções de Equações (i)

- **Equações de Diferenças**
  - A propriedade de deslocamento no tempo (atraso ou avanço) é empregada para resolução de equações de diferenças com coeficientes constantes. Converte-se equações de diferenças em equações algébricas e encontram-se as soluções no domínio-$z$. A transformada inversa determina a solução no domínio do tempo.
  - Exemplo:

Resolva a equação de diferenças de segunda ordem :

$$y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=3x[n+1]+5x[n]$$

condições iniciais $y[-1]=11/6$ e $y[-2]=37/36$; entrada $x[n]=2^{-n}u[n]$

Para poder utilizar condições iniciais (ao invés de condições auxiliares),

re - escreve - se a expressão para operador de atraso :

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$$

# Soluções de Equações (ii)

- **Equações de Diferenças**
  - Exemplo (continuação):

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$$

$$\text{Para o sinal } y[n] \text{ tem-se: } y[n]u[n] \Leftrightarrow Y[z];$$

$$y[n-1]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z}Y[z]+y[-1]=\frac{1}{z}Y[z]+\frac{11}{6}$$

$$y[n-2]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{1}{z}y[-1]+y[-2]=\frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{11}{6z}+\frac{37}{36}$$

$$\text{Para sistemas causais: } x[-1]=x[-2]=\ldots=x[-n]=0$$

$$\text{Para a entrada: } x[n]=(2)^{-n}u[n]=(0.5)^n u[n] \Leftrightarrow z/(z-0.5)$$

$$x[n-1]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z}X[z]+x[-1]=\frac{1}{z}\frac{z}{z-0.5}+0=\frac{1}{z-0.5}$$

$$x[n-2]u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{z^2}X[z]+\frac{1}{z}x[-1]+x[-2]=\frac{1}{z^2}X[z]+0+0=\frac{1}{z(z-0.5)}$$

# Soluções de Equações (iii)

- **Equações de Diferenças**
  - Exemplo (continuação):

Tomando-se $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$, tem-se

$$Y[z]-5\left[\frac{1}{z}Y[z]+\frac{11}{6}\right]+6\left[\frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{11}{6z}+\frac{37}{36}\right]=3\frac{1}{z-0.5}+5\frac{1}{z(z-0.5)}\therefore$$

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]-\left(3-\frac{11}{z}\right)=\frac{3}{z-0.5}+\frac{5}{z(z-0.5)}\therefore$$

$$\left(z^2-5z+6\right)Y[z]=\frac{z(3z^2-9.5z+10.5)}{(z-0.5)}\therefore\frac{Y[z]}{z}=\frac{(3z^2-9.5z+10.5)}{(z-0.5)\left(z^2-5z+6\right)}$$

$$\frac{Y[z]}{z}=\frac{(3z^2-9.5z+10.5)}{(z-0.5)(z-2)(z-3)}=\frac{(26/15)}{z-0.5}-\frac{(7/3)}{z-2}+\frac{(18/5)}{z-3}$$

$$y[n]=\left[\frac{26}{15}(0.5)^n-\frac{7}{3}(2)^n+\frac{18}{5}(3)^n\right]u[n]$$

# Soluções de Equações (iv)

– Exemplo (continuação):

Separação dos componentes de entrada zero e estado zero:

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]-\left(3-\frac{11}{z}\right)=\frac{3}{z-0.5}+\frac{5}{z(z-0.5)}\ \therefore$$

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]=\left(3-\frac{11}{z}\right)+\frac{(3z+5)}{z(z-0.5)},\ \text{multiplicando-se por } z^2\ \therefore$$

$$(z^2-5z+6)Y[z]=z(3z-11)+\frac{z(3z+5)}{z-0.5}$$

$$Y[z]=\underbrace{\frac{z(3z-11)}{(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de entrada zero}}+\underbrace{\frac{z(3z+5)}{(z-0.5)(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de estado zero}}$$

# Soluções de Equações (v)

– Exemplo (continuação):

$$Y[z] = \underbrace{\frac{z(3z-11)}{(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de entrada zero}} + \underbrace{\frac{z(3z+5)}{(z-0.5)(z^2-5z+6)}}_{\text{resposta de estado zero}}$$

Expandindo ambos termos, tem-se:

$$Y[z] = \underbrace{\left[5\left(\frac{z}{z-2}\right) - 2\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{resposta de entrada zero}} + \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right) - \frac{22}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{28}{5}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{resposta de estado zero}}$$

$$y[n] = \underbrace{\left[5(2)^n - 2(3)^n\right]}_{\text{resposta de entrada zero}} - \underbrace{\left[\frac{22}{3}(2)^n + \frac{28}{5}(3)^n + \frac{26}{15}(0.5)^n\right]}_{\text{resposta de estado zero}} u[n] \therefore$$

$$y[n] = \left[-\frac{7}{3}(2)^n + \frac{18}{5}(3)^n + \frac{26}{15}(0.5)^n\right] u[n] \therefore$$

# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 5.1-1 até 5.1-5
  - 5.2-1 até 5.2-7.
  - 5.3-1 até 5.3-10.

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Análise de Sistemas Contínuos por Série de Fourier

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 6

# Conteúdo

- **Introdução**
- **Representação de Sinal Periódico por Série de Fourier Trigonométrica**
- **Existência e Convergência de Série de Fourier**
- **Série de Fourier Exponencial**
- **Resposta de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas**

# Introdução (i)

– Nas engenharias elétrica e de computação, os sinais costumam ser tratados em termos de seus espectros de freqüência e os sistemas em termos de suas respostas de freqüência.

– Este capítulo, como os próximos, discutem a representação espectral de sinais que, por sua vez, são expressos como somatórios de funções senoidais ou exponenciais.

- Mostra-se que um sinal periódico pode ser representado por somatório de funções senoidais ou exponenciais de várias freqüências.
- Estes resultados são extensíveis a sinais aperiódicos (Cap. 7) e sinais discretos no tempo (Cap. 9) que podem ser gerados a partir de amostragem de sinais contínuos (Cap. 8).

# Representação de Sinal Periódico (i)

- **Preliminares**

Seja um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0$ : $x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t$

O menor valor de $T_0$ que satisfaz a condição de periodicidade é chamado de período fundamental de $x(t)$. Este sinal caracteriza-se por:

(i) Existir no intervalo $[-\infty, \infty]$;

(ii) Ter mesma área sob o sinal pelo período $T_0$ :

$$\int_a^{a+T_0} x(t)dt = \int_b^{b+T_0} x(t)dt = \int_{T_0} x(t)dt, \quad \text{para } a \text{ e } b \text{ números reais;}$$

(iii) Possuir, para uma senoidal ( $\cos 2\pi f_0 t$ ou $\text{sen } 2\pi f_0 t$ ): freqüência $f_0$,

período $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$, freqüência em radianos $\omega_0 = 2\pi f_0$;

(iv) Senoidal de freq. $nf_0$ é o $n-\acute{e}simo$ harmônico da senoidal de freq. $f_0$.

# Representação de Sinal Periódico (ii)

- **Definição**
  - Representação de um sinal periódico por uma série trigonométrica de Fourier:

A série trigonométrica de Fourier (para freqüência fundamental $\omega_0$) é

definida como: $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$

Propriedade Importante: $x(t)$ é um sinal periódico com o mesmo período

da fundamental $(T_0 = (1/f_0) = (2\pi/\omega_0))$

$$x(t+T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 (t+T_0) + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 (t+T_0) \therefore$$

$$x(t+T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + n\omega_0 T_0) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + n\omega_0 T_0)$$

lembrando que $\omega_0 T_0 = 2\pi$, tem-se que

# Representação de Sinal Periódico (iii)

- **Definição**
  - Representação de um sinal periódico por uma série trigonométrica de Fourier:

$$x(t+T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + 2\pi n) + b_n \,\mathrm{sen}(n\omega_0 t + 2\pi n) \therefore$$

$$x(t+T_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t = x(t)$$

  - Em conclusão, um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0$ pode ser expresso como um somatório de uma senóide de freqüência $f_0$ e suas harmônicas. Esta séria infinita é conhecida como série de Fourier trigonométrica.

# Representação de Sinal Periódico (iv)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier**
  - Para determinar os coeficientes, necessita-se do cálculo de *I*:

$$I = \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \frac{1}{2}\left[\int_{T_0} \cos(n+m)\omega_0 t dt + \int_{T_0} \cos(n-m)\omega_0 t dt\right] \therefore$$

$$I = \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{T_0}{2} & n = m \end{cases}, \quad \text{anologamente tem-se}$$

$$\int_{T_0} \text{sen}\, n\omega_0 t \,\text{sen}\, m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{T_0}{2} & n = m \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \text{sen}\, n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \qquad \forall n, m$$

Calcula-se $a_0$, integrando-se os dois lados da equação da série de Fourier:

# Representação de Sinal Periódico (v)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier** (continuação)

$$\int_{T_0} x(t)dt = a_0 \int_{T_0} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[ a_n \int_{T_0} \cos n\omega_0 t dt + b_n \int_{T_0} \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \right] \therefore a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt,$$

pois para fun. periódicas $\int_{T_0} \cos n\omega_0 t dt = \int_{T_0} \operatorname{sen} n\omega_0 t dt = 0$ e $a_0 \int_{T_0} dt = a_0 T_0.$

Calcula-se $a_n$, multiplicando-se por os dois lados da equação da série de Fourier por $\cos m\omega_0 t$ e integrando-se a expressão :

$$\int_{T_0} x(t) \cos m\omega_0 t dt = a_0 \int_{T_0} \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[ a_n \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{T_0} [\operatorname{sen} n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt]$$

$$\int_{T_0} \cos n\omega_0 t dt = 0, \quad \int_{T_0} [\operatorname{sen} n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt] = 0 \quad \text{e} \quad \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = ?$$

# Representação de Sinal Periódico (vi)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier** (continuação)

Neste último termo todos componentes do somatório (as várias integrais para $n \neq m$) são iguais a zero, exceto aquele em que

$$n = m : \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \frac{T_0}{2}$$

Logo, $\displaystyle \int_{T_0} x(t) \cos m\omega_0 t dt = \frac{a_n T_0}{2} \therefore a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos m\omega_0 t dt$

e modo análogo (utilizando-se o multiplicador sen $m\omega_0 t$) tem-se:

$$\int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} m\omega_0 t dt = \frac{b_n T_0}{2} \therefore b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} m\omega_0 t dt$$

# Representação de Sinal Periódico (vii)

- **Cálculo dos Coeficientes da série de Fourier**
  - Em resumo, seja uma série de Fourier (para um sinal real ou complexo – *x(t)*):

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

Cujos coeficientes são dados por :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = (2\pi / T_0)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

# Representação de Sinal Periódico (viii)

- **Forma Compacta da Série de Fourier**
  - Para um sinal real, os coeficientes $a_n$ e $b_n$ são reais para todo $n$. Assim a série de Fourier pode ser expressa na sua forma compacta:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \qquad \text{cujos coeficientes são dados por:}$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

  - Observação: Como os coeficientes e o ângulo são reais então nas próximas discussões $x(t)$ é assumida como real, a não ser quando for dito o contrário.

# Representação de Sinal Periódico (ix)

- **O Espectro de Fourier**
  - Para uma série de Fourier trigonométrica e compacta, pode-se traçar o gráfico da amplitude $C_n$ por $n$ (espectro de amplitude) e o gráfico da fase por $n$ (espectro de fase):

    = Como $n$ é proporcional à freqüência $n\omega_0$, então os gráficos acima são versões escalonadas de $C_n \times \omega$ e $\theta_n \times \omega$.

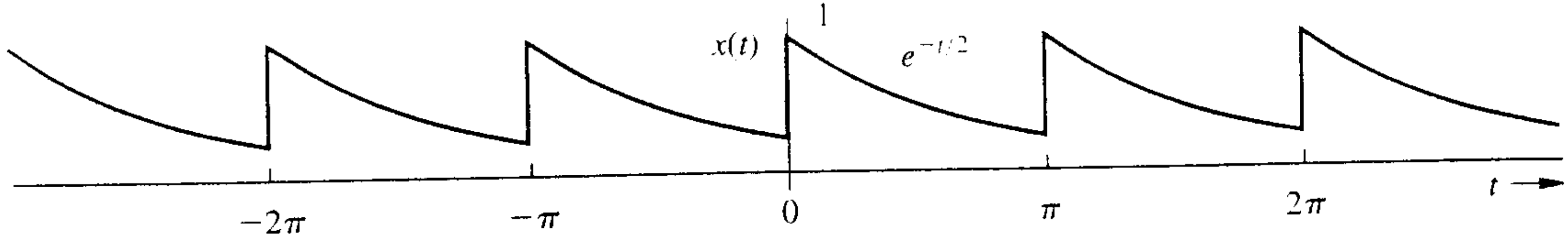
    = Os gráficos acima compõem os espectros de freqüência de $x(t)$.

    = Estes espectros mostram os conteúdos de freqüência do sinal $x(t)$ e permitem sua reconstrução ou síntese.

  - O espectro de freqüência de um sinal $x(t)$ constitui sua descrição no domínio da freqüência, enquanto que na descrição no domínio do tempo, o sinal é especificado como função do do tempo.

# Representação de Sinal Periódico (x)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo: Encontre a série de Fourier trigonométrica para o sinal periódico $x(t)$, mostrado na figura abaixo.




(a)

Pela figura, $T_0 = \pi \Rightarrow f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 2 \text{ rad/seg}$

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$ cujos coeficientes são dados por:

# Representação de Sinal Periódico (xi)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo (continuação):

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}dt = -\frac{1}{2\pi}e^{-t/2}\Big|_0^{\pi} = 0.504$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\cos 2nt dt \therefore$$

$$a_n = \left[\left(-\frac{1}{2}\cos 2nt + 2n\,\mathrm{sen}\,2nt\right)\frac{e^{-t/2}}{(-\frac{1}{2})^2+(2n)^2}\right]_0^{\pi} = 0.504\frac{2}{1+16n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\,2nt dt = 0.504\frac{8n}{1+16n^2}$$

Portanto, $x(t) = 0.504\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+16n^2}\left(\cos 2nt + 4n\,\mathrm{sen}\,2nt\right)\right]$

# Representação de Sinal Periódico (xii)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo (continuação):

Para $x(t)=0.504\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+16n^2)}(\cos 2nt+4n\,\text{sen}\,2nt)\right]$

Em termos de série compacta $\left(x(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)\right)$:

$$C_0=a_0=0.504$$

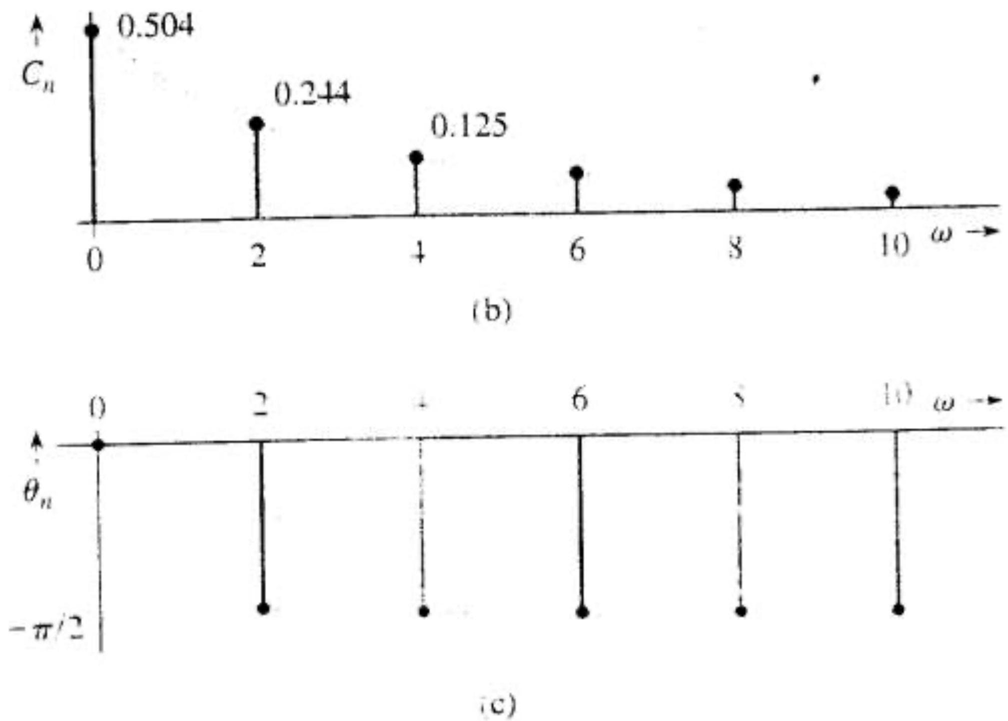
$$C_n=\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}=0.504\sqrt{\left(\frac{2}{1+16n^2}\right)^2+\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right)^2}=0.504\frac{2}{\sqrt{1+16n^2}}$$

$$\theta_n=\tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-8n}{1+16n^2}\,\frac{1+16n^2}{2}\right)=\tan^{-1}(-4n)=-\tan^{-1}(4n)$$

Finalmente, $x(t)=0.504+0.504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{1+16n^2}}\cos(2nt-\tan^{-1}4n)$

# Representação de Sinal Periódico (xiii)

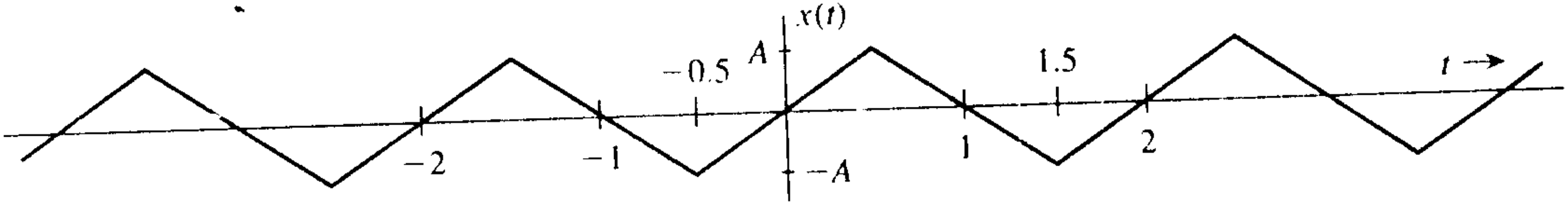
- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo (continuação): Espectros da série de Fourier compacta.




  - Um sinal tem identidade dual: no domínio do tempo ($x(t)$) e no domínio da freqüência (espectros de Fourier). Uma identidade complementa a outra e juntas melhoram entendimento do sinal.

# Representação de Sinal Periódico (xiv)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo: Ache série de Fourier trigonométrica compacta para *x(t)*.




(a)

Pela figura, $T_0 = 2 \Rightarrow f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \pi$ rad/seg

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t \qquad \text{onde}$$

$$x(t) = \begin{cases} 2At & |t| < \dfrac{1}{2} \\ 2A(1-t) & \dfrac{1}{2} < t < \dfrac{3}{2} \end{cases}, \text{ cujos coeficientes são dados por :}$$

# Representação de Sinal Periódico (xv)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo (continuação):

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt; \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{3/2} x(t)dt = 0, \quad \text{pois o sinal é periódico}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1/2}^{1/2} 2At\cos n\pi t dt + \frac{2}{2}\int_{1/2}^{3/2} 2A(1-t)\cos n\pi t dt = 2A\int_{-1/2}^{1/2} t\cos n\pi t dt +$$

$$2A\int_{1/2}^{3/2}\cos n\pi t dt - 2A\int_{1/2}^{3/2} t\cos n\pi t dt = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1/2}^{1/2} 2At\,\text{sen}\, n\pi t dt + \frac{2}{2}\int_{1/2}^{3/2} 2A(1-t)\,\text{sen}\, n\pi t dt \therefore b_n = \frac{8A}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

# Representação de Sinal Periódico (xvi)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo (continuação):

$$\therefore b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (8A/\pi^2) & \text{para } n = 1,5,9,13\ldots \\ -(8A/\pi^2) & \text{para } n = 3,7,11,15\ldots \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}(-1)^{n+1}\left(\text{sen}(2n-1)\pi t\right)\right]$$

$$\text{Em termos de série compacta } \left(x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega_0 t + \theta_n)\right):$$

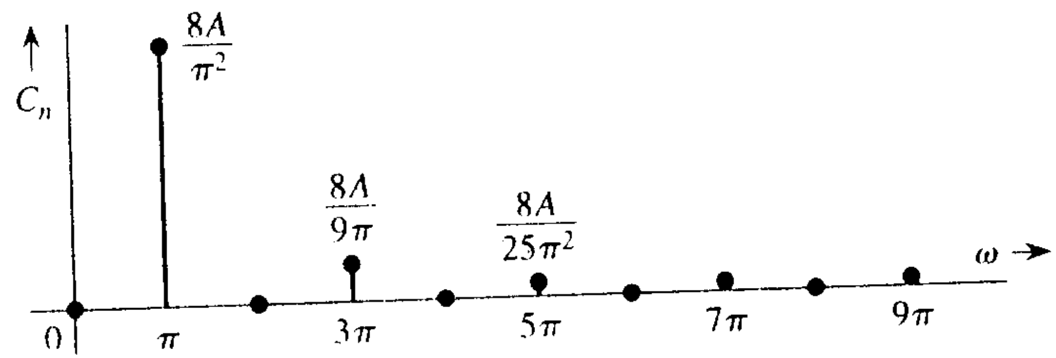
$$C_0 = a_0 = 0; \quad C_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} = b_n,$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = \tan^{-1}(3\pi/2)$$

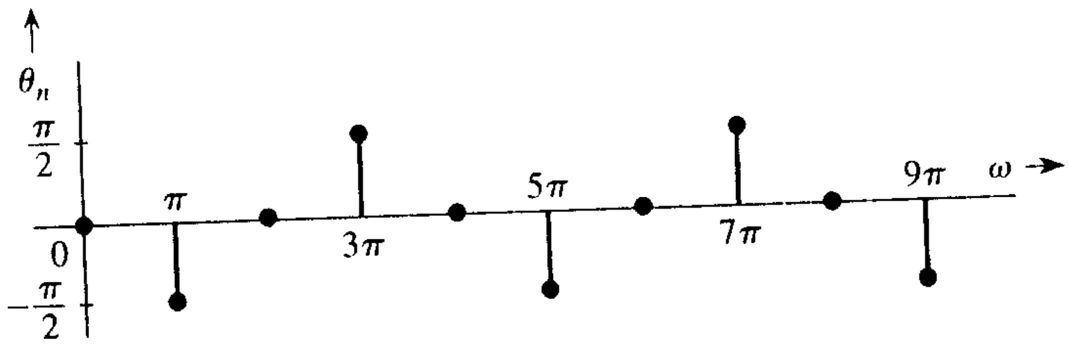
$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos(\pi t - \tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{9}\cos(3\pi t + \tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{25}\cos(5\pi t - \tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{49}\cos(7\pi t + \tfrac{\pi}{2}) + \ldots\right]$$

# Representação de Sinal Periódico (xvii)

- **Série de Fourier compacta**
  - Exemplo (continuação): Espectros da série de Fourier trigonométrica compacta para um sinal periódico triangular.




(b)




(c)

# Representação de Sinal Periódico (xviii)

- Um sinal periódico pode ser representado por um somatório senoidais ou de exponenciais. Se a freqüência do sinal periódico for $f_0$ o sinal pode ser expresso por uma soma ponderada de uma senóide de freqüência $f_0$ e seus harmônicos. O sinal periódico pode ser reconstruído a partir do conhecimento das amplitudes e fases dos componentes senoidais.
- Se um sinal periódico $x(t)$ tiver:
  - Simetria par então a série de Fourier só contém termos em cosseno e o termo DC.
  - Simetria impar então a série de Fourier só contém termos em seno.
  - Nenhuma simetria então a serie de Fourier contém todos os termos.

# Existência e Convergência de SF (i)

- **Observações**
  - Para existir, uma série trigonométrica de Fourier, deve ter seus coeficientes finitos. A existência destes coeficientes é assegurada se $x(t)$ for absolutamente integrável sobre um período:

    $$\int_{T_0} |x(t)|dt < \infty$$

  - Em pontos de descontinuidade, a série de Fourier $x(t)$ converge para a média dos valores de $x(t)$ em ambos os lados das descontinuidades.
  - O espectro de amplitude da série de Fourier para um sinal periódico $x(t)$ com saltos de descontinuidade decai suavemente com a freqüência. Neste caso, são necessários vários termos na série de Fourier para aproximar $x(t)$ de uma faixa de erro desejada.
  - O espectro de amplitude da série de Fourier para um sinal periódico $x(t)$ suave decai rapidamente com a freqüência e poucos termos são necessários para aproximar $x(t)$ de uma faixa de erro desejada.

# Série de Fourier Exponencial (i)

- **Motivação:**
  - Utilizar a equação de Euller para expressar as funções senoidais em termos de funções exponenciais. Em seguida, escrever as séries de Fourier em termos de exponenciais.

A equação de Euller é dada por :

$$\begin{cases} \cos\varphi = (1/2)\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) \\ \operatorname{sen}\varphi = (1/2j)\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \end{cases} \quad \text{que é equivalente a} \quad \begin{cases} e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi \\ e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Pode-se definir a série de Fourier exponencial para um sinal periódico :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \ \text{note que } n \text{ varia de } [-\infty, \infty].$$

Para escrever a série é necessário calcular os valores de $D_n$ : multiplica-se ambos os lados da eq. por $e^{-jm\omega_0 t}$ ($m$ inteiro) e os intregra sobre um período.

# Série de Fourier Exponencial (ii)

- **Definição:**

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \int_{T_0} e^{j(n\omega_0 t - m\omega_0 t)}dt$$

$$\int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}dt = \begin{cases} \int_{T_0} e^{j(0)}dt = T_0 & m = n \\ \int_{T_0} \cos(n-m)\omega_0 t + j\,\mathrm{sen}(n-m)\omega_0 t dt = 0 & m \neq n \end{cases}$$

Logo, a primeira integral acima pode ser re-escrita :

$$\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = D_n T_0 \therefore D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- Note que, a série de Fourier exponencial:
    - Tem forma mais compacta que a série trigonométrica;
    - Tem expressão para cálculo dos coeficientes da série mais compacta que a série trigonométrica.

# Série de Fourier Exponencial (iii)

- **Coeficientes da SF Trigonométrica e da SF Exponencial:**

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$\text{Para } n = 0 \text{ tem-se } \; D_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{0}dt \therefore D_0 = a_0$$

$$\text{Para } n \neq 0, \quad \text{tem-se:}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)[\cos n\omega_0 t - j\,\text{sen}\, n\omega_0 t]dt \therefore$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t dt - \frac{j}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t dt = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \text{e}$$

$$D_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t dt + \frac{j}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t dt = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

# Série de Fourier Exponencial (iv)

- **Coeficientes da SF Trigonométrica e da SF Exponencial:**
  - Os resultados anteriores são válidos para sinal $x(t)$ real ou complexo.
  - Se o sinal e seus coeficientes forem complexos, tem-se que $D_n$ e $D_{-n}$ são conjugados. Além disto,

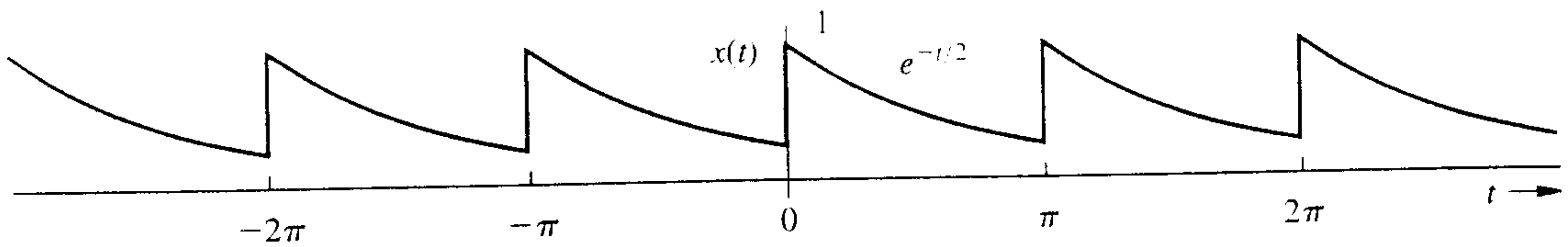
$$a_n - jb_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}\, e^{j\tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)} = C_n e^{j\theta_n} \;\therefore\; \begin{cases} D_0 = a_0 = C_0 \\ D_n = \frac{1}{2} C_n e^{j\theta_n} \\ D_{-n} = \frac{1}{2} C_n e^{-j\theta_n} \end{cases}$$

Portanto, $$|D_n| = |D_{-n}| = \frac{1}{2} C_n \qquad n \neq 0$$

$$\angle D_n = \theta_n \qquad \angle D_{-n} = -\theta_n$$

# Série de Fourier Exponencial (v)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo: Encontre a série de Fourier exponencial para o sinal periódico $x(t)$, mostrado na figura abaixo.




(a)

$$\text{Pela figura,}\quad T_0 = \pi \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\ \text{rad/seg}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt} \qquad \text{cujos coeficientes são dados por :}$$

# Série de Fourier Exponencial (vi)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo (continuação):

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt;$$

$$D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}e^{-j2nt}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-(\frac{1}{2}+j2n)t}dt = \frac{-`1}{\pi(\frac{1}{2}+j2n)}e^{-(\frac{1}{2}+j2n)t}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{0.504}{1+j4n}$$

Portanto, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-jn\omega_0 t} \therefore x(t) = 0.504\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+j4n}e^{j2nt}$

- Observações :

= Os coeficientes $D_n$ são complexos;

= $D_n$ e $D_{-n}$ são conjugados.

# Série de Fourier Exponencial (vii)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo (continuação):

Para traçar os espectros exponenciais, utiliza - se as partes imaginária e real de $D_n$, ou a magnitude e o ângulo de $D_n$. Nesta opção, os coeficientes são expressos em sua forma polar $|D_n|e^{j\angle D_n}$.

$$D_n = \frac{0.504}{1 + j4n}; \quad |D_n| = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}; \quad \angle D_n = \tan^{-1}(-b_n / a_n), \quad \text{então:}$$

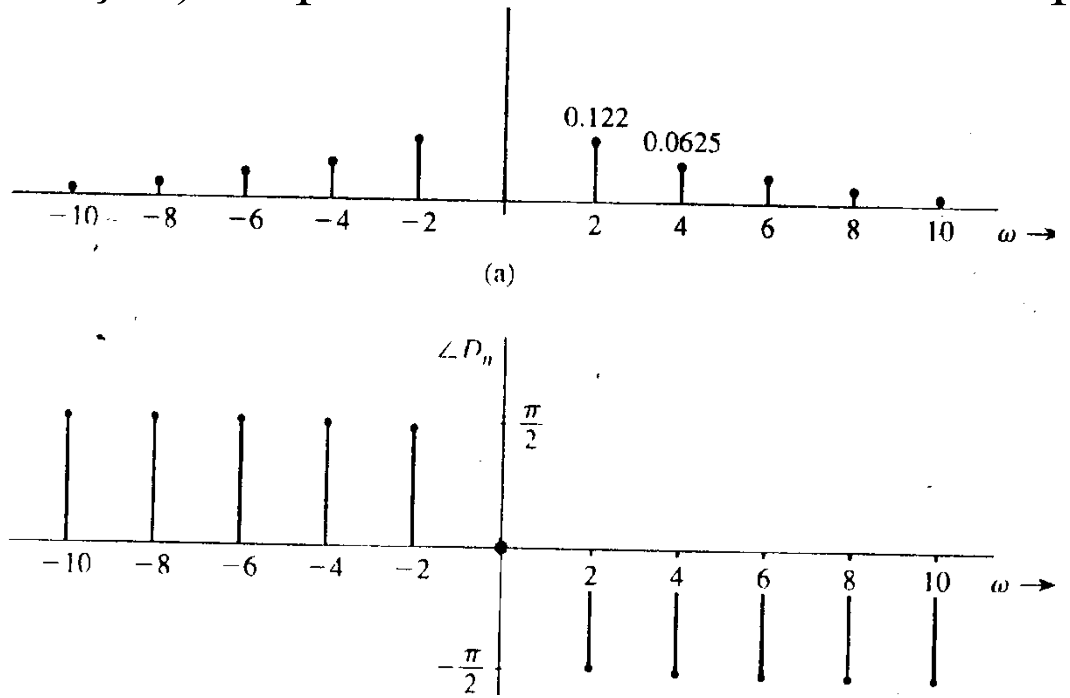
$$D_0 = \frac{0.504}{1 + j4(0)} = 0.504 \Rightarrow |D_0| = 0.504 \quad \angle D_0 = 0^0$$

$$D_1 = \frac{0.504}{1 + j4(1)} = \frac{0.504}{17}(1 - j4) \Rightarrow |D_1| = 0.122 \quad \angle D_1 = -75.96^0$$

$$D_{-1} = \frac{0.504}{1 + j4(-1)} = \frac{0.504}{17}(1 + j4) \Rightarrow |D_{-1}| = 0.122 \quad \angle D_{-1} = 75.96^0 \quad \ldots$$

# Série de Fourier Exponencial (viii)

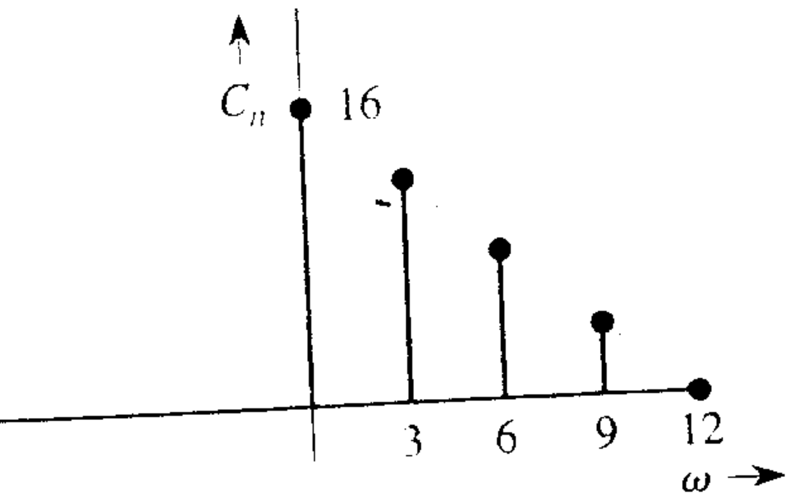
- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo (continuação): Espectros da série de Fourier exponencial.

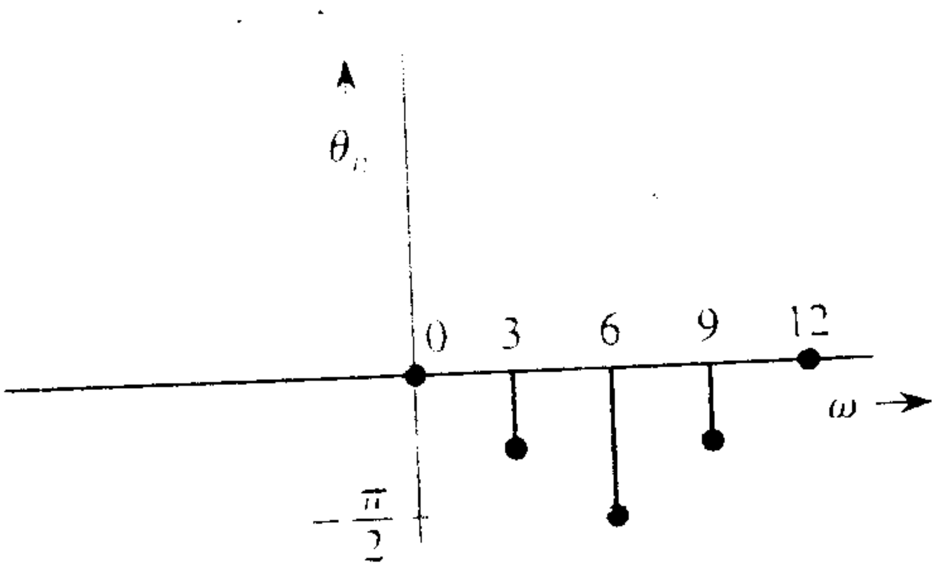



  - O espectro de amplitude é uma função par de $\omega$ e o espectro de ângulo é uma função ímpar de $\omega$.
  - Consideração de valores negativos de freqüências ($\omega$=-$n\omega_0$) indica que um componente exponencial (exp (-$jn\omega_0 t$)) existe na série.

# Série de Fourier Exponencial (ix)

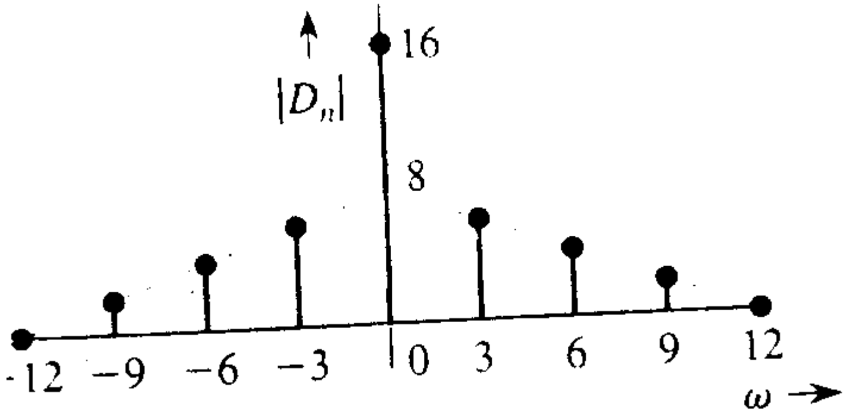
- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo: Dado os espectros de uma série de Fourier trigonométrica, esboce o espectro da série de Fourier exponencial e verifique os resultados analiticamente.

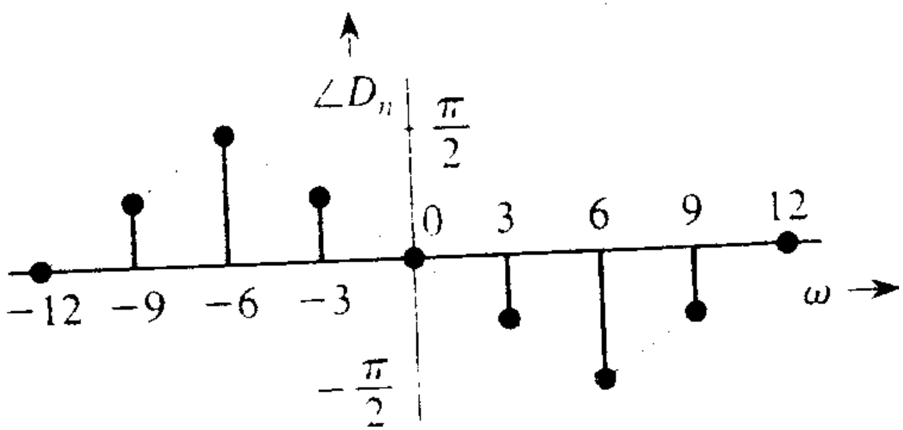


# Série de Fourier Exponencial (x)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo: Os componentes nos espectros trigonométricos geram os mesmos componentes nos espectros exponenciais e seus simétricos com relação à origem. As amplitudes são divididas por dois e os ângulos são os mesmos, com sinais negativos para frequências negativas.



# Série de Fourier Exponencial (xi)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo (continuação):

Série de Fourier trigonométrica compacta : $x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

$$x(t) = 16 + 12\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 8\cos\left(6t - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(9t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Para a série de Fourier exponencial: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

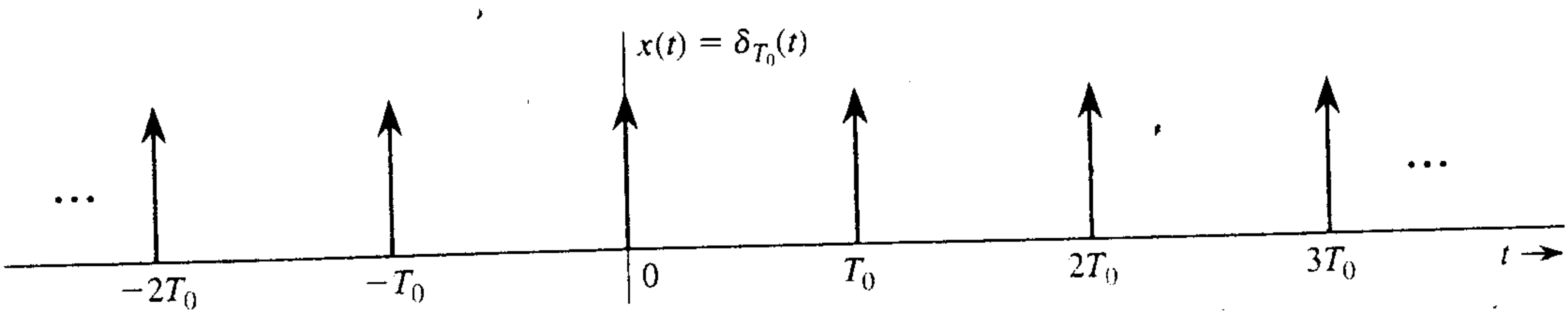
$$x(t) = 16 + [6e^{-j\pi/4}e^{j3t} + 6e^{j\pi/4}e^{-j3t}] + [4e^{-j\pi/2}e^{j6t} + 4e^{j\pi/2}e^{-j6t}] +$$
$$+ [2e^{-j\pi/4}e^{j9t} + 2e^{j\pi/4}e^{-j9t}]$$

$$x(t) = 16 + 6[e^{j(3t-\pi/4)} + e^{-j(3t-\pi/4)}] + 4[e^{j(6t-\pi/2)} + e^{-j(6t-\pi/2)}] +$$
$$+ [2e^{j(9t-\pi/4)} + 2e^{-j(9t-\pi/4)}]$$

logo as expressões são idênticas.

# Série de Fourier Exponencial (xii)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo: encontre a série de Fourier exponencial e trace seus espectros para um trem de impulsos (figura abaixo). A partir deste resultado, esboce os espectros trigonométricos e escreva as séries de Fourier trigonométrica.




Trem de impulsos : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \equiv \delta_{T_0}$, na figura $\omega_0 = 2\pi / T_0$

Série : $x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$, onde $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

# Série de Fourier Exponencial (xiii)

- **Série de Fourier Exponencial**
  - Exemplo (continuação):

Escolhe-se o intervalo de integração $(-T_0/2, T_0/2)$ onde $\delta_{T_0}(t) = \delta(t)$:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \therefore D_n = \frac{1}{T_0}$$

Substituindo na série de Fourier: $x(t) = \delta_{T_0}(t) = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \dfrac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t}$

Para o espectro trigonométrico: $|D_n| = |D_{-n}| = \dfrac{1}{2}C_n \quad n \neq 0; \qquad \angle D_n = \theta_n$

$C_0 = D_0 = \dfrac{1}{T_0}; \quad C_n = 2|D_n| = \dfrac{2}{T_0}; \quad n = 1,2,3\ldots \qquad \theta_n = 0^0$, a série é

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0}[1 + 2(\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \ldots)]$$

# Série de Fourier Exponencial (xiv)

- **Largura de Banda (Bandwidth) de um Sinal:**
  - A largura de banda (ou de faixa) de um sinal é a diferença entre a menor e a maior componente de frequência das componentes espectrais do sinal (valores negativos não são considerados).
- **Efeito de Simetria em Série de Fourier Exponencial:**
  - Para $x(t)$ tendo simetria par, $b_n=0$, $D_n=a_n/2$ (valor real):
    - Ângulo de $D_n$ pode ser 0 ou $\pm\pi$.
    - Calcular $D_n$ só requer integração sobre metade do período.
  - Para $x(t)$ com simetria ímpar, $a_n=0$, $D_n=-jb_n/2$ (valor imaginário):
    - Ângulo de $D_n$ pode ser $\pm\pi/2$.
    - Calcular $D_n$ só requer integração sobre metade do período.

# Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (i)

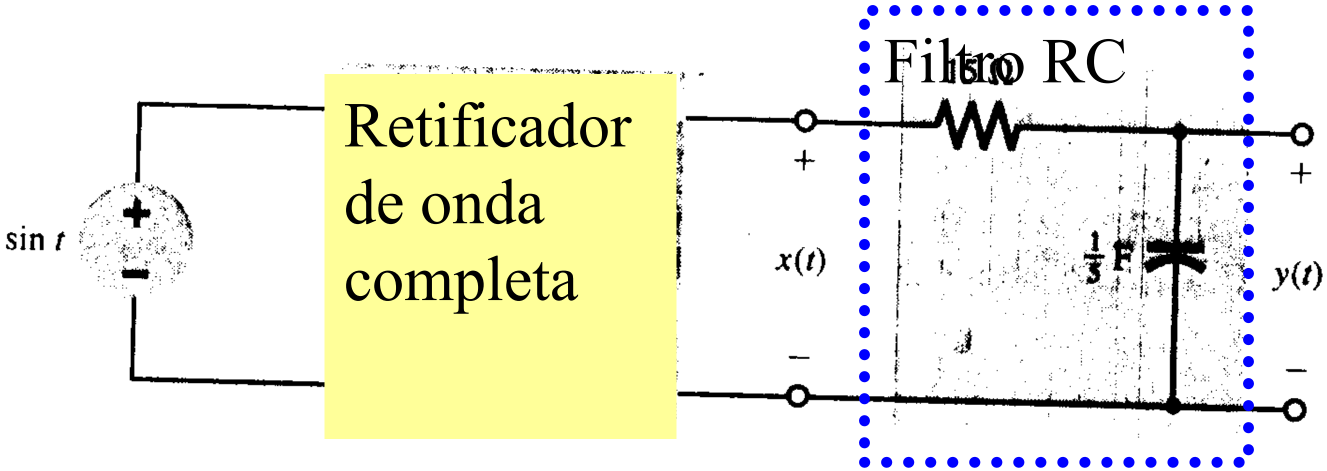
- **Definição**
  - Um sinal periódico pode ser expresso pelo somatório de exponenciais (ou senoidais) não cessantes.
  - A maneira conhecida de determinar a resposta em um sistema LTIC pode ser empregada para determinar respostas de um sistema LTIC a entradas periódicas. Assim, um sinal periódico $x(t)$ de entrada com período $T_0$ pode ser expresso como:
  - Sistema LTIC, a entrada $e^{j\omega_0 t}$ produz a saída $H(jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}$;

Seja um sinal periódico $x(t) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 = 2\pi / T_0$ ;

Pela linearidade: $\underbrace{\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{j\omega_0 t}}_{entrada} \rightarrow \underbrace{\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, H(jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}}_{saída} = y(t)$

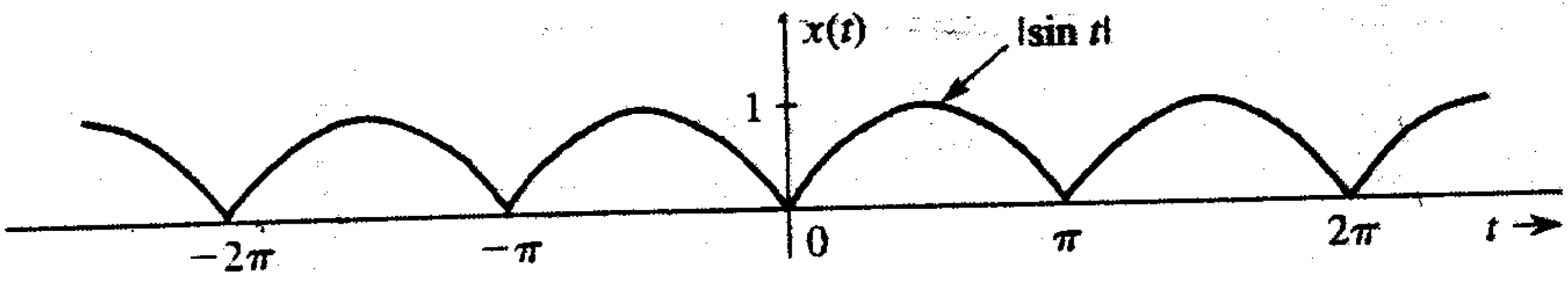
# Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (ii)

– Exemplo: um retificador de onda completa (figura) produz um sinal dc a partir de um sinal senoidal. O sinal $x(t)$ retificado (gráfico) é então aplicado à entrada de um filtro RC passa-baixa para supressão da componente ac resultando em um sinal dc com uma ondulação residual. Encontre: a saída do filtro, a saída e o valor rms da ondulação de tensão.



# Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (iii)

– Exemplo (continuação):




Série de Fourier para o sinal retificado $x(t)$ com período $T_0 = \pi$ e $\omega_0 = 2$:

Assim, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}$, para $D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t e^{-j2nt} dt = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$

Logo tem-se que $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{j2nt}$

# Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (iv)

– Exemplo (continuação):

Descrição do filtro RC: $(3D+1)y(t)=x(t)$

sua função de transferência é $H(s)=\dfrac{1}{3s+1}$, logo $H(j\omega)=\dfrac{1}{3j\omega+1}$

Lembre-se que $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(j2n)e^{j2nt}$

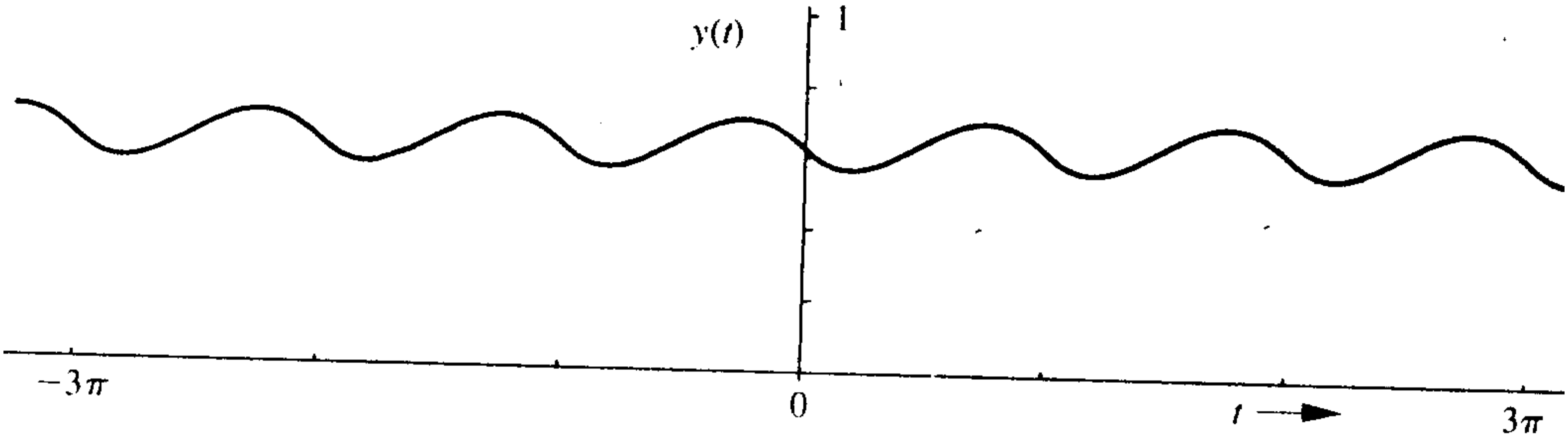
Substituindo-se os valores de $D_n$ e $H(j2n)$ na equação acima:

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)(j6n+1)}e^{j2nt}$$

O termo $\dfrac{2}{\pi}$ é o termo constante, o restante dos termos na série de Fourier são os termos responsáveis pela ondulação.

# Respostas de Sistemas LTIC a Entradas Periódicas (v)

– Exemplo (continuação): Sinal constante mais ondulação.



# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 6.1-1 até 6.1-7.
  - 6.3-1 até 6.3-7.
  - 6.4-1 até 6.4-3.

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Análise de Sistemas Contínuos por Transformada de Fourier


**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**


Capítulo 7

# Conteúdo

- **Introdução**
- **Representação de Sinal Aperiódico por Integral de Fourier Trigonométrica**
- **Transformadas de Algumas Funções Úteis**
- **Propriedade da Transformada de Fourier**
- **Transmissão de Sinais através de Sistemas LTIC**

# Introdução (i)

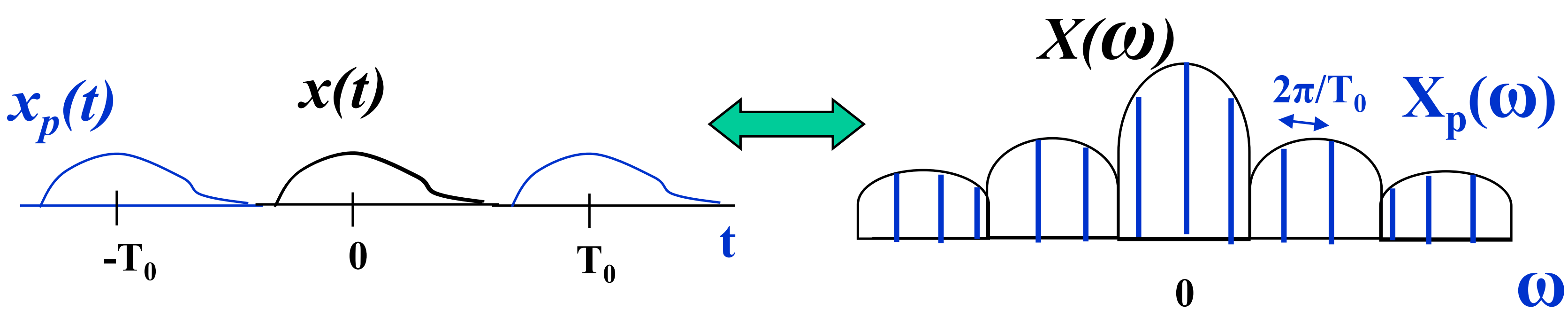
- A Transformada de Fourier pode ser intuída como um caso especial de Transformada de Laplace onde $s=j\omega$.
  - Esta suposição é verdadeira quando o eixo imagiário está todo no ROC da Transformada de Laplace.
- A integral de Fourier, que dá origem a transformada de Fourier, estende o papel da série de Fourier, representar um sinal periódico por um somatório de funções senoidais ou exponenciais. Isto é, tal integral permite a representação espectral de sinais aperiódicos.
- A Transformada de Fourier de um sinal:
  - Representa as componentes espectrais do sinal.
  - Provê mapeamento 1-1 com sua inversa entre domínio no tempo e na freqüência.

# Introdução (i)

Jean Baptiste Joseph Fourier (21 de março de 1768 - 16 de maio de 1830) foi um matemático e físico francês mais conhecido por iniciar a investigação das séries de Fourier e suas aplicações a problemas de transferência de calor e vibrações. A transformada de Fourier e a Lei de Fourier também são nomeadas em sua homenagem. Fourier também é geralmente creditado com a descoberta do efeito estufa.

# Representação de Sinal Aperiódico (i)

- **Preliminares**
  - Para representar um sinal aperiódico $x(t)$ por uma série de Fourier:
    - Repita $x(t)$ a cada $T_0$ segundos, evitando superposições das repetições.
    - Os coeficientes da série de Fourier são calculados para componentes a cada espaçamento $\omega_0$ de frequência.
    - Se $T_0 \rightarrow \infty$, as amostras no domínio da frequência se tornam um sinal contínuo em $\omega$.



# Representação de Sinal Aperiódico (ii)

- **Preliminares**
  - Um sinal aperiódico pode ser expresso por um somatório contínuo (integral) de exponenciais incessantes onde aplica-se operador de limite. Assim, o sinal aperiódico dá origem a um outro, periódico, que repete o sinal original a cada período.

Se o periódo $(T_0)$ tende a infinito, então um sinal periódico $(x_{T_0})$ repete-se após um intervalo de tempo infinito, portanto: $\lim_{T_0\to\infty} x_{T_0}(t) = x(t)$

Assim, uma mesma série de Fourier representa os dois casos acima:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{onde} \quad D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

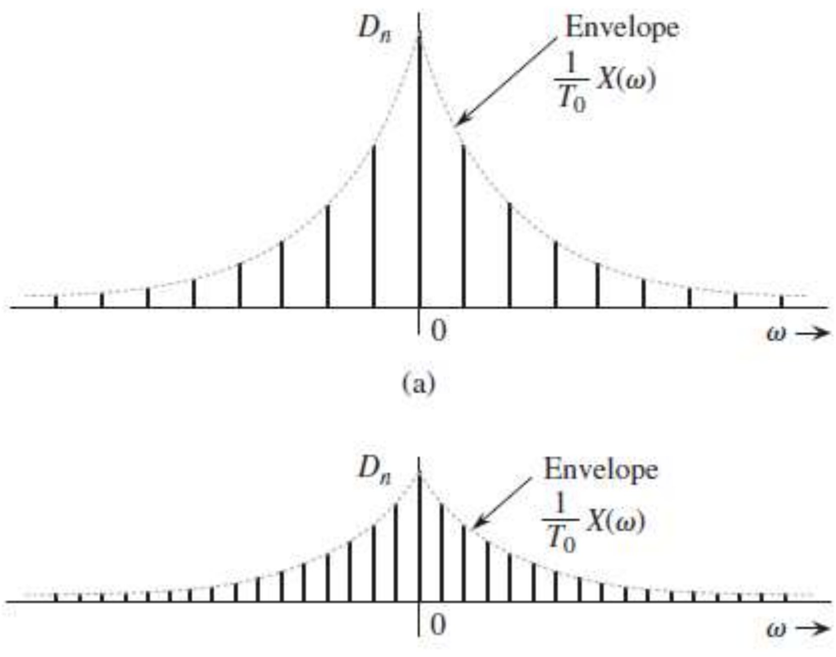
Como $\lim_{T_0\to\infty} x_{T_0}(t)$ e $x(t)$ se equivalem, tem-se: $D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

# Representação de Sinal Aperiódico (iii)

- **Definição: Integral de Fourier**
  - Pode-se definir uma integral, função da freqüência $\omega$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \text{logo} \quad D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$$

  - O espectro de Fourier se modifica, em número de amostras e amplitude das componentes, com o aumento do período.




(a)

(b)

# Representação de Sinal Aperiódico (iv)

- **Definição: Integral de Fourier**
  - Usando-se os coeficientes, escreve-se a série do sinal periódico:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\omega_0)}{T_0} e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{se } T_0 \to \infty \text{ então } \omega_0 \to 0.$$

Logo troca-se $\omega_0$ por $\Delta\omega = 2\pi / T_0$, e a série de Fourier torna-se:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{X(n\Delta\omega)\Delta\omega}{2\pi} \right] e^{(jn\Delta\omega)t}$$

Para este somatório, a contribuição de um componente de freqüência $(n\Delta\omega)$ é $[X(n\Delta\omega)\Delta\omega] / 2\pi$.

Quando $T_0 \to \infty$ então $\omega_0 \to 0$ e $x_{T_0}(t) = x(t)$:

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) e^{(jn\Delta\omega)t} \Delta\omega$$

# Representação de Sinal Aperiódico (iv)

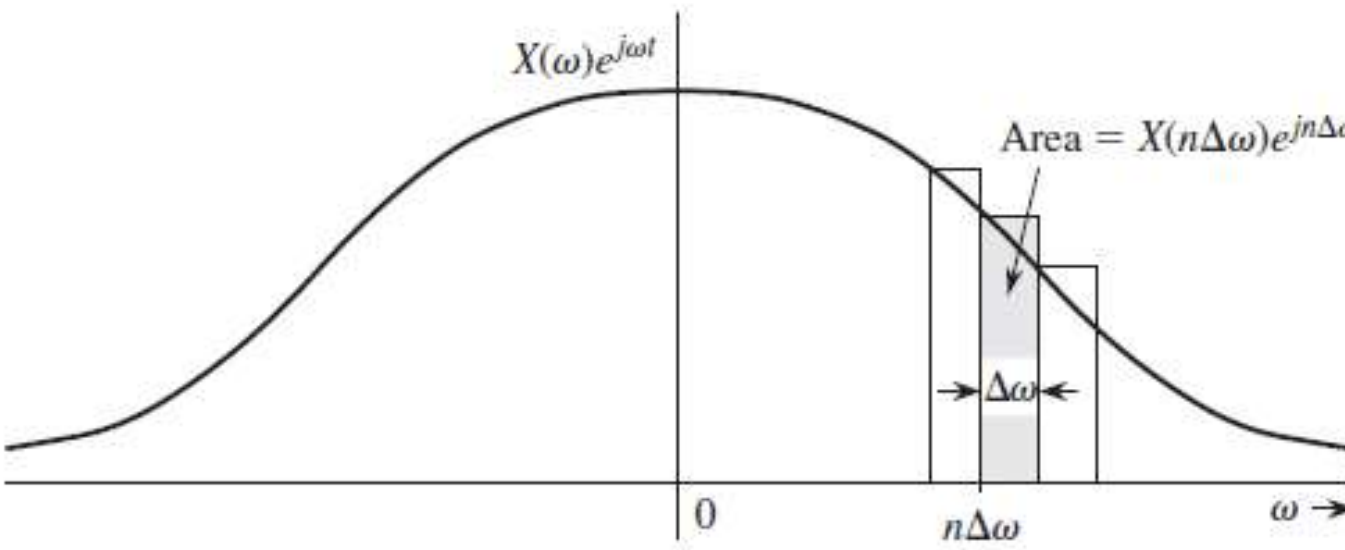
- **Definição: Integral de Fourier**

O somatório pode ser visto como uma área sob a função :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Esta é a integral de Fourier que representa o sinal aperiódico $x(t)$.

A integral equivale a série de Fourier com freqüência fundamental $\Delta\omega \to 0$.



# Representação de Sinal Aperiódico (v)

- **Definições: Transformada de Fourier e sua Inversa**
  - A Transformada de Fourier e sua inversa são definidas como:

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

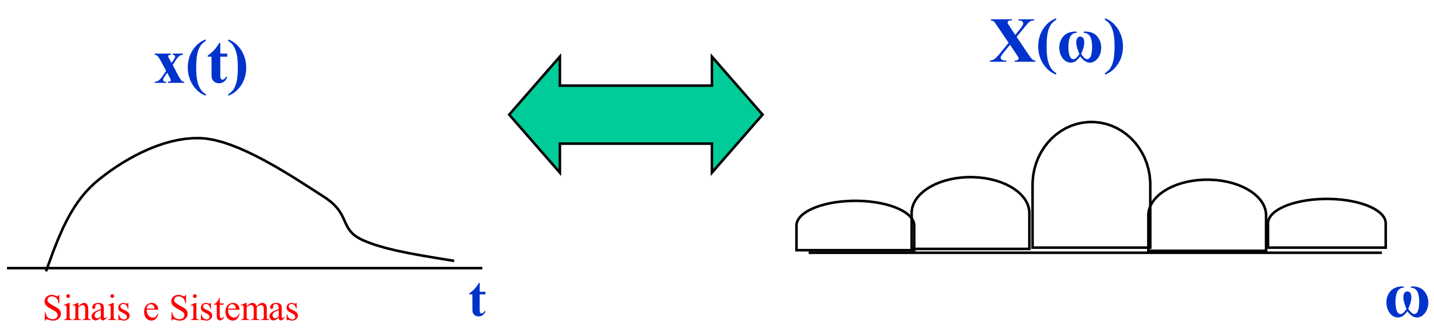
$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

  - O conjugado pode ser escrito como:

Por definição tem-se $X(-\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt,$

logo $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$ -> propriedade da conjugação.

  - Exemplo de transformada e sua inversa:



# Representação de Sinal Aperiódico (vi)

- **A Transformada de Fourier**
  - A transformada de Fourier $X(\omega)$ é a especificação de $x(t)$ no domínio da freqüência.
  - Pode-se traçar o espectro de $X(\omega)$ como função de $\omega$:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{\angle X(\omega)}$$

  - Para um sinal $x(t)$ real, o espectro de amplitude é uma função par e o espectro de fase é uma função ímpar de ω.

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$$

  - A transformada de Fourier é linear

Sejam $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(\omega)$

então $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

# Representação de Sinal Aperiódico (vii)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Encontre a transformada de Fourier para o sinal:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad \text{por definição } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\text{Logo, } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

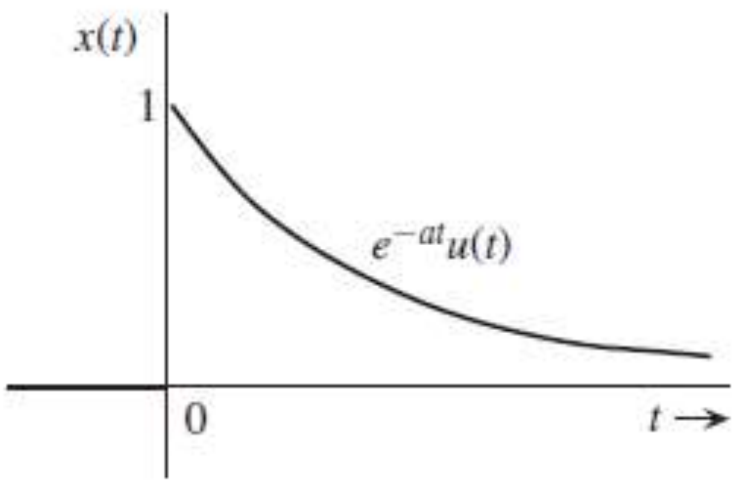
$$\text{Tem - se que } \left|e^{-j\omega t}\right| = 1, \text{ portanto}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \begin{cases} \infty & a < 0 \\ \dfrac{1}{a+j\omega} & a > 0 \end{cases}$$

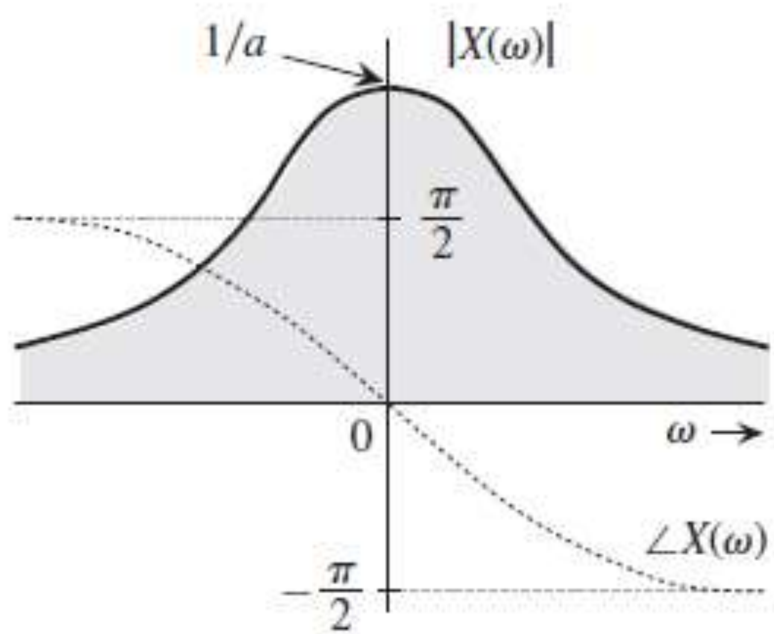
$$\text{Portanto, } \quad X(\omega) = |X(\omega)|\angle X(\omega) = \begin{cases} |X(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{a}\right) \end{cases}$$

# Representação de Sinal Aperiódico (viii)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo (continuação): Traçado dos espectros de amplitude (função par) e fase (função ímpar):




(a)




(b)

# Representação de Sinal Aperiódico (ix)

- **Existência da Transformada de Fourier**
  - A transformada de Fourier de uma função $x(t)$ tem garantias de convergência se tal função satisfaz as condições de Dirichlet. Além disto, nos pontos de descontinuidade, $x(t)$ converge para a média dos valores em cada lado da descontinuidade.
  - As condições de Dirichlet (condições de suficiência) são:

(i) A função $x(t)$ é absolutamente integrável : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

(ii) A função $x(t)$ tem que ter número finito de descontinuidades finitas em qualquer intervalo de tempo finito.

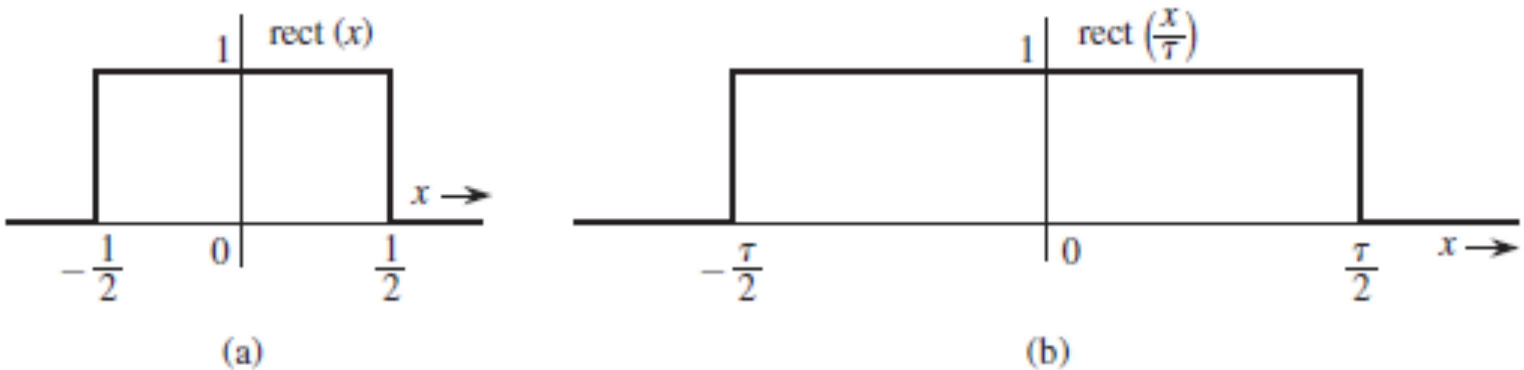
(iii) A função $x(t)$ tem que ter número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito.

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (i)

- **Função Portal Unitária** (*Unit Gate*)
  - Esta função, rect($x$), é definida como um pulso de altura e largura unitárias, centrada na origem:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 1 & |x| < 1/2 \end{cases}$$

  - Função portal: unitária e ela expandida no eixo horizontal:

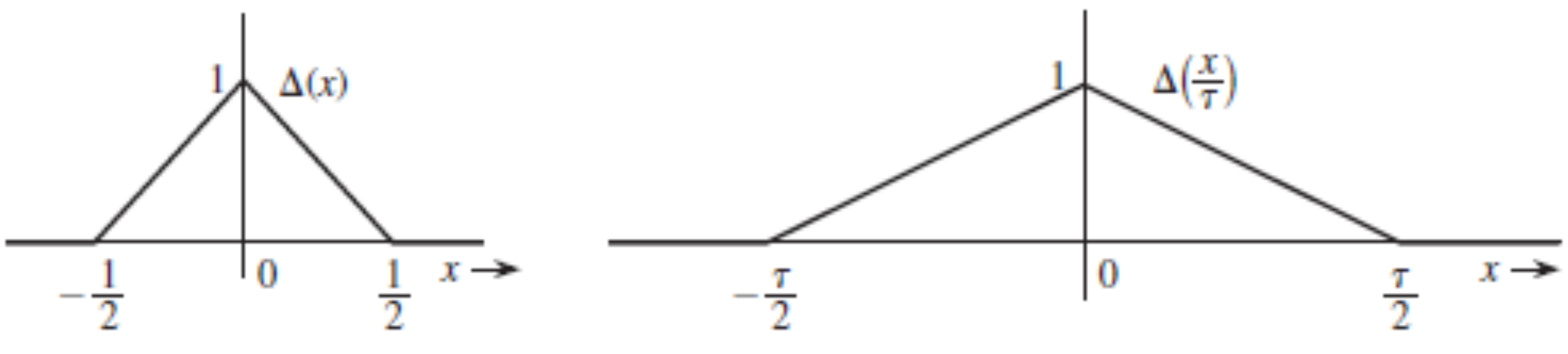


# Transformadas de Algumas Funções Úteis (ii)

- **Função Triângulo Unitária** (*Triangular Gate*)
  - Esta função é definida como um pulso triangular de altura e largura unitárias, centrada na origem:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1/2 \\ 1 - 2|x| & |x| < 1/2 \end{cases}$$

  - Função triângulo: unitária e expandida no eixo horizontal:




(a) (b)

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (iii)

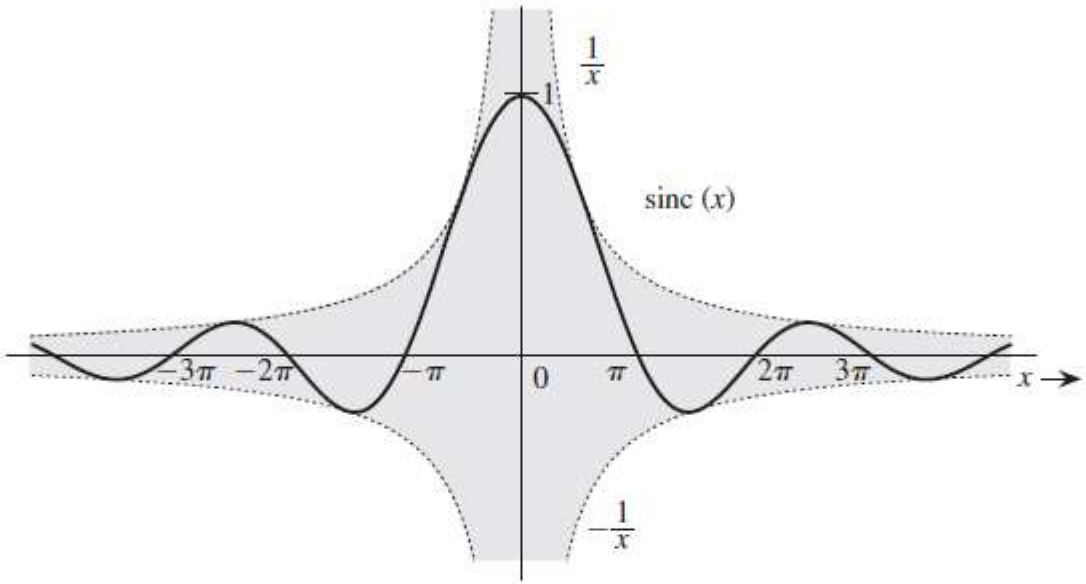
- **Função Interpolação** (*Interpolation*)
  - Esta função, denotada por sinc ($x$), é definida a razão entre um seno e seu argumento. Ela também é conhecida como função filtrante ou interpolante.

$$\text{sinc}\,(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x}$$

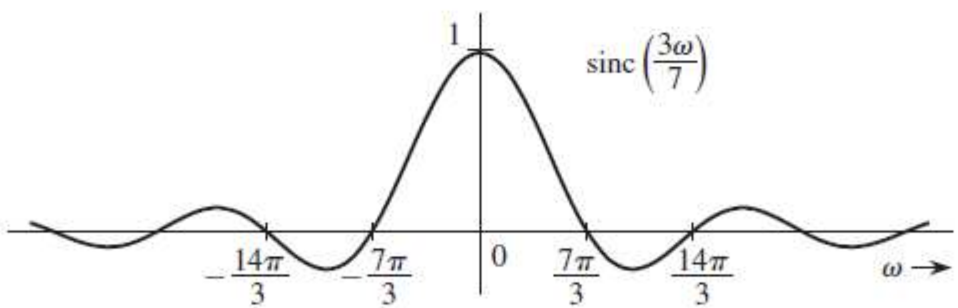
  - Características da função:
    - É função par de $x$.
    - sinc ($x$)=0 quando sen $x$=0, exceto em $x$=0.
    - Pela regra do L'Hôpital determina-se sinc (0)=1.
    - Exibe oscilações amortecidas de período $2\pi$, com amplitude continuamente decrescente como $1/x$.

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (iv)

- **Função Interpolação** (*Interpolation*)
  - Gráfico da função sinc($x$).




(a)




(b)

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (v)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Encontre a transformada de Fourier para o sinal:

$$x(t) = \mathrm{rect}(t/\tau), \quad \text{por definição } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

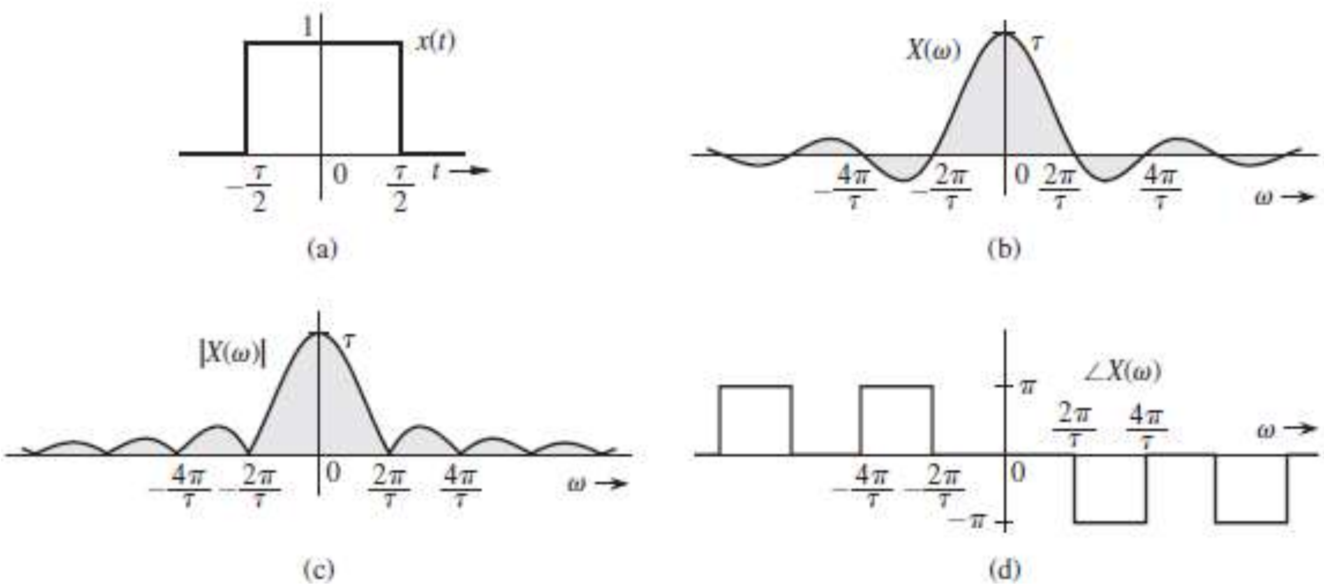
$$\text{Logo, } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t/\tau) e^{-j\omega t} dt, \quad \text{considerando os valores da função :}$$

$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\tau}\left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right) = \frac{2sen\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} \therefore$$

$$X(\omega) = \tau \frac{sen\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad \text{finalmente} \quad \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (vi)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo (continuação): Traçado (a) da função $x(t)$ = rect $(t/\tau)$; (b) da transformada de Fourier $X(\omega)$; (c) do espectro de amplitude (função par) e (d) do espectro de fase (função ímpar).

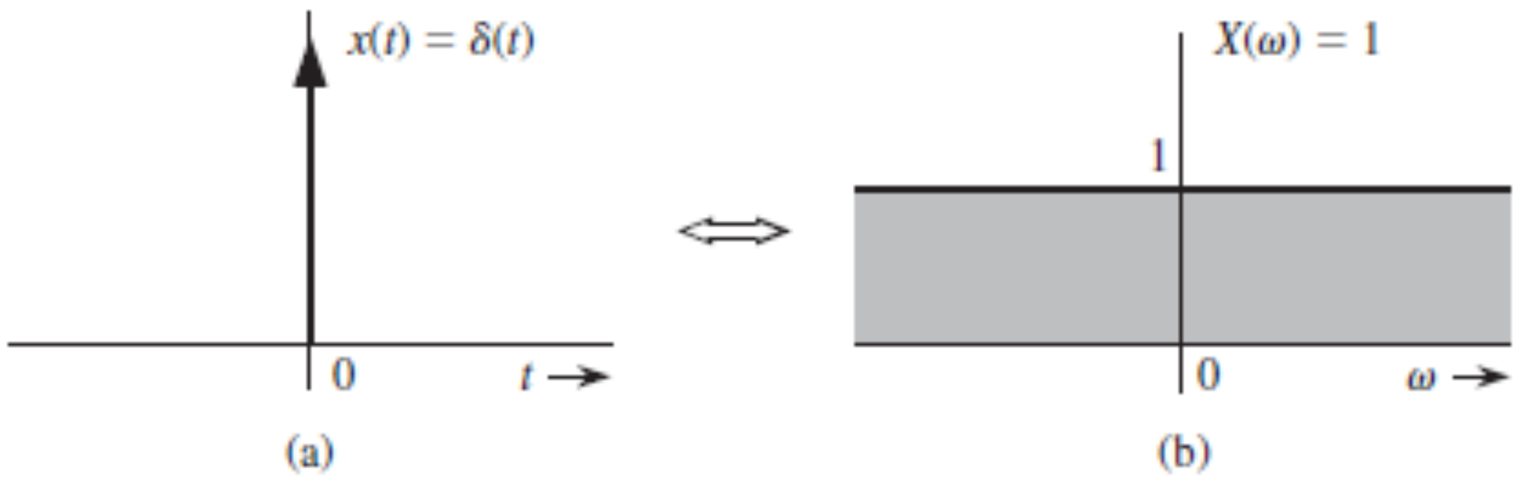



- A largura de banda de $X(\omega)$ é infinita, contudo, este é um filtro passa baixa, no qual a maior parte do espectro concentra-se no intervalo $[0, 2\pi/\tau]$. Portanto, uma avaliação grosseira da largura de banda a determina como $2\pi/\tau$ rad/s ou $1/\tau$ Hz.

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (vii)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Determine a transformada de Fourier da entrada impulso $\delta(t)$.

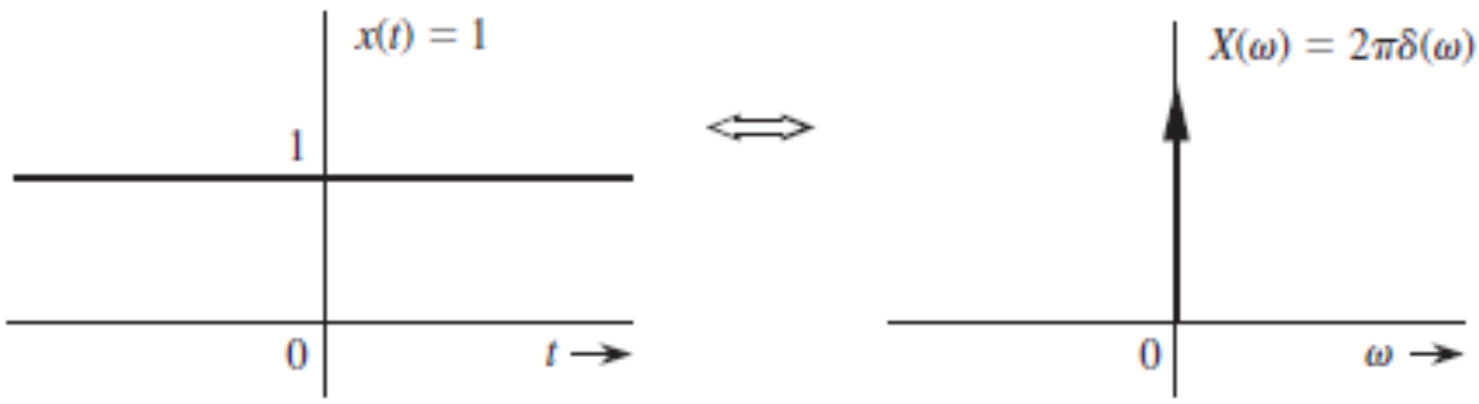
$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1, \quad \text{ou seja} \quad \delta(t) \Leftrightarrow 1$$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (viii)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Determine a transformada de Fourier inversa de $\delta(\omega)$.

$$F^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}, \quad \text{ou seja} \quad 1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$




(a) (b)

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (ix)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Determine a transformada de Fourier inversa de $\delta(\omega-\omega_0)$.

$$F^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t},$$

ou seja $\quad e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Este resultado mostra que o espectro de uma função exponencial incessante $e^{j\omega_0 t}$ é um impulso simples em $\omega=\omega_0$.

A equação acima pode ser estendida :

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (x)

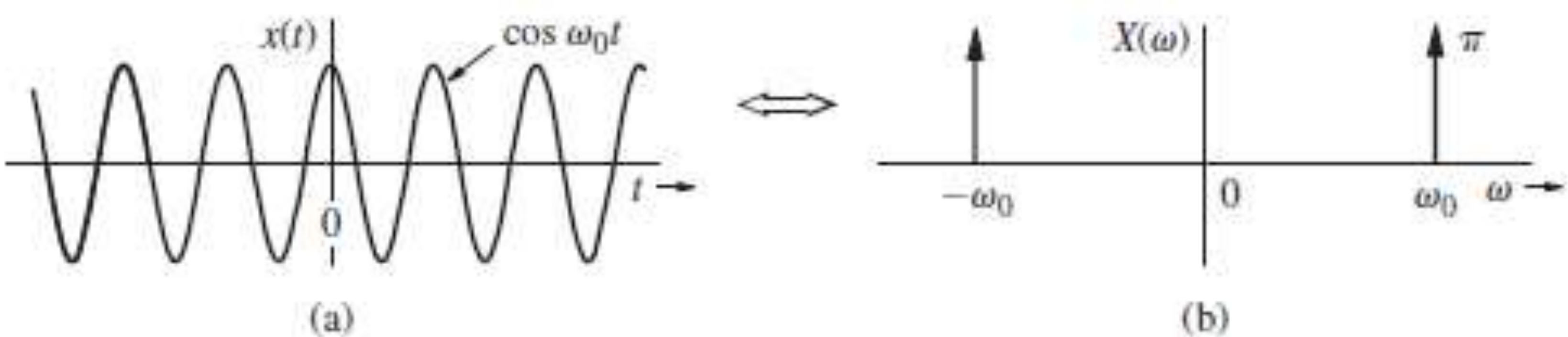
- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Encontre a transformada de Fourier:

A fórmula de Euler determina : $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$

Do exemplo anterior : $e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \quad e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

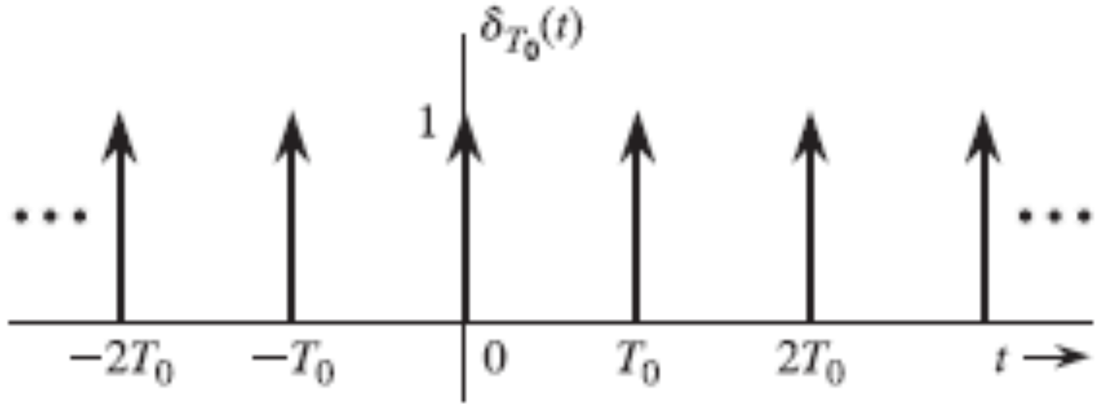
Pela propriedade da linearidade : $\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

Sinal cosseno e seu espectro de Fourier



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xi)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Encontre a transformada de Fourier de um trem de impulsos como mostrado na figura abaixo:




No exemplo anterior mostrou-se que $e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$, assim,

um sinal expresso em série de Fourier: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$

tem sua transformada de Fourier: $X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega-n\omega_0)$,

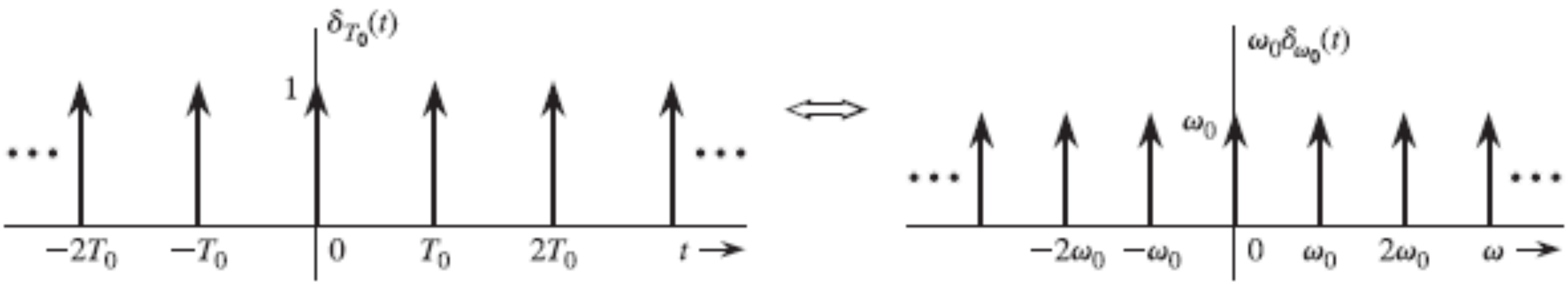
# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xii)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo (continuação):

Cálculo do coeficiente de Fourier : $D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}$

Logo, a transformada de Fourier da série de Fourier é :

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$$




(a) (b)

# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xiii)

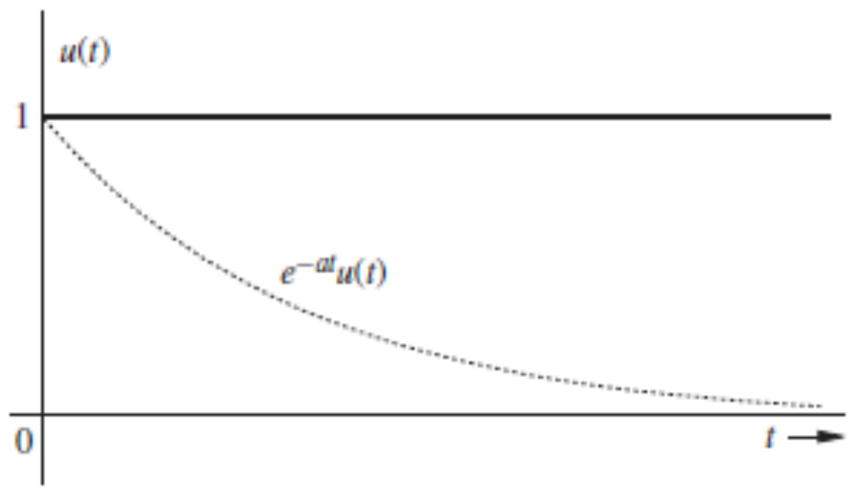
- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Calcule a T. F. da função degrau unitária $u(t)$.

Por integração direta, esta integral é indeterminada : $U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$

$$\therefore U(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = (-1/j\omega) e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{\infty}$$

O limite superior de $e^{-j\omega t}$ é indeterminado para $t \to \infty$

Para resolver este problema, faz - se $\quad u(t) = \lim_{a \to 0} e^{-at} u(t)$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xiv)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo (continuação):

A transformada de Fourier pode ser expressa como:

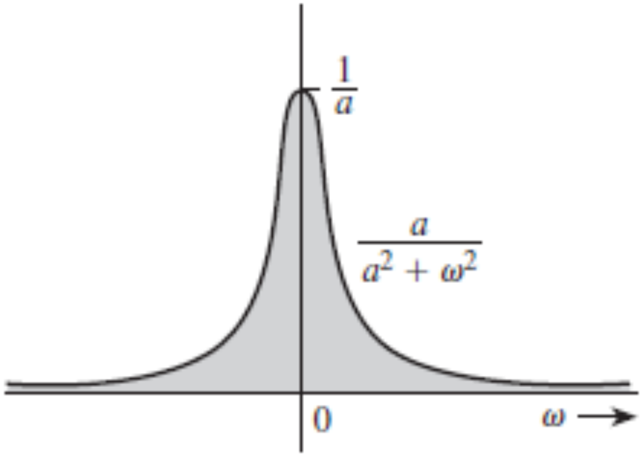
$$U(\omega) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{a}{a^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right] = \lim_{a\to 0}\left[\frac{a}{a^2+\omega^2}\right] + \frac{1}{j\omega}, \quad \text{onde}$$

$$\text{Área sob } \frac{a}{a^2+\omega^2} \text{ é } \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \tan^{-1}\frac{\omega}{a}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\lim_{a\to 0}\left[\frac{a}{a^2+\omega^2}\right] = 0, \text{ se } \omega \neq 0 \therefore$$

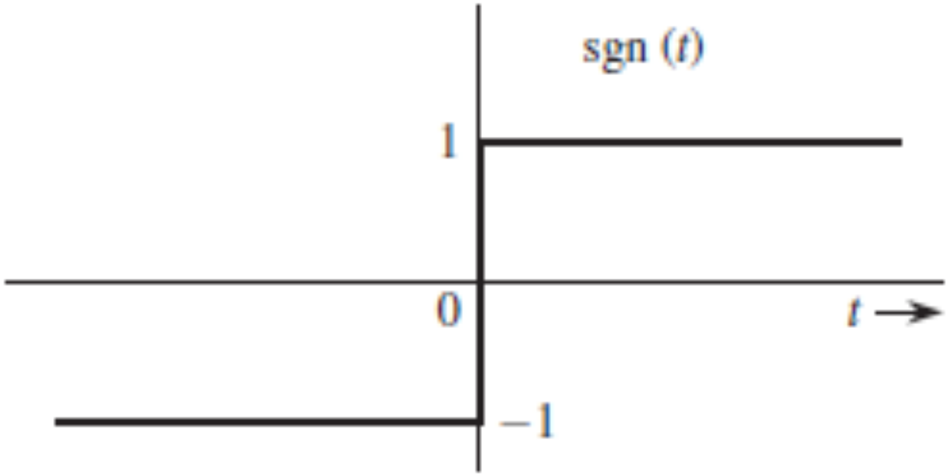
Se $a \to 0$, função tende a $\delta(\omega)$,

$$\text{logo, } U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



# Transformadas de Algumas Funções Úteis (xv)

- **Transformada de Fourier**
  - Exemplo: Calcule a transformada de Fourier da função sgn($t$):




$$\operatorname{sgn}(t) + 1 = 2u(t) \therefore \operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

Usando - se os resultados anteriores $\qquad \operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$

# Propriedades da Transformada de Fourier (i)

- **Objetivo**
  - Estudar propriedades e conhecer suas implicações e aplicações.
- **Propriedades Consideradas**
  - Propriedade de Dualidade Tempo-freqüência nas Operações com Transformadas: Para qualquer resultado entre *x*(*t*) e *X* (*ω*) existe uma relação dual obtida pela trocas de papeis de *x*(*t*) e *X* (*ω*), pois as duas expressões são aproximadamente idênticas.
  - Propriedade de Linearidade: Respeita o teorema da superposição. Permite representar um sinal como a combinação linear de outros sinais com transformadas de Fourier conhecidas.
  - Conjugação e Simetria Conjugada:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ então $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$

Segue-se a propriedade de simetria de conjugado $X(-\omega) = X^*(\omega)$

# Propriedades da Transformada de Fourier (ii)

– Propriedade de Dualidade:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ então $X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$, pois

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{jut}du, \text{ assim para tempo -}t\text{, tem-se}$$

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{-jut}du, \text{ troca-se } t \text{ por } \omega.$$

- Operações no tempo levam a operações duais na freqüência.
- Pares de transformadas de Fourier são mutuamente duais.

– Propriedade DC: Integral de um sinal é determinada por sua T.F. em $\omega$=0.

– Relação de Parceval: A potência do sinal pode ser determinada a partir do domínio do tempo ou do domínio da freqüência.

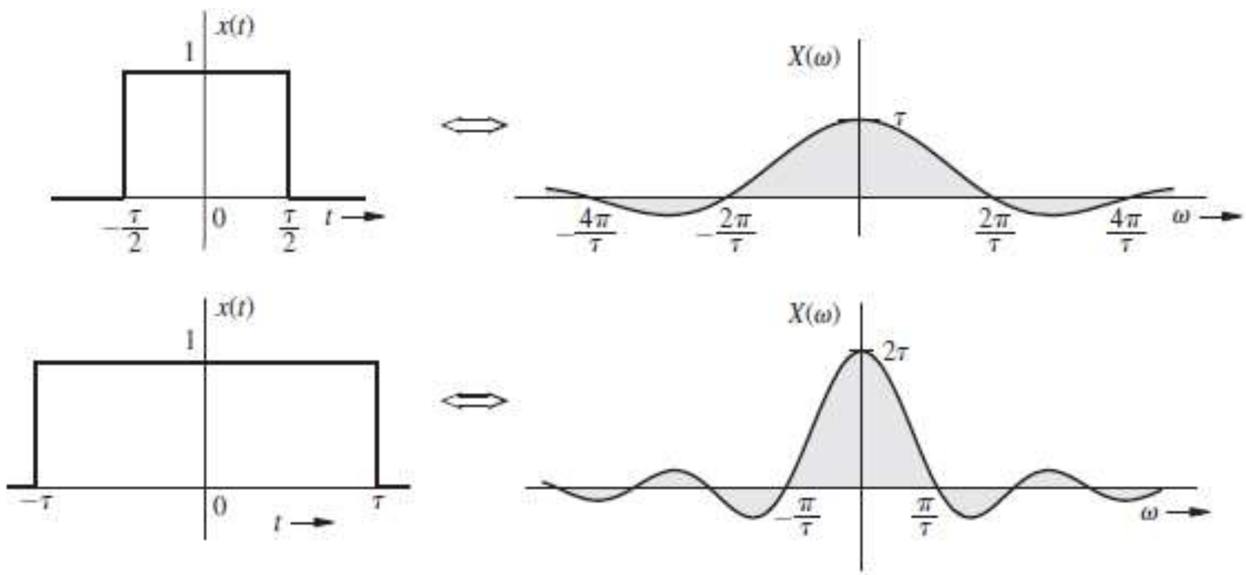
# Propriedades da Transformada de Fourier (iii)

– Propriedade de Escalonamento no Tempo:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ então $x(at) \Leftrightarrow 1/|a| X(\omega / a)$, $a$ é constante real.

Prova desta compressão : calcula - se $F[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$

Esta propriedade afirma que compressão (expansão) no tempo do sinal $x(t)$ pelo fator $a$ resulta em expansão (compressão) espectral.



# Propriedades da Transformada de Fourier (iv)

– Propriedade de Escalonamento no Tempo (continuação):

- A largura de banda de um sinal é inversamente proporcional a duração ou largura deste sinal.

– Propriedade de inversão de Tempo e Freqüência:

Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ então $x(-t) \Leftrightarrow X(-\omega)$, onde $a = -1$.

– Propriedade de Deslocamento no Tempo:

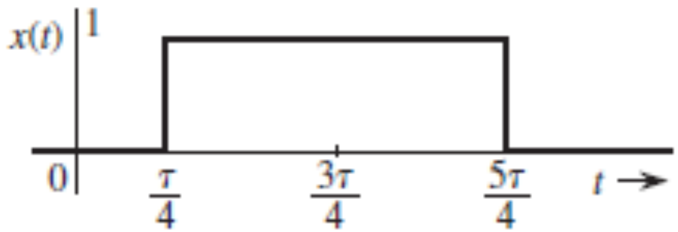
Se $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ então $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

Prova : calcula - se $F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}\,dt$

Esta propriedade afirma que atrasar um sinal $x(t)$ em $t_0$ segundos não modifica seu espectro de amplitude e muda seu espectro de fase em $-\omega t_0$. Em outras palavras, o atraso (no tempo) em um sinal provoca um deslocamento de fase linear em seu espectro.

# Propriedades da Transformada de Fourier (v)

- Propriedade de Deslocamento no Tempo (continuação):
- Exemplo: Encontre a T.F. do pulso portal da figura abaixo:




O sinal $x(t)$ é o pulso portal $\mathrm{rect}(t/\tau)$ atrasado de $3\tau/4$ segundos.

Aplica-se a propriedade do deslocamento no tempo:

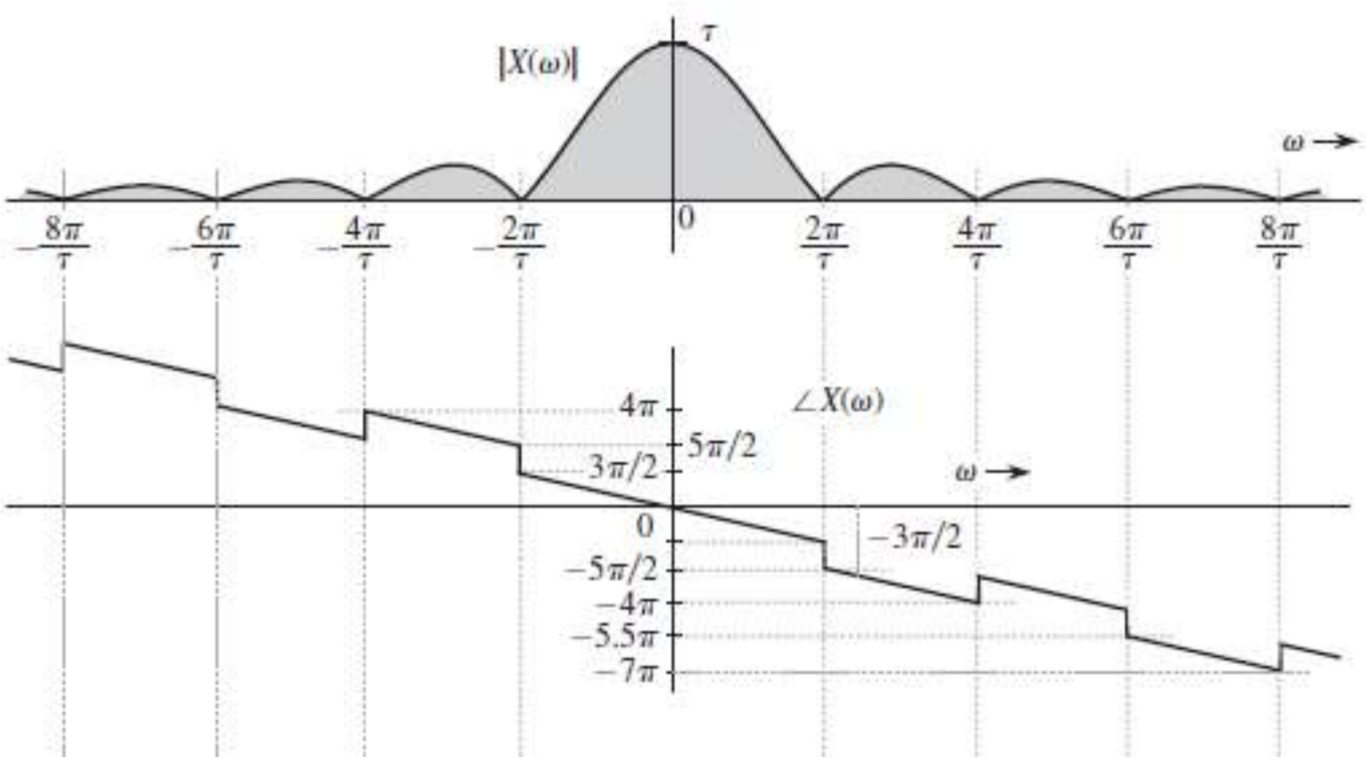
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad \text{logo} \quad \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}-\frac{3\tau}{4}\right) \Leftrightarrow \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega t_0}$$

O espectro de amplitude permanece o mesmo de $\mathrm{rect}(t/\tau)$.

O espectro de fase é adicionado de um termo linear $-\dfrac{3\omega\tau}{4}$.

# Propriedades da Transformada de Fourier (vi)

– Propriedade de Deslocamento no Tempo (continuação):



# Propriedades da Transformada de Fourier (vii)

– Propriedade de Deslocamento na Freqüência:

$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, então $x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$

A prova é obtida calculando-se $F\left[x(t)e^{j\omega_0 t}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$

A multiplicação de um sinal por $e^{j\omega_0 t}$ causa deslocamento no espectro do sinal de $\omega=\omega_0$.

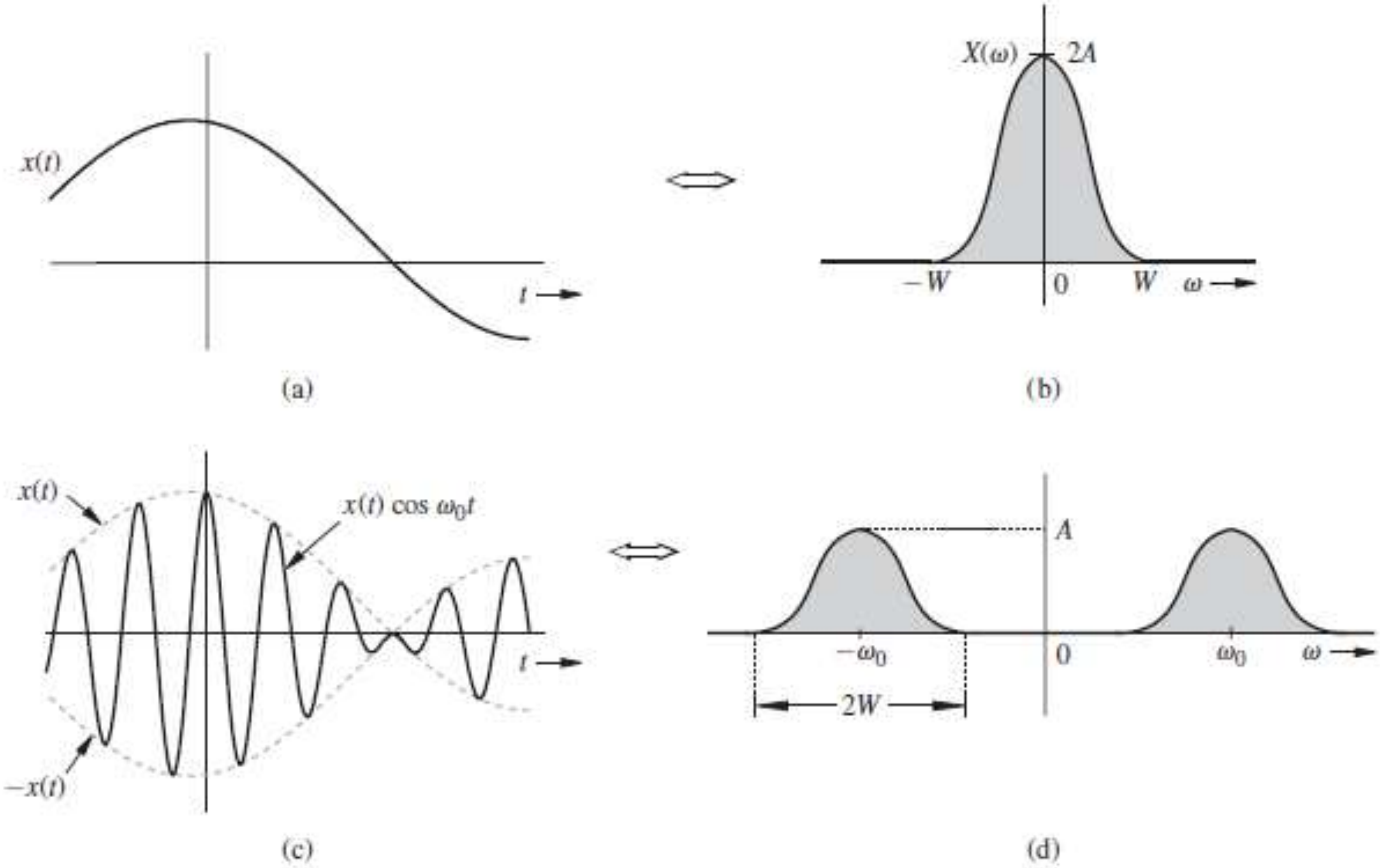
Esta propriedade é dual ao deslocamento no tempo.

Como $e^{j\omega_0 t}$ não é uma função real, o deslocamento na freqüência, para o mundo real, é alcançado multiplicando-se o sinal por uma senoidal:

$$x(t)\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left[x(t)e^{j\omega_0 t}+x(t)e^{-j\omega_0 t}\right]\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (viii)

– Propriedade de Deslocamento na Freqüência (continuação):



# Propriedades da Transformada de Fourier (ix)

– Propriedade de Deslocamento na Freqüência (continuação):

- Multiplicação de um sinal senoidal cos $\omega_0 t$ pelo sinal $x(t)$ modula a amplitude da senoidal. Esta operação é chamada de modulação em amplitude. A senoidal é chamada de portadora (*carrier*) e o sinal é dito ser o sinal modulante ou modulador. O produto é chamado de sinal modulado.
- Aplicações de Modulação:
  - Multiplexação por divisão de freqüência: transmissão simultânea de alguns sinais sobre um mesmo canal por compartilhamento da banda de freqüência. Na prática, um dado sinal tem vários portadores (e.g., estação de rádios).
  - Redução do tamanho de antenas (que deve ter o tamanho da ordem de grandeza do sinal a ser irradiado).

# Propriedades da Transformada de Fourier (x)

– Propriedade de Convolução no Tempo e na Freqüência

Se $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(\omega)$.

Convolução no tempo $x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$

Convolução na freqüência $x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow (1/2\pi)[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$

Prova - se por aplicação da definição.

– Propriedade de Diferenciação e Integração no Tempo:

$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$,

$$\text{então} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(\omega), & \text{diferenciação no tempo} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega), & \text{integração no tempo} \end{cases}$$

# Transmissão de Sinais por Sistemas LTIC (i)

- **Preliminares**
  - Sejam $x(t)$ e $y(t)$ entrada e saída de sistema LTIC com resposta ao impulso $h(t)$, logo $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$ (prop. convolução no tempo).
    - Esta equação não se aplica a sistemas instáveis pois neste caso $h(t)$ não é transformável por Fourier.
  - Exemplo: Ache a resposta de estado zero para sist. LTIC (estável):

$$\text{Resposta ao impluso}: \; H(s)=\frac{1}{s+2} \;\therefore\; H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+2}$$

$$\text{Entrada}: \; x(t)=e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega+1}$$

$$\text{Portanto,} \quad Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+1)}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}, \quad \text{logo} \quad y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

# Transmissão de Sinais por Sistemas LTIC (ii)

- **Entendimento Heurístico de Resposta de Sistema Linear**
  - Resposta de um sistema LITC emprega integral de convolução (domínio do tempo) e integral de Fourier (domínio da freqüência):

Domínio no tempo :

$\delta(t) \Rightarrow h(t)$ ..................................resposta ao impulso

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ ................soma de impulsos

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ...............soma de respostas ao impulso

Domínio da freqüência :

$e^{j\omega t} \Rightarrow H(\omega)e^{j\omega t}$ ..........................resposta ao impulso

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ .............soma de exponenciais incessantes

$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ .....soma de respostas às exp. incessantes

# Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - 7.1-3 até 7.1-7.
  - 7.2-1, 7.2-4 até 7.2-5.
  - 7.3-1 até 7.3-4, 7.3-6, 7.3-7 e 7.3-10.
  - 7.4-1 até 7.4-3.

*ES 413 Sinais e Sistemas*

# Ponte Entre Sistemas Discretos e Contínuos

**Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo**

**Depto. of Sistemas de Computação**

**Centro de Informática - UFPE**

Capítulo 8

# Conteúdo

- Teorema da Amostragem
- Reconstrução de Sinais

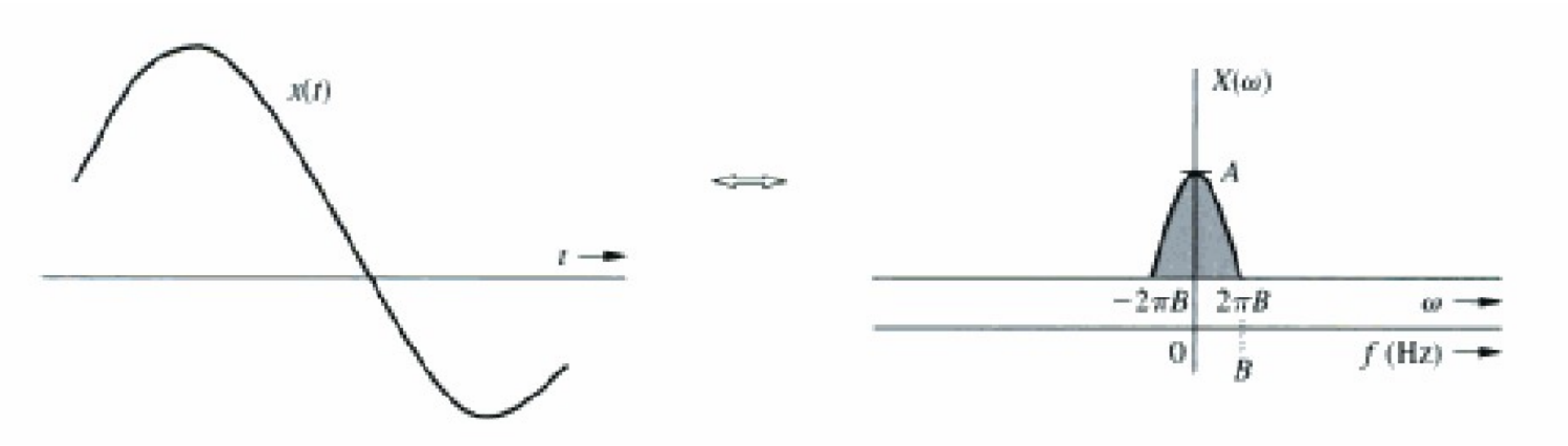
# Teorema da Amostragem (i)

- Um sinal contínuo no tempo pode ser processado através de um sistema discreto no tempo se este processamento ocorrer sobre amostras do sinal original.
  - Taxa de amostragem do sinal deve ser alta o suficiente que permita a reconstrução do sinal a partir das amostras dentro de uma faixa de erro aceitável.
  - O arcabouço quantitativo necessário para amostragem adequada é provido pelo Teorema da Amostragem.
- Conceitos para análise de sinais amostrados são aplicáveis a sinais discretos no tempo pois:
  - Um sinal contínuo no tempo que esteja amostrado é constituído por uma sequência de impulsos.
  - Um sinal discreto no tempo é constituído por uma sequência de números.

# Teorema da Amostragem (ii)

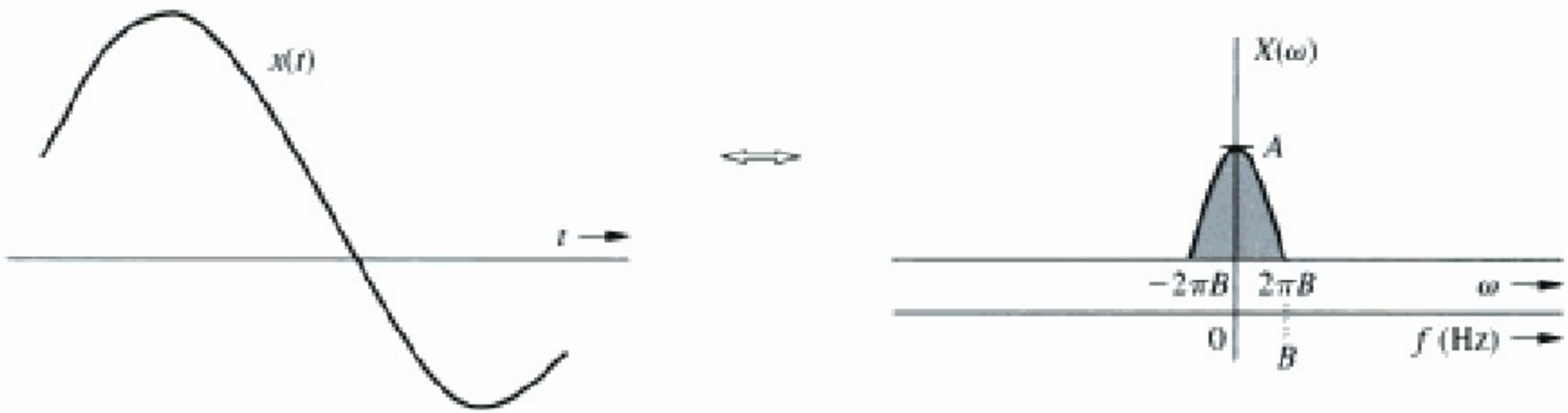
– Um sinal real $x(t)$ cujo espectro tem largura de banda $B$ Hz, isto é, $X(\omega)$ =0 para $|\omega| > 2\pi B$ rad/s, pode ser precisamente reconstruído a partir de suas amostras $x(kT)$ se a taxa de amostragem $\omega_s$, satisfizer a condição $\omega_s \geq 4\pi B$ .

- Em termos de intervalo de amostragem: $T_s \leq 1/2B$.
- A taxa mínima de amostragem para perfeita reconstrução do sinal original é referenciada como taxa de Nyquist.



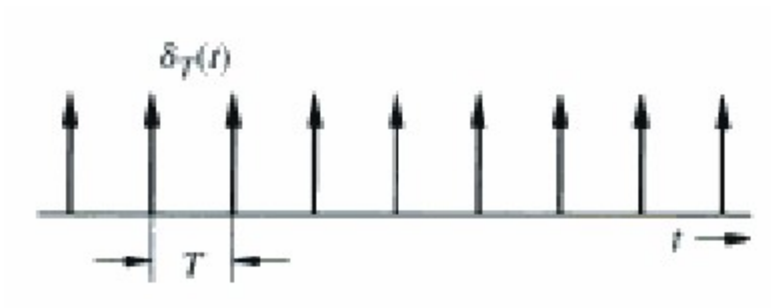
# Teorema da Amostragem (i)

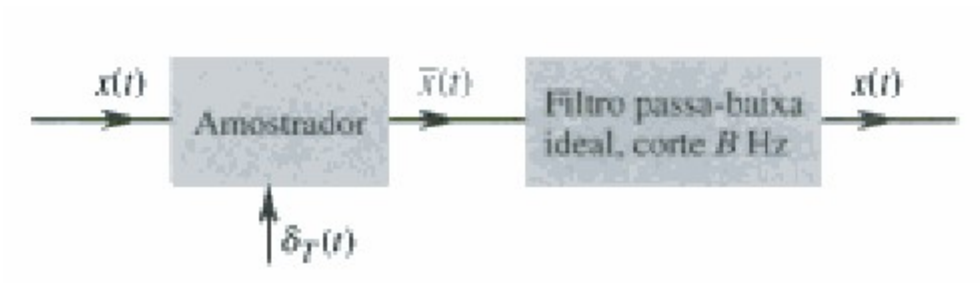
- Sinal real com espectro limitado a $B\text{Hz}$ $\left[X(\omega)=0 \text{ para} \mid \omega \mid > 2\pi B\right]$ Pode ser reproduzido de amostras tomadas uniformemente a uma taxa de $f_s > 2B$ Hz.



# Teorema da Amostragem (ii)

- Prova:
  - Para obter uma taxa de $f_s$ multiplica-se *x*(*t*) por um trem de impulsos unitários periodicamente repetidos em $T = \frac{1}{f_s}$ segundos



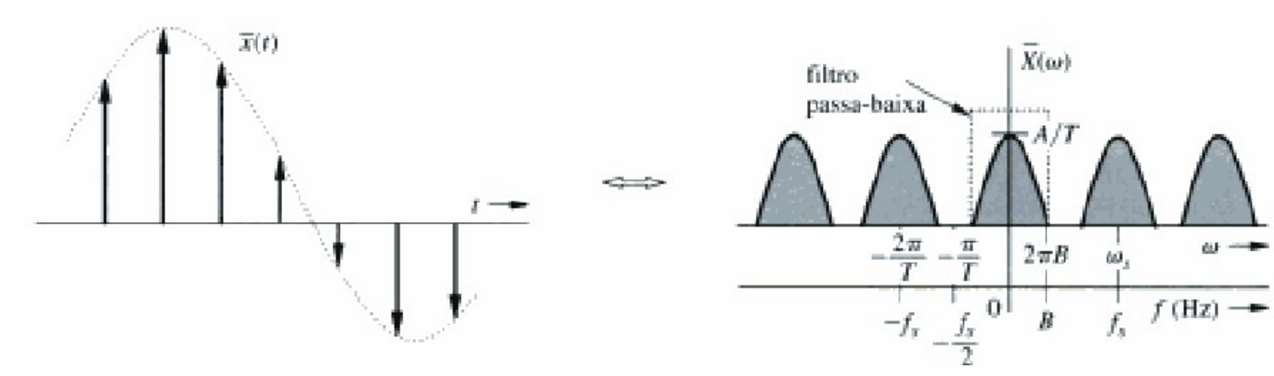




Como o n-ésimo pulso localizado em *t*=*nT* possui magnitude *x*(*nT*):

$$\overline{x}(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT)$$

# Teorema da Amostragem (iii)

- Prova:




Como o trem de impulsos é um sinal periódico, pode ser substituído pela série trigonométrica de Fourier:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}[1 + 2\cos\omega_s t + 2\cos 2\omega_s t + 2\cos 3\omega_s t + \ldots] \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

Assim:

$$\bar{x}(t) = x(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T}[x(t) + 2x(t)\cos\omega_s t + 2x(t)\cos 2\omega_s t + 2x(t)\cos 3\omega_s t + \ldots]$$

# Teorema da Amostragem (iv)

- Prova:

  É possível obter a transformada de Fourier do sinal amostrado obtendo a transformada do lado direito da equação.

  Os elementos do lado direito representam o espectro para diferentes valores de frequências, logo:

$$\overline{X}(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

□

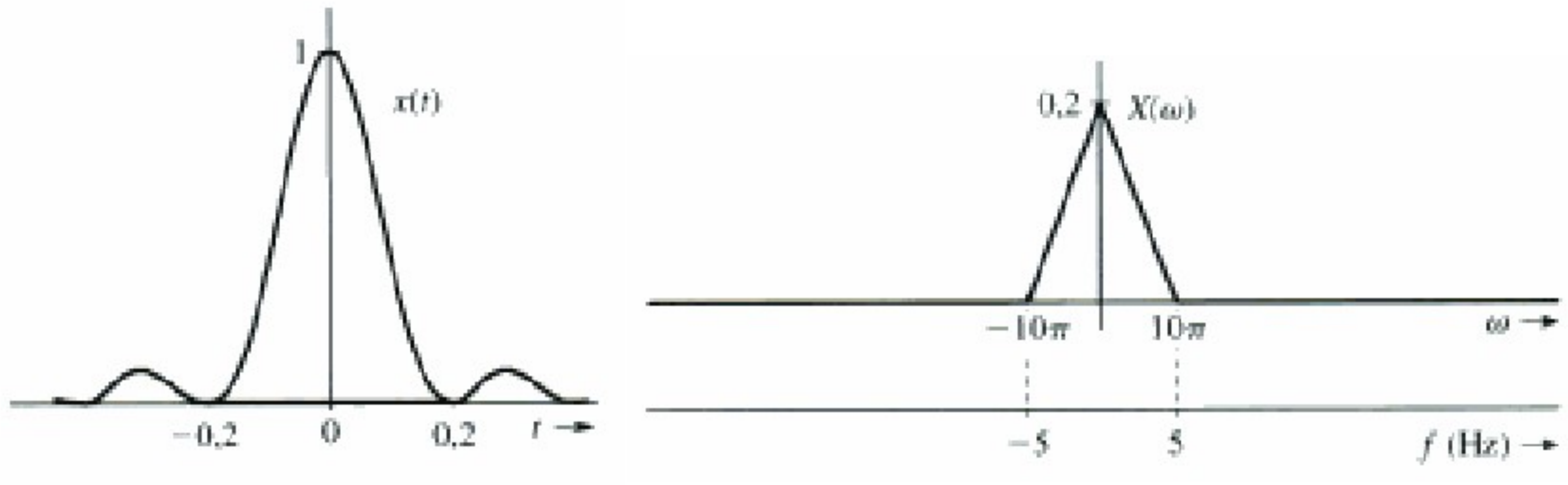
- Recuperação possível se não houver sobreposição no domínio da frequência $f_s > 2B \qquad T < \frac{1}{2B}$

# Teorema da Amostragem (v)

- A menor taxa de amostragem $f_s = 2B$ Hz necessária para recuperar o sinal original de suas amostras é a **taxa de Nyquist**
- O intervalo correspondente T = 1/2B é o **intervalo de Nyquist**
- Não é necessário tomar amostras em um intervalo uniforme

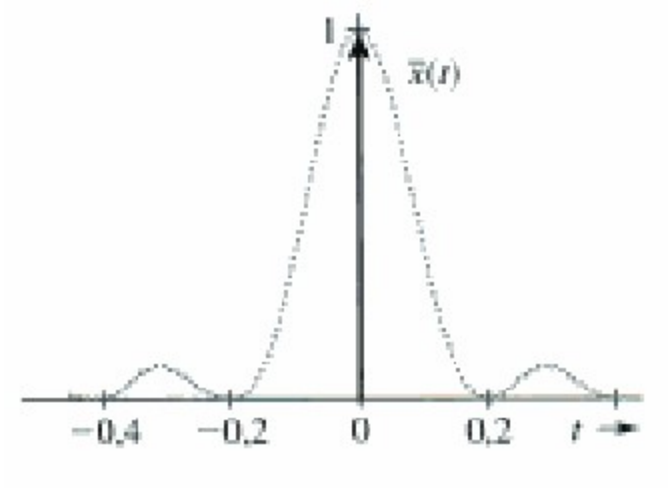
# Teorema da Amostragem (vi)

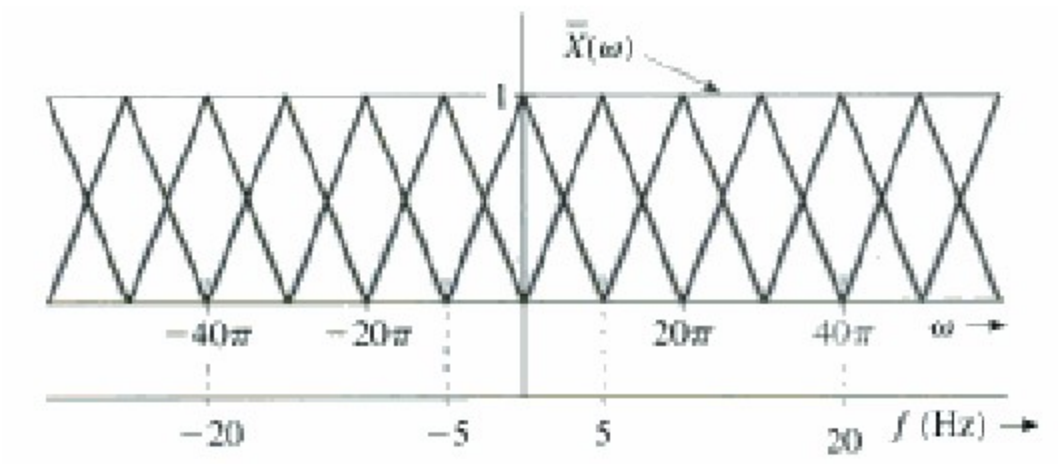
- Exemplo:
  - Considerando o sinal $x(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$ de largura 5Hz e taxa de Nyquist de 10Hz, ilustra-se amostrar o sinal na taxa de Nyquist, em uma taxa inferior e a uma superior a ela.



# Teorema da Amostragem (vii)

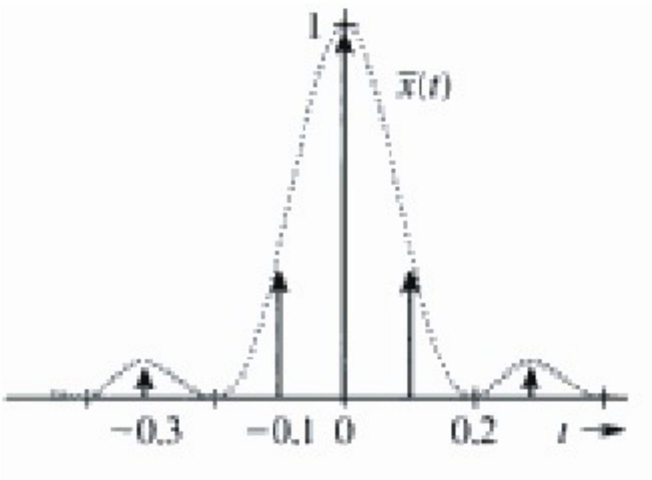
- Exemplo:
  - Subamostragem

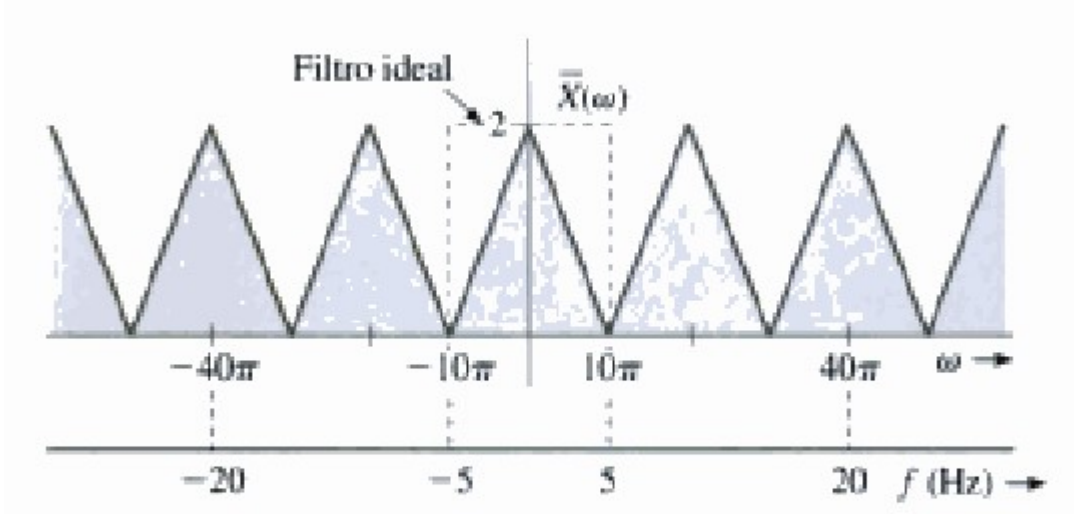


# Teorema da Amostragem (vii)

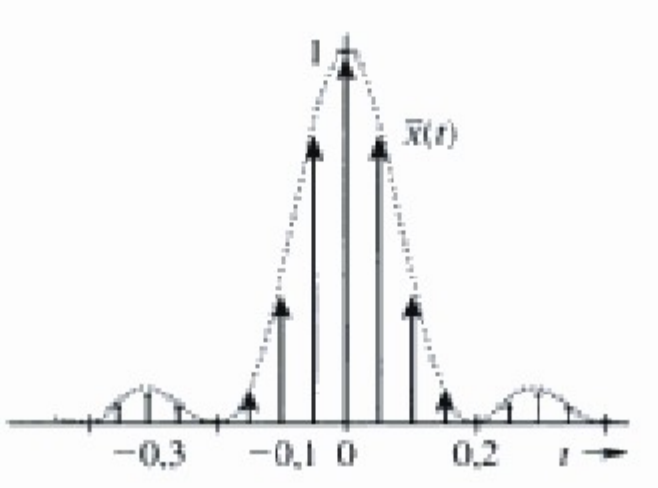
- Exemplo:
  - Taxa de Nyquist

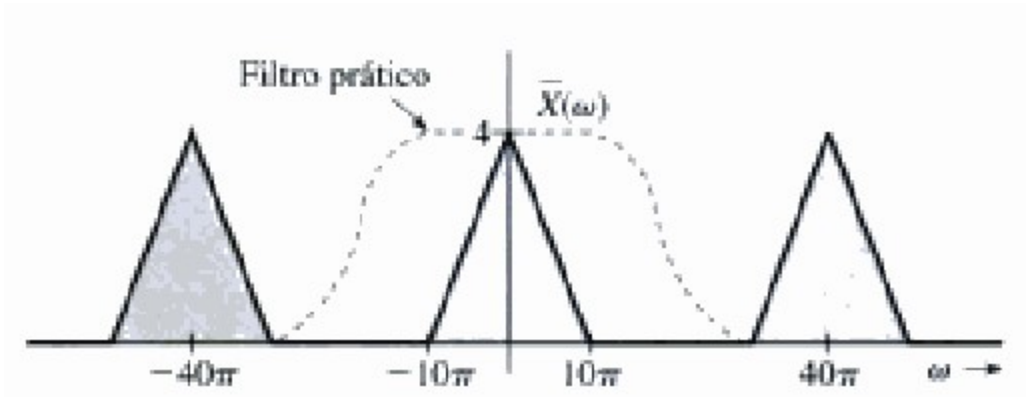


# Teorema da Amostragem (vii)

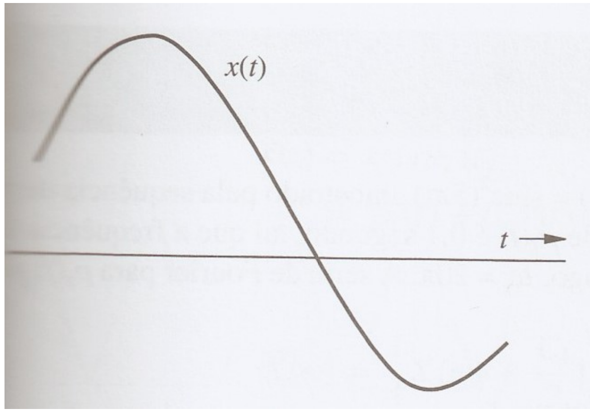
- Exemplo:
  - Superamostragem

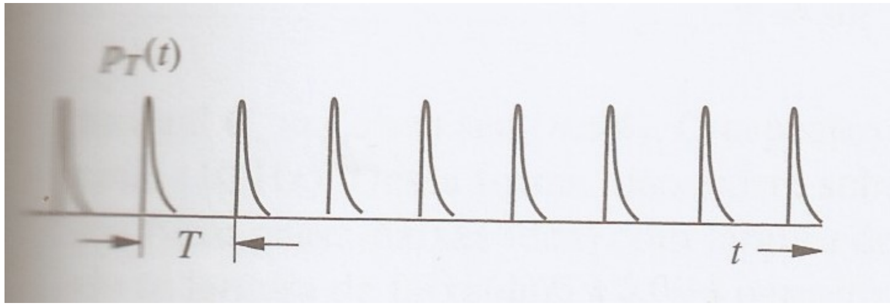


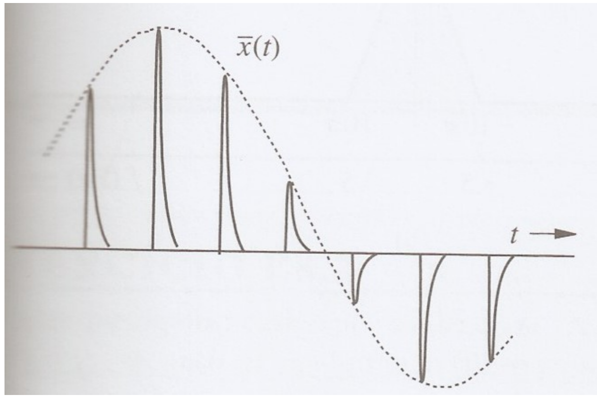



# Teorema da Amostragem (viii)

- Amostragem Prática
  - O trem de impulsos é fisicamente não realizável;
  - Emprega-se trem de pulsos de largura finita.

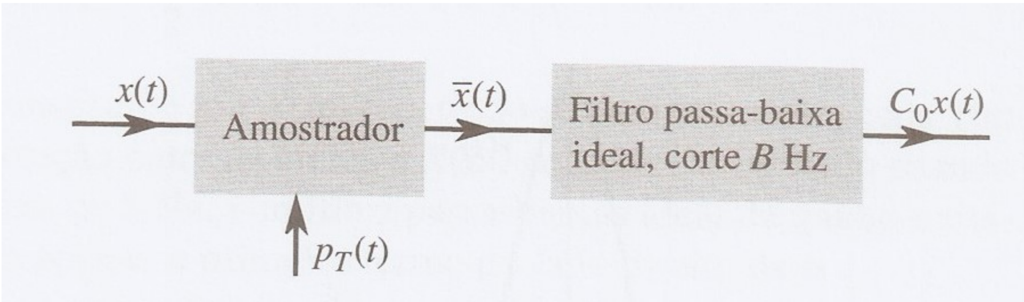


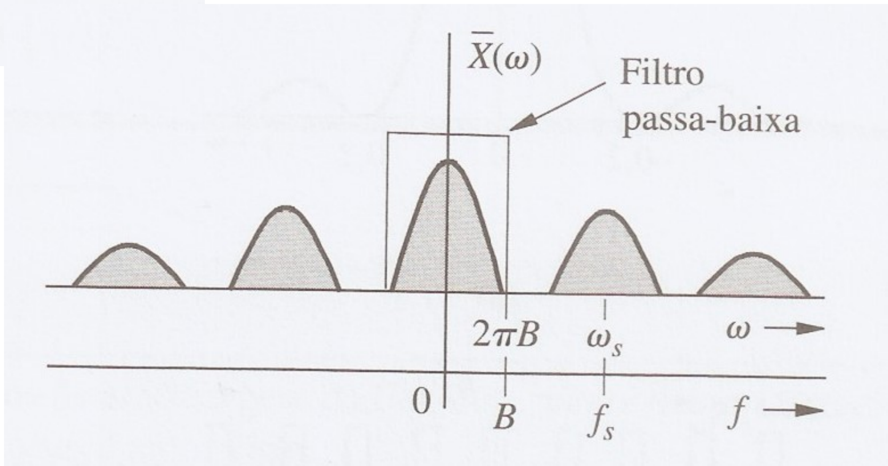



# Teorema da Amostragem (ix)

- Amostragem Prática
  - É possível recuperar o sinal a partir dessa amostragem empregando um filtro passa-baixa no qual $\omega_s > 4\pi B$.



# Teorema da Amostragem (x)

- Amostragem Prática
  - A reconstrução do sinal requer o conhecimento dos valores das amostras de Nyquist.
  - Informação embutida no sinal amostrado pois o valor do n-ésimo pulso amostrado é $x(nT)$.
  - Seja o trem de pulsos:

$$p_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

  - O sinal amostrado é descrito por:

$$\overline{x}(t) = x(t)\,p_T(t) = x(t)\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n)\right]$$

$$\overline{x}(t) = x(t)\,p_T(t) = x(t)C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x(t) \cos(n\omega_s t + \theta_n)$$

# Reconstrução do Sinal (i)

- O que é interpolação?
  - Um sinal $x(t)$ limitado pela largura banda igual a $B$ Hz é reconstruído, por interpolação, a partir de suas amostras se a taxa mínima de amostragem for $f_s = 2B$ e o período máximo de amostragem for $T_s = 1/(2B)$.
- Reconstrução é feita passando o sinal amostrado por um filtro passa-baixa ideal de ganho $T$ e largura de banda entre $B$ e $f_s$-$B$ Hz.
  - Do ponto de vista prático, a frequência adotada é $f_s/2=1/2T$ HZ ou $\pi/T$ rad/seg. Este valor permite pequenos desvios nas características do filtro ideal em ambos os lados da frequência de corte.
- Para esta escolha de frequência de corte e ganho $T$, o filtro passa-baixa ideal para a recombinação do sinal é:

$$\mathrm{H}(\omega) = T\ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi f_s}\right) = T\ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

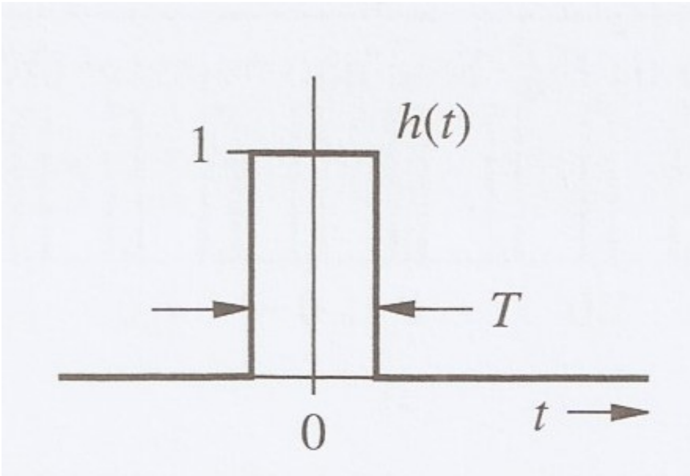
# Reconstrução do Sinal (ii)

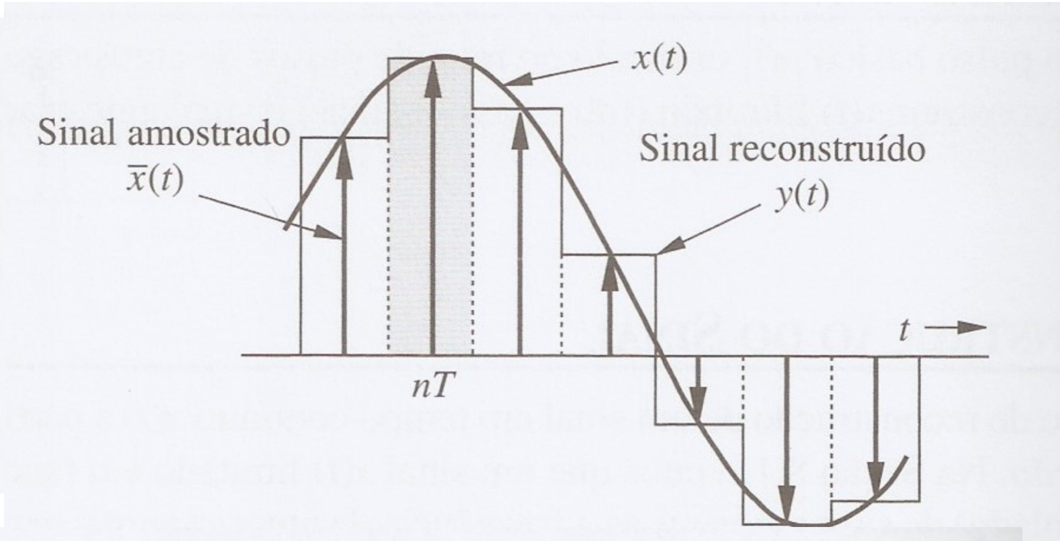
- Interpolação simples do ponto de vista do domínio do tempo.
- Um filtro passa-baixa ideal para reconstruir o sinal tem a seguinte resposta ao impulso:

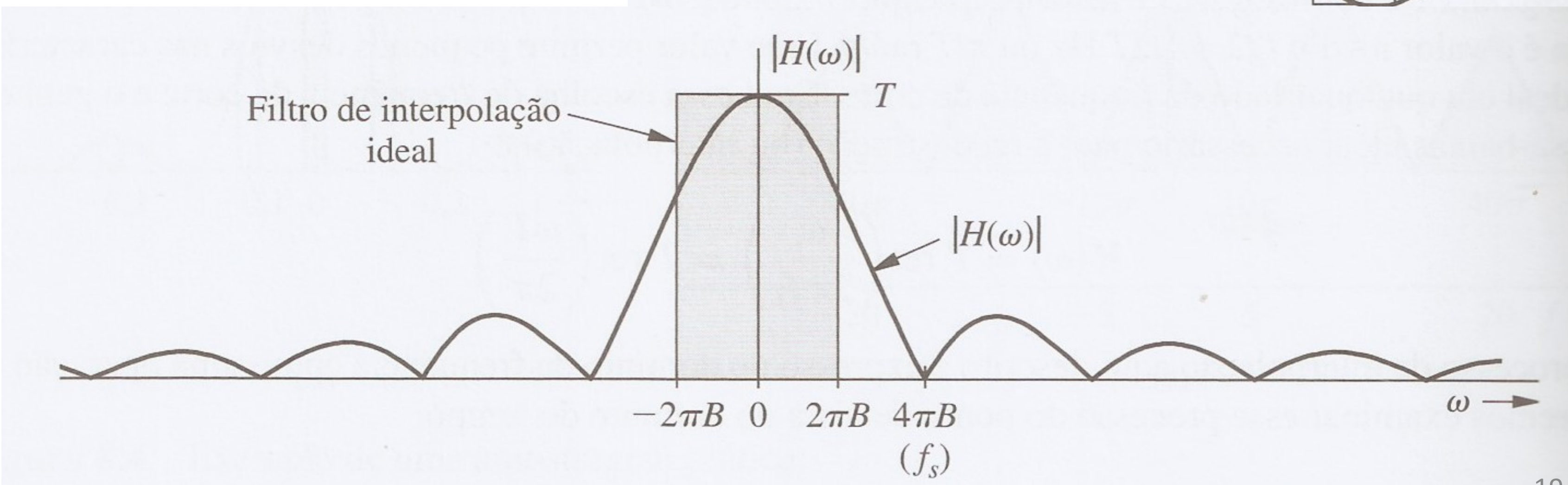
$$h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow H(\omega) = T\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

  – Esta é a resposta a uma função portal unitária expandida que é centrada na origem e tem largura *T* (intervalo de amostragem).
- A seguir é mostrada uma interpolação simples por circuito de manutenção de ordem zero (ZOH): Resposta ao impulso do circuito ZOH, sinal reconstruído por ZOH no domínio do tempo e resposta na frequência de ZOH.
  – Para isto, lembrar que $h(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt) \Leftrightarrow H(\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2W}\right)$

# Reconstrução do Sinal (iii)



# Reconstrução do Sinal (iv)

- Interpolação ideal
- Um filtro cuja resposta ao impulso, transformada inversa de Fourier a *H*(*ω*), é

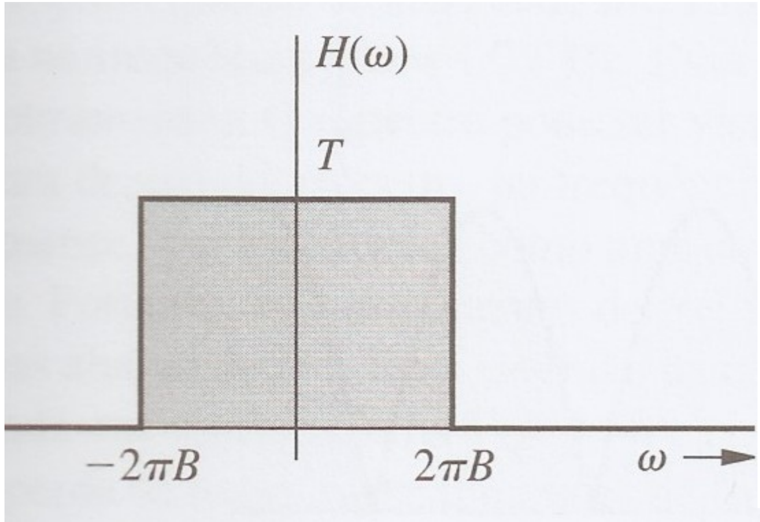
$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right),$$

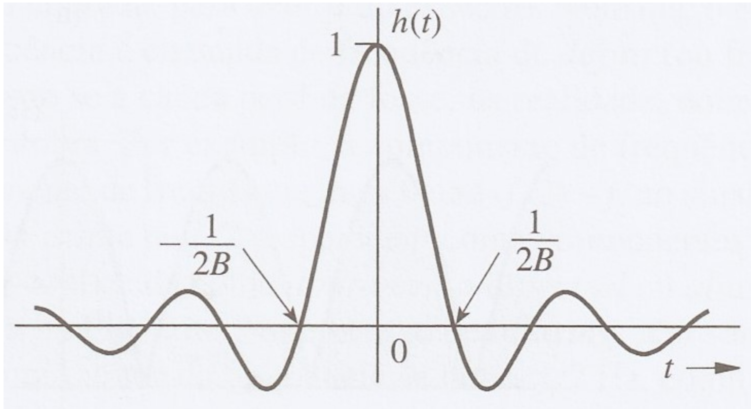
$$\text{Para} \quad T = 1/2B \quad \text{tem - se} \quad h(t) = \text{sinc}\,(2\pi Bt)$$

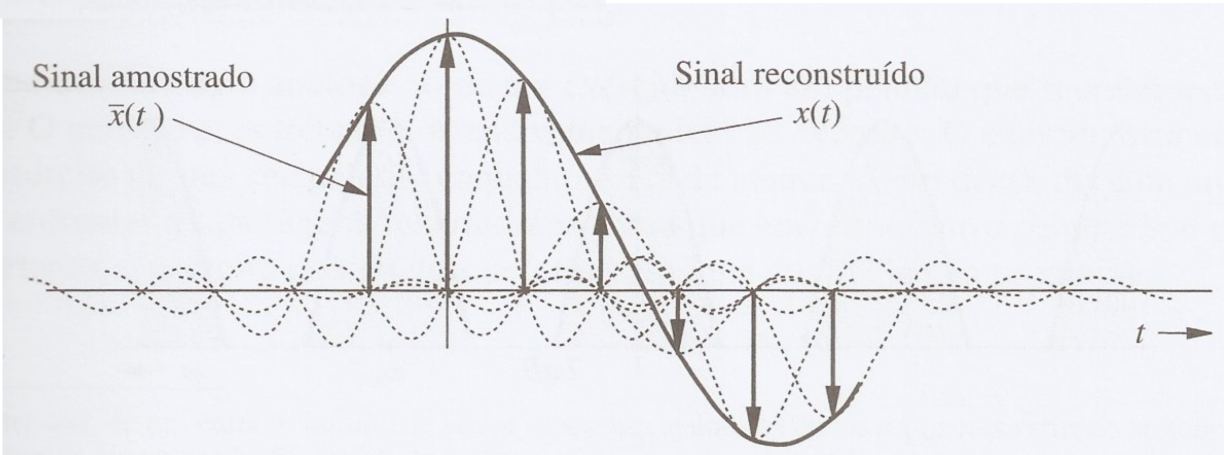
- Esta resposta é um pulso *sinc* tendo altura igual à magnitude da amostra.
- Saída:

$$x(t) = \sum_n x(nT)h(t - nT) = \sum_n x(nT)\text{sinc}\left[\frac{\pi}{\mathrm{T}}(t - nT)\right]$$

# Reconstrução do Sinal (v)



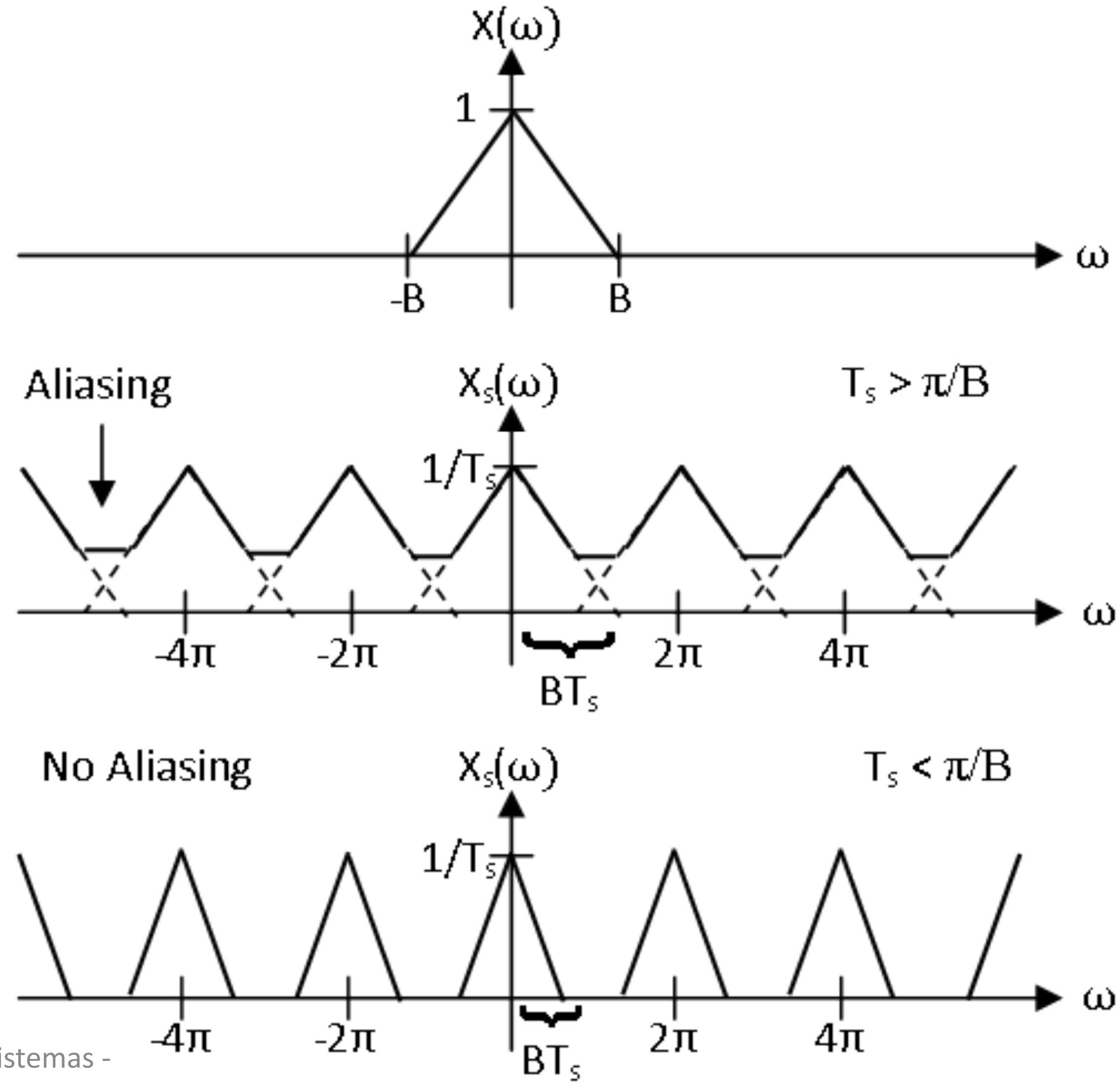



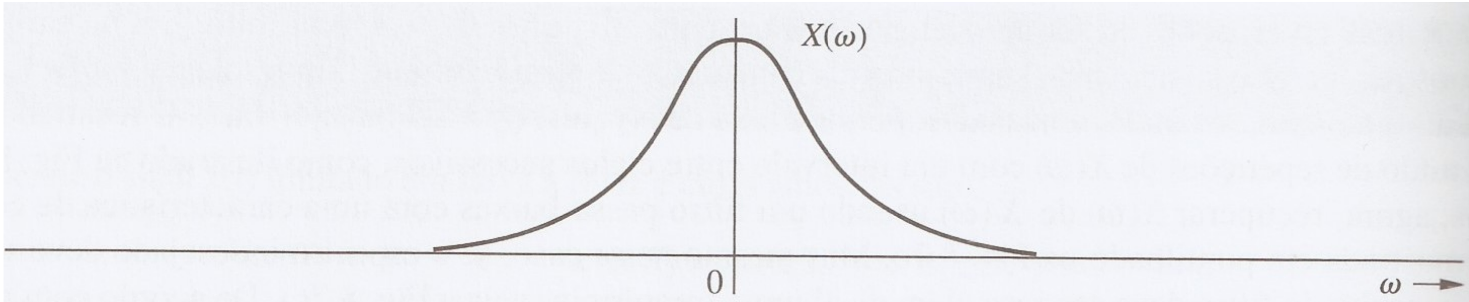
# Reconstrução do Sinal (vi)

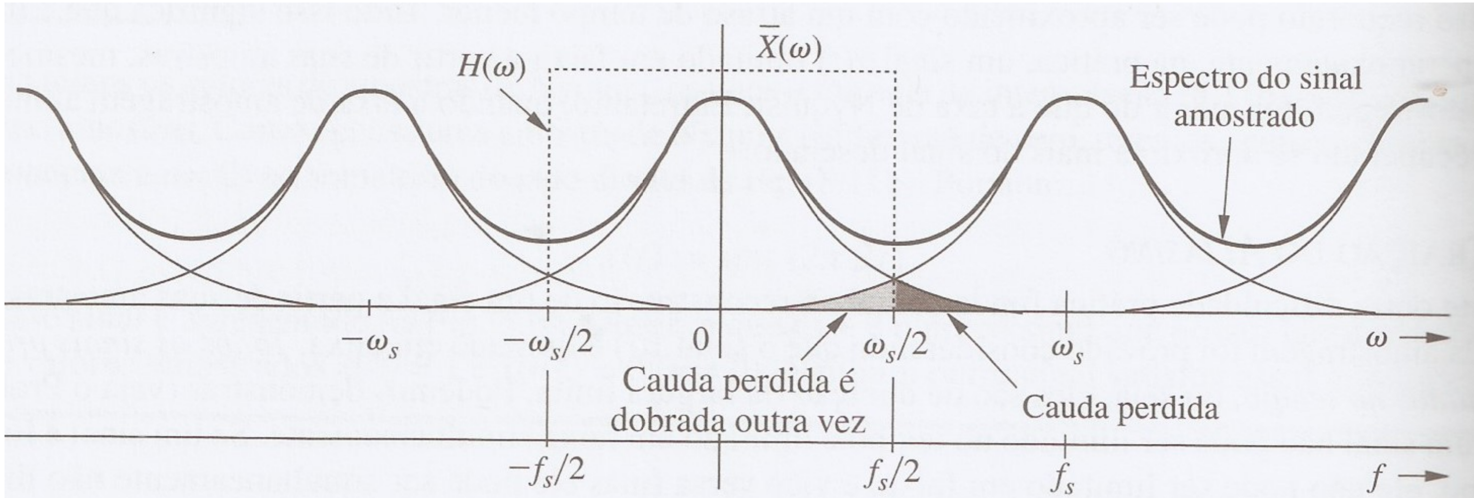
- Reconstrução do ponto de vista prático
  - Problema irreparável;
  - Sinais práticos são limitados no tempo;
  - Perda da cauda do sinal no domínio da frequência;
  - Aliasing
    - Conceito
    - Correção

# Reconstrução do Sinal (ix)

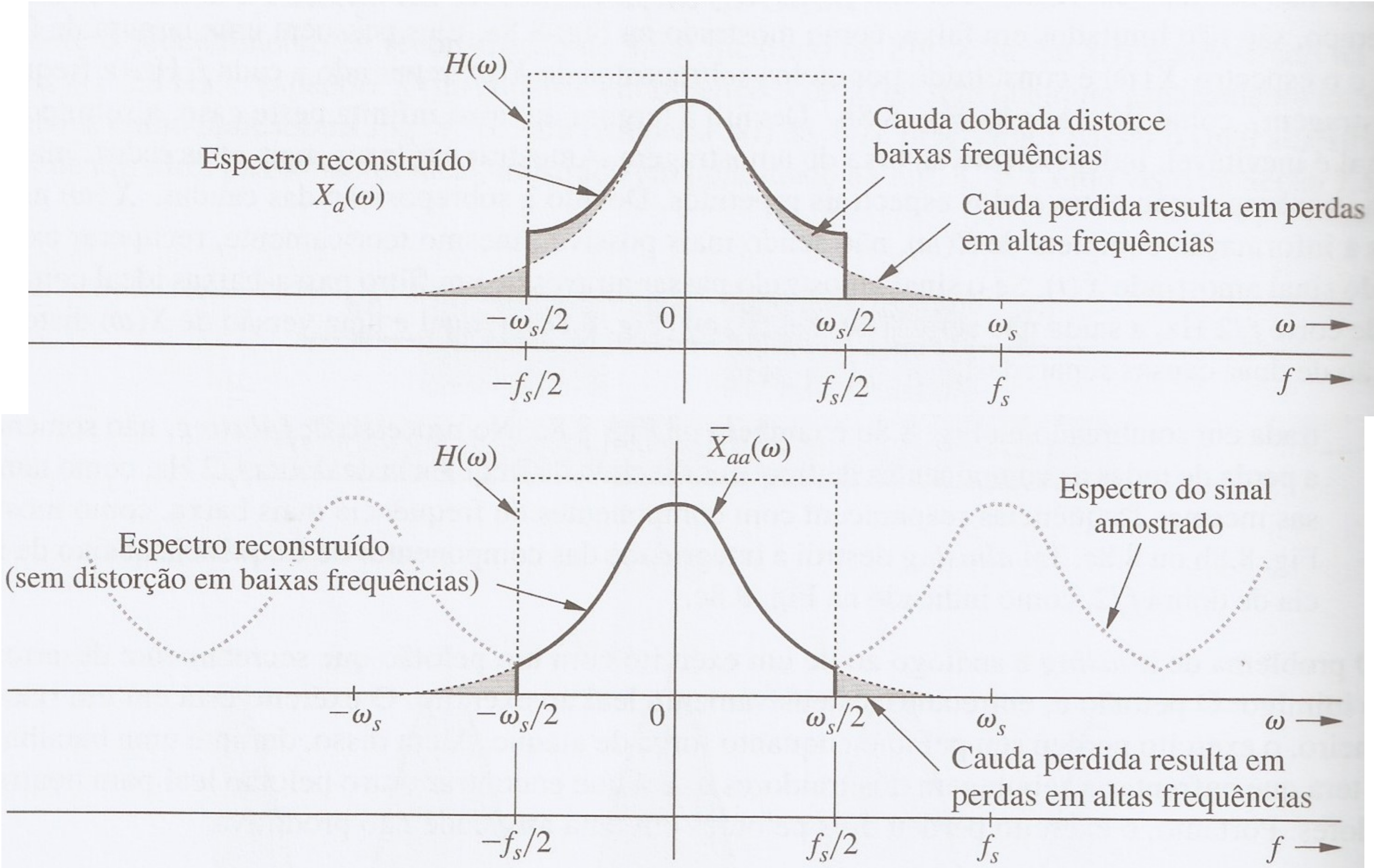


# Reconstrução do Sinal (vii)



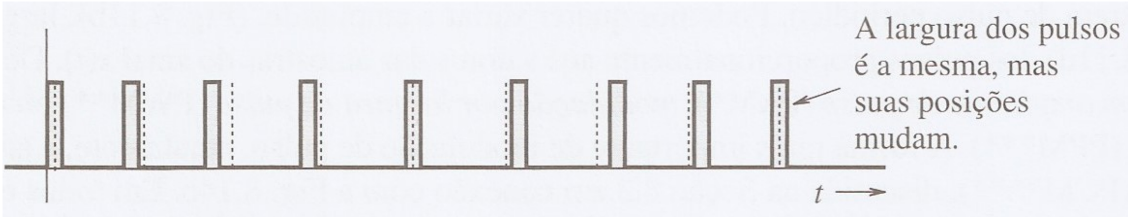
# Reconstrução do Sinal (viii)

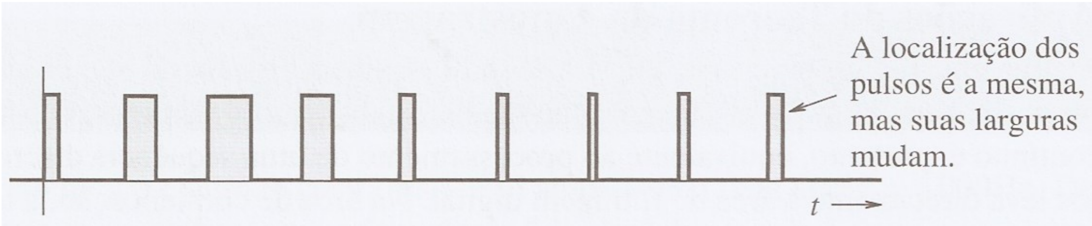


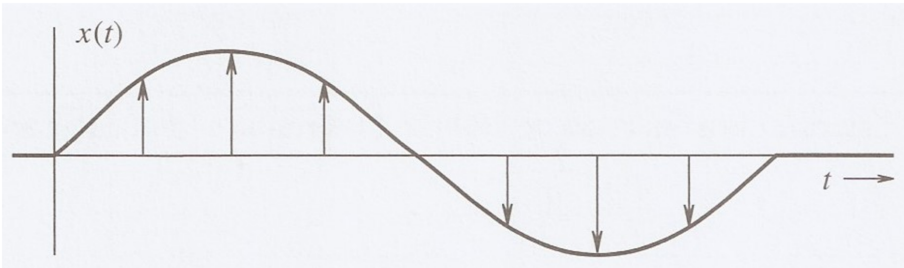
# Reconstrução do Sinal (ix)

- Aplicações do teorema da amostragem
  - Pode-se utilizar o valor das amostras para variar os parâmetros de um trem de pulsos periódico
- Amplitude - (PAM - Pulse-Amplitude Modulation)
- Largura - (PWM - Pulse-Width Modulation)
- Posição - (PPM - Pulse-Position Modulation)
- Tempo – (TDM - Time-Division Multiplexing)

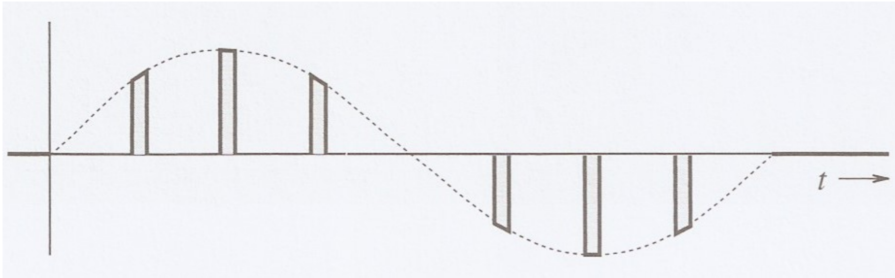
# Reconstrução do Sinal (x)

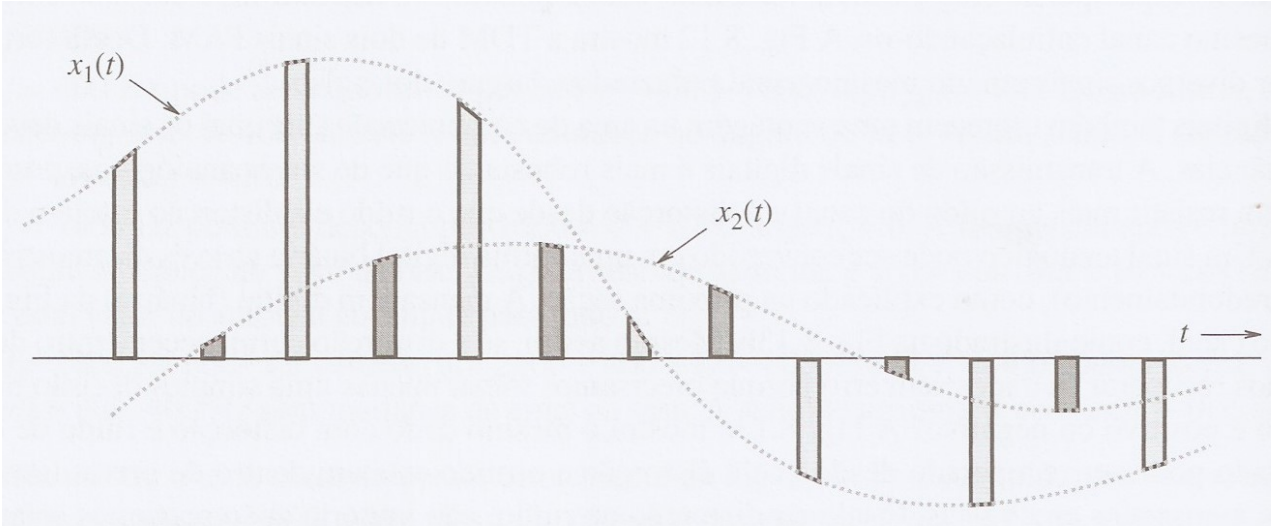


# Reconstrução do Sinal (xi)



# Exercícios Recomendados

- Propostos para o MATLAB ou SCILAB
  - Todos
- Problemas
  - 8.1-1 até 8.1-6.
  - 8.2-1 até 8.2-5.