

# ELETROSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

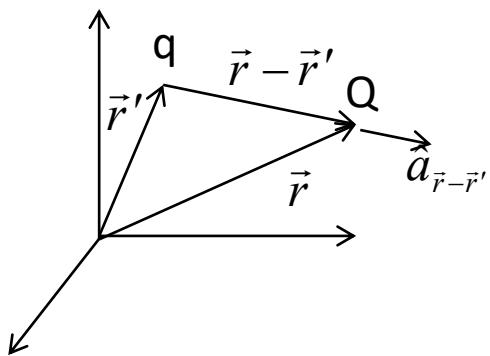
## LEI DE COULOMB

### Conhecido:

1. Havia 2 tipos de cargas elétricas
2. Cargas de mesmo tipo (sinal) se repelem e de tipos diferentes se atraem.
3. A carga em um sistema isolado se conserva.

### Experimentos:

A Força na carga Q é:

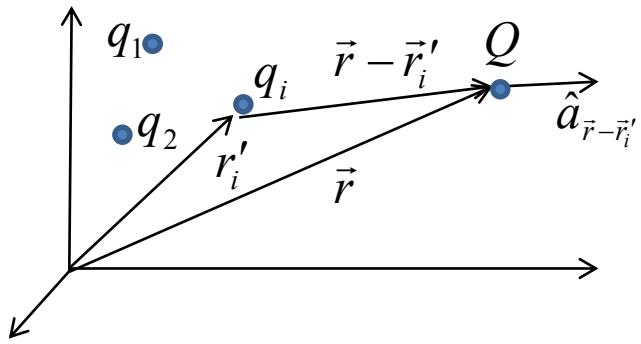


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

1. proporcional às cargas
2. inversamente proporcional ao quadrado da distância entre cargas
3. na direção entre as cargas
4. permissividade do vácuo:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

## Superposição:



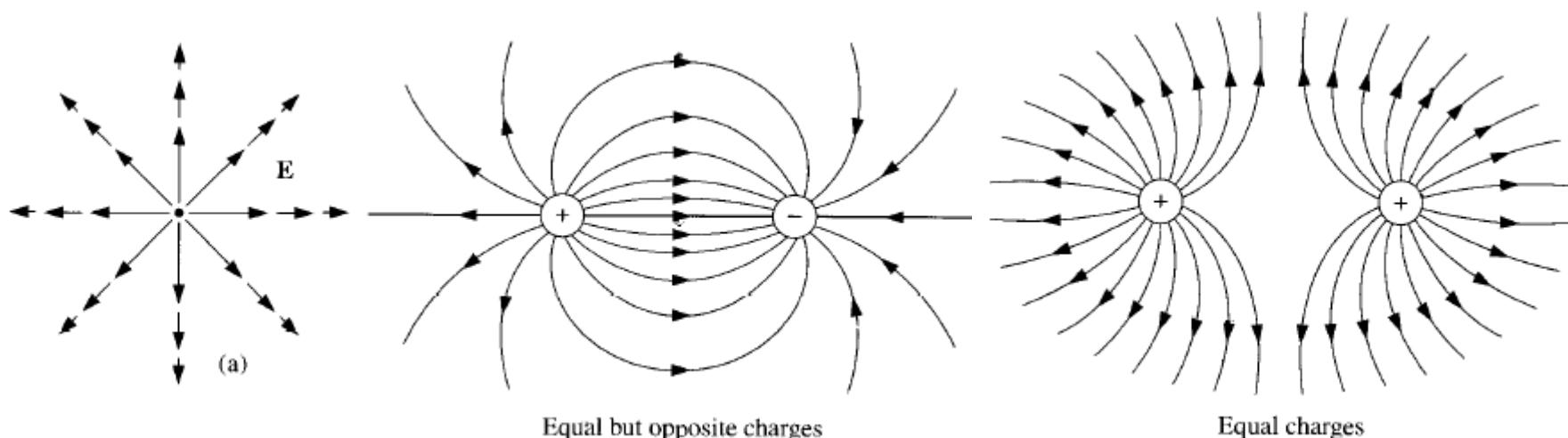
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \hat{a}_{\vec{r} - \vec{r}_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 Q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \hat{a}_{\vec{r} - \vec{r}_2} + \dots$$

$\rightarrow$

$\vec{F} = Q \vec{E}(\vec{r})$

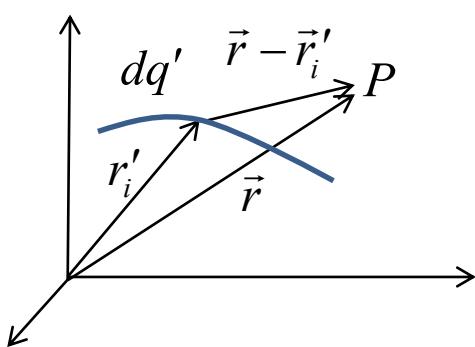
**Campo elétrico devido a uma distribuição discreta de cargas:**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{a}_{\vec{r} - \vec{r}_i}$$



## Distribuição linear de cargas:

$\lambda$ : densidade linear de carga (C/m)



$$\lambda(\vec{r}') = \lim_{\Delta l' \rightarrow 0} \frac{\Delta q'}{\Delta l'}$$

$$dq'(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl'$$

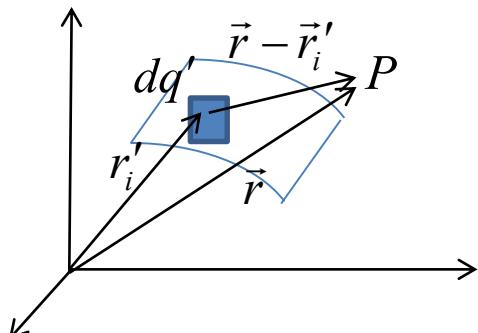
$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dl'$$

$r'$

## Distribuição superficial de cargas:

$\sigma$ : densidade superficial de carga (C/m<sup>2</sup>)



$$\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \frac{\Delta q'}{\Delta s'}$$

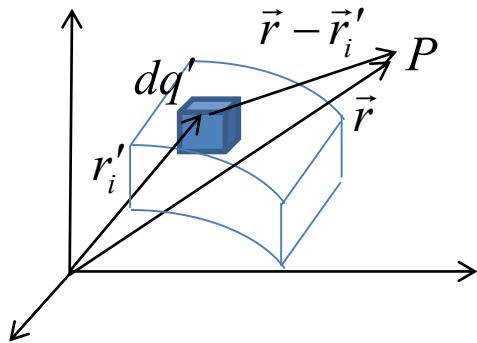
$$dq'(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') ds'$$

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} ds'$$

## Distribuição volumétrica de cargas:

$\rho$ : densidade volumétrica de carga ( $C/m^3$ )



$$\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v'}$$

$$dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dv'$$

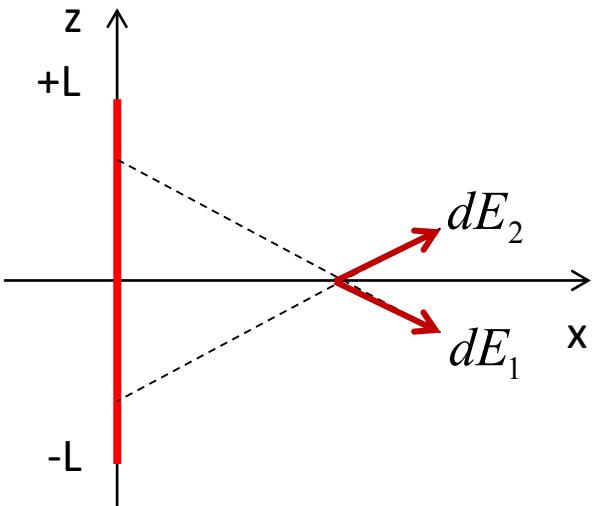


$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dv'}$$

## Exemplo:

Densidade linear de carga constante ( $\lambda$ ) em  $-L < z < +L$ :



No eixo x:

Simetria:

$$\vec{E}(x\hat{a}_x) = E_x(x)\hat{a}_x$$

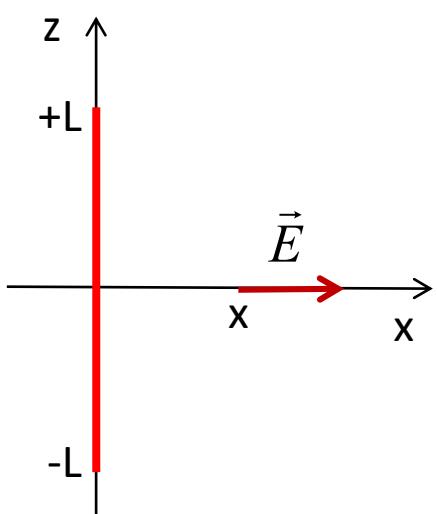
$$\vec{r} = x\hat{a}_x \quad \vec{r}' = z'\hat{a}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + z'^2} \quad \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{x\hat{a}_x - z'\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + z'^2}}$$

$$\vec{E}(x\hat{a}_x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dz' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{x\hat{a}_x - z'\hat{a}_z}{[x^2 + z'^2]^{3/2}} dz' = \frac{\lambda x\hat{a}_x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{1}{[x^2 + z'^2]^{3/2}} dz'$$

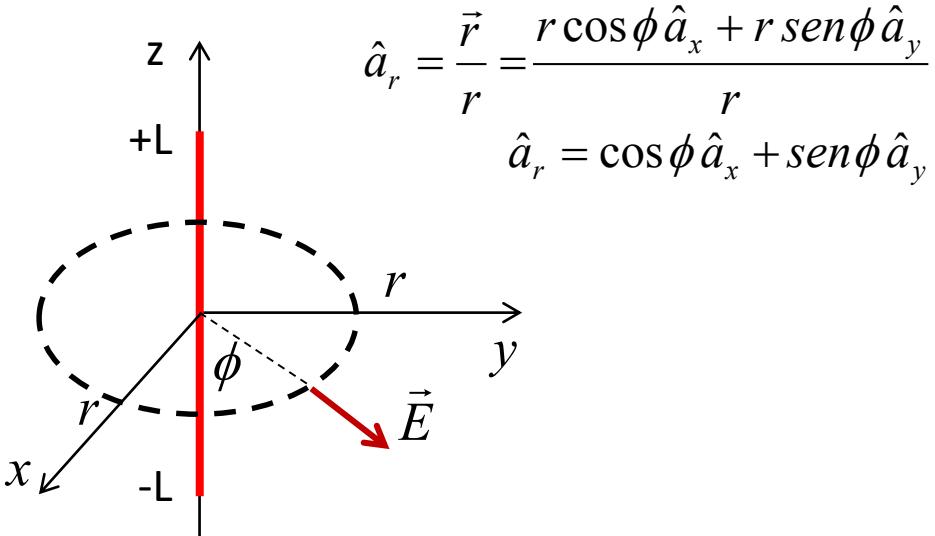
$$\int \frac{dz'}{[a^2 + z'^2]^{3/2}} = \frac{z'}{a^2 \sqrt{a^2 + z'^2}} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(x\hat{a}_x) = \left. \frac{\lambda x\hat{a}_x}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{x^2 \sqrt{x^2 + z'^2}} \right|_{-L}^{+L} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{x\sqrt{x^2 + L^2}} \hat{a}_x$$

No eixo dos x:



$$\vec{E}(x\hat{a}_x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{x\sqrt{x^2 + L^2}} \hat{a}_x$$

Para um ponto no plano xy:  $\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{r\sqrt{r^2 + L^2}} \hat{a}_r$$

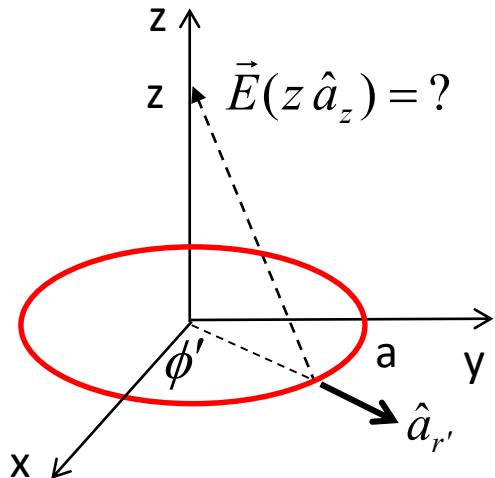
Limites:

$$1) \quad r \gg L \quad \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{r^2} \hat{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

$$2) \quad L \gg r \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$$

## Exemplo:

Campo elétrico no eixo de anel de raio  $a$ , uniformemente carregado ( $\lambda$ ).



$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = a \hat{a}_{r'} = a \cos\phi' \hat{a}_x + a \sin\phi' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{a}_z - a \cos\phi' \hat{a}_x - a \sin\phi' \hat{a}_y$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{z \hat{a}_z - a \cos\phi' \hat{a}_x - a \sin\phi' \hat{a}_y}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

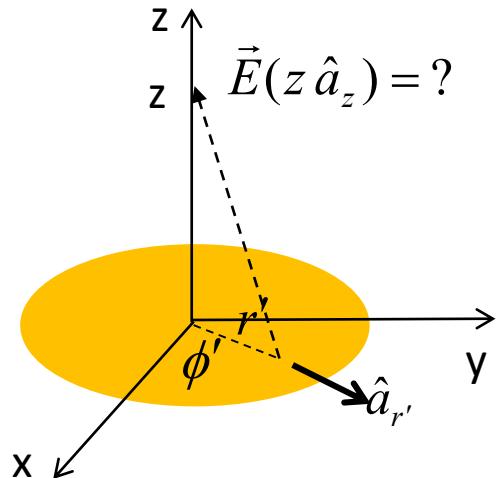
$$dl' = a d\phi'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dl'$$

$$R: \quad \vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\lambda a z}{2 \epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

## Exemplo:

Campo elétrico no eixo de disco de raio  $a$ , uniformemente carregado ( $\sigma$ ).



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} ds'$$

$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = r' \hat{a}_{r'} = r' \cos\phi' \hat{a}_x + r' \sin\phi' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{a}_z - r' \cos\phi' \hat{a}_x - r' \sin\phi' \hat{a}_y$$

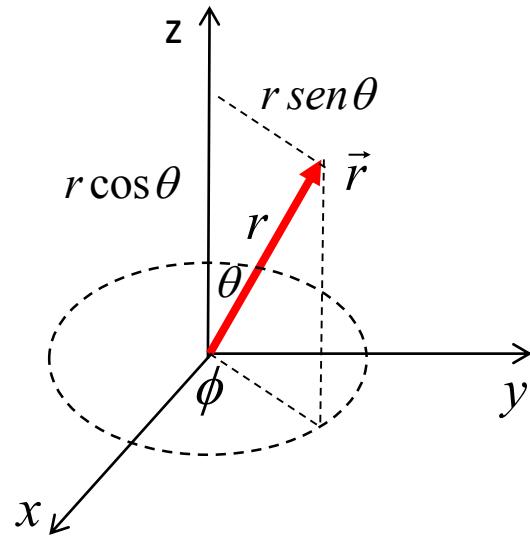
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{z \hat{a}_z - r' \cos\phi' \hat{a}_x - r' \sin\phi' \hat{a}_y}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$ds' = r' d\phi' dr'$$

$$R: \quad \vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{a}_z$$

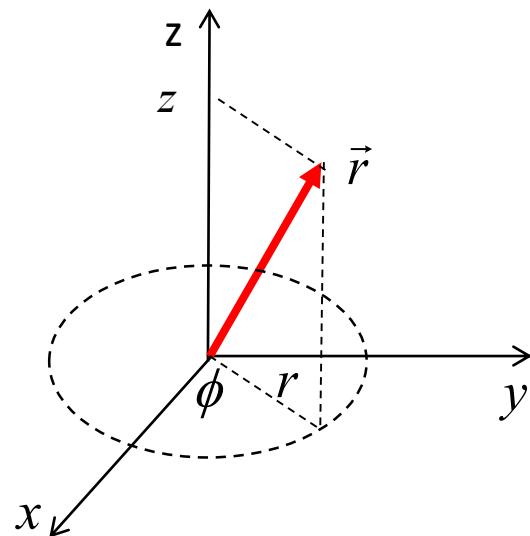
## Coordenadas esféricas:



$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{a}_x + r \sin \theta \sin \phi \hat{a}_y + r \cos \theta \hat{a}_z$$

$$dv = r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

## Coordenadas cilíndricas:

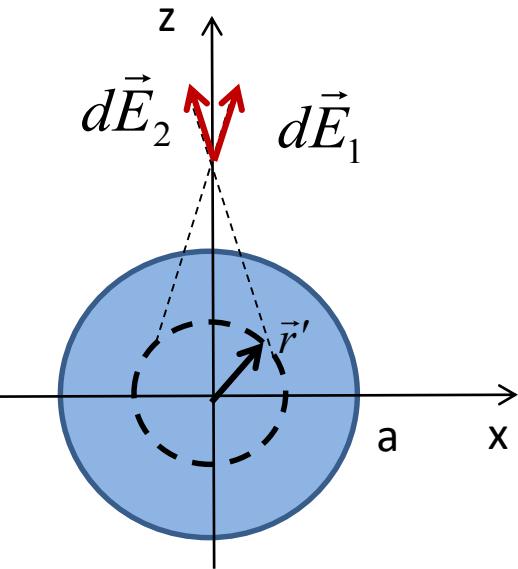


$$\vec{r} = r \cos \phi \hat{a}_x + r \sin \phi \hat{a}_y + z \hat{a}_z$$

$$dv = r d\phi dr dz$$

## Exemplo:

Densidade volumétrica de carga constante ( $\rho$ ) em  $r < a$ :



Simetria: campo radial independente de  $\theta$  e  $\phi$ :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

No eixo z:  $\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z$

$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = r' \hat{a}_{r'} = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{a}_x + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{a}_y + r' \cos \theta' \hat{a}_z$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{a}_x - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{a}_y + (z - r' \cos \theta') \hat{a}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta'} \quad dv' = r'^2 \sin \theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z \hat{a}_z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{-r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{a}_x - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{a}_y + (z - r' \cos \theta') \hat{a}_z}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{3/2}} r'^2 \sin \theta' d\phi' d\theta' dr' \\ &= \frac{\rho \hat{a}_z}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos \theta')}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{3/2}} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr' \end{aligned}$$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho \hat{a}_z}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos \theta')}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{3/2}} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr'$$

Substituição:  $u = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta'$

$$du = 2zr' \sin \theta' d\theta' \quad r' \cos \theta' = \frac{z^2 + r'^2 - u}{2z}$$

$$r' \sin \theta' d\theta' = \frac{du}{2z}$$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho \hat{a}_z}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \left( z - \frac{z^2 + r'^2 - u}{2z} \right) \frac{1}{u^{3/2}} r' \frac{du}{2z} dr' = \frac{\rho \hat{a}_z}{8z^2 \epsilon_0} \int_0^a \int_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} (z^2 - r'^2 + u) \frac{1}{u^{3/2}} r' du dr' =$$

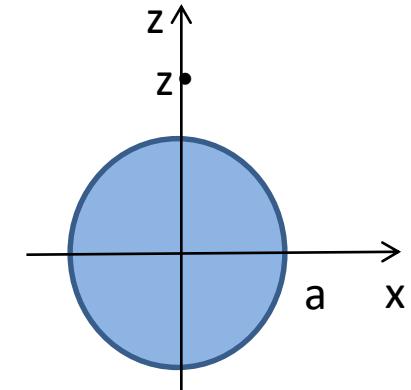
$$\begin{aligned} \vec{E}(z \hat{a}_z) &= \frac{\rho \hat{a}_z}{8z^2 \epsilon_0} \int_0^a \int_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \left( \frac{1}{u^{1/2}} + \frac{z^2 - r'^2}{u^{3/2}} \right) du r' dr' = \frac{\rho \hat{a}_z}{8z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left( 2u^{1/2} - 2 \frac{z^2 - r'^2}{u^{1/2}} \right) \Big|_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} r' dr' = \\ &= \frac{\rho \hat{a}_z}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a \frac{u - (z^2 - r'^2)}{u^{1/2}} \Big|_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} r' dr' = \frac{\rho \hat{a}_z}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left[ \frac{(z+r')^2 - (z^2 - r'^2)}{z+r'} - \frac{(z-r')^2 - (z^2 - r'^2)}{|z-r'|} \right] r' dr' = \\ &= \frac{\rho \hat{a}_z}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left[ \frac{2zr' + 2r'^2}{z+r'} - \frac{-2zr' + 2r'^2}{|z-r'|} \right] r' dr' = \frac{\rho \hat{a}_z}{4z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left[ 2r' - 2r' \frac{r'-z}{|z-r'|} \right] r' dr' = \\ &= \frac{\rho \hat{a}_z}{2z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left[ 1 - \frac{r'-z}{|z-r'|} \right] r'^2 dr' = \frac{\rho \hat{a}_z}{2z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left[ 1 + \frac{z-r'}{|z-r'|} \right] r'^2 dr' \end{aligned}$$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho \hat{a}_z}{2z^2 \epsilon_0} \int_0^a \left[ 1 + \frac{z - r'}{|z - r'|} \right] r'^2 dr'$$

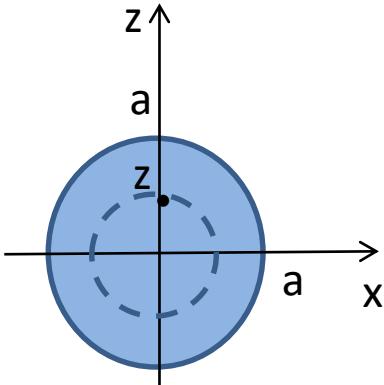
$$\begin{cases} \bullet \text{ Se } z > r': \left[ 1 + \frac{z - r'}{|z - r'|} \right] = \left[ 1 + \frac{z - r'}{z - r'} \right] = [1+1] = 2 \\ \bullet \text{ Se } z < r': \left[ 1 + \frac{z - r'}{|z - r'|} \right] = \left[ 1 + \frac{z - r'}{r' - z} \right] = [1-1] = 0 \end{cases}$$

**1** Ponto exterior à esfera ( $z > a$ ):  $z > a \mapsto z > r'$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho \hat{a}_z}{2z^2 \epsilon_0} \int_0^a [2] r'^2 dr' = \frac{\rho a^3}{3z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z = \frac{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho}{4\pi z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z = \frac{Q}{4\pi z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z$$

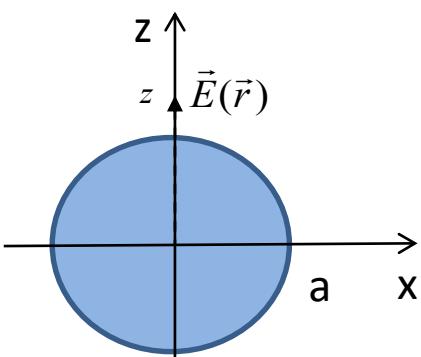


**2** Ponto interior à esfera ( $z < a$ ):



$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho \hat{a}_z}{2z^2 \epsilon_0} \left\{ \underbrace{\int_0^z [2] r'^2 dr'}_{z > r'} + \underbrace{\int_z^a [0] r'^2 dr'}_{z < r'} \right\}$$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho z^3}{3z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z = \frac{\frac{4}{3} \pi z^3 \rho}{4\pi z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z = \frac{Q(z)}{4\pi z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z$$



**1** Ponto de observação no eixo dos z:

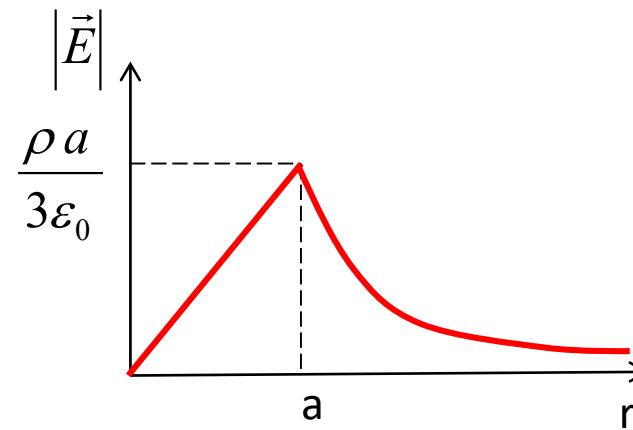
Ponto exterior à esfera ( $z > a$ ):  $\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho a^3}{3z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z = \frac{Q}{4\pi z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z$

Ponto interior à esfera ( $z < a$ ):  $\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\rho z}{3\epsilon_0} \hat{a}_z = \frac{Q(z)}{4\pi z^2 \epsilon_0} \hat{a}_z$

**2** Generalizando para uma direção qualquer:

Ponto exterior à esfera ( $r > a$ ):  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{a}_r$

Ponto interior à esfera ( $r < a$ ):  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{a}_r = \frac{Q(r)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{a}_r$



Mesmo campo como se toda a carga interior ao ponto de observação estivesse concentrada na origem.

## **Leitura:**

- Revisão de Cálculo Vetorial
- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seção 2.1

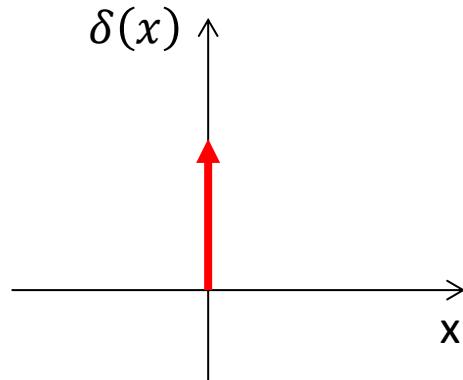
## **Exercícios:**

- Problemas 2.4, 2.5, 2.6, Sec. 2.1, pg. 46  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# ELETROSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

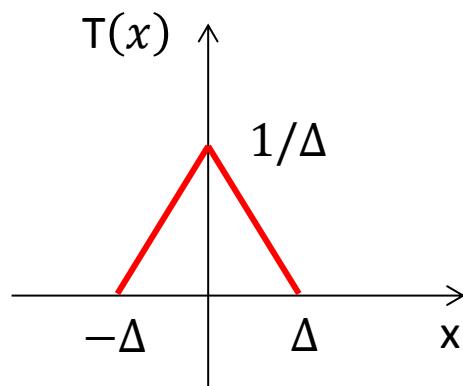
## LEI DE GAUSS

**Impulso (Delta de Dirac):**  $\delta(x)$



1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a)$



$$\delta(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} T(x)$$

# ELETROSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## LEI DE GAUSS

**Impulso tridimensional:**

$$1. \quad \delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

$$2. \quad \int_{\text{all space}} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1.$$

$$3. \quad \int_{\text{all space}} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\tau = f(\mathbf{a}).$$

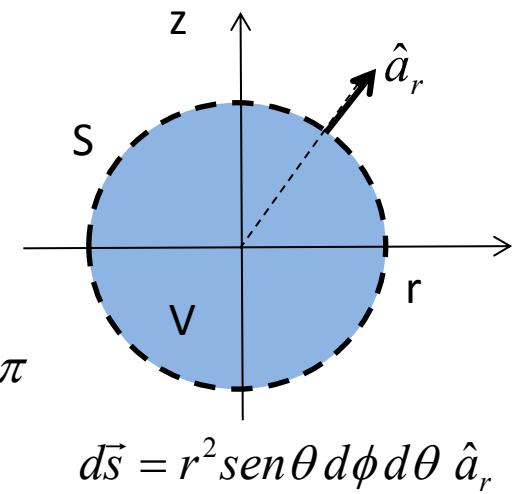
$$\nabla \bullet \vec{v} = \nabla \bullet \left( \frac{\hat{a}_r}{r^2} \right) = ?$$

$$1. \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

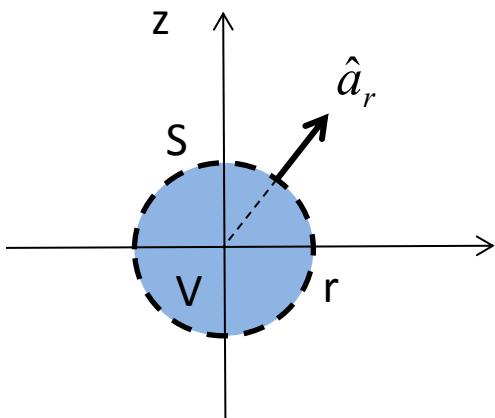
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0. \quad r \neq 0$$

$$2. \quad \iiint_V \nabla \bullet \vec{v} d\tau = \iint_S \left( \frac{\hat{a}_r}{r^2} \right) \bullet d\vec{s} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{\hat{a}_r}{r^2} \right) \bullet \left( r^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{a}_r \right) = 4\pi$$

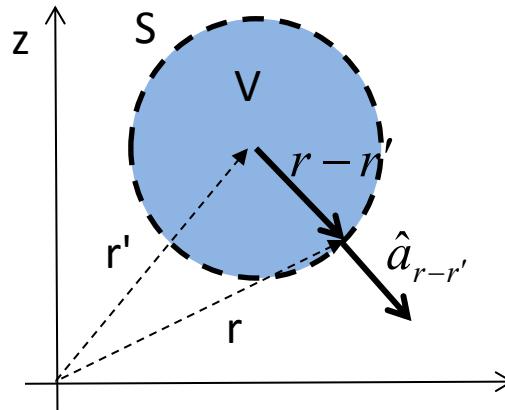
→  $\nabla \bullet \vec{v} = \nabla \bullet \left( \frac{\hat{a}_r}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$



$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{a}_r$$



$$\nabla \bullet \vec{v} = \nabla \bullet \left( \frac{\hat{a}_r}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$



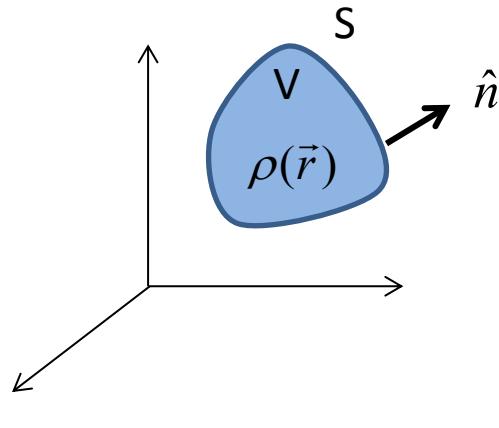
$$\nabla \bullet \left( \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|r-r'|^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \vec{E} &= ? & \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(r') \hat{a}_{r-r'}}{|r-r'|^2} dv' \\ \nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \bullet \iiint_{V'} \rho(r') \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|r-r'|^2} dv' & &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \nabla \bullet \left( \rho(r') \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|r-r'|^2} \right) dv' \\ \nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \rho(r') \nabla \bullet \left( \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|r-r'|^2} \right) dv' & &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \rho(r') \left[ 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \right] dv' \end{aligned}$$



$$\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Lei de Gauss

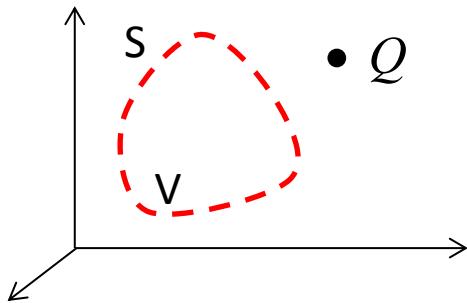


Integrando a Lei de Gauss na forma diferencial em um volume  $V$ , limitado pela superfície  $S$ :

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) dv = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dv$$

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

Lei de Gauss

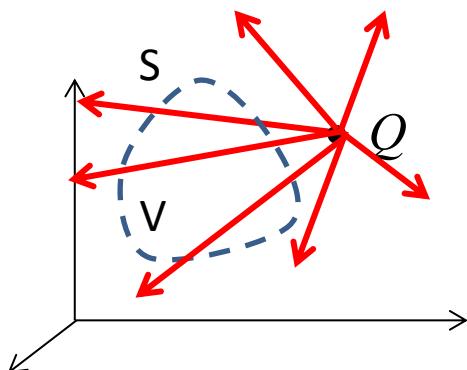


● E se não há cargas internas no volume  $V$ ?

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = 0$$

As cargas elétricas externas ao volume  $V$  não geram campo na superfície  $S$ ?

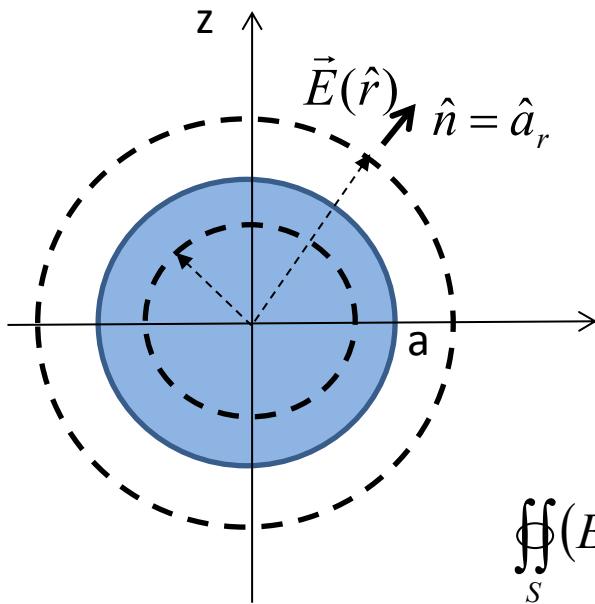
NÃO!



A integral do campo elétrico gerado por cargas elétricas externas na superfície  $S$  é nula.

## Exemplo: Simetria Esférica:

Densidade volumétrica de carga constante ( $\rho$ ) em  $r < a$ :



Simetria: campo radial independente de  $\theta$  ou  $\phi$ :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{a}_r$$

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \oint_S (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

$$\text{Superfície Gaussiana esférica: } d\vec{s} = r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, \hat{a}_r$$

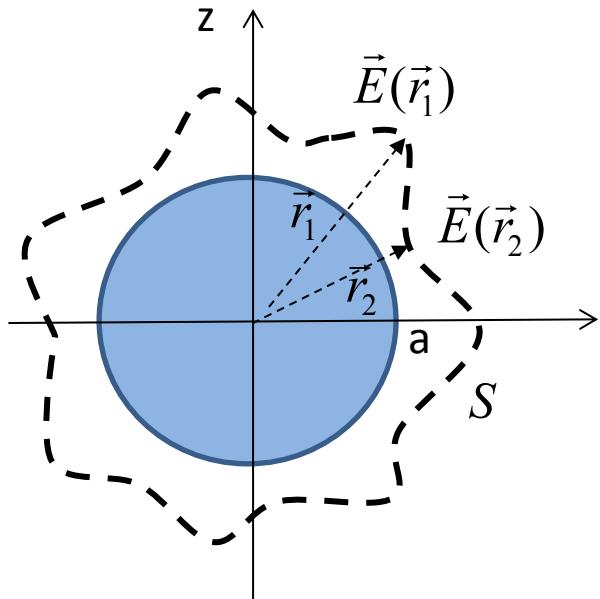
$$\oint_S (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet (r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, \hat{a}_r) = E_r(r) r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\phi \, d\theta = 4\pi r^2 E_r(r)$$

a) Ponto interno:  $r < a$ :

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad \rightarrow \quad E_r(r) = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}$$

b) Ponto externo:  $r > a$ :

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \quad \rightarrow \quad E_r(r) = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$



A Lei de Gauss é válida para uma superfície S qualquer?

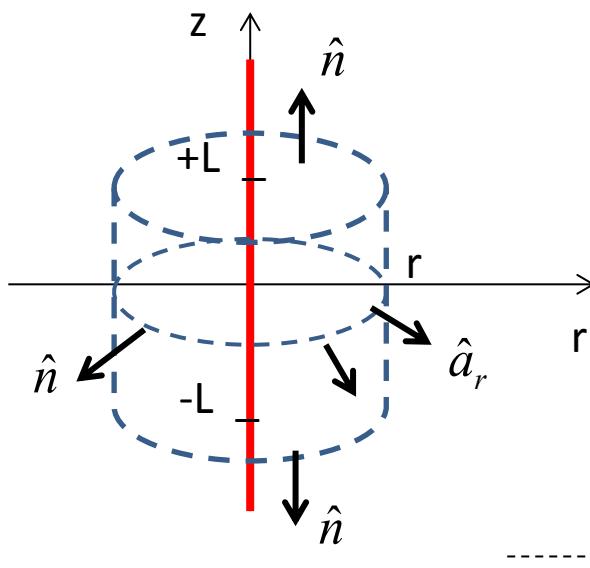
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

Rsp: SIM, mas o campo não é constante em S!

Exemplo: Simetria Cilíndrica:

Densidade linear de carga constante ( $\lambda$ ) em:  $-\infty < z < \infty$

Simetria: campo radial independente de  $z$  ou  $\phi$ :  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$



$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{a}_r$$

$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \iint_S (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

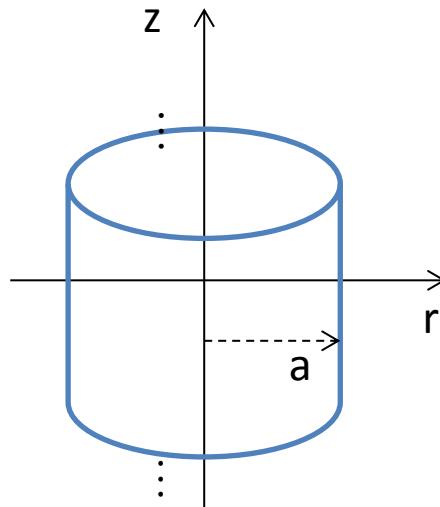
Superfície Gaussiana cilíndrica:

$$\begin{aligned} \iint_S (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet d\vec{s} &= \iint_{topo} (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet (\hat{a}_z r d\phi dr) + \iint_{base} (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet (-\hat{a}_z r d\phi dr) + \iint_{lateral} (E_r(r) \hat{a}_r) \bullet (\hat{a}_r r d\phi dz) \\ &= \int_{-L}^{+L} \int_0^{2\pi} E_r(r) r d\phi dz = 2\pi r (2L) E_r(r) \end{aligned}$$

$$2\pi r (2L) E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} 2L \lambda \quad \rightarrow \quad E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Exemplo:

Longo cilindro com densidade volumétrica de carga não uniforme:  $\rho = kr$   
Campo no interior do cilindro?



$$R: E_r(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} r^2 \hat{a}_r$$

## Exemplo: Simetria Planar:

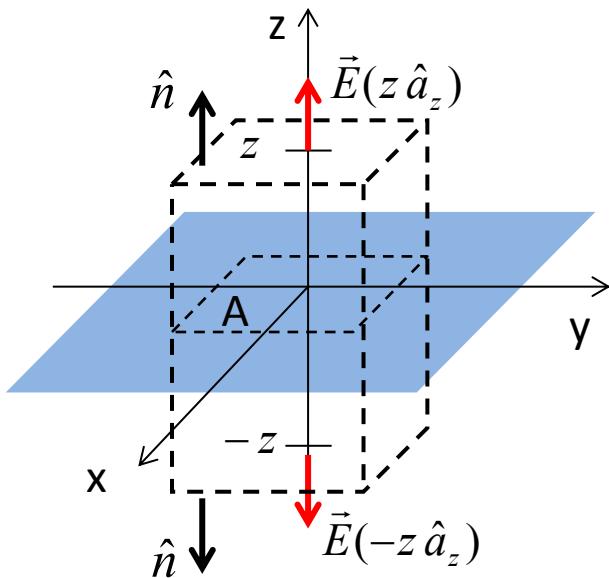
Densidade superficial de carga constante ( $\sigma$ ) em  $z=0$ :

Simetria: campo vertical independente de  $x$  ou  $y$ :  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

Seja  $z > 0$ :

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z$$

$$\vec{E}(-z \hat{a}_z) = -E_z(z) \hat{a}_z$$



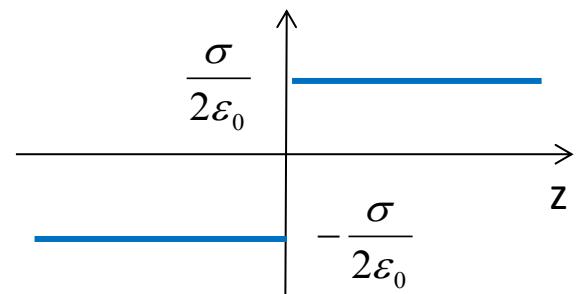
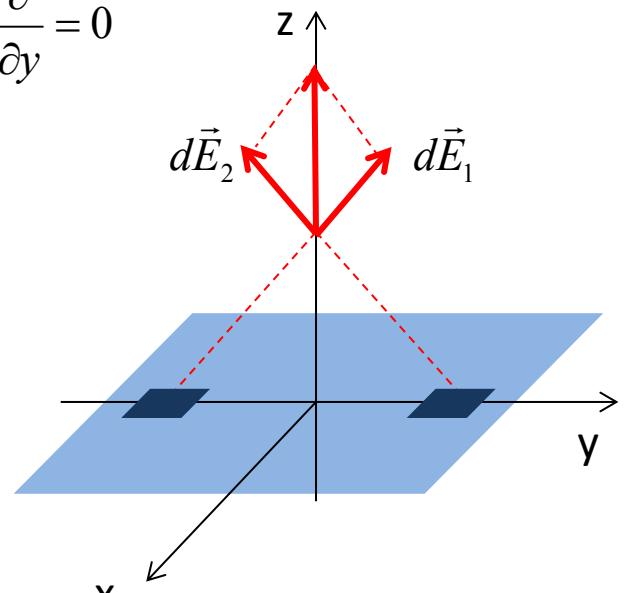
$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

Superfície Gaussiana: paralelepípedo

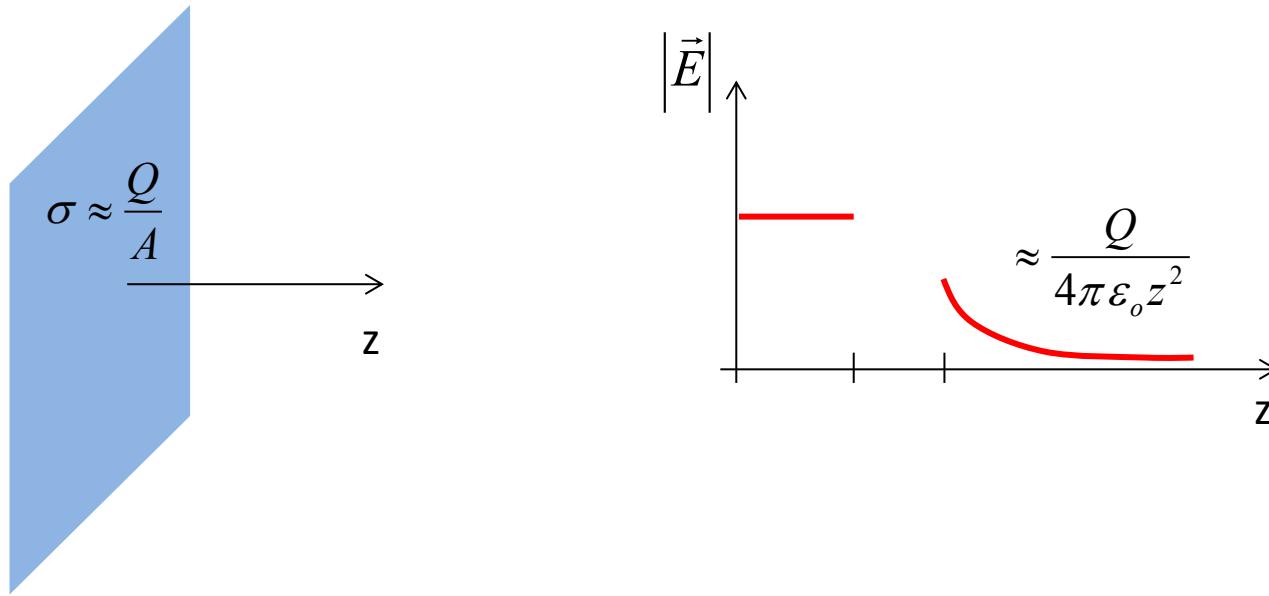
$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \iint_{topo} (E_z(z) \hat{a}_z) \bullet (\vec{a}_z da) + \iint_{base} (-E_z(z) \hat{a}_z) \bullet (-\vec{a}_z da) = 2 E_z(z) A$$

$$2 E_z(z) A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad \rightarrow$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$



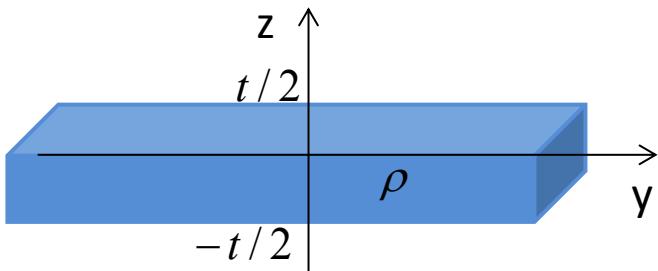
Plano limitado: carga total Q, área A



O campo elétrico é aproximadamente constante próximo ao plano finito, e longe do mesmo se comporta como campo de uma carga pontual.

## Exemplo: Simetria Planar:

Densidade volumétrica de carga constante ( $\rho$ ) em  $-t/2 < z < t/2$ :

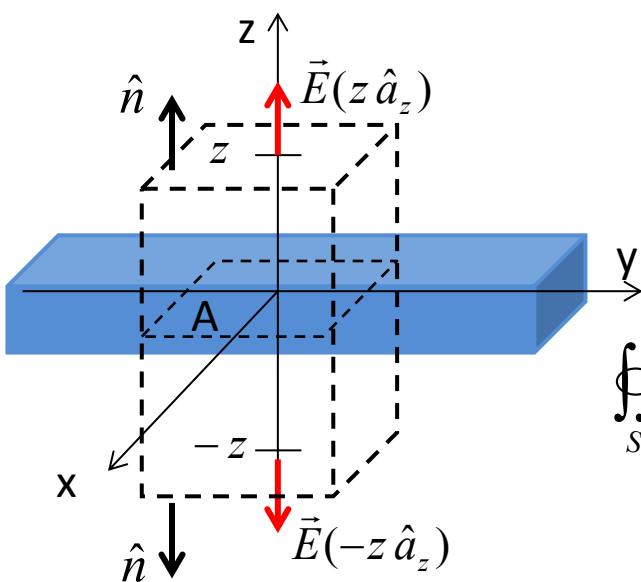


Simetria: campo vertical independente de x ou y:  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

Seja  $z > 0$ :

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z$$

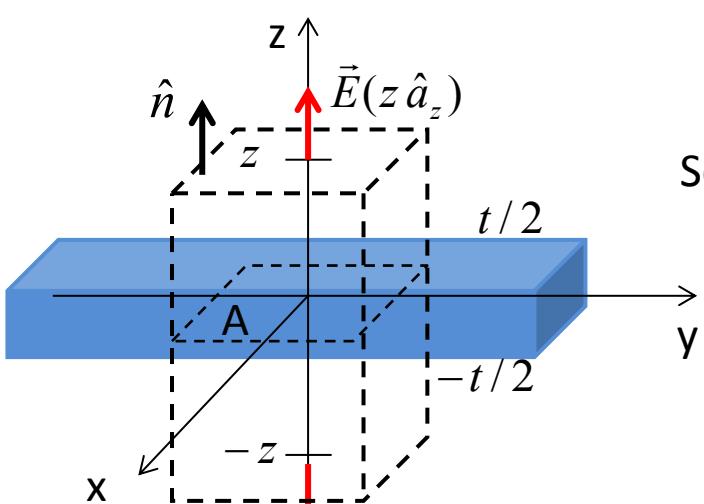
$$\vec{E}(-z \hat{a}_z) = -E_z(z) \hat{a}_z$$



$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

Superfície Gaussiana: paralelepípedo

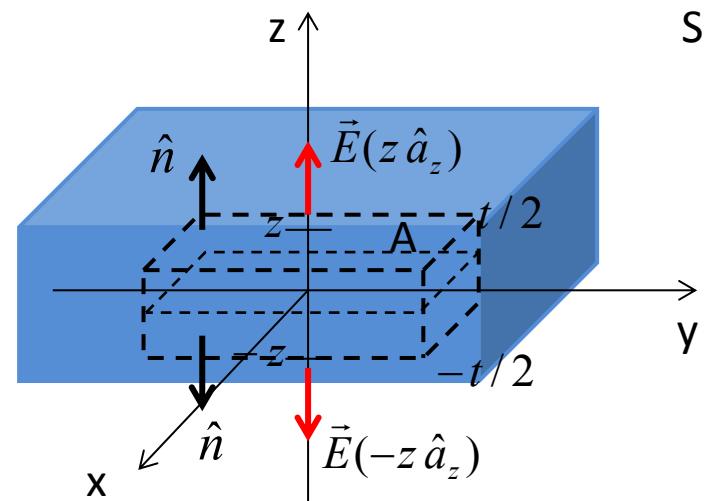
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} &= \iint_{topo} (E_z(z) \hat{a}_z) \bullet (\hat{a}_z da) + \iint_{base} (-E_z(z) \hat{a}_z) \bullet (-\hat{a}_z da) = \\ &= 2 E_z(z) A \end{aligned}$$



Se  $z > t/2$ :  $Q = \int_{-t/2}^{t/2} \iint_A \rho da dz = \rho t A$

$$2E_z(z)A = \frac{1}{\epsilon_0} \rho t A$$

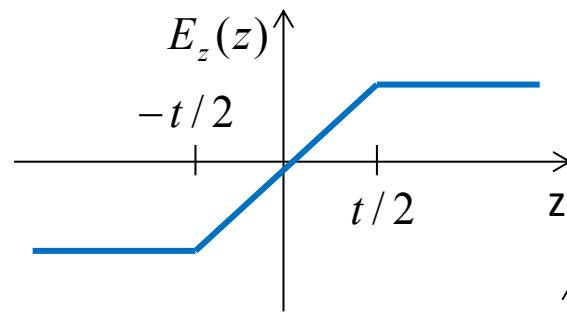
$$E_z = \frac{\rho t}{2\epsilon_0}$$



Se  $z < -t/2$ :  $Q = \int_{-z}^{-z} \iint_A \rho da dz = \rho 2z A$

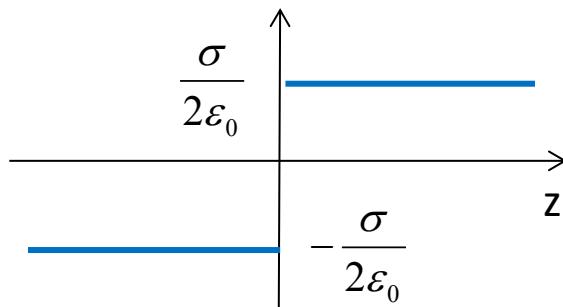
$$2E_z(z)A = \frac{1}{\epsilon_0} \rho 2z A$$

$$E_z = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$$



Se  $t \rightarrow 0$ :  $\rho t \rightarrow \sigma$

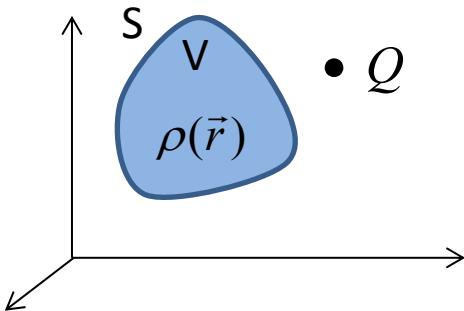
Densidade volumétrica  $\rho$  se reduz a uma densidade superficial de carga  $\sigma$ .



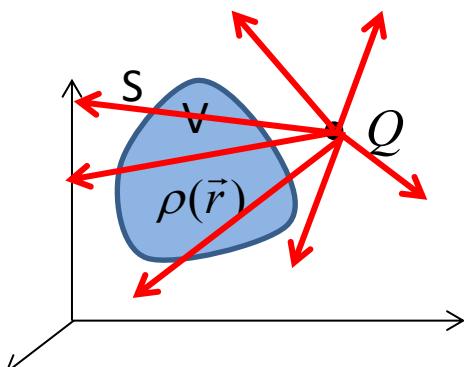
## Fluxo Elétrico:

$$\Phi_E = \iint_S \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = Q_t$$

Lei de Gauss: o fluxo elétrico através de uma superfície fechada S é igual à carga elétrica total envolvida.



As cargas elétricas externas não geram campo no interior, certo?  
NÃO!



As cargas elétricas externas não geram fluxo líquido através da Superfície S.

## **Leitura:**

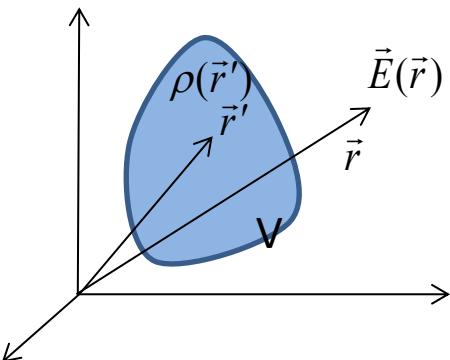
- Revisão de Cálculo Vetorial
- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seção 2.2

## **Exercícios:**

- Problemas 2.14, 2.15, 2.16, e 2.17, Sec. 2.2  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# ELETROSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## POTENCIAL ELÉTRICO



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(r') \hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) = -\frac{(x-x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{a}_x - \frac{(y-y')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{a}_y - \frac{(z-z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{a}_z = \\ &= -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \end{aligned}$$

$\nabla \times \vec{E} = ?$

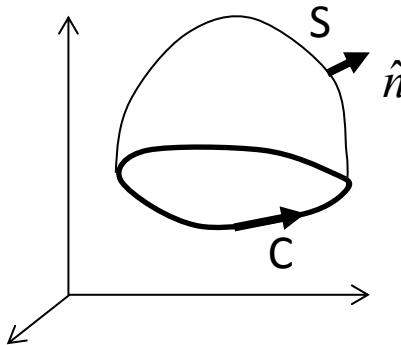
$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \iiint_V \rho(r') \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \nabla \times \left[ \rho(r') \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dv'$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(r') \nabla \times \left( \frac{\hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) dv' = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(r') \nabla \times \left[ \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dv'$$



$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$

$\nabla \times \nabla f = 0$



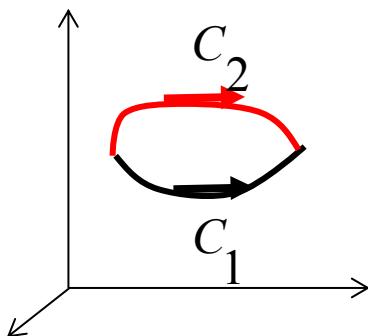
Usando o Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$



$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$W = \oint_C \vec{F} \bullet d\vec{l} = q \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Campo conservativo}$$



$$C = C_1 - C_2$$

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{E} \bullet d\vec{l} - \int_{C_2} \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$



$$\int_{C_1} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_{C_2} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

A integral de linha do campo elétrico independe do caminho escolhido.

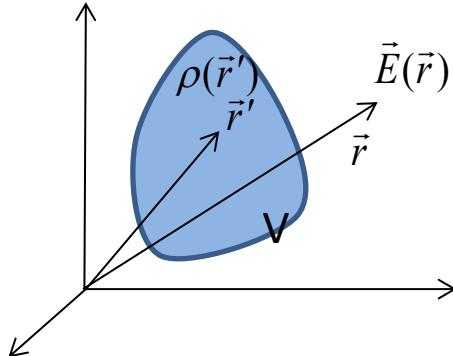
## Potencial Elétrico:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$



$$\vec{E} = -\nabla V$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(r') \hat{a}_{r-r'}}{|r-r'|^2} dv'$$

$$\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(r') \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \nabla \left( \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right)$$

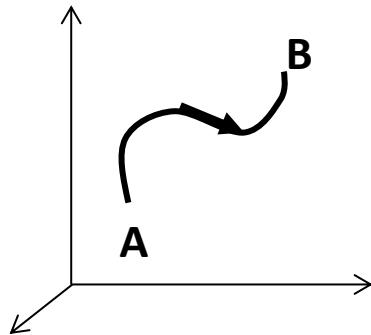


$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$V(r)$  é definido a menos de uma constante....

## Diferença de Potencial:

$$\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_A^B (-\nabla V) \bullet d\vec{l}$$



$$\begin{aligned} dV(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z \right) \bullet (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) = \nabla V \bullet d\vec{l} \end{aligned}$$

$$\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \int_A^B \nabla V \bullet d\vec{l} = - \int_A^B dV = -[V(B) - V(A)]$$

→

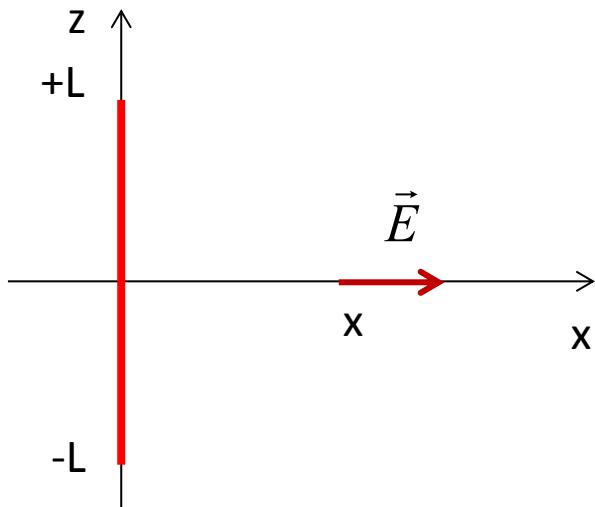
$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Se A é ponto de referência  $V(A)=0$ :

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^{\vec{r}} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

**Exemplo:**

Densidade linear de carga constante ( $\lambda$ ) em  $-L < z < +L$ :



No eixo x:

Simetria:  $\vec{E}(x\hat{a}_x) = E_x(x)\hat{a}_x$

$$\vec{r} = x\hat{a}_x \quad \vec{r}' = z'\hat{a}_z \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + z'^2}$$

$$V(x\hat{a}_x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z'^2}} dz'$$

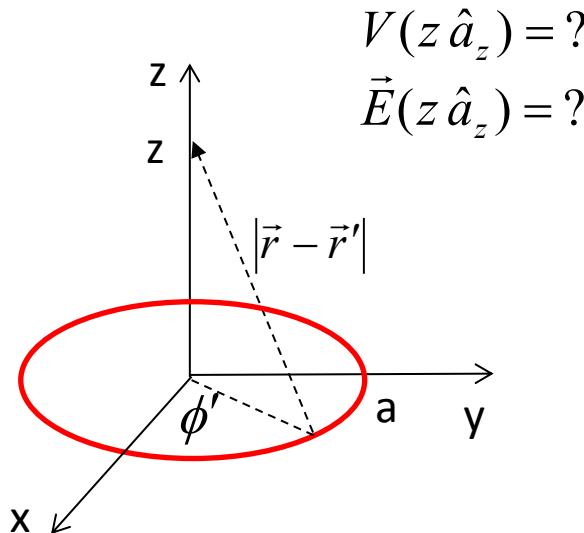
$$\int \frac{1}{\sqrt{z'^2 + a^2}} dz' = \ln \left[ z' + \sqrt{z'^2 + a^2} \right]$$

→  $V(x\hat{a}_x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(L + \sqrt{L^2 + x^2}) - \ln(-L + \sqrt{L^2 + x^2}) \right]$

$$\vec{E}(x\hat{a}_x) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{x\sqrt{x^2 + L^2}} \hat{a}_x$$

## Exemplo:

Potencial elétrico no eixo de anel de raio  $a$ , uniformemente carregado (●).



$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = a \hat{a}_{r'} = a \cos \phi' \hat{a}_x + a \sin \phi' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{a}_z - a \cos \phi' \hat{a}_x - a \sin \phi' \hat{a}_y$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{z \hat{a}_z - a \cos \phi' \hat{a}_x - a \sin \phi' \hat{a}_y}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$dl' = a d\phi'$$

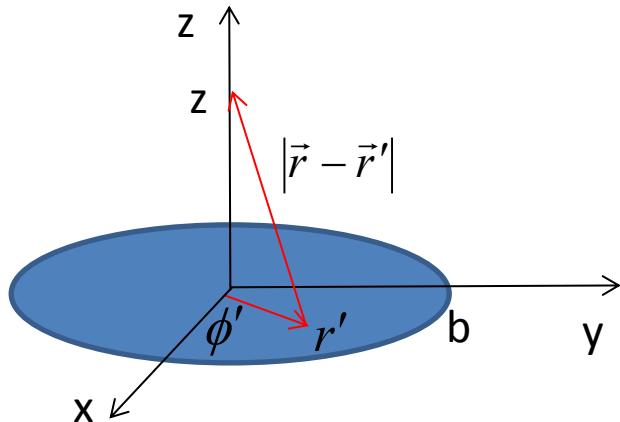
$$R: \quad V(z \hat{a}_z) = \frac{\lambda a}{2 \varepsilon_o (z^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \frac{\lambda z}{2 \varepsilon_o (z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

## Exemplo:

Disco de densidade uniforme de carga  $\sigma$ .

- a) Potencial no eixo do disco,
- b) Campo elétrico no eixo.



$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = r' \hat{a}_{r'} = r' \cos \phi' \hat{a}_x + r' \sin \phi' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{a}_z - r' \cos \phi' \hat{a}_x - r' \sin \phi' \hat{a}_y$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{z \hat{a}_z - r' \cos \phi' \hat{a}_x - r' \sin \phi' \hat{a}_y}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

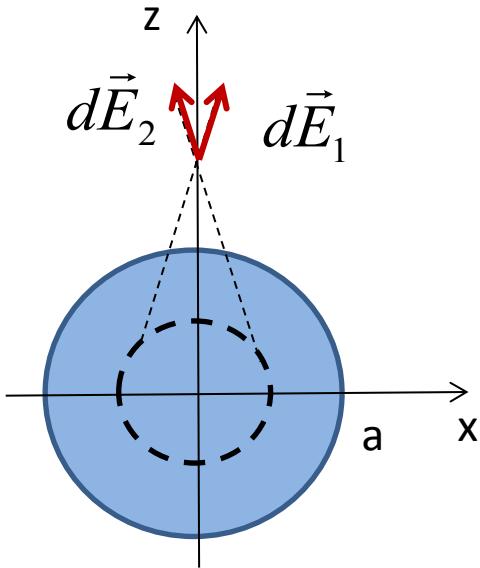
$$ds' = r' d\phi' dr'$$

$$R: V(z \hat{a}_z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + b^2} - |z| \right)$$

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right) \hat{a}_z & z > 0 \\ \frac{-\sigma}{2 \epsilon_0} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right) \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

## Exemplo:

Densidade volumétrica de carga constante ( $\rho$ ) em  $r < a$ :



Simetria: campo radial independente de  $\theta$  e  $\phi$ :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

No eixo z:

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z$$

$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = r' \hat{a}_{r'} = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{a}_x + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{a}_y + r' \cos \theta' \hat{a}_z$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{a}_x - r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{a}_y + (z - r' \cos \theta') \hat{a}_z$$

$$\tau = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta'}$$

$$\begin{aligned} V(z \hat{a}_z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(r')}{\tau} d\tau' = \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{1/2}} r'^2 \sin \theta' d\phi' d\theta' dr' \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{1}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{1/2}} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr' \end{aligned}$$

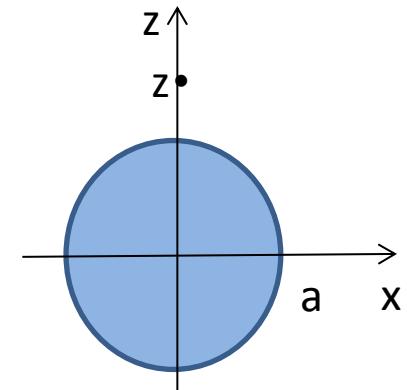
$$\text{Substituição: } u = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta'$$

$$du = 2zr' \sin \theta' d\theta'$$

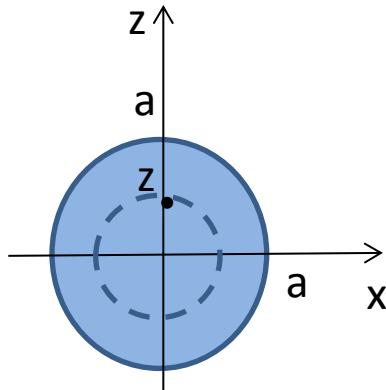
$$\begin{aligned} V(z \hat{a}_z) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{1}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{1/2}} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr' \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \frac{1}{u^{1/2}} \frac{du}{2z} r' dr' = \frac{\rho}{4z\epsilon_0} \int_0^a 2\sqrt{u} \Big|_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} r' dr' = \frac{\rho}{2z\epsilon_0} \int_0^a [(z+r') - |z-r'|] r' dr' \end{aligned}$$

Ponto exterior à esfera ( $z>a$ ):

$$V(z \hat{a}_z) = \frac{\rho}{2z\epsilon_0} \int_0^a 2r'^2 dr' = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z}$$



Ponto interior à esfera ( $z<a$ ):

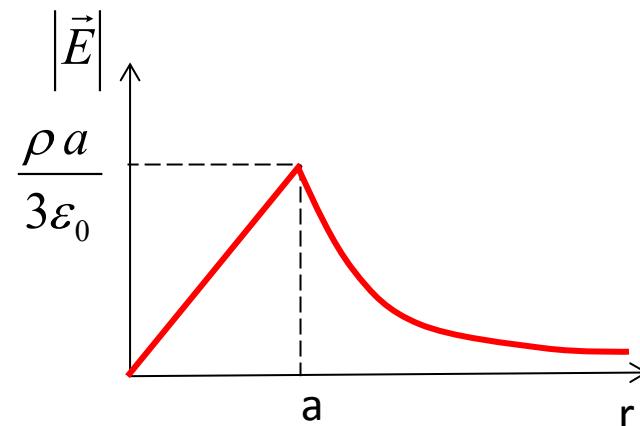
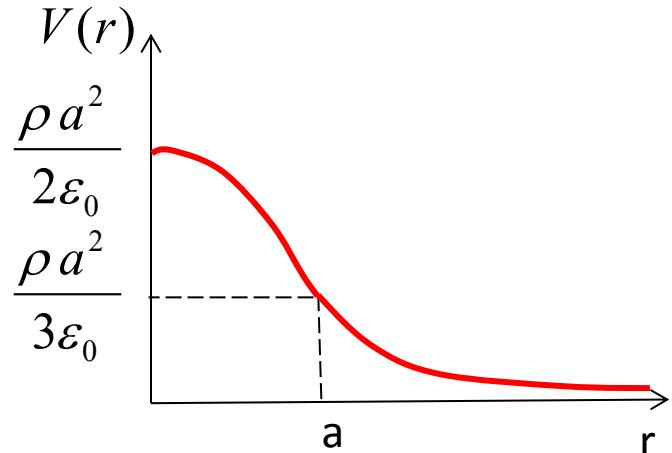
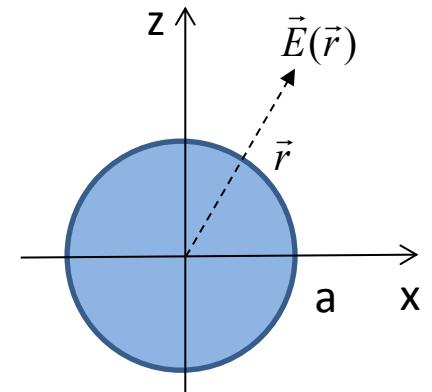


$$\begin{aligned} V(z \hat{a}_z) &= \frac{\rho}{2z\epsilon_0} \left\{ \int_0^z 2r'^2 dr' + \int_z^a 2zr' dr' \right\} = \frac{\rho}{z\epsilon_0} \left\{ \frac{z^3}{3} + z \left( \frac{a^2 - z^2}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left\{ \frac{a^2}{2} - \frac{z^2}{6} \right\} \end{aligned}$$

Generalizando para uma direção qualquer:

Ponto exterior à esfera ( $r > a$ ):  $V(\vec{r}) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$

Ponto interior à esfera ( $r < a$ ):  $V(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left\{ \frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right\}$

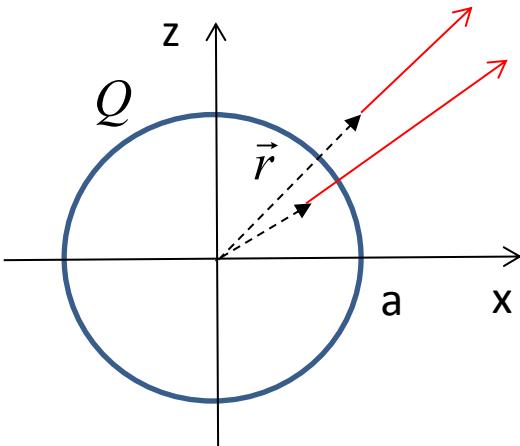


$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \hat{a}_r$$

Ponto exterior à esfera ( $r > a$ ):  $\vec{E}(\hat{r}) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{a}_r$

Ponto interior à esfera ( $r < a$ ):  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{a}_r$

**Exemplo:** Superfície esférica de raio  $a$ , carregada com carga  $Q$ , uniformemente distribuída.



$$V(\hat{r}) = ?$$

Usando a Lei de Gauss:

$$\vec{E}(\hat{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

1) Ponto exterior:  $r > a$ :

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_{\infty}^{r} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \bullet \left( \hat{a}_r dr \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2) Ponto interior:  $r < a$ :

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_r^a (0) \bullet \left( \hat{a}_r dr \right) + \int_a^{\infty} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \bullet \left( \hat{a}_r dr \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

## Equação de Poisson:

$$\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

}

$$\nabla \bullet \nabla V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

→

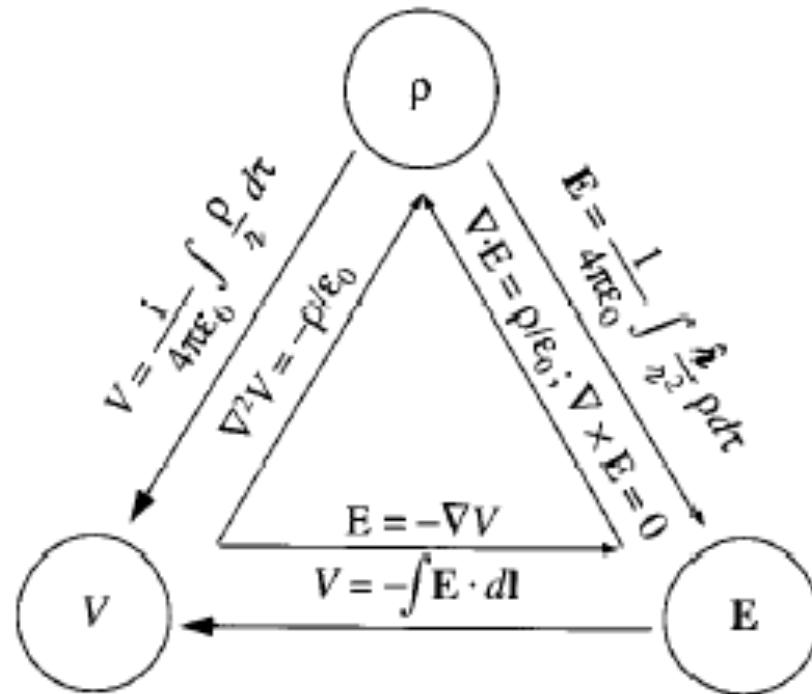
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Equação de Poisson

Se  $\rho(\vec{r}) = 0$  :

$$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Laplace



## **Leitura:**

- Revisão de Cálculo Vetorial
- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seção 2.3

## **Exercícios:**

- Problemas 2.21, 2.23, 2.24, e 2.28, Sec. 2.3  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

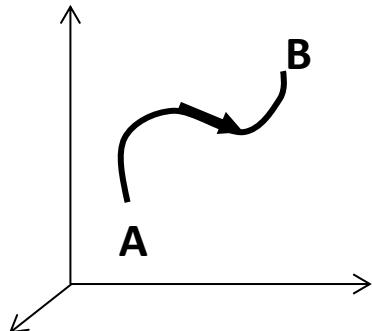
# ELETROSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## TRABALHO E ENERGIA

**Trabalho:**

$$W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_A^B (-q\vec{E}) \bullet d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = q[V(B) - V(A)]$$

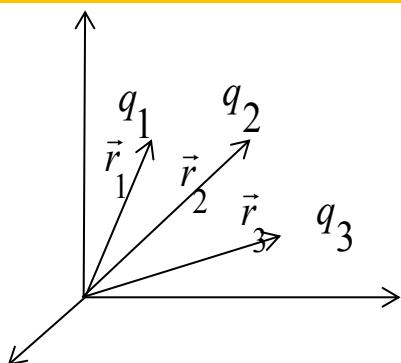
$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$



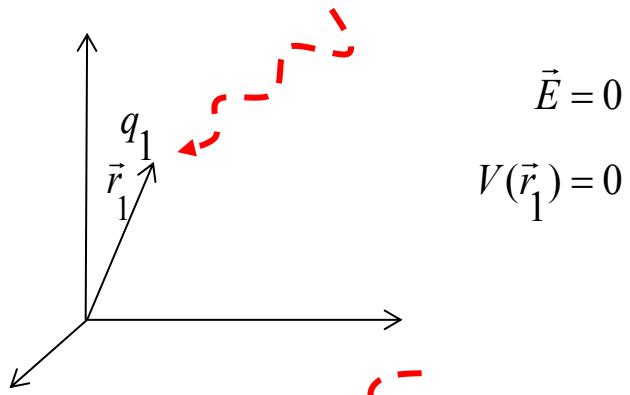
$$V(B) - V(A) = \frac{W}{q}$$

Se  $V(A)=0$ :  $V(\vec{r}) = \frac{W}{q}$

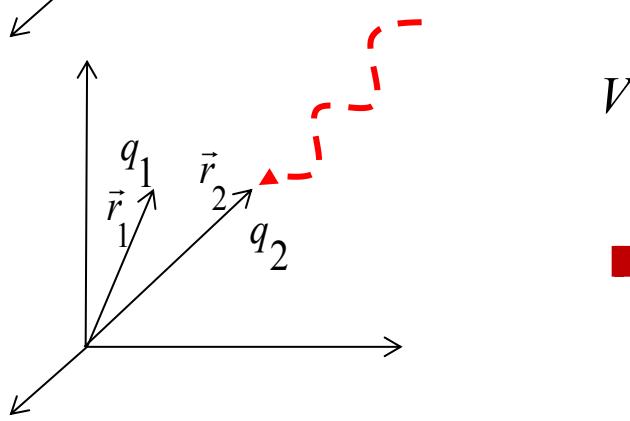
**Energia armazenada em um conjunto de cargas:**



$$W_{123} = ?$$

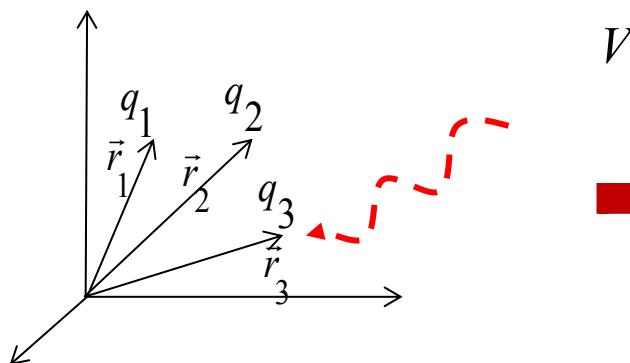


$$\vec{E} = 0 \quad V(\vec{r}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad W_1 = q_1 V(\vec{r}_1) = 0$$



$$V(\vec{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

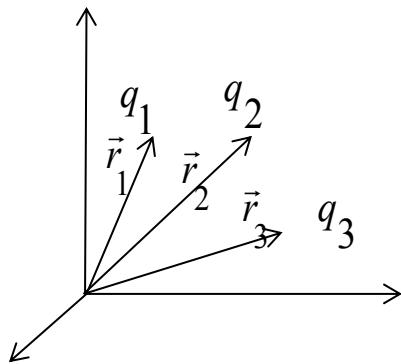
$$\rightarrow \quad W_2 = q_2 V(\vec{r}_2) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$



$$V(\vec{r}_3) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

$$\rightarrow \quad W_3 = q_3 V(\vec{r}_3) = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

$$W_{123} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

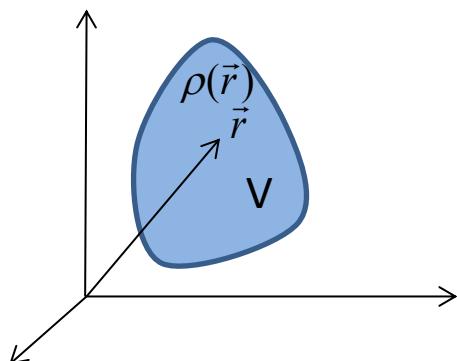


$$W_{123} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right)$$

→

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$$

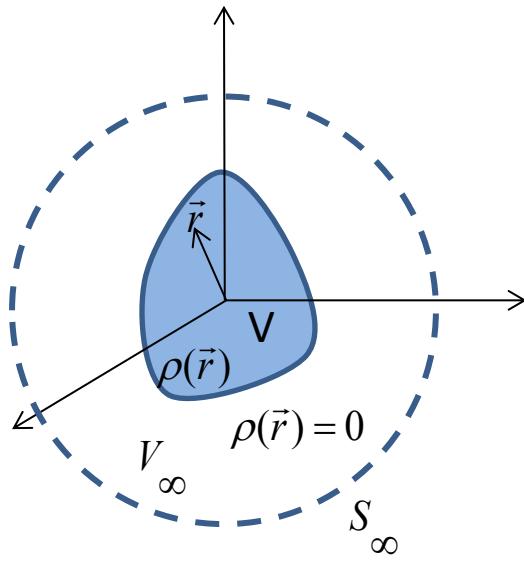
**Energia armazenada em uma distribuição de cargas:**



$$W = \frac{1}{2} \sum \left( \rho_v(\vec{r}_i) dv \right) V(\vec{r}_i)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_v(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

# Energia armazenada em uma distribuição de cargas (alternativa):



$$\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) / \epsilon_0 \quad \vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \bullet [V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] = \nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) V(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \bullet \nabla V(\vec{r})$$

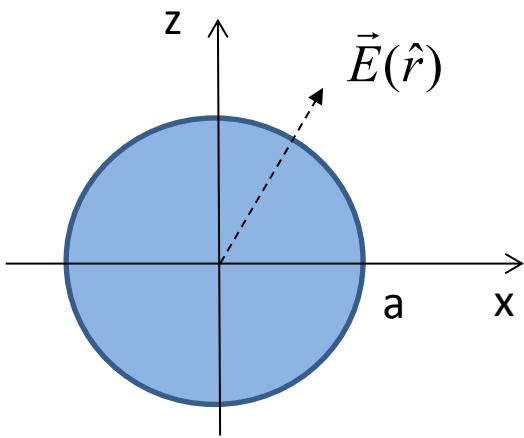
$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_v(\vec{r}) V(\vec{r}) dv = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \rho_v(\vec{r}) V(\vec{r}) dv = \\ = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \epsilon_0 \nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) V(\vec{r}) dv =$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} [\nabla \bullet (V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})) - \vec{E}(\vec{r}) \bullet \nabla V(\vec{r})] dv = \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\iint_{S_\infty} (V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})) \bullet d\vec{s}}_{V(\vec{r}) \propto 1/r} + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{E}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) dv$$

$\rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} |\vec{E}(\vec{r})|^2 dv$

$\vec{E}(\vec{r}) \propto 1/r^2$   
 $ds \propto r^2$

**Exemplo:** Superfície esférica de raio  $a$ , carregada com carga  $Q$ , uniformemente distribuída.



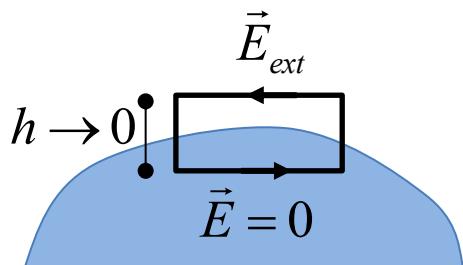
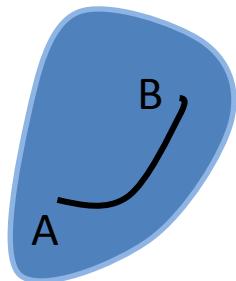
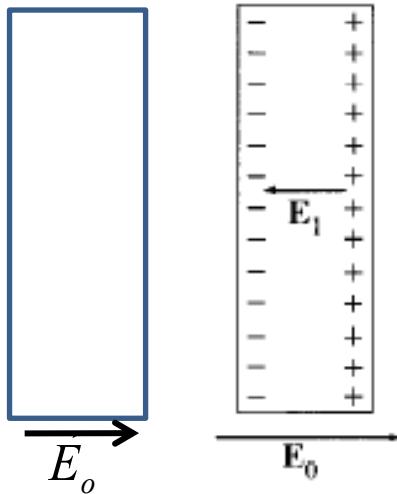
$$\vec{E}(\hat{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

$$V(\hat{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & r < a \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \rho_s(\vec{r}) V(\vec{r}) dS = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{Q}{4\pi a^2} \right) \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \right) a^2 \sin\theta d\phi d\theta = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{V_\infty} \left| \vec{E}(\vec{r}) \right|^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (0)^2 r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

# Campo Elétrico em Condutores Perfeitos:



- O fluxo de carga continua até que o campo elétrico total se anule no interior do condutor.
$$\vec{E}(\hat{r}) = \vec{E}_o + \vec{E}_1 = 0$$
- A densidade volumétrica de carga é nula no interior do condutor.

$$\rho_v(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \bullet \vec{E}(\hat{r}) = 0$$

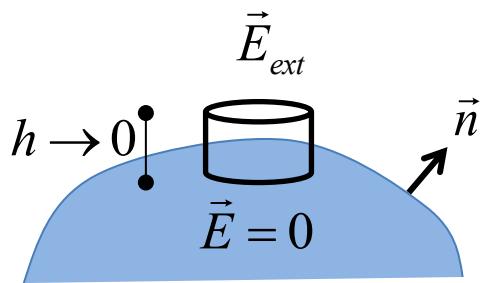
- A carga se distribui na superfície do condutor.
- O potencial é constante no condutor.

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

- O campo elétrico tangencial externo é nulo.

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \bullet d\vec{l} &= 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{ext} \bullet \Delta \vec{l} = 0 \\ &\rightarrow \quad \vec{E}_{tan} = 0 \end{aligned}$$

6. O campo elétrico normal externo é igual à densidade superficial de carga dividido por  $\epsilon_0$ .

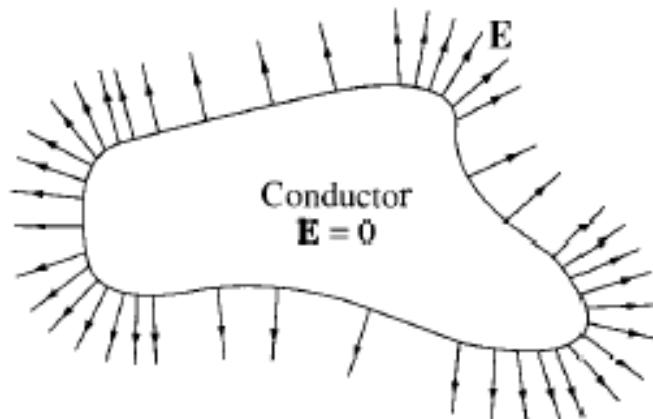


$$\iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \bullet (\vec{n} A) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \bullet \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E_n(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



## Exemplo:

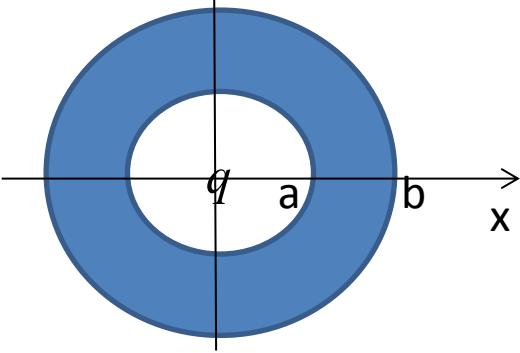
Carga pontual no centro de uma camada condutora perfeita.

$z$

$$\vec{E} = ?$$

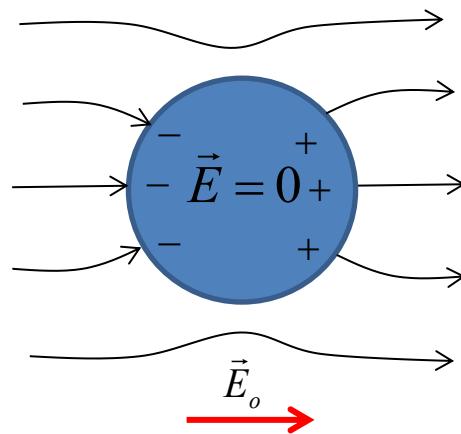
$$\sigma_a = ? \quad \sigma_b = ?$$

$q$

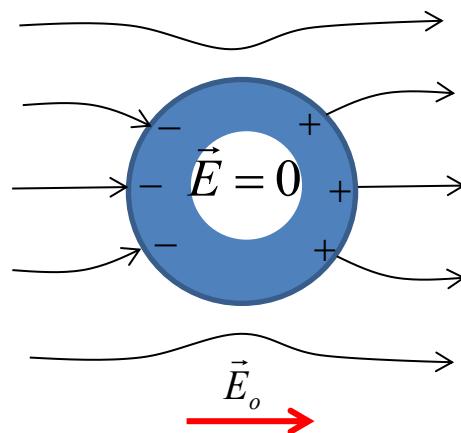


## Exemplo:

Blindagem. Esfera condutora na presença de campo externo horizontal.

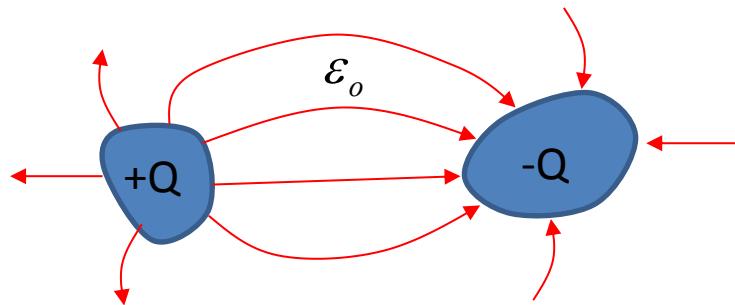


A carga elétrica se distribuirá na superfície da esfera até anular o campo interior.



O campo no interior da cavidade é nulo.  
Gaiola de Faraday.

## Capacitores:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(r') \hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} ds'$$

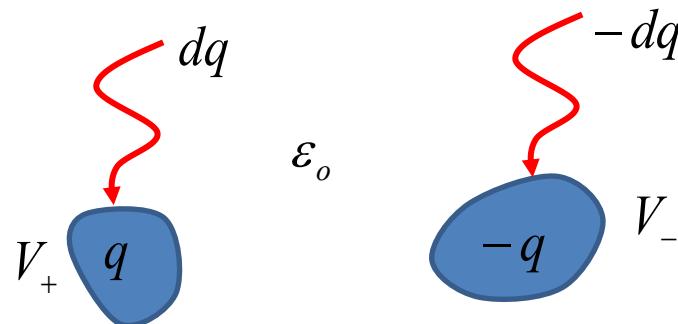
$$V = V_+ - V_- = - \int \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\rightarrow V \propto \vec{E}(\vec{r}) \propto Q$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V}$$

Capacitância

## Energia armazenada no capacitor:



$$dW = (dq)V_+ + (-dq)V_- = dq(V_+ - V_-) =$$

$$= dqV = dq \left( \frac{q}{C} \right)$$

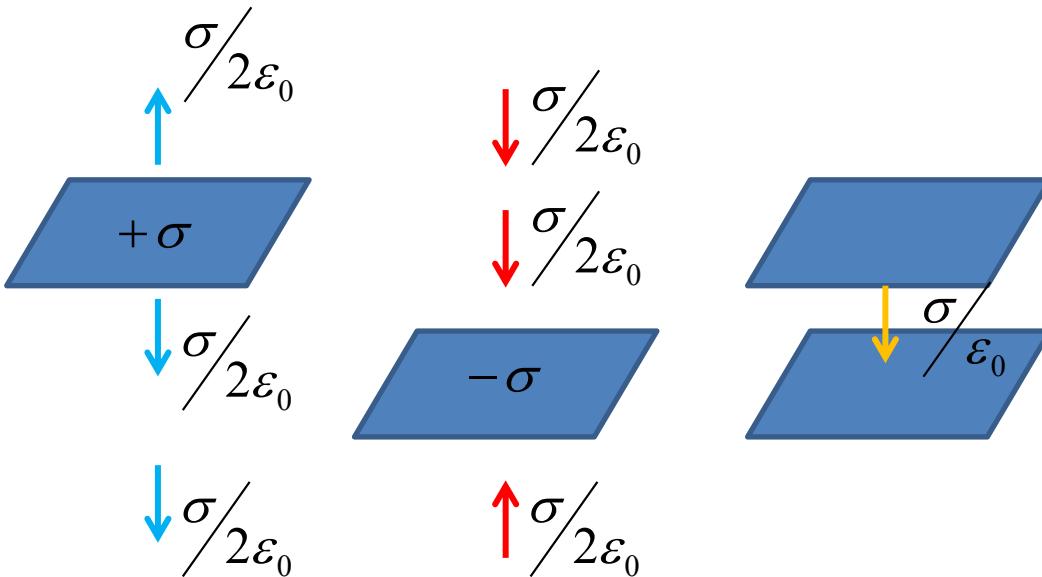
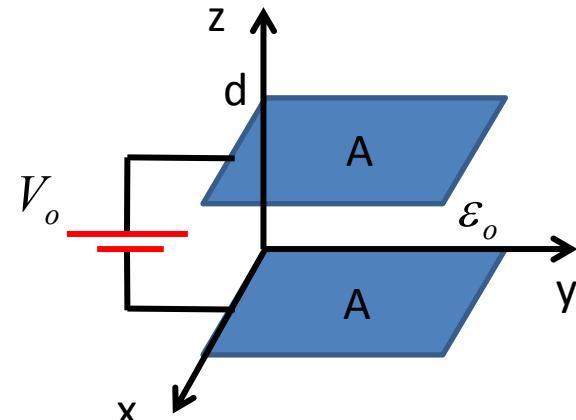
$$W = \int_0^Q \left( \frac{q}{C} \right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

## Exemplo:

Capacitor de placas paralelas. Suposição:  $A \gg d^2$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$



$$Q = \sigma A$$

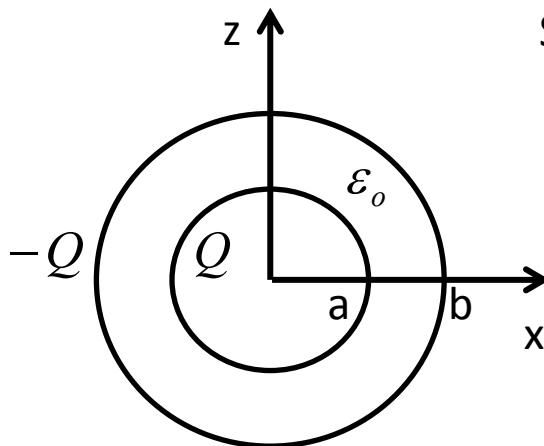
$$V_o = - \int_0^d \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \int_0^d \left( -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{a}_z \right) \bullet (\hat{a}_z dz) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Q d}{\epsilon_0 A}$$



$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

## Exemplo:

Capacitor esférico



Simetria esférica:

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{a}_r$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

$$V_o = - \int_b^a \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_a^b \left( \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \bullet (\hat{a}_r dr) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi \epsilon_0}{1/a - 1/b}$$

## **Leitura:**

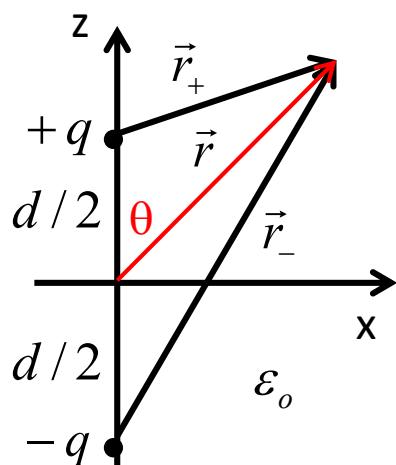
- Revisão de Cálculo Vetorial
- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 2.4 e 2.5

## **Exercícios:**

- Problemas 2.32, 2.35, 2.39, Sec. 2.4 e 2.5  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# ELETROSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## DIPOLO ELÉTRICO



**Potencial:**

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

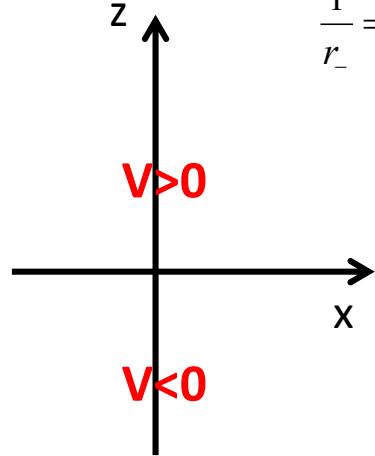
$$\begin{aligned}\vec{r}_+ &= \vec{r} - \frac{d}{2} \hat{a}_z \\ \vec{r}_- &= \vec{r} + \frac{d}{2} \hat{a}_z\end{aligned}$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 - 2r(d/2)\cos\theta}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 - 2r(d/2)\cos(\pi - \theta)}$$

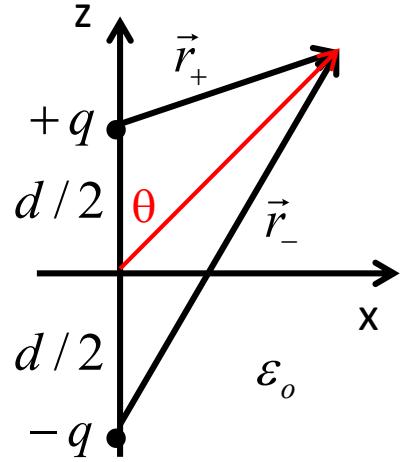
$$\frac{1}{r_+} = \left[ r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 - r d \cos\theta \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{d}{2r} \right)^2 - \left( \frac{d}{r} \right) \cos\theta \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{r} \right) \cos\theta \right]$$

$$\frac{1}{r_-} = \left[ r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 + r d \cos\theta \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{d}{2r} \right)^2 + \left( \frac{d}{r} \right) \cos\theta \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{r} \right) \cos\theta \right]$$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) \approx \frac{q d \cos\theta}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

$$V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^2}$$



## Campo Elétrico:

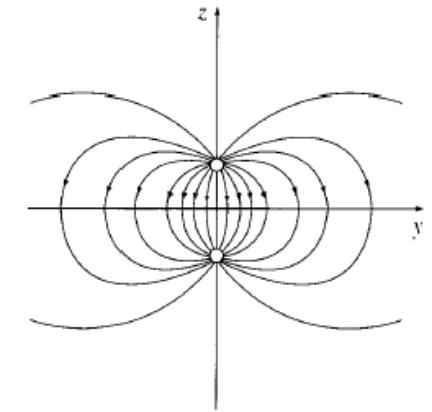
$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q d \cos \theta}{4\pi \epsilon_o r^2} \right) \hat{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{q d \cos \theta}{4\pi \epsilon_o r^2} \right) \hat{a}_\theta$$

→  $\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_o r^3} (2 \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta)$

$$\vec{E}(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^3}$$



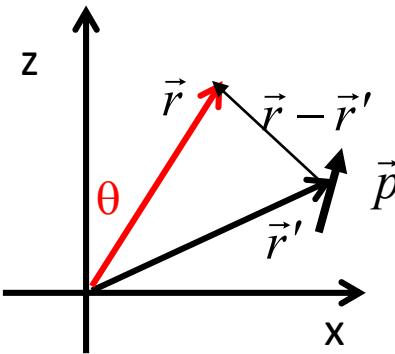
## Momento de dipolo:

$$\vec{p} = q d \hat{a}_z$$

$$\vec{p} \bullet \hat{a}_r = q d \hat{a}_z \bullet \hat{a}_r = q d \cos \theta$$

O momento de dipolo tem direção da carga negativa para a positiva.

$$V(\vec{r}) \approx \frac{q d \cos \theta}{4\pi \epsilon_o r^2} \quad \rightarrow \quad V(\vec{r}) \approx \frac{\vec{p} \bullet \hat{a}_r}{4\pi \epsilon_o r^2}$$

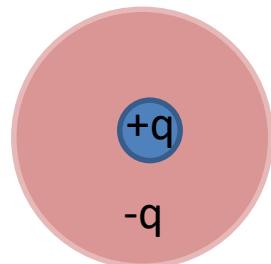


$$V(\vec{r}) \approx \frac{\vec{p} \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{4\pi \epsilon_o |\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

# ELETROSTÁTICA EM DIELÉTRICOS

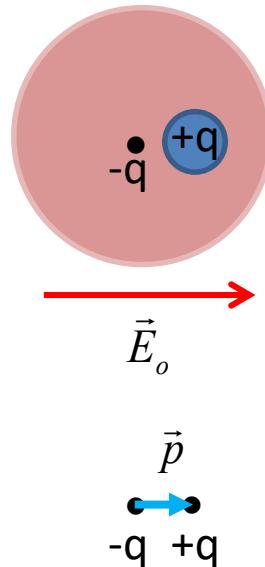
## POLARIZAÇÃO

### Modelo atômico simplificado:



Carga  $+q$  do núcleo envolto por uma nuvem de carga  $-q$

### Campo Elétrico Externo:



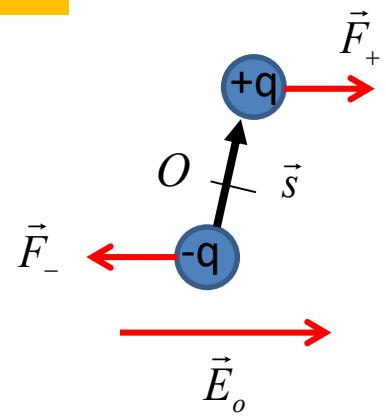
O deslocamento aumenta até que a força de atração entre a nuvem de elétrons e o núcleo cancele a força devido ao campo externo.

O campo externo produz um grande número de pequenos dipolos apontando na direção do campo.



POLARIZAÇÃO

## Torque:



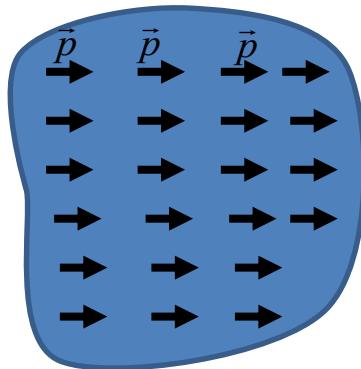
$$\vec{p} = q \vec{s}$$

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{\vec{s}}{2} \times \vec{F}_+ - \frac{\vec{s}}{2} \times \vec{F}_- = \frac{\vec{s}}{2} \times (q \vec{E}_o) - \frac{\vec{s}}{2} \times (-q \vec{E}_o) = \\ &= (\vec{s} q) \times \vec{E}_o = \vec{p} \times \vec{E}_o\end{aligned}$$

O dipolo tende a ser rotacionado até que seu momento de dipolo se alinhe com o campo externo.

## Polarização:

densidade volumétrica de momento de dipolo

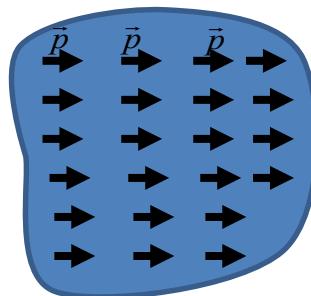
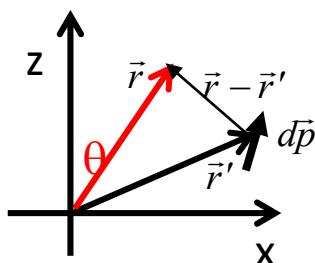


$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

O momento de dipolo de um pequeno volume dv vale:

$$d\vec{p}(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) dv$$

## Potencial devido a meio Polarizado:



$$dV(\vec{r}) \approx \frac{d\vec{p}(\vec{r}') \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Potencial devido ao dipolo  $d\vec{p}$ .

$$V(\vec{r}) = \iiint_V \frac{d\vec{p}(\vec{r}') \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

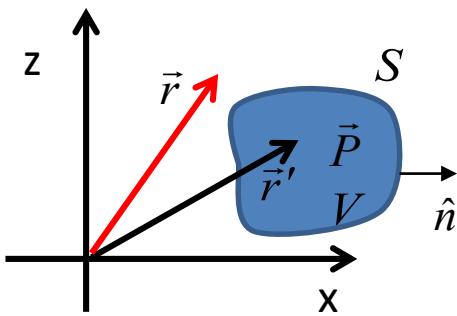
Potencial devido à todos os dipolos no volume V.



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

## Potencial devido a meio Polarizado - Alternativa:



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} d\nu'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad \rightarrow \quad \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \vec{P}(\vec{r}') \bullet \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\nu'$$

Identidade:  $\nabla' \bullet (\vec{f} \vec{A}) = \vec{f} \nabla' \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla' \vec{f}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left[ \nabla' \bullet \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \bullet \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\nu' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V -\nabla' \bullet \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu'$$

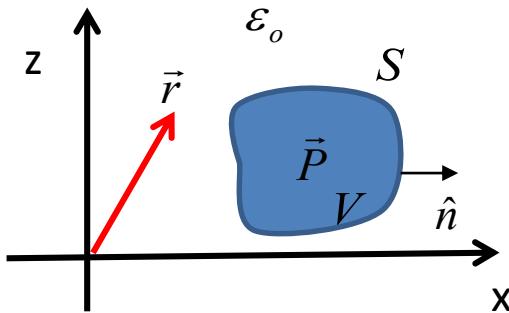
Em espaço livre!!!

$$\sigma_p(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{n}$$

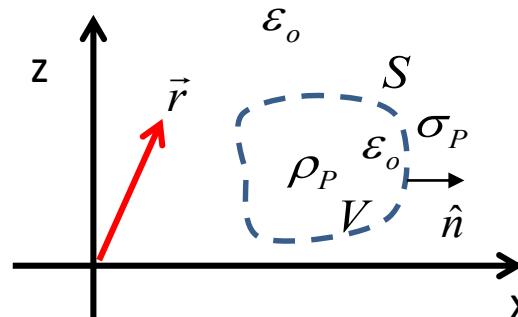
Densidade superficial de carga de polarização

$$\rho_p(\vec{r}') = -\nabla' \bullet \vec{P}(\vec{r}')$$

Densidade volumétrica de carga de polarização



$\equiv$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dV'}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

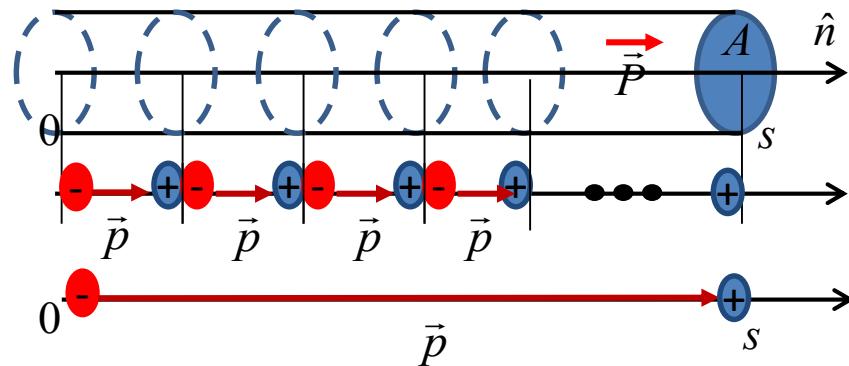
$$\rho_P(\vec{r}') = -\nabla' \bullet \vec{P}(\vec{r}')$$

$$\sigma_P(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{n}$$

## Interpretação física:

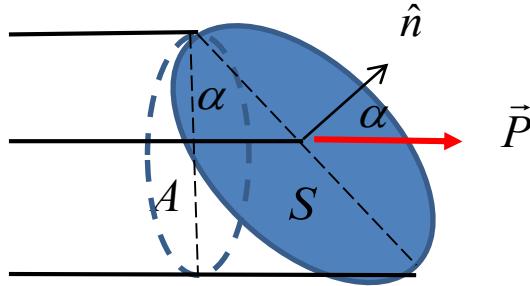
(i) Polarização uniforme:  $\rho_P = 0$     $\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n}$

Duto do volume  $V$ , de seção reta  $A$ , e comprimento  $s$ :



Carga interior se anula.

$$\vec{p} = q \vec{s} = \vec{P}(As) \quad \rightarrow \quad \sigma_P = \frac{q}{A} = P \quad (= \vec{P} \bullet \hat{n})$$

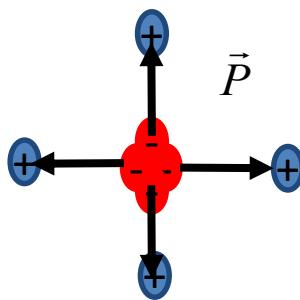


$$\vec{p} = q \vec{s} = \vec{P}(As) \rightarrow \frac{q}{A} = P$$

$$A = S \cos\alpha$$

$$\rightarrow \sigma_P = \frac{q}{S} = \frac{q}{A/\cos\alpha} = P \cos\alpha = \vec{P} \bullet \hat{n}$$

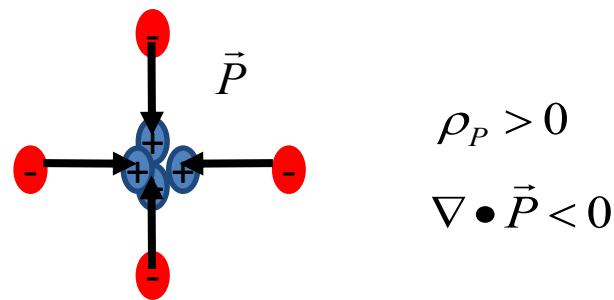
(ii) Polarização não-uniforme:  $\rho_P = -\nabla \bullet \vec{P}$        $\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n}$



$$\rho_P < 0$$

$$\nabla \bullet \vec{P} > 0$$

Acúmulo de cargas negativas.



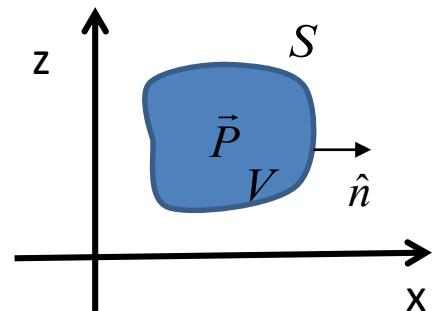
$$\rho_P > 0$$

$$\nabla \bullet \vec{P} < 0$$

Acúmulo de cargas positivas.

→ Polarização não-uniforme ( $\nabla \bullet \vec{P} \neq 0$ ) gera densidade volumétrica de carga no interior do dielétrico.

Considerando que a carga total no dielétrico é nula:



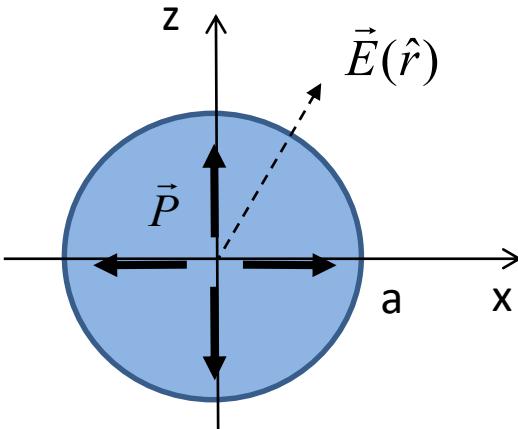
$$\iiint_V \rho_P(\vec{r}) dv + \oint_S \sigma_P(\vec{r}) ds = 0$$
$$\iiint_V \rho_P(\vec{r}) dv = - \oint_S \sigma_P(\vec{r}) ds = - \oint_S \vec{P}(\vec{r}) \bullet \hat{n} ds$$
$$\iiint_V \rho_P(\vec{r}) dv = - \iiint_V \nabla \bullet \vec{P}(\vec{r}) dv \quad \forall V$$

$$\rightarrow \rho_P = -\nabla \bullet \vec{P}$$

## Exemplo:

Esfera de raio  $a$ , com polarização  $\vec{P} = k \vec{r} = k r \hat{a}_r$

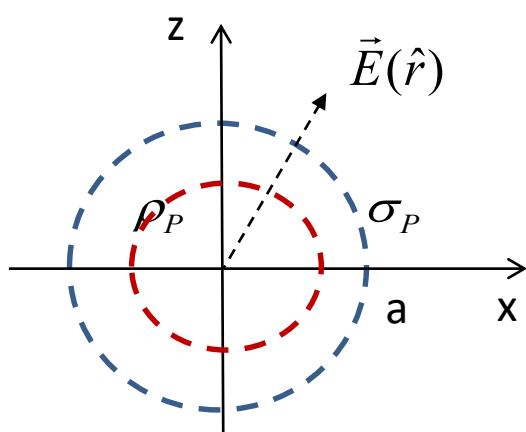
- a) Densidades de carga de polarização
- b) Campo elétrico



$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n} = (k a \hat{a}_r) \bullet \hat{a}_r = k a$$

$$\nabla \bullet \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi}$$

$$\rho_P = -\nabla \bullet \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 P_r] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 k r] = -3k$$



$$\text{Simetria esférica: } \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{a}_r$$

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = 4\pi r^2 E_r(r)$$

$$r < a : Q_t = \rho_P \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = -3k \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = -4k\pi r^3$$

$$4\pi r^2 E_r(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} 4k\pi r^3 \quad \rightarrow \quad E_r(r) = -\frac{kr}{\epsilon_0}$$

$$r > a : Q_t = \rho_P \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) + \sigma_P (4\pi a^2) = -3k \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) + ka (4\pi a^2) = 0 \quad \rightarrow \quad E_r(r) = 0$$

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 4.1 e 4.2

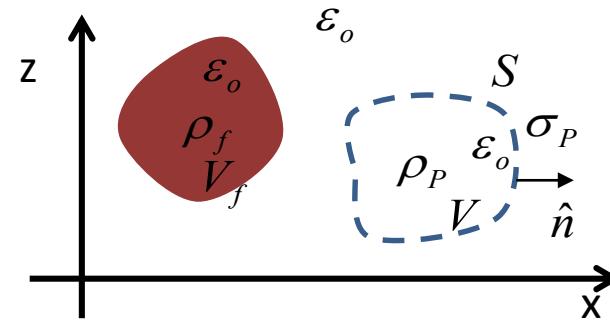
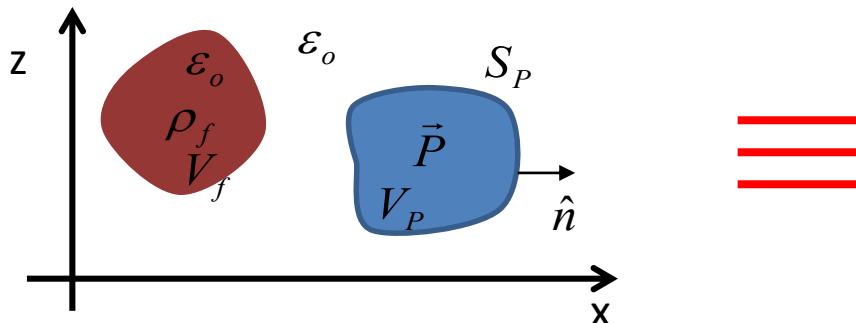
## **Exercícios:**

- Problemas 4.10  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# ELETROSTÁTICA EM MEIOS DIELÉTRICOS

## DESLOCAMENTO ELÉTRICO

Campos devido a cargas livres e de polarização:



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_f} \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_p} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}^*}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_f} \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_p} \frac{\sigma_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_p} \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

O problema equivalente tem cargas volumétricas e superficiais em espaço livre:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \bullet \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \rho &= \rho_f + \rho_p \end{aligned} \right\} \quad \nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \\ \rho_p = -\nabla \bullet \vec{P} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \epsilon_0 \nabla \bullet \vec{E} = \rho_f - \nabla \bullet \vec{P} \\ \nabla \bullet (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \end{array} \rightarrow \boxed{\nabla \bullet \vec{D} = \rho_f} \quad \text{Lei de Gauss}$$

Deslocamento elétrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

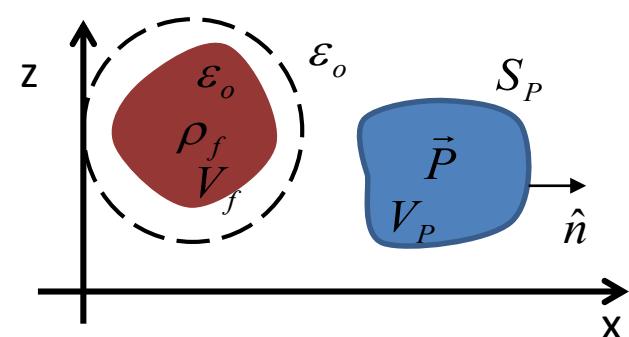
O divergente do Deslocamento elétrico depende apenas da distribuição volumétrica de cargas livres! O divergente de D não depende das cargas de polarização.

Integrando no volume e usando o Teorema da Divergência:

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{D} dv = \iiint_V \rho_f dv$$

$$\iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_f$$

**Lei de Gauss**



## Fluxo Elétrico:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s}$$

Em espaço livre:  $\Phi_E = \iint_S \epsilon_0 \vec{E} \bullet d\vec{s}$

Lei de Gauss: o fluxo elétrico sobre uma superfície fechada S é igual à carga livre total interior à superfície.

O Deslocamento elétrico depende apenas das cargas livres?

$$\left[ \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{D} = ? \end{array} \right]$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$



$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P}$$

0



$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

NÃO!!!

O divergente do deslocamento elétrico só depende cargas livres, mas seu rotacional depende da polarização!

## Dielétricos lineares:

A polarização é proporcional ao campo elétrico.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$



$\chi_e$ : susceptibilidade elétrica

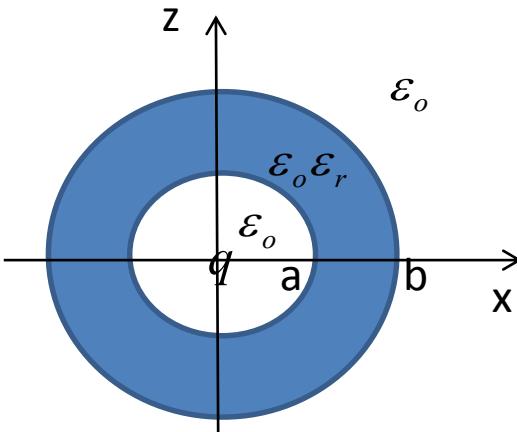
	$\chi_e$	$\epsilon_r$
vácuo	0	1
vidro	3-6	4-7
porcelana	5-7	6-8

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$
$$\epsilon_r = (1 + \chi_e): \quad \text{Permissividade relativa}$$
$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi_e): \quad \text{Permissividade do meio}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

## Exemplo:

Carga elétrica no interior de uma camada dielétrica esférica.



Simetria esférica:  $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$        $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{a}_r$

$$\vec{D}(\vec{r}) \propto \vec{E}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \hat{a}_r$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_f$$

$$4\pi r^2 D_r(r) = q \quad \rightarrow \quad D_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \forall r$$

(i)  $r < a$ :  $\chi_e = 0 \quad \varepsilon = \varepsilon_0$ :

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi_e \vec{E} = 0 \quad \vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_o r^2} \hat{a}_r$$

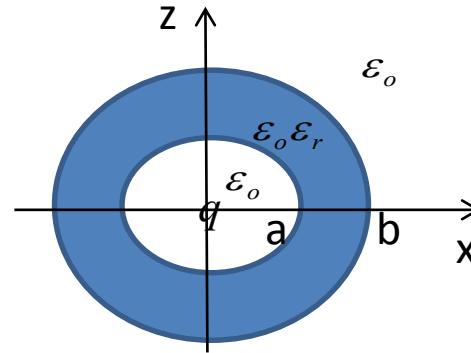
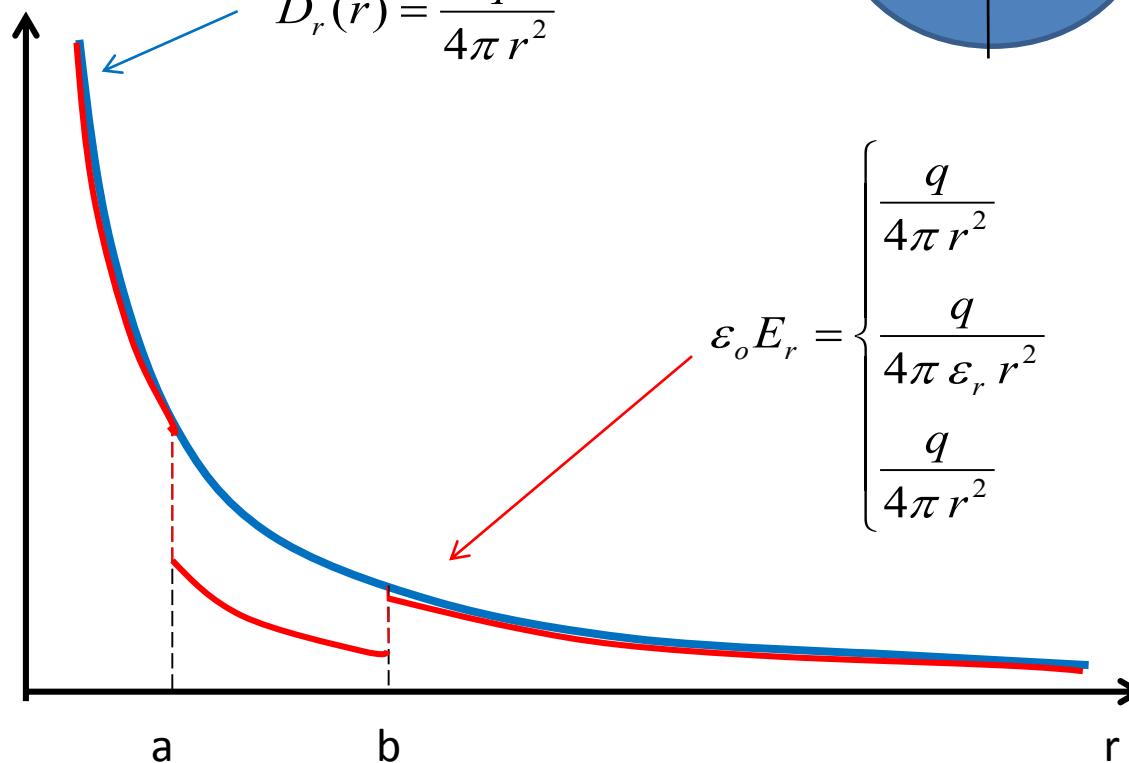
(ii)  $a < r < b$ :  $\chi_e = \varepsilon_r - 1 \quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ :

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi_e \vec{E} = \varepsilon_o (\varepsilon_r - 1) \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{a}_r$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_o \varepsilon_r r^2} \hat{a}_r$$

(iii)  $r > b$ :  $\chi_e = 0 \quad \varepsilon = \varepsilon_0$ :

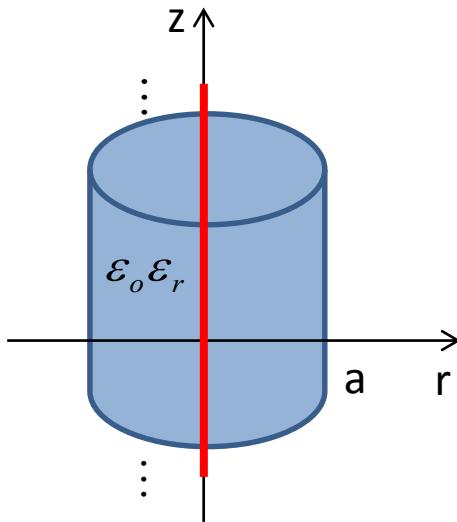
$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi_e \vec{E} = 0 \quad \vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_o r^2} \hat{a}_r$$



→ O efeito do dielétrico é diminuir o campo elétrico por um fator igual à permissividade relativa.

## Exemplo:

Distribuição linear uniforme de carga ( $\lambda$ ), recoberta por um cilindro dielétrico de raio  $a$  e permissividade relativa  $\epsilon_r$ .



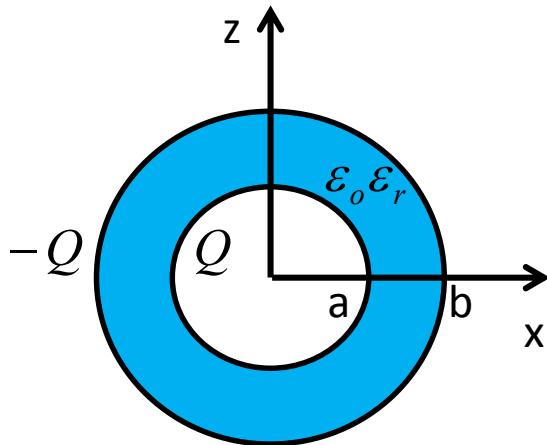
Campo elétrico?

$$R : \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} \hat{a}_r & r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{a}_r & r > a \end{cases}$$

## Exemplo: Capacitância:

Capacitor esférico

Simetria esférica:  $\vec{E} = E_r(r) \hat{a}_r$        $\vec{D} = D_r(r) \hat{a}_r$



$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_f \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{a}_r$$

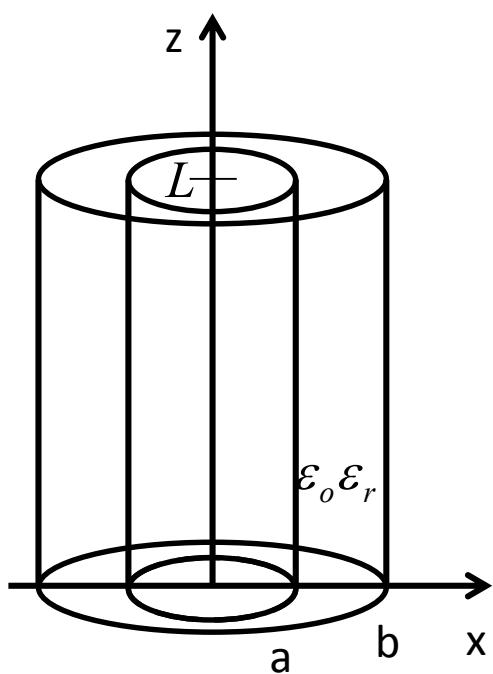
$$V_o = - \int_b^a \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_a^b \left( \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{a}_r \right) \bullet (\hat{a}_r dr) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{1/a - 1/b}$$

O efeito do dielétrico é de multiplicar a capacitância por  $\epsilon_r$ .

## Exemplo: Capacitância:

Capacitor cilíndrico



$$L \gg b$$

$$R : \quad C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln(b/a)}$$

## Observação:

Dielétricos lineares e homogêneos

$$\begin{aligned}\rho_P &= -\nabla \bullet \vec{P} \\ \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \nabla \bullet \vec{D} &= \rho_f \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\rho_P &= -\nabla \bullet \vec{P} = -\nabla \bullet (\epsilon_0 \chi_e \vec{E}) = \\ &= -\nabla \bullet \left( \epsilon_0 \chi_e \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) = -\frac{\chi_e}{\epsilon_r} \nabla \bullet \vec{D}\end{aligned}$$

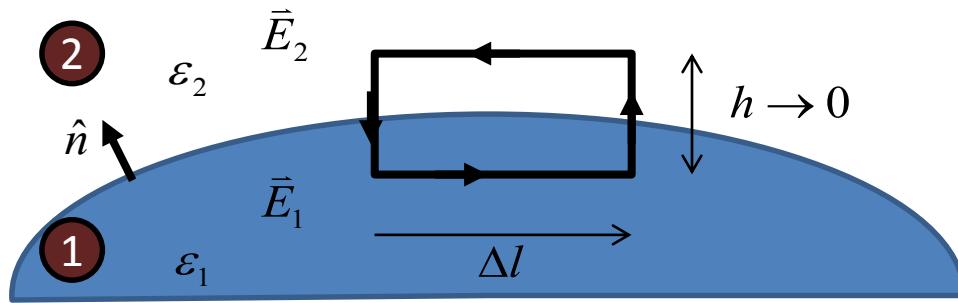


$$\rho_P = -\frac{\chi_e}{\epsilon_r} \rho_f$$

Em um dielétrico linear e homogêneo a densidade volumétrica de carga de polarização é proporcional à densidade volumétrica de cargas livres.

Se o dielétrico não tiver cargas volumétricas livres, as cargas de polarização se localizam na superfície.

## CONDIÇÕES DE CONTORNO:

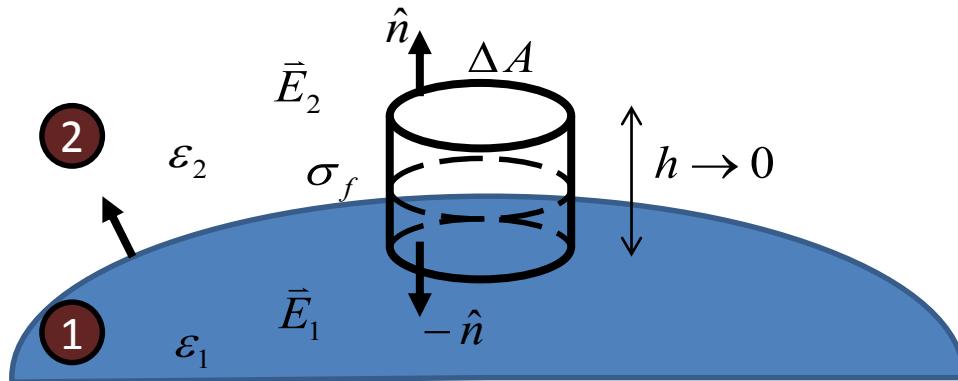


$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_1 \bullet \Delta \vec{l} + \vec{E}_2 \bullet (-\Delta \vec{l}) = 0$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

→ A componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface dielétrica.



$$\iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_f$$

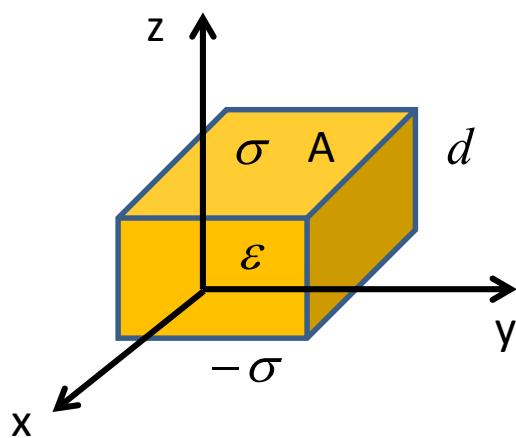
$$\vec{D}_2 \bullet (\Delta A \hat{n}) + \vec{D}_1 \bullet (-\Delta A \hat{n}) = \sigma_f \Delta A$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_f$$

→ A componente normal do vetor deslocamento é descontínua na interface dielétrica, e o valor da descontinuidade é igual à densidade superficial de cargas livres.

## Exemplo: Capacitância:



Capacitor planar:

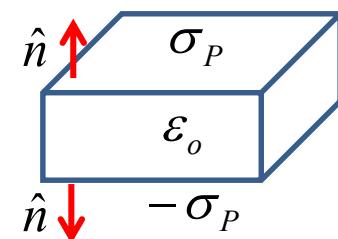
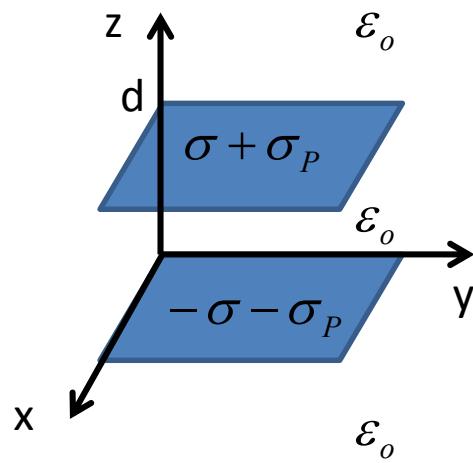
$$\text{Aproximação (área infinita): } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Simetria: campo vertical independente de  $x$  ou  $y$ :

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z$$

→  $\vec{D}(z \hat{a}_z) = D_z(z) \hat{a}_z$

**Problema equivalente:** substituindo o dielétrico por suas cargas de polarização:

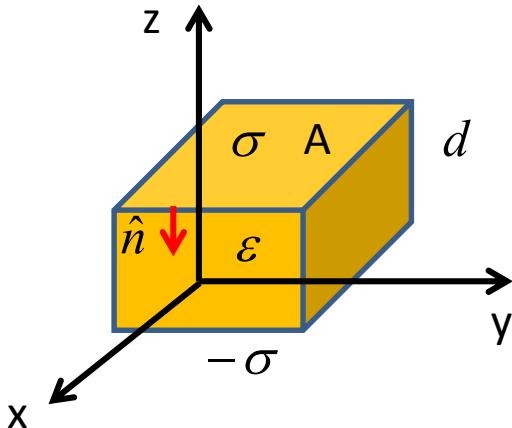


$$\rho_P = 0$$

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n} = \vec{P} \bullet \hat{a}_z$$



O campo elétrico é constante na região do dielétrico.  
E o mesmo ocorre no problema original.  
O vetor deslocamento é constante na região do dielétrico.



Por condição de contorno em  $z=d$ :

$$\vec{D} \bullet \hat{n} = \sigma$$

$$(D_z \hat{a}_z) \bullet (-\hat{a}_z) = \sigma \quad \rightarrow \quad D_z = -\sigma$$

$$E_z = \frac{D_z}{\epsilon} = -\frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$Q = \sigma A$$

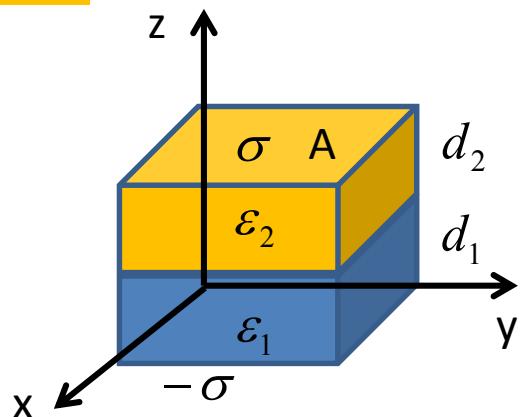
$$V_o = - \int_0^d \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \int_0^d \left( \frac{\vec{D}}{\epsilon} \right) \bullet d\vec{l} = - \int_0^d \left( -\frac{\sigma}{\epsilon} \hat{a}_z \right) \bullet (\hat{a}_z dz) = \frac{\sigma d}{\epsilon} = \frac{Q d}{\epsilon A}$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon A}{d}$$

# CAPACITÂNCIA COM DIELÉTRICOS NÃO HOMOGÊNEOS

**Exemplo:**

Capacitor planar com 2 dielétricos em série:



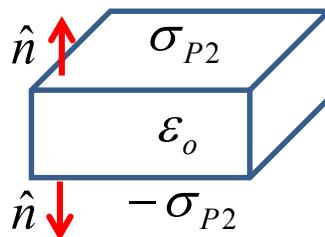
Aproximação (área infinita):  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

Simetria: campo vertical independente de  $x$  ou  $y$ :

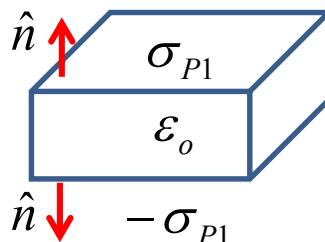
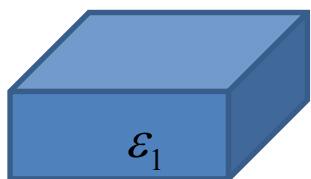
$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z$$

$$\vec{D}(z \hat{a}_z) = D_z(z) \hat{a}_z$$

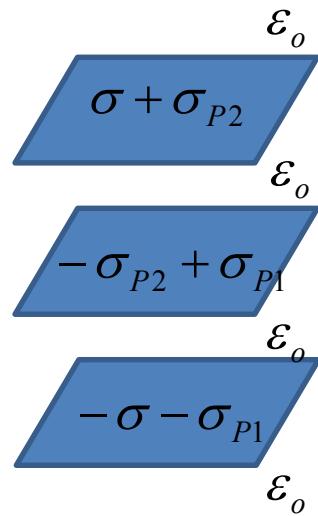
**Problema equivalente:** substituindo os dielétricos por suas cargas de polarização:



$$\rho_{P2} = 0 \quad \sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \vec{P}_2 \bullet \hat{a}_z$$



$$\rho_{P1} = 0 \quad \sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = \vec{P}_1 \bullet \hat{a}_z$$



Os campos elétricos são constantes em cada dielétrico.  
E o mesmo ocorre no problema original.  
Os vetores deslocamento são constantes em cada dielétrico.

Por condição de contorno em  $z=0$  e  $z=d$ :

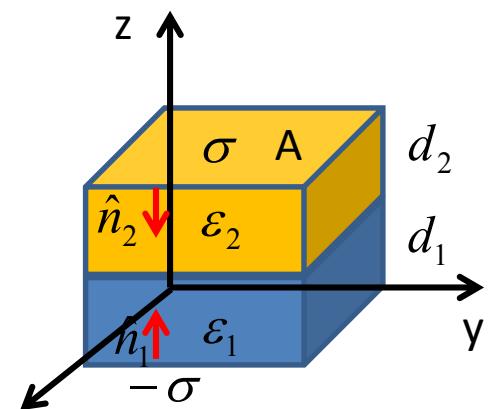
$$\vec{D}_2 \bullet \hat{n}_2 = \sigma \rightarrow (D_{2z} \hat{a}_z) \bullet (-\hat{a}_z) = \sigma \rightarrow D_{2z} = -\sigma$$

$$E_{2z} = -\frac{\sigma}{\epsilon_2}$$

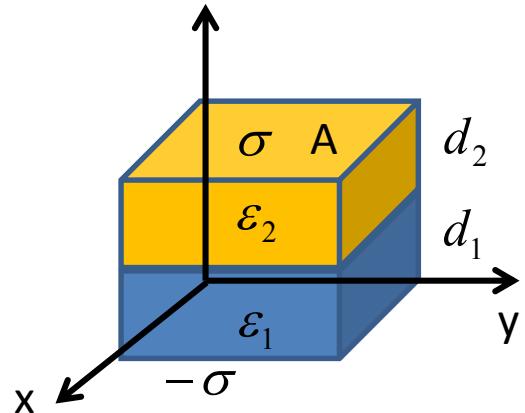
$$\vec{D}_1 \bullet \hat{n}_1 = -\sigma \rightarrow (D_{1z} \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_z = -\sigma \rightarrow D_{1z} = -\sigma$$

$$E_{1z} = -\frac{\sigma}{\epsilon_1}$$

$$\rightarrow \vec{E}_1 = E_{1z} \hat{a}_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_1} \hat{a}_z \quad \vec{E}_2 = E_{2z} \hat{a}_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_2} \hat{a}_z$$



$$\vec{E}_1 = E_{1z} \hat{a}_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_1} \hat{a}_z \quad \vec{E}_2 = E_{2z} \hat{a}_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_2} \hat{a}_z$$



Diferença de potencial:

$$V_o = - \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{l} - \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_2} d_2$$

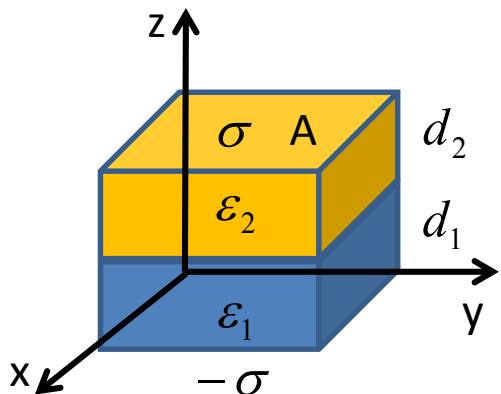
$$V_o = \frac{Q d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{Q d_2}{\epsilon_2 A}$$



$$\frac{1}{C} = \frac{V_o}{Q} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



Capacitores em série!



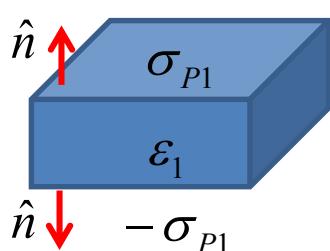
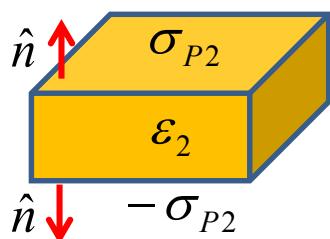
$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$E_{1z} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \quad E_{2z} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

Polarização no dielétrico 2:

$$\vec{P}_2 = \chi_{e2} \epsilon_0 \vec{E}_2 = -\frac{(\epsilon_{r2}-1)}{\epsilon_{r2}} \sigma \hat{a}_z$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{a}_z = -\frac{(\epsilon_{r2}-1)}{\epsilon_{r2}} \sigma$$



Polarização no dielétrico 1:

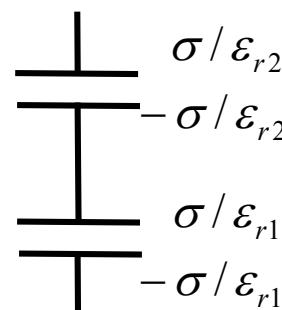
$$\vec{P}_1 = \chi_{e1} \epsilon_0 \vec{E}_1 = -\frac{(\epsilon_{r1}-1)}{\epsilon_{r1}} \sigma \hat{a}_z$$

$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{a}_z = -\frac{(\epsilon_{r1}-1)}{\epsilon_{r1}} \sigma$$

$$d_1 + d_2 \text{ ---} \quad \sigma + \sigma_{P2} = \sigma / \epsilon_{r2}$$

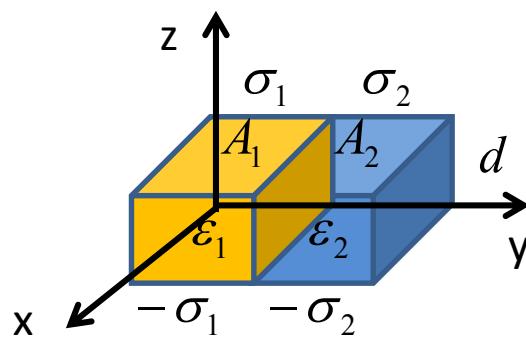
$$d_1 \text{ ---} \quad \sigma_{P1} - \sigma_{P2} = \sigma / \epsilon_{r1} - \sigma / \epsilon_{r2}$$

$$0 \text{ ---} \quad -\sigma - \sigma_{P1} = -\sigma / \epsilon_{r1}$$



→ Capacitores em série!

## Exemplo: Capacitor planar com 2 dielétricos em paralelo:

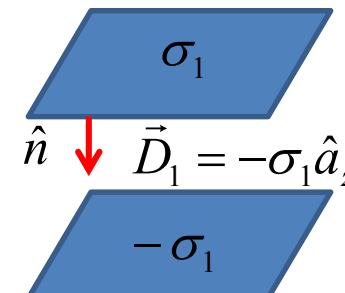


Aproximação (área infinita):  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

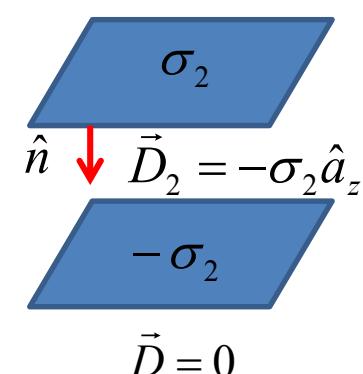
Simetria: campo vertical independente de x ou y:

$$\vec{E}(z \hat{a}_z) = E_z(z) \hat{a}_z \quad \rightarrow \quad \vec{D}(z \hat{a}_z) = D_z(z) \hat{a}_z$$

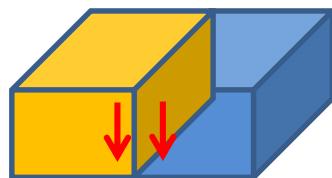
$$\vec{D} = 0$$



$$\vec{D} = 0$$



Condição de contorno na interface dielétrica:



$$\vec{E}_1 = E_{1z} \hat{a}_z \quad \rightarrow \quad E_{1z} = E_{2z}$$

$$\vec{E}_2 = E_{2z} \hat{a}_z$$

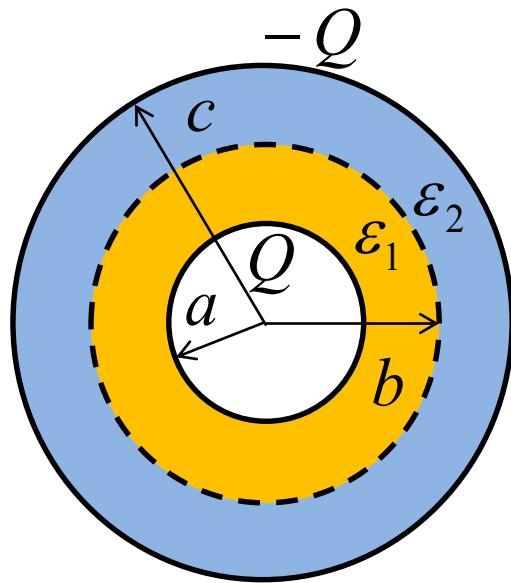
$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

$$V_o = - \int_0^d \vec{E}_1 \bullet d\vec{l} = -E_{1z} d$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2}{-E_{1z} d} = \frac{-E_{1z} \epsilon_1 A_1 - E_{2z} \epsilon_2 A_2}{-E_{1z} d} = \frac{\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2}{d} = C_1 + C_2$$

## Exemplo:

Capacitor esférico com 2 dielétricos em série:



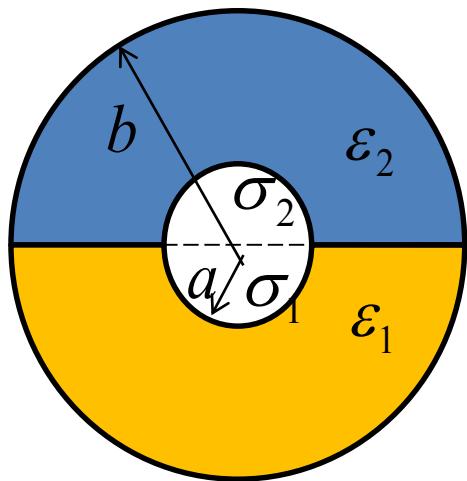
Densidade superficial de carga em  $r=a$ :  $\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2}$

Densidade superficial de carga em  $r=c$ :  $\sigma_c = \frac{-Q}{4\pi c^2}$

$$R: \frac{1}{C} = \frac{1/a - 1/b}{4\pi \epsilon_1} + \frac{1/b - 1/c}{4\pi \epsilon_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

## Exemplo:

Capacitor esférico com 2 dielétricos em paralelo.



Carga no hemisfério superior do condutor interno:

$$Q_2 = 2\pi a^2 \sigma_2$$

Carga no hemisfério inferior do condutor interno:

$$Q_1 = 2\pi a^2 \sigma_1$$

$\sigma_1$  e  $\sigma_2$ : densidades superficiais de carga

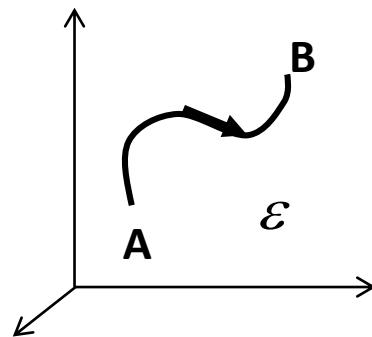
$$R: C = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{1/a - 1/b} = C_1 + C_2$$

# ELETROSTÁTICA EM MEIOS DIELÉTRICOS

## ENERGIA ELÉTRICA

(Segue os mesmos passos que para espaço livre...)

**Trabalho:**



$$W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_A^B (-q\vec{E}) \bullet d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = q[V(B) - V(A)]$$

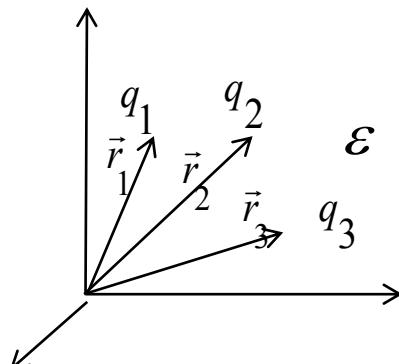


$$V(B) - V(A) = \frac{W}{q}$$

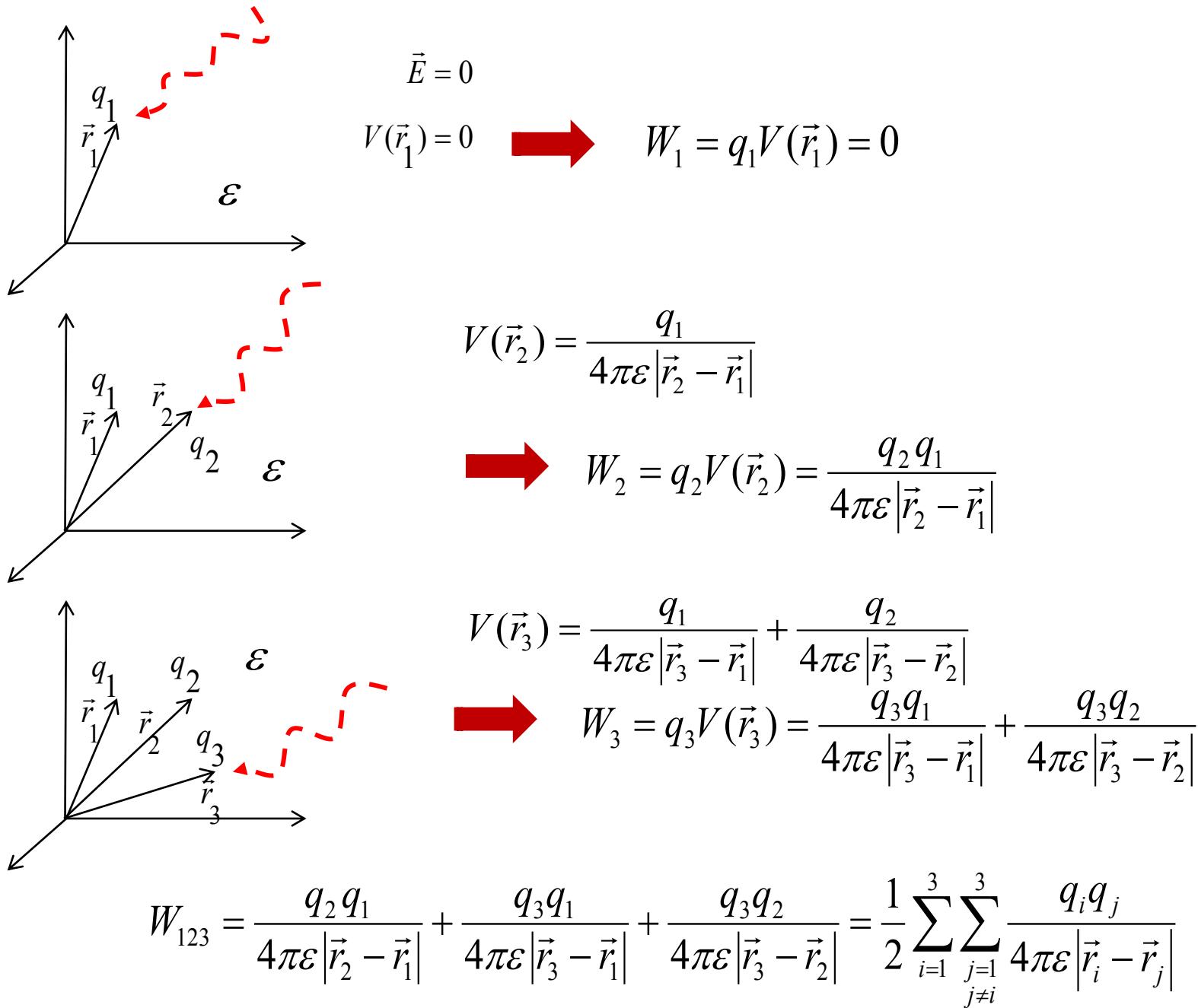
Se  $V(A)=0$ :

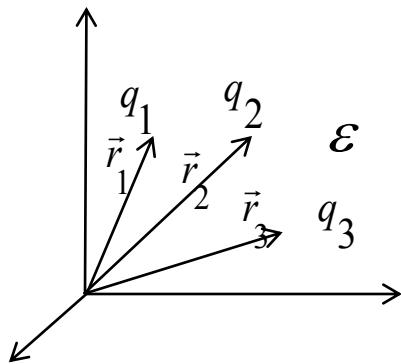
$$V(\vec{r}) = \frac{W}{q}$$

**Energia armazenada em um conjunto de cargas:**



$$W_{123} = ?$$



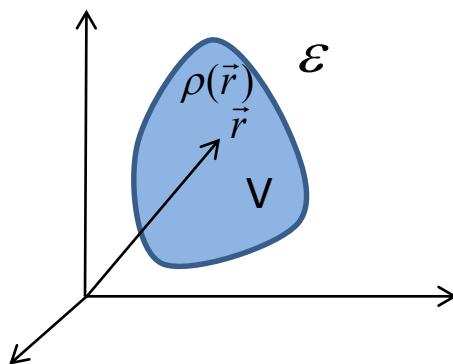


$$W_{123} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_j}{4\pi\epsilon |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right)$$

→

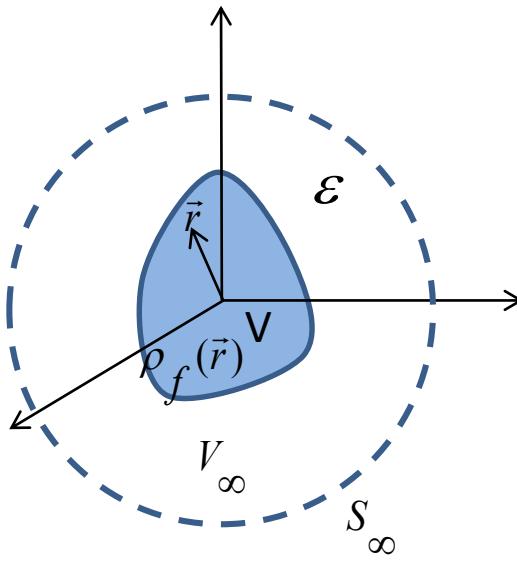
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$$

**Energia armazenada em uma distribuição de cargas:**



$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_v(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

## Energia armazenada em uma distribuição de cargas (alternativa):



$$\nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \bullet [V(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r})] = \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) V(\vec{r}) + \vec{D}(\vec{r}) \bullet \nabla V(\vec{r})$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_v(\vec{r}) V(\vec{r}) dv = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \rho_v(\vec{r}) V(\vec{r}) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) V(\vec{r}) dv =$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} [\nabla \bullet (V(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r})) - \vec{D}(\vec{r}) \bullet \nabla V(\vec{r})] dv = \frac{1}{2} \underbrace{\iint_{S_\infty} (V(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r})) \bullet d\vec{s}}_{V(\vec{r}) \propto 1/r} + \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) dv$$

$\rightarrow W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) dv$

$$\vec{D}(\vec{r}) \propto 1/r^2$$

$$ds \propto r^2$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) dv$$



$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Densidade volumétrica de energia elétrica.

Para o caso de espaço livre:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) dv \\ \vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon_o \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned} \right\} W = \frac{\epsilon_o}{2} \iiint_{V_\infty} |\vec{E}(\vec{r})|^2 dv$$

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 4.3 a 4.4.3

## **Exercícios:**

- Problemas 4.15, 4.20, 4.21, 4.26  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# SOLUÇÃO PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS

## EQUAÇÃO DE POISSON

Equação de Poisson:

Meio linear e homogêneo.

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) \\ \vec{E} = -\nabla V \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right\} \nabla \bullet (-\epsilon \nabla V) = \rho_f(\vec{r}) \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

Equação de Poisson

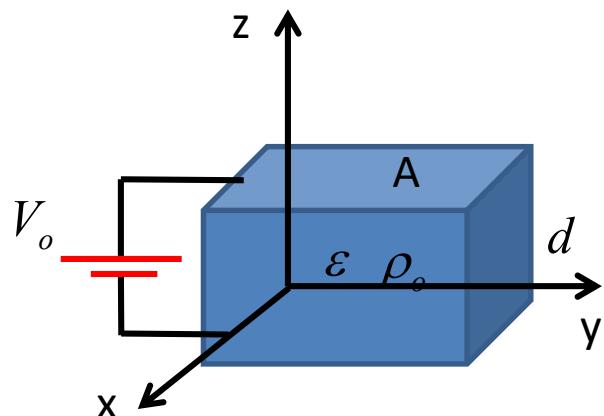
Se  $\rho_f(\vec{r}) = 0$ :

$$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Laplace

## Exemplo:

Capacitor planar com dielétrico de permissividade  $\epsilon$ , com distribuição volumétrica de carga  $\rho_o$ , e tensão  $V_o$ :



$$A \gg d^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial y} \approx 0$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_o}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_o}{\epsilon}$$

$$V(z) = -\frac{\rho_o}{2\epsilon} z^2 + a z + b$$

Condições de contorno:  $V(0) = 0$

$$\rightarrow b = 0$$

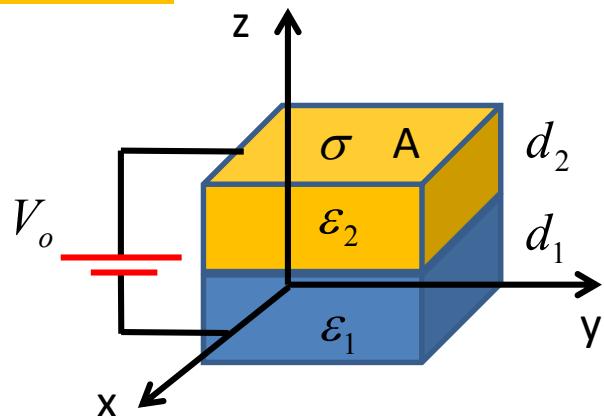
$$V(d) = V_o \quad \rightarrow \quad V_o = -\frac{\rho_o}{2\epsilon} d^2 + a d \quad \rightarrow \quad a = \frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o}{2\epsilon} d$$

$$\rightarrow V(z) = \frac{\rho_o}{2\epsilon} z(d-z) + \frac{V_o z}{d}$$

# CAPACITÂNCIA COM DIELÉTRICOS NÃO HOMOGÊNEOS

**Exemplo:**

Capacitor planar com 2 dielétricos em série:



$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V_2}{dz^2} = 0 \Rightarrow V_2(z) = cz + e$$

$$\nabla^2 V_1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V_1}{dz^2} = 0 \Rightarrow V_1(z) = az + b$$

Condições de contorno:

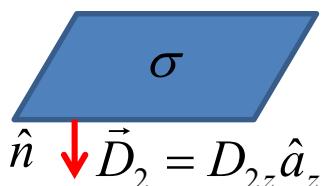
- 1)  $V_1(0) = 0 \Rightarrow a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0$
- 2)  $V_1(d_1) = V_2(d_1) \Rightarrow a d_1 = c d_1 + e \Rightarrow e = d_1(a - c)$
- 3)  $D_{1z}(d_1) = D_{2z}(d_1) \Rightarrow -\epsilon_1 \frac{dV_1(d_1)}{dz} = -\epsilon_2 \frac{dV_2(d_1)}{dz} \Rightarrow \epsilon_1 a = \epsilon_2 c$
- 4)  $V_2(d_1 + d_2) = V_o \Rightarrow c(d_1 + d_2) + e = V_o$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{V_o \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \\ c = \frac{V_o \varepsilon_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \\ e = \frac{V_o (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) d_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \end{array} \right.$$

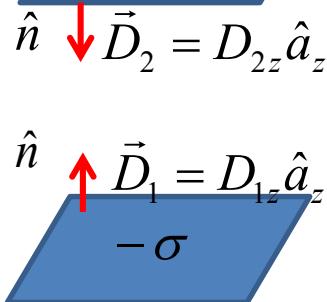


$$E_{1z}(z) = -\frac{dV_1(z)}{dz} = -a = \frac{-V_o \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

$$E_{2z}(z) = -\frac{dV_2(z)}{dz} = -c = \frac{-V_o \varepsilon_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$



$$\sigma = \vec{D}_2 \bullet \hat{n} = -\varepsilon_2 E_{2z} = \frac{V_o \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$



$$-\sigma = \vec{D}_1 \bullet \hat{n} = \varepsilon_1 E_{1z} = \frac{-V_o \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

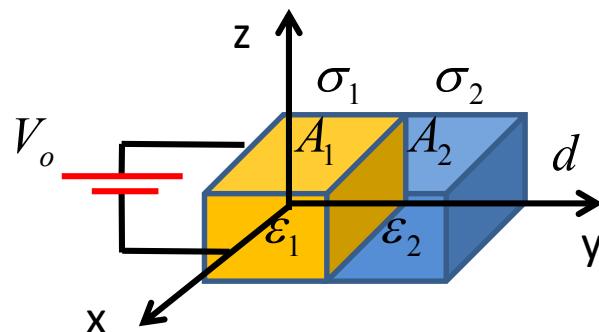
$$\rightarrow Q = \sigma A = \frac{V_o \varepsilon_1 \varepsilon_2 A}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$



$$\frac{1}{C} = \frac{V_o}{Q} = \frac{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 A} = \frac{d_2}{\varepsilon_2 A} + \frac{d_1}{\varepsilon_1 A}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

## Exemplo: Capacitor planar com 2 dielétricos em paralelo:

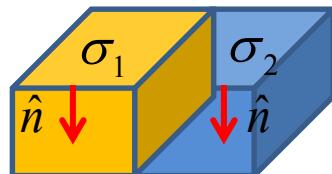


$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V(z) = az + b$$

Condições de contorno:

$$\left[ \begin{array}{l} 1) V(0) = 0 \Rightarrow a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 2) V(d) = V_o \Rightarrow a d + 0 = V_o \Rightarrow a = \frac{V_o}{d} \end{array} \right. \rightarrow \begin{aligned} V(z) &= \frac{V_o}{d} z \\ \vec{E}(z) &= -\nabla V(z) = -\frac{V_o}{d} \hat{a}_z \end{aligned}$$



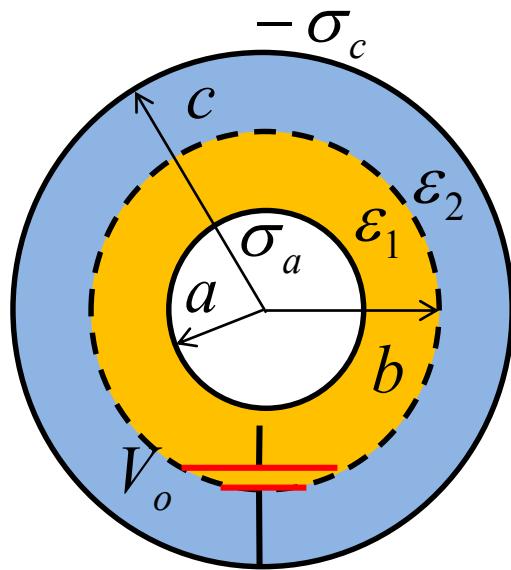
$$\sigma_1 = \vec{D}_1 \bullet \hat{n} = -D_{1z} = -\epsilon_1 E_z = \frac{\epsilon_1 V_o}{d}$$

$$\sigma_2 = \vec{D}_2 \bullet \hat{n} = -D_{2z} = -\epsilon_2 E_z = \frac{\epsilon_2 V_o}{d}$$

$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \frac{\epsilon_1 A_1 V_o}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2 V_o}{d} \rightarrow C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d} = C_1 + C_2$$

## Exemplo:

Capacitor esférico com 2 dielétricos em série:

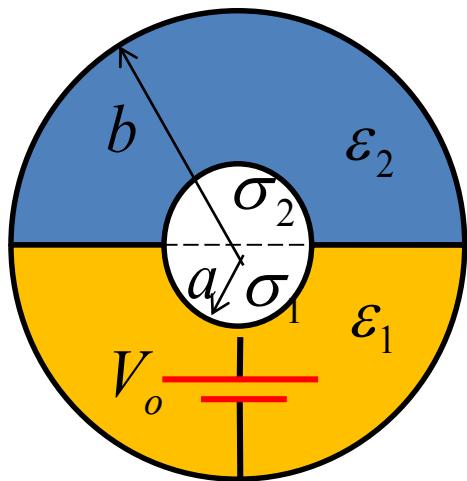


$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$R: \quad \frac{1}{C} = \frac{1/a - 1/b}{4\pi \epsilon_1} + \frac{1/b - 1/c}{4\pi \epsilon_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

## Exemplo:

Capacitor esférico com 2 dielétricos em paralelo:

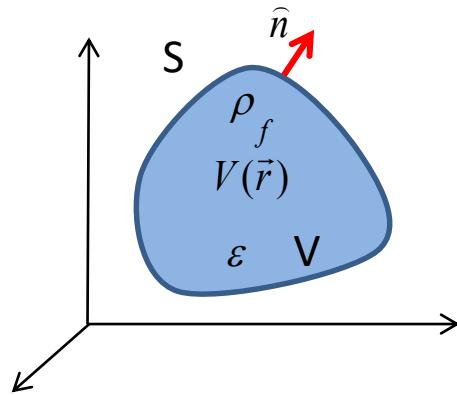


$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$R: C = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{1/a - 1/b} = C_1 + C_2$$

# SOLUÇÃO PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS

## TEOREMA DA UNICIDADE



A solução da equação de Poisson em um volume  $V$  é unicamente determinada pela densidade volumétrica de cargas livres, pelo meio, e pelos valores de  $V$  ou  $\partial V / \partial n$  na superfície  $S$  que envolve  $V$ .

$$\text{Suponha: } V(\vec{r})|_S = f(\vec{r}) \quad \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n}|_S = g(\vec{r})$$

Prova: Suponha que  $V_1(r)$  e  $V_2(r)$  são soluções para o potencial em  $V$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ V_1(\vec{r})|_S = f(\vec{r}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V_1(\vec{r})}{\partial n}|_S = g(\vec{r}) \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ V_2(\vec{r})|_S = f(\vec{r}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V_2(\vec{r})}{\partial n}|_S = g(\vec{r}) \end{array} \right]$$

Se  $V_d(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r})$



$$\left[ \begin{array}{l} \nabla^2 V_d = 0 \\ V_d(\vec{r})|_S = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V_d(\vec{r})}{\partial n}|_S = 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Identidade vetorial: } \nabla \bullet (f \vec{A}) = f \nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla f$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\vec{r}) = V_d(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) = \nabla V_d(\vec{r}) \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \nabla \bullet (V_d \nabla V_d) &= V_d \nabla \bullet \nabla V_d + \nabla V_d \bullet \nabla V_d \\ \nabla \bullet (V_d \nabla V_d) &= V_d \cancel{\nabla^2 V_d} + \nabla V_d \bullet \nabla V_d \\ \nabla \bullet (V_d \nabla V_d) &= \nabla V_d \bullet \nabla V_d \end{aligned}$$

Integrando no volume V:

$$\iiint_V \nabla \bullet (V_d \nabla V_d) dv = \iiint_V \nabla V_d \bullet \nabla V_d dv \quad \rightarrow \quad \oint_S V_d \nabla V_d \bullet \hat{n} ds = \iiint_V \nabla V_d \bullet \nabla V_d dv$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \oint_S V_d \frac{\partial V_d}{\partial n} ds &= \iiint_V \nabla V_d \bullet \nabla V_d dv \\ \left. \left( V_d \frac{\partial V_d}{\partial n} \right) \right|_S = 0 &\quad \rightarrow \quad \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial V_d}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_d}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_d}{\partial z} \right)^2 \right] dv = 0 \\ \rightarrow \quad \frac{\partial V_d}{\partial x} = \frac{\partial V_d}{\partial y} = \frac{\partial V_d}{\partial z} = 0 &\quad \rightarrow \quad V_d(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r}) = C \quad (\text{const.}) \end{aligned}$$

Se o valor do potencial é conhecido em algum ponto da superfície S, então C=0.

# SOLUÇÃO PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS

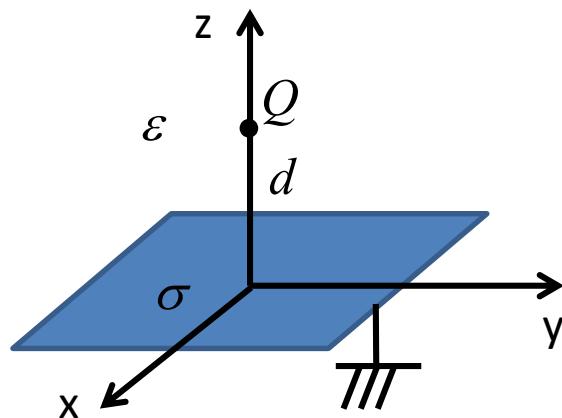
## MÉTODO DAS IMAGENS

### Método das imagens:

Substituição de superfícies de contorno por cargas imagens apropriadas.

### Exemplo:

Carga  $Q$  localizada a uma distância  $d$  de um plano condutor infinito e aterrado.



$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon|\vec{r} - d\hat{a}_z|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Se a densidade superficial de carga  $\sigma$  fosse conhecida, o potencial  $V(r)$  seria conhecido em qualquer ponto.

Para  $z < 0$ :  $V(r) = 0$

Volume  $V$ :  $z > 0$

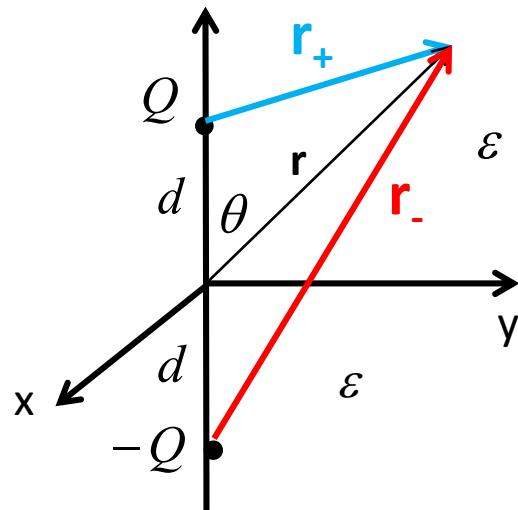
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon} \delta^3(\vec{r} - d\hat{a}_z) \\ V(\vec{r})|_S = 0 \end{array} \right.$$

Distribuição de carga em  $V$

Meio em  $V$

Condições de contorno em  $S$

## Problema alternativo:



$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_+} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon r_-}$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - d \hat{a}_z \quad \rightarrow \quad r_+ = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$\vec{r}_- = \vec{r} + d \hat{a}_z \quad \rightarrow \quad r_- = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}$$

No plano  $xy$  ( $z=0$ ):  $V(x, y, 0) = 0$

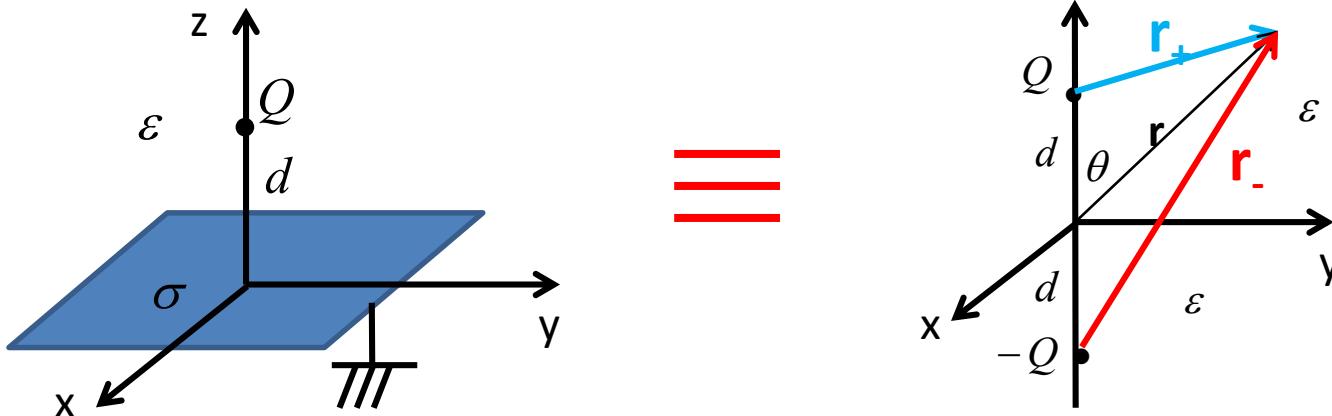
O problema alternativo tem:

- Mesma distribuição de carga em  $V(z>0)$  que o problema original.
- Mesmo meio em  $V(z>0)$  que o problema original.
- Satisfaz às mesmas condições de contorno na superfície  $S$  ( $z=0$ ), i.e.,  $V(z=0)=0$

→ Pelo teorema da unicidade, o potencial satisfazendo às condições acima é único!

→ O potencial do problema original, na região  $z>0$  é dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}$$



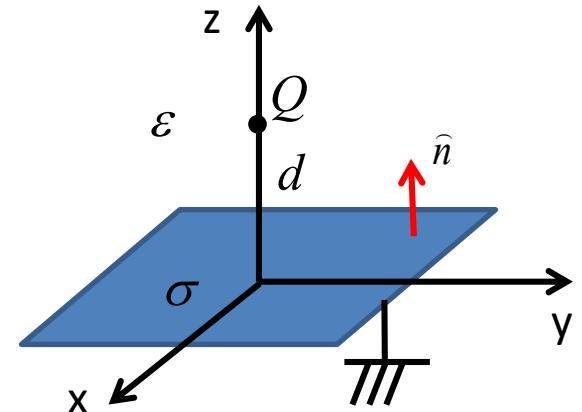
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \quad z \geq 0$$

Construção do problema equivalente (ou IMAGEM):

- Não pode haver alteração da distribuição de carga no volume de interesse V.
- Não pode haver alteração das características do meio no volume V.
- As cargas imagem são acrescentadas FORA do volume V.
- O meio fora de V é alterado para o mesmo meio do volume V, de forma a resultar em um meio homogêneo (mais fácil de obter o potencial).
- A distribuição de cargas do problema imagem precisa observar a mesma simetria do problema original.

Distribuição superficial de carga:

$$\sigma(x, y) = \vec{D} \bullet \hat{n} \Big|_S = \epsilon E_z(x, y, 0) = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{-Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$



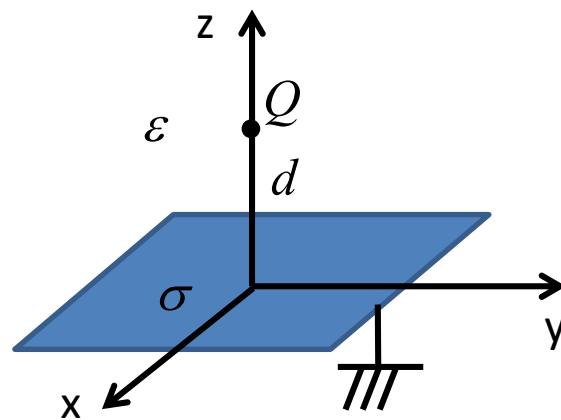
Carga total induzida no plano::

$$Q_{ind} = \iint_S \sigma(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{-Qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi =$$

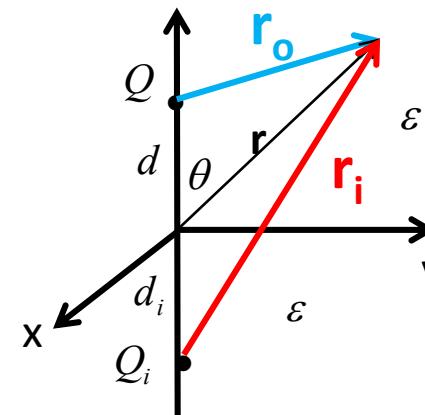
$$\rightarrow Q_{ind} = \left. \frac{Qd}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \right|_0^\infty = -Q$$

## Exemplo:

Carga  $Q$  localizada a uma distância  $d$  de um plano condutor infinito e aterrado. Determinar o valor da carga imagem  $Q_i$  e distância  $d_i$ .



$\equiv$



$$\vec{r}_o = \vec{r} - d \hat{a}_z \rightarrow r_o = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r} + d_i \hat{a}_z \rightarrow r_i = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d_i)^2}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d_i)^2}}$$

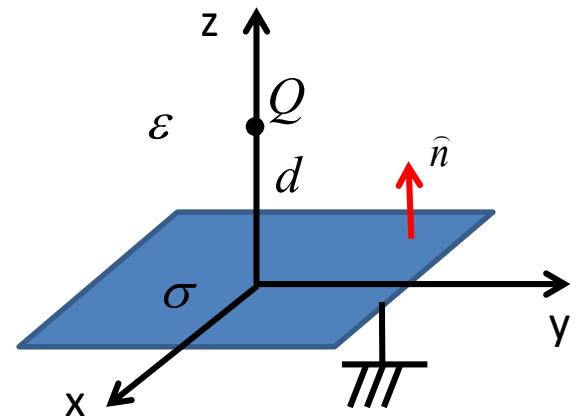
Existe  $Q_i$  e  $d_i$  tal que  $V(x, y, 0) = 0$  ?

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad V(x, y, 0) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_i = -Q \\ x = y = 0 \quad V(0, 0, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 d_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{d} + \frac{-Q}{d_i} = 0 \quad \rightarrow \quad d_i = d \end{array} \right.$$

A solução acima satisfaz a condição de contorno em todo o planxo xy?

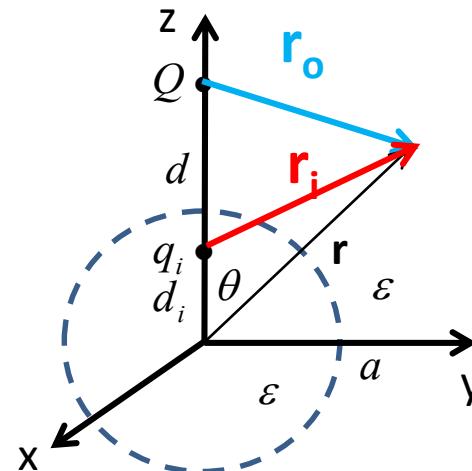
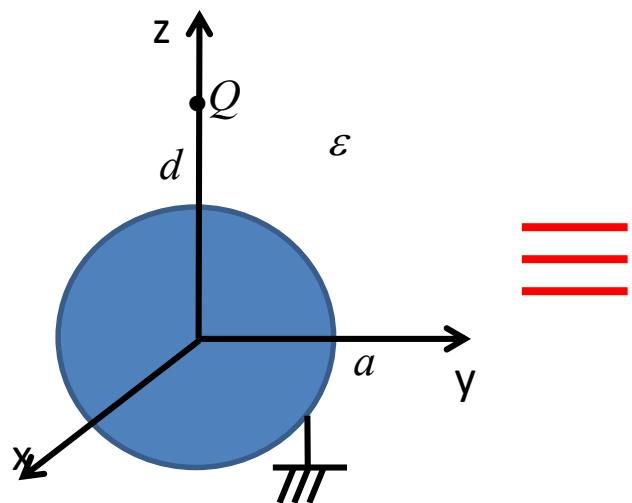
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}$$

$$V(x, y, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} = 0$$



## Exemplo:

Carga  $Q$  localizada a uma distância  $d$  do centro de uma esfera condutora aterrada de raio  $a$ .



$$r_o = \sqrt{r^2 + d^2 - 2 r d \cos \theta}$$

$$r_i = \sqrt{r^2 + d_i^2 - 2 r d_i \cos \theta}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_o} + \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{r^2 + d^2 - 2 r d \cos \theta}} + \frac{q_i}{4\pi\epsilon \sqrt{r^2 + d_i^2 - 2 r d_i \cos \theta}}$$

Para que o problema equivalente ao original na região  $V(r > a)$ :  $V(a, \theta) = 0 \quad \forall \theta$

$$\left[ \begin{array}{l} \theta = 0: \quad V(a, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{d-a} + \frac{q_i}{a-d_i} = 0 \\ \theta = \pi: \quad V(a, \pi) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{d+a} + \frac{q_i}{a+d_i} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sqrt{(d-a)^2} = |d-a| = d-a \\ \sqrt{(d_i-a)^2} = |d_i-a| = a-d_i \end{array}$$

$$\rightarrow \quad q_i = -Q \frac{a}{d} \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} + \frac{-Q a/d}{4\pi\epsilon \sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2r \frac{a^2}{d} \cos\theta}}$$

A solução acima satisfaz a condição de contorno em  $r=a$  para todo  $\theta$ ?

$$V(a, \theta) = 0 \quad \forall \theta \quad ?$$

$$V(a, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos\theta}} + \frac{-Q a/d}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2a \frac{a^2}{d} \cos\theta}} = 0$$

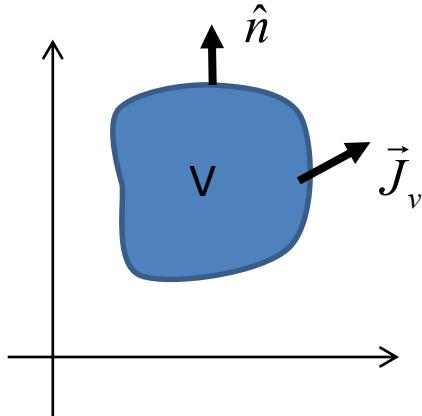
## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 3.1 e 3.2

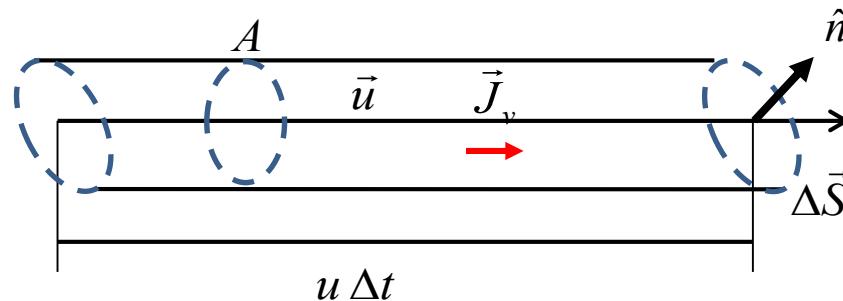
## **Exercícios:**

- Problemas 3.7, 3.8, 3.10  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS



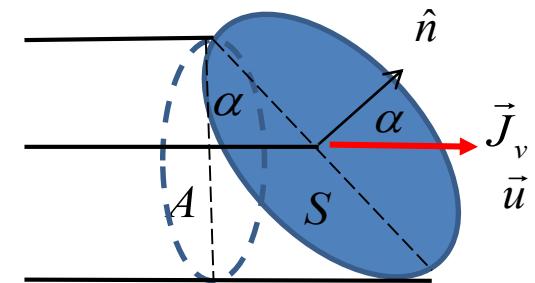
Supondo que no volume  $V$  haja uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ , se deslocando com uma velocidade  $u$ :



Carga que atravessa a superfície  $\Delta \vec{S}$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned}\Delta q &= \rho \Delta v = \rho (A u \Delta t) = \rho u (\Delta S \cos \alpha \Delta t) = \\ &= \rho \vec{u} \bullet \Delta \vec{S} \Delta t\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\Delta I &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho \vec{u} \bullet \Delta \vec{S} \\ \Delta I &= \vec{J}_v \bullet \Delta \vec{S}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{J}_v = \rho \vec{u}}$$



Densidade volumétrica de corrente ( $A/m^2$ )

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS – LEI DE OHM

$$\Delta I = \vec{J}_v \bullet \Delta \vec{S} \quad \rightarrow \quad I = \iint_S \vec{J}_v \bullet d\vec{S}$$

A velocidade de deriva  $\vec{u}$  é proporcional ao campo elétrico:  $\vec{u} = -\mu \vec{E}$

$$\vec{J}_v = \rho \vec{u} = -\rho \mu \vec{E}$$

→ mobilidade  
elétrons

↗  $\sigma = -\rho \mu$



$$\vec{J}_v = \sigma \vec{E}$$

**Lei de Ohm**

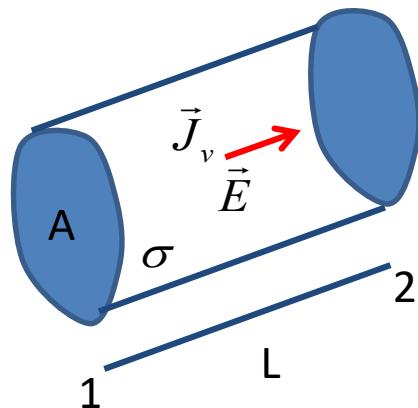
condutividade

	$\sigma$ (1/ $\Omega m$ )
Cobre	$5.8 \cdot 10^7$
Silício	$1.6 \cdot 10^{-3}$
borracha	$10^{-15}$

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS – LEI DE OHM

## Exemplo:

Material homogêneo de condutividade  $\sigma$ , seção reta uniforme A. Campo Elétrico uniforme.



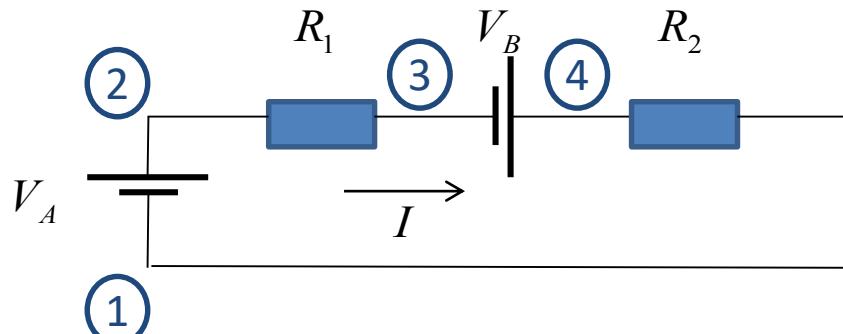
$$V_{12} = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} = E L$$

$$I = \iint_A \vec{J}_v \bullet d\vec{a} = \iint_A (\sigma \vec{E}) \bullet d\vec{a} = \sigma E A$$

$$\rightarrow R = \frac{V_{12}}{I} = \frac{L}{\sigma A} \quad \text{Resistência}$$

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS – LEIS DE KIRCHHOFF

Lei das Malhas:



$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$\int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$V_A = V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$V_B = V_4 - V_3 = - \int_3^4 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$R_1 I = V_2 - V_3 = - \int_3^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_2^3 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$R_2 I = V_4 - V_1 = - \int_1^4 \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_4^1 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$



$$-V_A + R_1 I - V_B + R_2 I = 0$$

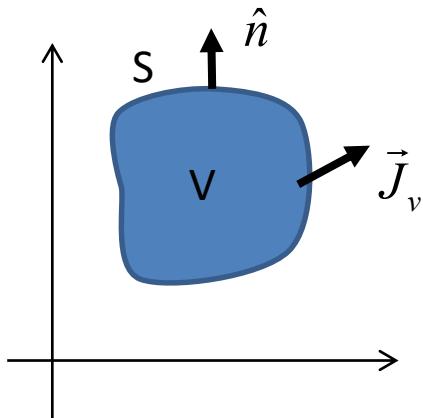


$$\sum_i V_i = \sum_j R_j I$$

$$\left[ \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} \right]$$

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS – LEIS DE KIRCHHOFF

## Equação da Continuidade:



Uma corrente  $I$  deixa o volume  $V$  através da superfície  $S$ :

$$I(t) = \iint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet d\vec{s}$$

Carga total no volume  $V$ :  $Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dv$

Conservação da carga:  $I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$

→  $\iint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet d\vec{s} = -\frac{dQ(t)}{dt}$

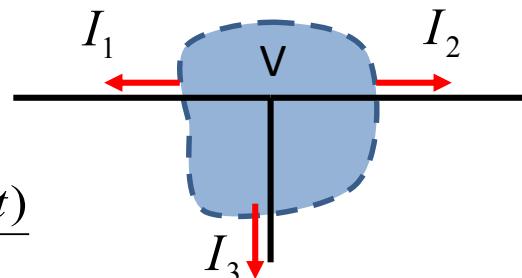
$$\iint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dv$$

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}, t) dv = -\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) dv \quad \forall V$$

→  $\nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS – LEIS DE KIRCHHOFF

Lei dos Nós:

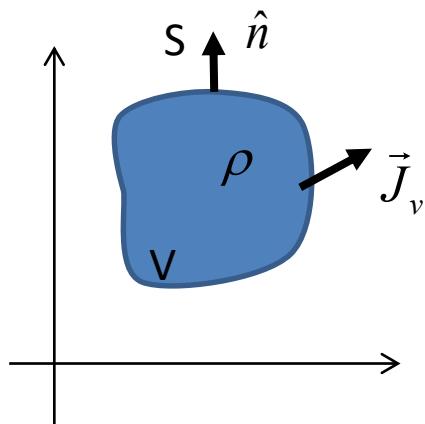


$$\oint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet d\vec{s} = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

Se  $\frac{dQ(t)}{dt} \approx 0$   $\oint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet d\vec{s} = 0$

$$\sum_i I_i = 0$$

# VARIAÇÃO TEMPORAL DE DENSIDADE DE CARGA EM MEIOS CONDUTIVOS



Meio homogêneo de condutividade  $\sigma$  e permissividade  $\epsilon$ :

Distribuição inicial de carga:  $\rho(\vec{r}, 0) = \rho_o(\vec{r})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \\ \vec{J}_v = \sigma \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \nabla \bullet \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

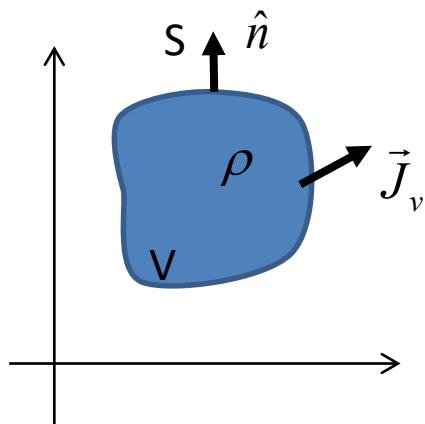
$$\nabla \bullet [\sigma \vec{E}(\vec{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \quad \nabla \bullet \left[ \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}(\vec{r}, t) \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \quad \rho(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

$$t = 0: \quad \rho(\vec{r}, 0) = f(\vec{r}) = \rho_o(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \rho(\vec{r}, t) = \rho_o(\vec{r}) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

# VARIAÇÃO TEMPORAL DE DENSIDADE DE CARGA EM MEIOS CONDUTIVOS



$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o(\vec{r}) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

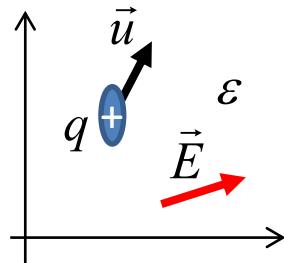
A carga no interior do meio se move para a superfície.

Tempo de relaxação:  $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o(\vec{r}) e^{-t/\tau}$$

Exemplo: cobre     $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \text{ } 1/\Omega m$      $\varepsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ } F/m$      $\rightarrow$      $\tau = 1.52 \cdot 10^{-19} \text{ } s$

# CORRENTES ESTACIONÁRIAS – LEI DE JOULE



Trabalho realizado pelo campo elétrico para mover a carga q por uma distância  $d\vec{l} = \vec{u} dt$ .

$$dW = \vec{F}_e \bullet d\vec{l} = q \vec{E} \bullet d\vec{l} = q \vec{E} \bullet (\vec{u} dt)$$

Potência para mover a carga q:

$$dp = \frac{dW}{dt} = q \vec{E} \bullet \vec{u}$$

Potência para mover as cargas em um volume dv:

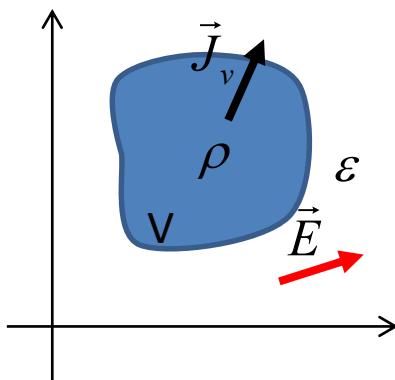
$$dq = \rho dv$$

$$dP = dq \vec{E} \bullet \vec{u} = \rho dv \vec{E} \bullet \vec{u} = (\rho \vec{u}) \bullet \vec{E} dv = \vec{J}_v \bullet \vec{E} dv$$

Potência em todo o volume V:

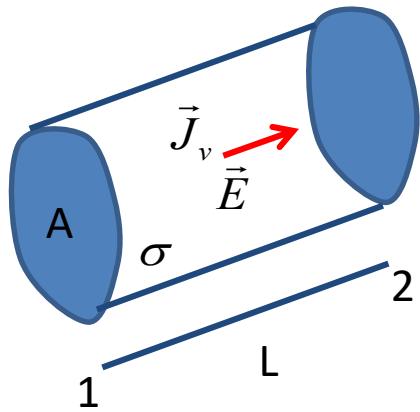
$$P = \iiint_V \vec{E} \bullet \vec{J}_v dv$$

Lei de Joule



## Exemplo:

Material homogêneo de condutividade  $\sigma$ , seção reta uniforme A. Campo Elétrico uniforme.



$$P = \iiint_V \vec{E} \bullet \vec{J}_v dv = \int_1^2 \int_A \vec{E} \bullet \vec{J}_v da dl = \int_1^2 \vec{E} \bullet \iint_A \vec{J}_v da dl$$

Usando:

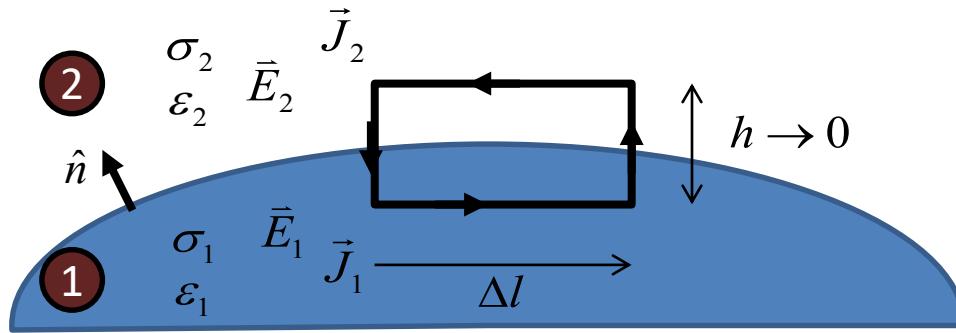
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{I} = \iint_A \vec{J}_v da \\ V_{12} = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} \\ \vec{I} dl = I d\vec{l} \end{array} \right.$$

$$P = \int_1^2 \vec{E} \bullet \iint_A \vec{J}_v da dl = \int_1^2 \vec{E} \bullet \vec{I} dl = \int_1^2 \vec{E} \bullet (I d\vec{l}) = I \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\rightarrow P = V_{12} I$$

$$P = (R I) I = R I^2$$

## CONDIÇÕES DE CONTORNO:

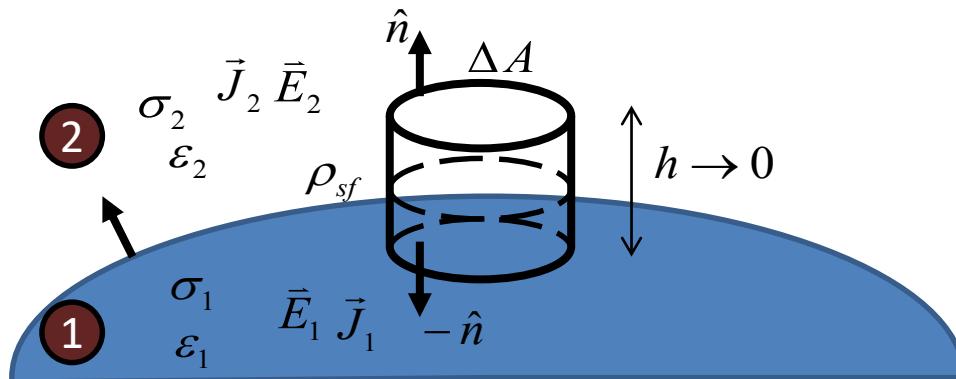


$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_1 \bullet \Delta \vec{l} + \vec{E}_2 \bullet (-\Delta \vec{l}) = 0$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

→ A componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface dielétrica.



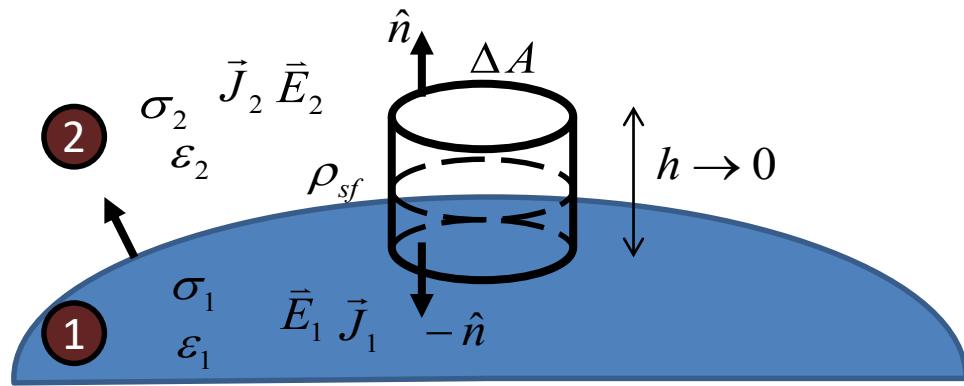
$$\iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_f$$

$$\vec{D}_2 \bullet (\Delta A \hat{n}) + \vec{D}_1 \bullet (-\Delta A \hat{n}) = \rho_{sf} \Delta A$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_{sf}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_{sf}$$

→ A componente normal do vetor deslocamento é descontínua na interface dielétrica, e o valor da descontinuidade é igual à densidade superficial de cargas livres.



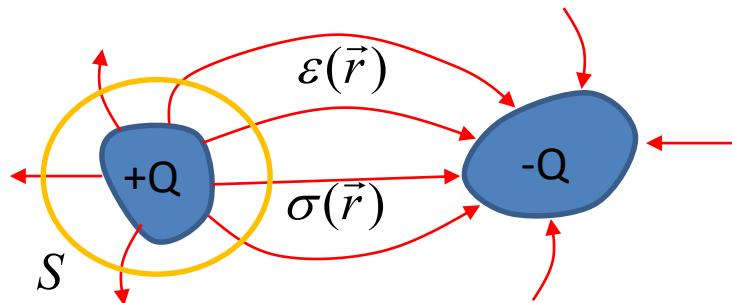
$$\iint_S \vec{J}_v \bullet d\vec{s} = -\frac{dQ_f}{dt} = 0$$

$$\vec{J}_{v2} \bullet (\Delta A \hat{n}) + \vec{J}_{v1} \bullet (-\Delta A \hat{n}) = 0$$

$$J_{v2n} = J_{v1n}$$

→ A componente normal da densidade volumétrica de corrente é contínua na interface dielétrica.

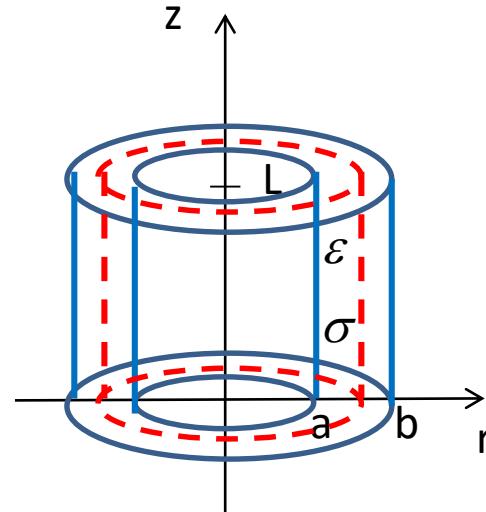
# CÁLCULO DE RESISTÊNCIA



1. Assumir uma diferença de potencial ( $V_0$ ) entre os condutores,
2. Determinar o potencial:  $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$
3. Determinar o campo elétrico:  $\vec{E} = -\nabla V$
4. Determinar a densidade volumétrica de corrente:  $\vec{J}_v = \sigma \vec{E}$
4. Determinar a corrente total entre os condutores:  $I = \oint_S \vec{J}_v \bullet d\vec{s}$
5. Achar a resistência:  $R = \frac{V_o}{I}$

## Exemplo:

Capacitor cilíndrico de comprimento L ( $L \gg b$ ), raios a e b, permissividade  $\epsilon$  e condutividade  $\sigma$ .



$$L \gg b \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial z} \approx 0$$

$$\nabla^2 V(r) = 0 \quad \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow V(r) = A \ln(r) + B$$

$$\begin{cases} V(b) = 0 \Rightarrow V(b) = A \ln(b) + B = 0 \\ V(a) = V_o \Rightarrow V(a) = A \ln(a) + B = V_o \end{cases}$$

$$\rightarrow V(r) = V_o \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \quad \rightarrow \vec{E}(r) = -\nabla V = \frac{V_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \hat{a}_r$$

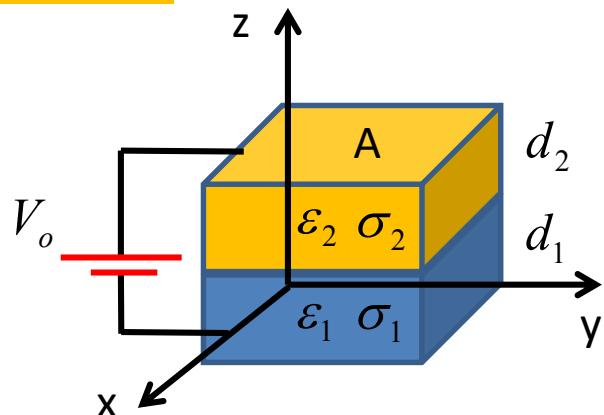
$$\rightarrow I = \int_0^L \int_0^{2\pi} \vec{J}_v(r) \bullet \hat{a}_r r d\phi dz = \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma \vec{E}(r) \bullet \hat{a}_r r d\phi dz = \frac{\sigma 2\pi L V_o}{\ln(b/a)}$$

$$\rightarrow R = \frac{V_o}{I} = \frac{\ln(b/a)}{\sigma 2\pi L}$$

# CAPACITÂNCIA COM DIELÉTRICOS NÃO HOMOGÊNEOS

**Exemplo:**

Capacitor planar com 2 dielétricos em série:



$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 V_1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V_1}{dz^2} = 0 \Rightarrow V_1(z) = az + b$$

$$\nabla^2 V_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V_2}{dz^2} = 0 \Rightarrow V_2(z) = cz + e$$

Condições de contorno:

$$1) V_1(0) = 0 \Rightarrow a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$2) V_1(d_1) = V_2(d_1) \Rightarrow a d_1 = c d_1 + e \Rightarrow e = d_1(a - c)$$

$$3) D_{2z}(d_1) - D_{1z}(d_1) = \rho_{sf} \Rightarrow -\epsilon_2 \frac{dV_2(d_1)}{dz} + \epsilon_1 \frac{dV_1(d_1)}{dz} = \rho_{sf} \Rightarrow -\epsilon_2 c + \epsilon_1 a = \rho_{sf}$$

$$4) J_{2z}(d_1) = J_{1z}(d_1) \Rightarrow \sigma_2 E_{2z}(d_1) = \sigma_1 E_{1z}(d_1) \Rightarrow \sigma_2 c = \sigma_1 a$$

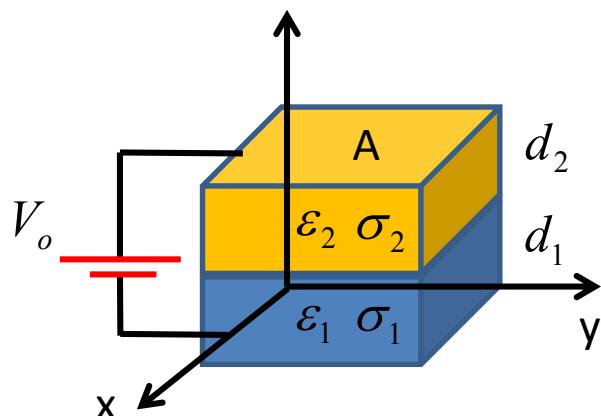
$$5) V_2(d_1 + d_2) = V_o \Rightarrow c(d_1 + d_2) + e = V_o$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{V_o \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \\ c = \frac{V_o \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \\ e = \frac{V_o (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) d_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \end{array} \right.$$



$$E_{1z}(z) = -\frac{dV_1(z)}{dz} = -a = \frac{-V_o \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$E_{2z}(z) = -\frac{dV_2(z)}{dz} = -c = \frac{-V_o \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$



$$J_{vz}(z) = \sigma_1 E_{1z}(z) = \sigma_2 E_{2z}(z) = \frac{-V_o \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

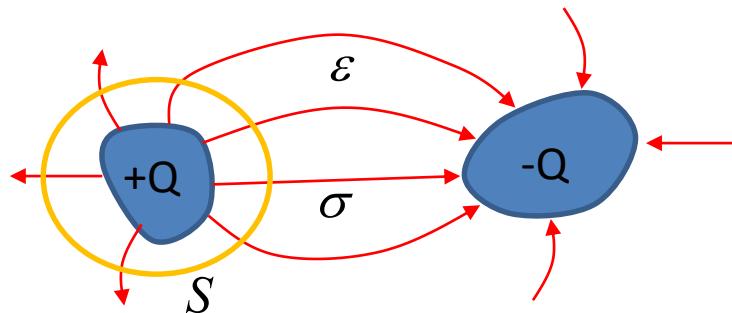
$$I = \iint_A \vec{J}_v(z) \bullet (-\hat{a}_z) da = \frac{V_o \sigma_1 \sigma_2 A}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}{\sigma_1 \sigma_2 A} = \frac{d_2}{\sigma_2 A} + \frac{d_1}{\sigma_1 A} = R_1 + R_2$$



Conexão série dos resistores  $R_1$  e  $R_2$ .

# CÁLCULO DE RESISTÊNCIA – MEIOS HOMOGENEOS



Meio homogêneo:  $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon$        $\sigma(\vec{r}) = \sigma$

Capacitância: 
$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{\iint_S \vec{D}(\vec{r}) \bullet d\vec{s}}{- \int_{\text{+}}^{\text{-}} \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{l}} = \frac{\epsilon \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s}}{- \int_{\text{+}}^{\text{-}} \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{l}}$$

Resistência: 
$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{\int_{\text{-}}^{\text{+}} \vec{J}_v(\vec{r}) \bullet d\vec{s}}{\sigma \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \bullet d\vec{s}}$$

}
→
 $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seção 7.1

## **Exercícios:**

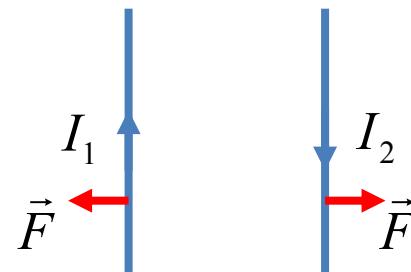
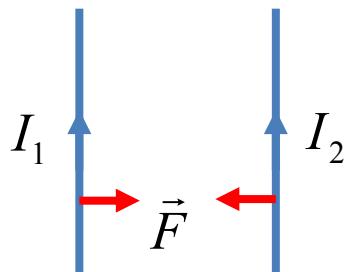
- Problemas 7.1, 7.3  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

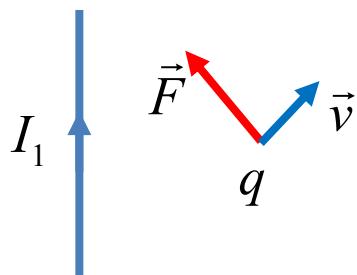
## LEI DE BIOT SAVART

### Conhecido:

1. Correntes elétricas constantes estavam sujeitas a forças de atração ou repulsão.



2. Cargas elétricas em movimento, na presença de correntes elétricas constantes também sofrem a ação de forças.



# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## LEI DE BIOT SAVART

**Modelo:**

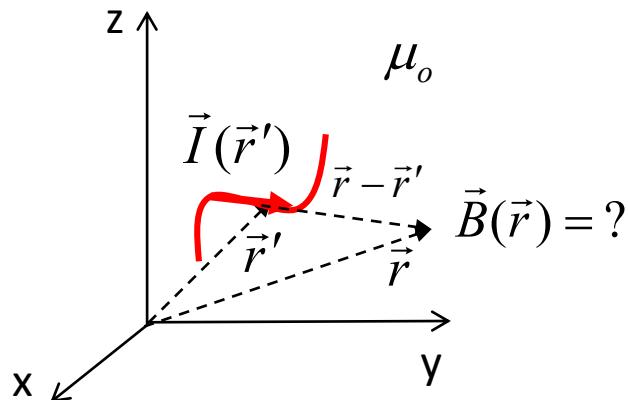
Corrente elétrica



Campo magnético



Força magnética



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Campo Magnético  
Lei de Biot-Savart

$\mu_o$  : permeabilidade do espaço livre

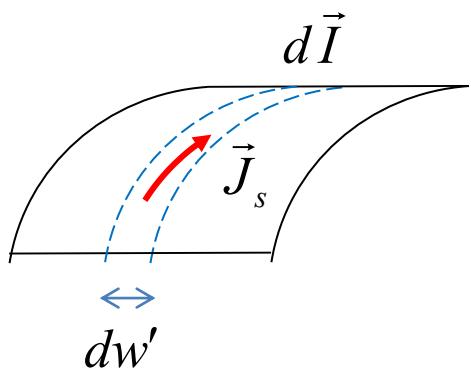
$$\mu_o = 4\pi 10^{-7} \text{ N / A}^2$$

O campo magnético é:

1. inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a corrente elétrica e o ponto de observação.
2. Sua direção é ortogonal ao plano que contém o elemento de corrente e a direção deste ponto ao ponto de observação.
3. Sua magnitude é proporcional ao seno do ângulo entre a direção do elemento de corrente e a direção deste ponto ao ponto de observação.

## Densidade superficial de corrente:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) \quad (A/m)$$



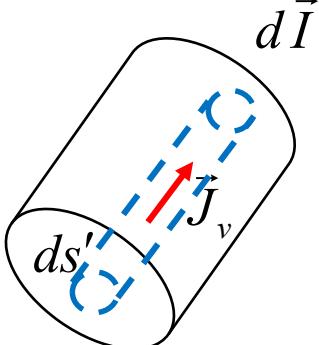
$$\vec{J}_s = \lim_{\Delta w' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta w'} \quad \rightarrow \quad d\vec{I} = \vec{J}_s dw'$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl' = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{(\vec{J}_s(\vec{r}') dw') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} ds'$$

## Densidade volumétrica de corrente:

$$\vec{J}_v(\vec{r}) \quad (A/m^2)$$



$$\vec{J}_v = \lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta s'} \quad \rightarrow \quad d\vec{I} = \vec{J}_v ds'$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl' = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{(\vec{J}_v(\vec{r}') ds') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$

## Força magnética:

Corrente  
elétrica

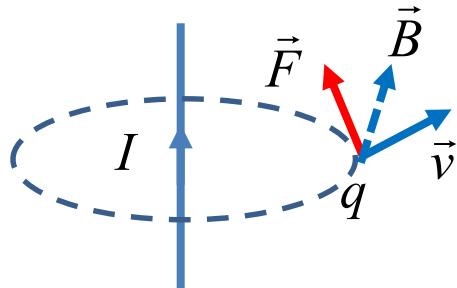


Campo  
magnético



Força  
magnética

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$



O campo magnético  $B$  exerce uma força sobre uma carga movendo-se na velocidade  $v$ , dada por:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

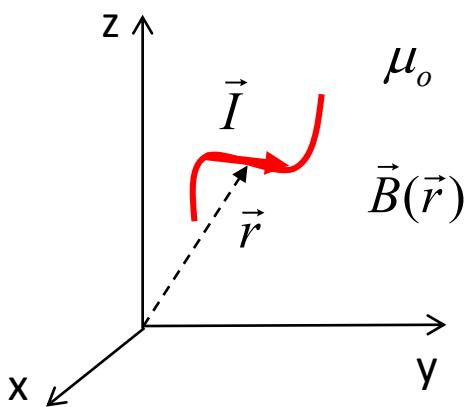
A força magnética é ortogonal à velocidade!

→ A força magnética não realiza trabalho!!

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{l} = \vec{F} \bullet (\vec{v} dt) = 0$$

A força magnética pode alterar a direção na qual uma carga se move, mas não pode acelerá-la ou desacelerá-la.

## Corrente elétrica filamentar na presença de campo magnético:



Seja  $\rho_l$  a densidade linear de carga no filamento.

Um pequeno segmento  $dl$  tem uma carga:

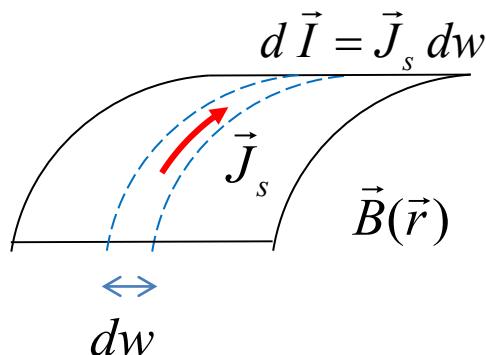
$$dq = \rho_l dl \quad \rightarrow \quad I = \frac{dq}{dt} = \rho_l \frac{dl}{dt} = \rho_l v$$

Força magnética no pequeno elemento  $dl$ :

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = (\rho_l dl) \vec{v} \times \vec{B} = (\rho_l \vec{v}) \times \vec{B} dl = \vec{I} \times \vec{B} dl$$

$$\rightarrow \vec{F} = \int_C \vec{I} \times \vec{B} dl$$

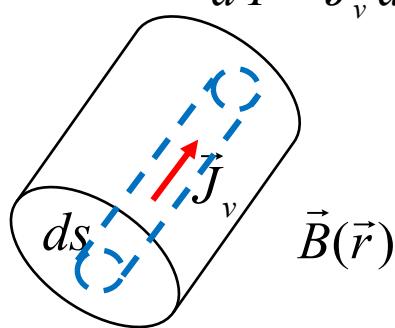
## Densidade superficial de corrente elétrica na presença de campo magnético:



$$d\vec{F} = \int_C d\vec{I} \times \vec{B} dl = \int_C (\vec{J}_s dw) \times \vec{B} dl = \int_C \vec{J}_s \times \vec{B} dl dw$$

$$\rightarrow \vec{F} = \iint_S \vec{J}_s \times \vec{B} ds$$

## Densidade volumétrica de corrente elétrica na presença de campo magnético:


$$d\vec{I} = \vec{J}_v \, ds$$
$$d\vec{F} = \int_C d\vec{I} \times \vec{B} \, dl = \int_C (\vec{J}_v \, ds) \times \vec{B} \, dl = \int_C \vec{J}_v \times \vec{B} \, dl \, ds$$
$$\vec{F} = \iiint_V \vec{J}_v \times \vec{B} \, dv$$

## Exemplo:

Campo magnético no plano bissetor de um segmento de comprimento  $2L$  com corrente elétrica I.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\vec{r}' = z' \hat{a}_z \quad \left. \begin{array}{l} \vec{r} = r \hat{a}_r \\ |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z'^2} \end{array} \right\} \quad \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{r \hat{a}_r - z' \hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z'^2}}$$

$$\vec{I}(\vec{r}') = I \hat{a}_z$$

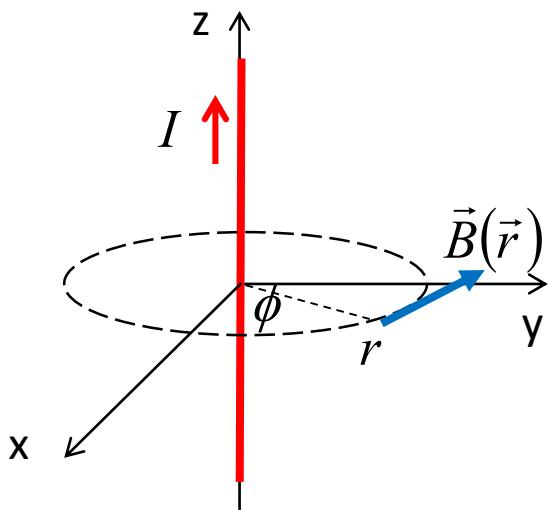
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{(I \hat{a}_z) \times (r \hat{a}_r - z' \hat{a}_z)}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I r \hat{a}_\phi}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$$

$$\int \frac{dz'}{\left[ a^2 + z'^2 \right]^{3/2}} = \frac{z'}{a^2 \sqrt{a^2 + z'^2}}$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} I r \hat{a}_\phi \left. \frac{z'}{r^2 \sqrt{r^2 + z'^2}} \right|_{-L}^L = \frac{\mu_o I \hat{a}_\phi}{4\pi r} \left[ \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} - \frac{-L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right]$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I L}{2\pi r \sqrt{r^2 + L^2}} \hat{a}_\phi$$

No limite em que  $L \rightarrow \infty$ :



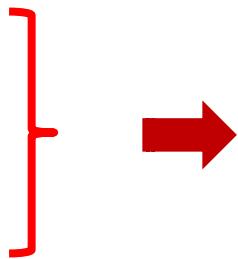
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I L}{2\pi r \sqrt{r^2 + L^2}} \hat{a}_\phi$$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

Simetria Cilíndrica:  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

Corrente vertical:  $\vec{J}(\vec{r}) = J_z(r) \hat{a}_z$

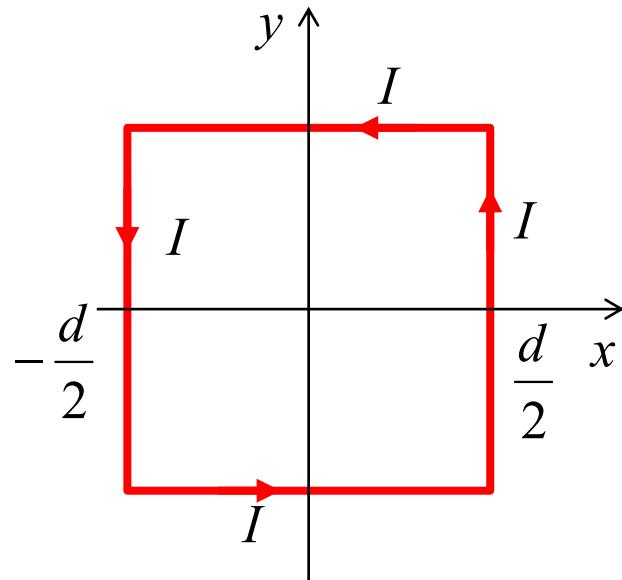


**Campo magnético na direção  $\phi$  e que só depende de  $r$ .**

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r) \hat{a}_\phi$$

## Exemplo:

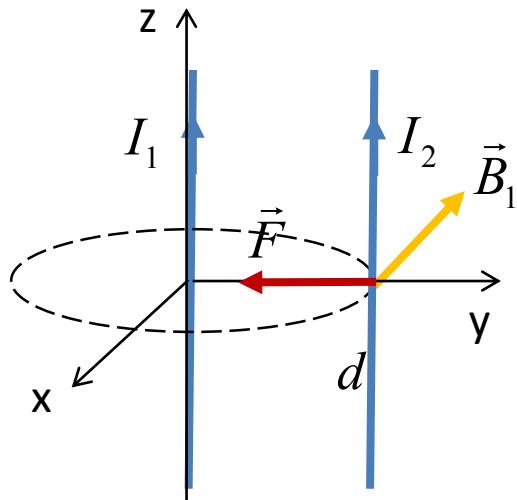
Campo magnético no centro de um loop quadrado de raio  $d$ , com corrente elétrica  $I$ .



$$R: \quad \vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_o I}{\pi a} \hat{a}_z$$

## Exemplo:

2 condutores infinitos e paralelos separados por uma distância  $d$ , com correntes  $I_1$  e  $I_2$ . Ache a força por unidade de comprimento entre os condutores.



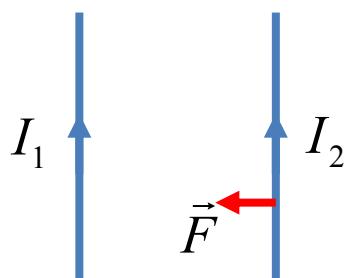
Campo magnético devido à corrente  $I_1$ , a uma distância  $d$  do eixo dos  $z$ :

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_o I_1}{2\pi d} (-\hat{a}_x)$$

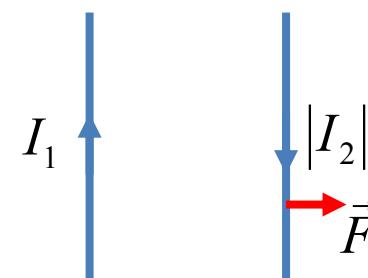
Força por comprimento na corrente 2:

$$\vec{F}'_2 = \int_0^1 \vec{I}_2 \times \vec{B}_1 dz = \int_0^1 (I_2 \hat{a}_z) \times \left( -\frac{\mu_o I_1}{2\pi d} \hat{a}_x \right) dz = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} \hat{a}_y$$

$$I_1 > 0, \quad I_2 > 0 :$$

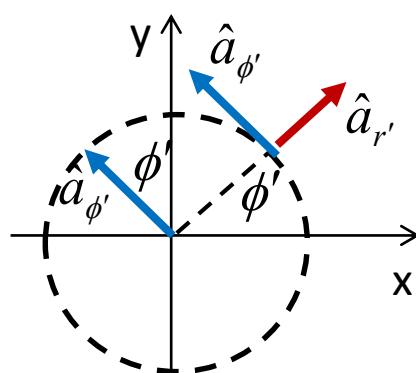
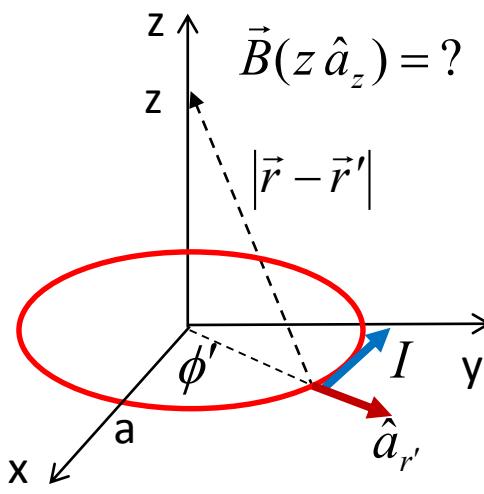


$$I_1 > 0, \quad I_2 < 0 :$$



## Exemplo:

Campo magnético no eixo de anel de raio  $a$ , com corrente  $I$ .



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Simetria:

$$\rightarrow \vec{B}(z \hat{a}_z) = B_z(z) \hat{a}_z$$

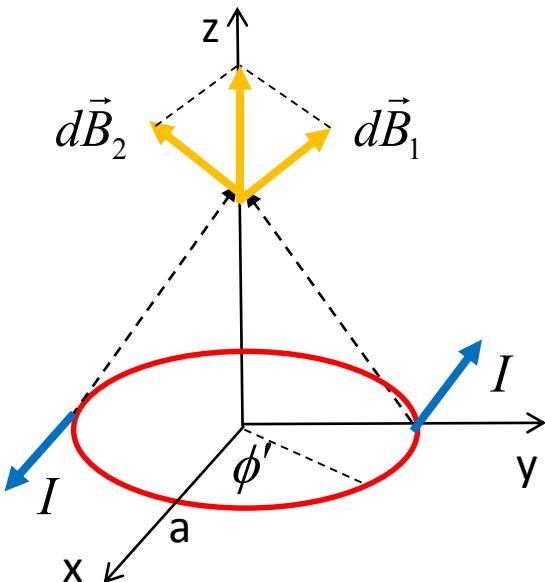
$$\vec{r}' = a \hat{a}_{r'} = a (\cos \phi' \hat{a}_x + \sin \phi' \hat{a}_y)$$

$$\vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{z \hat{a}_z - a \hat{a}_{r'}}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{z \hat{a}_z - a \cos \phi' \hat{a}_x - a \sin \phi' \hat{a}_y}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$\vec{I}(\vec{r}') = I \hat{a}_{\phi'} = I (-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y)$$



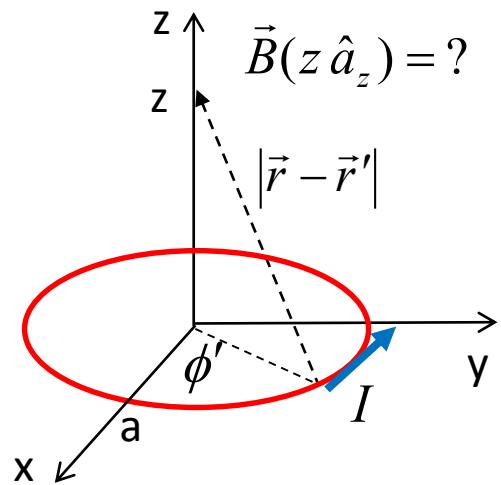
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

Coord. cartesianas:

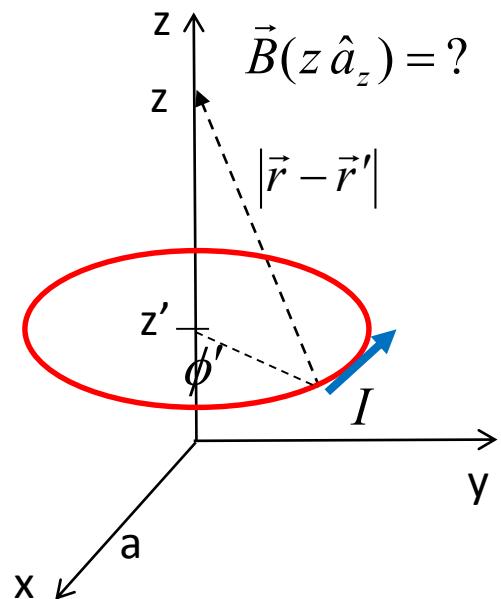
$$\begin{aligned}\vec{B}(z \hat{a}_z) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(-\sin\phi' \hat{a}_x + \cos\phi' \hat{a}_y) \times (z \hat{a}_z - a \cos\phi' \hat{a}_x - a \sin\phi' \hat{a}_y)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\phi' = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} (a \hat{a}_z + \sin\phi' z \hat{a}_y + \cos\phi' z \hat{a}_x) d\phi' = \\ &= \frac{\mu_o}{2} \frac{I a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z\end{aligned}$$

Coord. cilíndricas:

$$\begin{aligned}\vec{B}(z \hat{a}_z) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I \hat{a}_{\phi'} \times (z \hat{a}_z - a \hat{a}_{r'})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\phi' = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} (z \hat{a}_{r'} + a \hat{a}_z) d\phi' = \\ &= \frac{\mu_o}{2} \frac{I a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z \quad \left[ \vec{B}(z \hat{a}_z) = B_z(z) \hat{a}_z \right]\end{aligned}$$



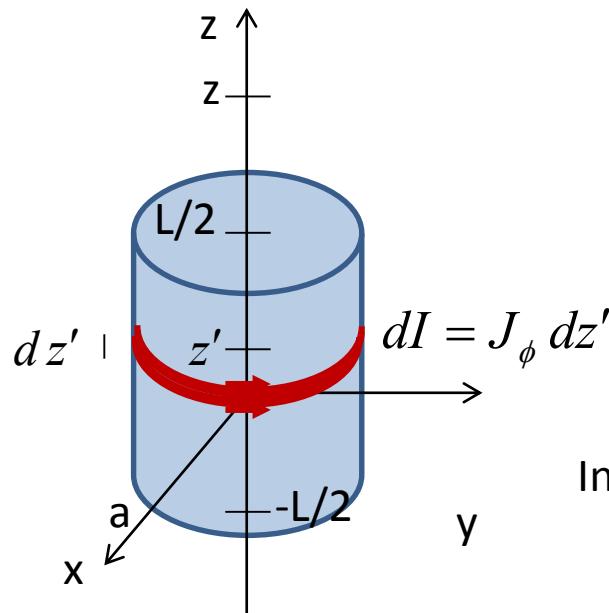
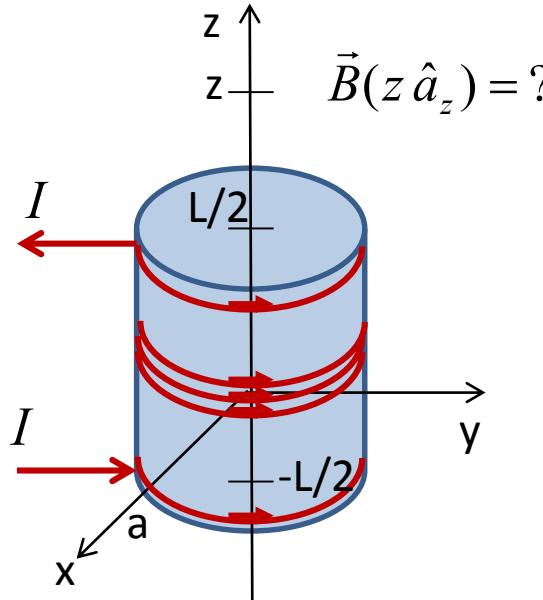
$$\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} \frac{I a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$



$$\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} \frac{I a^2}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z$$

## Exemplo:

Campo magnético no eixo de um solenóide de raio  $a$ , com comprimento  $L$ , e  $N$  voltas por comprimento, carregando uma corrente  $I$ .

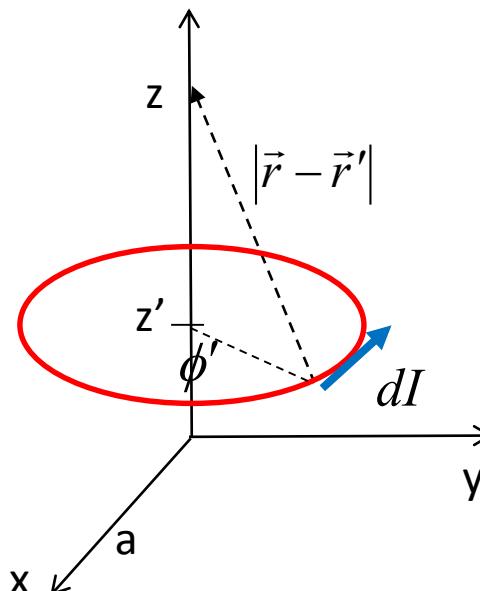


Número de voltas total:  $NL$

Corrente total:  $INL$

Densidade superficial de corrente equivalente:  $J_\phi = \frac{INL}{L} = IN$

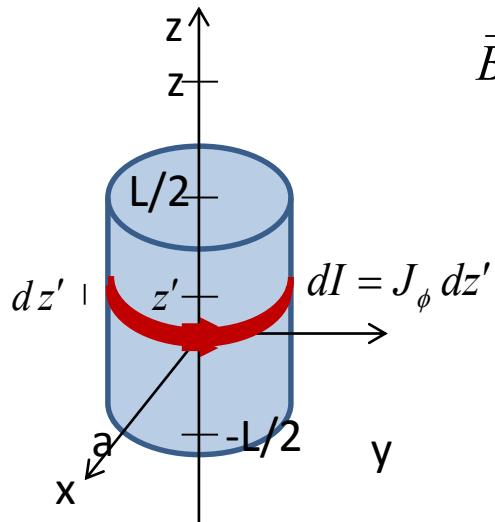
Campo em  $z$ , devido a um anel de corrente  $dI$ , em  $z'$



$$dI = J_\phi dz' = NI dz'$$

$$\begin{aligned} d\vec{B}(z \hat{a}_z) &= \frac{\mu_0}{2} \frac{dI a^2}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{NI dz' a^2}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z \end{aligned}$$

Integrando de  $-L/2$  a  $L/2$ :  $\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_0}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{NI a^2}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z dz'$



$$\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{NI a^2}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z dz'$$

$$= \frac{\mu_o}{2} NI a^2 \hat{a}_z \int_{z+L/2}^{z-L/2} \frac{-du}{[u^2 + a^2]^{3/2}}$$

$$u = z - z' \quad du = -dz'$$

Usando:

$$\int \frac{du}{[u^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} NI a^2 \hat{a}_z \left[ \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}} \right]_{z-L/2}^{z+L/2} = \frac{\mu_o}{2} NI \left[ \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{(z - L/2)}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} \right] \hat{a}_z$$

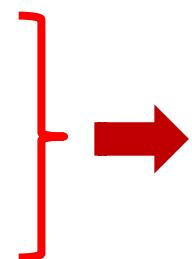
Campo no eixo de um **solenóide infinito** com N voltas de corrente I por comprimento:

→

$$\vec{B}(z \hat{a}_z) \rightarrow \mu_o NI \hat{a}_z$$

Simetria Cilíndrica:  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

Corrente na direção  $\phi$ :  $\vec{J}(\vec{r}) = J_\phi(r) \hat{a}_\phi$

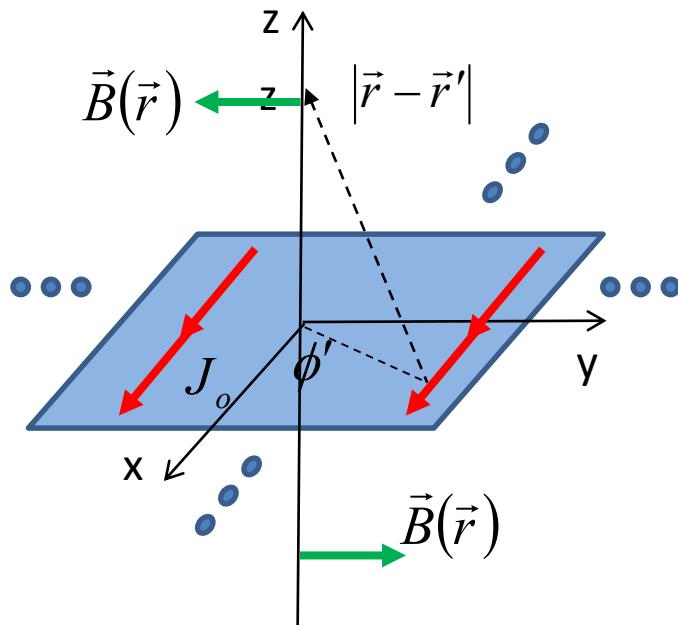


**Campo magnético na direção z e que só depende de r.**

$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(r) \hat{a}_z$

## Exemplo:

Distribuição planar de corrente elétrica constante em um plano infinito.



$$\text{Simetria: } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\text{Ponto de observação: } \vec{r} = z \hat{a}_z$$

$$\text{Ponto de fonte: } \vec{r}' = x' \hat{a}_x + y' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{a}_z - x' \hat{a}_x - y' \hat{a}_y$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(J_o \hat{a}_x) \times (z \hat{a}_z - x' \hat{a}_x - y' \hat{a}_y)}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} dx' dy' =$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J_o}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-z \hat{a}_y - y' \hat{a}_z}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} dx' dy' = \frac{-\mu_0 J_o z \hat{a}_y}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\phi' =$$

$$= \frac{-\mu_0 J_o z \hat{a}_y}{2} \left( \frac{-1}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{-\mu_0 J_o z \hat{a}_y}{2|z|}$$

$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_o}{2} \hat{a}_y & z > 0 \\ \frac{\mu_0 J_o}{2} \hat{a}_y & z < 0 \end{cases}$

## Força de Lorentz:

A força eletromagnética atuando sobre uma carga q que se move com velocidade v numa região de campo magnético B e campo elétrico E vale:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

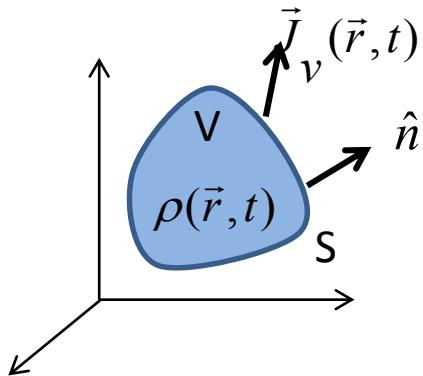
## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 5.1 e 5.2

## **Exercícios:**

- Problemas 5.8a, 5.10, 5.11, 5.12  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE



$\vec{J}_v(\vec{r}, t)$  densidade volumétrica de corrente.

Corrente total deixando o volume  $V$  através da superfície  $S$ :

$$I(t) = \oint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet \hat{n} ds$$

Conservação da Carga:  $I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$  →  $I(t) = \oint_S \vec{J}_v(\vec{r}, t) \bullet \hat{n} ds = -\frac{dQ(t)}{dt}$

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}, t) dv = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_v(\vec{r}, t) dv$$

Se o volume não varia com o tempo:  $\iiint_V \nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}, t) dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho_v(\vec{r}, t)}{\partial t} dv \quad \forall V$

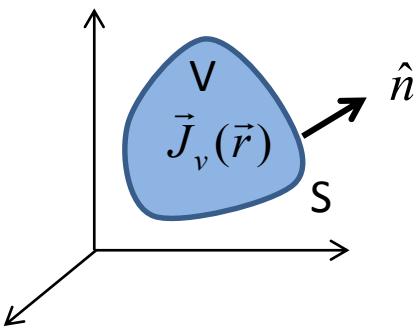
$$\nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \rho_v(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Em estática ( $d/dt=0$ ): →  $\nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}) = 0$

$$\oint_S \vec{J}_v(\vec{r}) \bullet \hat{n} ds = 0$$

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## LEI DE GAUSS MAGNÉTICA



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} d\nu'$$

Toda a corrente  $\vec{J}_v(\vec{r})$  está inserida no volume V:  $\vec{J}_v(\vec{r}) \bullet \hat{n}|_S = 0$

$$\nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \bullet \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} d\nu' = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \bullet \left( \vec{J}_v(\vec{r}') \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) d\nu'$$

Identidade:  $\nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \bullet \nabla \times \vec{C}$

$$\nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \left( \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \bullet \nabla \times (\vec{J}_v(\vec{r}')) - \vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) d\nu'$$

$$\nabla \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \hat{a}_x - \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \hat{a}_y + \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \hat{a}_z$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = (z-z') \frac{(-3)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^4} \frac{1}{2} \frac{2(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - (y-y') \frac{(-3)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^4} \frac{1}{2} \frac{2(z-z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Similarmente:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \left( -\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) dV' \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = 0}$$

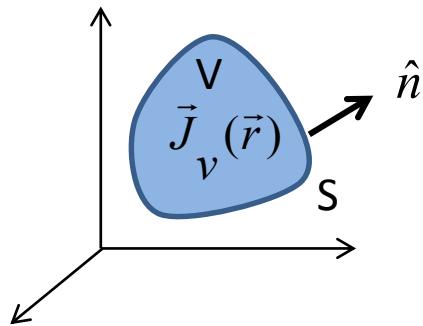
Lei de Gauss Magnética

$$\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

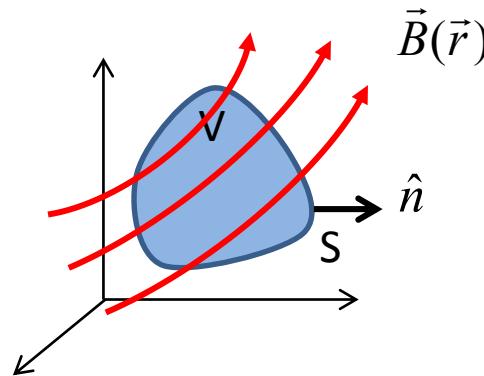
→ Não há monopolo magnético.

→ O campo magnético não converge ou diverge de nenhum ponto. As linhas de campo sempre se fecham.



Integrando em um volume  $V$ :

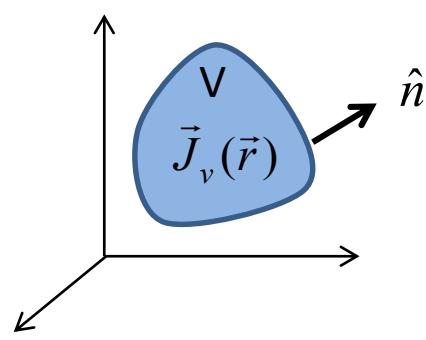
$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \rightarrow \quad \iint_S \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = 0$$



Fluxo Magnético:  $\Phi_m = \iint_S \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{s}$

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## LEI DE AMPERE



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV'$$

Toda a corrente  $\vec{J}_v(\vec{r})$  está inserida no volume  $V$ :  $\vec{J}_v(\vec{r}) \bullet \hat{n}|_S = 0$

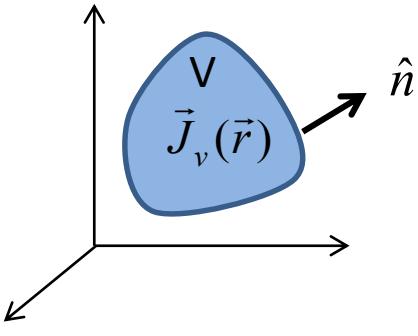
$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \times \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV' = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \left( \vec{J}_v(\vec{r}') \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) dV'$$

Identidade:  $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{C}) = (\vec{C} \bullet \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \bullet \nabla) \vec{C} + \vec{A} (\nabla \bullet \vec{C}) - \vec{C} (\nabla \bullet \vec{A})$

$$\nabla \times \left( \vec{J}_v(\vec{r}') \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) = \left( \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \bullet \nabla \right) \vec{J}_v(\vec{r}') - (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \vec{J}_v(\vec{r}') \left( \nabla \bullet \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) - \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\nabla \bullet \vec{J}_v(\vec{r}'))$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\nabla \bullet \left( \frac{\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)} = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$

$\rightarrow \nabla \times \left( \vec{J}_v(\vec{r}') \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) = -(\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \vec{J}_v(\vec{r}') (4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'))$



$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \left( \vec{J}_v(\vec{r}') \times \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) dV' = \\
 &= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \left[ -(\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + 4\pi \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \vec{J}_v(\vec{r}') \right] dV' = \\
 &= \mu_o \vec{J}_v(\vec{r}) - \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] dV'
 \end{aligned}$$

Termo:

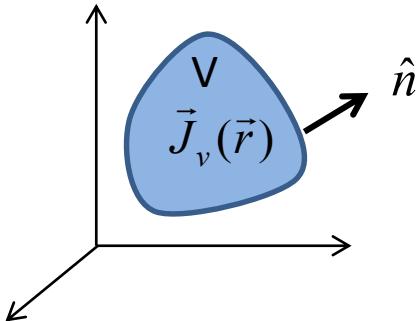
$$(\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \left( J_x(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x} + J_y(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} + J_z(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{(x-x')\hat{a}_x + (y-y')\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Componente na direção x:

$$\left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right]_x = (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla' \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Identidade:  $\nabla' \bullet (f \vec{F}) = f \nabla' \bullet \vec{F} + \vec{F} \bullet \nabla' f$

$$\rightarrow \left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right]_x = \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \nabla' \bullet \vec{J}_v(\vec{r}') - \nabla' \bullet \left( \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \vec{J}_v(\vec{r}') \right)$$



$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r}) - \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] d\nu'$$

$$\left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right]_x = -\nabla' \bullet \left( \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \vec{J}_v(\vec{r}') \right)$$

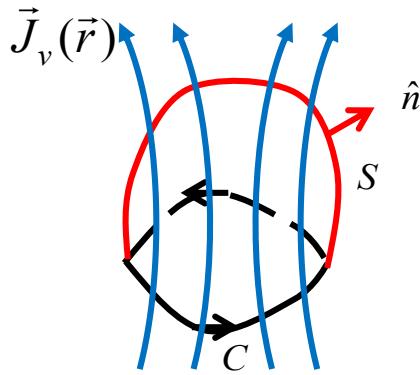
$\rightarrow \iiint_{V'} \left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] d\nu' \Big|_x = \iiint_{V'} \left[ -\nabla' \bullet \left( \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \vec{J}_v(\vec{r}') \right) \right] d\nu' = -\oint_{S'} \frac{(x-x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \hat{n} ds' = 0$

O mesmo ocorre nas direções y e z:

$\rightarrow \iiint_{V'} \left[ (\vec{J}_v(\vec{r}') \bullet \nabla) \frac{\vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] d\nu' = 0$

$\rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r})}$  Lei de Ampere

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r})$$



Integrando sobre uma superfície  $S$ , limitada pela curva  $C$ , e usando o Teorema de Stokes:

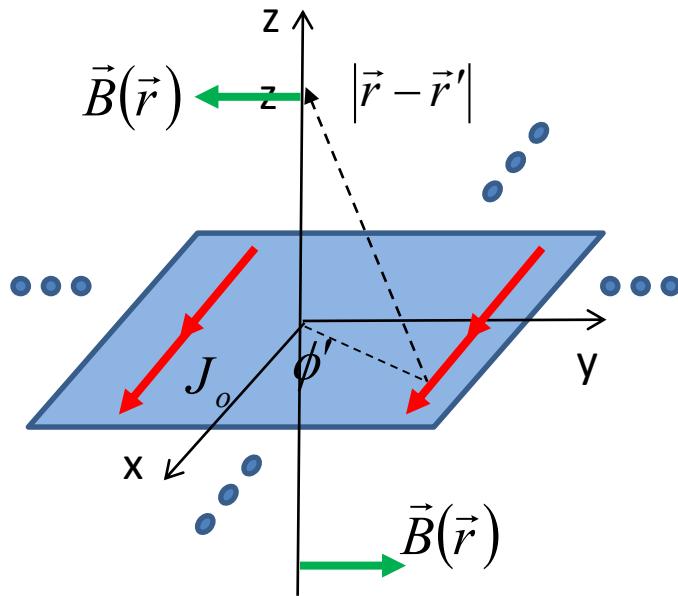
$$\iint_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} = \mu_o \iint_S \vec{J}_v(\vec{r}) \bullet d\vec{s}$$

$\rightarrow \oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \mu_o I_{tot}$       Lei de Ampere

A integral de circulação do campo magnético em espaço livre é igual a corrente total que atravessa a superfície limitada pelo percurso.

## Exemplo:

Distribuição planar de corrente elétrica constante em um plano infinito.



$$\text{Simetria planar: } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

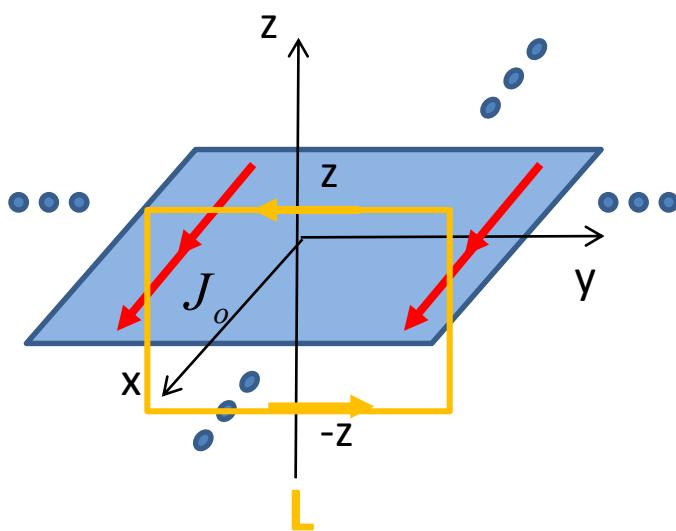
$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B_y(|z|) \hat{a}_y & z > 0 \\ -B_y(|z|) \hat{a}_y & z < 0 \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \mu_o I_{tot}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} (-B_y(|z|) \hat{a}_y) \bullet (\hat{a}_y dy) + \int_{L/2}^{-L/2} (B_y(|z|) \hat{a}_y) \bullet (\hat{a}_y dy) = \mu_o J_o L$$

$$-B_y(|z|) 2L = \mu_o J_o L$$

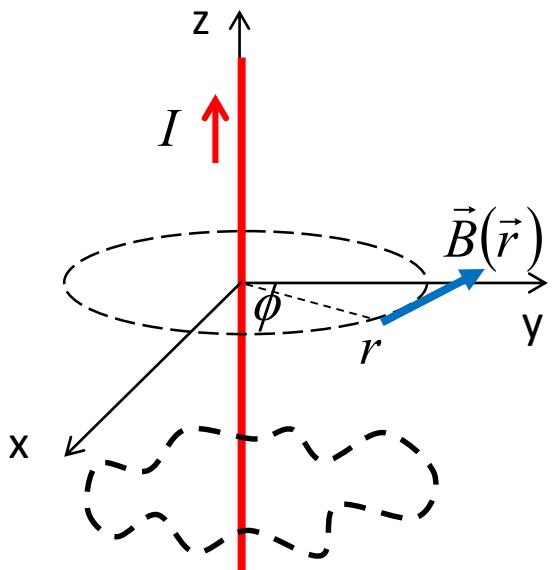
$$\rightarrow B_y(|z|) = -\frac{\mu_o J_o}{2}$$



## Exemplo:

Campo magnético gerado por um longo segmento de corrente I.

No limite em que  $L \rightarrow \infty$ :



$$\left. \begin{array}{l} \text{Simetria Cilíndrica: } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \text{Corrente vertical: } \vec{J}(\vec{r}) = J_z(r) \hat{a}_z \end{array} \right\}$$

**Campo magnético na direção  
φ e que só depende de r.**

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r) \hat{a}_\phi$$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \mu_o I_{tot} \quad \rightarrow \quad \int_0^{2\pi} (B_\phi(r) \hat{a}_\phi) \bullet \hat{a}_\phi r d\phi = \mu_o I$$

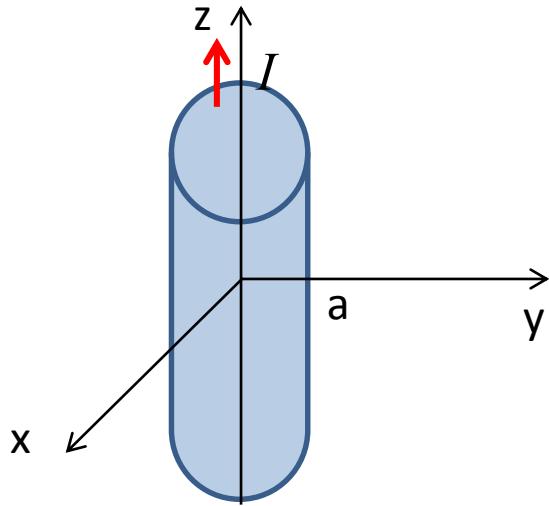
$$B_\phi(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

## Exemplo:

Campo magnético gerado por um longo fio de raio  $a$ , e corrente total  $I$ , uniformemente distribuída na seção reta do fio.

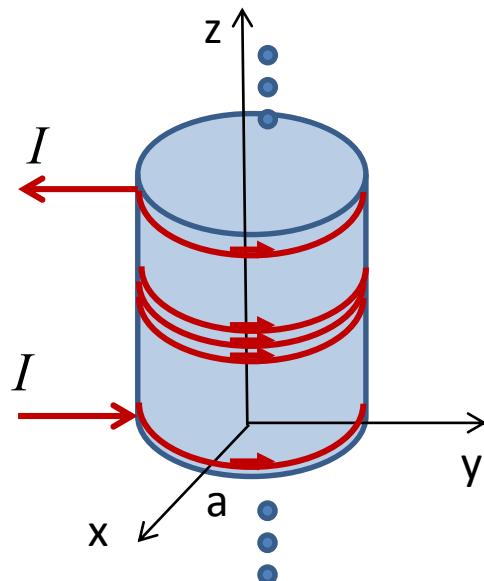
No limite em que  $L \rightarrow \infty$ :



Re sp.:  $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_o I r}{2\pi a^2} & r < a \\ \frac{\mu_o I}{2\pi r} & r > a \end{cases}$

## Exemplo:

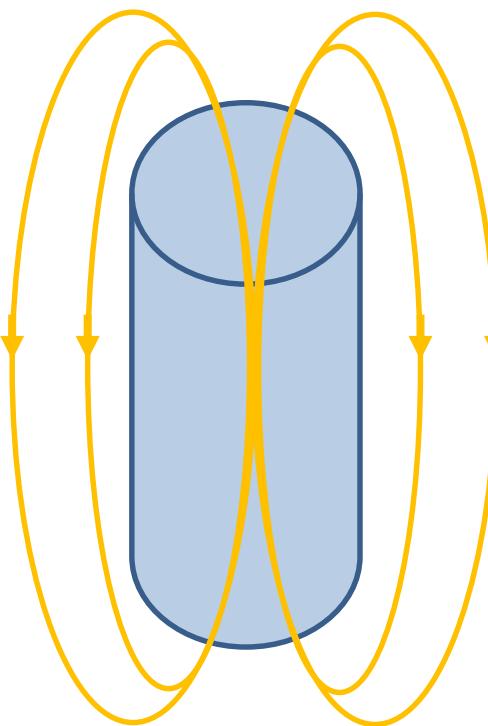
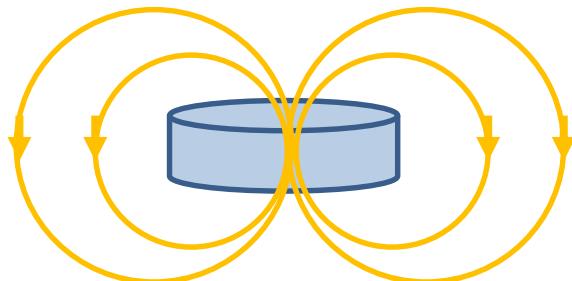
Campo magnético no eixo de um longo solenóide de raio  $a$ , e  $N$  voltas por comprimento, carregando uma corrente  $I$ .

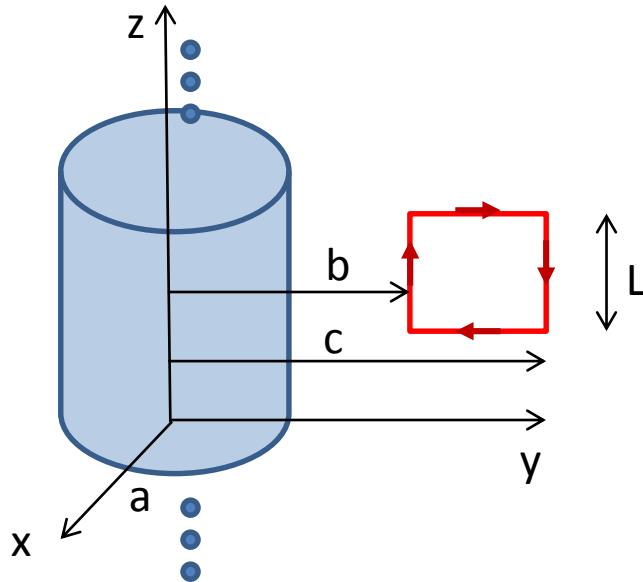


$$\left. \begin{array}{l} \text{Simetria Cilíndrica: } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \text{Corrente na direção } \phi: \quad \vec{J}(\vec{r}) = J_\phi(r) \hat{a}_\phi \end{array} \right\}$$

**Campo magnético na direção  $z$  e que só depende de  $r$ .**

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(r) \hat{a}_z$$



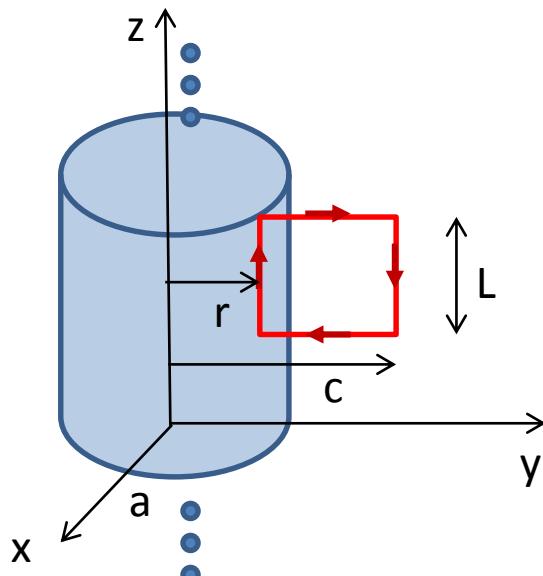


$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \mu_o I_{tot}$$

$$\int_{z_o}^{z_o+L} (B_z(b) \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_z dz + \int_{z_o+L}^{z_o} (B_z(c) \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_z dz = 0$$

$$B_z(b)L + B_z(c)(-L) = 0 \quad \rightarrow \quad B_z(c) = B_z(b)$$

O campo externo é constante. Mas como o campo tende a zero para  $r \rightarrow \infty$ , o campo exterior é nulo.



$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \mu_o I_{tot}$$

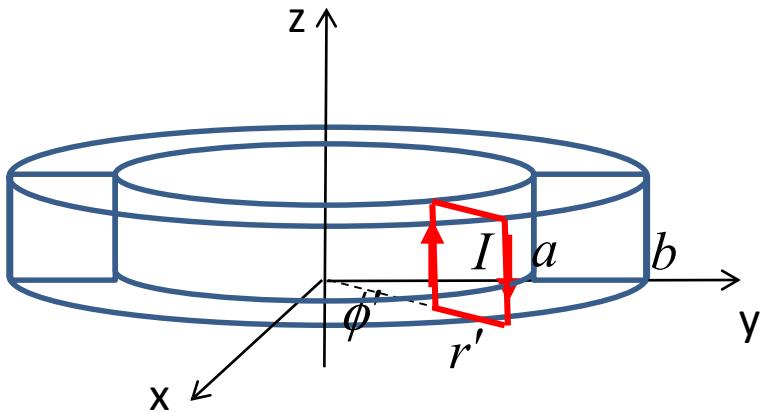
$$\rightarrow \int_{z_o}^{z_o+L} (B_z(r) \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_z dz = \mu_o NLI$$

$$B_z(r)L = \mu_o NLI \quad \rightarrow \quad B_z(r) = \mu_o NI$$

O campo interno é constante.

## Exemplo:

Toróide (seção reta constante), com  $n$  voltas com corrente  $I$ .



$$\text{Simetria: } \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

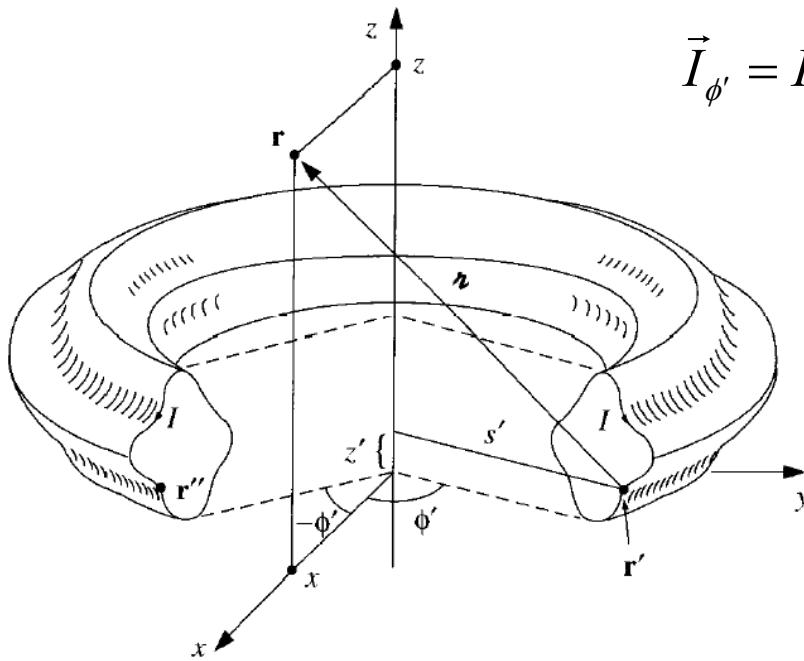
Ponto de observação no plano xz:  $\vec{r} = x \hat{a}_x + z \hat{a}_z$

Pontos de fonte:  $\vec{r}' = r' \cos \phi' \hat{a}_x + r' \sin \phi' \hat{a}_y + z' \hat{a}_z$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - r' \cos \phi') \hat{a}_x - r' \sin \phi' \hat{a}_y + (z - z') \hat{a}_z$$

Corrente no plano  $\phi'$ :

$$\vec{I}_{\phi'} = I_{r'} \hat{a}_{r'} + I_z \hat{a}_z = I_{r'} \cos \phi' \hat{a}_x + I_{r'} \sin \phi' \hat{a}_y + I_z \hat{a}_z$$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'} d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{I}_{\phi'} = I_{r'} \cos \phi' \hat{a}_x + I_{r'} \sin \phi' \hat{a}_y + I_z \hat{a}_z$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - r' \cos \phi') \hat{a}_x - r' \sin \phi' \hat{a}_y + (z - z') \hat{a}_z$$

$$\vec{I}_{\phi'} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ I_{r'} \cos \phi' & I_{r'} \sin \phi' & I_z \\ (x - r' \cos \phi') & -r' \sin \phi' & (z - z') \end{vmatrix} =$$

$$= [I_{r'} \sin \phi' (z - z') + I_z r' \sin \phi'] \hat{a}_x + [-I_{r'} \cos \phi' (z - z') + I_z (x - r' \cos \phi')] \hat{a}_y + [-I_{r'} \cos \phi' r' \sin \phi' - I_{r'} \sin \phi' (x - r' \cos \phi')] \hat{a}_z$$

Componente de corrente no plano  $-\phi'$ :

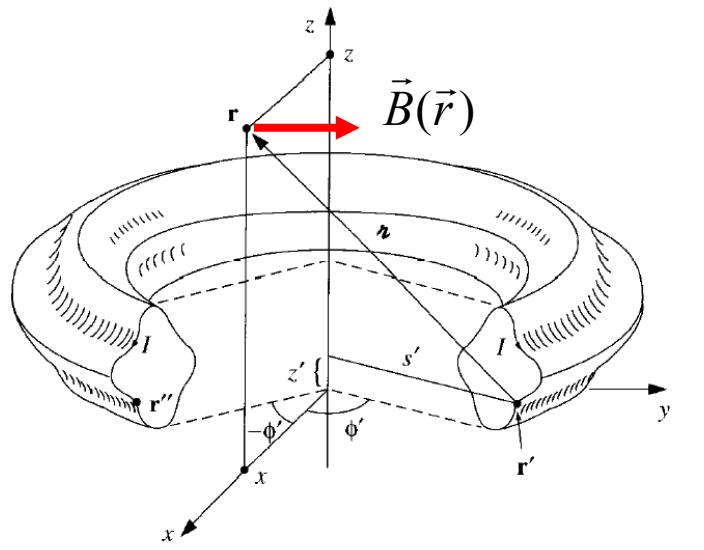
$$\vec{I}_{-\phi'} \times (\vec{r} - \vec{r}') = [-I_{r'} \sin \phi' (z - z') - I_z r' \sin \phi'] \hat{a}_x + [-I_{r'} \cos \phi' (z - z') + I_z (x - r' \cos \phi')] \hat{a}_y + [I_{r'} \cos \phi' r' \sin \phi' + I_{r'} \sin \phi' (x - r' \cos \phi')] \hat{a}_z$$

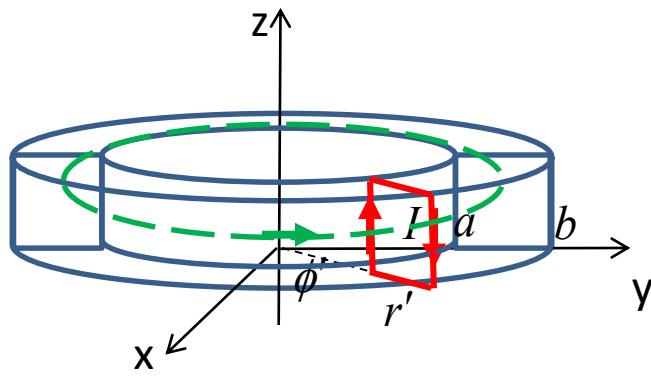
Somando as contribuições dos pontos simétricos nos planos  $\phi'$  e  $-\phi'$ :

→  $\vec{I}_{\phi'} \times (\vec{r} - \vec{r}') + \vec{I}_{-\phi'} \times (\vec{r} - \vec{r}')$  tem direção y para ponto de observação no plano xz.

→ Para um ponto de observação em um plano  $\phi$  qualquer, o campo magnético tem direção  $\phi$ .

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r, z) \hat{a}_\phi$$



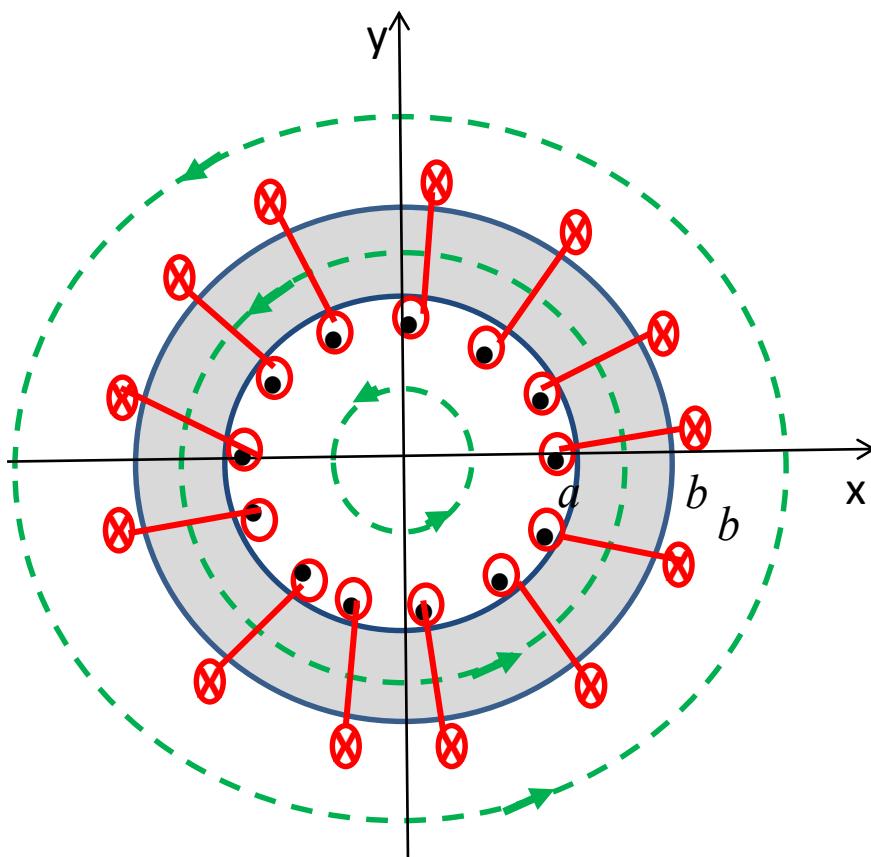


Simetria:  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$  →  $\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r, z) \hat{a}_\phi$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \mu_o I_{tot}$$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (B_\phi(r, z) \hat{a}_\phi) \bullet (\hat{a}_\phi r d\phi) = 2\pi r B_\phi(r, z)$$

→  $2\pi r B_\phi(r, z) = \mu_o I_{tot}$



Se o loop amperiano é exterior ao toróide:  $I_{tot} = 0$

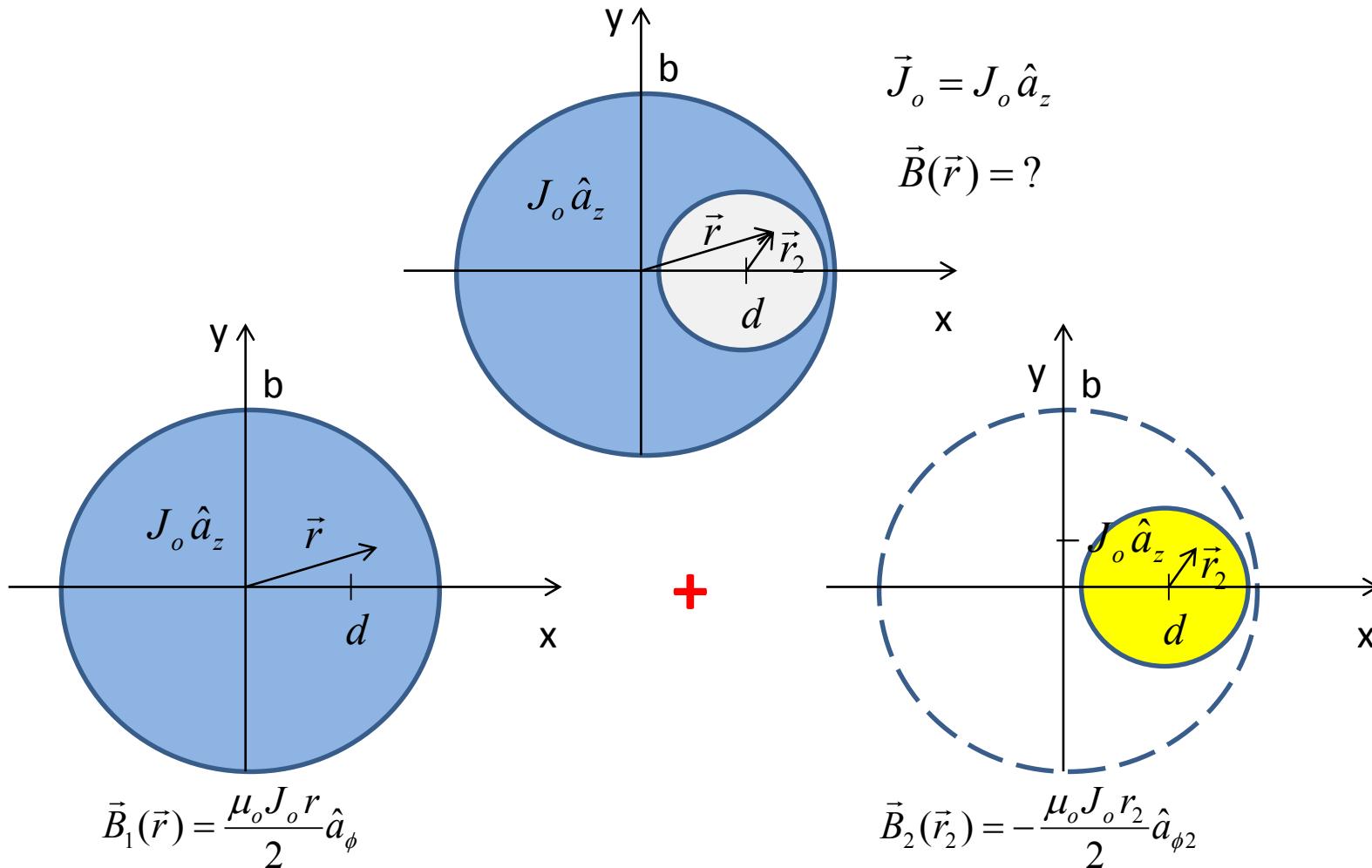
$$2\pi r B_\phi(r, z) = 0 \quad \textcolor{red}{\rightarrow} \quad \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

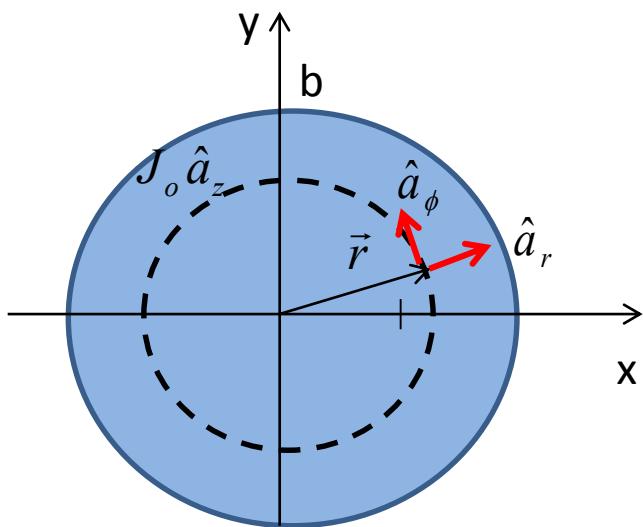
Se o loop amperiano é interior ao toróide:  $I_{tot} = nI$

$$2\pi r B_\phi(r, z) = \mu_o nI \quad \textcolor{red}{\rightarrow} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o nI}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

## Exemplo:

Longo fio de raio  $b$ , com uma cavidade de raio  $a$ . O fio tem uma densidade volumétrica de corrente elétrica  $J_o$  (exceto na cavidade), conforme a figura abaixo. Determine o campo magnético na cavidade.



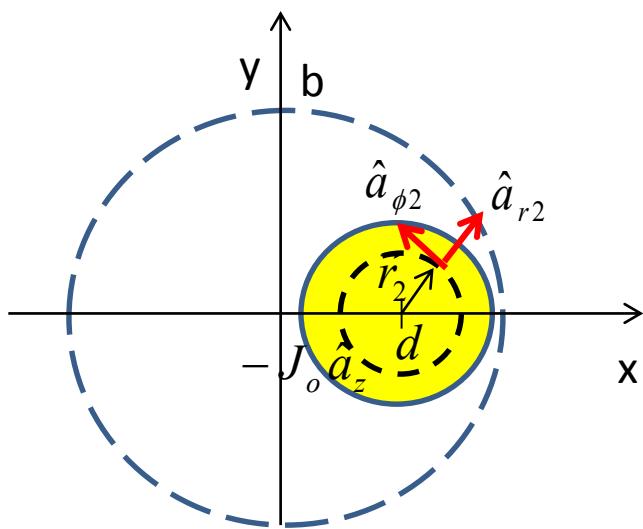


$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_o J_o r}{2} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J}_o \times \vec{r} = (J_o \hat{a}_z) \times (r \hat{a}_r) = J_o r \hat{a}_\phi$$

}

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_o \vec{J}_o \times \vec{r}}{2}$$

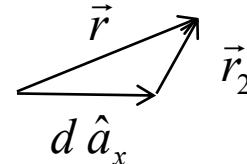


$$\vec{B}_2(\vec{r}_2) = -\frac{\mu_o J_o r_2}{2} \hat{a}_{\phi 2}$$

$$\vec{J}_o \times \vec{r}_2 = (J_o \hat{a}_z) \times (r_2 \hat{a}_{r2}) = J_o r_2 \hat{a}_{\phi 2}$$

}

$$\vec{B}_2(\vec{r}_2) = -\frac{\mu_o \vec{J}_o \times \vec{r}_2}{2}$$



→  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}_2) = \frac{\mu_o \vec{J}_o \times (\vec{r} - \vec{r}_2)}{2} = \frac{\mu_o \vec{J}_o \times (d \hat{a}_x)}{2} = \frac{\mu_o J_o d \hat{a}_y}{2}$

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seção 5.3

## **Exercícios:**

- Problemas 5.13, 5.14 e 5.15,  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

$$\begin{aligned} \text{Lei de Gauss Magnética: } & \quad \nabla \bullet \vec{B}(\vec{r}) = 0 \\ \text{Identidade: } & \quad \nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0 \end{aligned} \quad \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

Como o campo magnético tem divergente nulo, então pode ser expresso como o rotacional de outro campo (potencial vetor).

Teorema de Helmholtz: um campo vetorial é determinado, a menos de uma constante, quando seu rotacional e divergente são conhecidos em todo o espaço.  $\nabla \bullet \vec{A} = ?$

$$\text{Lei de Ampere} \quad \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r})$$

$$\text{Escolha de Lorentz: } \nabla \bullet \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_o \vec{J}_v(\vec{r})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_o \vec{J}_v(\vec{r})$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z \\ \vec{J} &= J_x \hat{a}_x + J_y \hat{a}_y + J_z \hat{a}_z \end{aligned} \right\} \quad \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z = -\mu_o [J_x \hat{a}_x + J_y \hat{a}_y + J_z \hat{a}_z]$$

$\rightarrow$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_o J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_o J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_o J_z \end{aligned} \right.$$

Equação de Poisson

Potencial Elétrico:

$$\nabla^2 V = -\rho_v / \epsilon_0$$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho_v(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_o J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_o J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_o J_z \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} \rightarrow A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ \rightarrow A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ \rightarrow A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z = \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \hat{a}_x + \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \hat{a}_y + \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \hat{a}_z =$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\vec{r}') \hat{a}_x + J_y(\vec{r}') \hat{a}_y + J_z(\vec{r}') \hat{a}_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

→  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$

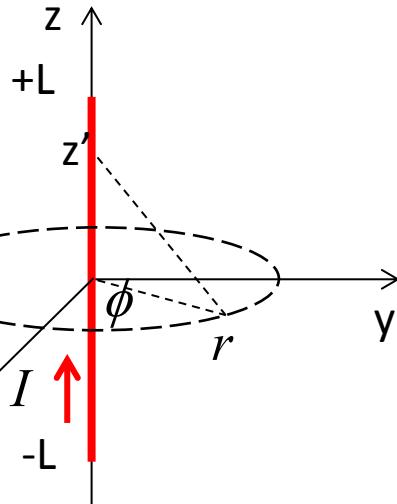
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

A integral de potencial vetor é usualmente mais simples que usando Biot-Savart.

Exceto se a simetria permitir o cálculo do campo usando Lei de Ampere...

## Exemplo:

Campo magnético no plano bissetor de um segmento de comprimento  $2L$  com corrente elétrica  $I$ .



$$\vec{I}(\vec{r}') = I \hat{a}_z \quad \rightarrow \quad \vec{A} = A_z \hat{a}_z = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I(z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz' \hat{a}_z$$

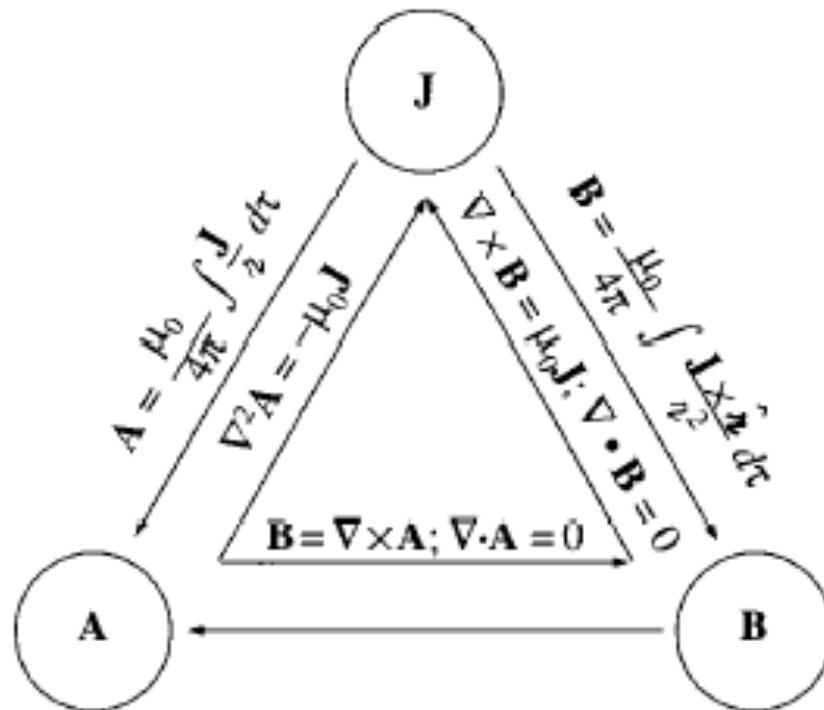
$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}' = z' \hat{a}_z \\ \vec{r} = r \hat{a}_r \end{array} \right\} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$\begin{aligned} A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I}{\sqrt{r^2 + z'^2}} dz' = \frac{\mu_o I}{4\pi} \ln \left[ z' + \sqrt{r^2 + z'^2} \right]_{-L}^L = \\ &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \left[ \ln \left( L + \sqrt{r^2 + L^2} \right) - \ln \left( -L + \sqrt{r^2 + L^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{a}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{a}_\phi = - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I L}{2\pi r \sqrt{r^2 + L^2}} \hat{a}_\phi$$

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

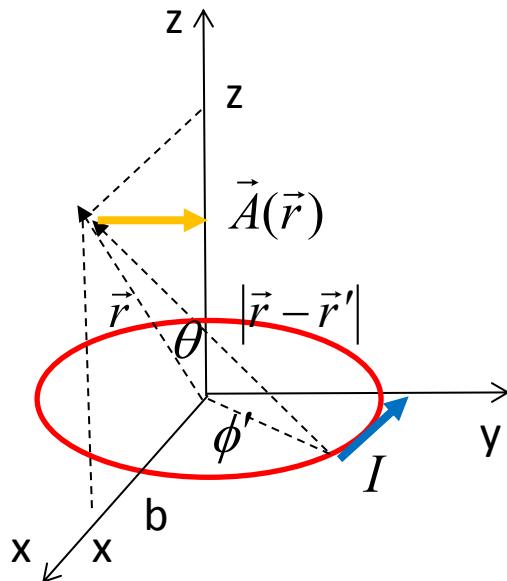


$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{J}_v(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{B}(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## DIPOLO MAGNÉTICO



Pequeno loop de raio  $b$  e corrente  $I$ . Para um ponto longe do loop.

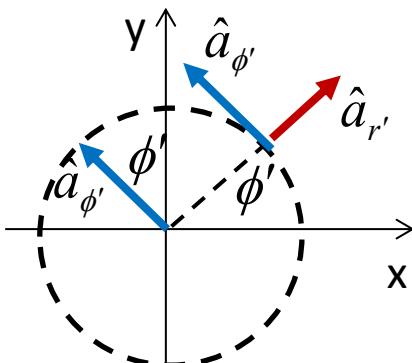
$$r \gg b$$

$$\vec{I}(\vec{r}') = I \hat{a}_{\phi'} = I (-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y)$$

Simetria:  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

$$\vec{r} = x \hat{a}_x + z \hat{a}_z = r \sin \theta \hat{a}_x + r \cos \theta \hat{a}_z$$

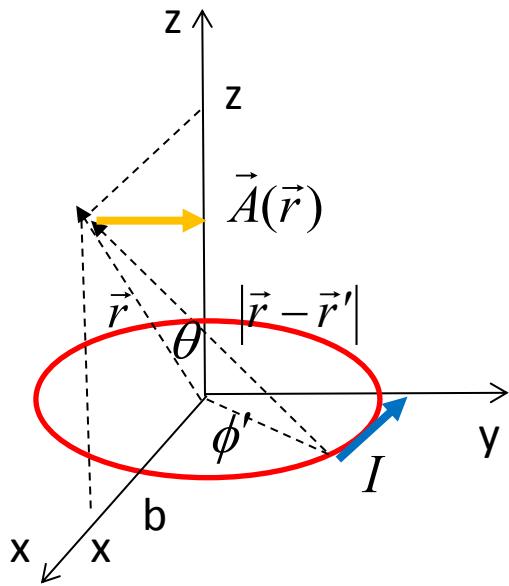
$$\vec{r}' = b \hat{a}_{r'} = b (\cos \phi' \hat{a}_x + \sin \phi' \hat{a}_y)$$



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(r \sin \theta - b \cos \phi')^2 + (-b \sin \phi')^2 + (r \cos \theta)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} b d\phi' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I (-\sin \phi' \hat{a}_x + \cos \phi' \hat{a}_y)}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}} b d\phi'$$



No plano xz:  $r \gg b$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \hat{a}_y \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \phi'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}} b d\phi'$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + (b/r)^2 - 2(b/r) \sin \theta \cos \phi'}} =$$

$$= \frac{1}{r} \underbrace{\left[ 1 - 2(b/r) \sin \theta \cos \phi' + (b/r)^2 \right]}_{x}^{-1/2}$$

Aproximação:  $(1+x)^v \approx 1 + v x \quad |x| \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -2(b/r) \sin \theta \cos \phi' + (b/r)^2 \right) \right] \approx \frac{1}{r} \left[ 1 + (b/r) \sin \theta \cos \phi' \right]$$

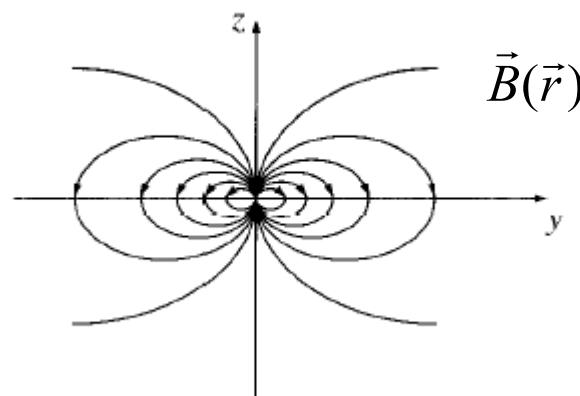
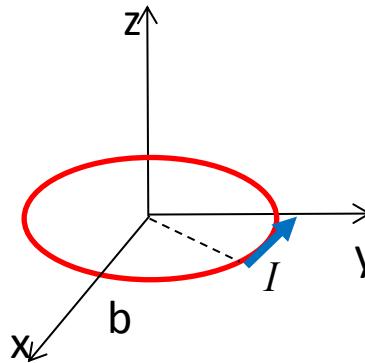
→  $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o I b}{4\pi} \hat{a}_y \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} [1 + (b/r) \sin \theta \cos \phi'] \cos \phi' d\phi'$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o I b}{4\pi} \hat{a}_y \frac{b \pi \sin \theta}{r^2} \quad \rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o I b^2 \sin \theta}{4r^2} \hat{a}_y$$

Em um plano qualquer:

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o I b^2 \sin \theta}{4r^2} \hat{a}_\phi$$

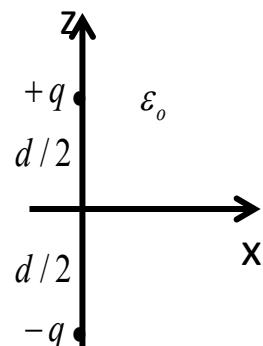
$$\rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} \vec{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \vec{a}_\theta = \frac{\mu_o I b^2}{4r^3} [2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$



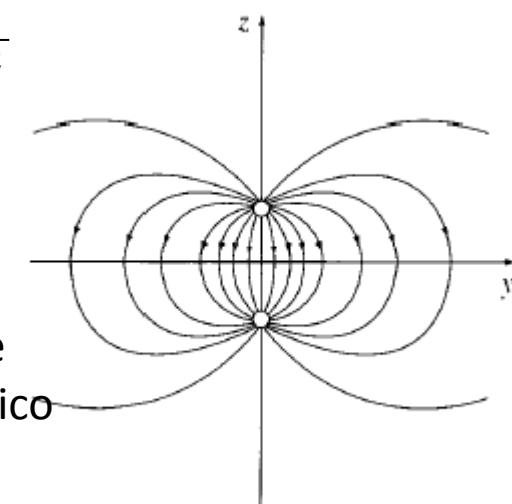
### Dipolo elétrico:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{q d \cos \theta}{4\pi \epsilon_o r^2}$$

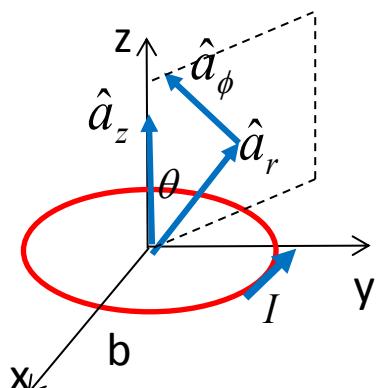
$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi \epsilon_o r^3} (2 \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta)$$



O campo magnético de um pequeno loop de corrente tem a mesma distribuição espacial que o campo elétrico devido a um dipolo elétrico.



## Momento de dipolo magnético:



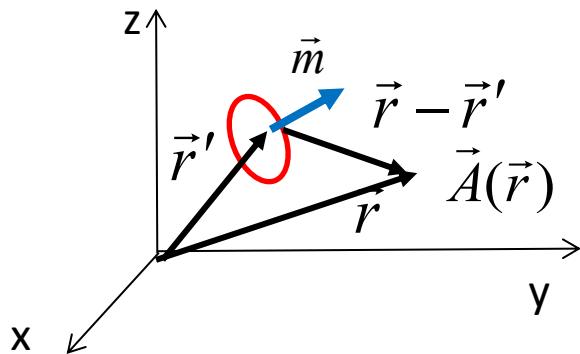
$$\vec{m} = I\pi b^2 \hat{a}_z = IS\hat{a}_z$$

A magnitude do momento de dipolo magnético é igual ao produto da corrente pela área do loop. E sua direção é dada pela regra da mão direita.

$$\vec{m} \times \hat{a}_r = (I\pi b^2 \hat{a}_z) \times \hat{a}_r = I\pi b^2 \sin\theta \hat{a}_\phi$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I b^2 \sin\theta}{4r^2} \hat{a}_\phi \quad \rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{a}_r}{r^2}$$

Para um dipolo magnético na posição  $\vec{r}'$ , o potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r})$  é dado por:

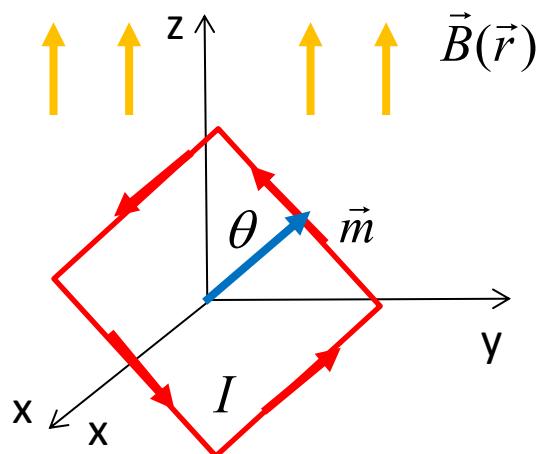


$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

# MAGNETOSTÁTICA EM ESPAÇO LIVRE

## MAGNETIZAÇÃO

### Dipolo na presença de campo magnético:



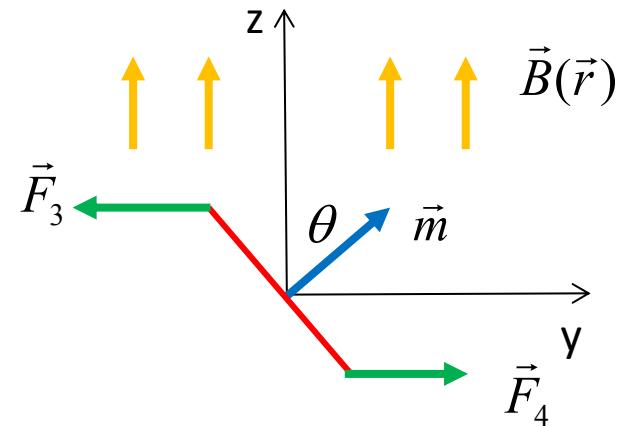
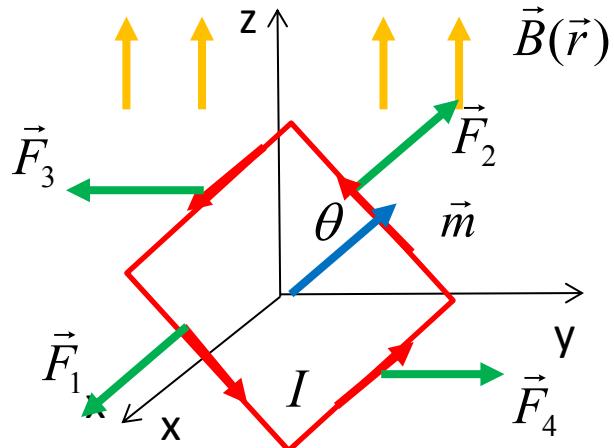
Loop quadrado de lado  $d$ , com corrente  $I$ , na presença de um campo magnético constante.

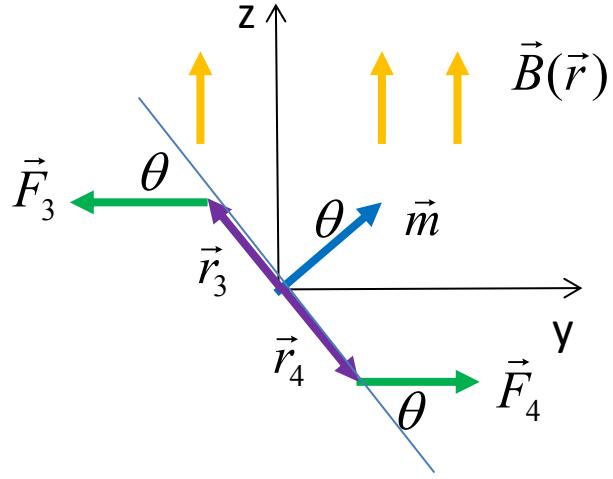
$$\vec{B}(\vec{r}) = B_o \hat{a}_z$$

Força no loop:  $\vec{F} = \int_C \vec{I} \times \vec{B} dl$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \quad \vec{F}_3 = -\vec{F}_4$$

→  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$





$$\vec{F}_3 = \int_{-d/2}^{d/2} (I \hat{a}_x) \times (B_o \hat{a}_z) dx = -IB_o d \hat{a}_y$$

$$\vec{F}_4 = \int_{-d/2}^{d/2} (-I \hat{a}_x) \times (B_o \hat{a}_z) dx = IB_o d \hat{a}_y$$

Torque:  $\vec{N} = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \frac{d}{2} IB_o d \sin\theta \hat{a}_x + \frac{d}{2} IB_o d \sin\theta \hat{a}_x$

$$\vec{N} = IB_o d^2 \sin\theta \hat{a}_x = (Id^2) B_o \sin\theta \hat{a}_x$$

$$\boxed{\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

Os dipolos magnéticos (livres) tendem a se alinhar na presença de um campo magnético.



**Magnetização**

## Magnetização:

Um meio arbitrário possui naturalmente dipolos magnéticos devido a:

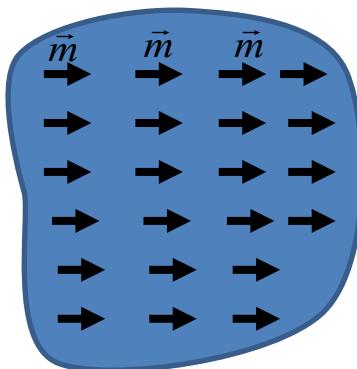
- Movimento orbital dos elétrons
- Movimento de rotação dos elétrons (spin)

Os momentos magnéticos tem orientação arbitrária → momento magnético resultante nulo (exceto materiais ferromagnéticos).

A aplicação de campo magnético resulta na alteração dos momentos de dipolo magnéticos  
→ Magnetização

## Vetor Magnetização:

densidade volumétrica de momento de dipolo magnético:

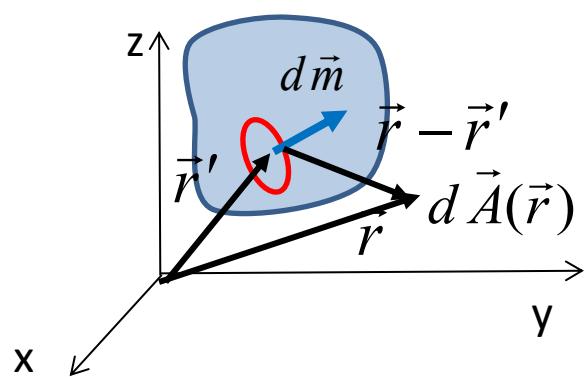


$$\vec{M}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

O momento de dipolo de um pequeno volume dv vale:

$$d\vec{m}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) dv$$

## Potencial Vetor devido a meio Magnetizado:



Potencial devido ao dipolo  $d\vec{m}$  :

$$\rightarrow d\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{(\vec{M}(\vec{r}') dV') \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Potencial devido à todos os dipolos no volume V.

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV'$$

## Potencial Vetor devido a meio Magnetizado - Alternativa:

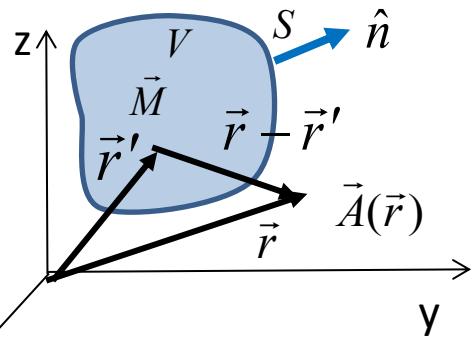
$$\nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad \rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

Identidade:  $\nabla' \times (f \vec{F}) = f \nabla' \times \vec{F} - \vec{F} \times \nabla' f$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') - \nabla' \times \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV' =$$

Usando a forma do Teorema da Divergência:  $\iiint_{V'} \nabla' \times \vec{F} dV' = - \oint_{S'} \vec{F} \times \hat{n} ds'$



$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

$$\begin{cases} \vec{J}_{vM}(\vec{r}') = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \\ \vec{J}_{sM}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n} \end{cases}$$

Corr. Volumétrica de Magnetização

Corr. Superficial de Magnetização

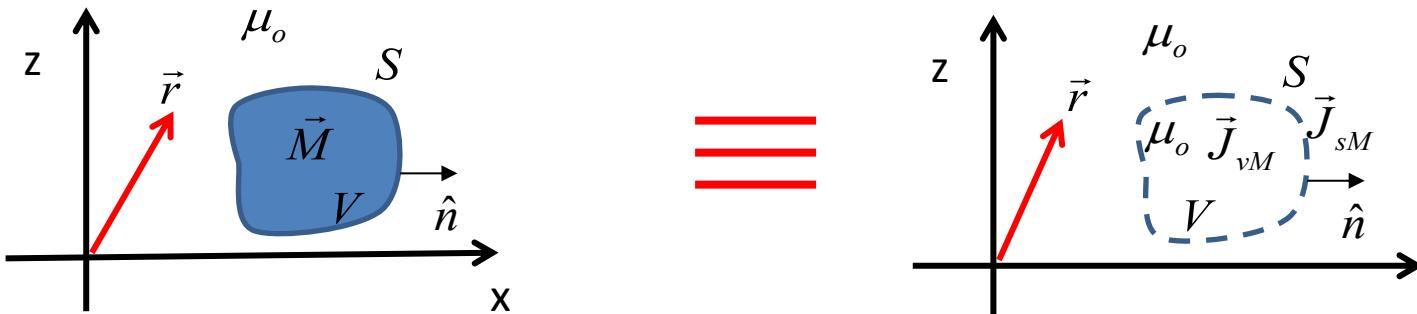
$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_{vM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{J}_{sM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_{vM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{J}_{sM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Em espaço livre!!!

Potencial vetor magnético devido a uma corrente volumétrica  $\vec{J}_{vM}(\vec{r}')$  e uma corrente superficial  $\vec{J}_{sM}(\vec{r}')$  em espaço livre.

$\rightarrow$  O potencial vetor devido a um material com magnetização  $\vec{M}(\vec{r}')$  é o mesmo produzido por uma corrente volumétrica  $\vec{J}_{vM}(\vec{r}') = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$  e uma corrente Superficial  $\vec{J}_{sM}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$  em espaço livre.



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_{vM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{J}_{sM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

**Prova de:**

$$\iiint_V \nabla \times \vec{F} dv = - \oint_S \vec{F} \times d\vec{s}$$

Teorema da divergência:  $\iiint_V \nabla \bullet \vec{F} dv = \oint_S \vec{F} \bullet d\vec{s}$

Substituindo  $\vec{F}$  por  $\vec{F} \times \vec{c}$ , onde  $\vec{c}$  é um vetor constante:  $\iiint_V \nabla \bullet (\vec{F} \times \vec{c}) dv = \oint_S (\vec{F} \times \vec{c}) \bullet d\vec{s}$

(1) Identidade:  $\nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \bullet \nabla \times \vec{B}$

$$\rightarrow \nabla \bullet (\vec{F} \times \vec{c}) = \vec{c} \bullet \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \bullet \nabla \times \vec{c}^0 = \vec{c} \bullet \nabla \times \vec{F}$$

(2) Identidade:  $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B})$

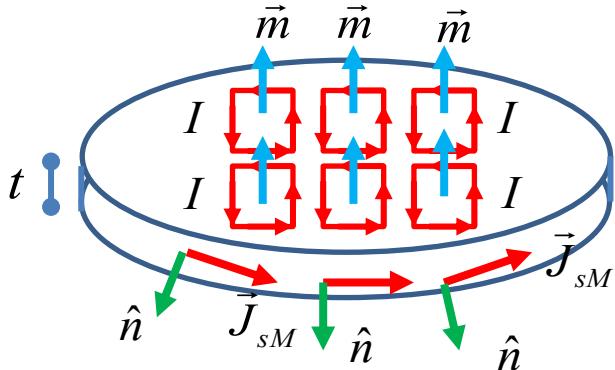
$$\rightarrow d\vec{s} \bullet (\vec{F} \times \vec{c}) = \vec{c} \bullet (d\vec{s} \times \vec{F})$$

$$\rightarrow \iiint_V \vec{c} \bullet \nabla \times \vec{F} dv = \oint_S \vec{c} \bullet (d\vec{s} \times \vec{F}) \rightarrow \vec{c} \bullet \iiint_V \nabla \times \vec{F} dv = \vec{c} \bullet \oint_S (d\vec{s} \times \vec{F}) \quad \forall \vec{c}$$

$$\rightarrow \iiint_V \nabla \times \vec{F} dv = \oint_S (d\vec{s} \times \vec{F}) \quad c.q.d.$$

## Interpretação física:

(1) Magnetização constante:  $\vec{J}_{sM}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$ ,  $\vec{J}_{vM}(\vec{r}') = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') = 0$



Magnetização uniforme → cada dipolo tem a mesma corrente I e área a:

$$\left. \begin{aligned} \vec{m} &= I S \hat{a}_z \\ \vec{m} &= \vec{M} S t = M_o S t \hat{a}_z \end{aligned} \right\} \quad \rightarrow \quad J_{sM} = \frac{I}{t} = M_o$$

A direção de  $\vec{J}_{sM}$  pode ser observada pela figura, e é dada por:  $\vec{J}_{sM}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$ ,

(2) Magnetização não-uniforme:  $\vec{J}_{sM}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$ ,  $\vec{J}_{vM}(\vec{r}') = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \neq 0$

Cada dipolo interno (mesma área) tem corrente diferente dos dipolos adjacentes.  
→ Há corrente interna líquida!

Corrente total nula:

$$\iiint_V \vec{J}_{vM}(\vec{r}) dV + \oint_S \vec{J}_{sM}(\vec{r}) d\vec{s} = 0$$

$$\iiint_V \vec{J}_{vM}(\vec{r}) dv + \oint_S \vec{J}_{sM}(\vec{r}) d\vec{s} = 0$$

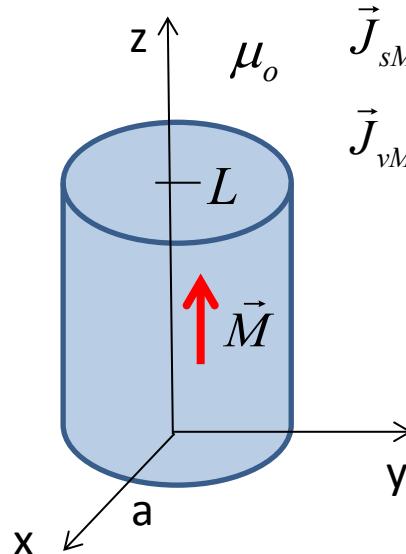
$$\iiint_V \vec{J}_{vM}(\vec{r}) dv = - \oint_S \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n} ds$$

Usando:  $\iiint_V \nabla \times \vec{F} dv = - \oint_S \vec{F} \times d\vec{s}$  →  $\iiint_V \vec{J}_{vM}(\vec{r}) dv = \iiint_V \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) dv \quad \forall V$

→  $\vec{J}_{vM}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \quad c.q.d.$

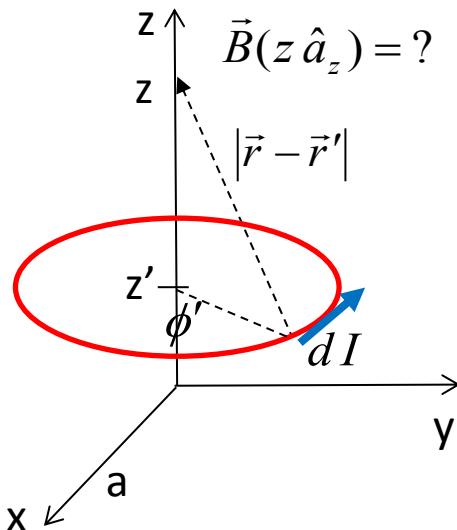
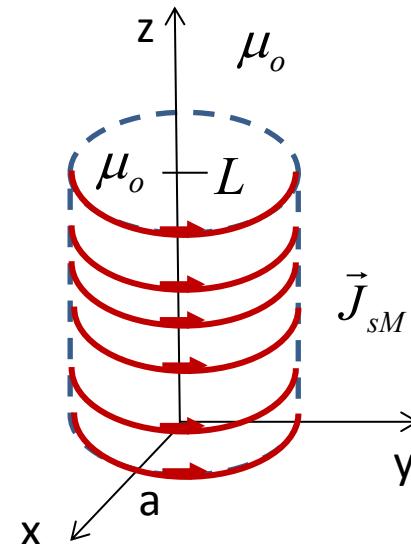
## Exemplo:

Campo magnético no eixo de um cilindro circular de raio “a” e comprimento L, magnetizado uniformemente:  $\vec{M} = M_o \hat{a}_z$



$$\vec{J}_{sM}(\vec{r}) = (M_o \hat{a}_z) \times \hat{a}_r = M_o \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J}_{vM}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = 0$$



$$d\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{dI a^2}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$d\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} \frac{dI a^2}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z$$

$dI = J_{sM} dz' = M_o dz'$

}

$$d\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} \frac{M_o dz' a^2}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} \int_0^L \frac{M_o a^2}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{a}_z dz'$$

⋮

$$\vec{B}(z \hat{a}_z) = \frac{\mu_o}{2} M_o \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{(z-L)}{\sqrt{(z-L)^2 + a^2}} \right] \hat{a}_z$$

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 5.4, 6.1, e 6.2

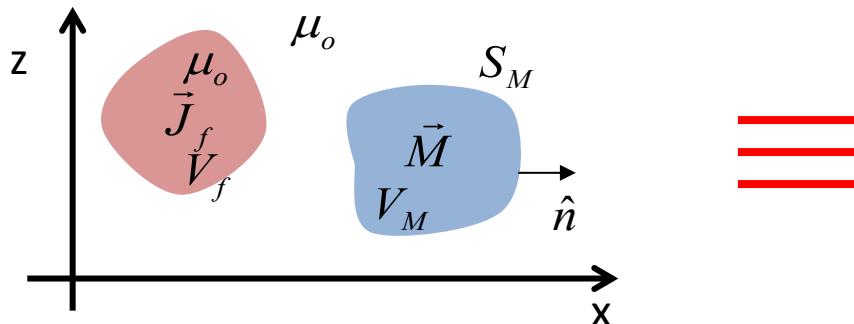
## **Exercícios:**

- Problemas 5.22, 5.29, 6.7, 6.8  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

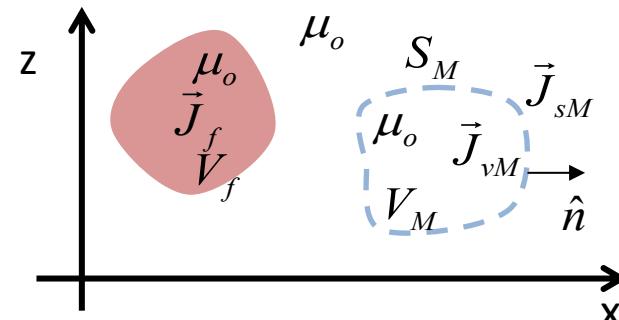
# MAGNETOSTÁTICA EM MEIOS MATERIAIS

## INTENSIDADE DE CAMPO MAGNÉTICO

Potencial Vetor devido a correntes livres e de magnetização:



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V_f} \frac{\vec{J}_{vf}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3v' + \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{V_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3v'$$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi\epsilon_o} \iiint_{V_f} \frac{\vec{J}_{vf}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3v' + \frac{\mu_o}{4\pi\epsilon_o} \oint_{S_M} \frac{\vec{J}_{sM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{\mu_o}{4\pi\epsilon_o} \iiint_{V_M} \frac{\vec{J}_{vM}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3v'$$

O problema equivalente tem correntes volumétricas e superficiais em espaço livre:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_o \vec{J}_v \\ \vec{J}_v &= \vec{J}_{vf} + \vec{J}_{vM} \end{aligned} \right\} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_o (\vec{J}_{vf} + \vec{J}_{vM})$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_o (\vec{J}_{vf} + \vec{J}_{vM}) \\ \vec{J}_{vM} &= \nabla \times \vec{M} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_o} &= \vec{J}_{vf} + \nabla \times \vec{M} \\ \nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \right) &= \vec{J}_{vf} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf}}$$

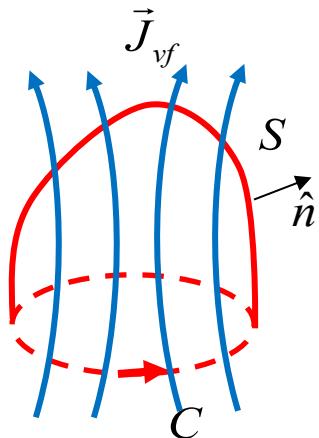
**Lei de Ampere**

Intensidade de Campo Magnético:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M})}$$

O rotacional da intensidade de campo magnético depende apenas da distribuição volumétrica de correntes livres! O rotacional de H não depende das correntes de magnetização.



Integrando a Lei de Ampere em uma superfície S limitada pela curva C, e usando o Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{H}) \bullet d\vec{s} = \iint_S \vec{J}_{vf} \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{f\,tot}$$

**Lei de Ampere**

A circulação da intensidade de campo magnético em uma curva C é igual à corrente total livre atravessando a superfície S limitada pela curva C.

A intensidade de campo magnético depende apenas das correntes livres?

$$\left[ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} \\ \nabla \bullet \vec{H} = ? \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \end{array} \right] \rightarrow \nabla \bullet \vec{H} = \nabla \bullet \left( \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \right) = \frac{1}{\mu_o} \cancel{\nabla \bullet \vec{B}}^0 - \nabla \bullet \vec{M}$$
$$\rightarrow \nabla \bullet \vec{H} = -\nabla \bullet \vec{M}$$

NÃO!!!

O rotacional da intensidade de campo magnético só depende das correntes livres, mas seu divergente depende da magnetização!

# MAGNETOSTÁTICA EM MEIOS MATERIAIS

## MEIOS LINEARES

O meio é linear e isotrópico se a magnetização é proporcional à intensidade de campo magnético.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$



$\chi_e$ : susceptibilidade magnética

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_o (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_o \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\mu_r = (1 + \chi_m)$$

Permeabilidade relativa

$$\mu = \mu_o \mu_r = \mu_o (1 + \chi_m)$$

Permeabilidade do meio



$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_r \approx 1 & \text{para a maioria dos meios} \\ \mu_r \in [50, 5000] & \text{para ímãs (ferro, níquel, cobalto)} \end{array} \right.$$

# MAGNETOSTÁTICA EM MEIOS MATERIAIS

## COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

Um meio arbitrário possui naturalmente dipolos magnéticos devido a:

- Movimento orbital dos elétrons
- Movimento de rotação dos elétrons (spin)

### 1. Paramagnetismo

Leve alinhamento dos spins com o campo magnético, resultando no aumento do campo. Usualmente em átomos com apenas 1 elétron ocupando orbitais.

$$\mu_r \approx > 1$$

	$\chi_m$
oxigênio	$1,9 \cdot 10^{-8}$
Alumínio	$2,1 \cdot 10^{-5}$
Sódio	$0,8 \cdot 10^{-5}$


$$\mu_r = (1 + \chi_m) \approx 1$$

## 2. Diamagnetismo $\mu_r \approx < 1$

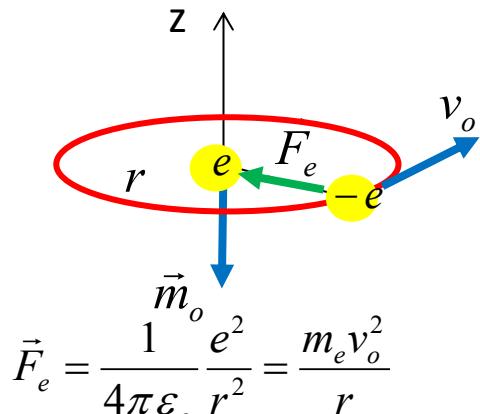
Leve alinhamento dos spins contrários ao campo magnético externo, resultando na diminuição do mesmo.

Usualmente em átomos com 2 elétrons ocupando orbitais. O efeito resulta do movimento orbital dos elétrons.

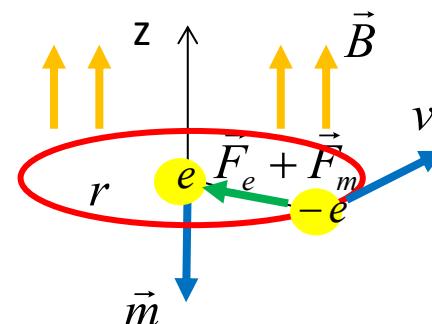
	$\chi_m$
Ouro	$-3 \cdot 10^{-5}$
Prata	$-2,4 \cdot 10^{-5}$
Água	$-0,9 \cdot 10^{-5}$

$$\rightarrow \mu_r = (1 + \chi_m) \approx 1$$

Sem campo magnético externo:



Com campo magnético externo: assumindo  $r$  fixo



$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + evB = \frac{m_e v^2}{r}$$

$$\frac{m_e v^2}{r} + evB = \frac{m_e v^2}{r}$$

$$evB = \frac{m_e(v + v_o)(v - v_o)}{r}$$

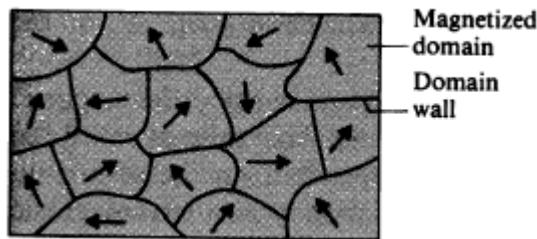
$$evB \approx \frac{m_e(2v)(v - v_o)}{r} \rightarrow v - v_o \approx \frac{eBr}{2m_e} > 0 \rightarrow v > v_o$$

$$\rightarrow \vec{m} > \vec{m}_o$$

Aumento do dipolo na direção oposta ao campo externo.

### 3. Ferromagnetismo

O material é formado por pequenos domínios ( $\mu\text{m}$  a  $\text{mm}$ ) onde os momentos são alinhados.



As direções dos momentos de dipolo de cada domínio é aleatória, e não há momento líquido.

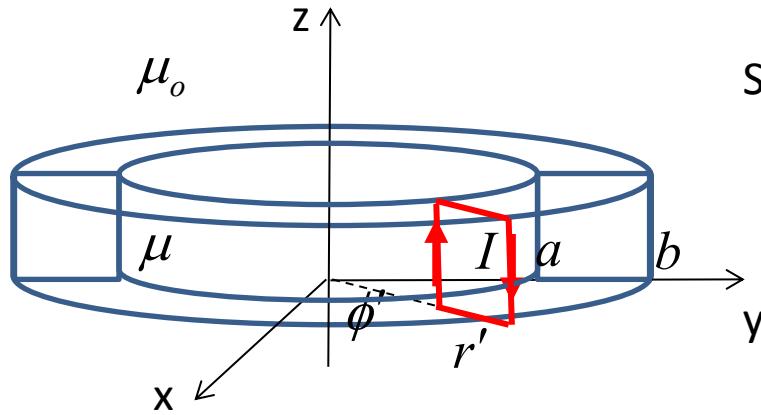
Um campo magnético externo faz com que os domínios alinhados ao campo cresçam, levando a um momento líquido.

A saturação é atingida quando todos os domínios estão alinhados ao campo cresçam. A magnetização resultante pode ser muito superior à intensidade de campo magnético.

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_o (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_o \mu_r \vec{H} \quad \rightarrow \quad \mu_r \gg 1$$

## Exemplo:

Toróide (seção reta constante), com  $n$  voltas com corrente  $I$ , preenchido por material magnético de permeabilidade  $\mu$ .



Simetria: 
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r, z) \hat{a}_\phi \end{cases} \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = H_\phi(r, z) \hat{a}_\phi$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = I_{tot}$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (H_\phi(r, z) \hat{a}_\phi) \bullet (\hat{a}_\phi r d\phi) = 2\pi r H_\phi(r, z)$$

Se o loop Amperiano é interior ao toróide:  $I_{tot} = nI$

$$\rightarrow 2\pi r H_\phi(r, z) = nI \rightarrow H_\phi(r, z) = \frac{nI}{2\pi r} \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{nI}{2\pi r} \hat{a}_\phi \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu n I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

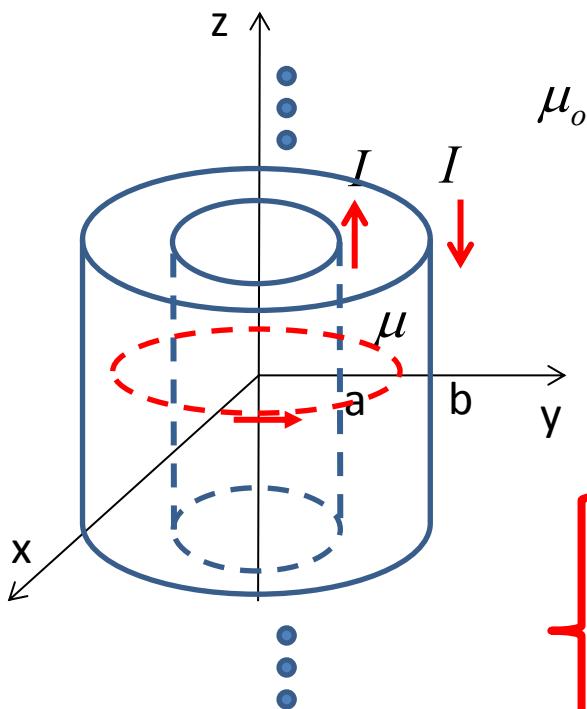
Se o loop amperiano é exterior ao toróide:  $I_{tot} = 0$

$$\rightarrow 2\pi r H_\phi(r, z) = 0 \rightarrow H_\phi(r, z) = 0 \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

## Exemplo:

Campo magnético gerado por um longo cabo coaxial de raios  $a$  e  $b$ , e corrente total  $I$ . O meio interior tem permeabilidade  $\mu$ .

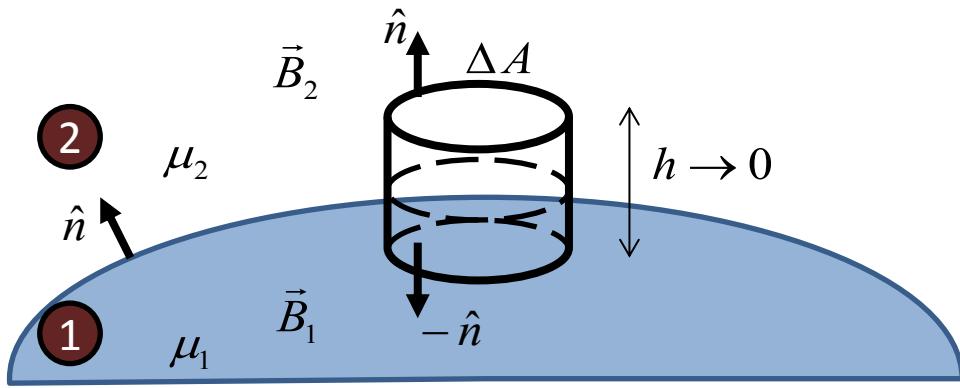
No limite em que  $L \rightarrow \infty$ :



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Simetria Cilíndrica: } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \text{Corrente vertical: } \vec{J}(\vec{r}) = J_z(r) \hat{a}_z \\ \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r) \hat{a}_\phi \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = H_\phi(r) \hat{a}_\phi \\ \oint_C \vec{H}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = I_{tot} \rightarrow H_\phi(r) 2\pi r = I_{tot} \\ \text{(i) } a < r < b: I_{tot} = I \rightarrow H_\phi(r) = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \\ \text{(i) } r < a \text{ ou } r > b: I_{tot} = 0 \rightarrow H_\phi(r) = 0 \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right.$$

# MAGNETOSTÁTICA EM MEIOS MATERIAIS

## CONDIÇÕES DE CONTORNO



$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

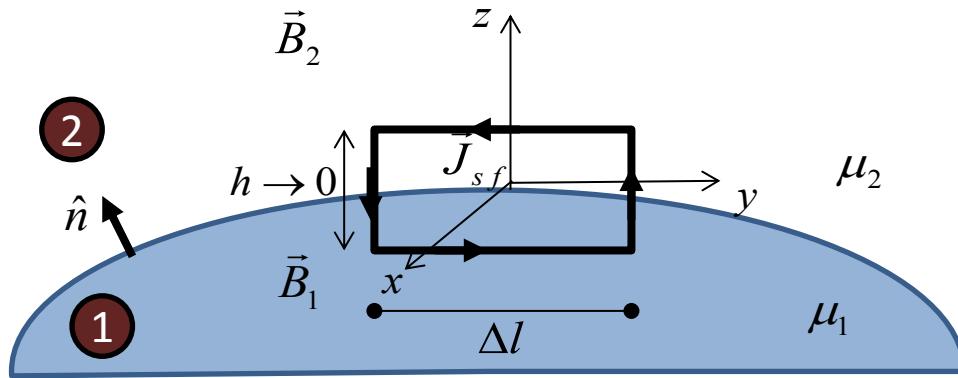
$$\vec{B}_2 \bullet (\Delta A \hat{n}) + \vec{B}_1 \bullet (-\Delta A \hat{n}) = 0$$



$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

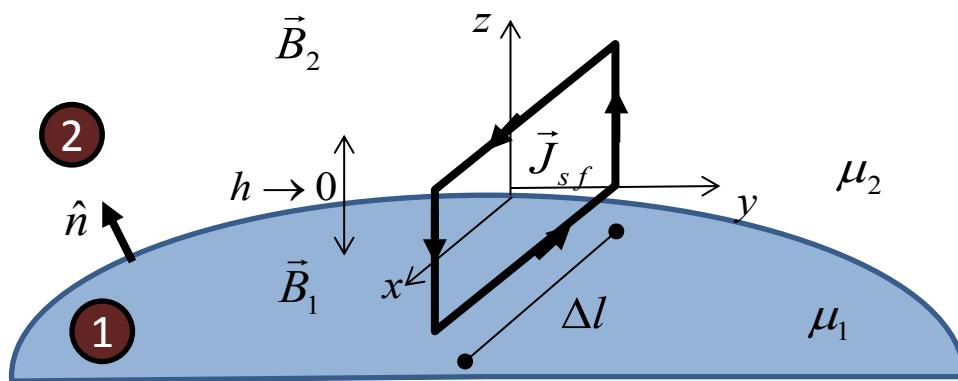
→ A componente normal do campo magnético é contínua na interface.



$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{f\text{tot}}$$

$$\vec{H}_1 \bullet (\Delta l \hat{a}_y) + \vec{H}_2 \bullet (-\Delta l \hat{a}_y) = J_{fx} \Delta l$$

→  $H_{1y} - H_{2y} = J_{fx}$



$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{f\text{tot}}$$

$$\vec{H}_1 \bullet (-\Delta l \hat{a}_x) + \vec{H}_2 \bullet (\Delta l \hat{a}_x) = J_{fy} \Delta l$$

→  $-H_{1x} + H_{2x} = J_{fy}$

Combinando:  $\vec{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{J}_{sf}$  →  $\vec{n} \times \left[ \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right] = \vec{J}_{sf}$

Prova:  $\vec{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{J}_{sf}$  →  $\hat{a}_z \times [H_{2x}\hat{a}_x + H_{2y}\hat{a}_y - H_{1x}\hat{a}_x - H_{1y}\hat{a}_y] = J_{fx}\hat{a}_x + J_{fy}\hat{a}_y$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{2x} - H_{1x} = J_{fy} \\ -H_{2y} + H_{1y} = J_{fx} \end{array} \right.$$

A componente tangencial da intensidade de campo magnético é descontínua na interface, e a descontinuidade é igual à densidade superficial de corrente livre.

## **Leitura:**

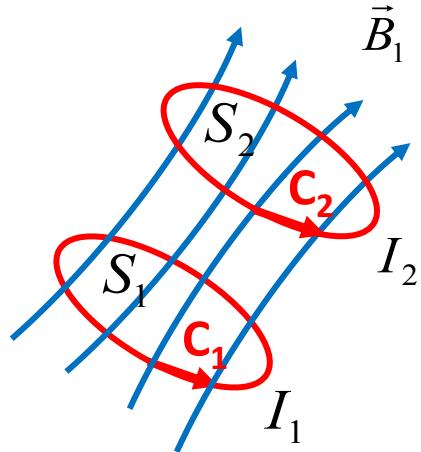
- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 6.3 e 6.4

## **Exercícios:**

- Problemas 6.12, 6.16 e 6.17  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# MAGNETOSTÁTICA EM MEIOS MATERIAIS

## INDUTÂNCIA



Considere 2 percursos fechados, C1 e C2, limitando as Superfícies S1 e S2, e com correntes I1 e I2.

$\vec{B}_1$  é o campo gerado pela corrente I1 no loop C1.

O fluxo de  $\vec{B}_1$  através de S2 (limitada por C2) vale:

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \bullet d\vec{s}_2$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}_1(\vec{r}') \times \vec{a}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$

$$\vec{B}_1 \propto I_1$$

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \bullet d\vec{s}_2$$

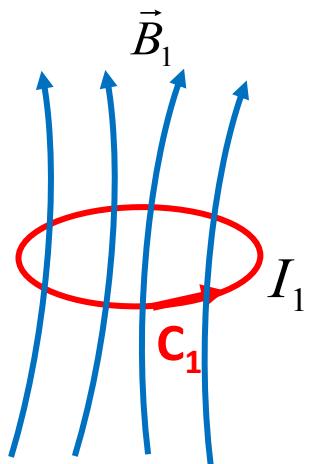
$$\Phi_{21} \propto \vec{B}_1$$

$$\Phi_{21} \propto I_1$$

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

Indutância mútua entre os loops C1 e C2.



Autoindutância do loop C1:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1}$$

Fluxo magnético atravessando loop 1 devido a uma corrente nele mesmo, dividido pela corrente.

## Fórmula de Neumann:

$$\begin{aligned} L_{21} &= \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \bullet d\vec{s}_2 = \frac{1}{I_1} \iint_{S_2} \nabla \times \vec{A}_1(\vec{r}_2) \bullet d\vec{s}_2 = \frac{1}{I_1} \oint_{C_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \bullet d\vec{l}_2 = \\ &= \frac{1}{I_1} \oint_{C_2} \left[ \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{\vec{I}_1(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} d\vec{l}_1 \right] \bullet d\vec{l}_2 = \frac{1}{I_1} \oint_{C_2} \left[ \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} d\vec{l}_1 \right] \bullet d\vec{l}_2 \end{aligned}$$

→  $L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \bullet d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

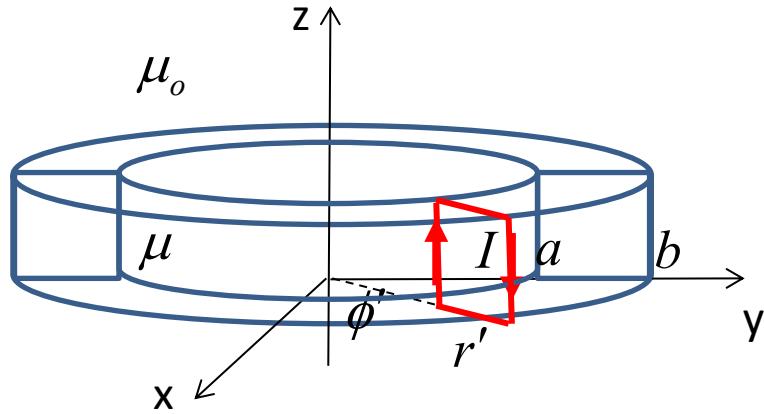
Similarmente:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_C \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \bullet d\vec{l}'_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1|}$$

- A autoindutância e indutância mútua dependem das formas dos circuitos, disposição física e características do meio.
- $L_{11}$  e  $L_{21}$  independem das correntes nos circuitos.
- $L_{21}=L_{12}$ : consequência da reciprocidade.

## Exemplo:

Toróide (seção reta constante), com  $n$  voltas com corrente  $I$ , preenchido por material magnético de permeabilidade  $\mu$ . Determine a indutância.



Simetria: 
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r, z) \hat{a}_\phi \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu n I}{2\pi r} \hat{a}_\phi & \text{ponto interior} \\ 0 & \text{ponto exterior} \end{cases}$$

Fluxo em 1 loop:

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int_0^h \int_a^b \left( \frac{\mu n I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \right) \bullet (\hat{a}_\phi dr dz) = \frac{\mu n I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Fluxo em  $n$  loop:

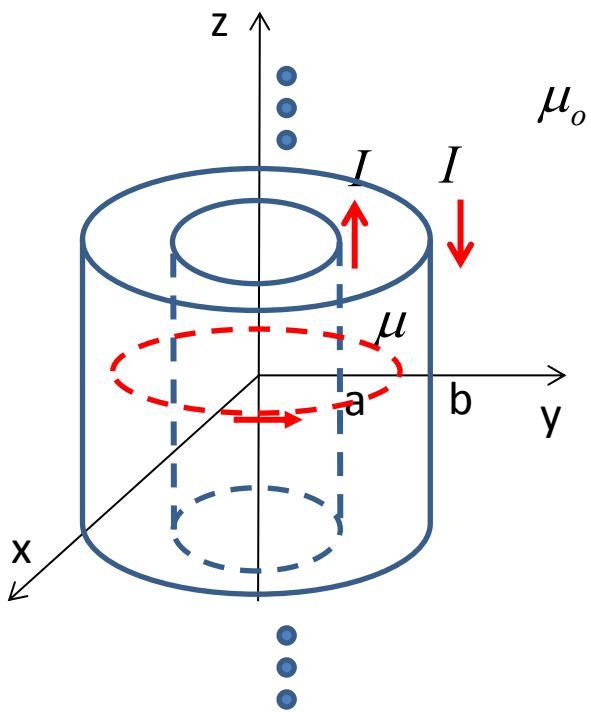
$$\Phi_n = n \Phi_1 = \frac{\mu n^2 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

→ 
$$L = \frac{\Phi_n}{I} = \frac{\mu n^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

## Exemplo:

Indutância por comprimento de um longo cabo coaxial de raios  $a$  e  $b$ , e corrente total  $I$ . O meio interior tem permeabilidade  $\mu$ .

No limite em que  $L \rightarrow \infty$ :



$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i) } a < r < b: & \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \\ \text{(ii) } r < a \text{ ou } r > b: & \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right.$$

Fluxo por comprimento:

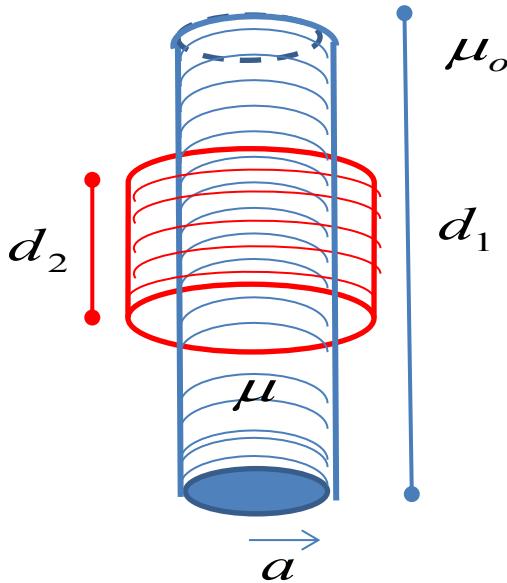
$$\Phi' = \int_0^1 \int_a^b \left( \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \right) \bullet (\hat{a}_\phi dr dz) = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Indutância por comprimento:

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

## Exemplo:

Dois solenóides coaxiais tem  $N_1$  e  $N_2$  voltas, e comprimentos  $d_1$  e  $d_2$ . O núcleo tem raio  $a$  e permeabilidade  $\mu$ . Determine a indutância mútua.



$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \bullet d\vec{s}_2$$

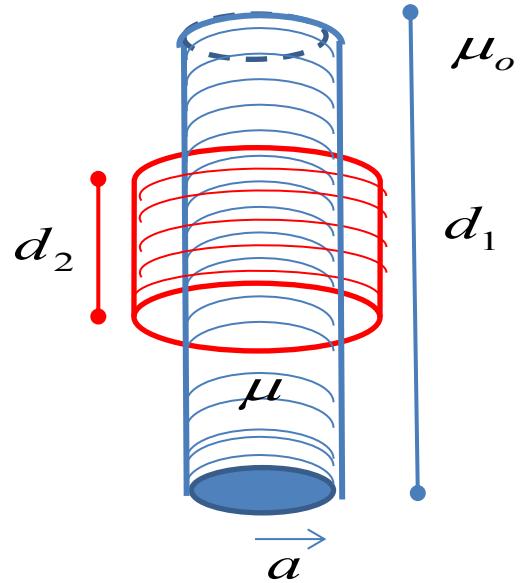
Aproximação de solenoide 1 muito longo, de  $N_1/d_1$  voltas por comprimento. Simetria:  $\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = B_z(r) \hat{a}_z \rightarrow \vec{H}_1(\vec{r}) = H_z(r) \hat{a}_z$$

$$\oint_{C1} \vec{H}_1(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = 0 \rightarrow H_z(r_1) = H_z(r_2) = 0$$

$$\oint_{C1} \vec{H}_1(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = H_1(r) h = \frac{N_1}{d_1} h I_1 \rightarrow H_1(r) = \frac{N_1}{d_1} I_1$$

$$\rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu N_1}{d_1} I_1 \vec{a}_z & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$



Fluxo em 1 loop do solenóide 2:

$$\Phi_1 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( \frac{\mu N_1}{d_1} I_1 \vec{a}_z \right) \bullet (\vec{a}_z r d\phi dr) = \frac{\mu N_1}{d_1} I_1 \pi a^2$$

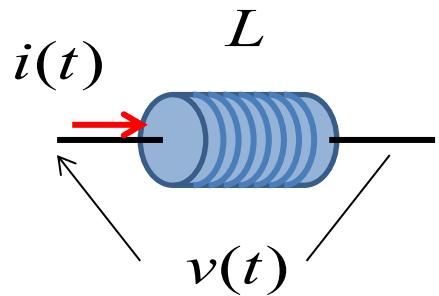
Fluxo em N2 loops do solenóide 2:

$$\Phi_{21} = \Phi_{N_2} = N_2 \Phi_1 = \frac{\mu N_1 N_2}{d_1} I_1 \pi a^2$$

$$\rightarrow L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2}{d_1} \pi a^2$$

# MAGNETOSTÁTICA EM MEIOS MATERIAIS

## ENERGIA MAGNÉTICA



$$v(t) = L \frac{d i(t)}{dt}$$

O indutor será carregado com uma corrente I. A potência instantânea vale:

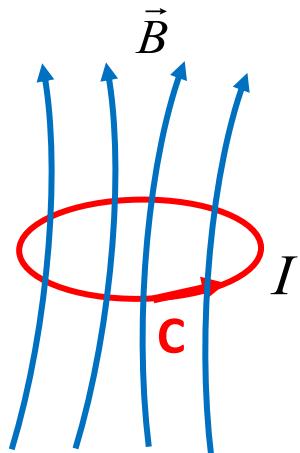
$$p(t) = v(t) i(t) = L i(t) \frac{d i(t)}{dt}$$

Energia armazenada em  $dt$ :

$$dW(t) = p(t) dt = L i(t) d i(t)$$

Energia total armazenada:

$$W = \int_0^I L i \, d i = \frac{1}{2} L I^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \Phi = L I \end{array} \right\} \rightarrow W = \frac{1}{2} \Phi I$$



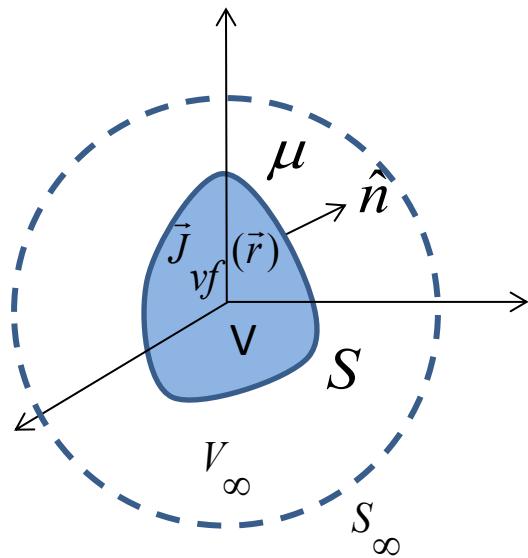
$$\Phi = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \bullet (I d\vec{l}) = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \bullet \vec{I} dl$$

Generalizando para densidades de corrente elétrica:

$$\rightarrow W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \bullet \vec{J}_{vf} dv$$

# Energia magnética em termos dos campos magnéticos:



Toda a corrente está confinada no volume V:

$$\left( \vec{J}_{vf}(\vec{r}) \bullet \hat{n} \right) \Big|_S = 0$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \bullet \vec{J}_{vf} dv = \frac{1}{2} \iint_{V_\infty} \vec{A} \bullet \vec{J}_{vf} dv = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{A} \bullet (\nabla \times \vec{H}) dv$$

Identidade:  $\nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \bullet (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \bullet (\nabla \times \vec{H})$

→  $W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} [\vec{H} \bullet (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{H})] dv$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{H} \bullet \vec{B} dv - \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} (\vec{A} \times \vec{H}) \bullet d\vec{s}$$

$$\left. \begin{aligned} A &\propto \frac{1}{r} \\ H &\propto \frac{1}{r^2} \\ ds &\propto r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow (\vec{A} \times \vec{H}) \bullet d\vec{s} \propto \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

→  $W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{H} \bullet \vec{B} dv$

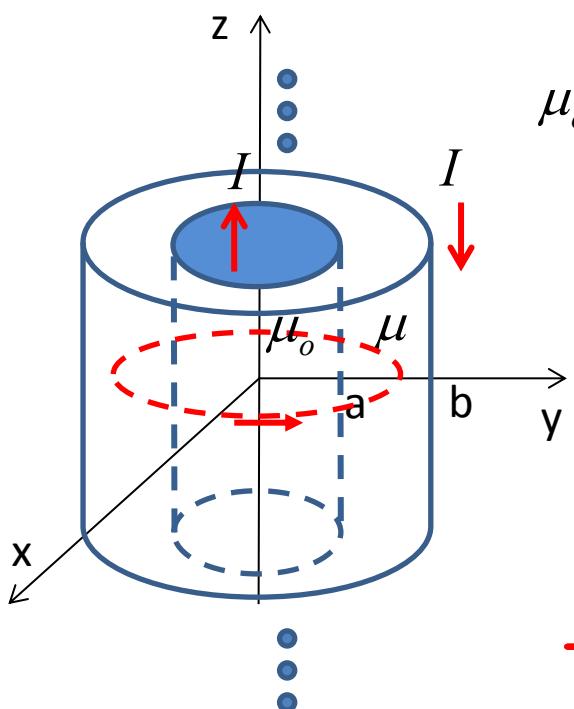
Em todo espaço!!

## Exemplo:

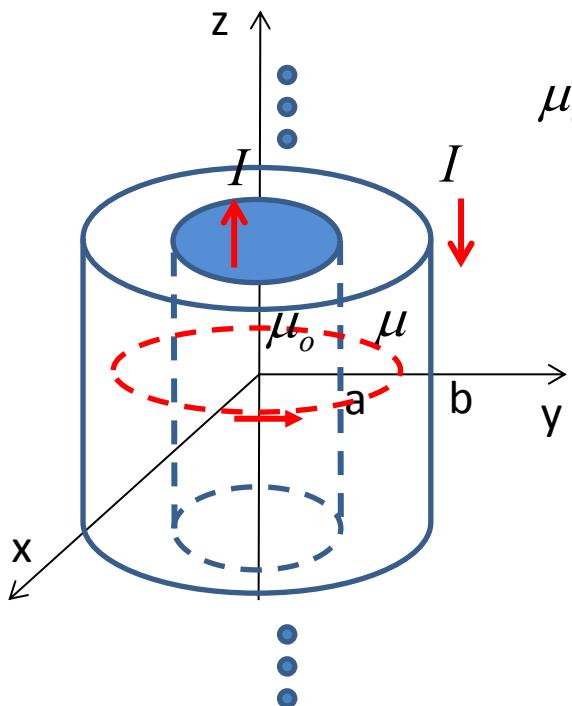
Indutância por comprimento de um longo cabo coaxial de raios a e b,  
O meio interior tem permeabilidade  $\mu$  ( $a < r < b$ ).

A corrente se distribui uniformemente no fio interno ( $\vec{J}_v = \frac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z$ ).

No limite em que  $L \rightarrow \infty$ :



$$\left[ \begin{array}{l} \text{Simetria Cilíndrica: } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \text{Corrente vertical: } \vec{J}(\vec{r}) = J_z(r) \hat{a}_z \\ \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(r) \hat{a}_\phi \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = H_\phi(r) \hat{a}_\phi \\ \oint_C \vec{H}(\vec{r}) \bullet d\vec{l} = I_{tot} \rightarrow H_\phi(r) 2\pi r = I_{tot} \\ \text{(i) } r < a: I_{tot} = \frac{I\pi r^2}{\pi a^2} \rightarrow H_\phi(r) = \frac{Ir}{2\pi a^2} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o Ir}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi \\ \text{(ii) } a < r < b: I_{tot} = I \rightarrow H_\phi(r) = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \\ \text{(iii) } r > b: I_{tot} = 0 \rightarrow H_\phi(r) = 0 \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right]$$



Energia magnética por comprimento:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad L = \frac{2W}{I^2}$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{H} \bullet \vec{B} dv$$

$$W = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( \frac{Ir}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi \right) \bullet \left( \frac{\mu_o Ir}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi \right) r d\phi dr dz + \int_0^1 \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \right) \bullet \left( \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \right) r d\phi dr dz \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu_o I^2}{2\pi a^4} \frac{r^4}{4} \Big|_0^a + \frac{1}{2} \frac{\mu I^2}{2\pi} \ln(r) \Big|_a^b = \frac{\mu_o I^2}{16\pi} + \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_o}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Indutância interna

Indutância externa

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 7.2.3 e 7.2.4

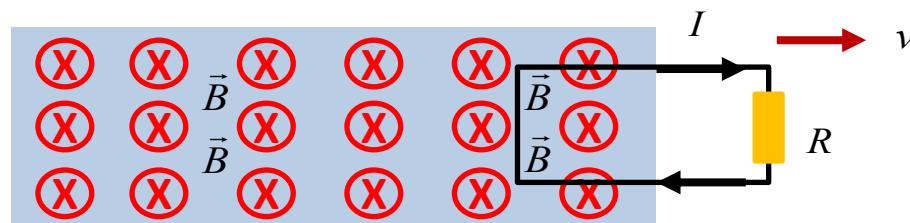
## **Exercícios:**

- Problemas 7.23, 7.26 e 7.27  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

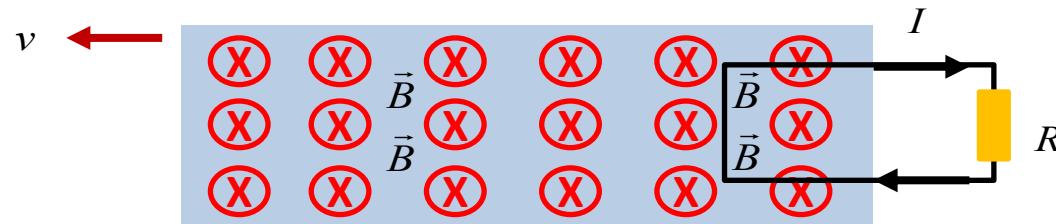
# ELETRODINÂMICA - LEI DE FARADAY

## Experimentos:

- (1) Experimento 1: uma corrente  $I$  flui em um loop quando o mesmo move-se através de um campo magnético



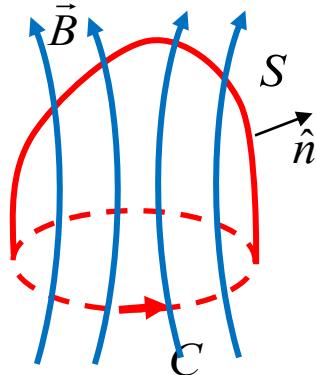
- (2) Experimento 2: uma corrente  $I$  flui em um loop em repouso quando a distribuição de campo magnético se move



- (3) Experimento 3: uma corrente  $I$  flui em um loop em repouso quando a intensidade de campo magnético varia



→ A variação do fluxo magnético induz uma tensão (força eletromotiva).



$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Lei de Faraday

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

Para  $S$  invariante no tempo, e usando o Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) \bullet d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \quad \forall S \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Fontes de campo elétrico:

1. Cargas elétricas (fonte divergente)
2. Variação do campo magnético (fonte rotacional)

Para campos invariantes no tempo:

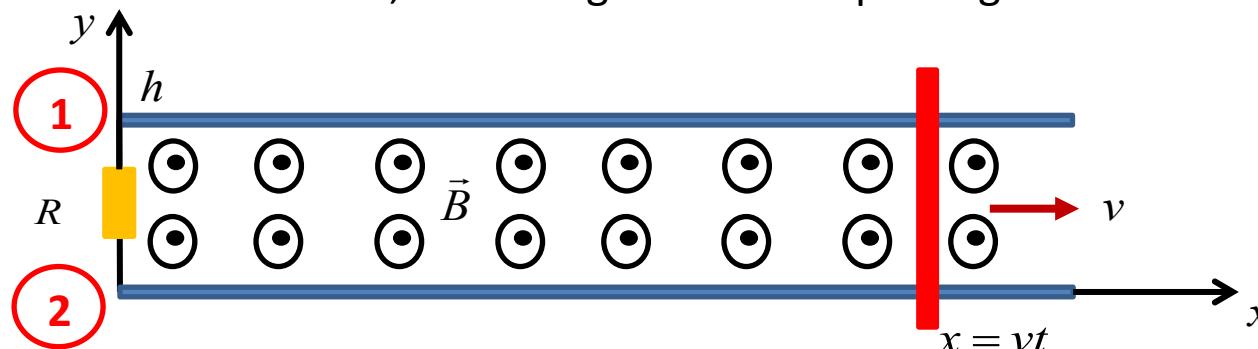
$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Compatível com eletrostática....

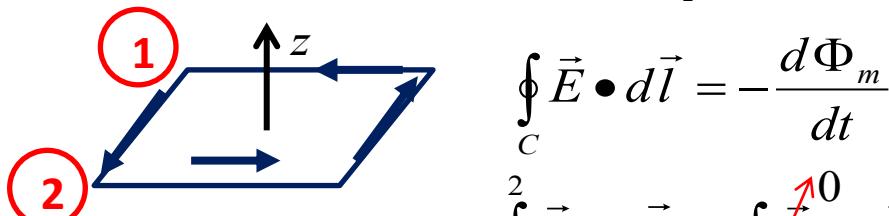
## Exemplo:

Uma barra de metal se move sobre trilhos condutores, com velocidade constante  $v$ , numa região com campo magnético uniforme:  $\vec{B} = B_o \hat{a}_z$



(a) Diferença de potencial entre os terminais 1 e 2:

Fluxo magnético na direção  $\hat{a}_z$ :  $\Phi_m = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int_0^{hvt} \int_0^R (B_o \hat{a}_z) \bullet (\hat{a}_z dx dy) = B_o h v t$



$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_{\text{trilho baixo}}^0 \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_{\text{barra metal}}^0 \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_{\text{trilho cima}}^0 \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} (B_o h v t) \rightarrow V_1 - V_2 = -B_o h v \rightarrow V_2 - V_1 = B_o h v$$

(b) Corrente no resistor:  $I = \frac{V_2 - V_1}{R} = \frac{B_o h v}{R}$

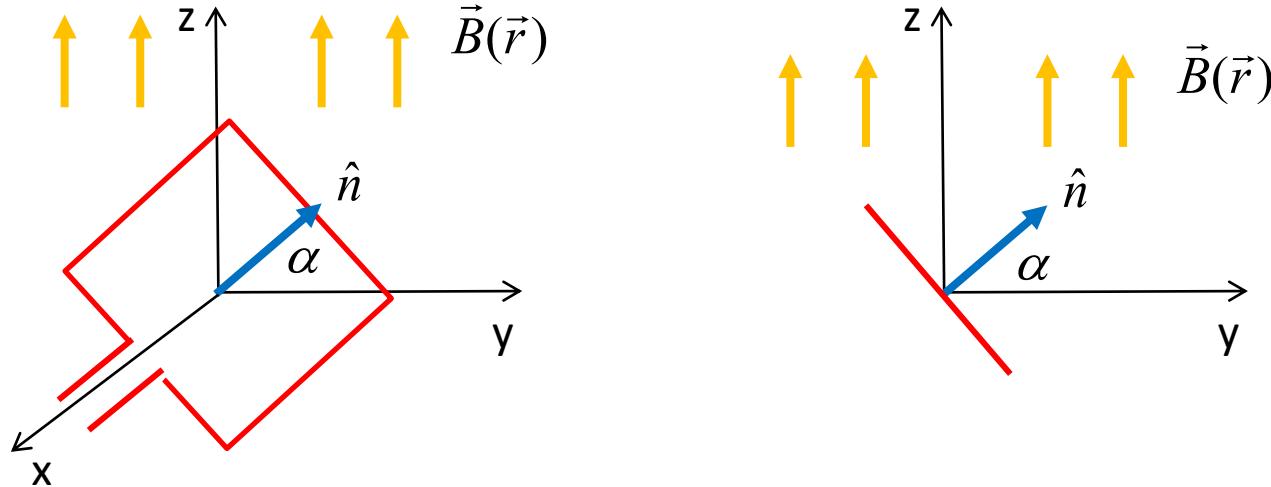


## Lei de Lenz:

A corrente elétrica induzida gera um fluxo magnético que tende a cancelar a variação do fluxo que a gerou.

## Exemplo:

Um loop retangular de dimensões  $h$  e  $d$  situa-se em uma região de campo magnético  $\vec{B} = B_o \operatorname{sen}(wt) \hat{a}_z$



(a) A tensão induzida nos terminais do loop:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_S (B_o \operatorname{sen}(wt) \hat{a}_z) \bullet (\hat{n} ds) = B_o \operatorname{sen}(wt) \cos(\pi/2 - \alpha) hd = B_o \operatorname{sen}(wt) \operatorname{sen}(\alpha) hd$$

$$\rightarrow V_o = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} (B_o \operatorname{sen}(wt) \operatorname{sen}(\alpha) hd) = -B_o w \cos(wt) \operatorname{sen}(\alpha) hd$$

(b) A tensão induzida se o loop também girar em uma velocidade angular  $\omega_2$ :  $\rightarrow \alpha = \omega_2 t$

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = B_o \operatorname{sen}(wt) \operatorname{sen}(\omega_2 t) hd$$

$$\rightarrow V_o = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B_o hd [w \cos(wt) \operatorname{sen}(\omega_2 t) + \omega_2 \operatorname{sen}(wt) \cos(\omega_2 t)]$$

# ELETRODINÂMICA – CORRENTE DE DESLOCAMENTO

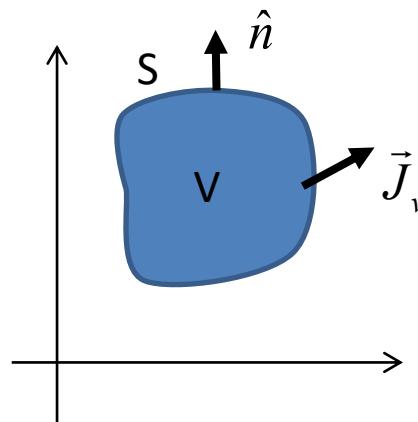
## Equações da Eletrodinâmica:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} = \vec{J}_{vi} + \vec{J}_c & \text{Lei de Ampere} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Lei de Faraday} \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho_{vf} & \text{Lei de Gauss} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 & \text{Lei de Gauss Magnética} \end{array} \right.$$

## Relações Constitutivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J}_c = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

## Equação da Continuidade:



$$\oint_S \vec{J}_{vf} \bullet d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt}$$
$$\nabla \bullet \vec{J}_{vf} = -\frac{\partial \rho_{vf}}{\partial t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lei de Ampere: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} \\ \text{Identidade: } \nabla \bullet (\nabla \times \vec{F}) = 0 \end{array} \right\} \quad \nabla \bullet (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \bullet \vec{J}_{vf} \quad \rightarrow \quad \nabla \bullet \vec{J}_{vf} = 0$$

$$\text{Equação da Continuidade: } \nabla \bullet \vec{J}_{vf} = -\frac{\partial \rho_{vf}}{\partial t} \quad ??$$

**Maxwell:** Termo faltando?

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} + \vec{J}_d$$

$$\nabla \bullet (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \bullet \vec{J}_{vf} + \nabla \bullet \vec{J}_d \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{\partial \rho_{vf}}{\partial t} + \nabla \bullet \vec{J}_d$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{J}_d = \frac{\partial \rho_{vf}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho_{vf} \end{array} \right\} \quad \nabla \bullet \vec{J}_d = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \bullet \vec{D} = \nabla \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Densidade volumétrica de Corrente de Deslocamento

Campo elétrico variante no tempo  
Induz campo magnético.

## Equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Lei de Ampere Generalizada

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Lei de Faraday

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho_{vf}$$

Lei de Gauss

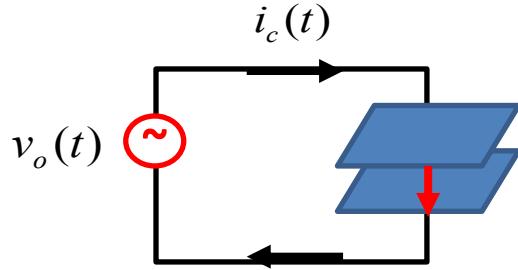
$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

Lei de Gauss Magnética

- Unificação entre Eletricidade, Magnetismo e Ótica
- Prevê a propagação de ondas

## Exemplo:

Uma tensão  $v_o(t) = V_o \operatorname{sen}(wt)$  é conectada a um capacitor de capacidade C. Determine as correntes no fio (de condução) e no dielétrico (de deslocamento).



$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$$i_c(t) = C \frac{d}{dt} v_o(t) = CV_o w \cos(wt)$$

$$\vec{E} = \frac{v_o(t)}{d} = \frac{V_o}{d} \operatorname{sen}(wt) (-\hat{a}_z)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon V_o}{d} \operatorname{sen}(wt) (-\hat{a}_z)$$

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon V_o}{d} w \cos(wt) (-\hat{a}_z)$$

$$i_d(t) = \iint_A \vec{J}_d \bullet (-\hat{a}_z da) = \frac{\epsilon A V_o}{d} w \cos(wt) = CV_o w \cos(wt)$$

$$\rightarrow i_d(t) = i_c(t)$$

# ELETRODINÂMICA – EQUAÇÕES DE MAXWELL

## Forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{vf} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho_{vf}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

Lei de Ampere Generalizada

Lei de Faraday

Lei de Gauss

Lei de Gauss Magnética

## Forma Integral:

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{tf} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

$$\iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{tf}$$

$$\iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

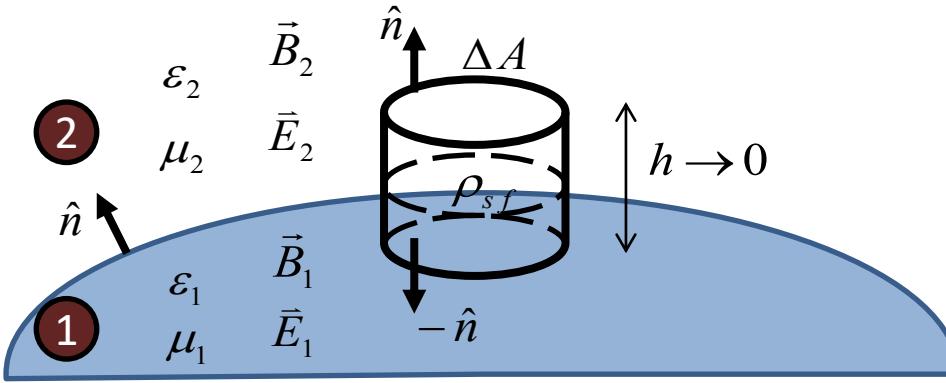
## Relações Constitutivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J}_c = \sigma \vec{E} \end{array} \right.$$

## Equação da Continuidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_S \vec{J}_{vf} \bullet d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} \\ \nabla \bullet \vec{J}_{vf} = -\frac{\partial \rho_{vf}}{\partial t} \end{array} \right.$$

# ELETRODINÂMICA - CONDIÇÕES DE CONTORNO



$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \rightarrow \vec{B}_2 \bullet (\Delta A \hat{n}) + \vec{B}_1 \bullet (-\Delta A \hat{n}) = 0 \rightarrow B_{2n} = B_{1n}$$

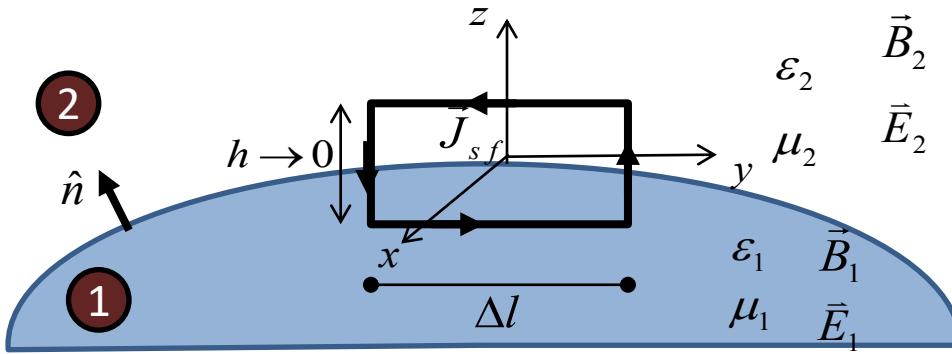
$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

→ A componente normal do campo magnético é contínua na interface.

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_f \rightarrow \vec{D}_2 \bullet (\Delta A \hat{n}) + \vec{D}_1 \bullet (-\Delta A \hat{n}) = \rho_{sf} \Delta A \rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_{sf}$$

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma_f$$

→ A componente normal do vetor deslocamento é descontínua na interface dielétrica, e o valor da descontinuidade é igual à densidade superficial de cargas livres.



$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} \quad \vec{E}_1 \bullet \Delta \vec{l} + \vec{E}_2 \bullet (-\Delta \vec{l}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

→ A componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface dielétrica.

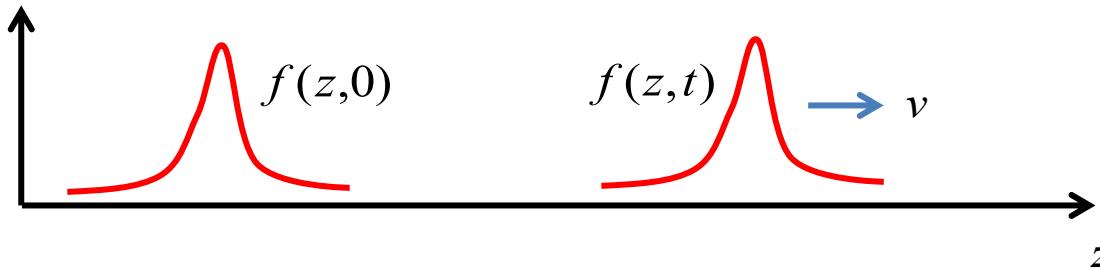
$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{tf} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} \quad \rightarrow \quad \vec{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{J}_{sf} \quad \rightarrow \quad \vec{n} \times \left[ \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right] = \vec{J}_{sf}$$

→ A componente tangencial da intensidade de campo magnético é descontínua na interface, e a descontinuidade é igual à densidade superficial de corrente livre.

# ELETRODINÂMICA – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

## Ondas Unidimensionais:

Onda: uma perturbação do meio que se propaga com uma velocidade fixa.



Equação de onda unidimensional:

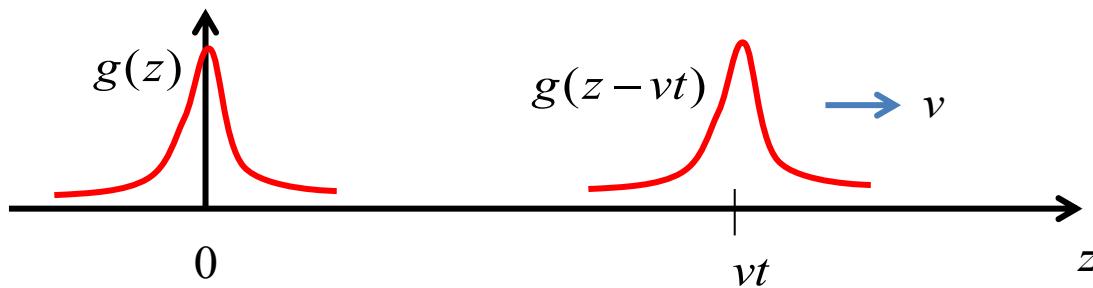
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Soluções:  $f(z,t) = \begin{cases} g(z-vt) \\ h(z+vt) \end{cases}$

Verificando:

$$(i) u = z - vt, \quad g(z-vt) = g(u), \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{dg}{du}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{du}(-v)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{d^2 g}{du^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 g}{du^2} (-v)^2 = 0$$

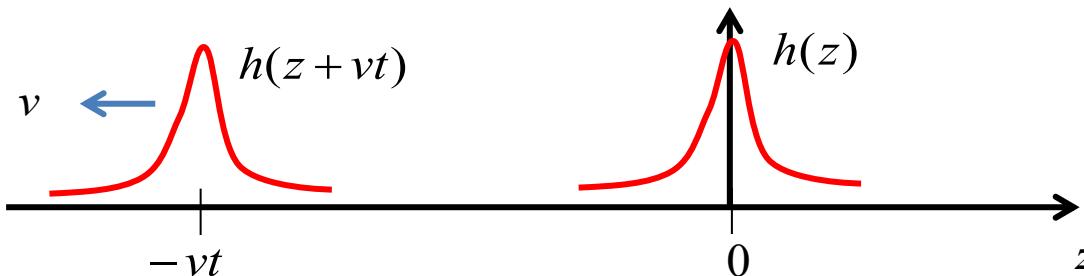


Um valor fixo do argumento (C):  $z - vt = C \rightarrow z = C + vt \rightarrow \frac{dz}{dt} = v$

→  $v$  é a velocidade da onda na direção  $+\hat{a}_z$ .

$$(ii) u = z + vt, \quad h(z + vt) = h(u), \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{dh}{du}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{du}(+v)$$

→  $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{d^2 h}{du^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 h}{du^2}(+v)^2 = 0$



Um valor fixo do argumento (C):  $z + vt = C \rightarrow z = C - vt \rightarrow \frac{dz}{dt} = -v$

→  $v$  é a velocidade da onda na direção  $-\hat{a}_z$ .

# Ondas Eletromagnéticas:

Para meios homogêneo, sem perdas ( $\sigma=0$ ) e sem fontes (cargas e correntes):

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = \nabla \bullet \left( \frac{\vec{D}}{\epsilon} \right) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \bullet \vec{D} = 0$$

$$\rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\mu \vec{H}) \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Equação de onda tridimensional

O campo  $E$ , variante no tempo, é uma onda que se propaga com velocidade  $v$ :

$$\frac{1}{v^2} = \mu \epsilon \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_x \hat{a}_x + \nabla^2 E_y \hat{a}_y + \nabla^2 E_z \hat{a}_z$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_x \hat{a}_x + \nabla^2 E_y \hat{a}_y + \nabla^2 E_z \hat{a}_z - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z) = 0$$

→ 
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 E_x - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E_y - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E_z - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

Cada componente cartesiana do campo E, variante no tempo, é uma onda que se propaga com velocidade v:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Similarmente:

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

→ 
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 H_x - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 H_y - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 H_z - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

Cada componente cartesiana do campo H, variante no tempo, é uma onda que se propaga com a mesma velocidade v.

## Exemplo:

Um suposto campo elétrico senoidal (harmônico), polarizado na direção x se propaga na direção z:

$$\vec{E} = E_o \cos(\omega t - kz) \hat{a}_x \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

(i) É uma onda?

$$\vec{E} = E_o \cos k\left(\frac{\omega}{k}t - z\right) \hat{a}_x = E_o \cos k\left(z - \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}t\right) \hat{a}_x = E_o \cos k(z - vt) \hat{a}_x$$

(ii) É uma onda eletromagnética?

$$\nabla \bullet \vec{D} = \nabla \bullet (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \nabla \bullet \vec{E} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{a}_y + \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{a}_z = -E_o k \sin(\omega t - kz) \hat{a}_y \quad \rightarrow \quad \vec{B} = E_o \frac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz) \hat{a}_y$$

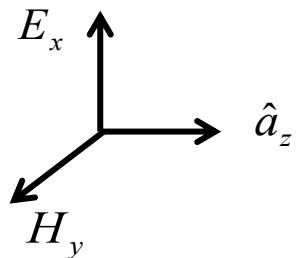
$$\nabla \bullet \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ E_o \frac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{a}_x + \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{a}_z \right) = \\ &= -\frac{1}{\mu} \left[ E_o \frac{k^2}{\omega} \sin(\omega t - kz) \hat{a}_x \right] = -E_o \omega \epsilon \sin(\omega t - kz) \hat{a}_x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega \epsilon E_o \sin(\omega t - kz) \hat{a}_x \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

### (iii) Propriedades

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_o \cos(wt - kz)}{E_o \frac{k}{w\mu} \cos(wt - kz)} = \frac{w\mu}{k} = \frac{w\mu}{w\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad \text{Impedância intrínseca do meio.}$$



Os campos elétrico e magnético são ortogonais entre si e à direção de propagação → Ondas transversais eletromagnéticas

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{a}_z \times \vec{E}$$

## **Leitura:**

- Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed., seções 7.1 a 7.2.2, e 7.3

## **Exercícios:**

- Problemas 7.8, 7.12, 7.17a  
Introdução à Eletrodinâmica, D.J. Griffiths, 3<sup>a</sup> Ed.

# SOLUÇÃO PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS

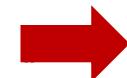
## EQUAÇÃO DE POISSON

Equação de Poisson:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r}) \\ \vec{E} = -\nabla V \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right\}$$

Meio linear:

$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_v(\vec{r})$$



Meio homogêneo:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Se  $\rho_v(\vec{r}) = 0$ :

$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = 0$$



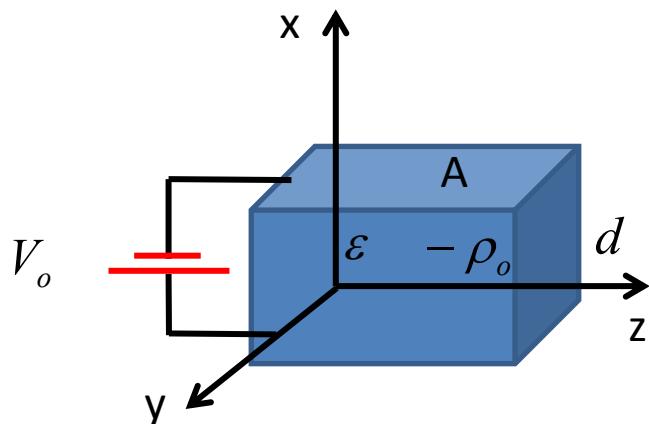
Equação de Poisson

$$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Laplace

## Exemplo:

Capacitor planar com dielétrico de permissividade  $\epsilon$ , com distribuição volumétrica de carga  $-\rho_o$ , e tensão  $V_o$ :



$$A \gg d^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{\partial}{\partial z} \approx 0$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} = \frac{\rho_o}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\rho_o}{\epsilon}$$

$$V(x) = \frac{\rho_o}{2\epsilon} x^2 + a x + b$$

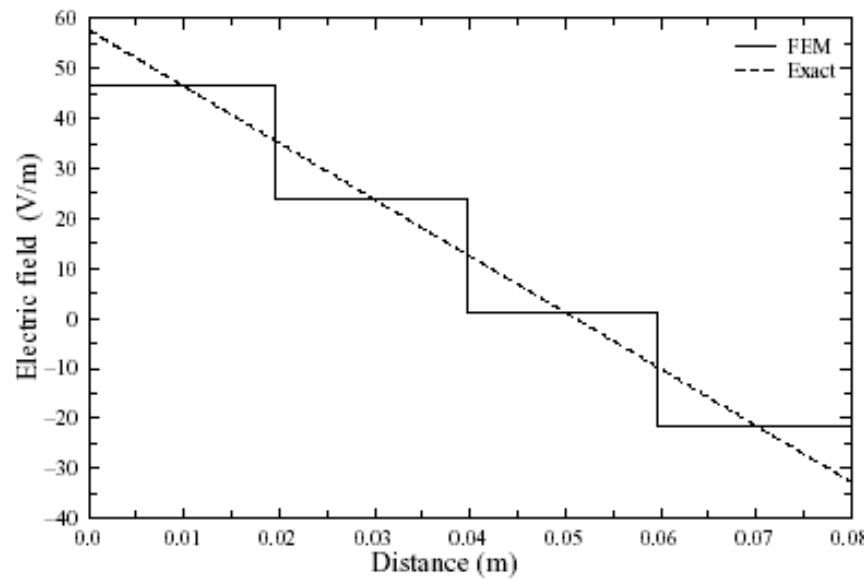
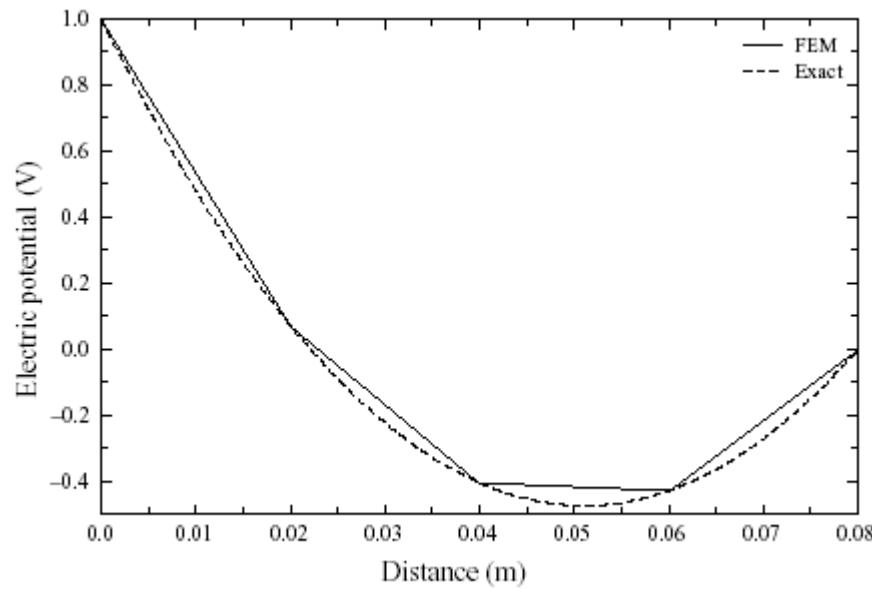
Condições de contorno:  $V(0) = V_o$

$$\rightarrow V_o = b$$

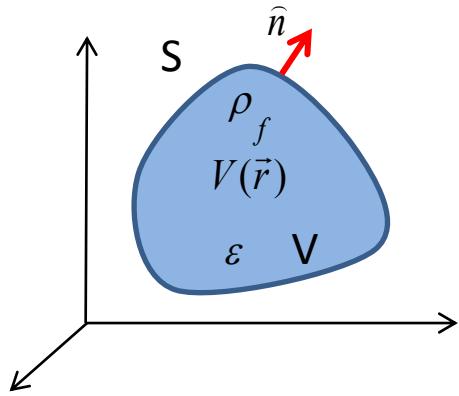
$$V(d) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\rho_o}{2\epsilon} d^2 + a d + V_o \quad \rightarrow \quad a = -\frac{V_o}{d} - \frac{\rho_o d}{2\epsilon}$$

$$\rightarrow V(x) = \frac{\rho_o}{2\epsilon} x^2 - \left( \frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o d}{2\epsilon} \right) x + V_o$$

$$\rightarrow \vec{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \hat{a}_x = \left( -\frac{\rho_o}{\epsilon} x + \frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o d}{2\epsilon} \right) \hat{a}_x$$



# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS



$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_f(\vec{r})$$

Procedimento:

1. Discretização do Domínio
2. Escolha das funções interpolação (de base, de forma)
3. Obter o sistema linear para um único elemento
4. Obter o sistema linear global (todos os elementos)
5. Impor condições de contorno
6. Resolver sistema linear
7. Pós-processamento

# FEM – 1D - DISCRETIZAÇÃO

Discretização em  $N_e$  elementos:  $l_e = \frac{d}{N_e} = \frac{d}{N_n - 1}$

$l_e$ : comprimento dos elementos

$$x_e = (e-1)l_e \quad x_{e+1} = el_e$$

Elementos:  $e = 1, 2, \dots, N_e$



Nós:  $n = 1, 2, \dots, N_n$

$$x_1 = 0 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_e \quad x_{e+1} \quad \dots \quad x_{N_e} \quad x_{N_e+1} = d \quad x$$

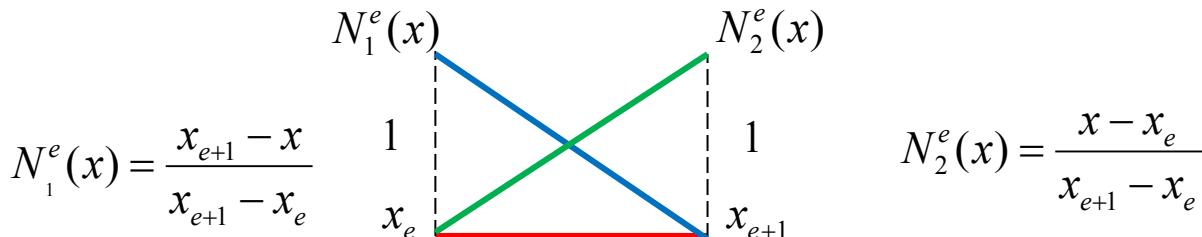
$$N_n = N_e + 1$$

$$V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad \dots \quad V_e \quad V_{e+1} \quad \dots \quad V_{N_e} \quad V_{N_e+1}$$

$$x_n = (n-1)l_e$$

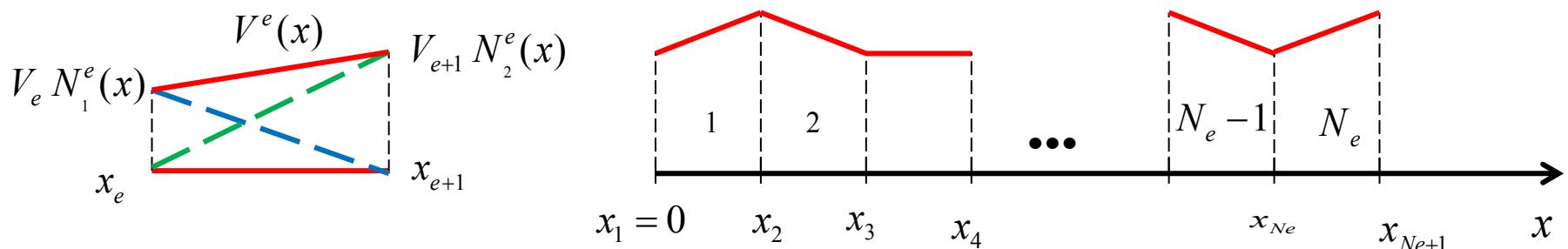
# FEM – 1D – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

## Aproximação Linear: Elemento e:



$$\rightarrow V^e(x) \approx V_e N_1^e(x) + V_{e+1} N_2^e(x)$$

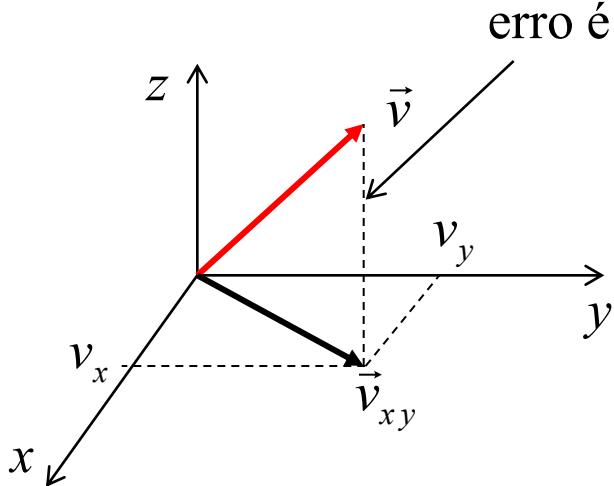
Aproximação!!



$$\nabla \bullet (\varepsilon \nabla V) = -\rho_v(\vec{r}) \rightarrow \frac{d}{dx} \left( \varepsilon \frac{dV}{dx} \right) = -\rho_v(x)$$

Resíduo:  $r(x) = \frac{d}{dx} \left( \varepsilon \frac{dV}{dx} \right) + \rho_v(x)$

A melhor aproximação de um vetor  $\vec{v}$  no plano  $xy$  é a projeção de  $\vec{v}$  no plano.



erro é  $\perp$  *plano*  $xy$

$$\vec{v} \approx v_x \hat{a}_x + v_y \hat{a}_y$$

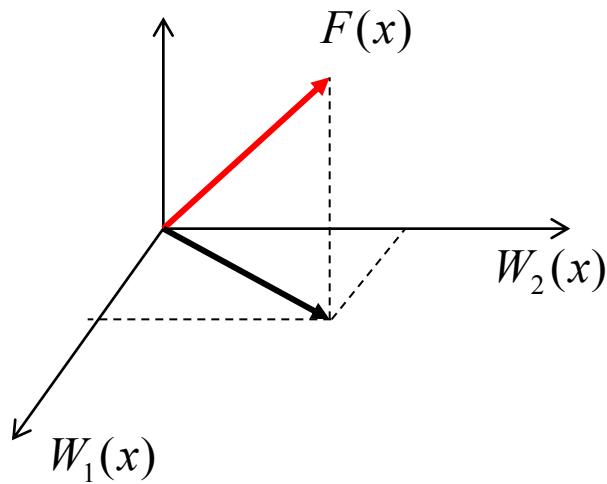
1) Tomando o produto interno por  $\hat{a}_x$ :

$$\vec{v} \bullet \hat{a}_x \approx (v_x \hat{a}_x + v_y \hat{a}_y) \bullet \hat{a}_x \quad \rightarrow \quad v_x = \vec{v} \bullet \hat{a}_x$$

2) Tomando o produto interno por  $\hat{a}_y$ :

$$\vec{v} \bullet \hat{a}_y \approx (v_x \hat{a}_x + v_y \hat{a}_y) \bullet \hat{a}_y \quad \rightarrow \quad v_y = \vec{v} \bullet \hat{a}_y$$

A melhor aproximação de uma função  $F(x)$  em termos de  $W_1(x)$  e  $W_2(x)$  é a projeção da função  $F(x)$  no espaço gerado pelas funções  $W_1(x)$  e  $W_2(x)$ .



$$F(x) \approx I_1 W_1(x) + I_2 W_2(x)$$

1) Tomando o produto interno por  $W_1(x)$ :

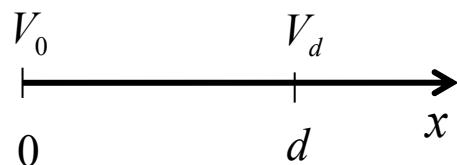
$$\int F(x) W_1(x) dx \approx I_1 \int W_1(x) W_1(x) dx + I_2 \int W_2(x) W_1(x) dx$$

2) Tomando o produto interno por  $W_2(x)$ :

$$\int F(x) W_2(x) dx \approx I_1 \int W_1(x) W_2(x) dx + I_2 \int W_2(x) W_2(x) dx$$

$\rightarrow$  Determina  $I_1$  e  $I_2$ .

# ELEMENTOS FINITOS – FORMULAÇÃO FRACA



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left( \varepsilon \frac{dV}{dx} \right) = -\rho_v(x) \\ V(0) = V_o, \quad V(d) = V_d, \end{array} \right.$$

Produto interno por uma função peso:

$$\int_0^d w(x) \frac{d}{dx} \left( \varepsilon \frac{dV}{dx} \right) dx = - \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx$$

Integral por partes:

$$\int_a^b w dv = w v \Big|_a^b - \int_a^b v dw$$

$$\rightarrow w(x) \left( \varepsilon \frac{dV}{dx} \right) \Big|_0^d - \int_0^d \varepsilon \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx = - \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx$$

$$\text{Mas: } D_x(x) = \varepsilon E_x(x) = -\varepsilon \frac{dV}{dx}$$

$$\rightarrow w(x) (-D_x(x)) \Big|_0^d - \int_0^d \varepsilon \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx = - \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx$$

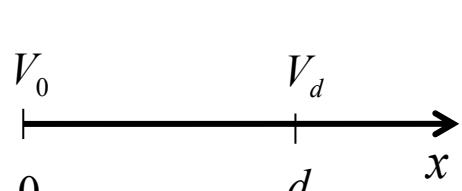


$$\int_0^d \frac{dw}{dx} \varepsilon \frac{dV}{dx} dx = \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx - w(d) D_x(d) + w(0) D_x(0)$$



Condições de contorno...

# ELEMENTOS FINITOS – GALERKIN



$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^d \frac{dw}{dx} \varepsilon \frac{dV}{dx} dx = \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx - w(d) D_x(d) + w(0) D_x(0) \\ V(x) \approx \sum_{e=1}^{Ne} (V_e N_1^e(x) + V_{e+1} N_2^e(x)) \end{array} \right.$$

$$\int_0^d \frac{dw}{dx} \varepsilon \frac{d}{dx} \sum_{e=1}^{Ne} (V_e N_1^e(x) + V_{e+1} N_2^e(x)) dx = \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx - w(d) D_x(d) + w(0) D_x(0)$$

$$\rightarrow \sum_{e=1}^{Ne} \int_0^d \frac{dw}{dx} \varepsilon \left( V_e \frac{d N_1^e}{dx} + V_{e+1} \frac{d N_2^e}{dx} \right) dx = \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx - w(d) D_x(d) + w(0) D_x(0)$$

Trocando “e” por “f”:

$$\sum_{f=1}^{Ne} \int_0^d \frac{dw}{dx} \varepsilon \left( V_f \frac{d N_1^f}{dx} + V_{f+1} \frac{d N_2^f}{dx} \right) dx = \int_0^d w(x) \rho_v(x) dx - w(d) D_x(d) + w(0) D_x(0)$$

Quando as funções de peso são as mesmas funções de interpolação (de base) o método é conhecido como Método de Galerkin:

$$w(x) = \{N_1^e(x), N_2^e(x)\}$$

$$w(x) = \{N_1^e(x), N_2^e(x)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{f=1}^{Ne} \int_0^d \frac{dN_1^e}{dx} \varepsilon \left( V_f \frac{dN_1^f}{dx} + V_{f+1} \frac{dN_2^f}{dx} \right) dx = \int_0^d N_1^e(x) \rho_v(x) dx - N_1^e(d) D_x(d) + N_1^e(0) D_x(0) \\ \sum_{f=1}^{Ne} \int_0^d \frac{dN_2^e}{dx} \varepsilon \left( V_f \frac{dN_1^f}{dx} + V_{f+1} \frac{dN_2^f}{dx} \right) dx = \int_0^d N_2^e(x) \rho_v(x) dx - N_2^e(d) D_x(d) + N_2^e(0) D_x(0) \end{array} \right.$$

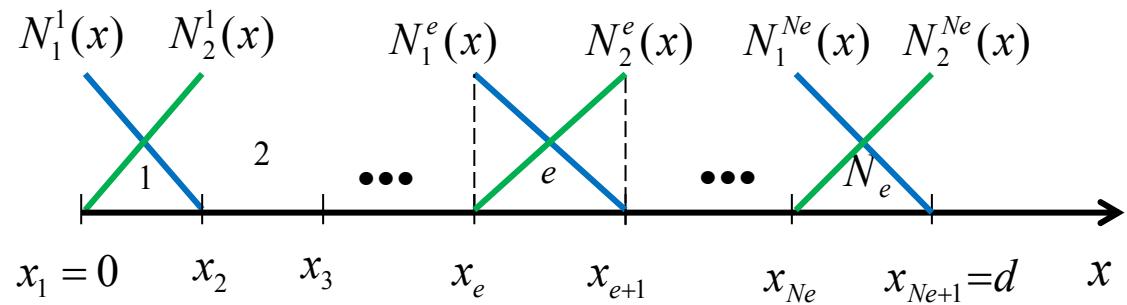
Como  $N_i^e(x, y)$  só é diferente de zero no elemento “e”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^d \frac{dN_1^e}{dx} \varepsilon^e \left( V_e \frac{dN_1^e}{dx} + V_{e+1} \frac{dN_2^e}{dx} \right) dx = \int_0^d N_1^e(x) \rho_v^e dx - N_1^e(d) D_x(d) + N_1^e(0) D_x(0) \\ \int_0^d \frac{dN_2^e}{dx} \varepsilon^e \left( V_e \frac{dN_1^e}{dx} + V_{e+1} \frac{dN_2^e}{dx} \right) dx = \int_0^d N_2^e(x) \rho_v^e dx - N_2^e(d) D_x(d) + N_2^e(0) D_x(0) \end{array} \right.$$

valor médio da permissividade  
no elemento “e”.

valor médio da densidade  
de carga no elemento “e”.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_1}{dx} \varepsilon^e \left( \frac{dN^e_1}{dx} V_e + \frac{dN^e_2}{dx} V_{e+1} \right) dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_1(x) \rho_v^e dx - N^e_1(d) D_x(d) + N^e_1(0) D_x(0) \\ \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_2}{dx} \varepsilon^e \left( \frac{dN^e_1}{dx} V_e + \frac{dN^e_2}{dx} V_{e+1} \right) dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_2(x) \rho_v^e dx - N^e_2(d) D_x(d) + N^e_2(0) D_x(0) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} N^e_1(d) = 0 \quad N^e_1(0) = \begin{cases} 1 & e=1 \\ 0 & e \neq 1 \end{cases} \\ N^e_2(d) = 0 \quad N^e_2(0) = \begin{cases} 1 & e=N_e \\ 0 & e \neq N_e \end{cases} \end{array} \right.$$

→

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_1}{dx} \varepsilon^e \left( \frac{dN^e_1}{dx} V_e + \frac{dN^e_2}{dx} V_{e+1} \right) dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_1(x) \rho_v^e dx + N^e_1(0) D_x(0) \\ \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_2}{dx} \varepsilon^e \left( \frac{dN^e_1}{dx} V_e + \frac{dN^e_2}{dx} V_{e+1} \right) dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_2(x) \rho_v^e dx - N^e_2(d) D_x(d) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_1}{dx} \mathcal{E}^e \left( \frac{dN^e_1}{dx} V_e + \frac{dN^e_2}{dx} V_{e+1} \right) dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_1(x) \rho_v^e dx + N^e_1(0) D_x(0) \\ \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_2}{dx} \mathcal{E}^e \left( \frac{dN^e_1}{dx} V_e + \frac{dN^e_2}{dx} V_{e+1} \right) dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_2(x) \rho_v^e dx - N^e_2(d) D_x(d) \end{array} \right.$$

Arrumando em forma matricial:

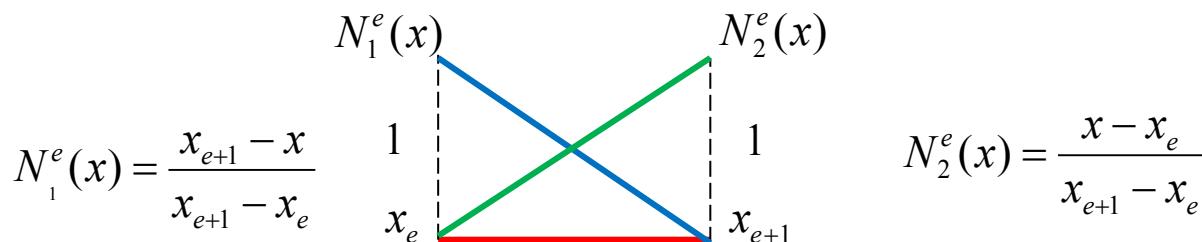
$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_{e+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^e_1(0) D_x(0) \\ -N^e_2(d) D_x(d) \end{bmatrix}$$

desconhecidos

Onde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN^e_i}{dx} \mathcal{E}^e \frac{dN^e_j(x)}{dx} dx$$

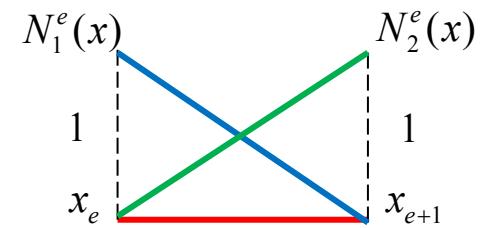
$$f_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N^e_i(x) \rho_v^e dx$$



## Para o exemplo do capacitor:

**Cálculo de:**

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_i^e}{dx} \varepsilon^e \frac{dN_j^e(x)}{dx} dx$$



$$N_1^e(x) = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e}$$

$$N_2^e(x) = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e}$$

$$K_{11}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_1^e(x)}{dx} \varepsilon^e \frac{dN_1^e(x)}{dx} dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{-1}{l_e} \right) \varepsilon^e \left( \frac{-1}{l_e} \right) dx = \frac{\varepsilon^e}{l_e} \quad K_{12}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_1^e(x)}{dx} \varepsilon^e \frac{dN_2^e(x)}{dx} dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{-1}{l_e} \right) \varepsilon^e \left( \frac{1}{l_e} \right) dx = -\frac{\varepsilon^e}{l_e}$$

$$K_{21}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_2^e(x)}{dx} \varepsilon^e \frac{dN_1^e(x)}{dx} dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{1}{l_e} \right) \varepsilon^e \left( \frac{-1}{l_e} \right) dx = -\frac{\varepsilon^e}{l_e} \quad K_{22}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_2^e(x)}{dx} \varepsilon^e \frac{dN_2^e(x)}{dx} dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( \frac{1}{l_e} \right) \varepsilon^e \left( \frac{1}{l_e} \right) dx = \frac{\varepsilon^e}{l_e}$$

→  $K^e = \frac{\varepsilon^e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

**Cálculo de:**

$$f_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_i^e(x) \rho_v^e dx$$

$$f_1^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_1^e(x) \rho_v^e dx = -\rho_o \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} dx = -\frac{\rho_o l_e}{2}$$

$$f_2^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_2^e(x) \rho_v^e dx = -\rho_o \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} dx = -\frac{\rho_o l_e}{2}$$

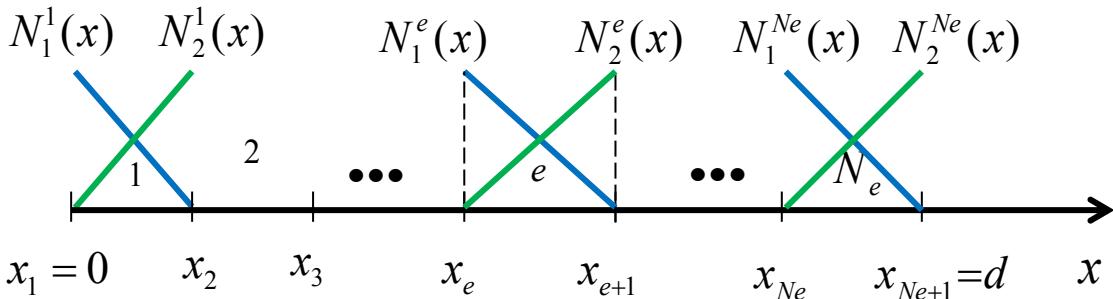
→  $f^e = -\frac{\rho_o l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

# FEM – 1D – SISTEMA LINEAR TOTAL

$$K_{11}^e V_e + K_{12}^e V_{e+1} = f_1^e + N_1^e(0) D_x(0)$$

$$K_{21}^e V_e + K_{22}^e V_{e+1} = f_2^e - N_2^e(d) D_x(d)$$

**Juntando os Elementos:**



$e=1$

$$\boxed{K_{11}^1 V_1 + K_{12}^1 V_2 = f_1^1 + D_x(0)}$$

$$\boxed{K_{21}^1 V_1 + K_{22}^1 V_2 = f_2^1}$$

$$K_{11}^1 V_1 + K_{12}^1 V_2 = f_1^1 + D_x(0)$$

$e=2$

$$\boxed{K_{11}^2 V_2 + K_{12}^2 V_3 = f_1^2}$$

$$\boxed{K_{21}^2 V_2 + K_{22}^2 V_3 = f_2^2}$$

$$K_{21}^1 V_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) V_2 + K_{12}^2 V_3 = f_2^1 + f_1^2$$

$e=3$

$$\boxed{K_{11}^3 V_3 + K_{12}^3 V_4 = f_1^3}$$

$$\boxed{K_{21}^3 V_3 + K_{22}^3 V_4 = f_2^3}$$

$$K_{21}^2 V_2 + (K_{22}^2 + K_{11}^3) V_3 + K_{12}^3 V_4 = f_2^2 + f_1^3$$

⋮

⋮

$e=N_e$

$$\boxed{K_{11}^{N_e} V_{N_e} + K_{12}^{N_e} V_{N_e+1} = f_1^{N_e}}$$

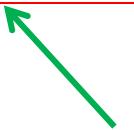
$$\boxed{K_{21}^{N_e} V_{N_e} + K_{22}^{N_e} V_{N_e+1} = f_2^{N_e} - D_x(d)}$$

$$K_{21}^{N_e-1} V_{N_e-1} + (K_{22}^{N_e-1} + K_{11}^{N_e}) V_{N_e} + K_{12}^{N_e} V_{N_e+1} = f_2^{N_e-1} + f_1^{N_e}$$

$$K_{21}^{N_e} V_{N_e} + K_{22}^{N_e} V_{N_e+1} = f_2^{N_e} - D_x(d)$$

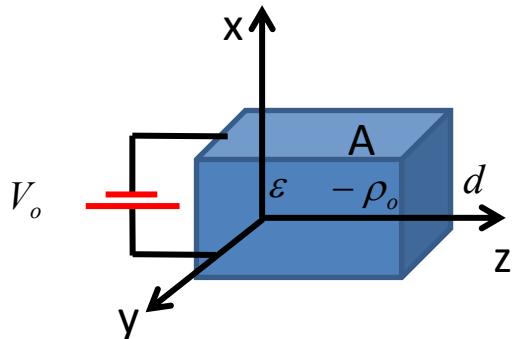
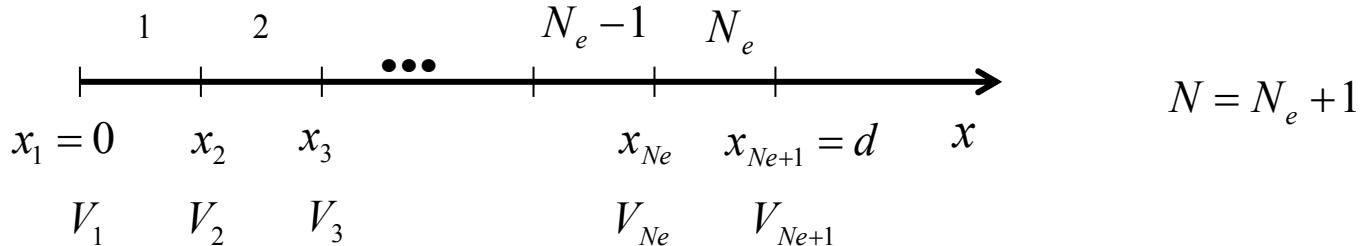
## Sistema linear:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{21}^{Ne-1} & K_{22}^{Ne-1} + K_{11}^{Ne} & K_{12}^{Ne} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & K_{21}^{Ne} & K_{22}^{Ne}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{Ne-1} \\ V_{Ne} \\ V_{Ne+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{Ne-1} + f_1^{Ne} \\ f_2^{Ne} \\ -D_x(d)
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 D_x(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
 \end{bmatrix}$$




 **$KV = f + d = b$**

# FEM – 1D – CONDIÇÕES DE CONTORNO



Condições de Contorno:

$$\begin{cases} V_1 = V(0) = V_0 \\ V_{N_e+1} = V(d) = V_d \end{cases}$$

Redução:  $N \rightarrow N-2$  incógnitas

1. Usando a Condição de Contorno:  $V_1 = V_0$

- Eliminar a 1ª linha
- Passar a 1ª coluna para o termo independente, com  $V_1 = V_0$

$$K_{11}V_1 + K_{12}V_2 + K_{13}V_3 + \cdots + K_{1(Ne+1)}V_{N_e+1} = b_1$$

$$K_{21}V_1 + K_{22}V_2 + K_{23}V_3 + \cdots + K_{2(Ne+1)}V_{N_e+1} = b_2$$

$$K_{31}V_1 + K_{32}V_2 + K_{33}V_3 + \cdots + K_{3(Ne+1)}V_{N_e+1} = b_3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$K_{(Ne+1)1}V_1 + K_{(Ne+1)2}V_2 + K_{(Ne+1)3}V_3 + \cdots + K_{(Ne+1)(Ne+1)}V_{N_e+1} = b_{(Ne+1)}$$

$$K_{22}V_2 + K_{23}V_3 + \cdots + K_{2(Ne+1)}V_{(Ne+1)} = b_2 - K_{21}V_o$$

$$K_{32}V_2 + K_{33}V_3 + \cdots + K_{3(Ne+1)}V_{(Ne+1)} = b_3 - K_{31}V_o$$

⋮

⋮

$$K_{(Ne+1)2}V_2 + K_{(Ne+1)3}V_3 + \cdots + K_{(Ne+1)(Ne+1)}V_{(Ne+1)} = b_{(Ne+1)} - K_{(Ne+1)1}V_o$$

2. Usando a Condição de Contorno:  $V_{Ne+1} = V_d$

- Eliminar a última linha
- Passar a última coluna para o termo independente

$$K_{22}V_2 + K_{23}V_3 + \cdots + K_{2(Ne+1)}V_{(Ne+1)} = b_2 - K_{21}V_o$$

$$K_{32}V_2 + K_{33}V_3 + \cdots + K_{3(Ne+1)}V_{(Ne+1)} = b_3 - K_{31}V_o$$

⋮

⋮

$$\cancel{K_{(Ne+1)2}V_2 + K_{(Ne+1)3}V_3 + \cdots + K_{(Ne+1)(Ne+1)}V_{(Ne+1)}} - b_{(Ne+1)} - K_{(Ne+1)1}V_o$$

$$K_{22}V_2 + K_{23}V_3 + \cdots + K_{2Ne}V_{Ne} = b_2 - K_{21}V_o - K_{2(Ne+1)}V_d$$

$$K_{32}V_2 + K_{33}V_3 + \cdots + K_{3Ne}V_{Ne} = b_3 - K_{31}V_o - K_{3(Ne+1)}V_d$$

⋮

⋮

$$K_{Ne2}V_2 + K_{Ne3}V_3 + \cdots + K_{NeNe}V_{Ne} = b_{Ne} - K_{Ne1}V_o - K_{Ne(Ne+1)}V_d$$

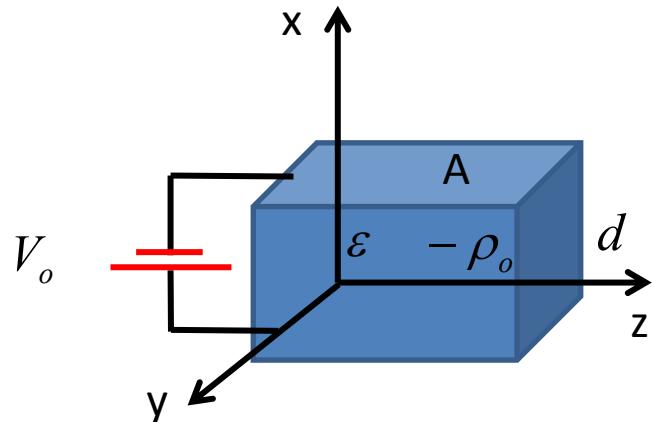
OBS: Como a 1ª e última linhas foram eliminadas, os elementos do vetor “b” não incluem nenhum elemento não nulo do vetor “d”.

De forma geral, se o potencial é conhecido no nó “n”, deve-se:

$$V_n = A \quad \left[ \begin{array}{l} \bullet \text{ Eliminar a linha “n”} \\ \bullet \text{ Passar a coluna “n” para o termo independente, e atualizá-lo:} \\ b_i = b_i - K_{in} A \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq n \end{array} \right.]$$

# FEM – 1D – EXEMPLO

Capacitor planar com dielétrico de permissividade  $\epsilon$ , com distribuição volumétrica de carga  $-\rho_0$ , e tensão  $V_0$ :



$$A \gg d^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{\partial}{\partial z} \approx 0$$

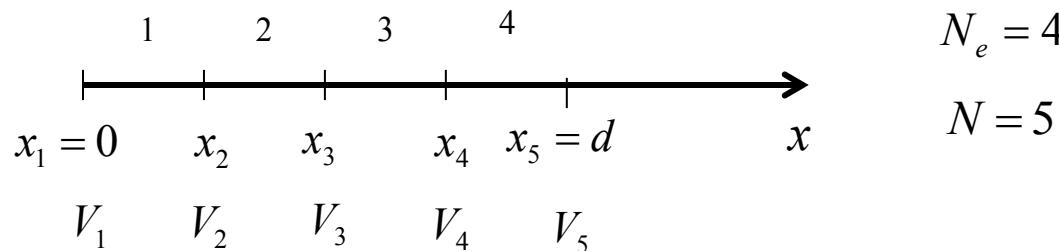
$$\epsilon_r = 1$$

$$V_0 = 1 \text{ V}$$

$$d = 8 \text{ cm}$$

$$\rho_0 = 10^{-8} \text{ C/m}^3$$

4 segmentos:



Em um elemento:  $K^e = \frac{\epsilon^e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   $\rightarrow K^e = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{2 \times 10^{-2}} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} = 4.425 \times 10^{-10} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$

$$f^e = -\frac{\rho_o l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad f^e = -\frac{2 \times 10^{-2} \times 10^{-8}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -10^{-10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & \\ K_{21}^{(1)} & \left( K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} \right) & K_{12}^{(2)} & & \\ & K_{21}^{(2)} & \left( K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} \right) & K_{12}^{(3)} & \\ \hline & & & & \\ & K_{21}^{(N_e-1)} & \left( K_{22}^{(N_e-1)} + K_{11}^{(N_e)} \right) & K_{12}^{(N_e)} & \\ & & K_{21}^{(N_e)} & K_{22}^{(N_e)} & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N_e} \\ V_{N_e+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(N_e-1)} + f_1^{(N_e)} \\ f_2^{(N_e)} \end{Bmatrix}$$

O vetor “d” não foi incluído, pois será eliminado depois...

$$\rightarrow 4.425 \times 10^{-10} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = -10^{-10} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2259887 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \\ -0.2259887 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2259887 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \\ -0.2259887 \end{Bmatrix}$$

Usando:  $V_1 = V_o = 1 V$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5480226 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \\ -0.2259887 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5480226 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \\ -0.2259887 \end{Bmatrix}$$

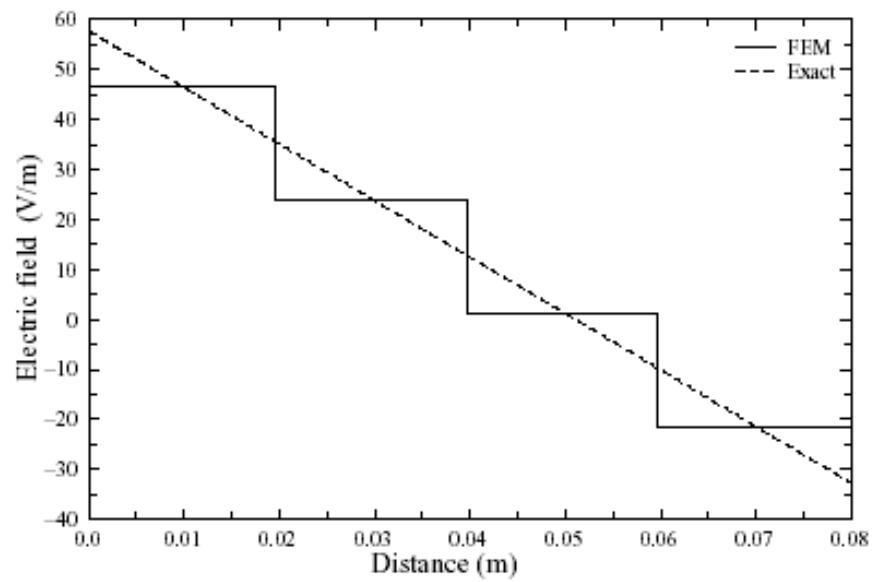
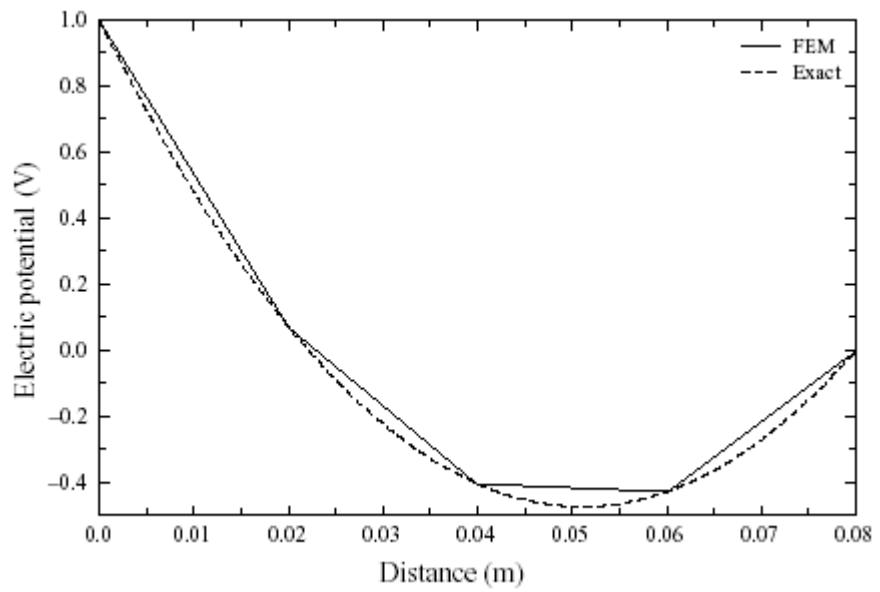
Usando:  $V_5 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5480226 \\ -0.4519774 \\ -0.4519774 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow V_2 = 0,00720339 \quad V_3 = -0,4039548 \quad V_4 = -0,4279661$$

$$V(x) \approx V_e N_1^e(x) + V_{e+1} N_2^e(x) = V_e \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} + V_{e+1} \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e}$$

$$E_x^e(x) = -\frac{dV^e}{dx} = V_e \frac{1}{x_{e+1} - x_e} - V_{e+1} \frac{1}{x_{e+1} - x_e} = \frac{V_e - V_{e+1}}{l_e}$$



Erro quadrático:

$$L_2 \text{ norm} = \|V_{\text{ex}} - V_{\text{fe}}\|_2 = \left\{ \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} [V_{\text{ex}}^{(e)} - V_{\text{fe}}^{(e)}]^2 dx \right\}^{1/2}$$

# FEM – 1D – CONDIÇÕES DE CONTORNO MISTAS

$$\varepsilon \frac{dV}{dx} + \alpha V = \beta$$

Vetor “d”:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} D_1^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -D_2^{(N_r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon^{(1)} \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_1^{(1)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon^{(N_r)} \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_2^{(N_r)}} \end{Bmatrix}$$

Exemplo: CC no nó N:

$$\varepsilon \frac{dV}{dx} + \alpha V = \beta \quad \rightarrow \quad \varepsilon^{(N_r)} \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_2^{(N_r)}} = \beta - \alpha V_N$$

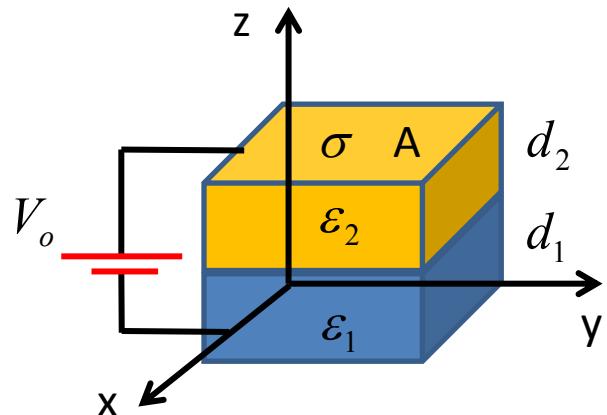
O termo  $\alpha V_N$  é movida para o lado esquerdo do sistema linear, se somando  $\alpha$  ao termo  $K_{NN}$

# FEM – 1D – Capacitor com dielétricos em série

**Exemplo:**

Capacitor planar com 2 dielétricos em série:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$



$$\left[ \begin{array}{l} V_2(z) = \frac{V_o}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} [\epsilon_1 z + (\epsilon_2 - \epsilon_1)d_1] \\ V_1(z) = \frac{V_o \epsilon_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} z \end{array} \right]$$

- 1) Obter a solução usando Elementos Finitos, com  $d_1=d_2=d/2$ .
- 2) Obter a Capacitância.
- 3) Comparar a solução numérica de Elementos Finitos com a analítica.

## **Leitura:**

- Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics,  
A. C. Polycarpou, 2006

# SOLUÇÃO PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS

## EQUAÇÃO DE POISSON

Equação de Poisson:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r}) \\ \vec{E} = -\nabla V \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right\}$$

Meio linear:

$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_v(\vec{r})$$



Meio homogêneo:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Se  $\rho_v(\vec{r}) = 0$ :

$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = 0$$



Equação de Poisson

$$\nabla^2 V = 0$$

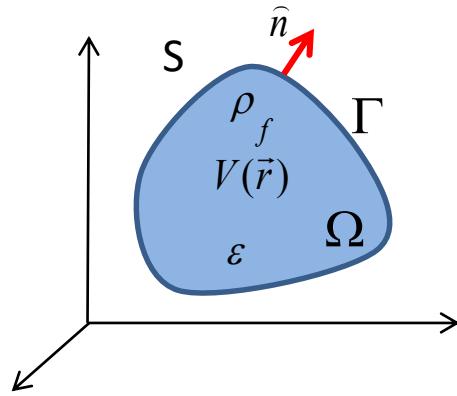
Equação de Laplace

$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_v(\vec{r})$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\rho_v$$

# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

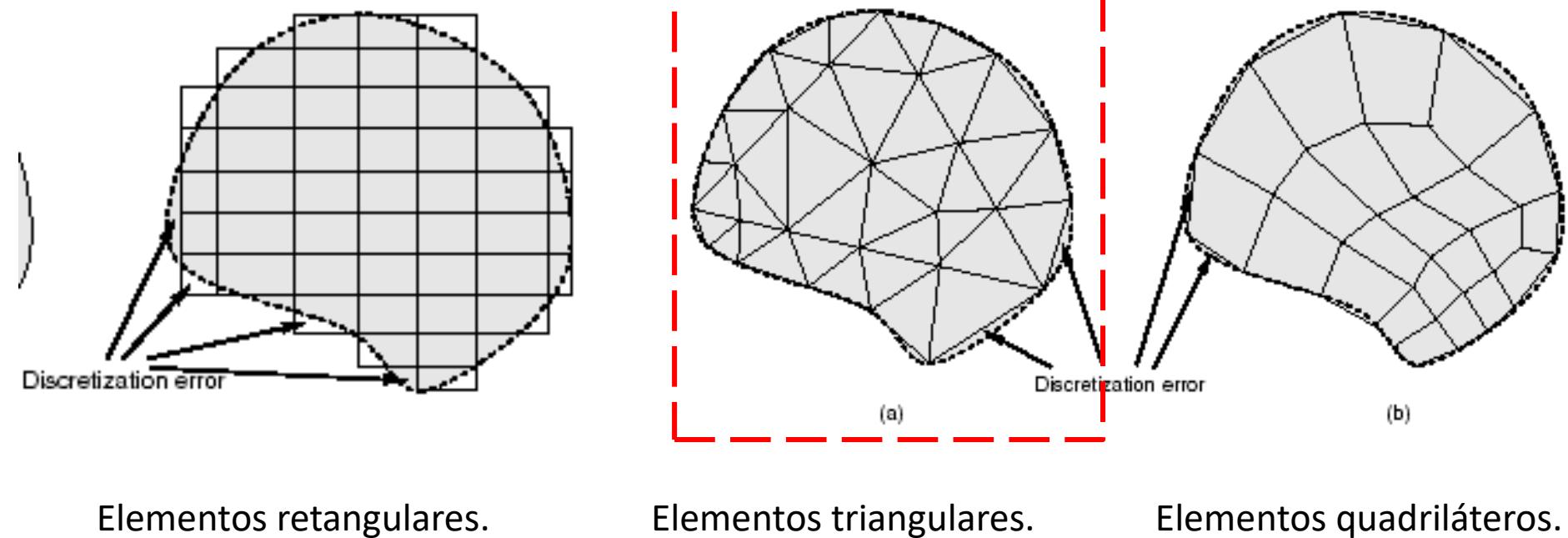


$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_v(\vec{r})$$

Procedimento:

1. Discretização do Domínio
2. Escolha das funções interpolação (de base, de forma)
3. Obter o sistema linear para um único elemento
4. Obter o sistema linear global (todos os elementos)
5. Impor condições de contorno
6. Resolver sistema linear
7. Pós-processamento

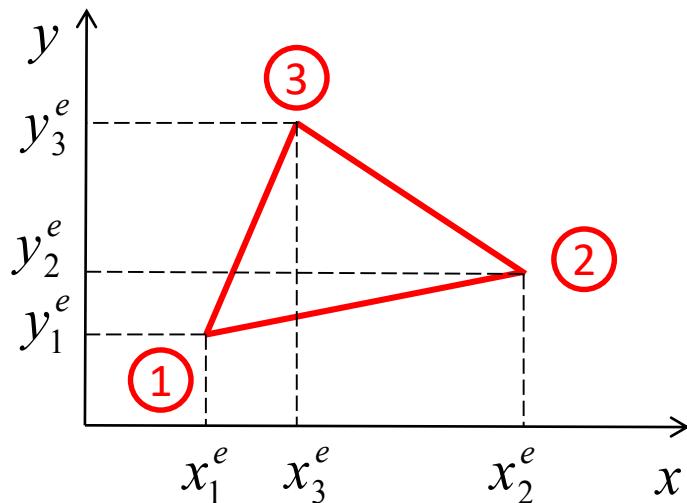
# FEM – 2D – DISCRETIZAÇÃO



# FEM – 2D – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

## ELEMENTOS TRIANGULARES

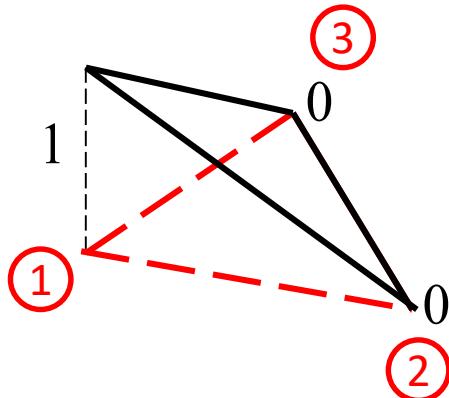
Elemento e:



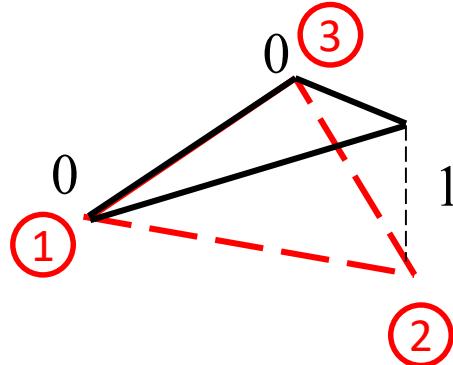
Nós	x	y	$V(x,y)$
1	$x_1^e$	$y_1^e$	$V_1^e$
2	$x_2^e$	$y_2^e$	$V_2^e$
3	$x_3^e$	$y_3^e$	$V_3^e$

$$V^e(x, y) = V_1^e N_1^e(x, y) + V_2^e N_2^e(x, y) + V_3^e N_3^e(x, y)$$

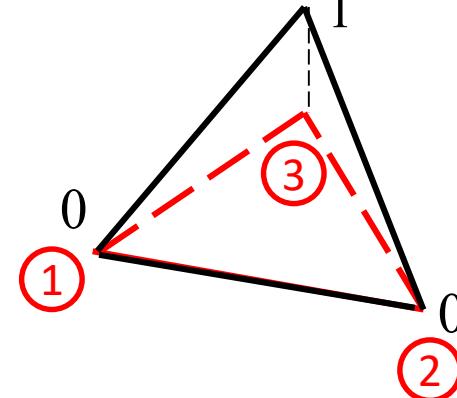
$$N_1^e(x, y)$$

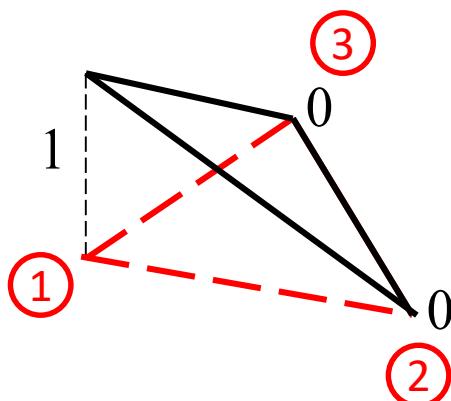


$$N_2^e(x, y)$$



$$N_3^e(x, y)$$





$$N_1^e(x, y) = a x + b y + c$$

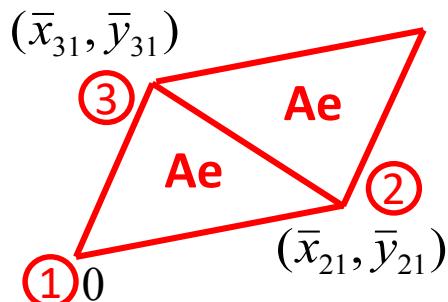
$$\begin{cases} N_1^e(x_1^e, y_1^e) = 1 = a x_1^e + b y_1^e + c \\ N_1^e(x_2^e, y_2^e) = 0 = a x_2^e + b y_2^e + c \\ N_1^e(x_3^e, y_3^e) = 0 = a x_3^e + b y_3^e + c \end{cases} \rightarrow \{a, b, c\}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \end{vmatrix} =$$

$$= x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e - x_1^e y_3^e + x_3^e y_1^e + x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e$$



$$\bar{x}_{21} = x_2^e - x_1^e \quad \bar{x}_{31} = x_3^e - x_1^e$$

$$\bar{y}_{21} = y_2^e - y_1^e \quad \bar{y}_{31} = y_3^e - y_1^e$$

$$2 A_e = [(\bar{x}_{21}, \bar{y}_{21}) \times (\bar{x}_{31}, \bar{y}_{31})]_z = \bar{x}_{21} \bar{y}_{31} - \bar{x}_{31} \bar{y}_{21} =$$

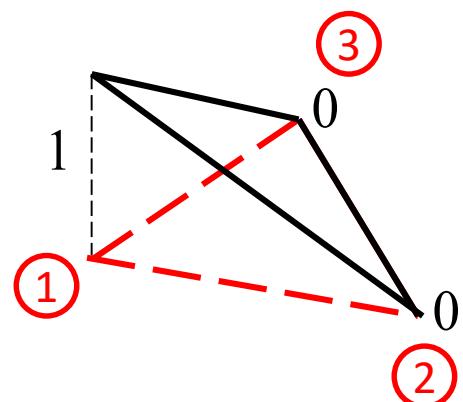
$$= (x_2^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e) = D$$

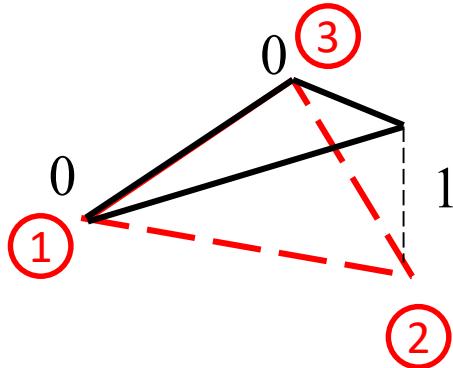
$$N_1^e(x, y) = a x + b y + c$$

$$\begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} 1 & y_1^e & 1 \\ 0 & y_2^e & 1 \\ 0 & y_3^e & 1 \end{vmatrix} = \frac{y_2^e - y_3^e}{2A_e} \quad b = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} x_1^e & 1 & 1 \\ x_2^e & 0 & 1 \\ x_3^e & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-x_2^e + x_3^e}{2A_e} \quad c = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 0 \\ x_3^e & y_3^e & 0 \end{vmatrix} = \frac{x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e}{2A_e}$$

→  $N_1^e(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(y_2^e - y_3^e)x + (-x_2^e + x_3^e)y + x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e]$



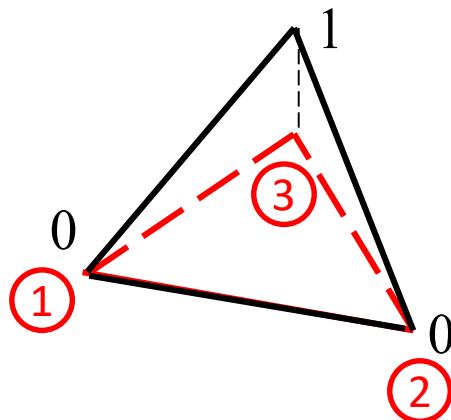


$$N_2^e(x, y) = d x + f y + g$$

$$\begin{cases} N_2^e(x_1^e, y_1^e) = 0 = d x_1^e + f y_1^e + g \\ N_2^e(x_2^e, y_2^e) = 1 = d x_2^e + f y_2^e + g \\ N_2^e(x_3^e, y_3^e) = 0 = d x_3^e + f y_3^e + g \end{cases} \rightarrow \{d, f, g\}$$

→

$$N_2^e(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(y_3^e - y_1^e)x + (-x_3^e + x_1^e)y + x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e]$$

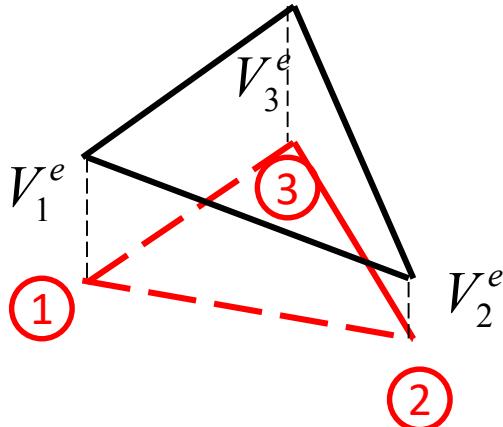


$$N_3^e(x, y) = h x + p y + q$$

$$\begin{cases} N_3^e(x_1^e, y_1^e) = 0 = h x_1^e + p y_1^e + q \\ N_3^e(x_2^e, y_2^e) = 0 = h x_2^e + p y_2^e + q \\ N_3^e(x_3^e, y_3^e) = 1 = h x_3^e + p y_3^e + q \end{cases} \rightarrow \{h, p, q\}$$

→

$$N_3^e(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(y_1^e - y_2^e)x + (-x_1^e + x_2^e)y + x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e]$$



Aproximação planar em cada elemento.

$$V^e(x, y) = V_1^e N_1^e(x, y) + V_2^e N_2^e(x, y) + V_3^e N_3^e(x, y)$$

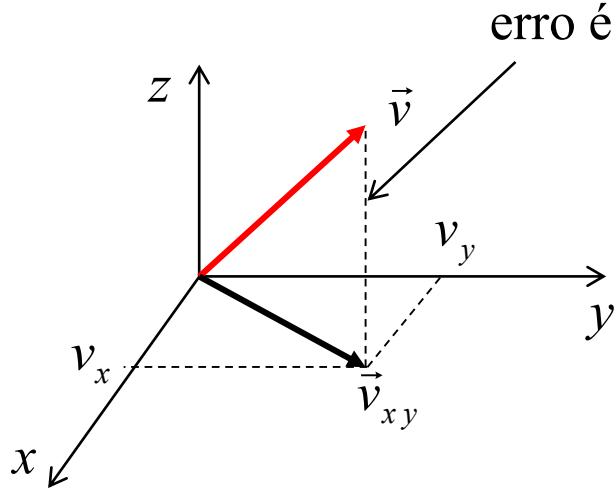
Campo elétrico:

$$\vec{E}^e(x, y) = -\nabla V^e(x, y) = -\sum_{i=1}^3 V_i^e \nabla N_i^e(x, y)$$

Vetor Deslocamento:

$$\vec{D}^e(x, y) = \varepsilon^e \vec{E}^e(x, y) = -\varepsilon^e \nabla V^e(x, y) = -\varepsilon^e \sum_{i=1}^3 V_i^e \nabla N_i^e(x, y)$$

A melhor aproximação de um vetor  $\vec{v}$  no plano xy é a projeção de  $\vec{v}$  no plano.



erro é  $\perp$  *plano xy*

$$\vec{v} \approx v_x \hat{a}_x + v_y \hat{a}_y$$

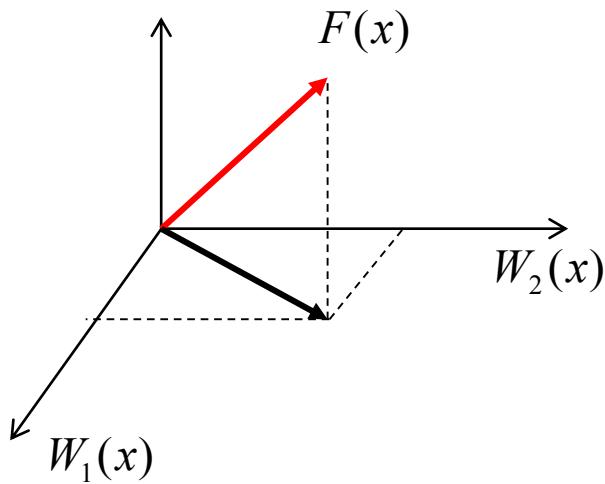
1) Tomando o produto interno por  $\hat{a}_x$ :

$$\vec{v} \bullet \hat{a}_x \approx (v_x \hat{a}_x + v_y \hat{a}_y) \bullet \hat{a}_x \quad \rightarrow \quad v_x = \vec{v} \bullet \hat{a}_x$$

2) Tomando o produto interno por  $\hat{a}_y$ :

$$\vec{v} \bullet \hat{a}_y \approx (v_x \hat{a}_x + v_y \hat{a}_y) \bullet \hat{a}_y \quad \rightarrow \quad v_y = \vec{v} \bullet \hat{a}_y$$

A melhor aproximação de uma função  $F(x)$  em termos de  $W_1(x)$  e  $W_2(x)$  é a projeção da função  $F(x)$  no espaço gerado pelas funções  $W_1(x)$  e  $W_2(x)$ .



$$F(x) \approx I_1 W_1(x) + I_2 W_2(x)$$

1) Tomando o produto interno por  $W_1(x)$ :

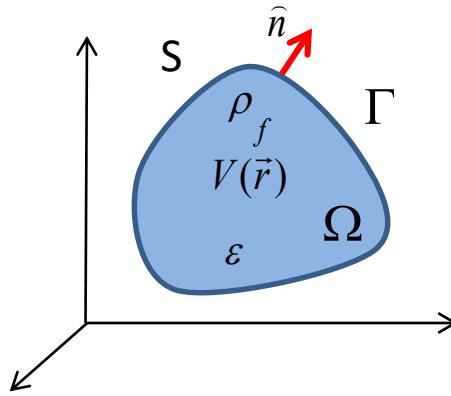
$$\int F(x) W_1(x) dx \approx I_1 \int W_1(x) W_1(x) dx + I_2 \int W_2(x) W_1(x) dx$$

2) Tomando o produto interno por  $W_2(x)$ :

$$\int F(x) W_2(x) dx \approx I_1 \int W_1(x) W_2(x) dx + I_2 \int W_2(x) W_2(x) dx$$

$\rightarrow$  Determina  $I_1$  e  $I_2$ .

# ELEMENTOS FINITOS – FORMULAÇÃO FRACA



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_v(\vec{r}) \\ V|_{\Gamma} = f(\vec{r}) \end{array} \right.$$

Potencial conhecido na borda.

Resíduo:  $r(x, y) = \nabla \bullet (\epsilon \nabla V) + \rho_v(\vec{r})$

Tomando o produto interno por uma função peso:  $\iint_{\Omega} w(x, y) [\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) + \rho_v(x, y)] dx dy = 0$

Usando a identidade vetorial:

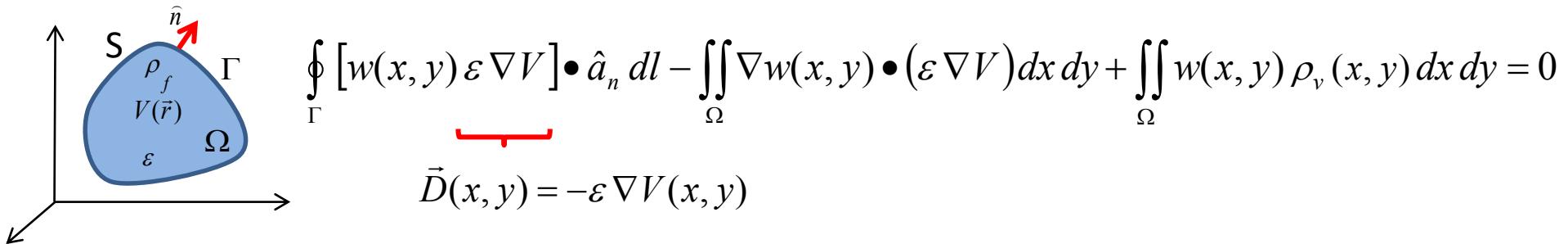
$$\nabla \bullet (f \vec{A}) = f \nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla f$$

$$\iint_{\Omega} \nabla \bullet [w(x, y) \epsilon \nabla V] dx dy - \iint_{\Omega} \nabla w(x, y) \bullet (\epsilon \nabla V) dx dy + \iint_{\Omega} w(x, y) \rho_v(x, y) dx dy = 0$$

Usando o Teorema da Divergência 2D:

$$\iint_{\Omega} \nabla \bullet \vec{A} dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{A} \bullet \hat{a}_n dl$$

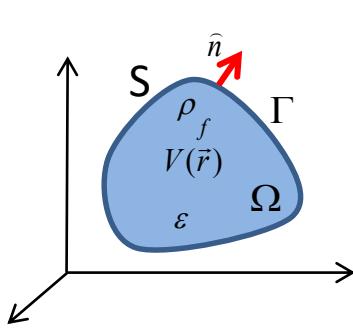
$$\iint_{\Omega} \nabla \bullet [w(x, y) \varepsilon \nabla V] dx dy - \iint_{\Omega} \nabla w(x, y) \bullet (\varepsilon \nabla V) dx dy + \iint_{\Omega} w(x, y) \rho_v(x, y) dx dy = 0$$



**→**  $- \iint_{\Omega} \nabla w(x, y) \bullet (\varepsilon \nabla V) dx dy = \oint_{\Gamma} [w(x, y) \vec{D}] \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w(x, y) \rho_v(x, y) dx dy$

$$-\iint_{\Omega} \varepsilon \nabla w \bullet \nabla V dx dy = \oint_{\Gamma} w \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w \rho_v dx dy$$

# ELEMENTOS FINITOS – GALERKIN



$$\left\{ \begin{array}{l} -\iint_{\Omega} \varepsilon \nabla w \bullet \nabla V dx dy = \oint_{\Gamma} w \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w \rho_v dx dy \\ V(x, y) = \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 V_j^e N_j^e(x, y) \\ -\iint_{\Omega} \varepsilon \nabla w \bullet \nabla \left( \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 V_j^e N_j^e(x, y) \right) dx dy = \oint_{\Gamma} w \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w \rho_v dx dy \end{array} \right.$$

→

$$-\sum_{e=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 V_j^e \iint_{\Omega} \varepsilon \nabla w \bullet \nabla N_j^e(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} w \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w \rho_v dx dy$$

Trocando e por f:

$$-\sum_{f=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 V_j^f \iint_{\Omega} \varepsilon \nabla w \bullet \nabla N_j^f(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} w \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w \rho_v dx dy$$

Usando as funções peso iguais às funções de interpolação no elemento “e” (Galerkin):

$$w(x, y) = N_i^e(x, y) \in \{N_1^e(x, y), N_2^e(x, y), N_3^e(x, y)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_{f=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 V_j^f \iint_{\Omega} \varepsilon \nabla w \bullet \nabla N_j^f(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} w \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} w \rho_v dx dy \\ w(x, y) = N_i^e(x, y) \in \{N_1^e(x, y), N_2^e(x, y), N_3^e(x, y)\} \end{array} \right.$$

→  $-\sum_{f=1}^{Ne} \sum_{j=1}^3 V_j^f \iint_{\Omega} \varepsilon \nabla N_i^e(x, y) \bullet \nabla N_j^f(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} N_i^e(x, y) \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega} N_i^e(x, y) \rho_v dx dy$

Como  $N_i^e(x, y)$  só é diferente de zero no elemento e:

→ 
$$-\sum_{j=1}^3 V_j^e \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \nabla N_i^e(x, y) \bullet \nabla N_j^e(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} N_i^e(x, y) \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega^e} N_i^e(x, y) \rho_v^e dx dy$$

$$-\sum_{j=1}^3 V_j^e \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \nabla N_i^e(x, y) \bullet \nabla N_j^e(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} N_i^e(x, y) \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl - \iint_{\Omega^e} N_i^e(x, y) \rho_v^e dx dy$$

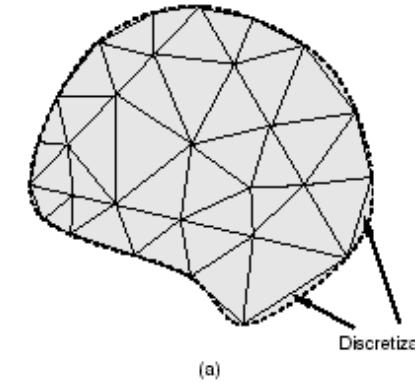
valor médio da permissividade no elemento “e”.

valor médio da densidade de carga no elemento “e”.

Contribui apenas se o elemento “e” tem lado no contorno  $\Gamma$ , e  $N_i^e(x, y)$  é diferente de zero nesse lado.

Organizando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \\ b_3^e \end{bmatrix}$$



Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \nabla N_i^e(x, y) \bullet \nabla N_j^e(x, y) dx dy = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dx dy \\ p_i^e = \oint_{\Gamma} N_i^e \vec{D} \bullet \hat{a}_n dl \\ f_i^e = - \iint_{\Omega^e} N_i^e \rho_v^e dx dy \end{array} \right.$$

$$p_i^e = \oint_{\Gamma} N_i^e \vec{D} \bullet \hat{a}_n \, dl$$

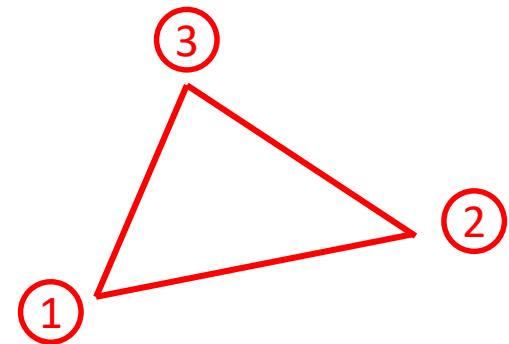
  $p_i^e$  é não nulo apenas nos nós pertencentes ao contorno  $\Gamma$ .

Nesse contorno os valores do potencial são conhecidos, e essas linhas serão removidas do sistema linear. Assim o vetor  $p$  é desprezado.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \\ b_3^e \end{bmatrix}$$

## Elementos da matriz K no elemento e:

$$K_{ij}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] dx dy$$



$$K_{11}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \right] dx dy = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \left( \frac{\bar{y}_{23}^e}{2A_e} \right)^2 + \left( \frac{\bar{x}_{32}^e}{2A_e} \right)^2 \right] dx dy = - \frac{\varepsilon^e}{4A_e} \left( \bar{y}_{23}^{e \ 2} + \bar{x}_{32}^{e \ 2} \right)$$

$$K_{12}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \right] dx dy = - \frac{\varepsilon^e}{4A_e} \left( \bar{y}_{23}^e \bar{y}_{31}^e + \bar{x}_{32}^e \bar{x}_{13}^e \right)$$

$$K_{13}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right] dx dy = - \frac{\varepsilon^e}{4A_e} \left( \bar{y}_{23}^e \bar{y}_{12}^e + \bar{x}_{32}^e \bar{x}_{21}^e \right)$$

$$K_{22}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \right] dx dy = - \frac{\varepsilon^e}{4A_e} \left( \bar{y}_{31}^{e \ 2} + \bar{x}_{13}^{e \ 2} \right)$$

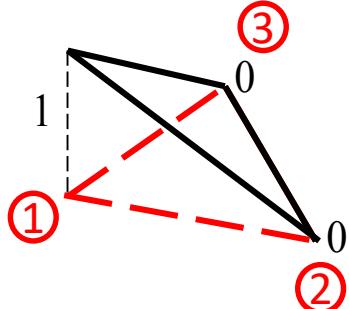
$$K_{23}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right] dx dy = - \frac{\varepsilon^e}{4A_e} \left( \bar{y}_{31}^e \bar{y}_{12}^e + \bar{x}_{13}^e \bar{x}_{21}^e \right)$$

$$K_{33}^e = - \iint_{\Omega^e} \varepsilon^e \left[ \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \frac{\partial N_3^e}{\partial x} + \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \right] dx dy = - \frac{\varepsilon^e}{4A_e} \left( \bar{y}_{12}^{e \ 2} + \bar{x}_{21}^{e \ 2} \right)$$

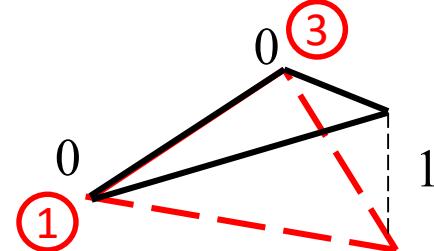
## Elementos da matriz f no elemento e:

Assumindo  $\rho_v^e$  constante no elemento e:

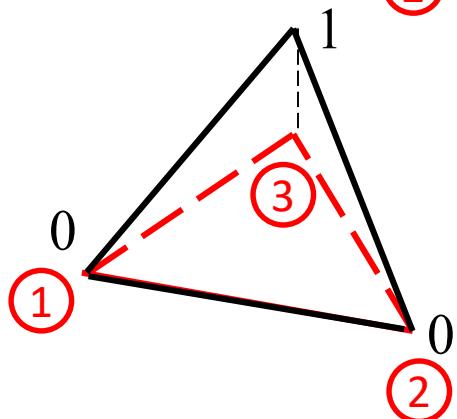
$$f_i^e = - \iint_{\Omega^e} N_i^e \rho_v^e dx dy$$



$$f_1^e = - \iint_{\Omega^e} N_1^e \rho_v^e dx dy = -\rho_v^e \iint_{\Omega^e} N_1^e dx dy = -\frac{\rho_v^e A_e}{3}$$



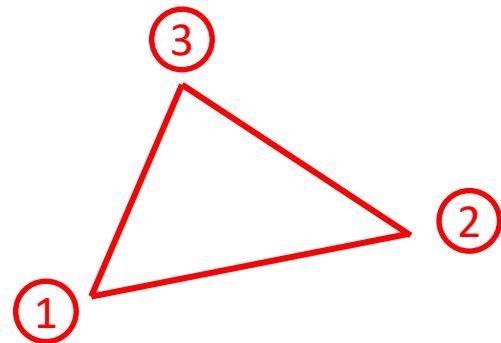
$$f_2^e = - \iint_{\Omega^e} N_2^e \rho_v^e dx dy = -\rho_v^e \iint_{\Omega^e} N_2^e dx dy = -\frac{\rho_v^e A_e}{3}$$



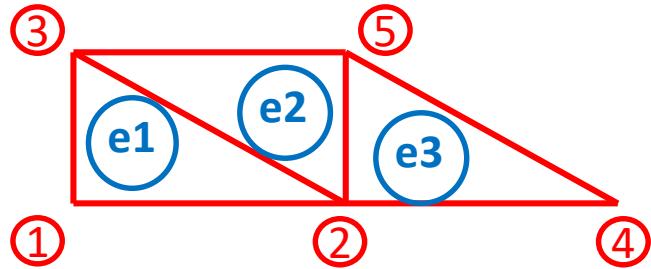
$$f_3^e = - \iint_{\Omega^e} N_3^e \rho_v^e dx dy = -\rho_v^e \iint_{\Omega^e} N_3^e dx dy = -\frac{\rho_v^e A_e}{3}$$

## Sistema Linear no elemento e:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \\ b_3^e \end{bmatrix}$$



# FEM – 2D – SISTEMA LINEAR GLOBAL



$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \end{bmatrix}$$

**Elemento e1:**

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \end{bmatrix}$$

Elemento e	Número dos Nós Locais (em cada elemento)		
	n1	n2	n3
e1	1	2	3
e2	2	5	3
e3	2	4	5

**Elemento e2:**

$$\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_5 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{bmatrix}$$

**Elemento e3:**

$$\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{bmatrix}$$

## Elemento e1:

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Elemento e2:

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_5 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{13}^2 & 0 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{33}^2 & 0 & K_{32}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & 0 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_3^2 \\ 0 \\ f_2^2 \end{bmatrix}$$

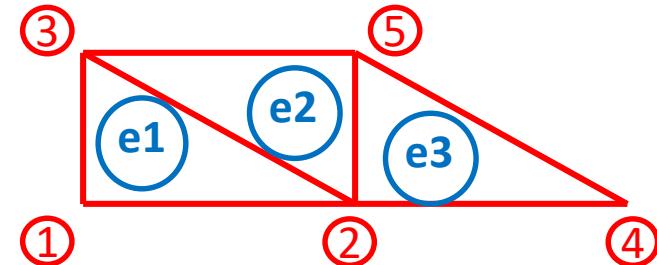
## Elemento e3:

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^3 & 0 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^3 & 0 & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ 0 & K_{31}^3 & 0 & K_{32}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^3 \\ 0 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{13}^2 & 0 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{33}^2 & 0 & K_{32}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & 0 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_3^2 \\ 0 \\ f_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^3 & 0 & K_{12}^3 & K_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^3 & 0 & K_{22}^3 & K_{23}^3 \\ 0 & K_{31}^3 & 0 & K_{32}^3 & K_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^3 \\ 0 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{bmatrix}$$

**Sist. Linear Global (elementos 1, 2 e 3):**

→

1	$K_{11}^1$	$K_{12}^1$	$K_{13}^1$	0	0	$V_1$	$f_1^1$
2	$K_{21}^1$	$K_{22}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3$	$K_{23}^1 + K_{13}^2$	$K_{12}^3$	$K_{12}^2 + K_{13}^3$	$V_2$	$f_2^1 + f_1^2 + f_1^3$
3	$K_{31}^1$	$K_{32}^1 + K_{31}^2$	$K_{33}^1 + K_{33}^2$	0	$K_{32}^2$	$V_3$	$f_3^1 + f_3^2$
4	0	$K_{21}^3$	0	$K_{22}^3$	$K_{23}^3$	$V_4$	$f_2^3$
5	0	$K_{21}^2 + K_{31}^3$	$K_{23}^2$	$K_{32}^3$	$K_{22}^2 + K_{33}^3$	$V_5$	$f_2^2 + f_3^3$

# FEM – 2D – CONDIÇÕES DE CONTORNO

Sist. Linear Global :

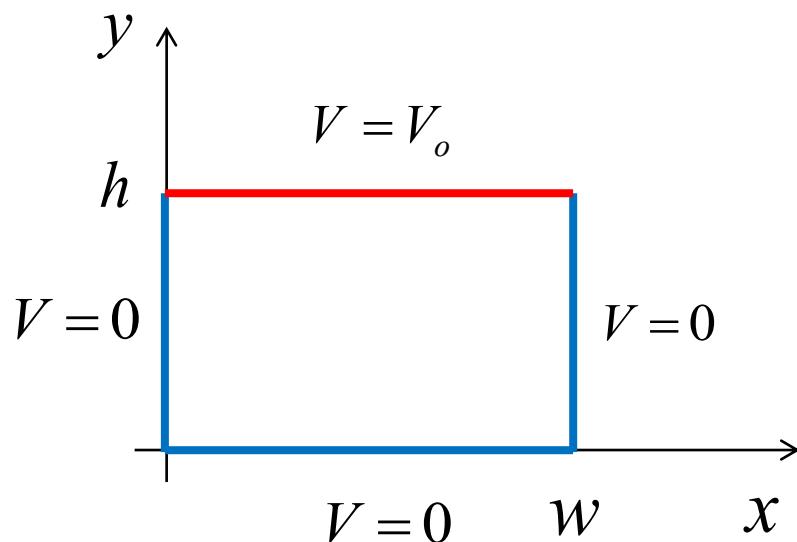
$$[K]_{NxN} [V]_{Nx1} = [f]_{Nx1}$$

De forma geral, se o potencial é conhecido no nó “n”, deve-se:

$$V_n = V_o$$

- Eliminar a linha “n”
- Passar a coluna “n” para o termo independente, e atualizá-lo:
$$f_i = f_i - K_{in} V_o \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq n$$

# FEM – 2D – EXEMPLO

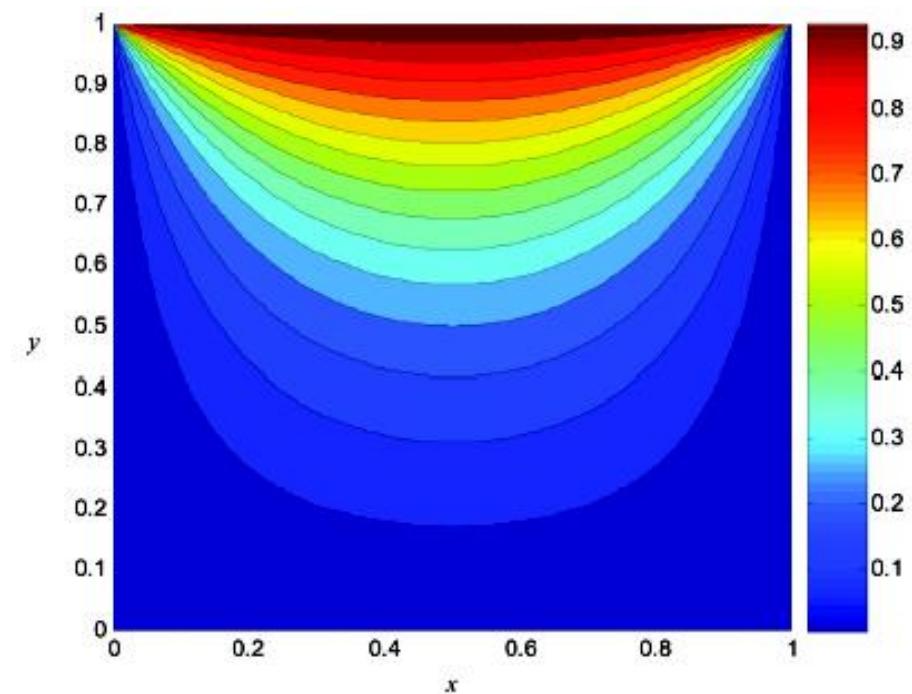


$$\rho_v(x, y) = 0 \quad \text{Equação de Laplace}$$

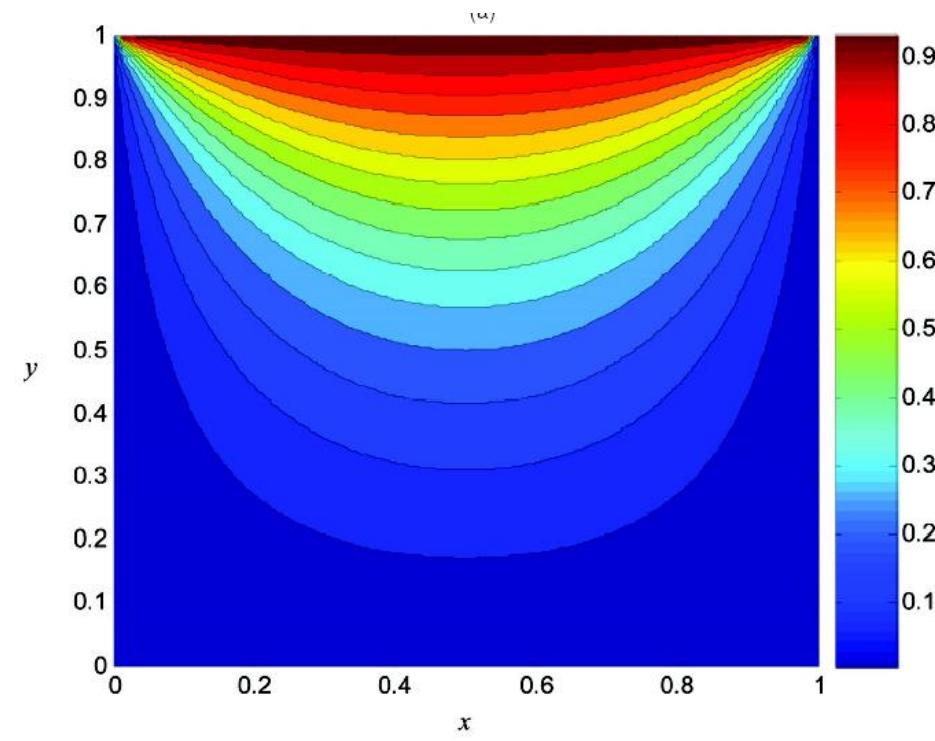
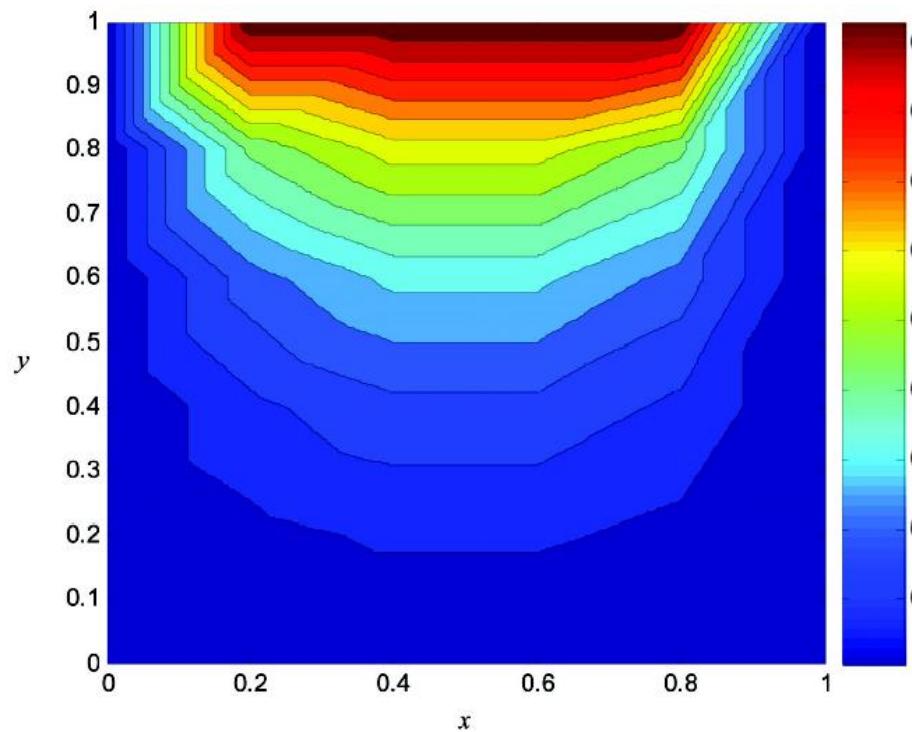
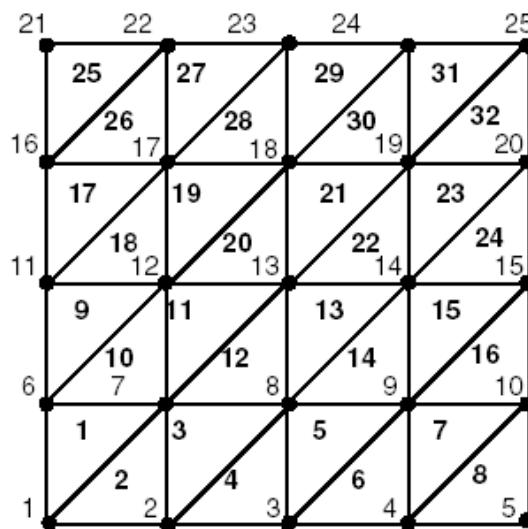
$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Solução Analítica:

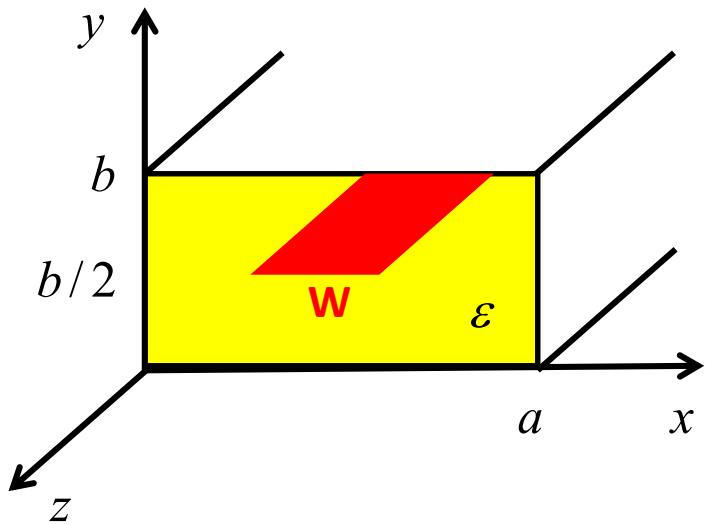
$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{w} \sinh \frac{(2k-1)\pi y}{w}}{(2k-1) \sinh \frac{(2k-1)\pi h}{w}}$$



## Solução Numérica:



# FEM – 2D – Stripline



$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_t(x, y) e^{-jkz} = -\nabla_t V(x, y) e^{-jkz}$$

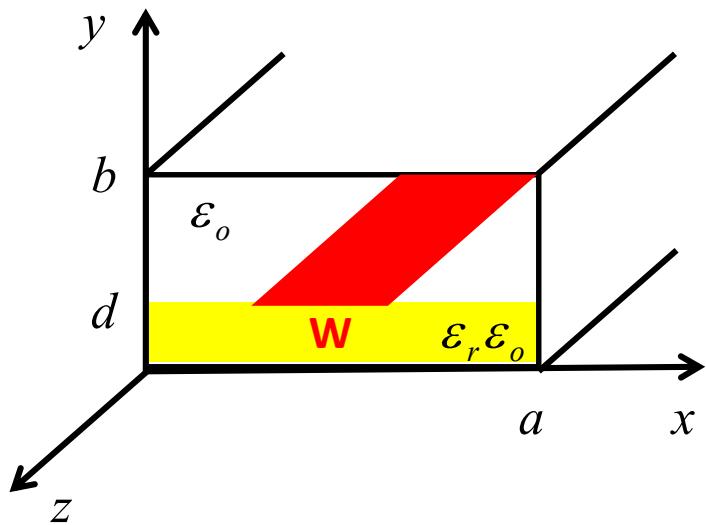
Onde  $V(x, y)$  é solução de:

$$\nabla_t^2 V(x, y) = 0 \quad \begin{aligned} &0 < y < b/2 \\ &b/2 < y < b \end{aligned}$$

Resolva o potencial bi-dimensional  $V(x, y)$  assumindo uma tensão  $V_0=1$  V na fita e zero nas bordas.

Dica: faça com que  $y=b/2$  seja a borda dos elementos adjacentes.

# FEM – 2D – Microstrip Blindada



$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_t(x, y) e^{-j\beta z} = -\nabla_t V(x, y) e^{-j\beta z}$$

$$k_o < \beta < \sqrt{\epsilon_r} k_o \quad k_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$$

Onde  $V(x, y)$  é solução de:

$$\nabla_t^2 V(x, y) = 0 \quad \begin{cases} 0 < y < d \\ d < y < b \end{cases}$$

Resolva o potencial bi-dimensional  $V(x, y)$  assumindo uma tensão  $V_0=1$  V na fita e zero nas bordas.

Dica: faça com que  $y=d$  seja a borda dos elementos adjacentes.

## **Leitura:**

- Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics,  
A. C. Polycarpou, 2006

## **Referências:**

- The Finite Element Method in Electromagnetics, Jianming Jin, 2<sup>a</sup> Ed., 2002.
- Finite Element Method for Electromagnetics, J.L. Volakis, A. Chatterjee, L.C. Kempel, 1998.

# SOLUÇÃO PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS

## EQUAÇÃO DE POISSON

Equação de Poisson:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \bullet \vec{D}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) \\ \vec{E} = -\nabla V \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array} \right\}$$

Meio linear:

$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = -\rho_f(\vec{r})$$



Meio homogêneo:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

Equação de Poisson

Se  $\rho_f(\vec{r}) = 0$ :

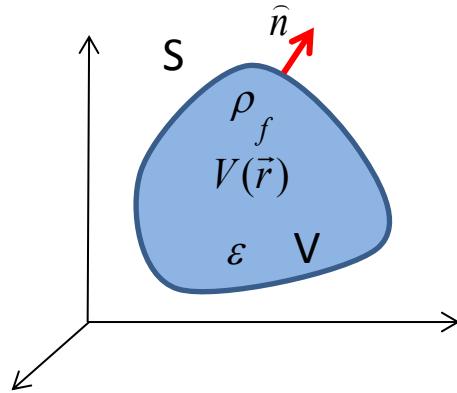
$$\nabla \bullet (\epsilon \nabla V) = 0$$



$$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Laplace

# MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS



Definição do problema:

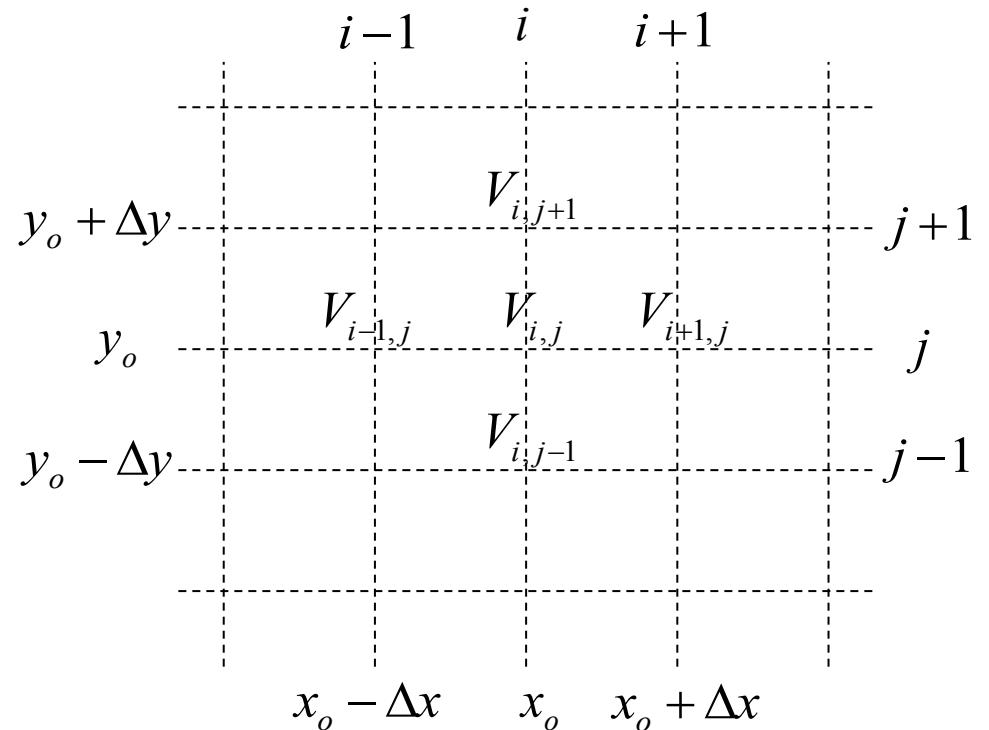
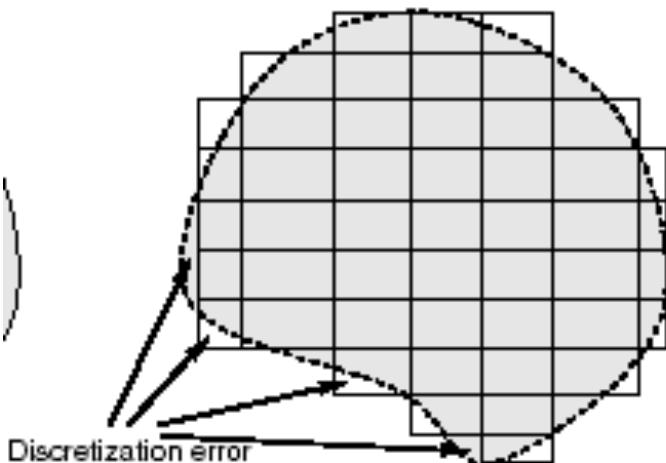
1. Equação diferencial parcial
2. Definição do domínio
3. Condições de contorno e/ou condições iniciais

Solução:

$$\nabla \bullet (\varepsilon \nabla V) = -\rho_f(\vec{r})$$

1. Discretização do Domínio em uma grade de nós
2. Aproximar a equação diferencial e condições de contorno por equações lineares algébricas (equações de diferenças) sobre a grade
3. Resolver o conjunto de equações algébricas

# Etapa 1: Discretização do Domínio em uma grade de nós



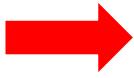
- Nós fixos: potencial conhecido
- Nós livres: potencial desconhecido

## Etapa 2: Equação de Diferenças

Aproximações das derivadas:

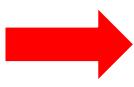
$$\frac{\partial V(x_o, y_o)}{\partial x} \approx \frac{V(x_o + \Delta x/2, y_o) - V(x_o - \Delta x/2, y_o)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial x^2} &\approx \frac{\frac{\partial V(x_o + \Delta x/2, y_o)}{\partial x} - \frac{\partial V(x_o - \Delta x/2, y_o)}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{V(x_o + \Delta x, y_o) - V(x_o, y_o)}{\Delta x} - \frac{V(x_o, y_o) - V(x_o - \Delta x, y_o)}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} [V(x_o + \Delta x, y_o) - 2V(x_o, y_o) + V(x_o - \Delta x, y_o)]\end{aligned}$$


$$\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} [V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}]$$

Similarmente:

$$\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2} [V(x_o, y_o + \Delta y) - 2V(x_o, y_o) + V(x_o, y_o - \Delta y)]$$


$$\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2} [V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}]$$

Se:  $\Delta x = \Delta y = \Delta$

$$\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta^2} [V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}]$$

$$\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta^2} [V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}]$$

$$\frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x_o, y_o)}{\partial y^2} = -\frac{\rho_f(x_o, y_o)}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\Delta^2} [V_{i+1,j} - 4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}] \approx -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow V_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left[ V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\Delta^2 \rho_{i,j}}{\varepsilon} \right]$$

Se não há cargas na região:  $\rho_f(x, y) = 0$

$$\rightarrow V_{i,j} \approx \frac{1}{4} [V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}] \quad \text{Equação de Diferenças}$$

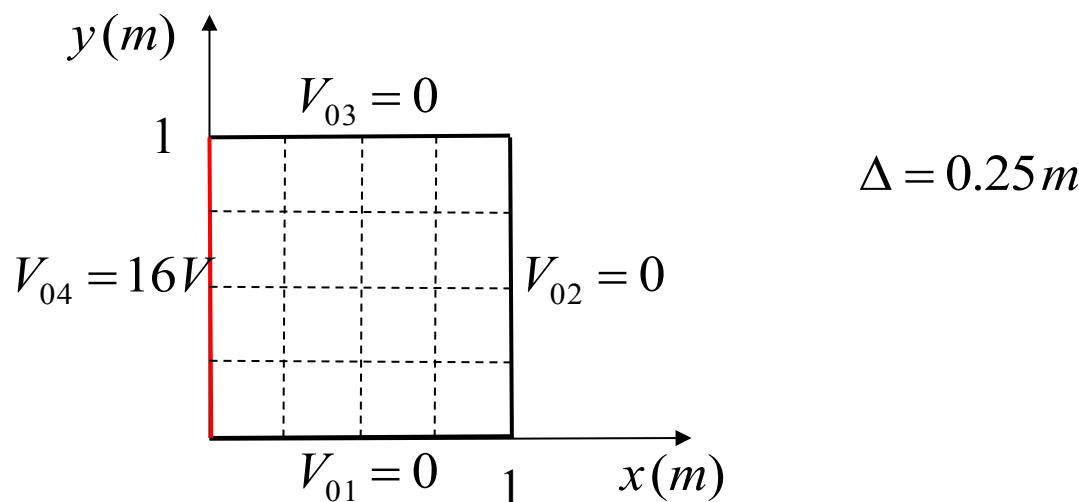
O potencial em um ponto é igual à média do potencial em sua vizinhança.

## Etapa 3: Solução da Equação de Diferenças

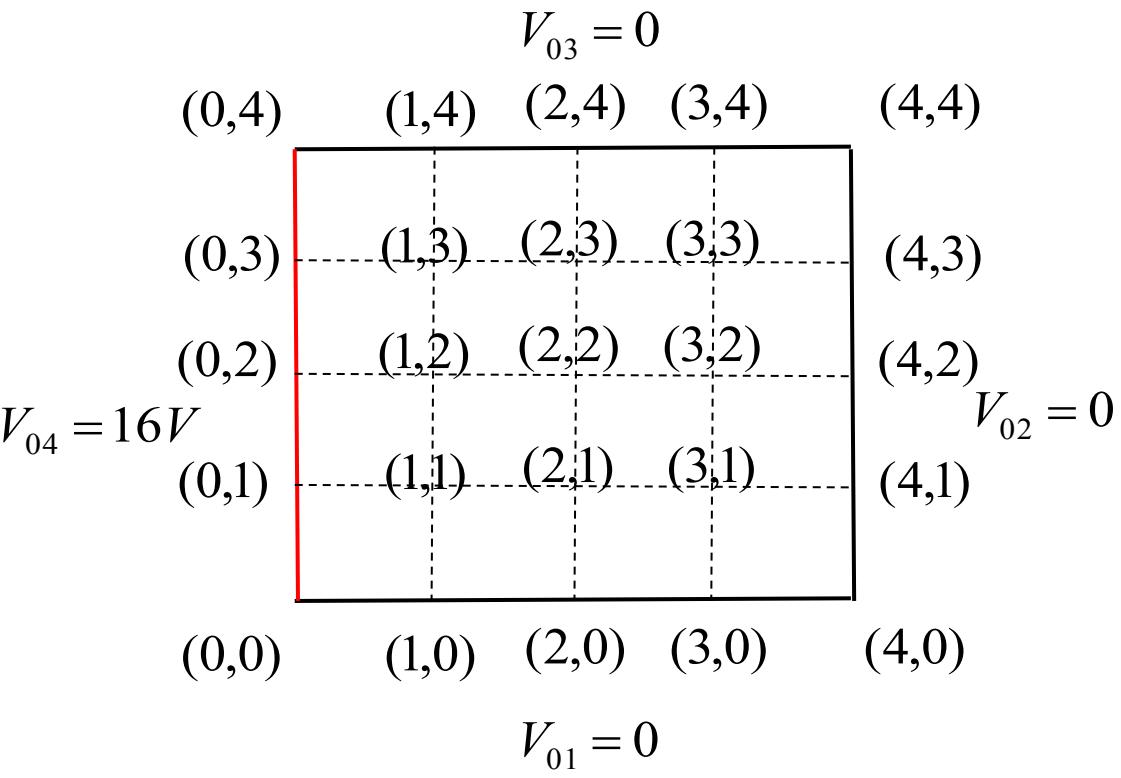
- Método Iterativo
- Método da Matriz de Banda

Exemplo:

Determinar a solução da Equação de Laplace em uma calha retangular infinita, com tensões constantes em seus lados.



## Método Iterativo:



## Nós fixos:

$(i, j)$	$V_{i,j}$
(1,0)	$V_{01} = 0$
(4,1)	$V_{02} = 0$
(1,4)	$V_{03} = 0$
(0,1)	$V_{04} = 16V$

## Nós livres:

$(i,j)$  com  $i=1,2,3$  ou  $j=1,2,3$

## Método Iterativo:

1. Assumir uma tensão inicial para os nós livres:

$$V_{i,j} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3$$

2. Aplicar repetidamente (ordem pré-estabelecida):  $V_{i,j} \approx \frac{1}{4} [V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}]$

**Valores iniciais:**

$V_{03} = 0$		
0	0	0
0	0	0
0	0	0
$V_{04} = 16V$		
$V_{02} = 0$		
$V_{01} = 0$		

**1ª Iteração**

$V_{03} = 0$		
4	0	0
4	0	0
4	0	0
$V_{04} = 16V$		
$V_{02} = 0$		
$V_{01} = 0$		

## 1ª Iteração

		$V_{03} = 0$
4	0	0
4	0	0
4	0	0
$V_{04} = 16V$		
		$V_{01} = 0$

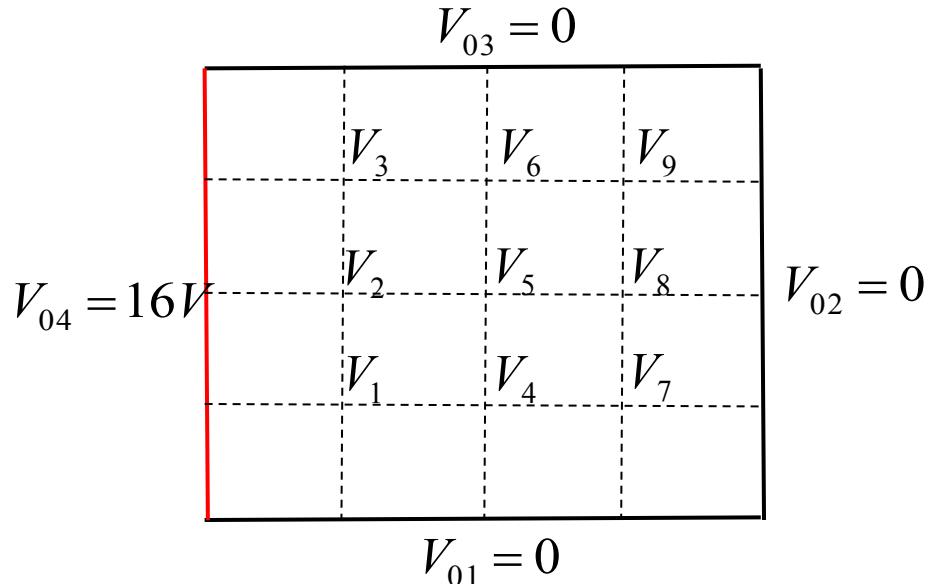
## 2ª Iteração

		$V_{03} = 0$
5	1	0
6	1	0
5	1	0
$V_{04} = 16V$		
		$V_{01} = 0$
		$V_{02} = 0$

... Convergência....

## Método da Matriz de Banda:

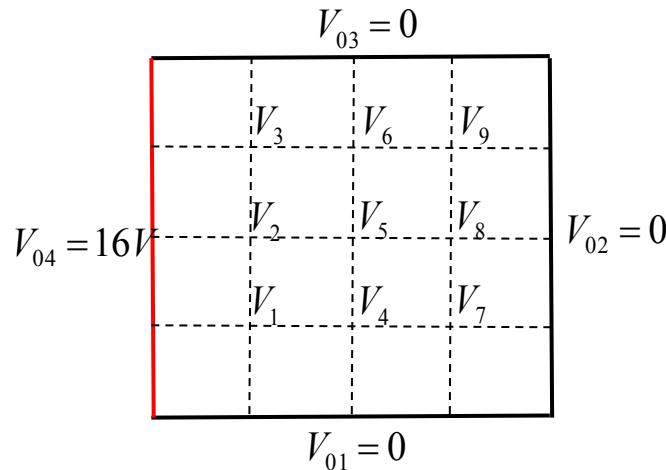
1. Ordenar os nós livres:



2. Determinar as equações algébricas em cada nó livre:

$$V_{i,j} \approx \frac{1}{4} [V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}] \quad \rightarrow \quad V_{i+1,j} + V_{i-1,j} - 4V_{i,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} = 0$$

$$V_{i+1,j} + V_{i-1,j} - 4V_{i,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} = 0$$



$$\left. \begin{array}{l} -4V_1 + V_2 + V_4 + V_{01} + V_{04} = 0 \\ V_1 - 4V_2 + V_3 + V_5 + V_{04} = 0 \\ V_2 - 4V_3 + V_6 + V_{03} + V_{04} = 0 \\ V_1 - 4V_4 + V_5 + V_7 + V_{01} = 0 \\ V_2 + V_4 - 4V_5 + V_6 + V_8 = 0 \\ V_3 + V_5 - 4V_6 + V_9 + V_{03} = 0 \\ V_4 - 4V_7 + V_8 + V_{01} + V_{02} = 0 \\ V_5 + V_7 - 4V_8 + V_9 + V_{02} = 0 \\ V_6 + V_8 - 4V_9 + V_{02} + V_{03} = 0 \end{array} \right\}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{01} - V_{04} \\ -V_{04} \\ -V_{03} - V_{04} \\ -V_{01} \\ 0 \\ -V_{03} \\ -V_{01} - V_{02} \\ -V_{02} \\ -V_{02} - V_{03} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow [A][V] = [B]$

$$[A][V] = [B] \quad \rightarrow \quad [V] = [A]^{-1}[B]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ii} = -4 \quad \text{Elementos da diagonal principal} \\ \\ A_{ij} = \begin{cases} 1 & (i \neq j) \quad \text{se os nós i e j estão conectados} \\ 0 & (i \neq j) \quad \text{se os nós i e j não estão conectados} \end{cases} \\ \\ B_i = \text{soma dos potenciais em nós fixos conectados ao nó } i, \\ \text{com sinal contrário} \end{array} \right.$$

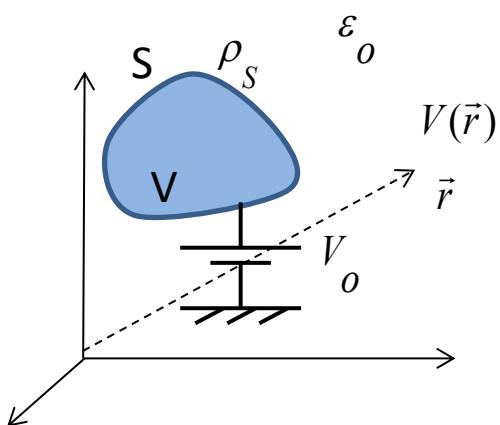
**Os potenciais nos nós livres são obtidos diretamente da solução do sistema linear.**

## **Leitura:**

- Numerical Techniques in Electromagnetics, Matthew Sadiku, 2<sup>a</sup> Ed., 2001, cap 3.
- Elementos de Eletromagnetismo, Matthew Sadiku, 3<sup>a</sup> Ed., 2006 Cap. 15

# MÉTODO DOS MOMENTOS

Como determinar o potencial  $V(\vec{r})$  em todo o espaço, se apenas o conhecemos em alguma região?



Exemplo: potencial vale  $V_o$  no condutor de volume  $V$ . Qual o valor do potencial  $V(\vec{r})$  em um ponto  $\vec{r}$  qualquer?

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

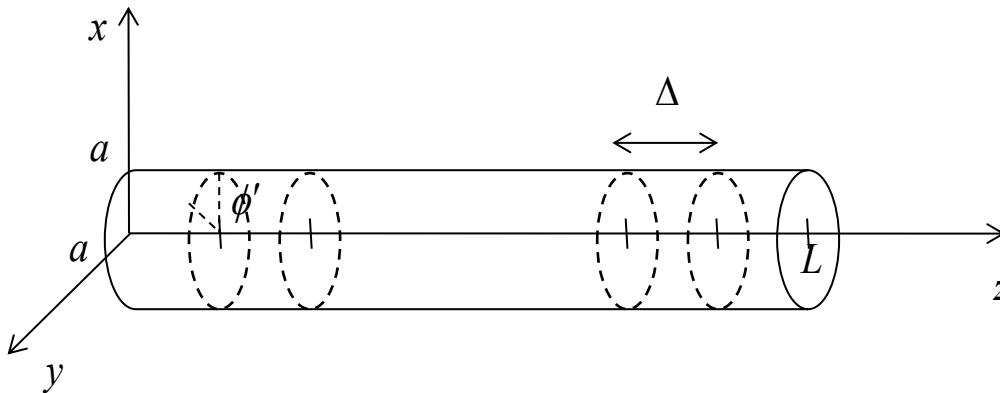
Como determinar  $\rho_s$  no condutor?

A função desconhecida ( $\rho_s$ ) está sob a integral  $\rightarrow$  Equação Integral

Método de Solução:

A função desconhecida é escrita como o somatório de funções conhecidas (funções de base), com coeficientes a determinar.

# Distribuição de carga em um fio fino com potencial $V_0$



1. Aproximação para fios finos:

(A) a distribuição superficial de carga não depende de  $\phi'$  .

$$\rho_S(\phi', z') = \rho_S(z')$$

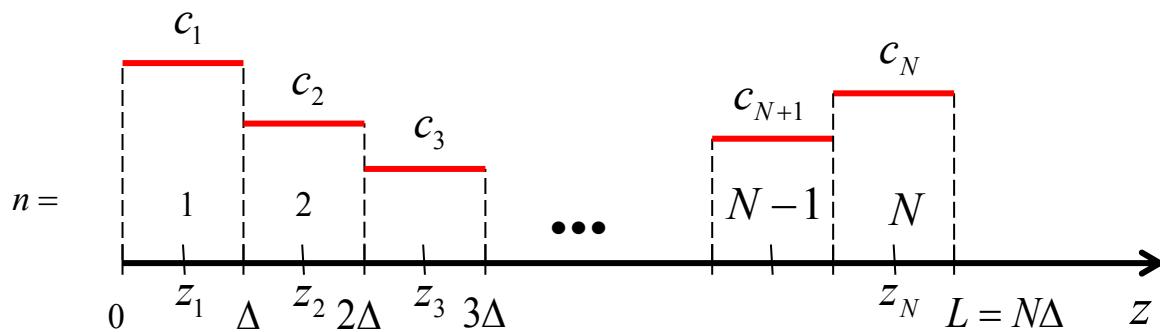
(B) a carga no topo e base do fio são desprezadas.

2. Divisão do comprimento do fio em N segmentos.

$$\Delta = \frac{L}{N}$$

3. A densidade superficial de carga  $\rho_S(z')$  será aproximada por valores constantes nos intervalos de comprimento  $\Delta$  .

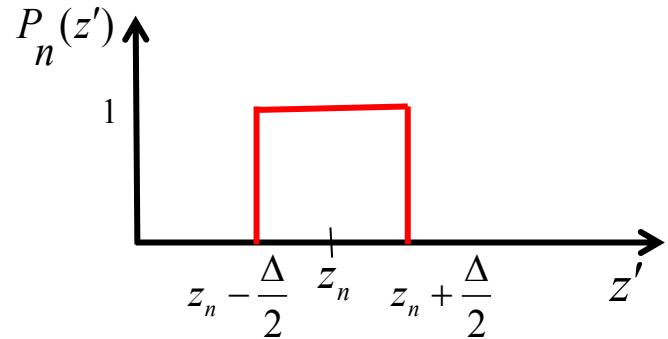
## Aproximação:



$$z_n = (n - 0,5)\Delta$$

$$\rho_s(z') \approx \sum_{n=1}^N c_n P_n(z')$$

Coeficientes a serem determinados

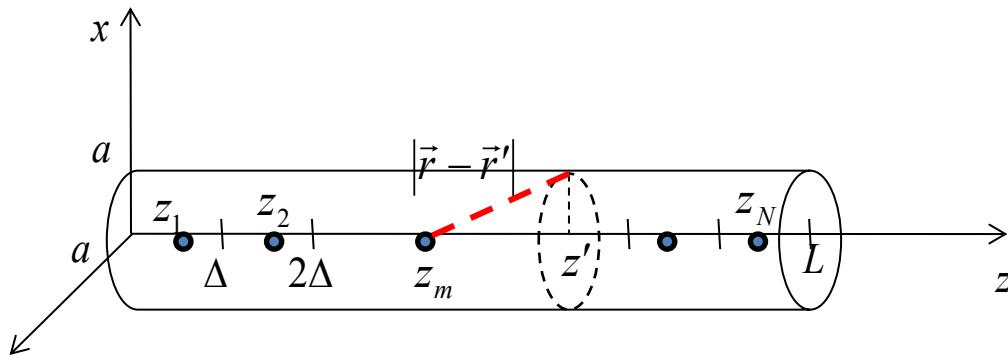


→ Aproximação da densidade superficial de carga constante por partes.

Condição de contorno:

Potencial constante  $V_0$  no fio.

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad \vec{r} \in \text{fio} \quad \rightarrow \quad 4\pi\epsilon_0 V_o = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s(z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} a d\phi' dz' \quad \vec{r} \in \text{fio}$$



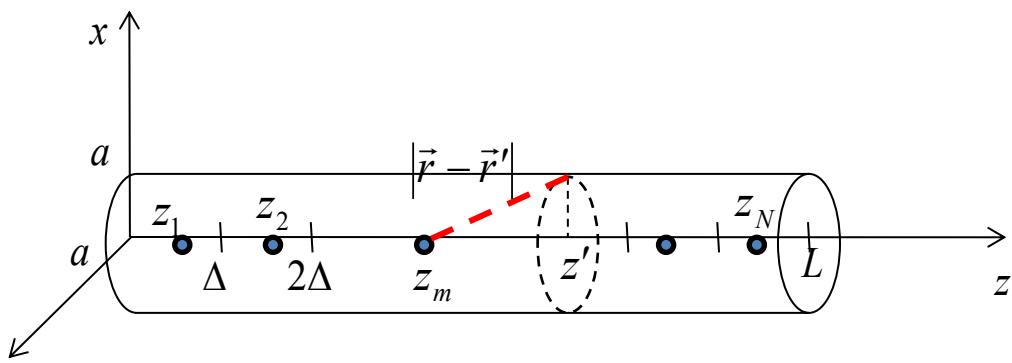
Impondo o potencial  $V_0$  nos pontos centrais de cada intervalo do fio.

$$\vec{r}_m = z_m \hat{a}_z \quad z_m = (m - 0,5)\Delta \quad m = 1, \dots, N$$

$$\vec{r}' = a \cos \phi' \hat{a}_x + a \sin \phi' \hat{a}_y + z' \hat{a}_z$$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}$$

A escolha dos pontos  $\vec{r}_m$  no eixo do fio resulta em que o integrando independe de  $\phi'$ .



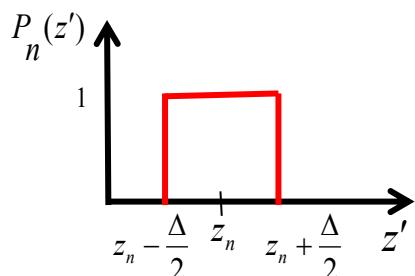
$$4\pi\epsilon_0 V_o = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} ad\phi' dz'$$

$$4\pi\epsilon_0 V_o = 2\pi a \int_0^L \frac{\rho_s(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz'$$

Substituindo a expansão em funções de base:

$$\rho_s(z') \approx \sum_{n=1}^N c_n P_n(z') \quad \rightarrow \quad 2\epsilon_0 V_o = a \int_0^L \frac{\sum_{n=1}^N c_n P_n(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz'$$

$$2\epsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^N c_n \int_0^L \frac{P_n(z')}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz'$$



$$2\epsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^N c_n \int_{z_n - \Delta/2}^{z_n + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z_m - z')^2}} dz'$$

$$u = z' - z_m$$

$$du = dz'$$

$$2\epsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^N c_n \int_{z_n - z_m - \Delta/2}^{z_n - z_m + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du$$

$$2\epsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^N c_n \ln \left[ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right] \Big|_{z_n - z_m - \Delta/2}^{z_n - z_m + \Delta/2}$$

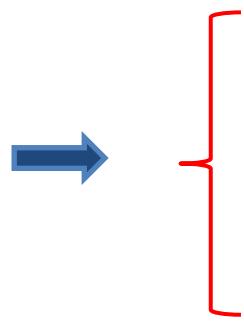
$$2\varepsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^N c_n \ln \left[ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right] \Big|_{z_n - z_m - \Delta/2}^{z_n - z_m + \Delta/2}$$

$$2\varepsilon_0 V_o = a \sum_{n=1}^N c_n \ln \left( \frac{z_n - z_m + \Delta/2 + \sqrt{(z_n - z_m + \Delta/2)^2 + a^2}}{z_n - z_m - \Delta/2 + \sqrt{(z_n - z_m - \Delta/2)^2 + a^2}} \right) \quad m = 1, \dots, N$$

Organizando em forma matricial:

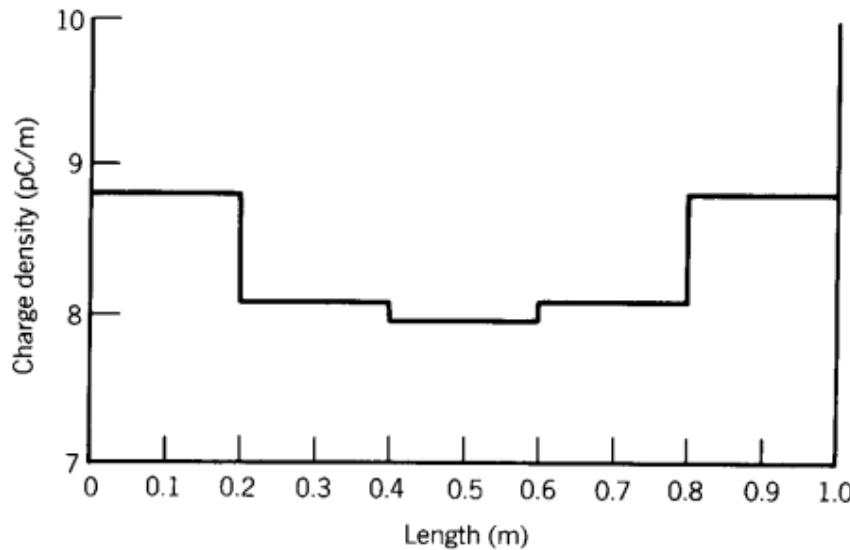
$$\begin{bmatrix} & \\ Z & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}$$

[Z]: matriz de impedância  
[V]: matriz de tensão

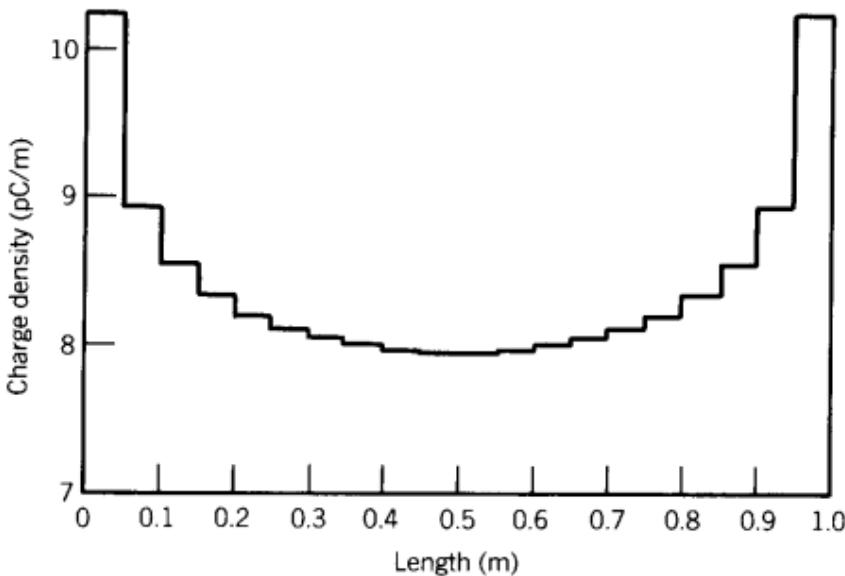


$$\begin{cases} V_m = 2\varepsilon_0 V_o \\ Z_{mn} = a \ln \left( \frac{z_n - z_m + \Delta/2 + \sqrt{(z_n - z_m + \Delta/2)^2 + a^2}}{z_n - z_m - \Delta/2 + \sqrt{(z_n - z_m - \Delta/2)^2 + a^2}} \right) \end{cases}$$

O sistema linear é resolvido para cada número N de elementos, resultando em uma aproximação da distribuição de carga no fio.



(a)



(b)

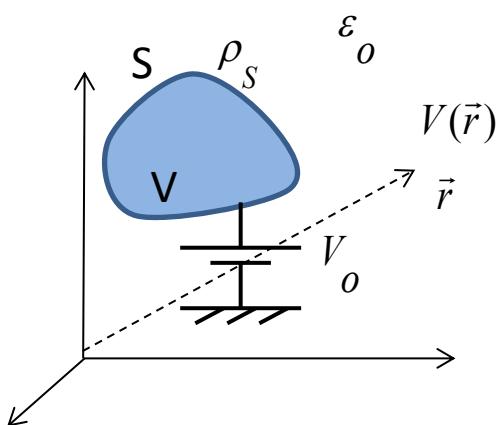
**FIGURE 12-2** Charge distribution on a 1-m straight wire at 1 V.  
(a)  $N = 5$ . (b)  $N = 20$ .

## **Leitura:**

- Elementos de Eletromagnetismo, Matthew Sadiku, 3<sup>a</sup> Ed., 2006  
seção 15.4
- Advanced Engineering Electromagnetics, C. A. Balanis, 1989

# MÉTODO DOS MOMENTOS

Como determinar o potencial  $V(\vec{r})$  em todo o espaço, se apenas o conhecemos em alguma região?



Exemplo: potencial vale  $V_o$  no condutor de volume  $V$ . Qual o valor do potencial  $V(\vec{r})$  em um ponto  $\vec{r}$  qualquer?

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

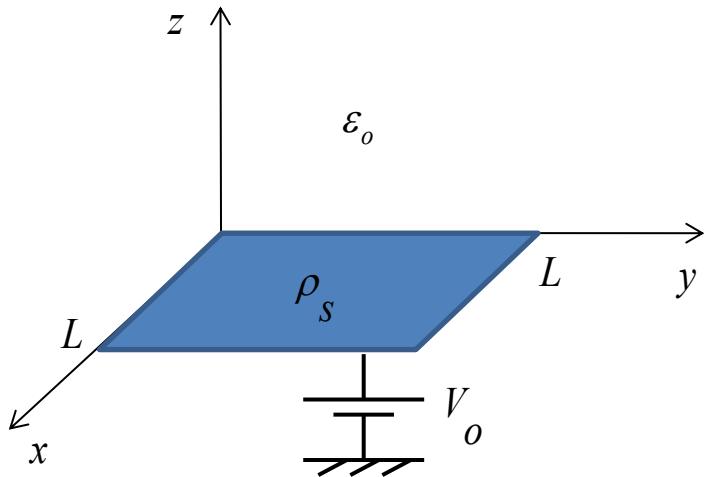
Como determinar  $\rho_s$  no condutor?

A função desconhecida ( $\rho_s$ ) está sob a integral  $\rightarrow$  Equação Integral

Método de Solução:

A função desconhecida é escrita como o somatório de funções conhecidas (funções de base), com coeficientes a determinar.

# Distribuição de carga em uma placa com potencial $V_o$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Condição de contorno:

$$V(\vec{r}) = V_o \quad \vec{r} \in \text{placa}$$

Se a distribuição de carga for conhecida na placa, o potencial pode ser calculado em qualquer ponto do espaço.

## Discretização:

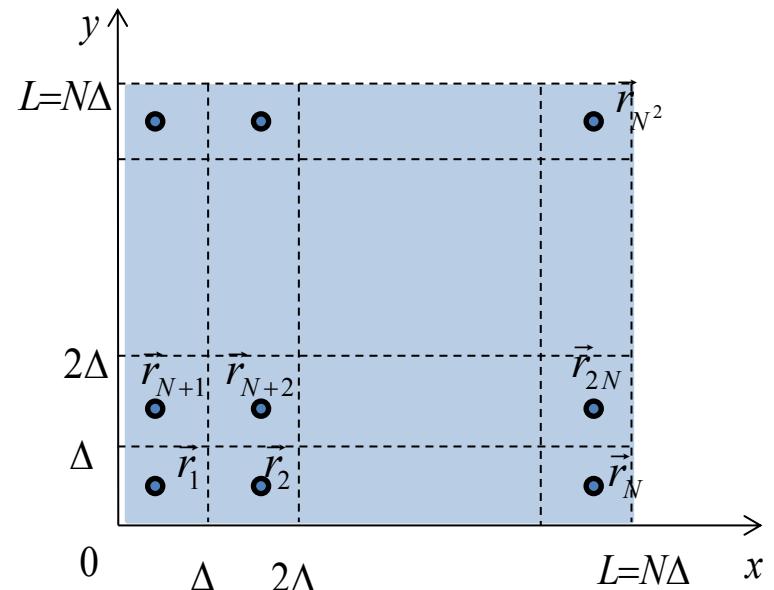
- Discretização da superfície da placa.

$$\Delta = \frac{L}{N}$$

- Ordenar os quadrados, com pontos centrais

$$\vec{r}_n \quad n = 1, 2, \dots, N^2$$

$n$	$i$	$j$
1	1	1
2	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	N	1
N+1	1	2
N+2	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N

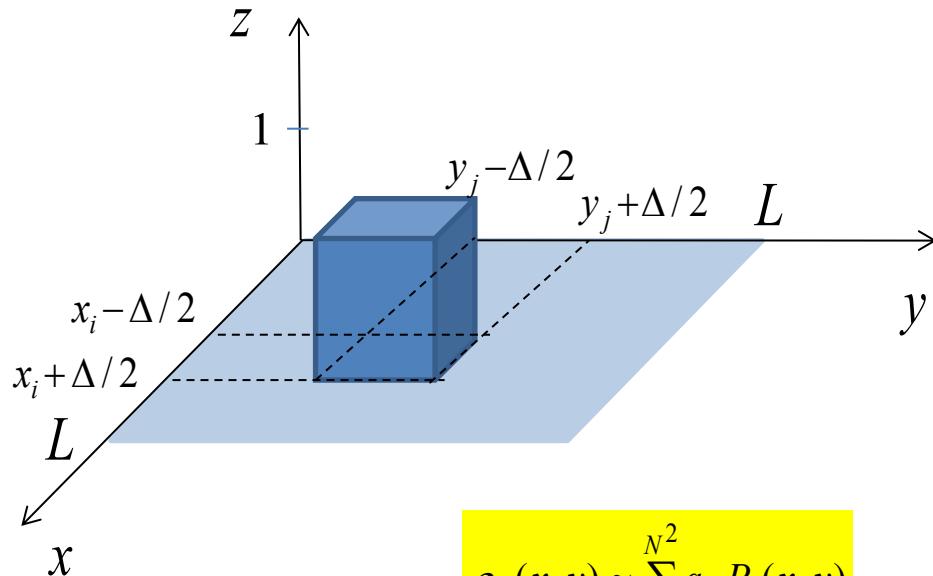


$$\vec{r}_n = (x_i, y_j) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_i = (i - 1/2)\Delta & i = 1, \dots, N \\ y_j = (j - 1/2)\Delta & j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

$$n = i + (j - 1)N$$

## Aproximação:

A distribuição superficial de carga será aproximada por uma soma de funções pulso em cada sub-domínio (quadrado).



$$P_n(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad x_i - \Delta/2 < x < x_i + \Delta/2 \\ & y_j - \Delta/2 < y < y_j + \Delta/2 \\ 0 & fora \end{cases}$$

$$\rho_s(x,y) \approx \sum_{n=1}^{N^2} a_n P_n(x,y)$$

Coeficientes a serem determinados  $(N^2)$

↑ ↑

Funções de Base



Aproximação da densidade superficial de carga constante por partes.

Condição de contorno:

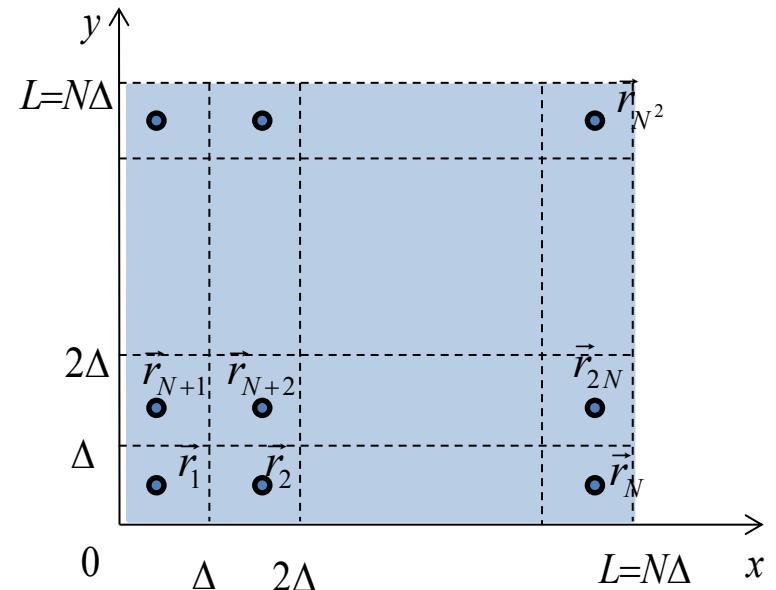
Potencial constante  $V_0$  na placa.

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad \vec{r} \in \text{placa}$$

A condição de contorno será imposta no centro de cada quadrado (point-matching):

$$\vec{r}_m \quad m = 1, 2, \dots, N^2$$

$m$	$p$	$q$
1	1	1
2	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	$N$	1
$N+1$	1	2
$N+2$	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	$N$	$N$



$$\vec{r}_m = (x_p, y_q) \quad \begin{cases} x_p = (p - 1/2)\Delta & p = 1, \dots, N \\ y_q = (q - 1/2)\Delta & q = 1, \dots, N \end{cases}$$

$$m = p + (q - 1)N$$

Impondo o potencial  $V_o$  no ponto  $\vec{r}_m = (x_p, y_q)$  e usando a expansão da distribuição de carga na placa:

$$\left. \begin{aligned} V_o &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \\ \rho_s(x, y) &\approx \sum_{n=1}^{N^2} a_n P_n(x, y) \end{aligned} \right\} \quad V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sum_{n=1}^{N^2} a_n P_n(x', y')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \quad \rightarrow \quad V_o = \sum_{n=1}^{N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{P_n(x', y')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \\ \sum_{n=1}^{N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' &= V_o \quad m = 1, 2, \dots, N^2 \\ \text{Equação linear com incógnitas } a_n : \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{\uparrow} \end{aligned} \right.$$

Organizando em forma matricial:

$$[Z] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{N^2} \end{bmatrix} = [V]$$

[Z]: matriz de impedância  
 [V]: matriz de tensão

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_m = V_o \\ Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' \end{array} \right.$$

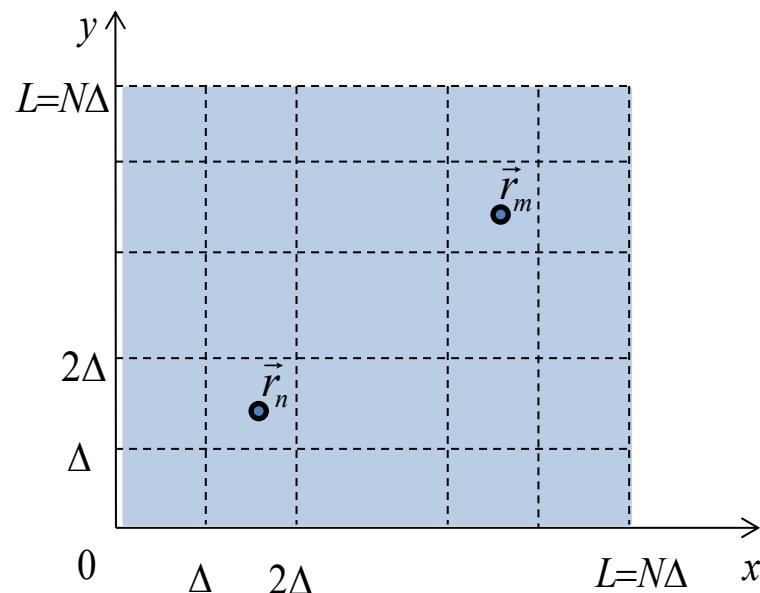
## Matriz de Impedância:

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_m = (x_p, y_q) \\ \vec{r}' = (x', y') \end{array} \right] \quad |\vec{r}_m - \vec{r}'| = \sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx' dy'$$

$Z_{mn}$  é igual ao potencial no ponto  $\vec{r}_m$  gerado por uma densidade superficial de carga constante e igual a 1 no sub-domínio n.



- 1 Se  $m \neq n$  :  $Z_{mn}$  pode ser aproximado como se toda a carga do quadrado n estivesse concentrada no centro.

$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}} dx' dy'$$



$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}}$$

2

Se  $m = n$  : Elementos da diagonal principal de  $Z_{mn}$  :

$$m = n \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i = p & x_i = x_p \\ j = q & y_j = y_q \end{cases}$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx' dy'$$

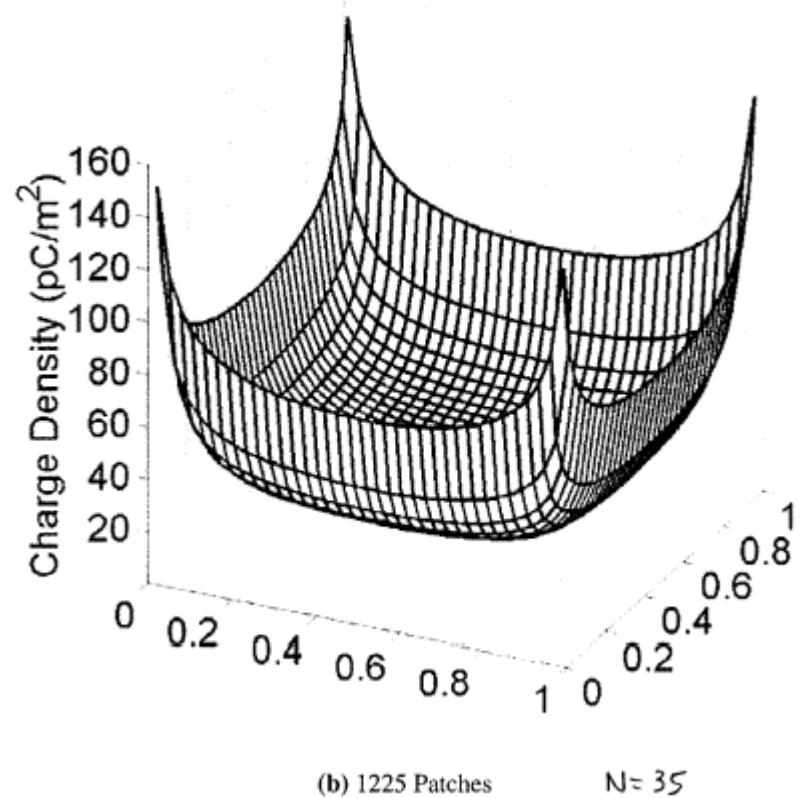
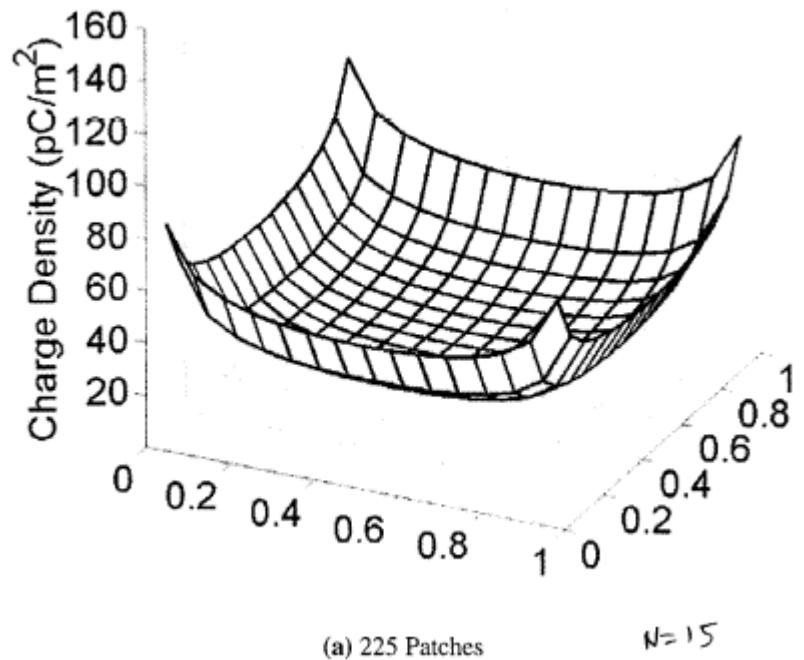
$$\begin{aligned} Z_{nn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_j - y')^2}} dx' dy' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \ln \left[ u + \sqrt{u^2 + v^2} \right]_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \ln \left[ \frac{\Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + v^2}}{-\Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + v^2}} \right] dv \end{aligned}$$

Usando [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com):

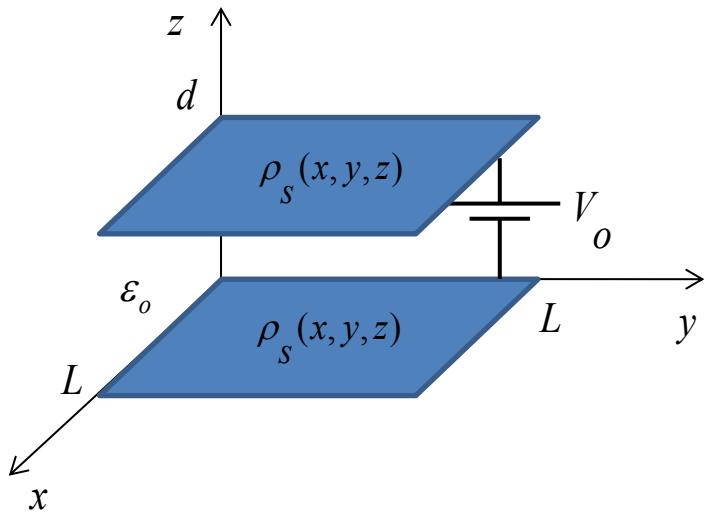
$$\int \ln \left[ \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right] dx = x \ln \left[ \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right] + 2a \ln \left( \sqrt{x^2 + a^2} + x \right)$$

$$\rightarrow Z_{nn} = \frac{\Delta}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

Exemplo:



# Condutor de Placas Paralelas



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Condições de contorno:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_o & \vec{r} \in \text{placa cima} \\ 0 & \vec{r} \in \text{placa baixo} \end{cases}$$

Se a distribuição de carga for conhecida na placa, o potencial pode ser calculado em qualquer ponto do espaço.

## Discretização:

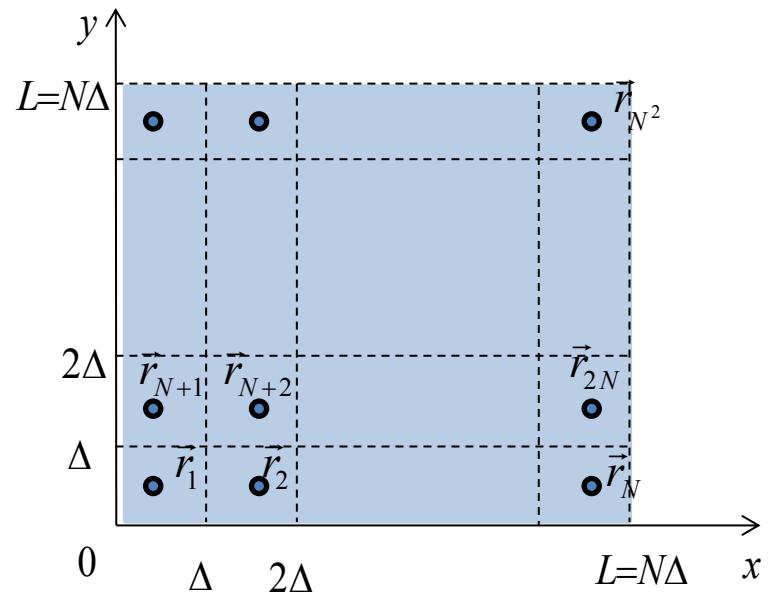
- Discretização da superfície das placas.

$$\Delta = \frac{L}{N}$$

- Ordenar os quadrados, com pontos centrais

$$\vec{r}_n \quad n = 1, 2, \dots, 2N^2$$

n	i	j	k
1	1	1	0
2	2	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N	0
$N^2+1$	1	1	1
$N^2+2$	2	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2N^2$	N	N	1



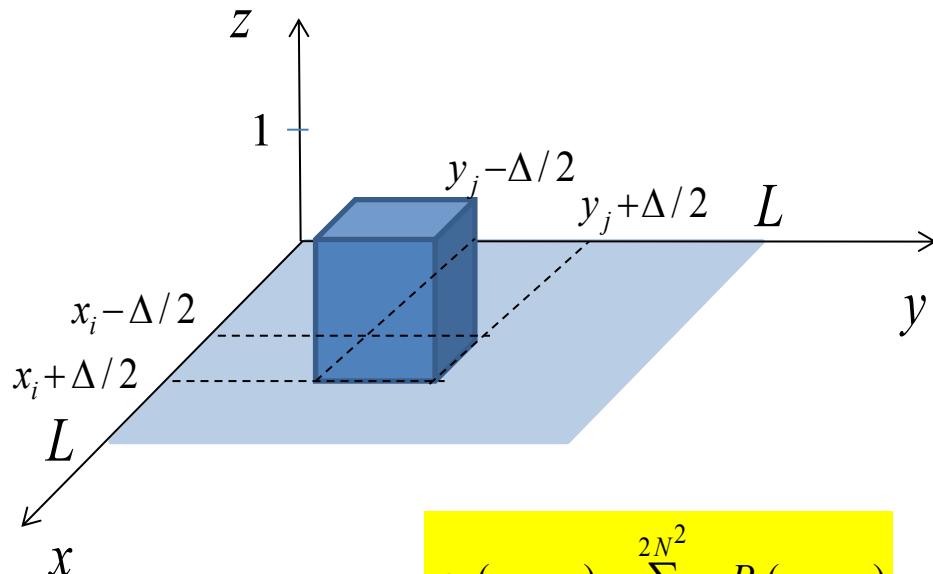
$$\vec{r}_n = (x_i, y_j, z_k) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_i = (i - 1/2)\Delta & i = 1, \dots, N \\ y_j = (j - 1/2)\Delta & j = 1, \dots, N \\ z_k = k d & k = 0, 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} k = 0 & \text{placa de baixo} \\ k = 1 & \text{placa de cima} \end{array} \right.$$

$$n = i + (j - 1)N + k N^2$$

## Aproximação:

A distribuição superficial de carga será aproximada por uma soma de funções pulso em cada sub-domínio (quadrado).



$$P_n(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i - \Delta/2 < x < x_i + \Delta/2 \\ & y_j - \Delta/2 < y < y_j + \Delta/2 \\ & z = k d \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

$$\rho_S(x, y, z) \approx \sum_{n=1}^{2N^2} a_n P_n(x, y, z)$$

Coeficientes a serem determinados  $(2N^2)$



Aproximação da densidade superficial de carga constante por partes.

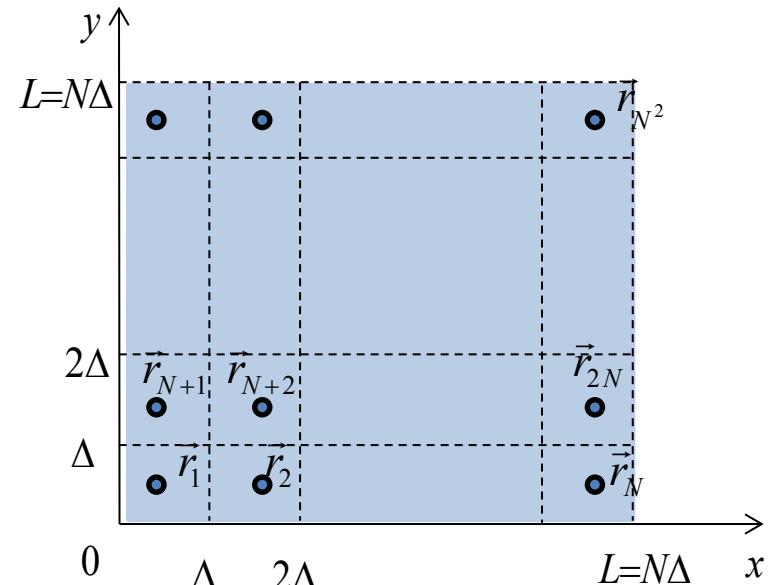
Condições de contorno: Potencial constante  $V_0$  na placa superior e 0 (zero) na inferior.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' = \begin{cases} V_0 & \vec{r} \in \text{placa cima} \\ 0 & \vec{r} \in \text{placa baixo} \end{cases}$$

A condição de contorno será imposta no centro de cada quadrado (point-matching):

$$\vec{r}_m \quad m = 1, 2, \dots, 2N^2$$

m	p	q	s
1	1	1	0
2	2	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N^2$	N	N	0
$N^2+1$	1	1	1
$N^2+2$	2	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2N^2$	N	N	1



$$\vec{r}_m = (x_p, y_q, z_s)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_p = (p - 1/2)\Delta & p = 1, \dots, N \\ y_q = (q - 1/2)\Delta & q = 1, \dots, N \\ z_s = s d & s = 0, 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} s = 0 & \text{placa de baixo} \\ s = 1 & \text{placa de cima} \end{array} \right.$$

$$m = p + (q - 1)N + s N^2$$

Impondo o potencial no ponto  $\vec{r}_m = (x_p, y_q, z_s)$  e usando a expansão da distribuição de carga na placa:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' &= V(z_s) \\ \rho_s(x, y, z) &\approx \sum_{n=1}^{2N^2} a_n P_n(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sum_{n=1}^{2N^2} a_n P_n(x', y', z_k)}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' = V(z_s) \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{2N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{P_n(x', y', z_k)}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' = V(z_s)$$

$$\sum_{n=1}^{2N^2} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' = V(z_s) \quad m = 1, 2, \dots, 2N^2$$

Equação linear com incógnitas  $a_n$ : 

Organizando em forma matricial:

$$[Z] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2N^2} \end{bmatrix} = [V]$$

[Z]: matriz de impedância

[V]: matriz de tensão

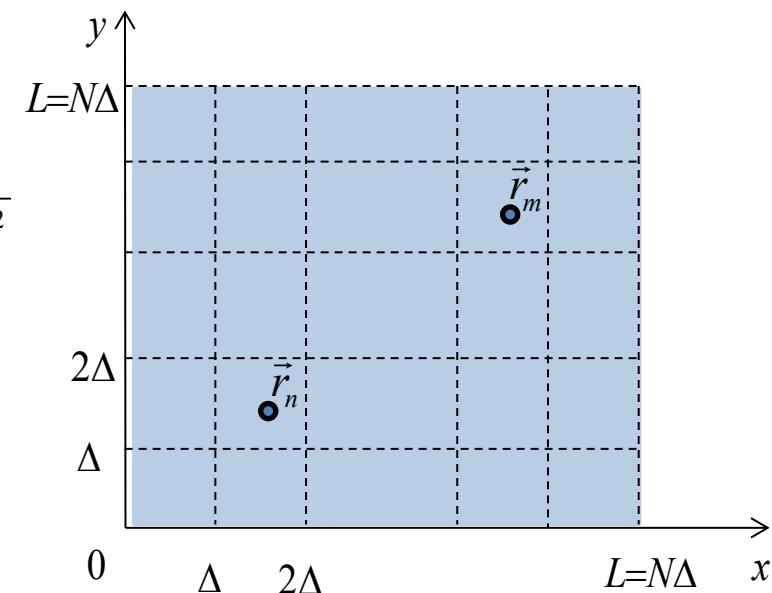
$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_m = V(z_s) = \begin{cases} 0 & 1 \leq m \leq N^2 \\ V_o & N^2 + 1 \leq m \leq 2N^2 \end{cases} \\ Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' \end{array} \right.$$

## Matriz de Impedância:

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_m = (x_p, y_q, z_s) \\ \vec{r}' = (x', y', z_k) \end{array} \right\} |\vec{r}_m - \vec{r}'| = \sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2 + (z_s - z_k)^2}$$

$$Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2 + (z_s - z_k)^2}} dx' dy'$$



**1** Se  $m \neq n$  :  $Z_{mn}$  pode ser aproximado como se toda a carga do quadrado  $n$  estivesse concentrada no centro.

$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2} \int_{y_j-\Delta/2}^{y_j+\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2 + (z_s - z_k)^2}} dx' dy'$$

→

$$Z_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2 + (z_s - z_k)^2}}$$

2

Se  $m = n$  : Elementos da diagonal principal de  $Z_{mn}$  :

$$m = n \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i = p & x_i = x_p \\ j = q & y_j = y_q \\ k = s & z_k = z_s \end{cases}$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_j - y')^2 + (z_k - z_k)^2}} dx' dy'$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i - \Delta/2}^{x_i + \Delta/2} \int_{y_j - \Delta/2}^{y_j + \Delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_j - y')^2}} dx' dy' =$$

$$\rightarrow Z_{nn} = \frac{\Delta}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

## **Leitura:**

- Elementos de Eletromagnetismo, Matthew Sadiku, 3<sup>a</sup> Ed., 2006  
Cap. 15
- Advanced Engineering Electromagnetics, C. A. Balanis, 1989