UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea 1: Cálculo de curvatura media
Curso : Procesamiento Geométrico y Análisis de Formas
Codigo : CC5513

1. Introducción

Sea $\mathcal{M}$ un Manifold 2D embebido en R^3. Dado un punto $p \in \mathcal{M}$ sobre la superficie, cualquier plano que pase por el vector normal de p intersecta a la superficie. La intersección forma entonces una curva que tiene una curvatura en el punto p. Como existen infinitos planos que pasan por el vector normal de p, entonces existen infinitas curvas e infinitas curvaturas en p.

De todas esas curvaturas definidas sobre el punto p, llamamos k_1 a la curvatura máxima y k_2 a la curvatura mínima. Cada una de estas curvaturas tiene asociada un vector tangente que es el que pasa por el punto p y es tangente a la curva que define la curvatura. Una forma de definir la curvatura de la superficie en el punto p es calculando la curvatura media

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{1}$$

Existen muchas formas de calcular la curvatura media en superficies representadas como mallas triangulares. En esta tarea vamos a implementar un método muy fácil y que da buenos resultados.

2. Enunciado

En esta tarea implementaremos un programa de Python que reciba una malla triangular y calcule la curvatura media en cada vértice de la malla. Para desarrollar la tarea debes llevar a cabo los siguientes pasos:

1. **Preparación de la malla:** lee la malla usando Openmesh y pre-computa las normales en cada vértice. La notación de un vértice v es $\vec{N}_v$.

2. **Procesar cada vértice:** dado un vértice v, calcular la curvatura de cada arista que sale del vértice v. Sea e la arista formada por v y un vértice vecino t. La curvatura de e se calcula como

$$curv_e = \frac{(\vec{N}_t - \vec{N}_v) \cdot (t - v)}{\|t - v\|^2} \tag{2}$$

3. **Calcular curvatura en vértice:** Para un vértice v, usar el paso 2 para computar la curvatura de todas las aristas que parten en v y calcular la curvatura de v como el promedio de las curvaturas de las aristas incidentes.

4. **Dibuja el resultado:** Dibuja el resultado en Polyscope, asignando una función escalar a la malla con el método add_scalar_quantity. Muestra el resultado con al menos 3 mallas disponibles en el repositorio Github del curso.

Uno de los problemas del método anterior para calcular curvaturas es que no tiene en cuenta la calidad de la triangulación al momento de promediar las curvaturas de las aristas. En una malla de mala calidad, algunos triángulos adyacentes a un punto, pueden ser o muy agudos o muy obtusos. Para remediar este problema y hacer el método más robusto, vamos a implementar la siguiente mejora.

1. **Curvatura de aristas:** Repetir los pasos 1 y 2 del método anterior.

2. **Calcular curvatura en vértice:** Sea v el vértice al que le queremos calcular la curvatura. Sea t un vértice vecino y e_{vt} la arista formada por v y t. Sea r el vértice vecino que está a continuación de t en un sentido antihorario y sea e_{vr} la arista formada por v y r. Ver figura 1. Calculamos el ángulo formado por e_{vt} y e_{vr} como

$$\theta_{vtr} = \arcsin\left(\text{mín}\left(1{,}0, \frac{\|e_{vt} \times e_{vr}\|}{\|e_{vt}\|\|e_{vr}\|}\right)\right) \tag{3}$$

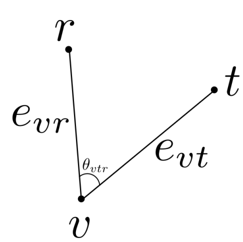

Figura 1: Punto y aristas vecinas

Por lo tanto, cada arista e_{vt} aporta un valor a la curvatura final de la siguiente forma

$$curv_v = curv_v + \theta_{vtr} \cdot (curv_{vt} + curv_{vr})$$

donde $curv_{vt}$ y $curv_{vr}$ son las curvaturas de aristas calculadas en la parte anterior.

En palabras, se suman las curvaturas de las dos aristas e_{vt} y e_{vr} y se multiplica por el ángulo que forman. Este procedimiento se repite en el sentido antihorario de los vecinos del vértice v.

Al final, el valor acumulado de curvatura se divide entre dos veces la suma de todos los ángulos alrededor del vértice v.

3. **Dibuja el resultado:** Dibuja el resultado en Polyscope, asignando una función escalar a la malla con el método add_scalar_quantity. Muestra el resultado con al menos 3 mallas disponibles en el repositorio Github del curso.

3. Entregable

Para esta tarea se debe entregar el código de Pythonque implementa sus algoritmos. Además elabore un documento (pdf) que muestre los resultados en las mallas entregadas para la tarea.