UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea 3: Parametrización
Curso : Procesamiento Geométrico y Análisis de Formas
Codigo : CC5513

# 1. Introducción

Dada una superficie $S$ en $R^3$ y un dominio planar $\Omega$, el problema de la parametrización es encontrar un map biyectivo $U : \Omega \longleftrightarrow S$. En la práctica, un método general para resolver la parametrización es el modelo de resorte, en donde la energía de una malla se define como

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\frac{1}{2}D_{ij}\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2 \tag{1}$$

Como la parametrización consiste en cambiar la malla para hacerla plana, la idea es que la malla planar resultante preserve todo lo que se pueda la energía original de la malla original. Entonces, si asumimos que los pesos $D_{ij}$ deberían permanecer sin alteración en la malla resultante, el problema de parametrización puede formularse como:

$$\arg\min_{\overline{U}}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\frac{1}{2}D_{ij}\|\overline{\mathbf{u}}_i - \overline{\mathbf{u}}_j\|^2 \tag{2}$$

Es decir, encontrar las coordenadas $\overline{\mathbf{u}} \in R^2$ que minimicen la energía de la malla original. En clase vimos que la solución a este problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$L\overline{U} = 0 \text{ sujeto a } \overline{u_i} = b_i \tag{3}$$

La restricción permite asociar directamente algunos puntos de la solución con puntos en la frontera de la solución. La matriz $L$ es la matriz Laplaciana y de su discretización depende la parametrización. De manera general, la matriz Laplaciana se define como sigue:

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_{j\in N_i} D_{ij} & \text{Si } i = j \\ -D_{ij} & \text{Si } j \in N_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{4}$$

En esta tarea probaremos distintas discretizaciones de la matriz Laplaciana y cómo esto afecta la parametrización. En particular probaremos tres discretizaciones (o formas de cómo calcular los valores de $D_{ij}$):

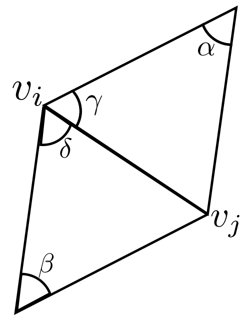


Figura 1: Vértices adyacentes $v_i$ y $v_j$ y los ángulos usados en las discretizaciones del Laplaciano.

1. Uniforme:
$$D_{ij} = 1 \tag{5}$$
2. Armónico:
$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\cot \alpha + \cot \beta) \tag{6}$$
3. Valor medio:
$$D_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\delta}{2}}{\|v_i - v_j\|} \tag{7}$$

Usar la figura 1 como referencia para los ángulos de las expresiones previas.

Como ejemplo para esta tarea, se hace entrega de una implementación de la versión armónica del Laplaciano, así como el procedimiento de parametrización. El resultado de la parametrización se puede ver en la figura 2. Además se puede usar Polyscope para visualizar un mapeo de textura usando la parametrización calculada.

# 2. Enunciado

Usando como referencia la implementación del Laplaciano armónico, implementar el Laplaciano uniforme y el de valor medio. Comparar los resultados de aplicar la textura usando la parametrización computada con los nuevos Laplacianos. Como la evaluación es principalmente visual, documente con figuras toda la discusión sobre la pertinencia de usar las diferentes discretizaciones para hacer parametrización. Se hacen entrega de tres mallas triangulares con frontera: Nefertiti, Bunny y Lucy. Mostrar sus resultados y análisis con las tres mallas entregadas.

# 3. Entregable

Para esta tarea se debe entregar el código de Python que implementa sus algoritmos.

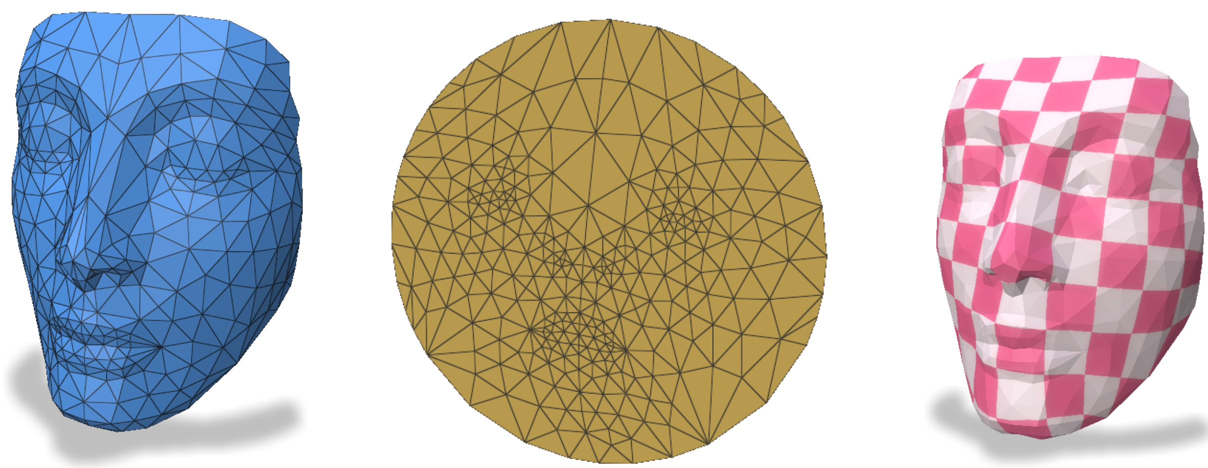

Figura 2: Parametrización. De izquierda a derecha: superficie original, parametrización 2D con frontera de circunferencia y visualización de textura con Polyscope (tipo: checker con periodo 0.2).