UNIVERZITET U BIHAĆU
TEHNIČKI FAKULTET
BIHAĆ

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE II

Laboratorijske/Auditorne vježbe

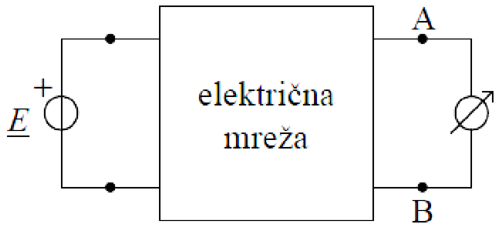
Mjerni mostovi
(Vježba 6)

mr. Amel Toroman, dipl. ing.el.
Viši asistent

MJERNI MOSTOVI

Mjerni mostovi su električna kola koja omogućuju neposredno poređenje poznatih i nepoznatih veličina koristeći indikator koji se dovodi na nulu ručnim ili automatskim podešavanjem poznatih veličina. Mjerne metode koje koriste mjerne mostove se nazivaju mostne metode.

Osnovni mjerni most je *Vitstonov most* (Wheatstone).

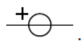


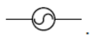
$$\underline{U}_{AB} = f(\underline{E}, \underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_n)$$

$$\underline{Z}_i = g(L, C, M, R, f)$$

Ravnoteža mosta:

$$\underline{U}_{AB} = 0$$

Mostovi za jednosmjernu struju imaju jednosmjerni pobudni generator E .

Mostovi za naizmjeničnu struju se pobuđuju generatorom naizmjeničnog napona $\underline{E}$ .

Indikator treba da bude osjetljiv detektor nule. Unutrašnja otpornost je od manjeg značaja.

Indikator za jednosmjerne mostove je galvanometar, osjetljiv ampermetar ili voltmetar.

Indikator za naizmjenične mostove može biti osciloskop, elektronski voltmetar, čak i slušalice, bilo šta što može precizno detektovati ravnotežu mosta. Instrument sa ispravljačem je loš izbor zbog male osjetljivosti i značajnih parazitnih efekata pri malim naponima ili strujama. U slučaju da se koristi osciloskop, treba obratiti pažnju na uzemljenje pobudnog generatora.

Postoje više tipova mostova:

- **Mostovi za mjerenje otpornosti**
  - *Vitstonov most*
  - *Tomsonov (Kelvinov) most*

- **Mostovi za mjerenje kapacitivnosti**
  - *Most za poređenje serijske kapacitivnosti*
  - *Most za poređenje paralelne kapacitivnosti*
  - *Vinov most*
  - *Šeringov most*
  - *Ogavin most*
  - *Sotijev most*

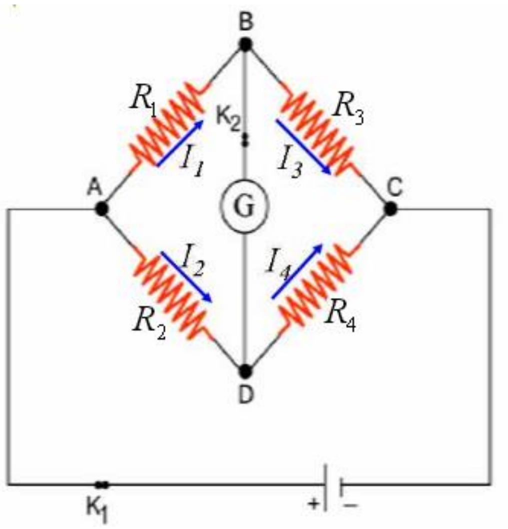
- **Mostovi za mjerenje induktivnosti**
  - *Most za poređenje serijske induktivnosti*
  - *Maksvelov most*
  - *Hejov most*
  - *Ovenov most*
  - *Ovenov most za mjerenje inkrementalne induktivnosti*

- **Mostovi za mjerenje međusobne induktivnosti**
  - *Mjerenje međusobne induktivnosti metodom serijske veze*
  - *Direktno mjerenje međusobne induktivnosti*
  - *Poređenje međusobnih induktivnosti*
  - *Kembelovo kolo*

MJERENJE OTPORNOSTI

VITSTONOV MOST

Most za mjerenje istosmjerne struje



Slika 1. *Vitstonov most*

Otpornici R_1, R_2, R_3 i R_4 vezani su serijski tako da čine zatvoreno kolo u obliku kvadrata. U dijagonali kvadrata, između čvorova A i C vezan je izvor konstantnog napona U. U drugoj dijagonali, između čvorova B i D, vezan je galvanometar sa zaštitnim otpornikom R_5. Ukoliko kroz galvanometar G protiče struja, *most nije balansiran*.

Za mjerenje otpornosti je značajan slučaj kada su otpornici R_1, R_2, R_3 i R_4 odabrani tako da je jačina struje kroz galvanometar jednaka nuli. Tada se za most kaže da je *balansiran*, odnosno da je *u ravnoteži.*

Uslovi ravnoteže:

Na osnovu prvog *Kirhofovog* zakona, primjenjenog na čvorove B i D, mora biti:

$$I_1 = I_3; \quad I_2 = I_4 \tag{**}$$

Da bi struja kroz galvanometar bila jednaka nuli, potencijali tačaka B i D moraju biti jednaki $U_B=U_D$. Pošto je tačka A zajednička za grane R_1 i R_2, proizlazi i da potencijalne razlike $U_{AB}=U_A-U_B$ i $U_{AD}=U_A-U_D$ moraju biti jednake:

$$U_{AB} = U_{AD}$$

Prethodna jednačina se može napisati pomoću Omovog zakona:

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 \qquad (1)$$

Kako je tačka C zajednička za grane R_3 i R_4, vodeći računa o uslovu $V_B = V_D$, mora biti:

$$U_{BC} = U_{DC}$$
$$R_3 I_3 = R_4 I_4$$

S obzirom na (**), posljednja jednačina se može napisati i u sljedećem obliku:

$$R_3 I_1 = R_4 I_2 \qquad (2)$$

Ako se jednačina (1) podijeli jednačinom (2), može se dobiti uslov ravnoteže mosta u sljedećem obliku:

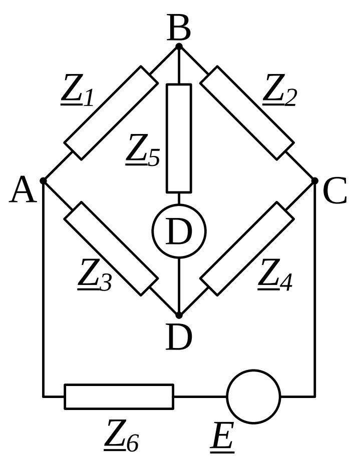
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

Odnosno:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

Mjerenje otpornosti *Vitstonovim* mostom sastoji se u traženju ravnoteže mosta kada je jedna grana mosta nepoznate otpornosti, a ostale grane su poznatih promjenljivih otpornosti.

Most za mjerenje naizmjenične struje



$\underline{Z}_5$ predstavlja impedansu galvanometra dok $\underline{Z}_6$ predstavlja unutrašnju impedansu generatora. Tačnost mjerenja ne zavisi od ovih vrijednosti, kao ni od vrijednosti generatora $\underline{E}$.

$$\underline{U}_{\mathrm{BC}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{\mathrm{AC}} \qquad \underline{U}_{\mathrm{DC}} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \underline{U}_{\mathrm{AC}}$$

Kada je most u ravnoteži važi da je $\underline{U}_{\mathrm{BD}} = 0$ odnosno $\underline{U}_{\mathrm{BC}} = \underline{U}_{\mathrm{DC}}$ iz čega slijedi da je:

$$\frac{\underline{\boldsymbol{Z}}_2}{\underline{\boldsymbol{Z}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2}\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{AC}} = \frac{\underline{\boldsymbol{Z}}_4}{\underline{\boldsymbol{Z}}_3 + \underline{\boldsymbol{Z}}_4}\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{AC}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot (\underline{\boldsymbol{Z}}_3 + \underline{\boldsymbol{Z}}_4) = \underline{\boldsymbol{Z}}_4 \cdot (\underline{\boldsymbol{Z}}_1 + \underline{\boldsymbol{Z}}_2)$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_3 = \underline{\boldsymbol{Z}}_4 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_1$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_4 = \underline{\boldsymbol{Z}}_2 \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_3$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_k = \boldsymbol{Z}_k \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot\phi_k} = \boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{X}_k$$
$$\boldsymbol{Z}_1 \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot\phi_1} \cdot \boldsymbol{Z}_4 \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot\phi_4} = \boldsymbol{Z}_2 \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot\phi_2} \cdot \boldsymbol{Z}_3 \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot\phi_3}$$
$$\boldsymbol{Z}_1 \cdot \boldsymbol{Z}_4 \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot(\phi_1+\phi_4)} = \boldsymbol{Z}_2 \cdot \boldsymbol{Z}_3 \cdot \boldsymbol{e}^{j\cdot(\phi_2+\phi_3)}$$

$$\boldsymbol{Z}_1 \cdot \boldsymbol{Z}_4 = \boldsymbol{Z}_2 \cdot \boldsymbol{Z}_3$$
$$\boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\phi}_4 = \boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\phi}_3$$

$$(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{X}_1) \cdot (\boldsymbol{R}_4 + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{X}_4) = (\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{X}_2) \cdot (\boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{X}_3)$$
$$(\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_4 - \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_4) + \boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{X}_4 + \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{R}_4) =$$
$$= (\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{X}_3) + \boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{R}_3)$$

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_4 - \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{X}_3 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{X}_4 + \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{R}_4 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{R}_3 \tag{2}$$

- postavlja se uslov ravnoteže mosta za jednosmjernu struju:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \tag{3}$$

- iz jednačine (1) se dobija:

$$\boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{X}_3 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_3} \tag{3'}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{X}_4}{\boldsymbol{X}_3} \tag{4'}$$

- zamjenom ovih vrijednosti u relaciju (2) dobija se:

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{X}_4 + \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{R}_4 = \boldsymbol{R}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_3} \cdot \boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{X}_4}{\boldsymbol{X}_3} \cdot \boldsymbol{R}_3$$
$$\boldsymbol{X}_4 = \frac{\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_3} \cdot \boldsymbol{X}_3 \Rightarrow \frac{\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_3} = \frac{\boldsymbol{X}_4}{\boldsymbol{X}_3}$$
$$\frac{\boldsymbol{R}_4}{\boldsymbol{R}_3} = \frac{\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_1} = \frac{\boldsymbol{X}_4}{\boldsymbol{X}_3} = \frac{\boldsymbol{X}_2}{\boldsymbol{X}_1}$$

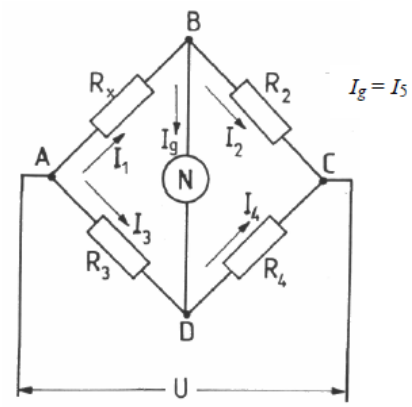
- ravnoteža je moguća ako su odnosi svih istorodnih otpornosti u susjednim granama jednaki

Neuravnoteženi Vitstonov most (metoda skretanja)

Pored uravnoteženog Vitstonovog mosta u nultoj metodi često se koristi i *nepotpuno uravnoteženi Vitstonov most u metodi skretanja*. Nepotpuno uravnoteženi Vitstonov most u metodi skretanja koristi se obično u slučajevima kada vrijednost mjerene otpornosti odstupa neznatno od ravnotežne vrijednosti. Kada je odstupanje ΔR_x od ravnotežne vrijednosti R_{x0} malo ($\Delta R_x << R_{x0}$) struja mjerne dijagonale je srazmjerna ovom odstupanju ΔR_x.

Najčešće se smatra da se most napaja stalnim naponom U = const, što odgovara slučaju da je unutrašnja otpornost izvora napajanja zanemarljivo mala ($R_0 \approx 0$). Drugi, suprotan slučaj je da se most napaja stalnom strujom I = const, što odgovara slučaju da je unutrašnja otpornost izvora napajanja velika prema ekvivalentnom otporu mosta ($R_0 >> R_{em}$).

Da bi se izveo izraz za struju mjerne dijagonale I_g pretpostavimo da je prvo most napajan stalnim naponom kao što je naznačeno na slici 2.



Slika 2. *Vitstonov most napajan stalnim naponom*

Za čvor B važi:

$$I_2 = I_1 - I_5 \tag{1}$$

Za čvor D važi:

$$I_4 = I_3 + I_5 \tag{2}$$

Za kolo ABDA važi:

$$I_1R_1 + I_5R_5 - I_3R_3 = 0 \tag{3}$$

Za kolo BCDB važi:

$$I_5R_5 + I_4R_4 - I_2R_2 = 0 \tag{4}$$

odnosno, s obzirom na jednačine (1) i (2):

$$-I_1R_2 + I_3R_4 + I_5(R_2 + R_4 + R_5) = 0 \tag{4'}$$

Za kolo ABCVA važi:

$$-I_1R_1 - I_1R_2 + I_5R_2 + U = 0 \tag{5}$$

Rješenjem po I_3 jednačine (3) dobija se:

$$I_3 = \frac{I_1R_1 + I_5R_5}{R_3}$$

Uvrštavanjem u jednačinu (4′) dobija se:

$$I_1(R_1R_4 - R_2R_3) + I_5[R_5(R_3 + R_4) + R_3(R_2 + R_4)] = 0 \qquad (4'')$$

Rješenjem po I_1 jednačine (5) dobija se:

$$I_1 = \frac{U + R_2I_5}{R_1 + R_2}$$

Uvrštavanjem u jednačinu (4") i rješenjem po I_5 dobija se:

$$I_5 = \frac{U(R_2R_3 - R_1R_4)}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_3(R_2 + R_4) + R_2R_4(R_1 + R_3)}$$

Možemo do izraza za struju mjerne dijagonale neuravnoteženog mosta doći i na mnoge druge načine. Za napon U_{BD} možemo pisati:

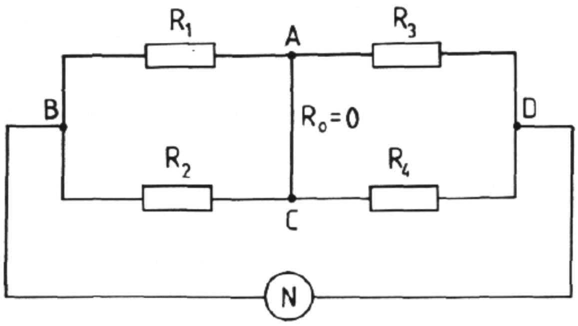
$$U_{BD} = U_{AB} - U_{AD}$$

Za struju mjerne dijagonale I_{BD} imaćemo:

$$I_{BD} = \frac{U_{BD}}{R_g + R_{em}}$$

gdje je R_g otpornost nultog indikatora, a R_{em} ekvivalentna otpornost mosta posmatrano iz čvorova B i D. Kako je u ovom slučaju predpostavijeno da se most napaja stalnim naponom U, to je otpornost izvora napajanja R_0 = 0, pa će se na osnovu šeme sa slike 2. za ekvivalentnu otpornost mosta napajanog stalnim naponom imati:

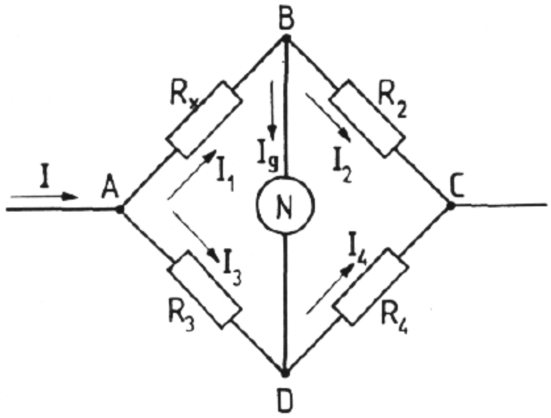
$$\boldsymbol{R_{em} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4}}$$



Slika 3. *Most napajan stalnim naponom. Određivanje ekvivalentne otpornosti R_{BD}*

Neuravnotežen Vitstonov most

Posmatrat će se sada Vitstonov neuravnoteženi most napajan stalnom strujom kao što je to naznačeno na *Slici 4.*



Slika 4. *Vitstonov most napajan stalnom strujom*

Primjenjujući Kirhofove zakone, možemo napisati sljedeće jednačine:

Za čvor A važi:

$$I = I_1 + I_3$$

odavde je:

$$I_3 = I - I_1 \tag{1}$$

Za čvor B važi:

$$I_1 = I_5 + I_2 \qquad\qquad I_g = I_5$$

odavde:

$$I_2 = I_1 - I_5 \tag{2}$$

Za čvor C važi:

$$I = I_2 + I_4$$

odavde:

$$I_4 = I - I_2 = I - I_1 + I_5 \tag{3}$$

Za kolo ABDA važi:

$$I_1R_1 + I_5R_5 - I_3R_3 = 0 \tag{4}$$

Odnosno, s obzirom na jednačinu (1):

$$I_1(R_1 + R_3) + I_5R_5 - IR_3 = 0 \tag{4$'$}$$

odavde:

$$I_1 = \frac{IR_3 - I_5R_5}{R_1 + R_3} \tag{4$''$}$$

Za kolo CBDC važi:

$$I_2R_2 - I_5R_5 - I_4R_4 = 0 \tag{5}$$

odnosno, s obzirom na jednačine (2) i (3):

$$I_1(R_2 + R_4) - I_5(R_2 + R_4 + R_5) - IR_4 = 0 \tag{5'}$$

Uvrštavajući jednačinu (4") u jednačinu (5) dobija se:

$$I[(R_2 + R_4)R_3 - (R_1 + R_3)R_4] - I_5[(R_2 + R_4)R_5 - (R_1 + R_3)(R_2 + R_4 + R_5)] = 0$$

Odavde se za struju mjerne dijagonale dobija:

$$\boldsymbol{I_5 = \frac{I(R_2R_3 - R_1R_4)}{R_5(R_1 + R_2 + R_3 \mp R_4) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}}$$

Kao i u slučaju mosta napajanog stalnim naponom možemo do izraza za struju mjerne dijagonale neuravnoteženog mosta napajanog stalnom strujom doći i na mnoge druge načine.

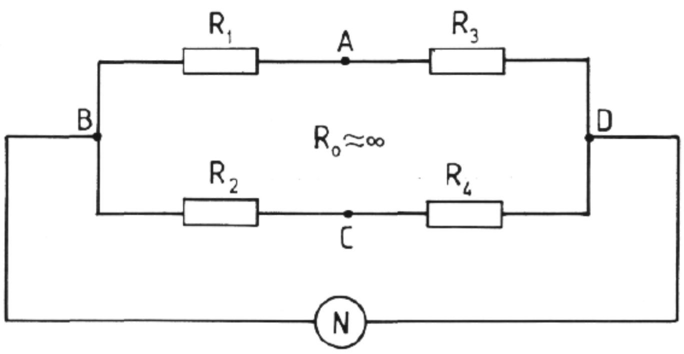
$$U_{BD} = U_{AB} - U_{AD}$$

Za struju mjerne dijagonale I_{BD} dobiva se:

$$I_{BD} = \frac{U_{BD}}{R_g + R_{em}}$$

Pri čemu je R_g otpornost nultog indikatora, a R_{em} ekvivalentna otpornost mosta posmatrano iz čvorova B i D. Kako je u ovom slučaju predpostavljeno da se most napaja stalnom strujom I, to je otpornost izvora napajanja vrlo velika ($R_0 \approx \infty$), pa se na osnovu šeme sa slike 5 za ekvivalentnu otpornost mosta napajanog stalnom strujom dobija:

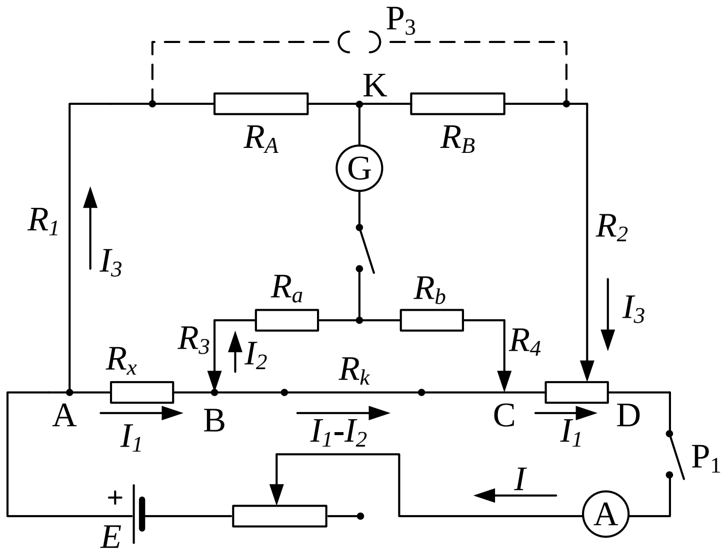
$$\boldsymbol{R_{em} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}}$$



Slika 5. *Most napajan stalnom strujom. Određivanje ekvivalentne otpornosti* R_{em}

TOMSONOV MOST

Rečeno je da je Vitstonov most podesan za mjerenje otpornosti srednjih, pa i velikih, vrijednosti u granicama od 1 Ω do 1 MΩ, pa i 100 MΩ. Međutim, za mjerenje otpornosti malih vrijednosti nije podesan, jer se u slučaju mjerenja otpornosti male vrijednosti ne mogu da zanemare otpornosti veza kojima je mjereni otpornik R_x vezan za čvorove A i B. Stoga je za mjerenje otpornosti malih vrijednosti razvijen dupli *Tomsonov* most (neki ga nazivaju i *Kelvinov* most, jer je Tomson za zasluge postao Lord Kelvin).



Slika 6. *Thomsonov most*

$$R_A \cdot I_3 = R_x \cdot I_1 + R_a \cdot I_2 \tag{1}$$

$$R_B \cdot I_3 = R \cdot I_1 + R_b \cdot I_2 \tag{2}$$

$$(R_a + R_b) \cdot I_2 = (I_1 - I_2) \cdot R_k \tag{3}$$

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{R_a+R_b+R_k}{R_k} \tag{3'}$$

$$R_A \cdot I_3 = \left[\frac{R_x}{R_k} \cdot (R_a + R_b + R_k) + R_a\right] \cdot I_2 \tag{1'}$$

$$R_B \cdot I_3 = \left[\frac{R}{R_k} \cdot (R_a + R_b + R_k) + R_b\right] \cdot I_2 \tag{2'}$$

$$R_x = R \cdot \frac{R_A}{R_B} + \frac{R_k + R_b}{R_a + R_b + R_k} \cdot \left(\frac{R_A}{R_B} - \frac{R_a}{R_b}\right)$$

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_a}{R_b}$$

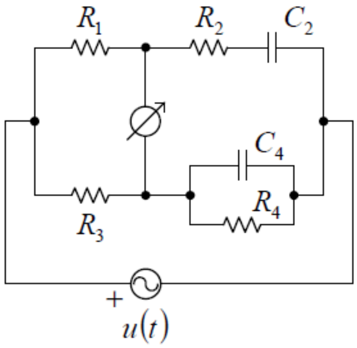
$$\boldsymbol{R_x = R \cdot \frac{R_A}{R_B}}$$

Ako se na primjer za vrijednosti otpornosti uzmu:

$$R_A = 50\Omega; R_B = 5k\Omega; R = 0{,}001\Omega \Rightarrow \boldsymbol{R_x = 10^{-5}[\Omega]}$$

MJERENJE KAPACITIVNOSTI

VINOV MOST



Slika 7. *Vinov most*

1. *Mjerenje paralelne kapacitivnosti*

$$C_x = C_4 = \frac{R_1}{R_3}\frac{C_2}{1+(\omega R_2 C_2)^2}$$

$$R_x = R_4 = \frac{R_3}{R_1}\left(1+\frac{1}{(\omega R_2 C_2)^2}\right)R_2$$

2. *Mjerenje serijske kapacitivnosti*

$$C_x = C_2 = \frac{R_3}{R_1}\left(1+\frac{1}{(\omega R_4 C_4)^2}\right)C_4$$

$$R_x = R_2 = \frac{R_1}{R_3}\frac{R_4}{1+(\omega R_4 C_4)^2}$$

3. Mjerenje frekvencije

Usvaja se

$$R_2 = R_4 = R$$

i

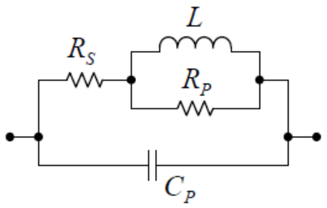
$$C_2 = C_4 = C$$

Tada je

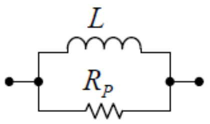
$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

MJERENJE INDUKTIVNOSTI

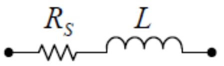
Ekvivalentna šema kalema



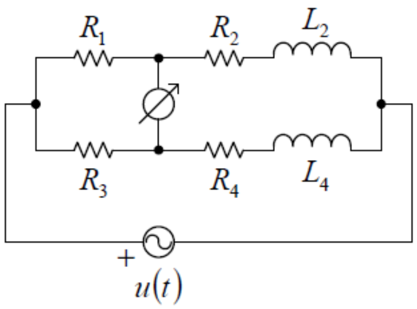
"paralelna" induktivnost



"serijska" induktivnost



MOST ZA POREĐENJE SERIJSKE INDUKTIVNOSTI



Slika 8. *Most za poređenje serijske induktivnosti*

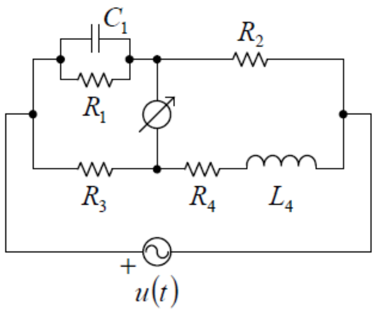
$$L_x = L_4 = L_2 \frac{R_3}{R_1}$$

$$R_x = R_4 = R_2 \frac{R_3}{R_1}$$

Problem međusobno sprezanje kalemova.

Analogno za paralelnu induktivnost.

MAKSVELOV MOST

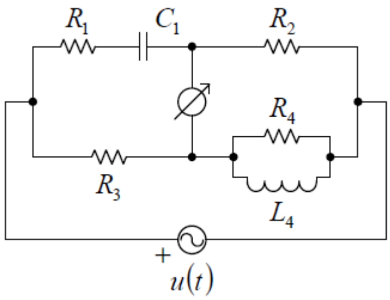


Slika 9. *Maksvelov most*

$$L_x = L_4 = R_2 R_3 C_1$$

$$R_x = R_4 = R_2 \frac{R_3}{R_1}$$

HEJOV MOST

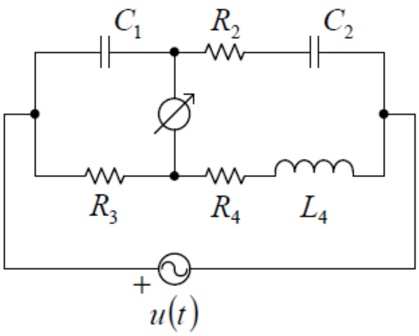


Slika 10. *Hejov most*

$$L_x = L_4 = R_2 R_3 C_1$$

$$R_x = R_4 = R_2 \frac{R_3}{R_1}$$

OVENOV MOST



Slika 11. *Ovenov most*

$$L_x = L_4 = R_2 R_3 C_1$$

$$R_x = R_3 \frac{C_1}{C_2}$$