

**UNIVERZITET U BIHAĆU**  
**TEHNIČKI FAKULTET**  
**BIHAĆ**

## **AUTOMATSKO UPRAVLJANJE II**

**Laboratorijske/Auditorne vježbe**

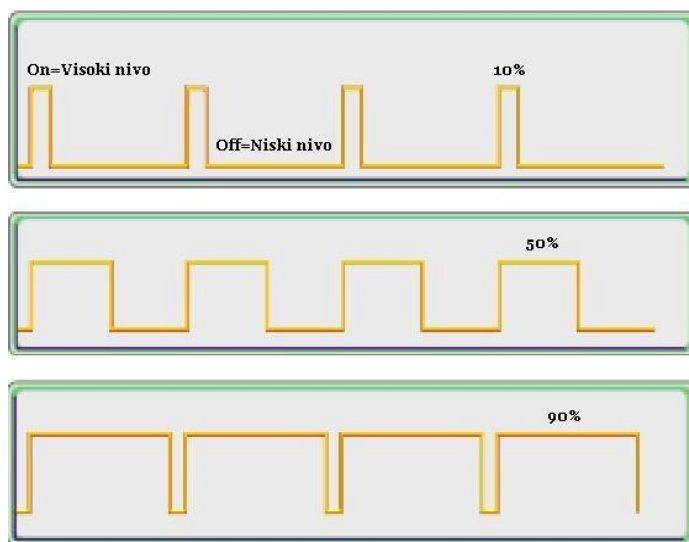
**ISTOSMJERNI MOTOR**

**Pulsno-širinska modulacija (PWM) i stabilnost sistema (PID)**  
**(Vježba 4)**

**mr. Amel Toroman, dipl. ing.el.**  
**Viši asistent**

## PULSNO-ŠIRINSKA MODULACIJA (PWM)

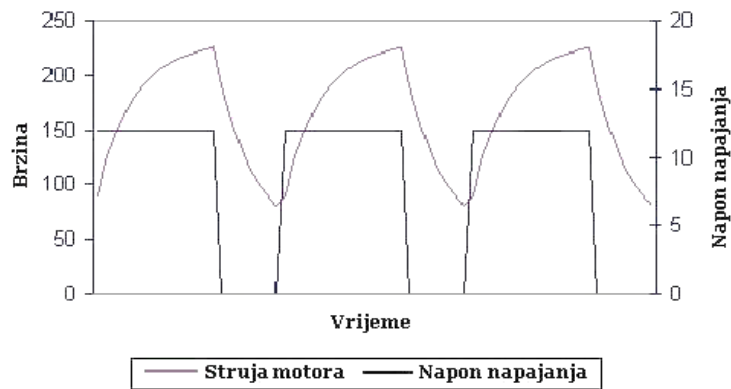
PWM je način da se od digitalnog signala napravi signal analogne vrijednosti, a koristi se za upravljanje analognim kolima pomoću digitalnih izlaza. Naime, kod ove vrste modulacije se odnos impuls/pauza moduliše tako da odgovara specificiranom nivou analognog signala. Signal dobiven pulsno-širinskom modulacijom jeste digitalni signal, koji je periodičan i predstavlja niz on/off impulsa. Taj signal poprima samo dvije vrijednosti: nultu i neku odabranu analognu vrijednost. Ovom modulacijom moguće je dobiti *kontinualni* signal proizvoljne vrijednosti.



*Slika 1. PWM signal*

Na *Slici 1* prikazana su tri različita PWM signala. Kod prvog signala trajanje visokog nivoa iznosi 10% od ukupnog trajanja perioda signala. Kod drugog i trećeg signala visoki nivoi imaju trajanje od 50% i 90% trajanja perioda. Na ovaj način je izvršeno kodiranje triju različitih analognih vrijednosti. Npr. u slučaju da visoki naponski nivo ima vrijednost 10V, onda pomoću prikazanih pulsno-širinskih modulacija dobivaju se analogni signali, čije su vrijednosti: 1V, 5V i 9V, respektivno.

Napon koji se dovodi na krajeve motora je zapravo *PWM signal*. Dovođenjem takvog prekidačkog signala na motor, DC motor „vidi“ samo srednju vrijednost tog napona. Kako struja kroz motor zavisi od trajanja visokog i niskog nivoa PWM signala, dužina trajanja tih nivoa određuje brzinu vrtnje DC motora. PWM omogućuje promjene napona koji se dovodi na krajeve motora, unatoč konstantnom naponu napajanja. Zbog zavisnosti brzine vrtnje od napona na krajevima motora ovo znači da PWM-om možemo upravljati brzinom vrtnje motora. Efekt pulsno-širinske modulacije analogan je radu prekidača. Trajanje visokog naponskog nivoa ekvivalentno je zatvorenom prekidaču, dok trajanje niskog naponskog nivoa predstavlja otvoren prekidač.



Slika 2. Vrtanja motora

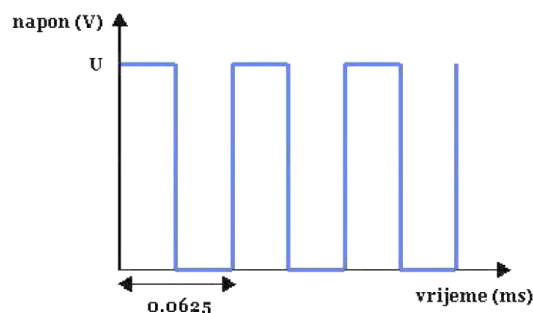
Sa Slike 2 je očito da je srednja (prosječna) brzina oko 150 [ob/min]. Ukoliko je prekapčanje napona dovoljno brzo, motor će se vrtjeti konstantnom brzinom.

## PWM frekvencija

Od izbora frekvencije pulсно-širinske modulacije ovisi trajanje visokog i niskog naponskog nivoa, a samim tim i struja koja teče kroz motor i uzrokuje njegovo obrtanje. Frekvencije između 20 Hz i 15 kHz mogu proizvesti zvučni šum pri obrtanju motora, tako da je potrebno izabrati frekvenciju koja je izvan čujnog opsega frekvencija. Svako ukapčanje i iskapčanje MOSFET-a rezultira gubitkom snage. To znači da su pri prevelikoj brzini prekapčanja povećani gubici snage. S druge strane, treba uzeti u obzir da će na visokim frekvencijama induktivitet motora izravnati valni oblik signala struje na srednju vrijednost istosmjerne struje, koja je proporcionalna zadatom PWM-u.

Kako se radi o sistemu automatskog upravljanja koji je regulisan mikrokontrolerom, važno je uzeti u obzir da odabrana frekvencija PWM-a ne smije biti takva da je njoj odgovarajući period manji od perioda uzimanja uzoraka. U tom slučaju bi trajanje jednog perioda PWM signala bilo duže od jedne periode uzorkovanja, što znači da sam sistem tokom jednog perioda uzorkovanja ne bi mogao generisati naponski PWM signal, koji bi u skladu s algoritmom upravljanja omogućio obrtanje motora zadatom brzinom. Uzimajući u obzir navedene faktore, za frekvenciju PWM signala je izabrana frekvencija 16kHz, kojoj odgovara period:

$$f_{PWM} = 16 [kHz] \quad T_{PWM} = \frac{1}{f_{PWM}} = \frac{1}{16\,000} = 0.0625 [ms]$$



Slika 3. PWM frekvencija

## Modeliranje objekta upravljanja

Za primjenu standardne teorije upravljanja potrebno je najprije odrediti matematički model sistema upravljanja s ciljem simulacije dinamičkog ponašanja sistema kako u otvorenom tako i zatvorenom kolu. U slučaju da dinamika sistema nije poznata teško je podesiti parametre regulatora, što povećava mogućnost neispravne ili nezadovoljavajuće regulacije. Stoga je neophodno izvršiti simulaciju ponašanja sistema prije njegove fizičke implementacije. Klasična metoda analize ponašanja sistema jeste njegovo predstavljanje *prenosnom funkcijom*, koja u sebi nosi informacije o dinamičkim karakteristikama sistema. Prenosna funkcija daje vezu izlaza i ulaza sistema pri nultim početnim uslovima.

Neka se posmatra objekat upravljanja, tj. istosmjerni motor s permanentnim magnetima. Ulaz motora jeste napon napajanja priključen na njegove krajeve, dok je izlaz brzina obrtanja osovine motora. Da bi se izvela prenosna funkcija istosmjernog motora s permanentnim magnetima polazi se od diferencijalne jednačine, koja opisuje zavisnost napona od struje armature motora. Ako se iskoriste relacije koje opisuju zavisnost karakterističnih veličina, nakon prelaska u *Laplace-ov* domen dobije se odnos kompleksnih likova brzine vrtnje i napona napajanja:

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_a K_t}{K_a K_t K_v + B} \frac{1}{1 + \frac{J_m + B T_a}{K_a K_t K_v + B} s + \frac{J_m T_a}{K_a K_t K_v + B} s^2} \quad (1)$$

Pri čemu su:  $\Omega$  (brzina vrtnje motora),  $K_a$  (koeficijent pojačanja armaturnog kruga),  $K_t$  (momentna konstanta motora),  $K_v$  (pojačanje motora),  $B$  (koeficijent viskoznog trenja),  $J_m$  (moment inercije motora),  $T_a$  (vremenska konstanta armaturnog kruga).

Budući da kod istosmjernih motora s permanentnim magnetima vrijedi da je armaturna vremenska konstanta znatno manja od elektromehaničke vremenske konstante motora ( $T_a \ll T_m$ ), tada je opravdano zanemariti djelovanje armaturne vremenske konstante. Također, budući da je koeficijent viskoznog mehaničkog trenja  $B$  redovno mnogo manji od koeficijenta viskoznog električnog trenja, tada vrijedi:

$$K_a K_t K_v + \frac{K_t K_v}{R_a} \gg B \quad \Rightarrow \quad T_m = \frac{J_m}{K_a K_t K_v} \quad (2)$$

Na osnovu relacije (2) slijedi da se u izrazu (1) konstanta  $B$  može zanemariti, pa prenosna funkcija poprima slijedeći oblik:

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{1 + T_m s} \quad K_m = \frac{1}{K_v}, \quad T_m = \frac{1}{K_a K_t K_v} \quad (3)$$

Parametre  $T_m$  i  $K_m$  računaju se na osnovu karakteristika datih u dokumentaciji korištenog motora BCI 52 proizvođača *Ebmpapst2*.

- **Naponsko pojačanje:**

$$K_v = \frac{5.6}{1000} \left[ \frac{V}{ob/min} \right] = \frac{5.6}{1000 \frac{\pi}{30}} \left[ \frac{V}{rad/s} \right] = 0.053476 \left[ \frac{V}{rad/s} \right]$$

- **Pojačanje:**

$$K_m = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0.053476} = 18.69997 \left[ \frac{rad/s}{V} \right]$$

- **Nominalna brzina vrtnje:**

$$\Omega_n = \frac{n_n \pi}{30} = \frac{3600 \pi}{30} = 376.991 \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

- **Nominalna brzina vrtnje idealnog praznog hoda:**

$$\Omega_{on} = \frac{n_o \pi}{30} = \frac{4200 \pi}{30} = 439.822 \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

- **Ukupni otpor armaturnog kruga:**

$$R_a = \frac{K_v \Omega_{on} - K_v \Omega_n}{I_{an}} = \frac{K_v (\Omega_{on} - \Omega_n)}{I_{an}} = \frac{0.053476 (439.822 - 376.991)}{2.2} = 1.5272 \text{ } [\Omega]$$

- **Koeficijent pojačanja armaturnog kruga:**

$$K_a = \frac{1}{R_a} = \frac{1}{1.2572} = 0.6547 \left[ \frac{A}{V} \right]$$

- **Momentna konstanta motora:**

$$K_t = \frac{M_m}{I_a} = \frac{0.1}{2.2} = 0.04545 \left[ \frac{Nm}{A} \right]$$

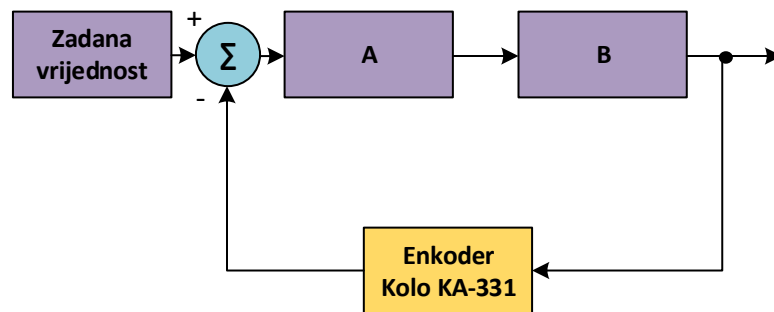
- **Vremenska konstanta:**

$$T_m = \frac{J_m}{K_a K_t K_v} = \frac{230 \cdot 10^{-6}}{0.04545 \cdot 0.6547 \cdot 0.053476} = 0.14452 \text{ } [s]$$

- **Prenosna funkcija motora:**

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{1 + T_m s} = \frac{18.69997}{1 + 0.144528 \cdot s}$$

Dobivena prenosna funkcija je temelj za odabir odgovarajućeg vremena uzorkovanja, kao i za podešenje parametara implementiranog PI regulatora.



*Slika 4. Model istosmjernog motora*

Opis slike:

A:  $G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

B:  $G_m = \frac{18.7}{1 + 0.1445s}$

## Period odabiranja

Objekat upravljanja analiziranog sistema jeste kontinualan, no sam proces upravljanja je pod kontrolom mikrokontrolera. Kako mikrokontroler obrađuje digitalne informacije, to je potrebno izvršiti diskretizaciju ključnih veličina i procesa sistema. Tako je korištenjem ugrađenog A/D konvertora u mikrokontroleru izvršena diskretizacija kako zadate tako i trenutne brzine vrtnje motora.

Tako dobivene informacije koristi implementirani diskretni PI regulator, koji generiše odabirak upravljačke veličine kako bi sistem doveo u željeno stanje. Može se divjeti da je sam proces diskretizacije jedan od ključnih aspekata funkcionisanja sistema i upravo zbog toga treba voditi računa o korektnom izboru perioda odabiranja. Da bi se vjerno očuvale informacije o ponašanju sistema i obezbijedila stabilnost sistema u zatvorenom, period odabiranja odabrat će se prema poznatoj teoremi o uzimanju uzoraka.

S njom je određeno maksimalno dozvoljeno vrijeme između uzimanja uzoraka ili minimalna frekvencija uzimanja uzoraka. Prema teoremi odabiranja povorka odabiraka će vjerno čuvati informaciju koju nosi kontinualni signal ukoliko je kružna frekvencija odabiranja najmanje dvostruko veća od granične frekvencije frekvencijskog spektra kontinualnog signala, tj. ukoliko je ispunjen Nyquistov uslov:

$$\omega_o \geq 2 \omega_c \rightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 2 \omega_c \rightarrow T \leq \frac{\pi}{\omega_c} \quad (4)$$

Pri čemu je:

$\omega_o$  [rad/ s] - kružna frekvencija uzorkovanja

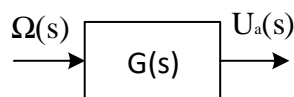
$\omega_c$  [rad/ s] - granična frekvencija spektra kontinualnog signala

$T$  [s] - period odabiranja

Za korektan odabir vremena uzorkovanja iskoristit će se prenosna funkcija motora:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{1 + T_m s} = \frac{18.69997}{1 + 0.144528 \cdot s}$$

Za sistem na *Slici 4* može se posmatrati granični slučaj kada u kompleksnoj promjenljivoj  $s = \sigma + j\omega$ ,  $\sigma$  teži nuli ( $\sigma \rightarrow 0$ ).



*Slika 5. Model istosmjernog motora (Prenosna funkcija)*

$$\Omega(s) = G(s) \cdot U_a(s) = \left|_{\substack{s = \sigma + j\omega \\ \sigma \rightarrow 0}} \right| \Rightarrow \Omega(j\omega) = G(j\omega) \cdot U_a(j\omega) \quad (5)$$

Pod određenim uslovima relacija (5) predstavlja Fourierovu transformaciju kontinualne funkcije brzine vrtnje  $\omega(t)$ . Sada se može pisati:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{K_m}{1 + T_m s} = \frac{18,69997}{1 + 0,144528 \cdot j\omega} \quad (6)$$

Kako je  $G(j\omega)$  kompleksna funkcija, može se rastaviti na realni i imaginarni dio kao:

$$G(j\omega) = \frac{18,69997}{1 + 0,144528 \cdot j\omega} \cdot \frac{1 - 0,144528 \cdot j\omega}{1 - 0,144528 \cdot j\omega} = \frac{18,69997 - 2,70266 j\omega}{1 + 0,02088\omega^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{18,69997}{1 + 0,02088\omega^2} - j \frac{2,70266 \omega}{1 + 0,02088\omega^2} \quad (7)$$

Amplitudni spektar određen je relacijom:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{Re^2\{G(j\omega)\} + Im^2\{G(j\omega)\}} \quad (8)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{18,69997}{1 + 0,02088\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2,70266 \omega}{1 + 0,02088\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7,30437\omega^2 + 349,69}{(1 + 0,02088\omega^2)^2}} \quad (9)$$

Dobiveni spektar može se nacrtati u kompleksnoj  $\omega$ -ravni, koristeći programski paket MATLAB. Sljedeći program realizuje traženu funkcionalnost:

**(P1)**

```
% Crtanje amplitudnog spektra
```

```
G=tf(18.6997, [0.144528 1])
```

```
w=-150:0.001:150;
```

```
% prenosna funkcija motora
```

```
% crtanje spektra za opseg
```

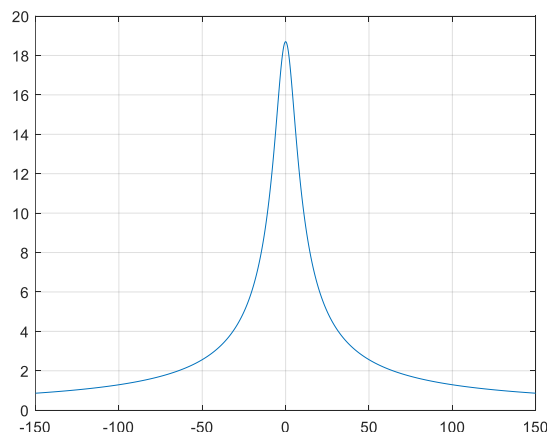
```
% ucestanosti [-150, +150][rad/s]
```

```
y=(sqrt(349.69+7.30437*w.^2))./(1+0.02088*w.^2);
```

```
plot(w,y)
```

```
grid on
```

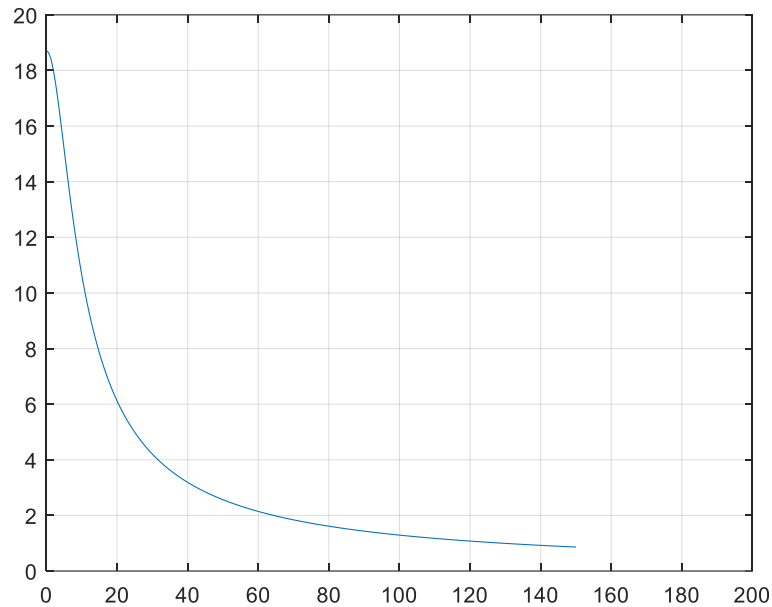
Dobiveni spektar prikazan je na *Slici 6*:



*Slika 6. Amplitudni spektar*



Jasno je da negativne učestanosti za realni sistem nemaju smisla. Amplitudni spektar za pozitivne učestanosti prikazan je na *Slici 7*.



*Slika 7. Amplitudni spektar za pozitivni dio*

Sa datih grafika može se vidjeti da se spektar može smatrati frekventno ograničenim, jer teži nuli kada  $\omega \rightarrow \infty$ . Graničnu frekvenciju odabire se s grafika. Očito, može se uzeti da ona iznosi  $\omega_c = 150 \text{ [rad/s]}$ .

Na osnovu teoreme o uzimanju uzoraka, nalazi se period odabiranja kao:

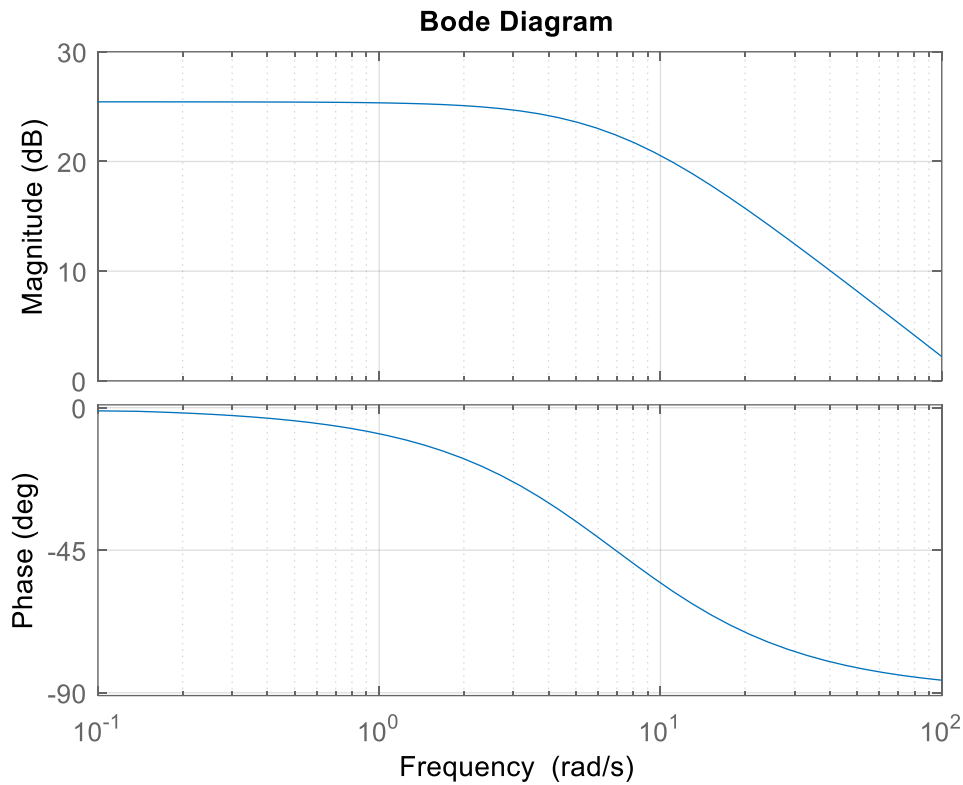
$$\omega_c = 150 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad \Rightarrow \quad \omega_o \geq 2\omega_c = 2 \cdot 150 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\text{omin}} = 300 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{150} \quad \Rightarrow \quad T \leq 0.0209 \text{ [s]} = 20.943 \text{ [ms]} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{max}} = 20.943 \text{ [ms]}$$

Treba napomenuti da se granična frekvencija frekventnog spektra mogla izabrati i na osnovu *Bodeovih dijagrama*, odnosno *amplitudno-frekventne* i *fazno-frekventne* karakteristike prikazane na *Slici 8*.

Iz ovoga slijedi da se ne smije izabrati veći period odabiranja od  $T_{max}=20.943$  [ms]. Za vrijeme uzorkovanja odabran je period  $T=15$  [ms], jer iz navedenog razmatranja slijedi da ova vrijednost zadovoljava postavljene uslove.

```
G=tf(18.6997, [0.144528 1])           % prenosna funkcija motora
bode(G)
grid on
```

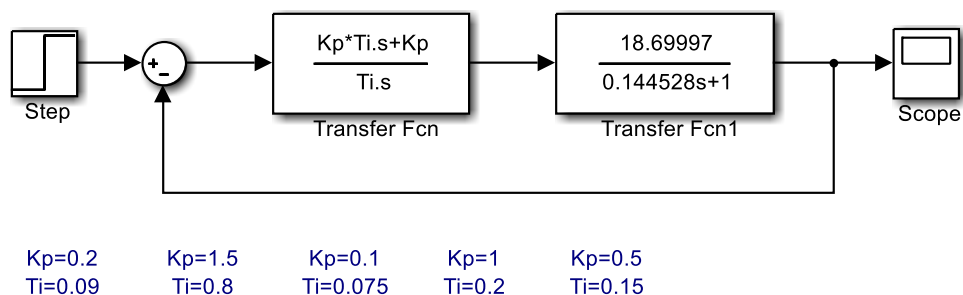


*Slika 9. Bodeov dijagram (amplitudno-frekventna i fazno-frekventna karakteristika)*

Na Slici 9 prikazan je *Bodeov* dijagram, odnosno amplitudno-frekventna i fazno-frekventna karakteristika funkcije (6).

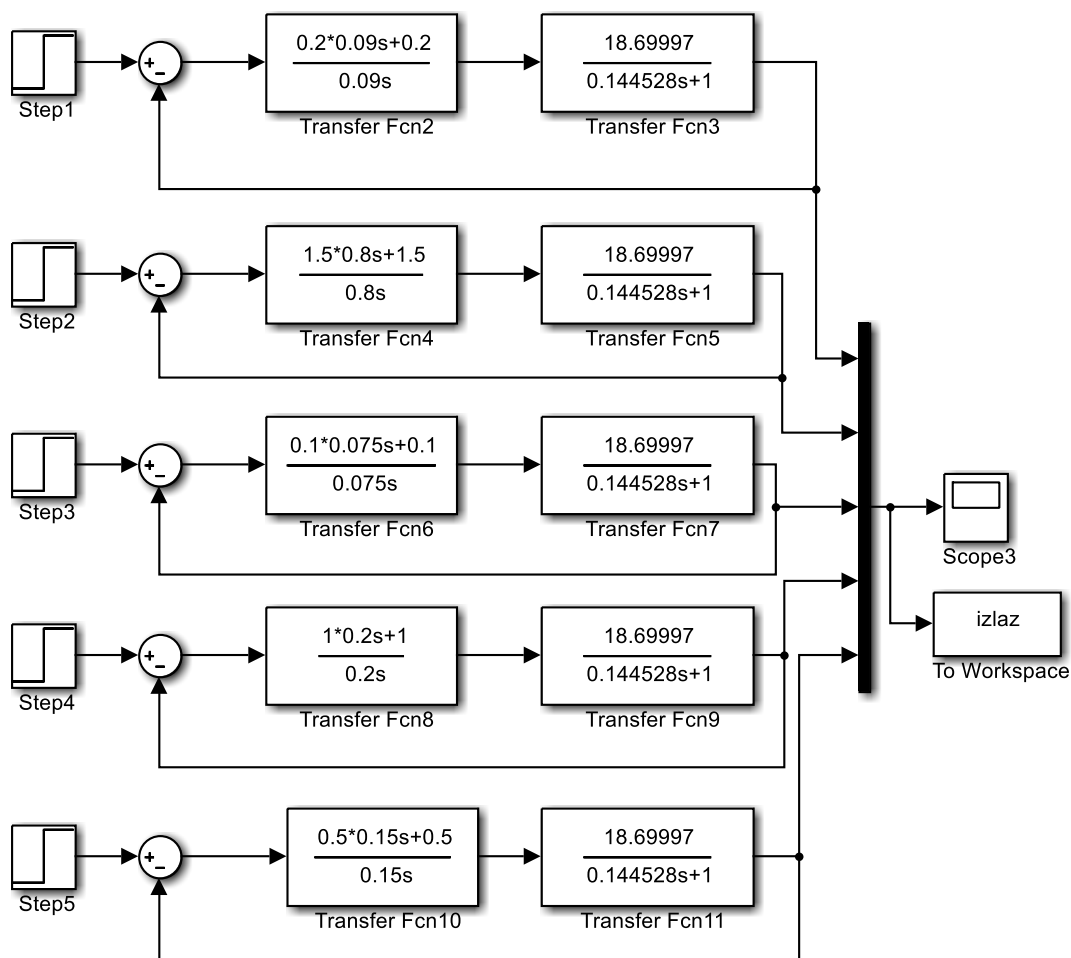
## Podešavanje parametara PI regulatora

U ovom stepenu analize, korišten je programski paket MATLAB i Simulink, radi simulacije dinamičkog ponašanja sistema. Najprije je napravljen Simulink model sistema kao na *Slici 10*.

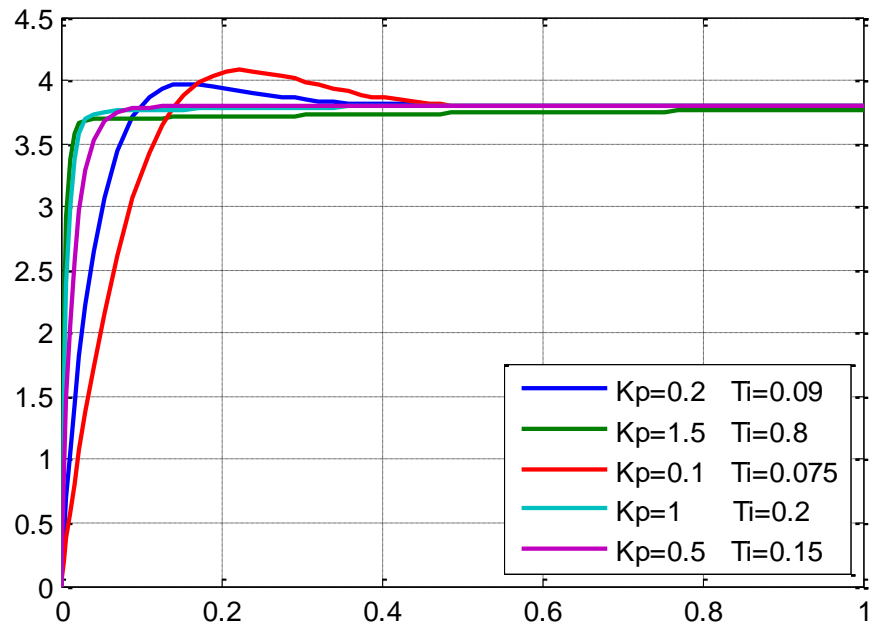


*Slika 10. Simulink model*

Na ulaz sistema je dovedena *step* funkcija amplitude 3.8. Ta vrijednost odgovara naponu za koji se dobiva maksimalna brzina vrtnje motora. Promjenom vrijednosti parametara  $K_p$  i  $T_i$  trebalo je odrediti podešavanje parametara PI regulatora da bi se dobio odziv sa najboljim karakteristikama.



*Slika 11. Simulink model (sveukupni)*



*Slika 12. Odzivi sistema na različite vrijednosti parametara regulatora*

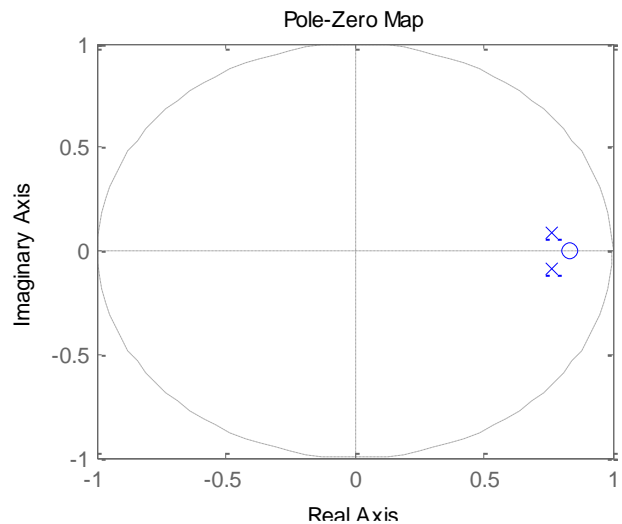
Sistem ima zadovoljavajući odziv za više različitih vrijednosti parametara  $K_p$  i  $T_i$ . Pri tome odziv treba da je brz, da nema greške u stacionarnom stanju, te da je vrijednost prvog preskoka što manja.

Vidi se da je pri povećanju  $I$ -komponente, odziv sistema sporiji, dok za premale vrijednosti  $T_i$  sistem ima prevelik prvi preskok. Na osnovu datih grafika su odabrani parametri  $K_p=1$  i  $T_i=0.2$ .

## STABILNOST SISTEMA

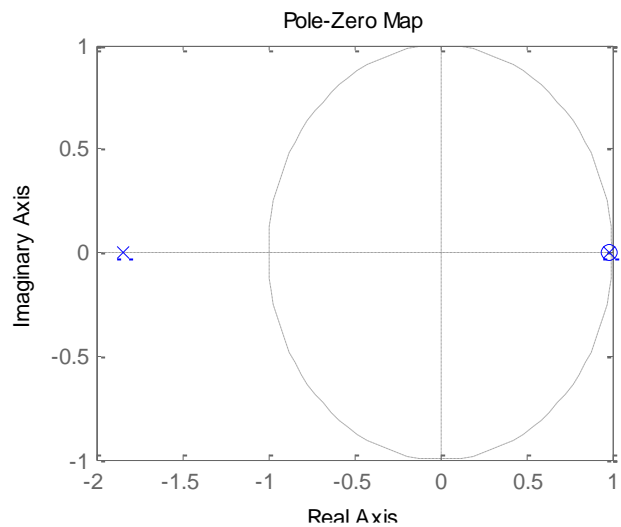
Stabilnost sistema je potrebno analizirati u diskretnom vremenu s obzirom da je *PI* regulator implementiran kao digitalni procesor. Diskretizacija sistema može se izvršiti u MATLAB-u, koristeći kôd:

```
% Ispitivanje stabilnosti  
  
Kp=0.2; Ti=0.09;  
  
G=tf([Kp*Ti Kp],[Ti 0]);  
Gz=c2d(G,0.015);  
Gob=tf([18.69997],[0.144528 1]);  
Gobz=c2d(Gob,0.015);  
Gek=feedback(Gz*Gobz,1);  
pzmap(Gek);
```



*Slika 13. Stabilnost sistema ( $K_p=0.2$ ;  $T_i=0.09$ )*

```
% Ispitivanje stabilnosti  
  
Kp=1.5; Ti=0.8;  
  
G=tf([Kp*Ti Kp],[Ti 0]);  
Gz=c2d(G,0.015);  
Gob=tf([18.69997],[0.144528 1]);  
Gobz=c2d(Gob,0.015);  
Gek=feedback(Gz*Gobz,1);  
pzmap(Gek);
```

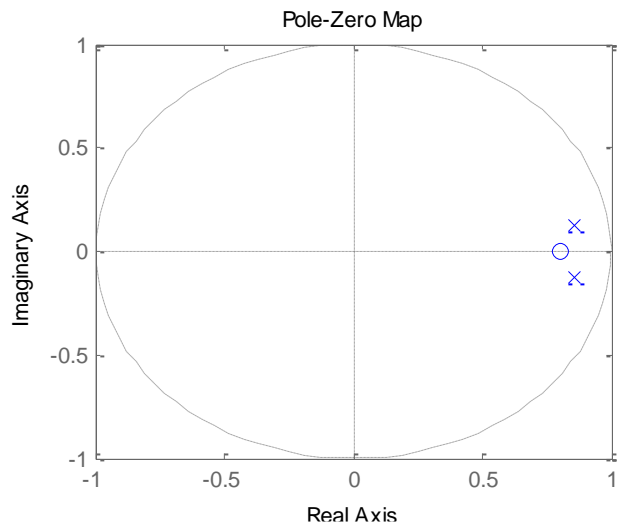


*Slika 14. Stabilnost sistema ( $K_p=1.5$ ;  $T_i=0.8$ )*

```
% Ispitivanje stabilnosti
```

```
Kp=0.1; Ti=0.075;
```

```
G=tf([Kp*Ti Kp],[Ti 0]);  
Gz=c2d(G,0.015);  
Gob=tf([18.69997],[0.144528 1]);  
Gobz=c2d(Gob,0.015);  
Gek=feedback(Gz*Gobz,1);  
pzmap(Gek);
```

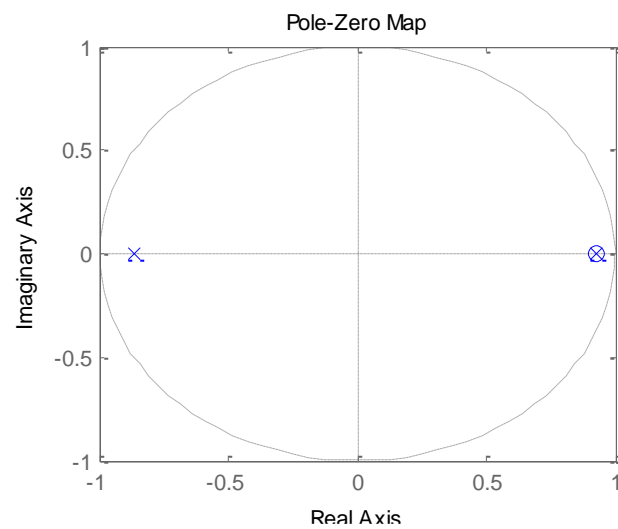


**Slika 15.** Stabilnost sistema ( $K_p=0.1$ ;  $T_i=0.075$ )

```
% Ispitivanje stabilnosti
```

```
Kp=1; Ti=0.2;
```

```
G=tf([Kp*Ti Kp],[Ti 0]);  
Gz=c2d(G,0.015);  
Gob=tf([18.69997],[0.144528 1]);  
Gobz=c2d(Gob,0.015);  
Gek=feedback(Gz*Gobz,1);  
pzmap(Gek);
```

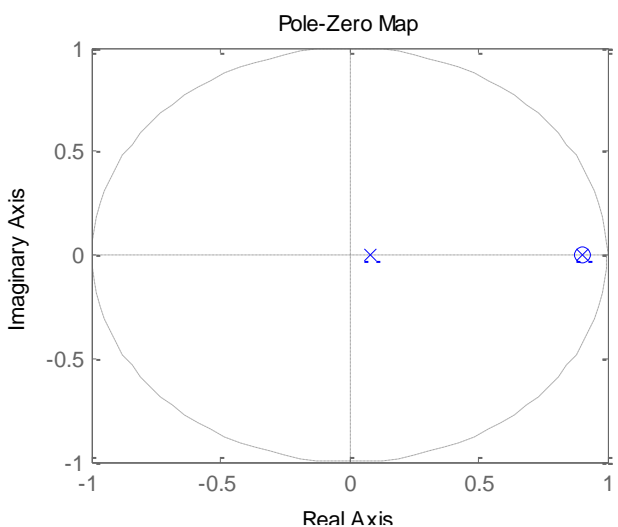


**Slika 16.** Stabilnost sistema ( $K_p=1$ ;  $T_i=0.2$ )

```
% Ispitivanje stabilnosti
```

```
Kp=0.5; Ti=0.15;
```

```
G=tf([Kp*Ti Kp],[Ti 0]);  
Gz=c2d(G,0.015);  
Gob=tf([18.69997],[0.144528 1]);  
Gobz=c2d(Gob,0.015);  
Gek=feedback(Gz*Gobz,1);  
pzmap(Gek);
```



**Slika 17.** Stabilnost sistema ( $K_p=0.5$ ;  $T_i=0.15$ )

Ovim je dobiven diskretiziran sistem, i ekvivalentna prenosna funkcija sistema u zatvorenom. Pozivom funkcije *pzmap* nacrtani su polovi i nule sistema u kompleksnoj  $z$ -ravni.

*Slika 16* predstavlja jedinični krug u kompleksnoj  $z$ -ravni. Vidi se da sistem ima dva pola i jednu nulu. Pri tome se oba pola nalaze unutar jediničnog kruga, što znači da je analizirani sistem za odabrane parametre regulatora  $Kp=1$  i  $Ti=0.2$  stabilan.

Pokazalo se da je već za vrijednost  $Kp=1.5$  sistem nestabilan (*Slika 14*). Slika pokazuje da se jedan pol impulsne prenosne funkcije sistema nalazi van jediničnog kruga, što znači da pri većim pojačanjima  $Kp$  od odabranog, sistem postaje nestabilan. Iz sprovedene analize slijedi da su parametri  $Kp=1$  i  $Ti=0.2$  sa stanovišta stabilnosti dobro odabrani.