제 9 장 단일 모집단의 가설검정

제1절 가설검정의 의의

가설(Hypothesis)은 실증적인 증명 이전에 잠정적으로 세우는 모집단 특성에 대한 진술이며, 이것은 후에 경험적으로 또는 논리적으로 검정되는 조건 또는 명제이다.

가설검정(Hypothesis Test)이란 모수에 대하여 특정한 가설을 세우고, 표본을 선택하여 통계량을 계산한 다음, 이를 기초로 하여 모수에 대한 가설의 진위를 판단하는 방법이다.

귀무가설(Null Hypothesis)와 대립(연구)가설(Alternative Hypothesis)

귀무가설(null hypothesis): 직접 검정의 대상이 되는 가설(H_0)

대립(연구)가설(alternative hypothesis): H_0가 기각될 때 받아들여지는 가설(H_1, H_A)

H_0의 기본형식

H_0: $\theta = \theta_0$, θ: 관심의 대상이 되는 parameter(모수) (예: μ ... 모집단 평균)

θ_0: 관심의 대상이 되는 parameter의 값 (예: 16 ... μ의 값)

(1) H_A: $\theta \neq \theta_0$ 가능한 H_0의 형식: H_0: $\theta = \theta_0$

(2) H_A: $\theta > \theta_0$ 가능한 H_0의 형식: H_0: $\theta = \theta_0$ 또는 H_0: $\theta \leq \theta_0$

(3) H_A: $\theta < \theta_0$ 가능한 H_0의 형식: H_0: $\theta = \theta_0$ 또는 H_0: $\theta \geq \theta_0$

H_0의 특징: 등호(=, ≤, ≥)를 반드시 포함한다. H_A의 특징: 등호(=,≤,≥)를 절대 포함하지 않는다.

제2절 가설검정의 오류

실제 상태 / 의사결정	진실한 H_0	거짓된 H_0
H_0 채택	올바른 결정	제2종 오류; β 오류
H_0 기각	제1종 오류; α 오류	올바른 결정

P(제1종 오류) = P(Reject H_0 | H_0 is true) = α (α = significance level; 유의수준)

P(제2종 오류) = P(Accept H_0 | H_0 is false) = β (1-β = statistical power; 통계적 검정력)

연습문제 1.

문제 1. 제 1종 오류란?

문제 2. P(제1종 오류)를 조건부 확률로 표현하시오.

문제 3. α의 의미는?

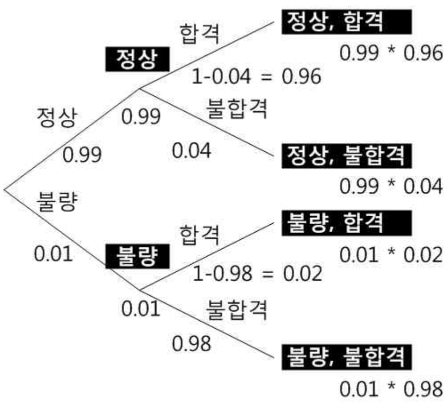
예제

문제 1. 어떤 피의자가 무죄임에도 유죄 판결을 받았다. 판사는 어떤 오류를 범한 것인가? Ans. Type I Error

문제 2. H_0는 "제품이 정상이다."라고 하자. 아래 Tree에서 α와 β값은?

Ans. α = P(불합격 | 정상) = 0.04, β = P(합격 | 불량) = 0.02

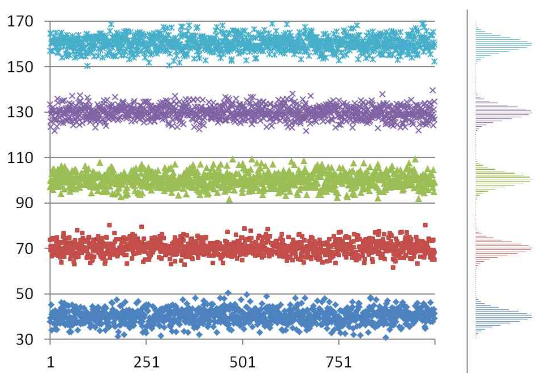
문제 3. 아래 Tree에서 "통계적 검정력"은? Ans. 1-β = 0.98



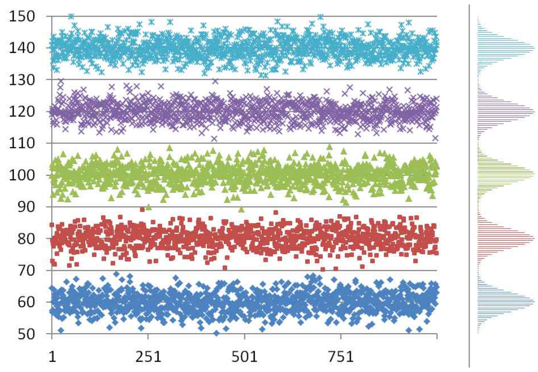
가설검정의 기초

5개교의 학생 성적을 검토 중이다. 5개교 모두 학생들의 성적은 정규분포를 따르고 표준편차는 6이다. 학생 4명의 평균들을 분석 중이다. (n=4이므로, 성적 평균의 표준편차는 $6/\sqrt{4}$ = 3이다.)

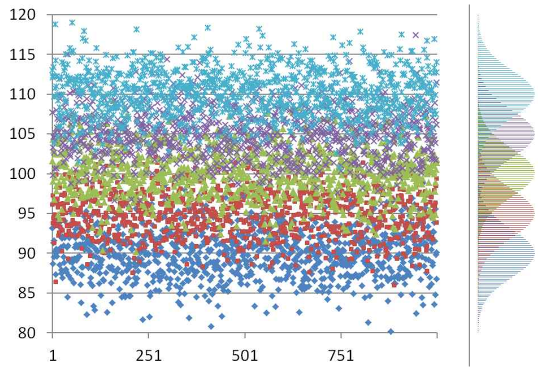
Case 1. 고교 A, B, C, D 및 E의 성적 평균은 40, 70, 100, 130, 160이다. 어떤 학교 4명의 성적 평균이 105라 하자. 이 학생들은 C고교생이라 할 수 있는가?



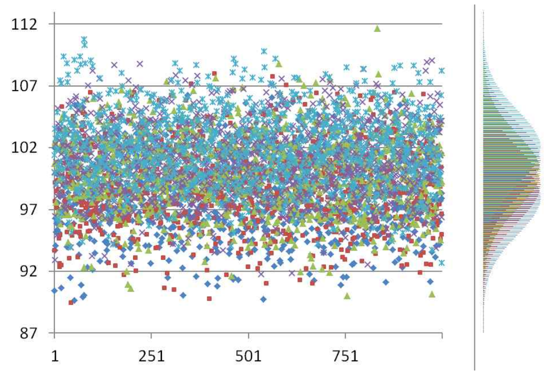
Case 2. 고교 A, B, C, D 및 E의 성적 평균은 60, 80, 100, 120, 140이다. 어떤 학교 4명의 성적 평균이 105라 하자. 이 학생들은 C고교생이라 할 수 있는가?



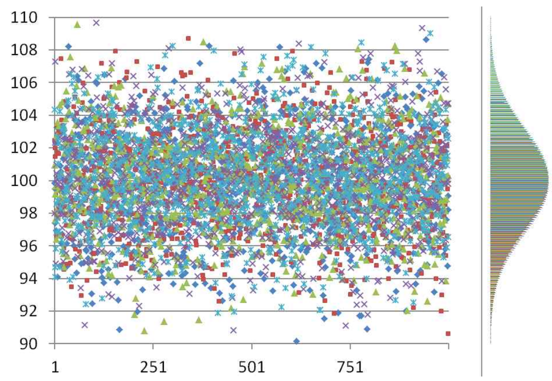
Case 3. 고교 A, B, C, D 및 E의 성적 평균은 90, 95, 100, 105, 110이다. 어떤 학교 4명의 성적 평균이 105라 하자. 이 학생들은 C고교생이라 할 수 있는가?



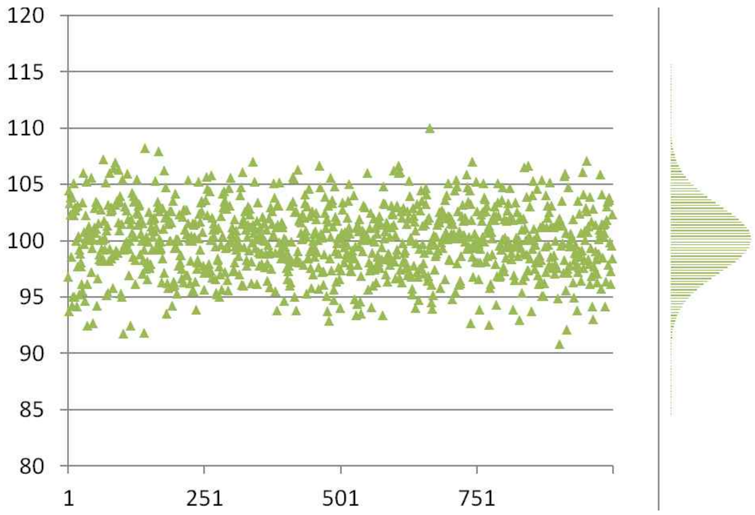
Case 4. 고교 A, B, C, D 및 E의 성적 평균은 98, 99, 100, 101, 102이다. 어떤 학교 4명의 성적 평균이 105라 하자. 이 학생들은 C고교생이라 할 수 있는가?



Case 5. 고교 A, B, C, D 및 E의 성적 평균은 99.8, 99.9, 100, 100.1, 100.2이다. 어떤 학교 4명의 성적 평균이 105라 하자. 이 학생들은 C고교생이라 할 수 있는가?



결론: 분포도만 가지고 특정 표본이 어느 모집단에 속해 있다고 단정할 수 없다.
→ 가설검정은 추정된 모수가 사실일 확률을 구하는 것이 아니다.



Case 6. 4명의 성적 평균이 120이다. 4명이 C고교생이 아니라고 단정할 충분한 통계적 근거가 있는가?

Case 7. 4명의 성적 평균이 105이다. 4명이 C고교생이 아니라고 단정할 충분한 통계적 근거가 있는가?

Case 8. 4명의 성적 평균이 101이다. 4명이 C고교생이 아니라고 단정할 충분한 통계적 근거가 있는가?

Case 9. 4명의 성적 평균이 100이다. 4명이 C고교생이 아니라고 단정할 충분한 통계적 근거가 있는가?

Case 10. 4명의 성적 평균이 98이다. 4명이 C고교생이 아니라고 단정할 충분한 통계적 근거가 있는가?

Case 11. 4명의 성적 평균이 58이다. 4명이 C고교생이 아니라고 단정할 충분한 통계적 근거가 있는가?

결론: 가설검정은 추정된 모수가 사실이 아닐 확률에 관한 것이다. (예: 4명이 속한 고교의 평균이 100이 아닐 확률에 관한 것이다.)

제3절 가설검정의 종류

제4절 가설검정의 순서

① H_0와 H_A의 설정

② 유의수준(α)과 임계치 결정

③ H_0의 채택영역과 기각영역의 결정

④ 통계량의 계산

⑤ 통계량과 임계치의 비교 및 결론

제5절 모평균의 가설검정

가설검정이란

① H_0가 사실이라는 가정에서 출발한다.

② H_0가 사실이라면 통계량이 얼마나 예외적인 가를 판단한다.

③ 통계량이 매우 예외적이라면 H_0가 사실이 아니라고 판정한다.

연습문제 2. 모집단 크기는 10,000이라 하자.

문제 1. 모집단 평균 μ를 구하는 방법은?

문제 2. 표본의 크기는 100이라 하자. 이 표본으로부터 μ를 구할 수 있는가?

문제 3. 모평균 가설검정이란 모평균을 구하는 것이다.

문제 4. 가설 판정의 오류 확률을 없애는 방법은?

상황: 통조림 기준무게는 400g, 100개를 표본 조사한 결과 $\overline{X}$ = 395g. 통조림 무게는 정규분포를 따르고 표준편차는 50g이라 알려져 있다. α = 0.10 통조림 무게가 400g이 아니라 할 수 있는 지를 검정하시오.

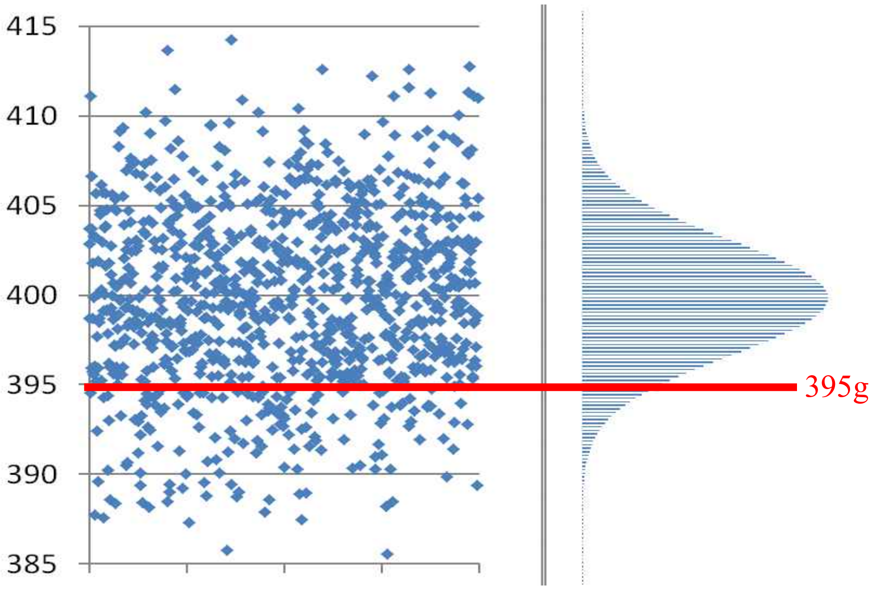
1. 통조림 기준무게와 표본의 평균

표본의 평균이 395g이란 기준 무게가 400g이 아님을 의미하는가?

2. 통계적으로 검증하기 위해 기준 무게 400g일 때 추출될 수 있는 $\overline{X}$의 분포를 확인하면

$X \sim N(400,\ 50^2)$ → n = 4이면 $\overline{X} \sim N(400,\ \frac{50^2}{100}=5^2)$

3. 기준무게 400g이 사실일 때 추출될 수 있는 $\overline{X}$의 분포에서 특정한 값 395g의 위치를 확인하면



→ 기준무게가 400g일 때 $\overline{X}$ = 395g은 아주 예외적인 값이 아님

$$\overline{X} = 395 \rightarrow z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{395-400}{50/\sqrt{100}} = -1$$

4. 기준무게가 400g일 때 나타날 수 있는 $\overline{X}$ 중 400g으로부터 가장 동떨어진 10% 값들을 찾아낸다면

$\overline{X}$ 분포는 평균을 중심으로 좌우대칭이므로 상위 5%에 해당하는 $\overline{X}$와 하위 5%에 해당하는 $\overline{X}$값은 $\mu + z_{0.05}\sigma_{\overline{X}}$ = 400 + 1.645(5) = 408.225와 $\mu - z_{0.05}\sigma_{\overline{X}}$ = 400 - 1.645(5) = 391.775이다.

$$\overline{X} = 408.225 \rightarrow z_{0.05} = 1.645,\quad \overline{X} = 391.775 \rightarrow -z_{0.05} = -1.645$$

$\overline{X}$ 중 90%에 해당하는 값들은 400g ± 8.225g 이내에 존재한다.

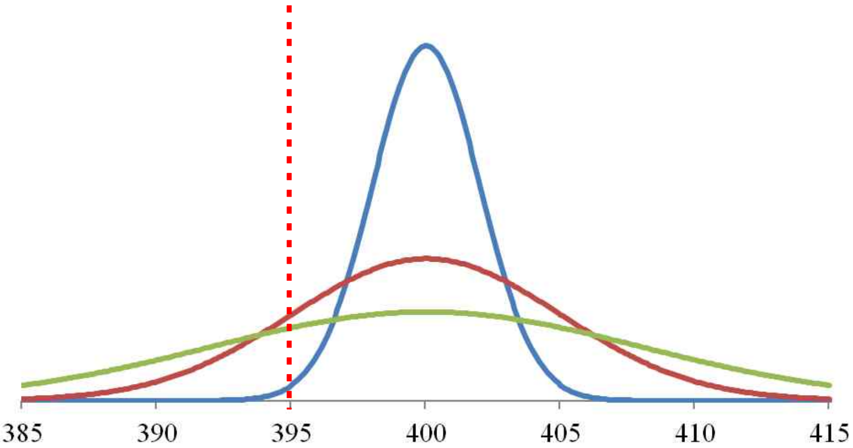
5. 기준무게가 400g인 모집단에서 추출되었을 때, Type I Error, α를 10%로 설정한다고 하자. 이때 판정하는 의사결정기준은?

$\overline{X}$가 하한값보다 작거나 $\overline{X}$가 상한값보다 크면, 기준무게가 400g인 모집단에서 추출된 표본이 아니라고 판정

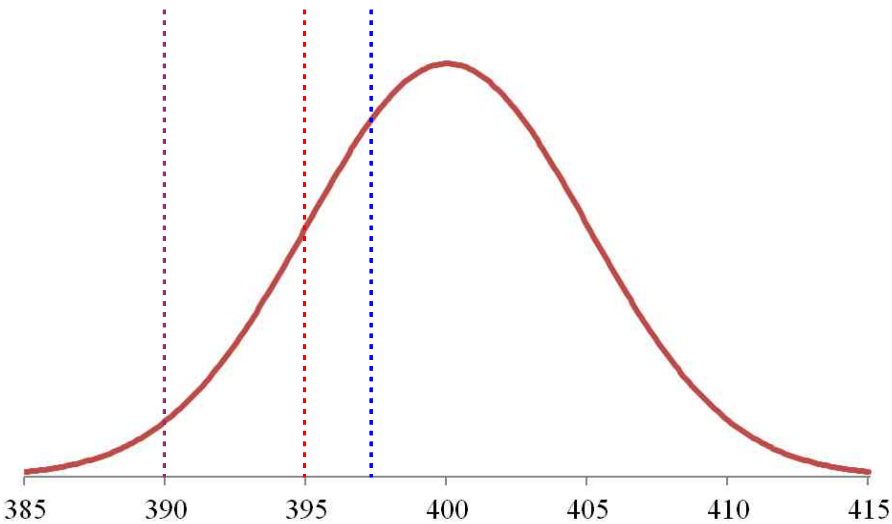
$$z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ 또는 } z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\frac{\alpha}{2}} \text{이면 } H_0 \text{ 기각}$$

6. 이렇게 판정할 때, 사실임에도 사실이 아니라고 오류를 범할 확률은? α

7. 만약 σ가 50이 아니라 20였다면, 50이 아니라 80이었다면?



8. 만약 $\overline{X}$가 395이 아니라 390 또는 397.5였다면?



1. 모분산을 알고 있는 경우

(1) 가설검정의 조건: $\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$

... X가 정규분포를 따르거나 또는 n이 충분히 큰 경우(중심극한의 정리)

1-1. 양측검정(Two-tailed Test)

상황: 통조림 기준무게는 400g, 100개를 표본 조사한 결과 $\overline{X}$ = 395g. 통조림 무게는 정규분포를 따르고 표준편차는 50g이라 알려져 있다. α = 0.05 통조림 무게가 400g이 아니라 할 수 있는 지를 검정하시오.

(1) H_0: μ = 400, H_A: $\mu \neq$ 400 (→ 양측 검정)

(2) Test Statistic: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

($\overline{X}$가 정규분포를 따르고 σ가 알려져 있으므로 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 사용 가능)

[설명] Test Statistic에서 μ의 값은 H_0에서 설정한 값을 사용하고, $\overline{X}$는 표본에서 구한 값을 사용한다.

(3) For α = 0.05,

Rejection Region: $Z > Z_{0.025}$ = 1.96 또는 $Z <$ -$Z_{0.025}$ = -1.96

(양측검정이므로 $z_{\frac{\alpha}{2}}$와 -$z_{\frac{\alpha}{2}}$가 사용된다.)

[설명] H_0가 사실일 때, -$Z_{0.025}$보다 작거나 또는 $Z_{0.025}$보다 큰 Z값이 나올 확률은 α이다.

(4) Value of the Test Statistic:

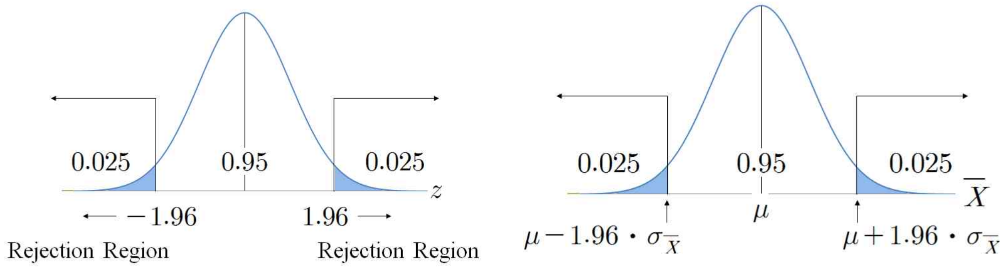
$$Z = \frac{395 - 400}{50 / \sqrt{100}} = -1.0$$

[설명] 여기서, $\mu = 400$은 바로 H_0이다. 즉, $\overline{X}$가 H_0에서 설정한 μ로부터 얼마나 떨어져 있는 가를 측정한다.

(5) Conclusion:

H_0를 기각하는데 실패. 통조림의 무게가 400g가 아니라고 부인할 충분한 근거는 없다.

[설명] H_0 (μ = 400)이 사실일 때 $\overline{X}$ = 395는 매우 예외적인 값이 아니다.



1-2. 단측검정(One-tailed Test)

A. 왼쪽꼬리 검정

상황: 통조림 기준무게는 400g, 100개를 표본 조사한 결과 $\overline{X}$ = 390g. 통조림 무게는 정규분포를 따르고 표준편차는 50g이라 알려져 있다. α = 0.05 통조림 무게가 400g에 미달하는 지를 검정하시오.

(1) H_0: μ = 400 ($\mu \geq$ 400도 무방), H_A: μ < 400 (→ 왼쪽꼬리 검정)

(2) Test Statistic: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

($\overline{X}$가 정규분포를 따르고 σ가 알려져 있으므로 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 사용 가능)

(3) For α = 0.05,

Rejection Region: Z < -$Z_{0.05}$ = -1.645

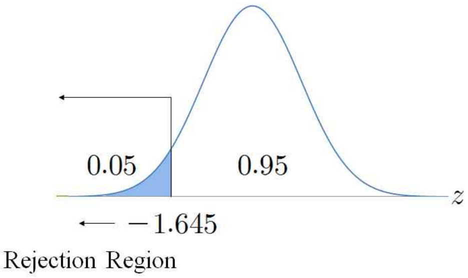
(주의: 양측검정에서는 $z_{\frac{\alpha}{2}}$와 -$z_{\frac{\alpha}{2}}$이 사용되지만, 단측에서는 z_α 또는 -z_α가 사용된다.)

(4) Value of the Test Statistic:

$Z = \dfrac{390 - 400}{50 / \sqrt{100}}$ = -2.0

(5) Conclusion:

H_0를 기각. 통조림의 무게가 400g 미만이라고 단정할 충분한 근거가 있다.



B. 오른쪽꼬리 검정

상황: 기존 진통제는 평균 10시간 진통 효과. 기존 진통제에 비해 신약 성능이 나은 지를 조사하기 위해 50명 환자에게 실험; 평균 12시간, 표준편차 6시간. α = 0.01

(Note: n이 충분히 크므로 $\overline{X}$는 정규분포를 따른다.)

(1) H_0: μ = 10 (μ $\le$ 10도 무방), H_A: μ > 10 (→ 오른쪽꼬리 검정)

(2) Test Statistic: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

($\overline{X}$가 정규분포를 따르고 σ가 알려져 있으므로 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 사용 가능)

(3) For α = 0.01,

Rejection Region: $Z > Z_{0.01}$ = 2.33

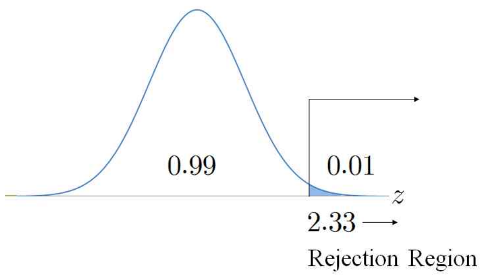
(주의: 양측검정에서는 $z_{\frac{\alpha}{2}}$와 -$z_{\frac{\alpha}{2}}$이 사용되지만, 단측에서는 z_α 또는 -z_α가 사용된다.)

(4) Value of the Test Statistic:

$$Z = \frac{12 - 10}{6 / \sqrt{50}} = 2.36$$

(5) Conclusion:

H_0를 기각. 기존 진통제보다 신약 효과가 우수하다고 할 수 있다.



1-3. 양(단)측검정과 기각영역

양측: $H_A: \theta \neq \theta_0 \rightarrow$ $Z > Z_{\alpha/2}$ 또는 $Z < -Z_{\alpha/2}$

왼쪽: $H_A: \theta < \theta_0 \rightarrow$ $Z < -Z_{\alpha}$

오른쪽: $H_A: \theta > \theta_0 \rightarrow$ $Z > Z_{\alpha}$

1-4. 신뢰구간(Confidence Interval)과 양측검정(Two-tailed Test)

근본적으로 Confidence Interval과 Two-tailed Test는 동일한 구성을 지니고 있다.

만약 신뢰구간이 H_0에서 설정한 μ의 값을 포함하면 H_0의 기각에 실패하게 되며, 포함하지 않는 경우 H_0를 기각할 수 있다.

동일한 α를 사용한다면

① 신뢰구간에 μ가 포함되면, 양측 가설검정에서 H_0는 기각되지 않는다.

  신뢰구간에 μ가 포함되지 않으면, 양측 가설검정에서 H_0는 기각된다.

② 양측 가설검정에서 H_0는 기각되지 않으면, 신뢰구간에 μ가 포함된다.

  양측 가설검정에서 H_0는 기각되면, 신뢰구간에 μ가 포함되지 않는다.

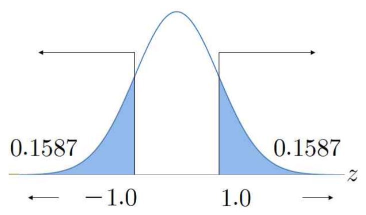
[양측검정의 예] 95% 신뢰구간 $\overline{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 395 \pm (1.96)(\frac{50}{\sqrt{100}}) = [385.2,\ 404.8]$

1-5. p-value와 α

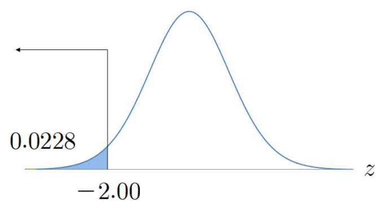
The p-value of a test is the smallest value of α that would lead to the rejection of the null hypothesis (H_0).

→ H_0가 사실일 때, 현재 표본에서 구한 통계량이 얼마나 예외적인 값인가를 확률로 나타낸다.

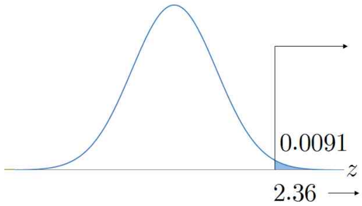
[양측검정의 예] $z = -1.0$ p value = 0.3173



[왼쪽꼬리 검정의 예] $z = -2$ p value = 0.0228



[오른쪽꼬리 검정의 예] z = 2.36 p value = 0.0091



p-value에 따른 Decision Rule

p-value < α이면, H_0를 기각 (Reject H_0.)

p-value ≥ α이면, H_0를 기각하는데 실패 (Do not reject H_0.)

가설 검정시 α의 값은 상당히 주관적이다. 통조림 무게에 관한 문제의 경우 적절한 α의 값은 무엇인가? 이에 대한 정답은 없다. 이와는 달리 p-value는 객관적이다. 학문적인 연구에서 광범위하게 사용되고 있다.

연습문제 3.

문제 1. α = 0.05로 설정된 가설검정을 실시한 결과, p-value = 0.0001이다. 올바른 결론은? ① H_0를 기각한다. ② H_0를 기각하지 않는다.

연습문제 4.

모집단은 정규분포를 따르고 평균은 100, 표준편차는 4로 알려져 있다. 평균이 100이 아니라는 의심이 들어 16개의 자료를 수집한 결과, 표본의 평균은 98.5였다. α = 0.05

문제 1. 가설검정을 실시하시오.

문제 2. 95% 수준의 μ에 대한 신뢰구간을 구하시오.

문제 3. 신뢰구간과 가설검정의 결론에 대해 논하시오.

문제 4. p-value를 구하시오.

문제 5. p-value와 가설검정의 결론에 대해 논하시오.

연습문제 5.

모집단은 정규분포를 따르고 평균은 100, 표준편차는 4로 알려져 있다. 평균이 100보다 작다는 의심이 들어 16개의 자료를 수집한 결과, 표본의 평균은 98.0였다. α = 0.05

문제 1. 가설검정을 실시하시오.

문제 2. p-value를 구하시오.

문제 3. p-value와 가설검정의 결론에 대해 논하시오.

연습문제 6.

모집단은 정규분포를 따르고 평균은 100, 표준편차는 4로 알려져 있다. 평균이 100보다 크다는 의심이 들어 64개의 자료를 수집한 결과, 표본의 평균은 101.5이였다. α = 0.025

문제 1. 가설검정을 실시하시오.

문제 2. p-value를 구하시오.

문제 3. p-value와 가설검정의 결론에 대해 논하시오.

연습문제 7.

문제 1. 모집단 분산과 모집단 표준편차의 개념을 서술하시오.

문제 2. 모집단 표준편차를 사용하는 이유는?

문제 3. 모집단 분산과 모집단 표준편차의 공식을 쓰시오.

문제 4. 표본의 분산과 표본의 표준편차 공식을 쓰시오.

문제 5. {40, 50, 50, 60} 자료가 모집단이라면 분산과 표준편차는?

문제 6. {40, 50, 50, 60} 자료가 표본이라면 분산과 표준편차는?

문제 7. {100, 115, 120, 125, 140} 자료가 모집단이라면 분산과 표준편차는?

문제 8. {100, 115, 120, 125, 140} 자료가 표본이라면 분산과 표준편차는?

2. 모분산을 모르며 소표본인 경우 [n < 30]

(1) 가설검정의 조건: $\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$

... X가 정규분포를 따른다. (부연하면 μ_X와 σ_X는 모르며, 단지 X가 정규분포를 따른다는 것만 알고 있는 경우이다.)

(2) 통계량 $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$

1-1. 양측검정(Two-tailed Test)

상황: 우유 정량은 150. 우유 용량은 정규분포를 따른다. 정량이 150이 아니라는 의심이 들어 8개 조사 {160, 153, 160, 141, 150, 155, 147, 150} $\alpha = 0.01$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{8} = \frac{1}{8}(160 + 153 + \cdots + 150) = 152$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{8-1} = \frac{1}{8-1}\left\{ (160-152)^2 + (153-152)^2 + \cdots + (150-152)^2 \right\} = 41.71$$

$$S = \sqrt{41.71} = 6.46$$

(1) H_0: $\mu = 150$, H_A: $\mu \neq 150$ (→ 양측 검정)

(2) Test Statistic: $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$

($\overline{X}$가 정규분포를 따르고 σ가 알려져 있지 않고 n < 30 이므로 $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$ 사용)

(3) For $\alpha = 0.01$,

Rejection Region: $t > t_{0.005,7} = 3.499$ 또는 $t < -t_{0.005,7} = -3.499$

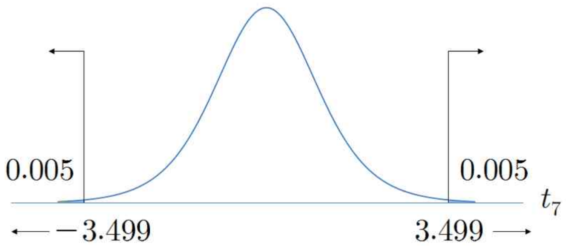
(양측검정이므로 $t_{\frac{\alpha}{2}}$와 $-t_{\frac{\alpha}{2}}$가 사용된다.)

(4) Value of the Test Statistic:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}} = \frac{152 - 150}{6.46 / \sqrt{8}} = 0.88$$

(5) Conclusion:

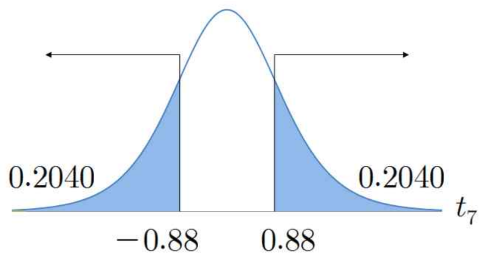
H_0를 기각하는데 실패. 우유 정량이 150이 아니라고 부인할 충분한 근거는 없다.



99% 신뢰구간 $\overline{X} \pm t_{\alpha/2,7} \cdot S/\sqrt{n}$ = 152 ± (3.499)(6.46 / $\sqrt{8}$) = 152 ± 8.0

p-value p-value = 2 · $P(t > |t^c|)$ = 2 · $P(t > 0.88)$ = 2 · 0.2040

여기서 t^c는 value of the test statistic을 의미한다.



1-2. 단측검정(One-tailed Test)

A. 왼쪽꼬리 검정

상황: X는 정규분포. H_0: μ = 1. n = 28, $\overline{X}$ = 0.9, S = 0.02, α = 0.05. μ < 1 여부

(1) H_0: μ = 1.0 ($\mu \geq$ 1.0도 무방), H_A: μ < 1.0 (→ 왼쪽꼬리 검정)

(2) Test Statistic: $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$

($\overline{X}$가 정규분포를 따르고 σ가 알려져 있지 않고 n < 30 이므로 $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$ 사용)

(3) For α = 0.05,

Rejection Region: t < -$t_{0.05,27}$ = -1.703

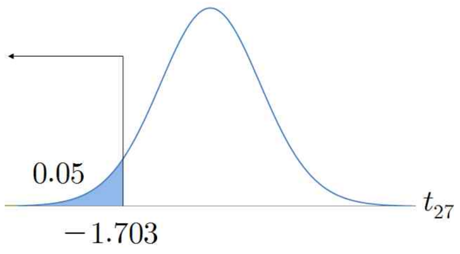
(주의: 양측검정에서는 $t_{\frac{\alpha}{2}}$와 -$t_{\frac{\alpha}{2}}$이 사용되지만, 단측에서는 t_α 또는 -t_α가 사용된다.)

(4) Value of the Test Statistic:

$$t = \frac{0.9 - 1.0}{0.02/\sqrt{28}} = -26.46$$

(5) Conclusion:

H_0를 기각



95% 신뢰구간 신뢰구간은 양측검정에서만 서로 연관성 있다.

p-value p-value = $P(t < t^c)$ = $P(t < -26.46)$ = 3.80E-21

여기서 t^c는 value of the test statistic을 의미한다.

B. 오른쪽꼬리 검정

상황: X는 정규분포. H_0: μ = 20. n = 25, $\overline{X}$ = 22, S = 3, α = 0.05. μ > 20 여부

(1) H_0: μ = 20 ($\mu \le$ 20도 무방), H_A: μ > 20 (→ 오른쪽꼬리 검정)

(2) Test Statistic: $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$

($\overline{X}$가 정규분포를 따르고 σ가 알려져 있지 않고 n < 30 이므로 $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X} - \mu_X}{S_X / \sqrt{n}}$ 사용)

(3) For α = 0.05,

Rejection Region: $t > t_{0.05,\ 24}$ = 1.711

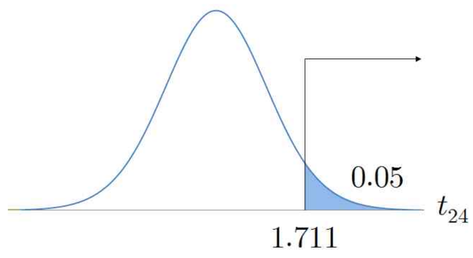
(주의: 양측검정에서는 $t_{\frac{\alpha}{2}}$와 -$t_{\frac{\alpha}{2}}$이 사용되지만, 단측에서는 t_α 또는 -t_α가 사용된다.)

(4) Value of the Test Statistic:

$$t = \frac{22 - 20}{3/\sqrt{25}} = 3.3333$$

(5) Conclusion:

H_0를 기각



95% 신뢰구간 신뢰구간은 양측검정에서만 서로 연관성 있다.

p-value p-value = $P(t > t^c)$ = $P(t > 3.333)$ = 0.0014

여기서 t^c는 value of the test statistic을 의미한다.

연습문제 8.

어떤 제품의 기준 무게는 100이다. 제품 무게는 정규분포를 따른다. 제품 무게가 100이 아니라는 의심이 들어 4개를 조사했다. {100, 80, 110, 90}, α = 0.05

문제 1. s =

문제 2. H_0: μ = 100, H_A: μ __ 100

문제 3. Test Statistic:

문제 4. For α = 0.05, Rejection Region:

문제 5. Value of the Test Statistic:

문제 6. Conclusion:

문제 7. μ에 대한 95% 신뢰구간

문제 8. p-value

연습문제 9.

모집단은 정규분포를 따르고 평균은 100이다. 평균이 100보다 작은 것 같아 4개의 자료를 수집하였다. {99, 98, 101, 99}, α = 0.025이다. ($t_{3,\ 0.025}$ = 3.1824)

문제 1. $\overline{X}$, s^2, s값을 구하시오.

문제 2. 가설검정을 실시하시오.

문제 3. p-value를 구하시오.

연습문제 정답

1. (1) H_0가 사실일 때, H_0를 기각할 확률 (2) P(제1종 오류) = P(Reject H_0 | H_0 is true)
   (3) P(제1종 오류), 즉 H_0가 사실일 때 H_0를 기각할 확률
2. (1) 만개의 데이터를 모두 합하여 10,000으로 나누면 된다.
   (2) 구할 수 없다. 모집단 전체 데이터가 있어야만 μ를 구할 수 있다. 표본에서 구한 $\overline{X}$의 값은 μ의 값과 다를 수 있다. 단지 $\overline{X}$의 기대값, 즉 $E(\overline{X})$는 μ와 같다.
   (3) False. 모집단 전체 데이터로부터 μ를 구할 수 있으면, μ를 구한다. 이렇게 구한 μ값은 Fact이다. 몇 번을 다시 구해도 μ값을 동일한 값이다.
   모평균 가설검정은 μ값을 직접 구할 수 없을 때만 사용한다. 모평균 가설검정은 μ를 구하는 것이 아니라, μ에 대한 가설(주장)을 판정하는 것이다. 정확한 μ값을 알지 못한 상태로 가설을 판정하므로 판정은 항상 오류 가능성을 갖고 있다.
   (4) μ값을 구하면 된다. 예를 들어, 모집단 평균은 400이라는 주장과 400이 아니라는 다른 주장이 있다고 하자.
   μ값을 알 수 있다면, μ를 구해 두 주장의 진위를 판정하면 된다. 이 경우 오류 가능성은 없다.
   μ값은 알 수 없고 단지 $\overline{X}$값만 알 수 있다면, $\overline{X}$를 사용하여 두 주장을 판정하게 된다. 이 경우 $\overline{X}$은 μ와 다를 수 있기 때문에 판정의 오류를 피할 수 없다.
3. (1) 1
4. (1) H_0: μ = 100, H_A: $\mu \neq$ 100

   Test Statistic: $z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

   Rejection Region: $z < -z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96$, $z > z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

   Value of the Test Statistic: $z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{98.5 - 100}{4 / \sqrt{16}} = -1.5$

   Conclusion: H_0를 기각하지 않는다.

   (2) $\overline{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 98.5 \pm (1.96)\dfrac{4}{\sqrt{16}} = 98.5 \pm 1.96 \rightarrow (96.54, 100.46)$
   (3) 신뢰구간이 H_0에서 설정한 μ값을 포함하고 있으므로, 양측검정의 H_0는 기각할 수 없다. (이와 같은 분석은 양측검정일 때만 유효하다.)
   (4) 양측검정이므로 p-value = $2 \times P(z > |-1.5|) = 2 \times 0.0668 = 0.1336$
   (5) p-value가 α보다 크므로, 가설검정에서 H_0를 기각할 수 없다.
5. (1) H_0: μ = 100, H_A: μ < 100

   Test Statistic: $z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Rejection Region: $z < -z_{\alpha} = -1.645$

Value of the Test Statistic: $z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{98-100}{4/\sqrt{16}} = -2.0$

Conclusion: H_0를 기각한다.

(2) 왼쪽 꼬리 검정이므로 p-value = $P(z < -2.0) = 0.0228$

(3) p-value가 α보다 작으므로, 가설검정에서 H_0를 기각한다.

6. (1) H_0: $\mu = 100$, H_A: $\mu > 100$

Test Statistic: $z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Rejection Region: $z > z_{\alpha} = 1.96$

Value of the Test Statistic: $z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{101.5-100}{4/\sqrt{64}} = 3.0$

Conclusion: H_0를 기각한다.

(2) 오른쪽 꼬리 검정이므로 p-value = $P(z > 3.0) = 0.0014$

(3) p-value가 α보다 작으므로, 가설검정에서 H_0를 기각한다.

7. (1) 모집단 분산은 편차제곱의 평균이며, 모집단 표준편차는 모집단 분산의 제곱근이다.

(2) 모집단 분산은 원 자료와 단위가 다르므로, 단위를 일치시키기 위해 분산의 제곱근인 표준편차를 사용한다.

(3) 모집단분산 $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2}{N}$, 모집단 표준편차 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2}{N}}$

(4) 표본분산 $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$, 표본의 표준편차 $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}}$

(5) 분산 = 50, 표준편차 = 7.07 (6) 분산 = 66.67, 표준편차 = 8.16

(7) 분산 = 170, 표준편차 = 13.04 (8) 분산 = 212.50, 표준편차 = 14.58

8. (1) 12.91 (2) $\neq$ (3) $t_{n-1} = \dfrac{\overline{X}-\mu_X}{S_X/\sqrt{n}}$

(4) $t > t_{0.025,3} = 3.1824$ 또는 $t < -t_{0.025,3} = 3.1824$

(5) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu_X}{S_X/\sqrt{n}} = \dfrac{95-100}{12.91/\sqrt{4}} = -0.7746$

(6) Do not reject H_0.

(7) $\overline{X} \pm t_{\frac{0.05}{2},4-1} \cdot \dfrac{s_X}{\sqrt{n}} = 95 \pm 3.1824 \cdot \dfrac{12.91}{\sqrt{4}}$

(8) p-value = $2 \cdot P(t > |t^c|) = 2 \cdot P(t > |-0.7746|) = 2 \cdot 0.2475 = 0.4950$
(교과서에 있는 표를 사용한 것이 아니라 컴퓨터를 사용하여 구했음)

9. (1) $\overline{X}$ = 99.25, s^2 = 1.58, s = 1.26

(2) H_0: μ = 100, H_A: μ < 100

Test Statistic:	$t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
Rejection Region:	t < -$t_{n-1,\ \alpha}$ = -$t_{3,\ 0.025}$ = -3.1824
Value of the Test Statistic:	$t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ = $\dfrac{99.25-100}{1.26/\sqrt{4}}$ = -1.19
Conclusion:	H_0를 기각하지 않는다.

(3) 왼쪽 꼬리 검정이므로, p-value = $P(t_3$ < -1.19) = 0.1598 (컴퓨터로 구했음)

p-value가 α보다 크므로, H_0를 기각할 수 없다.