제 3 장 기술통계분석

1. 도수분포표(frequency distribution table)

수집된 자료를 적절한 계급(class)으로 분류하여 정리한 표

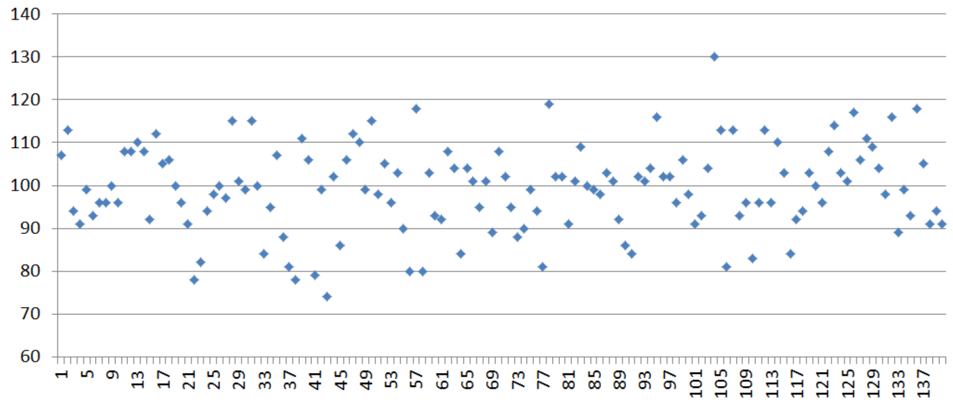
계급(class)와 빈도수/도수(frequency)로 구성된다.

연령	인원(천명)
10세 미만	25
10세 이상 ~ 20세 미만	40
20세 이상 ~ 30세 미만	108
……………………………..	………..……
50세 이상 ~ 60세 미만	46
60세 이상	32
합계	457

Example:

No	Data	No	Data	No	Data	No	Data	No	Data	No	Data	No	Data
1	107	21	91	41	79	61	92	81	91	101	91	121	96
2	113	22	78	42	99	62	108	82	101	102	93	122	108
3	94	23	82	43	74	63	104	83	109	103	104	123	114
4	91	24	94	44	102	64	84	84	100	104	130	124	103
5	99	25	98	45	86	65	104	85	99	105	113	125	101
6	93	26	100	46	106	66	101	86	98	106	81	126	117
7	96	27	97	47	112	67	95	87	103	107	113	127	106
8	96	28	115	48	110	68	101	88	101	108	93	128	111
9	100	29	101	49	99	69	89	89	92	109	96	129	109
10	96	30	99	50	115	70	108	90	86	110	83	130	104
11	108	31	115	51	98	71	102	91	84	111	96	131	98
12	108	32	100	52	105	72	95	92	102	112	113	132	116
13	110	33	84	53	96	73	88	93	101	113	96	133	89
14	108	34	95	54	103	74	90	94	104	114	110	134	99
15	92	35	107	55	90	75	99	95	116	115	103	135	93
16	112	36	88	56	80	76	94	96	102	116	84	136	118

17	105	37	81	57	118	77	81	97	102	117	92	137	105
18	106	38	78	58	80	78	119	98	96	118	94	138	91
19	100	39	111	59	103	79	102	99	106	119	103	139	94
20	96	40	106	60	93	80	102	100	98	120	100	140	91



계급	빈도
~75	1
76~80	5
81~85	9
86~90	8
91~95	23
96~100	29
101~105	28
106~110	18
111~115	12
116~120	6
121~125	0
126~130	1

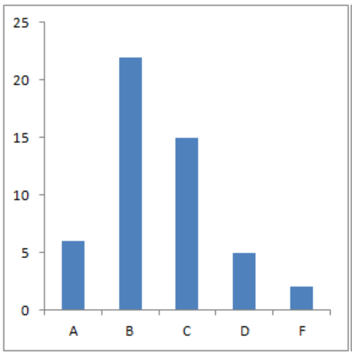
1.1 질적 자료

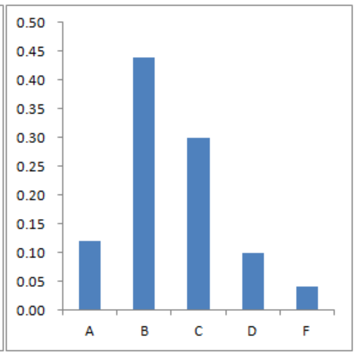
상대도수(relative frequency)

상대도수 $= \frac{f_i}{N}$,

여기서, N = 총 관찰개수, f_i = i번째 계급의 빈도수

학점	빈도수	상대도수	백분율
A	6	0.12	12%
B	22	0.44	44%
C	15	0.30	30%
D	5	0.10	10%
F	2	0.04	4%
합계	50	1.00	100%





학점	빈도수	상대도수	백분율
A	$f_1 = 6$	$\frac{f_1}{N} = 0.12$	12%
B	$f_2 = 22$	$\frac{f_2}{N} = 0.44$	44%
C	$f_3 = 15$	0.30	30%
D	$f_4 = 5$	0.10	10%
F	$f_5 = 2$	0.04	4%
합계	$N = 50$	1.00	100%

연습문제 1.

문제 1. 첫번째 계급은?

문제 2. 세번째 계급의 빈도를 기호로 표현하시오.

문제 3. $f_4 = ?$

문제 4. 다섯 번째 계급의 상대도수 = ?

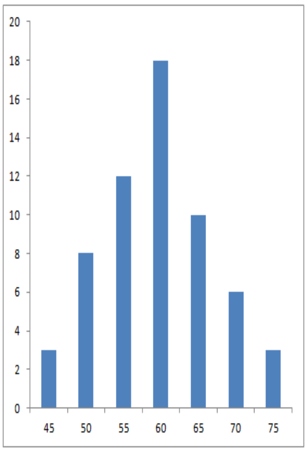
1.2 양적 자료

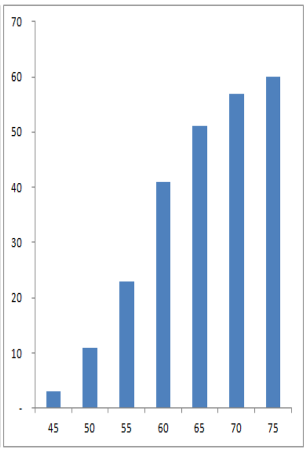
계급구간의 계산

$$계급구간 = \frac{최대값 - 최소값}{계급의\ 수}$$

1.3 누적도수분포(cumulative frequency distribution)

체중	빈도수	누적 도수	누적 상대도수
45 미만	3	3	5%
45 이상~ 50 미만	8	11	18%
50 이상~ 55 미만	12	23	38%
55 이상~ 60 미만	18	41	68%
60 이상~ 65 미만	10	51	85%
65 이상~ 70 미만	6	57	95%
70 이상~ 75 미만	3	60	100%
합계	60		





연습문제 2.

문제 1. 도수분포그래프에서 수평축과 수직축의 의미는?

문제 2. 누적도수분포그래프에서 수평축과 수직축의 의미는?

연습문제 3. 수강생 10 명인 어떤 학급의 성적은 다음과 같다.
{100, 48, 57, 95, 75, 85, 81, 88, 71, 79}

문제 1. 이 학급에 관련된 도수분포표를 완성하시오. (빈도는 정수로, 나머지는 소수점 1 까지 표기한다.) 여기서 계급은 0~59, 60~69, 70~79, 80~89, 90~100 으로 한다.

문제 2. 도수분포 그래프, 상대빈도 그래프, 누적상대빈도 그래프를 완성하시오.

문제 3. 도수분포 그래프 높이의 최소값(빈도의 최소값)은 ____이다.

문제 4. 이 학급의 경우, 도수분포 그래프 높이의 합은 _____이다.

문제 5. 일반적으로 상대빈도 그래프 높이의 최소값은 ___이다.

문제 6. 일반적으로 상대빈도 그래프 높이의 최대값은 ___이다.

문제 7. 상대빈도 그래프 높이의 합은 (1.00)이다. Ans. True, False

문제 8. 누적상대빈도 그래프의 최우측 그래프 높이는 항상 1 이다. Ans. True, False

문제 9. 누적상대빈도 그래프 높이는 우측으로 갈수록 ① 감소한다. ② 감소하지 않는다. ③ 증가하지 않는다. ④ 증가한다.

연습문제 4.

문제 1. 수강생이 10 명인 어떤 과목의 학점이다. 10 명 중 7 명의 학점은 C, D, F 로 확인되었으나, 나머지 3 명의 학점은 A 또는 B 로만 확인되었을 뿐 A 학점 몇 명, B 학점 몇 명으로까지는 확인되지 않았다. A 학점 받는 학생들의 수는 최소 몇 명에서 최대 몇 명인가?

문제 2. 어떤 도수분포표의 부분 정보이다. 계급 10~19 의 상대빈도값은?

계급	상대빈도	누적상대빈도
0~9	0.150	0.150
10~19		0.200
20~29		

문제 3. 위의 표에서 계급 20~29 의 누적상대빈도값의 최소값과 최대값은?

2. 분포의 특성

중심위치(central location) ... 자료가 집중되어 있는 위치(평균값)
산포경향(dispersion) .... 자료의 흩어진 상태(분산, 표준편차)
비대칭도(skewness) .... 중앙대칭에서 왼쪽/오른쪽으로 치우친 정도
첨도(kurtosis) .... 분포의 모양이 뾰족한 정도

2.1 중심위치(central location)

산술평균(arithmetic mean), 최빈값(mode), 중앙값(median)

2.1.1 산술평균(arithmetic mean)

모집단평균 $\mu = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$

여기서, μ = 모집단 평균
N = 모집단 크기
X_i = i번째 관찰값

표본평균 $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

여기서, $\overline{X}$ = 표본평균
n = 표본 크기

2.1.1.1 $\sum_{i=1}^{N}$ 에 관한 학습

i	X_i
1	10
2	30
3	20
4	40
5	30

(1) $\sum_{i=1}^{5} X_i$
(2) $\sum_{i=1}^{3} 10X_i$
(3) $\sum_{i=3}^{2} X_i$
(4) $\sum_{i=2}^{3} X_iY_j$
(5) $\sum_{i=2}^{4} c \times X_i$
(6) $\sum_{i=2}^{4} 20$

i	1	2	3	4	5	결과
$\sum_{i=1}^{5} X_i$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$X_1 + X_2 + \cdots + X_5$
$\sum_{i=1}^{3} 10X_i$	$10X_1$	$10X_2$	$10X_3$			$10X_1 + 10X_2 + 10X_3$
$\sum_{i=3}^{2} X_i$						해당 없음
$\sum_{i=2}^{3} X_iY_j$		X_2Y_j	X_3Y_j			$X_2Y_j + X_3Y_j$
$\sum_{i=2}^{4} 20$		20	20	20		20 + 20 + 20
$\sum_{i=2}^{4} c \times X_i$		cX_2	cX_3	cX_4		$cX_1 + cX_2 + cX_3$

연습문제 5. 성적은 X 로 표기하고, i 번째 성적은 X_i 로 표기하자. 이렇게 표기하면, 3 번째 학생의 성적은 X_3으로, 여덟 번째 학생의 성적은 X_8로 표기된다.

문제 1. $\sum_{i=1}^{5} X_i$를 덧셈 형식으로 풀어서 표기하시오.

문제 2. $\sum_{i=10}^{15} X_i$를 덧셈 형식으로 풀어서 표기하시오.

문제 3. $\sum_{i=8}^{10} X_i$를 덧셈 형식으로 풀어서 표기하시오.

문제 4. $X_3 + X_4 + X_5$를 $\sum$형식으로 표기하시오.

문제 5. $X_3 + X_4 + \cdots + X_{15}$를 $\sum$형식으로 표기하시오.

문제 6. $X_1 + X_2 + \cdots + X_5$를 $\sum$형식으로 표기하시오.

연습문제 6.

번호	1	2	3	4	5	6	7	8
성적	75	70	71	63	90	76	90	65

문제 1. $X_1 + X_2 + X_3$

문제 2. $\sum_{i=1}^{4} X_i$

문제 3. 8 명이 수강하는 반의 평균을 알고자 한다. 8 명의 성적을 조사하니 위의 표와 같았다. (이 경우, 8 명이 모집단이다.) 모집단의 평균 μ(mu 라고 읽는다.)의 공식은?

문제 4. μ값은?

문제 5. 500 명이 수강하는 반의 평균을 알고자 한다. 500 명 중 8 명을 추출하여 성적을 조사하니 위의 표와 같았다. (이 경우, 8 명은 표본이 된다.) 표본의 평균 $\overline{X}$의 공식은?

문제 6. $\overline{X}$ =

연습문제 7. 20 개 학급의 성적을 조사하였다. 학급별로 수강인원은 매우 다르지만, 학급 별로 조사한 학생의 수는 20명으로 동일하다. 20명의 성적의 평균을 구했다. 그 성적은 모집단 평균인가 아니면 표본의 평균인가? 당연히 수강생이 20 명인 학급이라면 조사한 학생의 성적 평균은 모집단 평균이고, 수강생이 20 명을 넘는 학급이라면 조사한 학생의 성적 평균은 표본의 평균이다.

학급 1 과 2 에서 표기한 방식으로, 학급 3 에서 10 까지의 빈 칸을 모두 채우시오.

학급	수강생의 수	조사한 학생의 수	조사한 학생의 성적 평균	모집단 평균	표본 평균
1	89	20	43	해당 없음	$\overline{X}$ = 43
2	20	20	93	μ = 93	해당 없음
3	37	20	32		
4	20	20	32		
5	74	20	98		
6	43	20	87		
7	89	20	84		
8	20	20	55		
9	60	20	64		
10	97	20	73		

2.1.1.2 가중평균

가중평균

$$\overline{X_w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i \quad (\text{since } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1)$$

여기서, w_i = i번째 관찰치의 가중치

w_i에 관한 학습

① $0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., n$

② $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

	수강생(명)	평균	반 총점
A	40	75	3,000
B	50	73	3,650
C	20	80	1,600
합계	110		8,250

$$\text{전체 평균} = \frac{\text{전체 점수}}{\text{총원}} = \frac{8{,}250}{110} = 75$$

반	수강생(명)	가중치(E)	평균(D)	D×E
A	40	0.36 (40/110)	75	27.27
B	50	0.45 (50/110)	73	33.18
C	20	0.18 (20/110)	80	14.55
합계	110	1.00 (.36+.45+.18)		75.00 (27.27+33.18+14.55)

연습문제 8.

문제 1. (가중 평균 구하기) 아래 표를 완성하시오.

반	수강생(명)	평균(D)	가중치(E)	D*E
A	50	80		
B	30	70		
C	20	85		
합계	100			

문제 2. (가중평균 구하기) 50 명의 평균 학습시간은 6.5 시간, 30 명의 평균 학습시간은 6.0 시간, 10 명의 평균 학습시간은 5.5 시간이다. 총 90 명의 평균 학습시간은?

2.1.1.3 집단자료 산술평균

집단자료 산술평균 $\overline{X} = \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i m_i}{n}$
여기서, f_i = i번째 계급의 빈도수
M_i = i번째 계급의 중간점
n = 총관찰수 $(=\sum f_i)$

[주의] 계급구간별 평균을 알지 못해 (계급구간별) 평균을 계급의 중간점으로 추정한 경우이다. 그러므로 위의 공식에 의한 산술평균은 정확한 값이 아니라 추정치다.

2.1.1.4 산술평균(arithmetic mean), 기하평균(geometric mean), 조화평균(harmonic mean)

$$\text{산술평균} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- 덧셈으로 계산하는 값에서의 평균

2.1.1.4.1 기하평균 $= \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X\_n} = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}$

- 곱셈으로 계산하는 값에서의 평균 (예: 성장률)

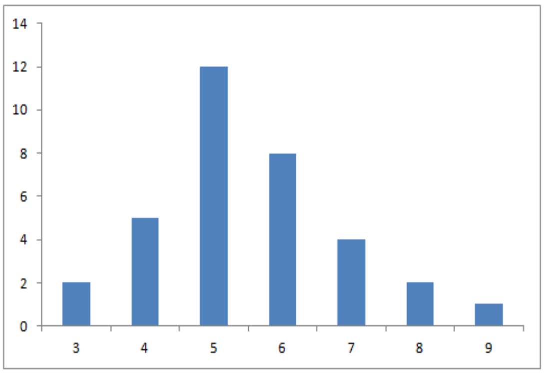
2.1.1.4.2 조화평균 $= \frac{n}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\cdots+\frac{1}{X_n}}$

- 역수의 산술평균의 역수 (예: 속도)

2.1.2 **최빈값(mode)**

자료의 분포에서 빈도수가 가장 높은 관찰치

X_i	f_i
3	2
4	5
5	12
6	8
7	4
8	2
9	1



2.1.3 **중앙값(median)**

n개의 값이 있고 모든 값들이 크기 순서대로 놓여 있을 때,

(1) n이 홀수이면 $\frac{n+1}{2}$번째 있는 값

- n이 7이면, 4번째 크기의 값

(2) n이 짝수이면 $\frac{n}{2}$번째 값과 $\frac{n+2}{2}$번째 값의 평균

- n이 6이면, 3번째 크기의 값과 4번째 크기의 값의 평균

List of countries by median age (CIA World Factbook 2016)

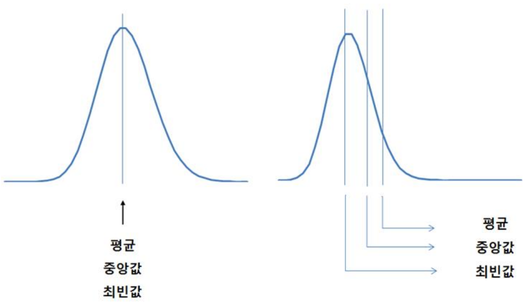
Indonesia	29.9	United Kingdom	40.5
Vietnam	30.1	S. Korea	41.2
N. Korea	33.8	Spain	42.3
China	37.1	Greece	44.2
United States	37.9	German	46.8
Taiwan	40.2	Japan	46.9

연습문제 9.

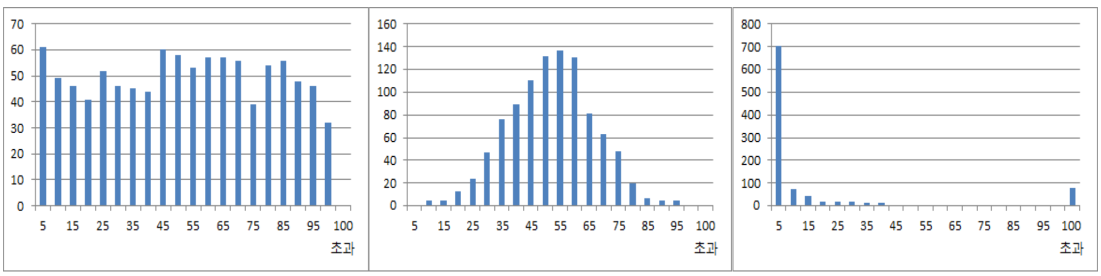
문제 1. 어떤 학급의 학점별 빈도이다. A: 20, B: 30, C: 15, D: 10, F: 5 최빈값과 중앙값은?

문제 2. {1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6} 평균, 최빈값, 중앙값을 구하시오.

2.1.4 대표값의 비교



데이터 수가 1,000개인 3개의 자료 비교 I.



평균 50 50 125,131

최빈값	79	46	0
중앙값	50	50	1
최대값	99	98	113,110,156

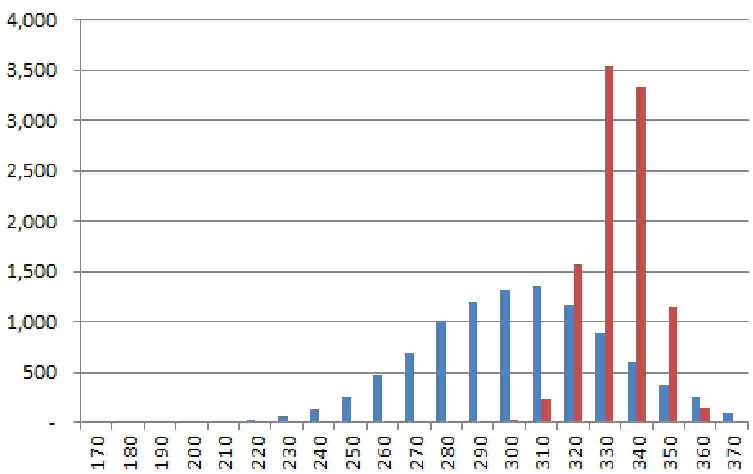
2.1.5 백분위수(percentile)

사분위수(quartiles)

제1사분위수 = 제25백분위수

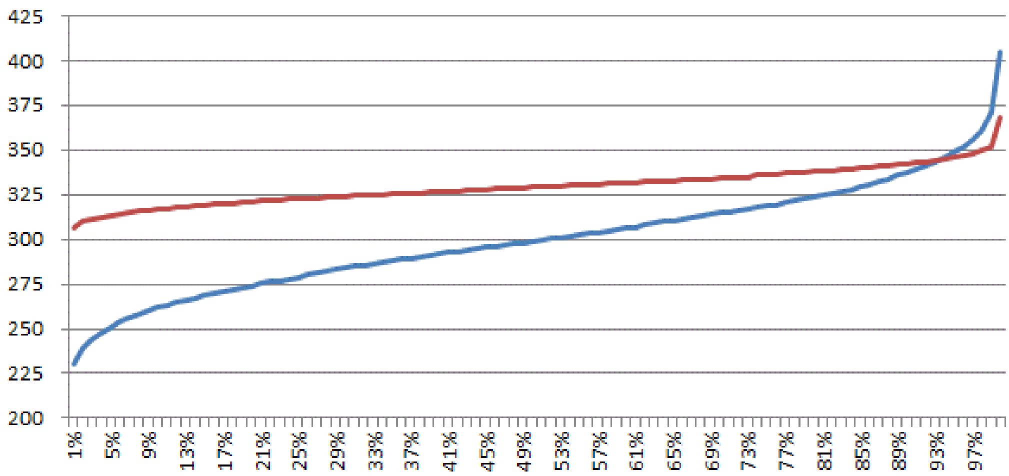
제2사분위수 = 제50백분위수

제3사분위수 = 제75백분위수



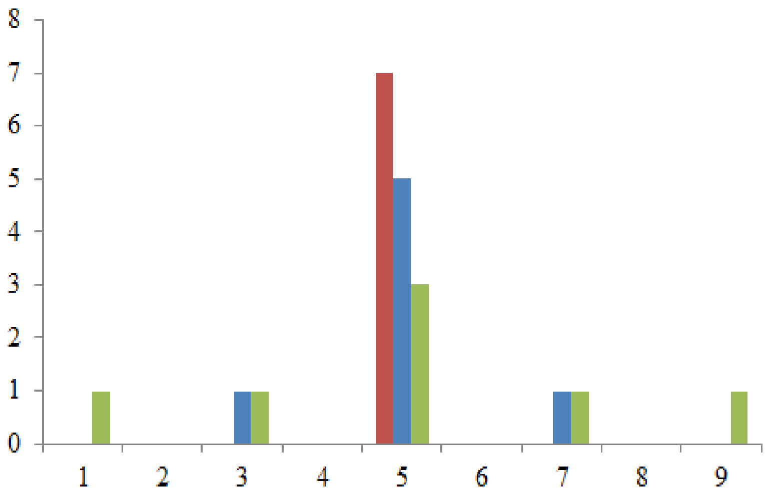
계열	평균	최빈값	중앙값	최대	최소
파란색	299	295	299	405	181
붉은색	330	333	330	368	295

	Blue	Red		Blue	Red		Blue	Red		Blue	Red
1%	230	307	15%	269	319	65%	310	333	90%	337	342
2%	239	310	20%	274	321	70%	315	335	91%	339	343
3%	244	311	25%	279	323	75%	319	336	92%	341	343
4%	248	312	30%	284	324	80%	324	338	93%	343	344
5%	251	313	35%	288	326	84%	328	339	94%	346	345
6%	254	314	40%	292	327	85%	330	340	95%	349	346
7%	256	315	45%	296	328	86%	331	340	97%	352	347
8%	258	316	50%	299	330	87%	333	341	98%	356	348
9%	260	316	55%	303	331	88%	334	341	99%	361	350
10%	262	317	60%	307	332	89%	336	342	100%	371	352



2.2 산포경향(dispersion)

class	붉은 색	파란 색	녹색
1			1
2			
3		1	1
4			
5	7	5	3
6			
7		1	1
8			
9			1
평균	**5.0**	**5.0**	**5.0**



세 자료 모두 평균값이 동일하다.

붉은 색의 경우, 7개의 자료 모두 평균과 같은 값이다.
파란 색의 경우, 5개는 평균과 같고 두 개는 평균보다 약간 크거나 작다.
녹색의 경우, 3개만 평균과 같고 나머지는 평균보다 크거나 작다.

편차(deviation) - 관찰치의 평균값으로부터 차이

위의 예에서 각 그룹 별 편차를 구하면

붉은 색의 경우: 편차 = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
파란 색의 경우: 편차 = {-2, 0, 0, 0, 0, 0, 2}
녹색의 경우: 편차 = {-4, -2, 0, 0, 0, 2, 4}

세 그룹 모두 편차의 합과 평균 모두 0이다. (합이 0이므로, 평균도 0이 된다.)

붉은 색은 편차들이 모두 0이므로, 합이 0이 되며, 파란 색과 녹색의 경우는 음수의 편차가 존재하기 때문에 합이 0이 된다.

정리하면,

모집단의 경우

평균은 μ이고 i번째 관찰값은 X_i이므로, i번째 편차는 $X_i - \mu$이다.

모집단의 크기를 N이라 하면, 총 N개의 편차가 존재한다.

N개의 편차들의 평균을 구하면, $\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i-\mu}{N}$ 이 된다.

표본의 경우

평균은 $\bar{X}$이고 i번째 관찰값은 X_i이므로, i번째 편차는 $X_i - \bar{X}$ 이다.

표본의 크기를 n이라 하면, 총 n개의 편차가 존재한다.

n개의 편차들의 평균을 구하면, $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-\bar{X}}{n}$ 이 된다.

그런데, 편차들의 합은 항상 0이다. $\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)= 0$, $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})= 0$

편차의 합은 항상 0이므로, 편차들의 평균도 항상 0이다.

2.2.1 평균편차(mean deviation)

평균편차 MD $= \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert X_i - \bar{X} \rvert}{n}$

평균편차란 (편차 절대값)의 평균이다.

① 음수의 편차는 양수의 편차로 변환한다.

② $\frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i-\bar{X}|}{n} = \frac{|X_1-\bar{X}|+|X_2-\bar{X}|+|X_3-\bar{X}|+\cdots+|X_n-\bar{X}|}{n}$

$= \frac{\text{첫번 째 편차 절대값} + \text{두 번째 편차 절대값} + \text{세 번째 편차 절대값} + \cdots + n\text{번째 편차 절대값}}{n}$

= 편차 절대값을 모두 다 더하고 (더한 값을) 개수로 나눈 값

= 편차 절대값의 평균

2.2.2 분산과 표준편차

모집단분산	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2}{N}$
모집단 표준편차	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2}{N}}$

표본분산	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$
표본의 표준편차	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$

분산이란 (편차 제곱)의 평균이다.

① 각 편차를 제곱한다.

② $\sigma^2 = \frac{(X_1-\mu)^2 + (X_2-\mu)^2 + \dots + (X_N-\mu)^2}{N}$

$= \frac{\text{첫번 째 편차 제곱} + \text{두 번째 편차 제곱} + \dots + N\text{번째 편차 제곱}}{N}$

= 편차 제곱들을 다 더하고 (그 값을) 갯수로 나눈 값

= 편차 제곱의 평균

③ 모집단이면 분산은 σ^2, 평균은 μ로, 갯수는 N으로 표기하고, 표본이면 분산은 S^2, 평균은 $\bar{X}$, 갯수는 n으로 표기한다.

④ 평균이란 적절한 수로 나누는 것인데, 모집단의 경우는 N으로 나누고 표본인 경우는 n-1로 나눈다.

⑤ 분산의 단위는 원래 자료 단위의 제곱이다.

⑥ 예: X 단위가 미터 – 평균, 편차 단위는 미터, 분산(편차 제곱)의 단위는 미터 제곱

⑦ 예: X 단위가 인원 – 평균, 편차 단위는 인원, 분산(편차 제곱)의 단위는 인원 제곱

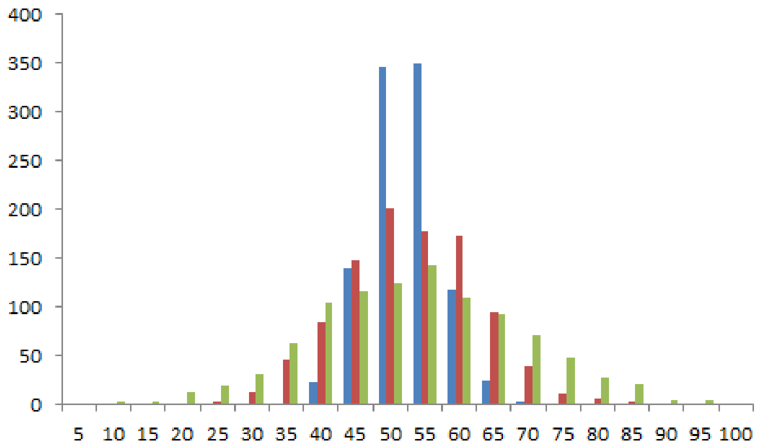
표준편차란 분산의 제곱근이다.

① 원래 자료의 단위와 동일하다.

② 예: X의 단위가 미터 – 분산(편차 제곱)의 단위는 미터 제곱, 표준편차는 미터

③ 예: X의 단위가 인원 – 분산(편차 제곱)의 단위는 인원 제곱, 표준편차는 인원

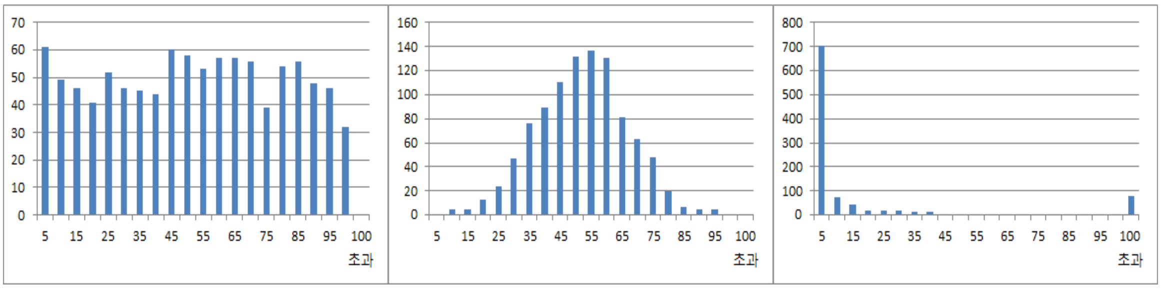
④ 모집단의 표준편차는 σ로, 표본의 표준편차는 S로 표기한다.



	파란색	붉은색	녹색
평균	50.10	49.94	50.08

분산	24.27	98.20	231.78
표준편차	4.93	9.91	15.22

데이터 수가 1,000개인 3개의 자료 비교 II.



평균	50	50	125,131
최빈값	79	46	0
중앙값	50	50	1
최소값	0	-2	0
최대값	99	98	113,110,156
범위	99	100	113,110,156
분산	797	222	12,929,317,404,095
표준편차	28	15	3,595,736

2.2.3 추가 학습 - 편차의 합은 항상 0이다.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})}{n} &= \frac{(X_1-\overline{X})+(X_2-\overline{X})+(X_3-\overline{X})+\cdots+(X_n-\overline{X})}{n} \\
&= \frac{(X_1+X_2+\cdots+X_n)-(\overline{X}+\overline{X}+\cdots+\overline{X})}{n} \\
&= \frac{n\times\overline{X}-n\times\overline{X}}{n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

연습문제 10.

문제 1. 두 소모임(모집단)의 연령별 자료이다. 빈 칸을 모두 채우시오.

번호	나이 Group A	편차	편차 절대값	편차 제곱
1	10			
2	20			
3	30			
4	30			
5	30			
6	40			

나이 Group B	편차	편차 절대값	편차 제곱
24			
27			
30			
30			
30			
33			

7	50			
합계	210			
평균	30			

36			
210			
30			

문제 2. 두 소모임(모집단) 나이의 표준편차는?

문제 3. 문제 1 의 표를 기호로 표기하시오. i번째 자료값은 x_i, 편차, 편차 절대값, 편차 제곱에 사용되는 평균 기호는 μ로 합니다. 또한 표 하단의 합계는 $\sum$ 기호를 사용하고, 표 하단의 평균은 Σ 형식으로 표현합니다.

번호	나이 Group A	편차	편차 절대값	편차 제곱
1	x_1			
2	x_2			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	x_i			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	x_7			
합계				
평균				

문제 4. 표준편차(모집단)의 공식을 기입하시오. 단, 모집단의 크기는 7 이다.

문제 5. 두 소모임의 자료가 전체가 아니라 부분이라고 하자. Group A 의 분산과 표준편차는?

문제 6. 자료가 모집단이 아니고 표본이다. Group A 의 분산과 표준편차 공식은? 단, 표본의 크기는 7 이다. (주의: 표본의 평균은 $\overline{X}$로 표기한다.)

연습문제 11. $\{3, 4, 5, 6\}$: 답은 소숫점 3 자리에서 반올림하여 2 자리까지 표기한다.

문제 1. 산술평균은?

문제 2. 중앙값은?

문제 3. 편차의 합은?

문제 4. 평균편차의 개념을 약술하시오.

문제 5. 분산의 개념을 약술하시오.

문제 6. $\{3, 4, 5, 6\}$이 모집단이라면 분산은?

문제 7. $\{3, 4, 5, 6\}$이 모집단이라면 표준편차는?

문제 8. {3, 4, 5, 6}이 표본이라면 분산은?

문제 9. {3, 4, 5, 6}이 표본이라면 표준편차는?

연습문제 12. {0, 0, 0, 1,000}: 답은 소숫점 3 자리에서 반올림하여 2 자리까지 표기한다.

문제 1. 산술평균은?

문제 2. 최빈값은?

문제 3. 중앙값은?

문제 4. 편차의 합은?

문제 5. 모집단이라면 분산은?

문제 6. 모집단이라면 표준편차는?

문제 7. 표본이라면 분산은?

문제 8. 표본이라면 표준편차는?

2.2.4 **체비셰프 부등식(Chebyshev inequality)**

어떠한 자료에서도 전체 관찰치의 평균에서 $\pm k$ 표준편차 이내에 포함될 관찰치의 비율은 최소한 $1-\frac{1}{k^2}$ 이다.

k	하한값 $\mu - k\sigma$	상한값 $\mu + k\sigma$	포함 비율 $1-\frac{1}{k^2}$
1.25	μ-1.25σ	μ +1.25 σ	0.3600
1.50	μ -1.50 σ	μ +1.50 σ	0.5556
2.00	μ -2.00 σ	μ +2.00 σ	0.7500
2.50	μ -2.50 σ	μ +2.50 σ	0.8400

k 는 (단위가 없는) 배수이다.
$k\,\sigma$의 단위는 σ의 단위와 동일하다.
μ, $k\,\sigma$ 모두 자료의 단위와 동일하므로, 덧셈과 뺄셈이 가능하다.

연습문제 13. 어떤 학교의 1 학년 전교생은 400 명이다. 이들 학생의 성적 평균은 80 점이고, 표준편차는 5 점이다.

문제 1. 80 점과 90 점 사이의 점수를 받은 학생 비율은 얼마인가?

문제 2. 75 점~95 점 구간 밖의 점수를 받은 학생 비율은 최소 $\frac{1}{9}$이다. Ans. T, F

연습문제 정답

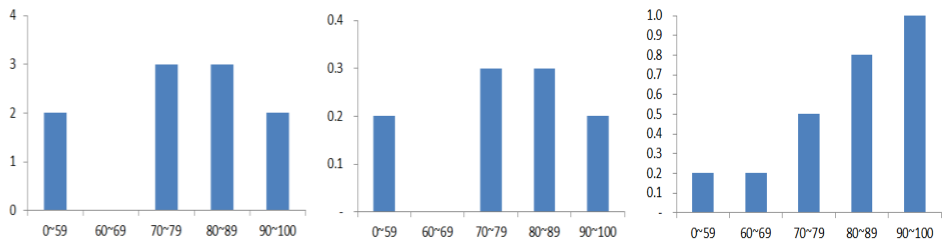
1. (1) A, (2) f_3, (3) f_4 = 네 번째 계급의 빈도 = 5, (4) $\frac{f_5}{N} = \frac{2}{50} = 0.04$

2. (1) 수평축은 계급, 수직축은 도수, (2) 수평축은 계급, 수직축은 누적도수

3. (1)

점수	빈도수	상대빈도수	누적상대빈도수
0~59	2	0.2	0.2
60~69	0	-	0.2
70~79	3	0.3	0.5
80~89	3	0.3	0.8
90~100	2	0.2	1.0
합계	10	1.0	

(2)



(3) 0 (해당 계급에 속하는 데이터가 없으면 그 계급의 빈도수는 0이다.)

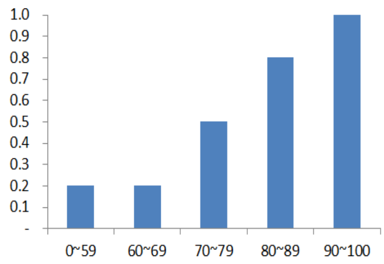
(4) 10 (도수분포그래프에서 그래프의 높이는 빈도와 동일하다. 그러므로 그래프 높이의 합은 데이터의 수와 일치한다.)

(5) (3)에서 본 바와 같이 빈도의 최소값은 0이므로, 빈도를 합계로 나눈 수인 상대빈도도 최소값은 0이 된다.

(6) 1.0. 오직 하나의 계급에서만 빈도가 존재하고 나머지 계급에서는 빈도가 없다고 하자. 예를 들어, 0~89까지는 모두 빈도가 없고 90~100 구간에 10명의 점수가 존재한다고 하자. 이 경우 90~100 구간의 빈도수와 전체 빈도수는 동일하다. 이 경우, 상대빈도값은 1.0이 된다.

(7) False. 상대빈도 그래프의 합은 1.0이 아닐 수 있다. 연습문제 3의 경우, 상대빈도 그래프 높이의 합은 2.7이다.

(8) True. 상대빈도 그래프 최우측 그래프 높이는 항상 1.0이다.

(9) 

이 그래프에서 알 수 있듯이 해당 구간의 빈도가 0이면 누적그래프는 그 구간은 전 구간과 높이가 같다.

4. (1) 최소 0명, 최대 3명 (2) 0.200 – 0.150 = 0.050

(3) 최소값은 0.200 (해당 계급의 상대빈도값이 0인 경우)
최대값은 1.000 (해당 계급의 상대빈도값이 0.800인 경우)

5. (1) $\sum_{i=1}^{5} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$ (2) $\sum_{i=10}^{15} X_i = X_{10} + X_{11} + \cdots + X_{15}$

(3) $\sum_{i=8}^{10} X_i = X_8 + X_9 + X_{10}$ (4) $\sum_{i=3}^{5} X_i$ (5) $\sum_{i=3}^{15} X_i$ (6) $\sum_{i=1}^{5} X_i$

6. (1) 5 + 70 + 71 = 216,

(2) $X_1+X_2+X_3+X_4$ = 75 + 70 + 71 + 63 = 279,

(3) $\mu = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + \cdots + X_8) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i$,

여기서, μ = 모집단 평균, X_i = i번째 학생 점수

(4) $\frac{1}{8}(75 + 70 + \cdots + 65) = 75.00$, (5) $\overline{X} = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + \cdots + X_8) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i$,

여기서, $\overline{X}$ = 표본평균,

(6) $\frac{1}{8}(75 + 70 + \cdots + 65) = 75.00$

7.

학급	수강생 수	조사한 학생의 수	조사한 학생의 성적 평균	모집단 평균	표본 평균
1	89	20	43	해당 없음	$\overline{X}$ = 43
2	20	20	93	μ = 93	해당 없음
3	37	20	32	해당 없음	$\overline{X}$ = 43
4	20	20	32	μ = 32	해당 없음
5	74	20	98	해당 없음	$\overline{X}$ = 98
6	43	20	87	해당 없음	$\overline{X}$ = 87
7	89	20	84	해당 없음	$\overline{X}$ = 84
8	20	20	55	μ = 55	해당 없음
9	60	20	64	해당 없음	$\overline{X}$ = 64
10	97	20	73	해당 없음	$\overline{X}$ = 73

8. (1)

반	수강생(명)	평균(D)	가중치(E)	D*E
A	50	80	0.5	40
B	30	70	0.3	21
C	20	85	0.2	17
합계	100		1.0	78

(2) 가중평균 = $\frac{50}{90}6.5 + \frac{30}{90}6.0 + \frac{10}{90}5.5 = 6.22$시간

9. (1) 최빈값 = B, 중앙값 = B,

(2) 평균 3.4, 최빈값 2, 중앙값 3.5 (5번째 값인 3과 6번째 값인 4의 평균)

10. (1)

번호	나이 Group A	편차	편차 절대값	편차 제곱
1	10	-20	20	400
2	20	-10	10	100
3	30	-	-	-
4	30	-	-	-
5	30	-	-	-
6	40	10	10	100
7	50	20	20	400
합계	210	-	60	1,000
평균	30	-	8.57	142.86

나이 Group B	편차	편차 절대값	편차 제곱
24	-6	6	36
27	-3	3	9
30	-	-	-
30	-	-	-
30	-	-	-
33	3	3	9
36	6	6	36
210	-	18	90
30	-	2.57	12.86

(2) Group A의 표준편차 = 11.95, Group B의 표준편차 = 3.59

(3)

번호	나이 Group A	편차	편차 절대값	편차 제곱
1	x_1	$x_1 - \mu$	$\lvert x_1 - \mu \rvert$	$(x_1 - \mu)^2$
2	x_2	$x_2 - \mu$	$\lvert x_2 - \mu \rvert$	$(x_2 - \mu)^2$
⋮				
i	x_i	$x_i - \mu$	$\lvert x_i - \mu \rvert$	$(x_i - \mu)^2$

⋮				
7	x_7	$x_7-\mu$	$\lvert x_7-\mu\rvert$	$(x_7-\mu)^2$
합계	$\sum_{i=1}^{7} x_i$	$\sum_{i=1}^{7} (x_i-\mu)$	$\sum_{i=1}^{7} \lvert x_i-\mu\rvert$	$\sum_{i=1}^{7} (x_i-\mu)^2$
평균	$\frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$	$\frac{\sum_{i=1}^{7} (x_i-\mu)}{7}$	$\frac{\sum_{i=1}^{7} \lvert x_i-\mu\rvert}{7}$	$\frac{\sum_{i=1}^{7} (x_i-\mu)^2}{7}$

(4) $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\mu)^2}{7}}$ (5) Group A의 표본의 분산 = 166.67, 표준편차 = 12.91

(6) 분산 = S^2 = $\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{X})^2}{7-1}$, 표준편차 = S = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{X})^2}{7-1}}$

11. (1) 4.5, (2) 4.5, (3) 0.0, (4) 편차 절대값의 평균, (5) 편차 제곱의 평균, (6) 1.25, (7) 1.12, (8) 1.67, (9) 1.29

12. (1) 250, (2) 0, (3) 0, (4) 0, (5) 187,500, (6) 433, (7) 250,000, (8) 500

13. (1) 80점은 평균보다 1표준편차 작은 값, 90점은 평균보다 1표준편차 큰 값에 해당하므로 체비세프 부등식에서 k= 2에 해당한다. 그러므로, 최소 $1-\frac{1}{2^2}$ = 0.75, 즉 최소 0.75이다

(2) False. 그 구간에 포함될 확률이 최소 $1-\frac{1}{3^2}$ = 최소 $\frac{8}{9}$이므로, 포함되지 않을 비율은 최대 $\frac{1}{9}$이다.