Bài 3. CÁC CÔNG THỨC XÁC SUẤT – công thức Bayes

Th.S Hà Minh Tuấn

3.2.3. Công thức xác suất đầy đủ và Bayes.

a) Công thức xác suất đầy đủ

Cho hệ đầy đủ xung khắc từng đôi các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Khi đó với A là một biến cố bất kì ta có

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(A / A_j)$$

Chứng minh.

VD 10. Một cửa hàng bán hai loại bóng đèn cùng kích cỡ gồm: 70 bóng màu trắng với tỉ lệ bóng hỏng là 1% và 30 bóng màu vàng với tỉ lệ hỏng 2%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn từ cửa hàng này. Tính xác suất để người này mua được bóng đèn tốt ?

Giải

Gọi B: "khách chọn được bóng đèn tốt",

A_1: "khách chọn được bóng đèn tốt màu trắng",

A_2: "khách chọn được bóng đèn tốt màu vàng".

Suy ra hệ $\{A_1,\ A_2\}$ là đầy đủ.

Ta có:

$$P(B) = P(A_1)P\left(B\middle|A_1\right) + P(A_2)P\left(B\middle|A_2\right)$$

$$= \frac{70}{70+30}.0,99 + \frac{30}{70+30}.0,98 = 0,987.$$

Chú ý

Trong trắc nghiệm ta dùng sơ đồ giải nhanh như sau:

Nhánh 1: P(đèn tốt màu trắng) = 0,7.0,99.

Nhánh 2: P(đèn tốt màu vàng) = 0,3.0,98.

Suy ra:

P(đèn tốt) = tổng xác suất của 2 nhánh = 0,987.

VD 11. Chuồng thỏ 1 có 3 con thỏ trắng và 4 con thỏ đen; chuồng 2 có 5 thỏ trắng và 3 thỏ đen. Quan sát thấy có 1 con thỏ chạy từ chuồng 1 sang chuồng 2, sau đó có 1 con thỏ chạy ra từ chuồng 2. Tính xác suất để con thỏ chạy ra từ chuồng 2 là thỏ trắng ?

Giải

Gọi T: "con thỏ chạy ra từ chuồng 2 là thỏ trắng",

T_1: "con thỏ chạy ra từ chuồng 1 là thỏ trắng",

$\overline{T}_1$: "con thỏ chạy ra từ chuồng 1 là thỏ đen".

Suy ra hệ $\{T_1, \overline{T}_1\}$ là đầy đủ.

Ta có:

$$P(T) = P(T_1)P\left(T \middle| T_1\right) + P(\overline{T}_1)P\left(T \middle| \overline{T}_1\right)$$

$$= \frac{3}{7}.\frac{6}{9} + \frac{4}{7}.\frac{5}{9} = \frac{38}{63}.$$

Sơ đồ

$$P(\text{thỏ 1 trắng và thỏ 2 trắng}) = \frac{3}{7}.\frac{6}{9}.$$

$$P(\text{thỏ 1 đen và thỏ 2 trắng}) = \frac{4}{7}.\frac{5}{9}.$$

b) Công thức Bayes

Cho hệ đầy đủ xung khắc từng đôi các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Khi đó với A là một biến cố bất kì ta có

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k A)}{P(A)} = \frac{P(A_k)P(A / A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(A / A_j)}.$$

Nhà Toán học người Anh
Thomas Bayes (1702 – 1761).

Ví dụ. Có 2 lô hàng, mỗi lô chứa 15 sản phẩm, trong đó lô I chứa 10 tốt, 5 xấu, lô 2 chứa 8 tốt, 7 xấu. Chọn ngẫu nhiên từ lô I ra 2 sp rồi bỏ vào lô II. Sau đó, từ lô II lấy ra 2 sp.

a) Tính xác suất để trong hai sản phẩm lấy ra từ lô II có 1 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu.

b) Giả sử chọn được 1 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu từ lô II. Tính xác suất đã lấy được một sản phẩm tốt và 1 sản phẩm từ lô I.

Giải. Gọi A_j *(j=0,1,2)* là các biến cố lấy được j sản phẩm tốt từ lô I. Khi đó các biến cố A_0, A_1, A_2 là một hệ đầy đủ các biến cố sơ cấp. Các xác suất tương ứng

$$P\left(A_0\right)=\frac{C_{10}^0 C_5^2}{C_{15}^2}=\frac{10}{105}; P\left(A_1\right)=\frac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{15}^2}=\frac{50}{105}; P\left(A_2\right)=\frac{C_{10}^2 C_5^0}{C_{15}^2}=\frac{45}{105}.$$

Gọi A là biến cố chọn được 1 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu từ lô II. Khi đó theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P\left(A\right)=P\left(A_0\right)P\left(A/A_0\right)+P\left(A_1\right)P\left(A/A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(A/A_2\right).$$

Xét $P(A/A_0)$. Khi A_0 xảy ra tức là ta đã chọn được 2 sản phẩm xấu từ lô I để bỏ vào lô II. Như vậy, trong lô II lúc này có đến 17 sản phẩm gồm 8 tốt, 9 xấu. Khi đó

$$P\left(A / A_0\right)=\frac{C_8^1 C_9^1}{C_{17}^2}=\frac{72}{36}.$$

Lý luận tương tự ta có

$$P\left(A / A_1\right)=\frac{C_9^1 C_8^1}{C_{17}^2}=\frac{72}{136};\ P\left(A / A_2\right)=\frac{C_{10}^2 C_7^0}{C_{17}^2}=\frac{70}{136}.$$

Suy ra xác suất cần tính là $P(A) = 0{,}5231$

Đề bài yêu cầu tính xác suất của biến cố A_1 với điều kiện đã biết biến cố A xảy ra trước đó. Nên theo công thức Bayes, xác suất cần tính là

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{P(A)}=\frac{\frac{50}{105}.\frac{72}{136}}{0,5231}=0,4819.$$

VD 12. Xét tiếp VD 10. Giả sử khách hàng chọn mua được bóng đèn tốt. Tính xác suất để người này mua được bóng đèn màu vàng ?

Giải. Đặt tên biến cố như VD 10.

Ta có:

$$P\left(A_2 \middle| B\right) = \frac{P(A_2)P\left(B \middle| A_2\right)}{P(B)} = \frac{0,3.0,98}{0,987} = \frac{14}{47}.$$

Nhận xét

Nếu ta dùng sơ đồ như VD 10. Khi đó:

P(đèn vàng / tốt) = (nhánh 2) **chia** (tổng 2 nhánh).

Phân biệt các bài toán áp dụng công thức Nhân – Đầy đủ – Bayes

Trong 1 bài toán, ta xét 3 biến cố $A_1,\ A_2,\ B.$

1) Nếu bài toán yêu cầu tìm xác suất của $A_1 \cap B,$ $A_2 \cap B$ thì đây là bài toán công thức nhân.

Xác suất là *xác suất tích của từng nhánh*.

2) Nếu bài toán yêu cầu tìm xác suất của B và $\{A_1, A_2\}$ đầy đủ thì đây là bài toán áp dụng công thức đầy đủ. Xác suất bằng *tổng 2 nhánh*.

Phân biệt các bài toán áp dụng công thức Nhân – Đầy đủ – Bayes

3) Nếu bài toán yêu cầu tìm xác suất của $A_1,\ A_2$ và cho biết B *đã xảy ra*, đồng thời hệ $\{A_1,\ A_2\}$ đầy đủ thì đây là bài toán áp dụng công thức Bayes. Xác suất là *tỉ số* giữa *nhánh cần tìm* với *tổng của hai nhánh*.

VD 13. Nhà máy X có 3 phân xưởng A, B, C tương ứng sản xuất ra 20%, 30% và 50% tổng sản phẩm của nhà máy. Giả sử tỉ lệ sản phẩm hỏng do các phân xưởng A, B, C tương ứng sản xuất ra là 1%, 2% và 3%.

Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm do nhà máy X sản xuất ra.

1) Tính xác suất (tỉ lệ) sản phẩm này là hỏng ?

2) Tính xác suất sản phẩm này hỏng và do phân xưởng A sản xuất ra ?

3) Biết rằng sản phẩm được chọn là hỏng, tính xác suất sản phẩm này là do phân xưởng A sản xuất ra ?

Giải

Gọi H: "sản phẩm được chọn là hỏng",

A: "sản phẩm được chọn là của phân xưởng A",

B: "sản phẩm được chọn là của phân xưởng B",

C: "sản phẩm được chọn là của phân xưởng C".

Suy ra hệ $\{A,\ B,\ C\}$ là đầy đủ.

$$1)\ P(H) = P(A)P\left(H\middle|A\right) + P(B)P\left(H\middle|B\right) + P(C)P\left(H\middle|C\right)$$

$$= 0,2.0,01 + 0,3.0,02 + 0,5.0,03 = 0,023.$$

$$2)\ P(AH) = P(A)P\left(H\middle|A\right) = 0,2.0,01 = 0,002.$$

$$3)\ P\left(A\middle|H\right) = \frac{P(A)P\left(H\middle|A\right)}{P(H)} = \frac{0,002}{0,023} = \frac{2}{23}.$$

Sơ đồ

$$\text{P(sản phẩm hỏng của phân xưởng } A) = 0,2.0,01$$

$$\text{P(sản phẩm hỏng của phân xưởng } B) = 0,3.0,02$$

$$\text{P(sản phẩm hỏng của phân xưởng } C) = 0,5.0,03$$

VD 14. Tỉ lệ ôtô tải, ôtô con và xe máy đi qua đường X có trạm bơm dầu là 5 : 2 : 13. Xác suất để ôtô tải, ôtô con và xe máy đi qua đường này vào bơm dầu lần lượt là 0,1; 0,2 và 0,15. Biết rằng có 1 xe đi qua đường X vào bơm dầu, tính xác suất để đó là ôtô con ?

A. $\dfrac{11}{57}$; B. $\dfrac{10}{57}$; C. $\dfrac{8}{57}$; D. $\dfrac{7}{57}$.

………………………………………………………………………………

3.1. Công thức Bernoulli.

3.4.1. Định nghĩa. Tiến hành n phép thử độc lập trong những điều kiện như nhau. Giả sử ở mỗi phép thử chỉ có, biến cố A xảy ra với xác suất p không đổi, hoặc không xảy ra với xác suất $q = 1 - p$. Khi đó với mỗi $0 \leq k \leq n$, ta có công thức Bernoulli để tính xác suất biến cố A xảy ra đúng k lần trong n phép thử trên là

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Hệ Quả. Với các giả thiết như trên

a) Xác suất để trong n phép thử, biến cố A không xảy ra lần nào là q^n.

b) Xác suất để trong n phép thử, chỉ luôn xảy ra biến cố A là p^n.

Ví dụ. Một nhà máy sản xuất với tỉ lệ được sản phẩm tốt là 60%. Cho máy sản xuất 5 sản phẩm. Tính xác suất để trong 5 sp được chọn có

a) 3 sản phẩm tốt.

b) Ít nhất 3 sản phẩm tốt.

Giải. Gọi A_k (k = 0, 1, …, 5) là biến cố có đúng k sản phẩm tốt. Khi đó, ta xem việc nhà máy sản xuất ra 1 sản phẩm là một phép thử. Như vậy ta có 5 phép thử độc lập được thực hiện trong những điều kiện như nhau, với xác suất sản xuất được sản phẩm tốt là p = 0,6 và sản phẩm xấu là q = 0,4

a) Theo công thức Bernoulli, xác suất để sản xuất được đúng 3 sản phẩm tốt là

$$P\left(A_3\right) = P_5\left(3\right) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = C_5^3\left(0,6\right)^3\left(0,4\right)^2 = 0,3456.$$

b) Trong 5 sản phẩm có ít nhất 3 sản phẩm tốt

$$\begin{aligned} P\left(A_3 + A_4 + A_5\right) &= P(A_3) + P\left(A_4\right) + P\left(A_5\right) \\ &= C_5^3 p^3 q^{5-3} + C_4^4 p^4 q^1 + p^5 = C_5^3\left(0,6\right)^3\left(0,4\right)^2 \\ &= 0,68256. \end{aligned}$$

Ví dụ. Một xạ thủ bắn 10 viên đạn, với giả thiết xác suất bắn trúng mục tiêu luôn không đổi là 0.8. Tính xác suất trong 10 viên đạn có 7 viên trúng mục tiêu.