Biến Ngẫu Nhiên và Hàm mật độ

....

§1. BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ HÀM MẬT ĐỘ

1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên

- Xét một phép thử với không gian mẫu Ω. Giả sử, ứng với mỗi biến cố sơ cấp $\omega \in \Omega$, ta liên kết với 1 số thực $X(\omega) \in \mathbb{R}$, thì X được gọi là một ***biến ngẫu nhiên***.

Tổng quát, biến ngẫu nhiên (BNN) X của một phép thử với không gian mẫu Ω là một ánh xạ

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = x. \end{aligned}$$

Giá trị x được gọi là một giá trị của biến ngẫu nhiên X.

VD 1. Người A mua một loại bảo hiểm tai nạn trong 1 năm với phí là 70 ngàn đồng. Nếu bị tai nạn thì công ty sẽ chi trả 3 triệu đồng. Gọi X là số tiền người A có được sau 1 năm mua bảo hiểm này. Khi đó, ta có

Phép thử là: “mua bảo hiểm tai nạn”.
Biến cố là T: “người A bị tai nạn”.
Không gian mẫu là $\Omega = \{T, \bar{T}\}$.

Vậy $X(T) = 2,93$ (triệu), $X(\bar{T}) = 0,07$ (triệu).

- Nếu $X(\Omega)$ là 1 tập hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ hay vô hạn đếm được thì X được gọi là ***biến ngẫu nhiên rời rạc***. Để cho gọn, ta viết là $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.
- Nếu $X(\Omega)$ là 1 khoảng của $\mathbb{R}$ (hay cả $\mathbb{R}$) thì X được gọi là ***biến ngẫu nhiên liên tục***.

Chú ý

Trong thực nghiệm, các biến ngẫu nhiên thường là rời rạc. Khi biến ngẫu nhiên rời rạc X có các giá trị đủ nhiều trên 1 khoảng của $\mathbb{R}$, thì ta xem X là biến ngẫu nhiên liên tục. Thực chất là, các biến ngẫu nhiên liên tục được dùng làm xấp xỉ cho các biến ngẫu nhiên rời rạc khi tập giá trị của biến ngẫu nhiên rời rạc đủ lớn.

- Cho biến ngẫu nhiên X và hàm số $y = \varphi(x)$.
  Khi đó, biến ngẫu nhiên $Y = \varphi(X)$ được gọi là hàm của biến ngẫu nhiên X.

1.2. Hàm mật độ

a) Biến ngẫu nhiên rời rạc

Cho BNN rời rạc $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Giả sử $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ với xác suất tương ứng

là $P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \equiv P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Ta định nghĩa

- **Bảng phân phối xác suất của *X* là**

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

- **Hàm mật độ của *X* là**

$$f(x)=\begin{cases} p_i \ \ khi \ \ x=x_i, \\ 0 \ \ khi \ \ x\neq x_i, \forall i. \end{cases}$$

Chú ý

- $p_i \geq 0; \ \sum p_i = 1, \ i = 1, \ 2, \ldots$
- Nếu $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ thì $P(X = x) = 0.$
- $P(a < X \leq b) = \sum\limits_{a < x_i \leq b} p_i.$

<u>VD 2.</u> Cho BNN rời rạc X có bảng phân phối xác suất:

X	-1	0	1	3	5
P	$3a$	a	$0,1$	$2a$	$0,3$

1) Tìm a và tính $P(-1 < X \leq 3)$.

2) Lập bảng phân phối xác suất của hàm $Y = X^2$.

Giải

1) Ta có:

$$\sum p_i = 1 \Rightarrow 3a + a + 0{,}1 + 2a + 0{,}3 = 1 \Rightarrow a = 0{,}1.$$

Vậy $P(-1 < X \le 3)$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3)$$

$$= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}4.$$

2) Bảng phân phối xác suất của hàm $Y = X^2$:

Y	1	0	1	9	25
P	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3

Y	0	1	9	25
P	0,1	0,4	0,2	0,3

VD 3. Một xạ thủ có 4 viên đạn, bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,8. Biết rằng, nếu có 1 viên trúng mục tiêu hoặc hết đạn thì dừng. Gọi X là số viên đạn xạ thủ đã bắn, hãy lập bảng phân phối xác suất của X?

Giải. Ta có: $X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Gọi A_i: "viên đạn thứ i trúng mục tiêu", $i = \overline{1;\ 4}$.

Ta có:

- $P(X = 1) = P(A_1) = 0,8$.
- $P(X = 2) = P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0,2.0,8 = 0,16$.

- $P(X = 3) = 0,2.0,2.0,8 = 0,032.$

- $P(X = 4) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$

$$= 0,2.0,2.0,2.0,8 + 0,2.0,2.0,2.0,2$$
$$= 0,008.$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X:

X	1	2	3	4
P	0,8	0,16	0,032	0,008

VD 4. Một hộp có 3 viên phấn trắng và 2 viên phấn đỏ. Một người lấy ngẫu nhiên mỗi lần 1 viên (không trả lại) từ hộp đó ra cho đến khi lấy được 2 viên phấn đỏ. Gọi X là số lần người đó lấy phấn. Hãy lập bảng phân phối xác suất và hàm mật độ của X?

Giải. Ta có: $X = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Gọi A_i: "viên phấn được lấy lần thứ i là đỏ", $i = \overline{1;\ 5}$.

Ta có:

- $P(X = 2) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P\left(A_2 \middle| A_1\right)$

$$= \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = 0{,}1.$$

- $$P(X=3) = P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) = \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3} = 0,2.$$

- $$P(X=4) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4) = 0,3.$$

- $P(X=5)=1-\dfrac{1}{10}-\dfrac{2}{10}-\dfrac{3}{10}=0,4.$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	2	3	4	5
P	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$

Hàm mật độ của X là:

$$f(x)=\begin{cases}0,1 & khi\ x=2,\\ 0,2 & khi\ x=3,\\ 0,3 & khi\ x=4,\\ 0,4 & khi\ x=5,\\ 0 & khi\ x\neq 2,3,4,5.\end{cases}$$

b) Biến ngẫu nhiên liên tục

Hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được gọi là ***hàm mật độ*** của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu:

$$\boxed{P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx,\ \forall a,b\in\mathbb{R}.}$$

Nhận xét

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ và $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

- Khi $f(x)$ liên tục trên lân cận của điểm a, ta có:

$$P(a-\varepsilon \le X \le a+\varepsilon) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)dx$$

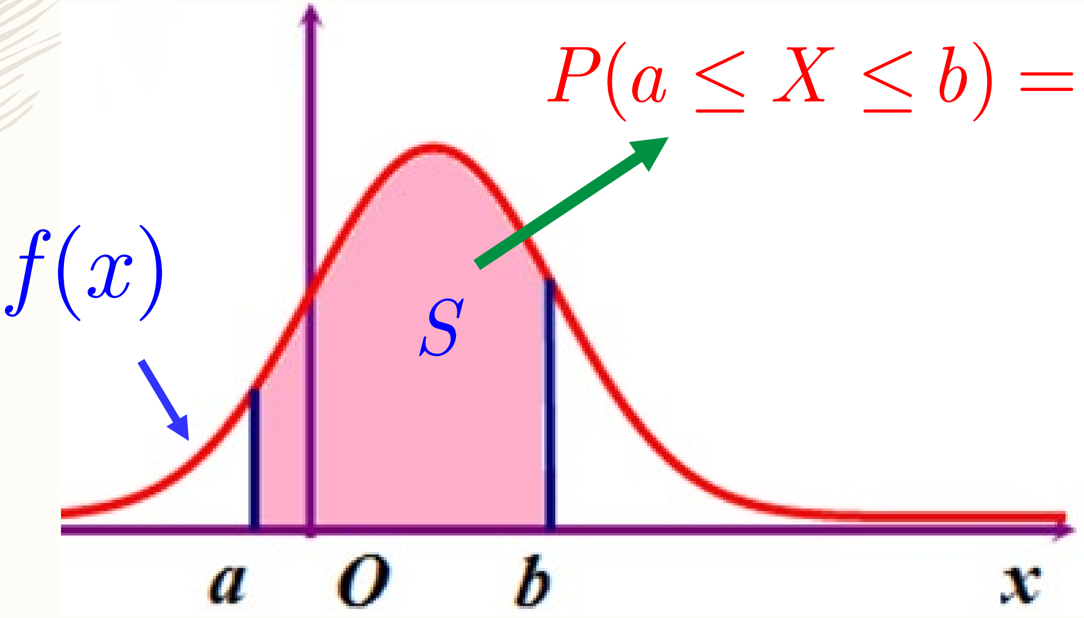
$$\Rightarrow P(X=a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)dx = 0.$$

Vậy $P(a \le X < b) = P(a < X \le b)$

$$= P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

- Ý nghĩa hình học, xác suất của biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong $[a; b]$ bằng diện tích hình thang cong giới hạn bởi $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ và Ox.

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



<u>VD 5.</u> Chứng tỏ $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0;\ 1] \\ 0, & x \notin [0;\ 1] \end{cases}$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X và tính $P(0,5 \le X < 3)$?

Giải

- Ta có: $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{1} 4x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

Vậy $f(x)$ là hàm mật độ của BNN X.

- $P(0,5 \leq X < 3) = \int_{0,5}^{3} f(x)dx = \int_{0,5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$

$$= \int_{0,5}^{1} 4x^3 dx = x^4 \Big|_{0,5}^{1} = \frac{15}{16}.$$

VD 6. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \dfrac{k}{x^2}, & x \geq 2. \end{cases}$$ Tính $P(-3 < X < 5)$?

Giải. Do $f(x)$ là hàm mật độ của X, nên:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow k\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{x}\Bigg|_2^{+\infty} = 1 \Rightarrow k = 2.$$

$$\text{Vậy } P(-3 < X < 5) = \int_{-3}^{5} f(x)dx$$

$$= 2\int_{2}^{5} \frac{dx}{x^2} = -\frac{2}{x}\Big|_{2}^{5} = 0,6.$$

………………………………………………………………………………