Phân Phối Poison

§3. PHÂN PHỐI POISSON

3.1. Bài toán dẫn đến phân phối Poisson

- Giả sử các vụ tai nạn giao thông ở vùng A xảy ra một cách ngẫu nhiên, độc lập với nhau và trung bình 1 ngày có λ vụ tai nạn. Gọi X là số vụ tai nạn giao thông xảy ra trong 1 ngày ở vùng A.
- Chia 24 giờ trong ngày thành n khoảng thời gian sao cho ta có thể coi rằng trong mỗi khoảng thời gian đó có nhiều nhất 1 vụ tai nạn xảy ra, và khả năng xảy ra tai nạn giao thông trong mỗi khoảng thời gian bằng $\dfrac{\lambda}{n}$.

  Khi đó, $X \in B\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

- Ta có: $P(X=k)=C_n^k\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\cdot\frac{1}{(n-\lambda)^k.n^{-k}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(n-\lambda)^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Suy ra:

$$P(X=k)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}.$$

3.2. Định nghĩa phân phối Poisson

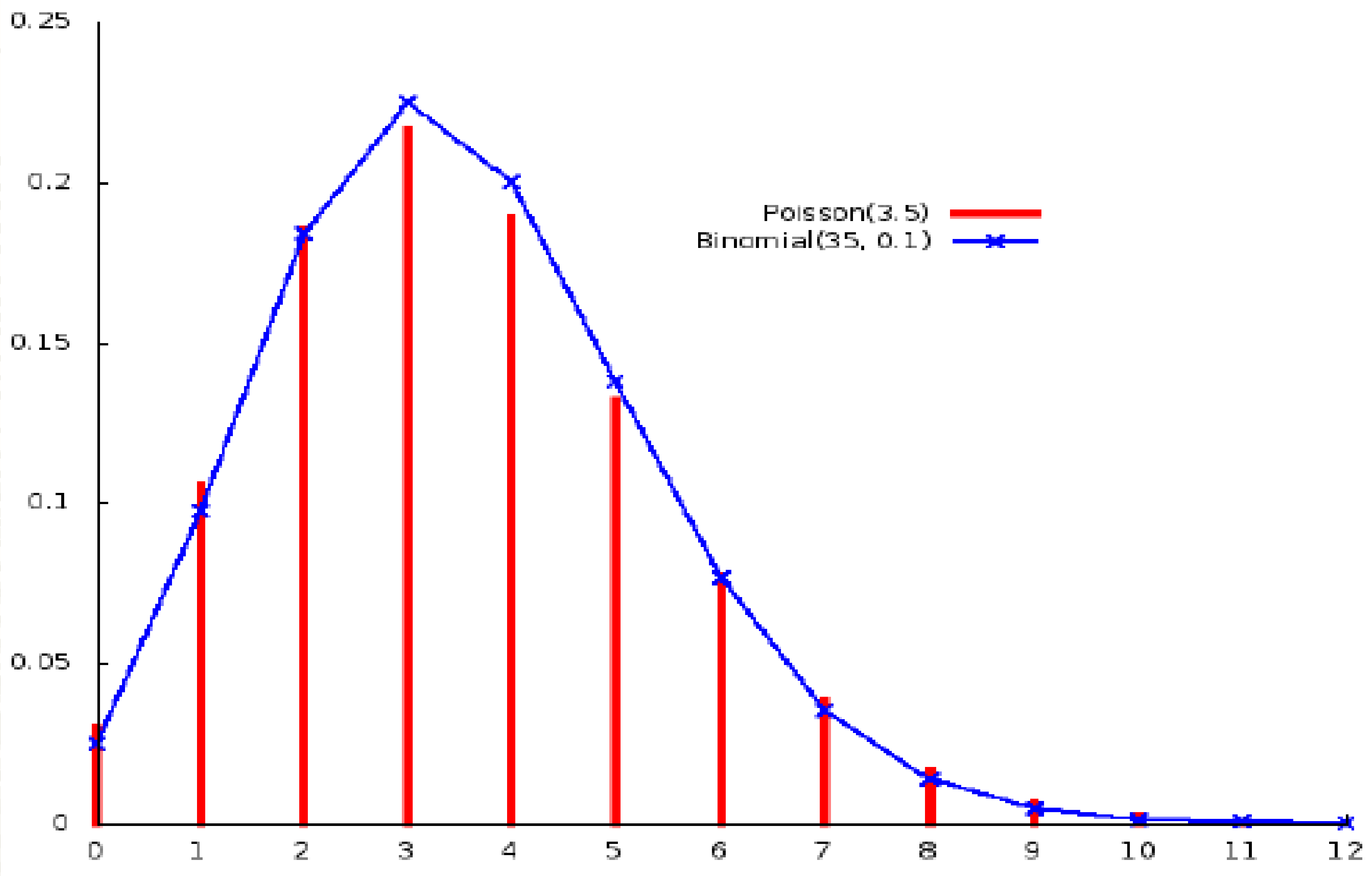
Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối Poisson tham số $\lambda > 0$, ký hiệu là $X \in P(\lambda)$ hay $X \sim P(\lambda)$, nếu X nhận các giá trị 0, 1, 2,…, n,… với xác suất:

$$\boxed{p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n, \ldots).}$$

Trong đó, λ là trung bình số lần xuất hiện biến cố nào đó mà ta quan tâm.

Nhận xét

- Phân phối Poisson không phải là phân phối xác suất chính xác. Tuy vậy, phân phối Poisson rất thuận tiện cho việc mô tả và tính toán.
- Phân phối Poisson thường gắn với yếu tố thời gian.



Phân phối $P(3,5)$ và phân phối $B(35; 0,1)$

Siméon Denis Poisson

(1781 - 1840)

3.3. Các số đặc trưng của $X \sim P(\lambda)$

$$\boxed{EX = VarX = \lambda;\ \ ModX = x_0 : \lambda - 1 \le x_0 \le \lambda.}$$

VD 1. Quan sát tại siêu thị A thấy trung bình 5 phút có 18 khách đến mua hàng.

1) Tính xác suất để trong 7 phút có 25 khách đến siêu thị A ?
2) Tính xác suất để trong 2 phút có từ 3 đến 5 khách đến siêu thị A ?
3) Tính số khách chắc chắn nhất sẽ đến siêu thị A trong 1 giờ ?

Giải

Gọi X là số khách đến siêu thị A mua hàng.
Ta có: $X = \{0;\ 1;\ 2;...\},\ X \in P(\lambda)$.

1) Cứ 5 phút có 18 khách đến mua hàng,
7 phút có λ khách đến mua hàng $\Rightarrow \lambda = 25,2$.

Vậy $P(X = 25) = e^{-25,2}.\dfrac{(25,2)^{25}}{25!} = 0,0795$.

2) Ta có: $\lambda = 7,2.$

Vậy $P(3 \le X \le 5) = p_3 + p_4 + p_5$

$$= e^{-7,2}\left[\frac{(7,2)^3}{3!} + \frac{(7,2)^4}{4!} + \frac{(7,2)^5}{5!}\right] = 0,2504.$$

3) Ta có: $\lambda = \dfrac{60 \times 18}{5} = 216$

$$\Rightarrow \lambda - 1 \le ModX \le \lambda \Rightarrow ModX = 215 \vee 216.$$

Vậy có 215 hay 216 khách chắc chắn nhất sẽ đến siêu thị A mua hàng trong 1 giờ.

VD 2. Quan sát thấy trung bình 1 phút có 3 ôtô đi qua trạm thu phí. Biết xác suất có ít nhất 1 ôtô đi qua trạm thu phí trong t phút bằng 0,9. Giá trị của t là:

A. 0,9082 phút; B. 0,8591 phút;
C. 0,8514 phút; D. 0,7675 phút.

Giải. Gọi X là số ôtô đi qua trạm thu phí trong t phút .
Ta có: $X \in P(3t)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - p_0 \Rightarrow 0,9 = 1 - e^{-3t}$$

$$\Rightarrow e^{-3t} = 0,1 \Rightarrow -3t = \ln(0,1) \Rightarrow t = 0,7675 \Rightarrow D.$$

VD 3. Quan sát thấy trung bình 1 ngày (24 giờ) có 12 chuyến tàu vào cảng A. Chọn ngẫu nhiên liên tiếp 6 giờ trong 1 ngày. Tính xác suất để 2 trong 6 giờ ấy, mỗi giờ có đúng 1 tàu vào cảng A.

Giải. Gọi X là số tàu vào cảng A trong 1 giờ, ta có:

$$X \in P(0,5) \Rightarrow P(X = 1) = \frac{e^{-0,5}.(0,5)^1}{1!} = 0,3033.$$

Gọi Y là số lần có đúng 1 tàu vào cảng A mỗi giờ trong 6 giờ đã chọn.

Số tàu vào cảng A trong mỗi giờ là độc lập với xác suất

$$p = P(X = 1) = 0,3033 \Rightarrow Y \in B(6;\ 0,3033).$$

Vậy $p_2 = C_6^2.(0,3033)^2.(1 - 0,3033)^4 = 0,3251.$

………………………………………………………………………