Bài 3. CÁC CÔNG THỨC XÁC SUẤT – công thức nhân

Th.S Hà Minh Tuấn

3.2. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- Xét phép thử: 3 người A, B và C thi tuyển vào một công ty. Gọi

A: "người A thi đỗ", B: "người B thi đỗ",
C: "người C thi đỗ", H: "có 2 người thi đỗ".

Khi đó, không gian mẫu Ω là:

$$\{ABC, \bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}B\bar{C}, A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}\bar{C}\}.$$

Ta có:

$$A = \{ABC, A\bar{B}C, AB\bar{C}, A\bar{B}\bar{C}\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8};$$

$$H = \{\bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}\} \Rightarrow P(H) = \frac{3}{8}.$$

Lúc này, biến cố: “2 người thi đỗ trong đó có A” là:

$$AH = \{A\bar{B}C, AB\bar{C}\} \text{ và } P(AH) = \frac{2}{8}.$$

- Bây giờ, ta xét phép thử là: A, B, C thi tuyển vào một công ty và biết thêm thông tin có 2 người thi đỗ.

Không gian mẫu trở thành H và A trở thành AH.

Gọi $A|H$: “A thi đỗ biết rằng có 2 người thi đỗ” thì ta

được: $P\left(A|H\right) = \dfrac{2}{3} = \dfrac{P(AH)}{P(H)}.$

3.2.1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Xác suất có điều kiện. *Xác suất có điều kiện* của biến cố A, biết biến cố B đã xảy ra, kí hiệu là $P(A/B)$, là xác suất của biến cố A được tính trong điều kiện biến cố B đã xảy ra rồi. Xác suất có điều kiện được tính theo công thức

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

VD 4. Một nhóm 10 sinh viên gồm 3 nam và 7 nữ trong đó có 2 nam 18 tuổi và 3 nữ 18 tuổi. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên từ nhóm đó.

Gọi A: "sinh viên được chọn là nữ",

B: "sinh viên được chọn là 18 tuổi".

Hãy tính $P\left(A\middle|B\right)$, $P\left(B\middle|A\right)$?

Giải. Ta có:

$$P(A) = 0,7;\ P(B) = 0,5;\ P(A \cap B) = 0,3.$$

Suy ra: $P\left(A\middle|B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6;$

$$P\left(B\middle|A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}.$$

Cách khác:

$$P\left(A\middle|B\right)=\frac{\text{Soá sinh vieân nöõ 18 tuoåi}}{\text{Soá sinh vieân 18 tuoåi}}=\frac{3}{5},$$

$$P\left(B\middle|A\right)=\frac{\text{Soá sinh vieân 18 tuoåi laø nöõ}}{\text{Soá sinh vieân nöõ}}=\frac{3}{7}.$$

Nhận xét

Khi tính $P\left(A\middle|B\right)$ với điều kiện B đã xảy ra, nghĩa là ta đã hạn chế không gian mẫu Ω xuống còn B và hạn chế A xuống còn $A\cap B$.

Tính chất

1) $0\le P\left(A\middle|B\right)\le 1,\ \forall A\subset\Omega;$

2) nếu $A\subset C$ thì $P\left(A\middle|B\right)\le P\left(C\middle|B\right);$

3) $P\left(A\middle|B\right)=1-P\left(\bar{A}\middle|B\right).$

Tính độc lập. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nhau nếu một trong các điều kiện sau được thỏa

a) $P(A/B) = P(A)$

b) $P(B/A) = P(B)$

c) $P(AB) = P(A)P(B)$.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy rằng hai biến cố A và B là độc lập nhau khi sự xuất hiện biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xuất hiện biến cố kia. For example, the outcomes of two roles of a fair die are independent events. The outcome of the first roll does not change the probability for the outcome of the second roll. Hai biến cố không độc lập được gọi là phụ thuộc.

b) Công thức nhân Với A và B là hai biến cố bất kì ta có

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Với A và B là hai biến cố độc lập ta có

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

- Nếu n biến cố $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ ***không độc lập*** thì:

$$\boxed{P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1}).}$$

Ví dụ. Cho $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ và các biến cố $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{4, 5, 6, 7, 8\}; C = \{7,9\}$. Khi đó $AB = \{4, 5\}$, xác suất $P(AB) = \frac{2}{10}$ khác 0 nên hai biến cố A và B không xung khắc.

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}.$$

VD 5. Một người có 5 bóng đèn trong đó có 2 bóng bị hỏng. Người đó thử ngẫu nhiên lần lượt từng bóng đèn (không hoàn lại) cho đến khi chọn được 1 bóng tốt. Tính xác suất để người đó thử đến lần thứ 2.

Giải

Gọi A: "người đó thử đến lần thứ 2".

A_i: "bóng đèn được thử lần thứ i tốt", $i = \overline{1; 5}$.

Ta có:

$$P(A) = P\left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) = P\left(\bar{A}_1\right) P\left(A_2 \middle| \bar{A}_1\right)$$

$$= \frac{2}{5} . \frac{3}{4} = 30\%.$$

<u>VD 6.</u> Một sinh viên học hệ niên chế được thi lại 1 lần nếu lần thi thứ nhất bị rớt (2 lần thi độc lập). Biết rằng xác suất để sinh viên này thi đỗ lần 1 và lần 2 tương ứng là 60% và 80%. Tính xác suất sinh viên này thi đỗ?

<u>Giải</u>

Gọi A: "sinh viên này thi đỗ",

A_i: "sinh viên này thi đỗ lần thứ i", $i = \overline{1; 2}$.

Ta có:

$$P(A) = P(A_1 \cup \overline{A}_1.A_2) = P(A_1) + P(\overline{A}_1.A_2)$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1).P(A_2)$$

$$= 0,6 + (1 - 0,6).0,8 = 92\%.$$

Cách khác:

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}_1.\overline{A}_2\right) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right).\left(\overline{A}_2\right)$$

$$= 1 - 0,4.0,2 = 0,92.$$

Ví dụ. Có hai lô hàng, mỗi lô chứa 15 sản phẩm, trong đó lô I gồm 10 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu, lô II chứa 8 tốt 7 xấu. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi lô 2 sản phẩm.

a) Tính xác suất để trong 4 sản phẩm được chọn ra có 2 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu.

b) Giả sử chọn được 2 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu. Tính xác suất đã chọn được 1 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu từ lô I.

<u>VD 7.</u> Có hai người A và B cùng đặt lệnh (độc lập) để mua cổ phiếu của một công ty với xác suất mua được tương ứng là 0,8 và 0,7. Biết rằng có người mua được, xác suất để người A mua được cổ phiếu này là:

A. $\dfrac{19}{47}$; B. $\dfrac{12}{19}$; C. $\dfrac{20}{47}$; D. $\dfrac{10}{19}$.

Giải. Gọi C : "có người mua được cổ phiếu",

A : "người A mua được cổ phiếu",

B : "người B mua được cổ phiếu".

Ta có:

$$P\left(A\middle|C\right) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A.\overline{B} \cup A.B)}{P(A.\overline{B} \cup \overline{A}.B \cup A.B)}$$

$$= \frac{0,8.0,3 + 0,2.0,7}{0,8.0,3 + 0,2.0,7 + 0,8.0,7} = \frac{19}{47} \Rightarrow A.$$

Cách khác:

$$P\left(A \middle| C\right) = \frac{P(AC)}{1 - P(\overline{C})} = \frac{P(A.\overline{B} \cup A.B)}{1 - P(\overline{A}).P(\overline{B})}$$

$$= \frac{0,8.0,3 + 0,2.0,7}{1 - 0,2.0,3} = \frac{19}{47}.$$

<u>VD 8.</u> Trong dịp tết, ông A đem bán 1 cây mai lớn và 1 cây mai nhỏ. Xác suất bán được cây mai lớn là 0,9. Nếu bán được cây mai lớn thì xác suất bán được cây mai nhỏ là 0,7. Nếu cây mai lớn không bán được thì xác suất bán được cây mai nhỏ là 0,2. Biết rằng ông A bán được ít nhất 1 cây mai, xác suất để ông A bán được cả hai cây mai là:

A. 0,6342; B. 0,6848; C. 0,4796; D. 0,8791.

Giải. Gọi A_1: "ông A bán được cây mai lớn",

A_2: "ông A bán được cây mai nhỏ",

B: "ông A bán được ít nhất 1 cây mai".

Ta có:

$$P\left(A_1A_2\middle|B\right)=\frac{P\left(A_1A_2B\right)}{P(B)}$$

$$=\frac{P\left(A_1A_2\right)}{1-P\left(\overline{A}_1.\overline{A}_2\right)}=\frac{P(A_1).P\left(A_2\middle|A_1\right)}{1-P(\overline{A}_1).P\left(\overline{A}_2\middle|\overline{A}_1\right)}$$

$$=\frac{0,9.0,7}{1-0,1.0,8}=0,6848\Rightarrow B.$$

<u>VD 9.</u> Hai người A và B cùng chơi trò chơi như sau:
Cả hai luân phiên lấy mỗi lần 1 viên bi từ một hộp đựng 2 bi trắng và 4 bi đen (bi được lấy ra không trả lại hộp).
Người nào lấy được bi trắng trước thì thắng cuộc.
Giả sử A lấy trước, tính xác suất A thắng cuộc ?

Giải

Gọi A: "người A thắng cuộc",

A_i: "người A lấy được bi trắng ở lần thứ i",

B_i: "người B lấy được bi trắng ở lần thứ i".

Ta có: $A = A_1 \cup \overline{A}_1\overline{B}_1A_2 \cup \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4} + \frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}.1 = \frac{3}{5}.$$