Phân Phối Chuẩn

§4. PHÂN PHỐI CHUẨN

4.1. Phân phối Chuẩn đơn giản

a) Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục T được gọi là có phân phối Chuẩn đơn giản (hay *phân phối **Gauss***), ký hiệu là $T \in N(0;\ 1)$ hay $T \sim N(0;\ 1)$, nếu hàm mật độ xác suất của T có dạng:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},\ t \in \mathbb{R}.}$$

(Giá trị hàm $f(t)$ được cho trong bảng phụ lục A).

b) Các số đặc trưng của $T \sim N(0; 1)$

$$\boxed{ModT = ET = 0;\ \ VarT = 1.}$$

c) Xác suất của $T \sim N(0; 1)$

- **Hàm Laplace**

Hàm $\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)dt\ (t \geq 0)$ được gọi là hàm Laplace.

(Giá trị hàm $\varphi(x)$ được cho trong bảng phụ lục B).

• Tính chất của hàm Laplace

- Hàm $\varphi(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$;
- $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ (hàm $\varphi(x)$ lẻ);
- $\varphi(-\infty) = -0,5$; $\varphi(+\infty) = 0,5$.

• Công thức tính xác suất

$$\boxed{P(a \le T \le b) = \int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a).}$$

Chú ý

- $P(T < b) = 0,5 + \varphi(b)$; $P(T > a) = 0,5 - \varphi(a)$.
- Nếu $x \ge 4$ thì $\varphi(x) \approx 0,5$.

4.2. Phân phối Chuẩn

a) Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân phối Chuẩn (*Normal distribution*) tham số μ và σ^2 $(\sigma > 0)$, ký hiệu là $X \in N(\mu;\ \sigma^2)$ hay $X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ \ x \in \mathbb{R}.}$$

b) Các số đặc trưng của $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

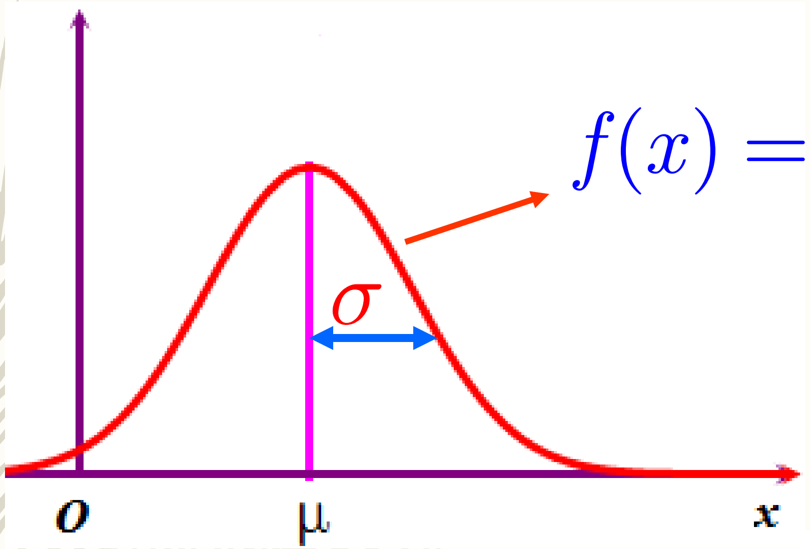
$$\boxed{ModX = EX = \mu;\ \ VarX = \sigma^2.}$$

c) Xác suất của $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Nếu $X \in N(\mu;\ \sigma^2)$ thì $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \in N(0;\ 1)$.

Vậy, ta có công thức tính xác suất:

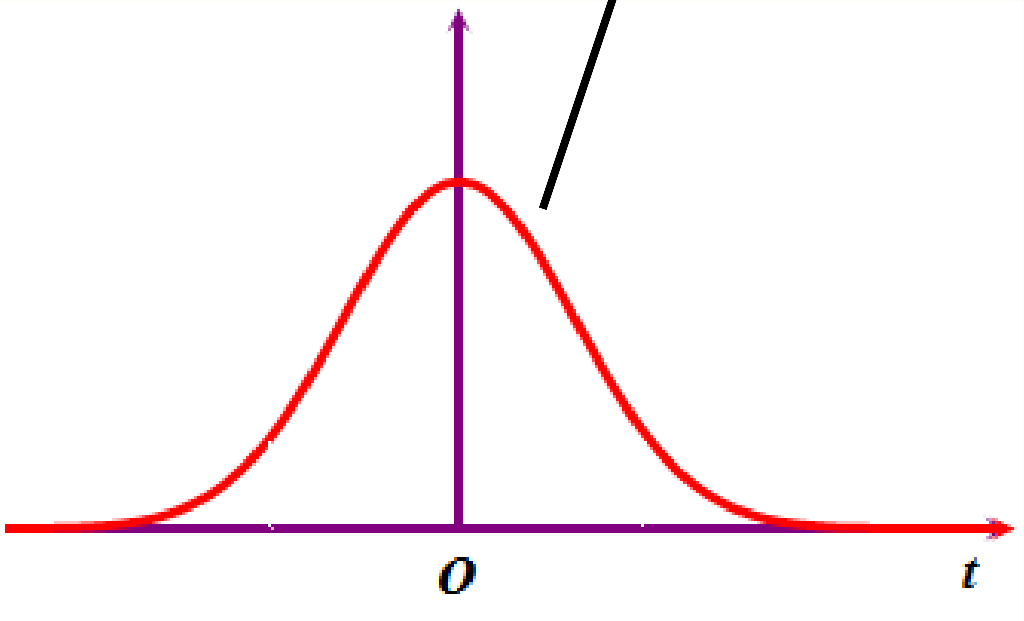
$$\boxed{P(a \le X \le b) = \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).}$$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

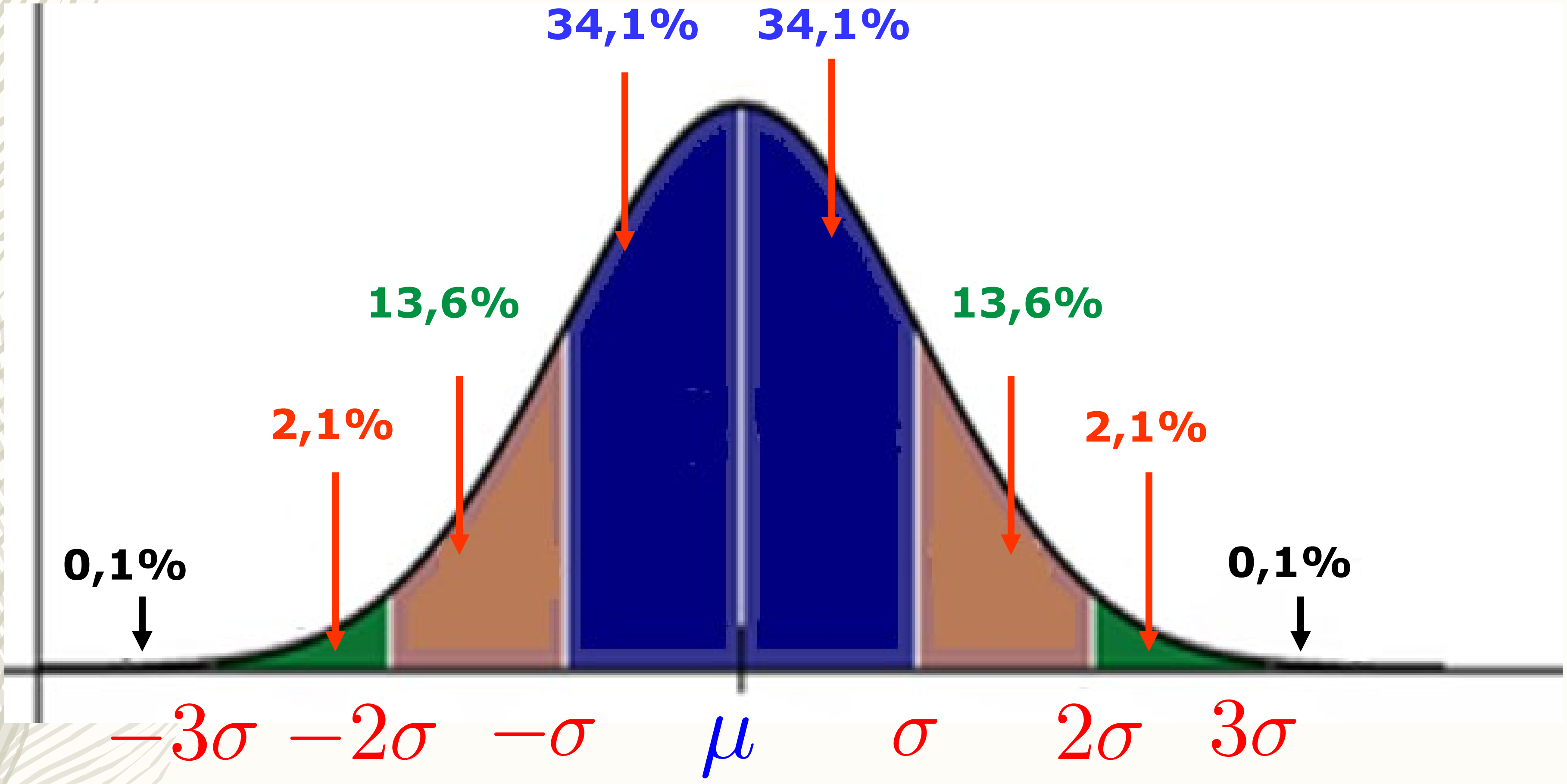
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$T = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



$$\mu = 0$$

Phân bố xác suất



Phân phối chuẩn do **Carl F. Gauss** đưa ra năm 1795.

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

VD 1. Tốc độ chuyển dữ liệu từ máy chủ của ký túc xá đến máy tính của sinh viên vào buổi sáng chủ nhật có phân phối chuẩn với trung bình 60Kbits/s và độ lệch chuẩn 4Kbits/s. Xác suất để tốc độ chuyển dữ liệu lớn hơn 63Kbits/s là:

A. 0,2266; B. 0,2144; C. 0,1313; D. 0,1060.

Giải. Gọi X (Kbits/s) là tốc độ chuyển dữ liệu.

Ta có: $\mu = 60,\ \sigma = 4 \Rightarrow X \in N(60;\ 4^2)$.

$$P(X > 63) = P(63 < X < +\infty)$$

$$= \varphi(+\infty) - \varphi\left(\frac{63-60}{4}\right) = 0,5 - \varphi(0,75)$$

$$\overset{tra\ bảng\ B}{=} \quad 0,5 - 0,2734 = 0,2266 \Rightarrow A.$$

VD 2. Một kỳ thi đầu vào ở trường chuyên A quy định điểm đỗ là tổng số điểm các môn thi không được thấp hơn 15 điểm. Giả sử tổng điểm các môn thi của học sinh là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 12 điểm. Biết rằng tỉ lệ học sinh thi đỗ là 25,14%. Độ lệch chuẩn là:

A. 4 điểm; B. 4,5 điểm; C. 5 điểm; D. 5,5 điểm.

Giải. Gọi X là tổng điểm thi của HS $\Rightarrow X \in N(12;\, \sigma^2)$.

Ta có:

$$0,2514 = P(X \geq 15) = 0,5 - \varphi\left(\frac{15-12}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{3}{\sigma}\right) = 0,2486 \overset{\text{tra bảng } B}{=} \varphi(0,67)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{3}{0,67} = 4,5 \Rightarrow B.$$

VD 3. Giả sử thời gian khách phải chờ để được phục vụ tại một cửa hàng là BNN X (phút), $X \in N(4,5;\ 1{,}21)$.

1) Tính xác suất khách phải chờ từ 3,5 phút đến 5 phút.

2) Tính thời gian tối thiểu t nếu xác suất khách phải chờ vượt quá t là không quá 5%.

Giải. $X \in N(4,5;\ 1{,}21) \Rightarrow \mu = 4,5;\ \sigma = 1{,}1$ (phút).

$$1)\ P(3,5 \le X \le 5) = \varphi\left(\frac{5 - 4,5}{1,1}\right) - \varphi\left(\frac{3,5 - 4,5}{1,1}\right)$$

$$= \varphi(0,45) + \varphi(0,91)$$

$$= 0,1736 + 0,3186 = 0,4922.$$

$$2)\ P(X > t) \leq 0,05 \Rightarrow 0,5 - \varphi\left(\frac{t-4,5}{1,1}\right) \leq 0,05$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{t-4,5}{1,1}\right) \geq 0,45 \approx \varphi(1,65)$$

$$\Rightarrow \frac{t-4,5}{1,1} \geq 1,65 \Rightarrow t \geq 6,315.$$

Vậy $t \approx 6,315$ phút.

VD 4. Cho BNN X có phân phối chuẩn với $EX = 10$ và $P(10 < X < 20) = 0,3$. Tính $P(0 < X \le 15)$?

Giải. Ta có: $EX = 10 \Rightarrow \mu = 10 \Rightarrow X \in N(10; \sigma^2)$.

$$P\left(10 < X < 20\right) = 0,3 \Rightarrow \varphi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \varphi(0) = 0,3$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = \varphi(0,84) \Rightarrow \sigma = 11,9$$

$$\Rightarrow P\left(0 < X \le 15\right) = \varphi\left(\frac{5}{11,9}\right) - \varphi\left(\frac{-10}{11,9}\right) = 0,4623.$$

VD 5. Tuổi thọ của 1 loại máy lạnh A là BNN X (năm) có phân phối $N(10;\ 6,25)$. Khi bán 1 máy lạnh A thì lãi được 1,4 triệu đồng nhưng nếu máy lạnh phải bảo hành thì lỗ 1,8 triệu đồng. Vậy để có tiền lãi trung bình khi bán mỗi máy lạnh loại này là 0,9 triệu đồng thì cần phải quy định thời gian bảo hành là bao nhiêu ?

Giải. Gọi Y (triệu đồng) là tiền lãi có được khi bán 1 máy lạnh A và t (năm) là thời gian bảo hành.

- Xác suất (tỉ lệ) máy lạnh phải bảo hành là:

$$p = P(X \le t) = 0,5 + \varphi\left(\frac{t-10}{2,5}\right).$$

Bảng phân phối xác suất của Y:

Y	$-1,8$	$1,4$
P	p	$1-p$

$$\Rightarrow EY = -1,8.p + 1,4.(1-p) = 1,4 - 3,2p.$$

- $EY = 0,9 \Rightarrow p = 0,1563 \Rightarrow P(X \le t) = 0,1563$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{t-10}{2,5}\right) = -0,3437 \approx \varphi(-1,01)$$

$$\Rightarrow \frac{t-10}{2,5} = -1,01 \Rightarrow t = 7,475 \text{ (năm)}.$$

Phân phối Chi bình phương $\chi^2(n)$ (tham khảo)

Nếu $X_i \in N(0;\ 1)$ $(i = 1,\ldots,n)$ và các X_i độc lập thì

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \in \chi^2(n)$ với hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}.e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}, & x > 0. \end{cases}$$

Trong đó: $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(1) = 1.$$

- Phân phối $\chi^2(n)$ do Karl Pearson đưa ra năm 1900.

Karl Pearson (1857 - 1936)

Phân phối Student *St*(*n*) (tham khảo)

Nếu $T \in N(0;\ 1)$ và $Y \in \chi^2(n)$ độc lập thì

$$X = T\sqrt{\frac{n}{Y}} \in St(n)$$ với hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Trong đó, n được gọi là bậc tự do và giá trị của $St(n)$ được cho trong bảng C.

....

- Phân phối $St(n)$ do Willam.S.Gosset đưa ra năm 1908.

Willam. Sealy .Gosset 1876 - 1937