



Hàm Phân Phối Xác Suất

§2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.1. Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất (hay hàm phân phối tích lũy) của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu $F(x)$, là xác suất để X nhận **giá trị nhỏ hơn** x với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nghĩa là:

$$F(x) = P(X < x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 1

- Nếu biến ngẫu nhiên X là rời rạc với phân phối xác suất $P(X = x_i) = p_i$ thì:

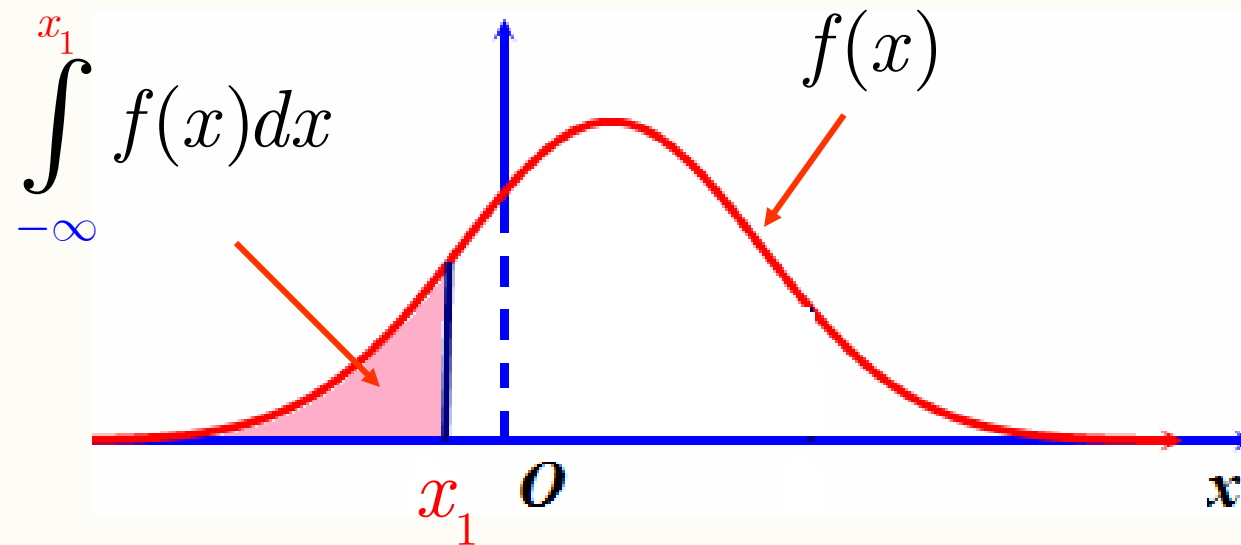
$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

- Nếu biến ngẫu nhiên X là liên tục với hàm mật độ $f(x)$ thì:

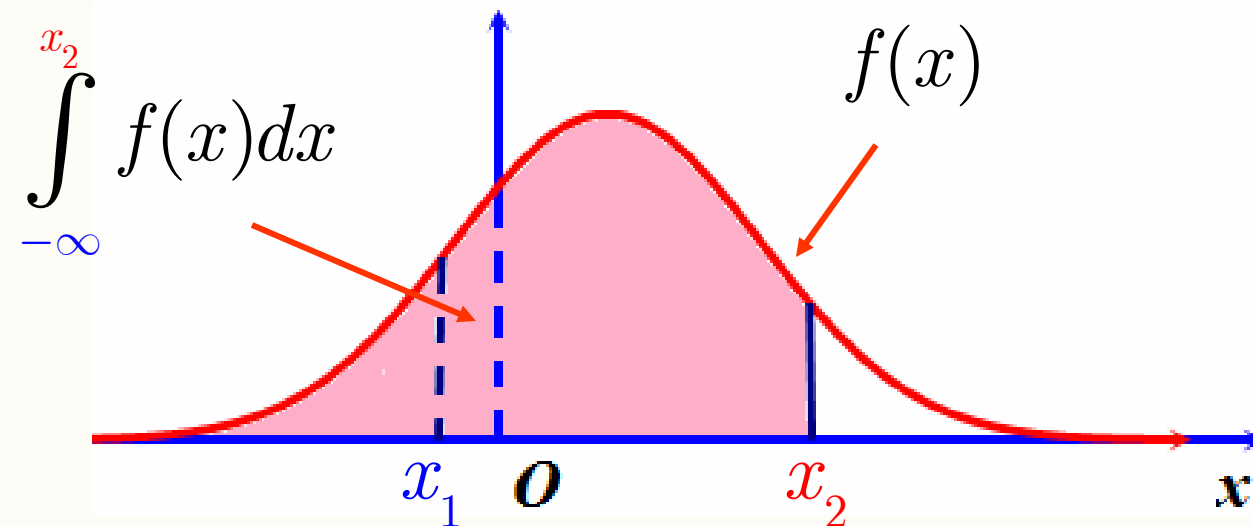
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$



$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx$$



$$F(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx$$



Nhận xét 2

- Giả sử BNN rời rạc X nhận các giá trị trong $[x_1; x_n]$ và $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq x_1 \\ p_1 & \text{khi } x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{khi } x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{khi } x_{n-1} < x \leq x_n \\ 1 & \text{khi } x_n < x. \end{cases}$$

Chứng minh:

- $x \leq x_1: F(x) = P(X < x) = P(X < x_1) = P(\phi) = 0.$
- $x_1 < x \leq x_2: F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1.$
- $x_2 < x \leq x_3: F(x) = P(X < x_3)$
 $= P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2.$
-
- $x > x_n: F(x) = P(X \leq x_n)$
 $= P(X = x_1) + \dots + P(X = x_n)$
 $= p_1 + \dots + p_n = 1.$

- Giả sử BNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Ta có hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq a \\ \int_a^x \varphi(t) dt & \text{khi } a < x \leq b \\ 1 & \text{khi } b < x. \end{cases}$$

- Giả sử BNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \varphi(x), & x \geq a. \end{cases}$$

Ta có hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq a \\ \int_a^x \varphi(t) dt & \text{khi } x > a. \end{cases}$$

VD 1. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất là:

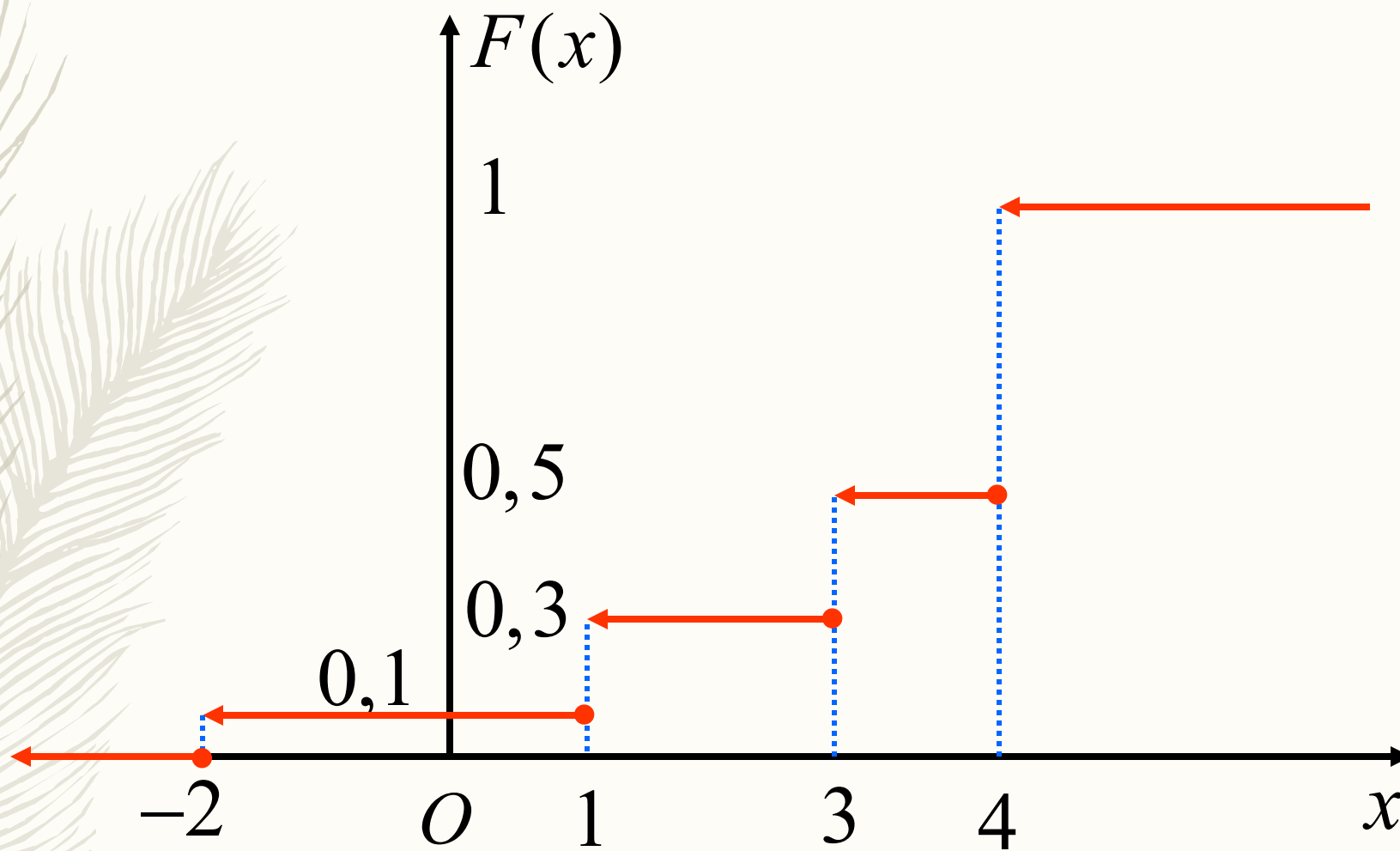
| | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| X | -2 | 1 | 3 | 4 |
| P | $0,1$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,5$ |

Hãy lập hàm phân phối của X và vẽ đồ thị của $F(x)$?

Giải. Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq -2 \\ 0,1 & \text{khi } -2 < x \leq 1 \\ 0,3 & \text{khi } 1 < x \leq 3 \\ 0,5 & \text{khi } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{khi } 4 < x. \end{cases}$$

Đồ thị của $F(x)$:



VD 2. Cho BNN X có hàm mật độ là:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 1] \\ 3x^2, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

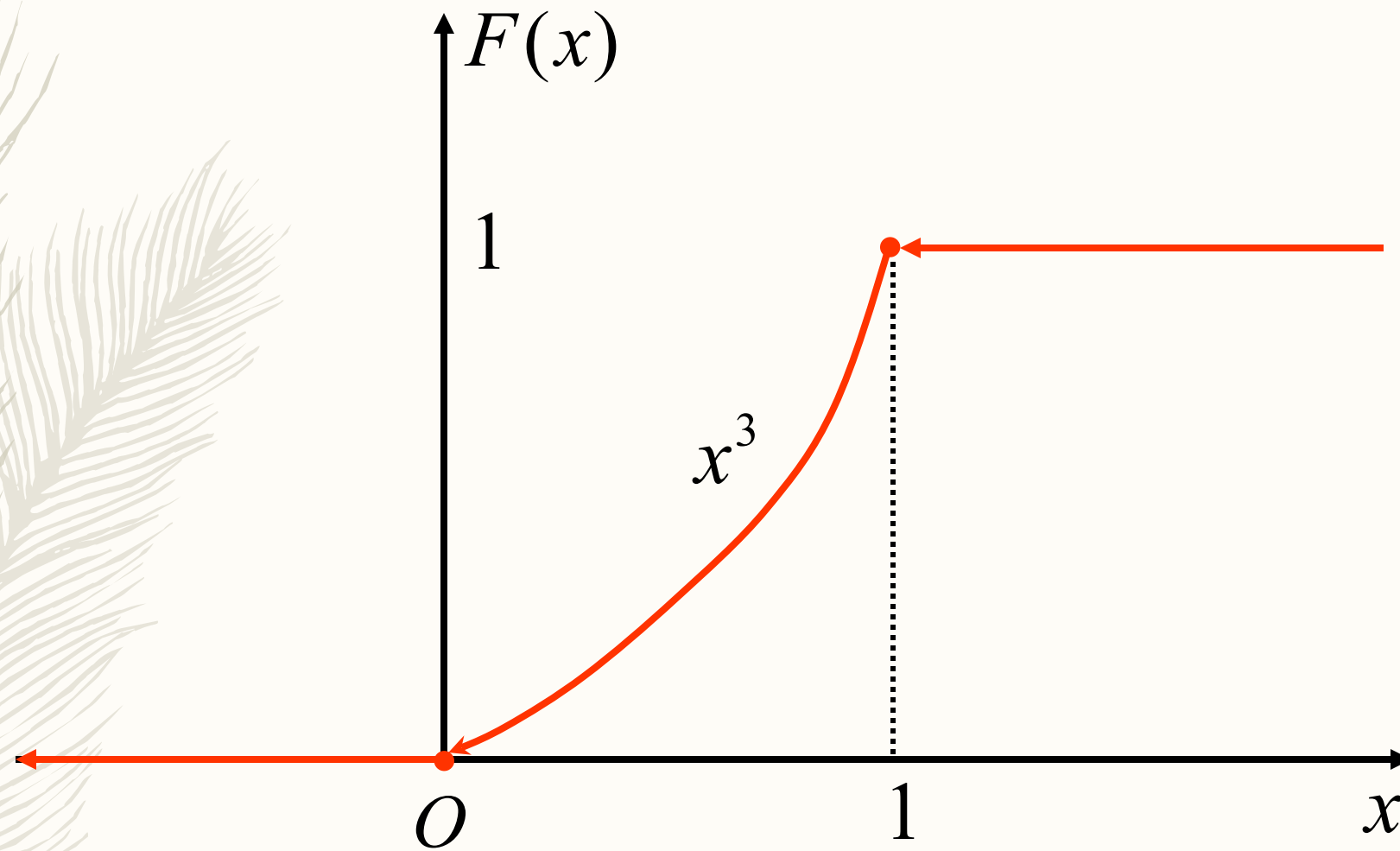
Tìm hàm phân phối của X và vẽ đồ thị của $F(x)$?

Giải. Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x 3t^2 dt, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$



Đồ thị của $F(x)$:



VD 3. Cho BNN X có hàm mật độ là:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 100 \\ \frac{100}{x^2}, & x \geq 100. \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối $F(x)$ của X ?

Giải. Hàm phân phối $F(x)$ của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 100 \\ 100 \int_{100}^x \frac{dt}{t^2}, & x > 100 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 100 \\ \frac{x - 100}{x}, & x > 100 \end{cases}.$$

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

- 1) Hàm $F(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}; F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$.
- 3) $F(x)$ không giảm và liên tục phải tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
- 4) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Đặc biệt

- Nếu X là BNN rời rạc thì:

$$p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i), \forall i.$$

- Nếu X là BNN liên tục thì:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) \\ &= P(a < X < b) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

- Nếu X là BNN liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì:

$$F'(x) = f(x).$$

VD 4. Tính xác suất $P(X \geq 400)$ trong VD 3?

Giải

$$P(X \geq 400) = P(400 \leq X < +\infty)$$

$$= F(+\infty) - F(400) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

VD 5. Cho BNN X có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{1}{28} \begin{cases} 3x^2, & x \in [-1; 3] \\ 0, & x \notin [-1; 3]. \end{cases}$$

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$\text{A. } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x^3}{28}, & -1 < x \leq 3 \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

$$\text{B. } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{28}, & -1 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

$$\text{C. } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{28} + \frac{1}{28}, & -1 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

$$\text{D. } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x^3}{28} + \frac{1}{28}, & -1 < x \leq 3 \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

VD 6. Cho BNN X có hàm phân phối xác suất:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ ax^3 + 2b, & x \in (-2; 3] \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

1) Tìm các hằng số a và b ?

2) Tính $P(\sqrt{2} < Y \leq \sqrt{5})$ với $Y = \sqrt{X^2 + 1}$.

Giải

1) Do $F(x)$ liên tục bên phải tại mọi $x \in \mathbb{R}$, nên:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) = F(-2) \Rightarrow -8a + 2b = 0 \quad (1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = F(3) \Rightarrow 27a + 2b = 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $a = \frac{1}{35}$ và $b = \frac{4}{35}$.

$$\begin{aligned} 2) P\left(\sqrt{2} < Y \leq \sqrt{5}\right) &= P\left(\sqrt{2} < \sqrt{X^2 + 1} \leq \sqrt{5}\right) \\ &= P\left(-2 \leq X < -1\right) + P\left(1 < X \leq 2\right) \\ &= F(-1) - F(-2) + F(2) - F(1) = \frac{14}{35}. \end{aligned}$$
