

## DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund  
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn  
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen  
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns  
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

# 1 Reeksamen DM527 Opg 1 - Tobias

## Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  og  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$

$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er  $f$  en bijektion?

**Svar:** En afbildning,  $\phi : A \rightarrow B$  er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

**Sætning 1.**  $f$  er injektiv, hvis  $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af  $x$  i definitionsmængden gælde, at  $x$  hvis to  $x$ -værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to  $x$ -værdier ikke kan dele en  $y$ -værdi.

Ved at indsætte  $x_1$  og  $x_2$  og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at  $x$ -værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$

$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 + x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{k}$$

Funktionsværdien indsættes

1 går ud på begge sider

$x_1$  trækkes fra på begge sider

,  $k \in \mathbb{R}$

Da det hurtigt viser sig at  $x_1 \neq k \Rightarrow f(x_1) = f(k)$ , må det betyde, at  $x_1$  kan have samme funktionsværdi som et andet tal (forskelligt fra  $x_1$ ) i definitionsmængden ( $Dm(f) = \mathbb{R}$ ), og derfor er  $f$  ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med  $x_1 = 4.91$  og  $x_2 = -5.91$  og derfor få:

$$\begin{aligned} f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\ f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02 \end{aligned}$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om  $f$  er surjektiv.

### b) Har $f$ en invers funktion?

En funktion  $f$  har en invers, hvis og kun hvis  $f$  er bijektiv. Da vi tidligere har konkluderet at  $f$  ikke er bijektiv, må det også være tilfældet, at  $f$  ikke er invertibel og derfor ikke har nogen invers.

### c) Angiv $f + g$ .

To funktioner kan adderes ved at addere deres funktionsforskrifter ved brug af standard algebraiske regler

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \Rightarrow (f + g)(x) &= (x^2 + x + 1) + (2x - 2) && \text{f og g indsættes på deres pladser} \\ &= x^2 + x + 1 + 2x - 2 && \text{Parentser fjernes, da der kun indgår + mellem dem} \\ &= x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

### d) Angiv $g \circ f$ .

Den sammensatte funktion  $f \circ g$  beregnes på følgende vis:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Indsætter man  $f$  i  $g$  fås:

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(x^2 + x + 1) \\
&= 2 \cdot (x^2 + x + 1) - 2 && \text{udtrykket indsættes i g} \\
&= 2x^2 + 2x + 2 - 2 && \text{Parentesen udregnes} \\
&= 2x^2 + 2x
\end{aligned}$$

Dette var løsningen til Opgave 1 i DM527 Reeksamen, Januar 2012.

**2 - Thomas**

**3 - Phillip**

**4 - Sean**