DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

1 Reeksamen DM527 Opg 1 - Tobias

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$
$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: En afbildning, $\phi : A \to B$ er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

Sætning 1. *f er injektiv, hvis $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$*

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af x i definitionsmængden gælde, at x hvis to x-værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to x-værdier ikke kan dele en y-værdi.

Ved at indsætte x_1 og x_2 og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at x-værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$
$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) & \\
\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 &= x_2^2 + x_2 + 1 & \text{Funktionsværdien indsættes} \\
\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 &= x_2^2 + x_2 & \text{1 går ud på begge sider} \\
\Leftrightarrow x_1^2 &= x_2^2 + x_2 - x_1 & x_1 \text{ trækkes fra på begge sider} \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1} & \\
\Rightarrow x_1 &= \pm\sqrt{k} & , k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Da det hurtigt viser sig at $x_1 \neq k \Rightarrow f(x_1) = f(k)$, må det betyde, at x_1 kan have samme funktionsværdi som et andet tal (forskelligt fra x_1) i definitonsmængden ($Dm(f) = \mathbb{R}$), og derfor er f ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med $x_1 = 4.91$ og $x_2 = -5.91$ og derfor få:

$$\begin{aligned} f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\ f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02 \end{aligned}$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om f er surjektiv.

b) Har f en invers funktion?

En funktion f har en invers, hvis og kun hvis f er bijektiv. Da vi tidligere har konkluderet at f ikke er bijektiv, må det også være tilfældet, at f ikke er invertibel og derfor ikke har nogen invers.

c) Angiv $f + g$.

To funktioner kan adderes ved at addere deres funktionsforskrifter ved brug af standard algebraiske regler

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \Rightarrow (f+g)(x) &= (x^2 + x + 1) + (2x - 2) && \text{f og g indsættes på deres pladser} \\ &= x^2 + x + 1 + 2x - 2 && \text{Parentser fjernes, da der kun indgår + mellem dem} \\ &= x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

d) Angiv $g \circ f$.

Den sammensatte funktion $f \circ g$ beregnes på følgende vis:

$$f \circ g = f(g(x))$$

Indsætter man f i g fås:

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(x^2 + x + 1) \\
&= 2 \cdot (x^2 + x + 1) - 2 && \text{udtrykket indsættes i g} \\
&= 2x^2 + 2x + 2 - 2 && \text{Parentesen udregnes} \\
&= 2x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

Dette var løsningen til Opgave 1 i DM527 Reeksamen, Januar 2012.