

DM500 Eksamensopgave

Thomas Urup Schjerlund
thsch20@student.sdu.dk

Tobias Klink Lehn
toleh20@student.sdu.dk

Philip Hayberg Thomsen
phtho20@student.sdu.dk

Sean Chrone Græns
segra20@student.sdu.dk

15. November 2020

1 Reeksamen DM527 Opg 1 - Tobias

Opgave 1 (15%)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ og}$$

$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: En afbildning, $\phi : A \rightarrow B$ er bijektiv, hvis og kun hvis funktionen både er *injektiv* (one-to-one) og *surjektiv* (onto).

Sætning 1. f er injektiv, hvis $\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sagt på en anden måde, så skal det for alle værdier af x i definitionsmængden gælde, at x hvis to x -værdier er forskellige fra hinanden, så er deres funktionsværdier det også. Helt basalt vil det sige, at to x -værdier ikke kan dele en y -værdi.

Ved at indsætte x_1 og x_2 og sætte deres funktionsværdi lig hinanden, kan det afgøres hvorvidt det også betyder, at x -værdierne var ens til at starte med - det skal de være, hvis funktionen skal være injektiv:

$$f(x_1) = x_1^2 + x_1 + 1$$

$$f(x_2) = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 + x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{x_2^2 + x_2 - x_1}$$

Funktionsværdien indsættes

1 går ud på begge sider

Da det hurtigt viser sig at $x_1 > 0 \vee x_1 < 0$, må det betyde, at x_1 som positiv og negativ værdi kan medføre den samme funktionsværdi, og derfor er f ikke injektiv, og derfor automatisk heller ikke bijektiv. For at understrege pointen kan man forsøge sig med $x_1 = 4.91$ og $x_2 = -5.91$ og derfor få:

$$\begin{aligned}f(4) &= 4.91^2 + 4.91 + 1 \approx 30.02 \\f(-5.91) &= (-5.91)^2 + 5.91 + 1 \approx 30.02\end{aligned}$$

Af den grund behøver vi ikke kontrollere, om f er surjektiv.

Jeg vil bare gerne have det her ind i TKL00OpgSkriv D: