Reeksamen Februar 2015

Sean Chrone Græns

16 November, 2020

1 Opgave 3

Lad R, S og T være binære relationer på mængden 1, 2, 3, 4.

1.1 Opgave A

Lad

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

Er R en partiel ordning?

Svar: En partiel ordning er en *relation*, R, på en mængde, hvor R er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv. Det bedømmes hvorvidt R besidder disse egenskaber:

1.1.1 Refleksivitet:

Da sætningen

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

betyder at en refleksiv ordning skal relatere enhver værdi til sig selv og da denne er opfyldt kan første krav til en partiel ordning krydses af.

1.1.2 Antisymmetri:

Hvis en ordning skal være antisymmetrisk gælder at

$$\forall a,b \in A \land a \neq b : aRb \Rightarrow a \not R b$$

Her forstås at Hvis a er relateret til b kan b ikke være relateret til a, medmindre a = b En anden måde at se om en mængde er antisymmetrisk er ved hjælp af en matrice.

Matrice for R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sammenligner man værdierne diagonalt og man har en forskellig værdi. Gælder dog ikke to ens 0-værdier, da de i så fald ikke er relateret til hinanden på nogen vis, er relationen antisymmetrisk.

Her kan man se at R altså er antisymmetrisk.

1.1.3 Transitivitet

Her gælder at

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R,\ \forall a,b,c \in A$$

Her har vi en binær relation med mængden 1, 2, 3, 4 hvilken betyder at hvis relationen skal være transitiv, skal alle mægnde værdier være i relation med hinanden. Den transitive lukning ser således ud for relationen

$$t(R) = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\} \cup \{(2,3)\}$$

Her kan vi se relationen forenet med en ny relation, nemlig (2,3), er den transitive lukning af R. Af den grund var R ikke transitiv til at starte med, da elementet (2,3) manglede. Da denne ikke er en del a relationen R kan den ikke kaldes transitiv, og dermed er den ikke en partiel ordning.

1.2 Opgave B

Lad

$$S = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,2)\}$$

Angiv den transitive lukning af S?

Svar:

Som tidligere forklaret er den transitive lukning, samlingen af relationer som der kræves for at relatere enhver værdi med enhver anden. Altså

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R,\ \forall a,b,c \in A$$

Altså er lukningen også beksrevet som

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$$

Er der en vej fra den oprindelige relation, kommer der en direkte vej i lukningen.

Har T n elementer kan man skrive

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} S^4 = t(S) = \{(1,2),(2,3),(2,4),(4,2)\}. \cup \{(1,3),(1,4),\} \cup \{(3,4)\}$$

Matrice for S:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Opgave C

Lad

$$T = (1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)$$

Bemærk, at T er en ækvivalens-relation. Angiv T's ækvivalens-klasser.

Ækvivalens relationer er relationer der er både symmetriske, transitive og refleksive.

Ækvivalens-klasserne for T som følger

$$[a] = \{b | (a,b) \in R\}$$

$$[1] = \{1, 3\}$$
$$[2] = \{2, 4\}$$

og da

$$[1] = [3], [2] = [4]$$

fordi

$$a \subseteq b$$
$$c \in [a] \Rightarrow aRc \Rightarrow bRc \Rightarrow c \in [b]$$

indgår disse i samme klasse.

Matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$