수리경제학

미분 1: 도함수와 미분

이재석

2025-04-15

목차

도함수의 정의로 미분

Definition (도함수)

실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 x_0 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 x_0 를 포함한다면, x_0 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

$$f(x) = ax, \quad \text{도함수:} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) - ax}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

도함수의 정의로 미분

$$f(x) = ax^2, \quad \text{도함수:} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2ax + \lim_{h \to 0} ah = 2ax + a \cdot 0 = 2ax$$

$$\therefore f'(x) = 2ax$$

$$f'(x \mid x = 1) = 2a \cdot 1, \quad f'(x \mid x = 2) = 4a$$

도함수의 정의로 미분

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{도함수:} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + hx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1x^{-2}$$

$$f'(x \mid x = 1) = -1, \quad f'(x \mid x = 2) = -\frac{1}{4}$$

연속성과 미분 가능성

연속성:

- 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 연속이려면:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

미분 가능성:

- 함수 $f(x)$가 $x = a$ 에서 미분 가능하려면:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{존재해야 함}$$

- 미분 가능성은 *연속성을 포함*합니다.
- 연속성이 있다고 해서 *항상 미분 가능하진 않음*.

도함수의 정의로 미분:미분법칙

$$f(x) = ax^2 \to f'(x) = 2ax$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \to f'(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$$

: 미분법칙

$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$

도함수의 정의로 미분 - 지수함수

$f(x) = e^x, \quad$ 도함수:$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

도함수에 대입 $\to f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$

e^h의 정의 $e^h = 1 + \dfrac{h}{1!} + \dfrac{h^2}{2!} + \cdots$ 를 활용하면,

$= e^x \cdot \lim_{h \to 0} \dfrac{1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots - 1}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} (\dfrac{h}{1!}/h + \dfrac{h^2}{2!}/h + \cdots)$

$= e^x \cdot (1 + 0 + \cdots) = e^x$

도함수의 정의로 미분 - 지수함수

$f(x) = a^x$, 도함수에 대입 $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\rightarrow 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim\limits_{h\rightarrow 0} \dfrac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$

$= \lim\limits_{h\rightarrow 0} \dfrac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim\limits_{h\rightarrow 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$

$e^{\ln x} = x$의 성질을 이용하여 $a = e^{\ln a}$ 양변을 h 거듭제곱한다면, 로그의 성질에 의해

$\Rightarrow a^h = e^{h \ln a}$

e의 정의를 활용하기 위해, 양변에 1을빼고 h로 나누면, $\Rightarrow \dfrac{a^h - 1}{h} = \dfrac{e^{h\ln a} - 1}{h}$

$h \ln a = u$ 로 치환하고 정리하면, $h = \dfrac{u}{\ln a}$, $\quad \dfrac{e^{h\ln a} - 1}{h} = \dfrac{e^u - 1}{\frac{u}{\ln a}} = \dfrac{e^u - 1}{u} \cdot \ln a$

이때, 극한은 u에 대해서로 변함: $\lim\limits_{h\rightarrow 0} h \ln a = 0$ 이므로 $u \rightarrow 0$

$= a^x \cdot \lim\limits_{u\rightarrow 0} \dfrac{e^u - 1}{u} \cdot \ln a = a^x \cdot 1 \cdot \ln a$

도함수의 정의로 미분:지수함수 미분법칙

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$
$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

: 미분법칙

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$$

도함수의 정의로 미분 - 자연로그

$f(x) = \ln x$, 도함수 정의: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

로그의 성질 사용: $\ln(x+h) - \ln x = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

치환: $u = \frac{h}{x} \Rightarrow h = ux, \quad h \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$

$\Rightarrow f'(x) = \lim_{u \to 0} \frac{1}{ux} \cdot \ln(1+u) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$

Mercator series를 이용해, 전개하면 $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$

$\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \to 0} (u/u - \frac{u^2}{2}/u + \frac{u^3}{3}/u + \frac{u^4}{4}/u + \cdots) = 1 - 0 + 0 + \cdots = 1$ 이므로,

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \cdot 1$

도함수의 정의로 미분 - 밑이 a 인 로그

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad (\ln a \text{ 는 상수})$$

$$\text{따라서 } f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

도함수의 정의로 미분: 로그함수 미분법칙

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

: 미분법칙

$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

도함수의 정의로 미분 - 곱의 미분법칙

함수 $f(x), g(x)$ 에 대해 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

두 항의 차를 직접 다루기 어렵기 때문에, 더하고 빼기

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

극한은 각각 따로 가능하므로:

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} g(x+h) \right) + f(x) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

예제

콥더글라스

도함수의 정의로 미분 - 합성함수의 미분법칙 (Chain Rule)

합성함수 $h(x) = f(g(x))$ 에 대해 도함수를 정의로 구함

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

앞부분은 마치 $\dfrac{\Delta f(g(x))}{\Delta g(x)}$ 인데 $\Delta \to 0$ 이면 미분의 정의

극한을 각각 분리하면:

$$= \left(\lim_{u \to g(x)} \frac{f(u) - f(g(x))}{u - g(x)} \right) \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\therefore \boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

비교정태분석 (Comparative Statics)

비교정태분석이란?

- 매개변수 변화에 따른 두 균형 상태를 비교하는 분석.
- 외생변수 또는 매개변수가 변할 때 내생변수가 어떻게 조정되는지를 연구.

비교정태분석의 종류

- **질적 분석**: 변화의 방향만 분석 (증가 또는 감소).
- **양적 분석**: 변화의 방향과 크기를 함께 분석.

미분의 경제학적 해석

한계 개념들:
미분은 한계 경제 지표를 정의하는 데 핵심적인 도구입니다.

- **한계비용 (MC)**:
$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ}$$
- **한계수입 (MR)**:
$$MR = \frac{dR(Q)}{dQ}$$
- **한계소비성향 (MPC)**:
$$MPC = \frac{dC(Y)}{dY}$$

MRS, MRTS

예제 - 쉬프트된 함수들

$$f(x) = (x+1)^2$$