수리경제학

리뷰: 행렬

이재석

2025-04-15

목차

'인공'적인 행렬

- 라이프니츠 이전, 여러가지 '행렬'같은 기법들이 있었으나..
- 1700-1710년 라이프니츠가 선형 연립방정식의 '계수'들을 행과 열형태로 표현하고 연립방정식의 해가 존재하는 조건을 보여줌.
  * 역행렬을 구하기 위한 조건. 예를 들어 $|A| \neq 0$
- 1750년 크레이머가 Cramer's Rule 을 발표.
- 1850년 실베스터는 행렬의 성질을 'minors'라는 특별한 행렬식으로 정리함. '마치 마법처럼' 연립방정식의 해를 구하는 방법이었기에, 실베스터는 라틴어로 '근원'을 의미하는 'Matrix'라는 이름을 붙임.

이처럼, 매트릭스는 연립방정식의 해를 찾기 위해 '만들어진' 것이기에, 직관적이지 않아서 익숙해지기가 너무 힘들었다.
하지만, 어쩌면 '발견'한 것 처럼, 마법처럼 효율적으로 해를 찾을 수 있다.
컴퓨터도 행렬로 해를 찾음.

행렬의 연산

행렬에는 '자연스러운' 사칙연산을 포함하여, '특별한 규칙을 갖는' 다양한 연산이 존재함.

- 행렬의 덧셈, 뺄셈, 스칼라 곱
- 행렬의 곱셈
- 행렬의 전치
- 행렬식
- minors, cofactors
- $\cdots$

그저, 필요한 규칙들을 쓰임에 맞게 조합해서 사용한다고 생각하면 됨.

경제학에서 행렬을 배우는 이유: $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$

- 경제학에서 행렬을 공부하는 이유는 회귀분석을 사용하기 위함.
- 회귀분석의 시작은 OLS라 불리는 선형회귀모형.
- OLS는 연립방정식의 해를 구하는 것과 같음.
  - 경제모델: $Y = \beta_K \cdot X_K + \beta_L \cdot X_L + \varepsilon$(오차항)
  - $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$
- β를 구하기 위해서:
  - 행렬곱, 역행렬(역행렬 찾기, 비특이행렬 확인(행렬식$\neq 0$))
  - 라플라스 변환, 마이너, 코팩터
  - 크레이머 룰.

m by n 행렬 A (m행 n열):

열

행

$$A_{m\times n} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

라이프니츠 처럼 연립방정식을 행렬로 표현하면,

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 10 \\ x + y + z &= 6 \\ x + 3y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

행렬의 연산 - 덧셈, 뺄셈, 스칼라 곱

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+1 \\ 1+0 & 4-2 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- 두 행렬 A와 B가 같은 차원일 때만 덧셈과 뺄셈 가능
- 스칼라 곱: 행렬의 각 원소에 같은 수를 곱함

행렬 곱셈의 조건 및 연산 규칙

$(3\times1)\cdot(1,\times3)$ $\Rightarrow$ (1×2) (3×1) 계산 X

- 행렬 A ($m\times p$)과 B ($p\times n$) 조건: 앞 행렬의 열 수 = 뒤 행렬의 행 수
  (3x1)(1x3): 가능! ⇒ 곱셈 결과 $m\times n$ 행렬
  (3x1)(3x1): 불가능! ⇒ 행렬곱에서 교환법칙이 (항상)성립되지 않는 이유! ($AB \neq BA$)
- 아래 행렬곱 결과의 차원(mxn)은?
  (3x3)(3x2) = 3x2
  (5x5)(5x5) = 5x5
  (3x5)(5x2) = 3x2
  (4x2)(3x2) = X.
  (2x100)(100x2) = 2x2

A B

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}
$$

- $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

행렬곱의 계산: 연습

수리경제학

이재석

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$
- $\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ae+bg \end{bmatrix}_{1\times 1}$
- $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{ae+0\cdot 0} & \underbrace{af+0\cdot 0} \\ \underbrace{ce+0\cdot 0} & \underbrace{cf+0\cdot 0} \end{bmatrix}_{2\times 2}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a+0\cdot d+0\cdot g & 1\cdot b+0\cdot e+0\cdot h & 1\cdot c+0+0 \\ 0\cdot a+1\cdot d+0\cdot g & 0\cdot b+1\cdot e+0\cdot h & 0+f+0 \\ 0+0+1\cdot g & 0+0+h & 0+0+i \end{bmatrix}$

행렬식

행렬식 (Determinant)

정사각행렬 A의 행렬식 $\det(A)$ 또는 $|A|$은 A 행렬의 특성을 나타내는 값. 각각의 변수들의 관계를 하나의 숫자로 나타낸 것.
(마치 2차방정식 판별식 처럼, 역행렬이 존재하기 위해서는 0이 아닌 값이 필요)

행렬의 차원에 따라, 행렬식을 계산 하는 법이 다름.

- 1x1 행렬: $|a_{11}| = a$
- 2x2 행렬: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

행렬식: 3x3 행렬

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \\ a_{31} & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & a_{22} & \boxed{\begin{matrix} a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}} \\ & a_{32} & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})} - \boxed{a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})}$$

$$+ \boxed{a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}$$

행렬식: 3x3 행렬 연습습

행렬식: nxn 행렬 $\Rightarrow$ 라플라스 전개

- 라플라스 전개는 행렬식을 '부분 행렬식(cofactor)'으로 나누어 계산 하는 방법.
- 부분 행렬식(cofactor):는 'minor'에 행과 열의 위치에 따라 부호를 붙인 것.
  *cofactor는 행렬식이므로 '값'.
  cofactor : $|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, $\quad i$: 행, j : 열
- 'minor'는 행렬에서 특정 행과 열을 제거한 나머지의 행렬식.
  이전 3x3 행렬식 계산에서, minor M_{11} 는 아래.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boxed{|M_{11}| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}$$

cofactor는 $|C_{11}| = (-1)^{1+1}|M_{11}|$

행렬식: nxn 행렬 ⇒ 라플라스 전개

$|A| = C_{11} + C_{12} + C_{13}$

■ minor M_{12} 은

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boxed{|M_{21}| = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}}$$

cofactor는 $|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|$

따라서,

$$|A| = \boxed{a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})} - \boxed{a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})}$$

$$+ \boxed{a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}$$

$$= a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

행렬식: 4x4 행렬의 전개 (Laplace 전개)

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} \cdot |C_{11}| + a_{12} \cdot |C_{12}| + a_{13} \cdot |C_{13}| + a_{14} \cdot |C_{14}|
$$

$$
= a_{11} \cdot (-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13} \cdot (-1)^{1+3}|M_{13}|
$$

$$
+ a_{14} \cdot (-1)^{1+5}|M_{14}|
$$

$$
|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left(a_{33} \cdot a_{44} - a_{34} \cdot a_{43} \right)
$$

행렬식: nxn 행렬, 4x4 연습

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + \cancel{a_{13}|C_{13}|} + \cancel{a_{14}|C_{14}|}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}|M_{11}| + 1\,(-1)^{1+2}|M_{12}|$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}|$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}|$$

$$= 2\cdot1\cdot(5\cdot8 - 9\cdot1) + 3(-1)(4\cdot8 - 9\cdot6)$$

$$+ 1\cdot1\,(4\cdot1 - 5\cdot6)$$

$$=$$

전치행렬

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A'_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

역행렬

행렬식 (Determinant)

행렬 A의 역행렬은 A^{-1}로 표기하며, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$를 만족하는 행렬.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A = \frac{1}{|A|}C',$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad adjA = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |C_{1m}| & |C_{2m}| & \cdots & |C_{nm}| \end{bmatrix}$$

역행렬: 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| \end{bmatrix}'$$

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \cdot |d| = d, \quad |C_{12}| = (-1)^{1+2}|c|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1) \cdot |c| = -c$$

$$|C_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1) \cdot |b| = -b, \quad |C_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \cdot |a| = a$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

역행렬: 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ei - fh),$$

$$|C_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (di - fg),$$

$$|C_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (dh - eg),$$

역행렬: 3x3

$$|C_{21}| = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (bi - ch),$$

$$|C_{22}| = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ai - cg),$$

$$|C_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (ah - bg),$$

역행렬: 3x3

$$|C_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (bf - ce),$$

$$|C_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (af - cd),$$

$$|C_{33}| = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ae - bd),$$

역행렬: 3x3 연습

역행렬: Cramer's Rule

Cramer's Rule

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_j^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}$$

이 때,

$$x_j^* = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & d_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

역행렬: Cramer's Rule 2x2

$$Ax = d, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1^* = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot (d_1 a_{22} - a_{12} d_2)$$

$$x_2^* = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix}} \end{vmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot (a_{11} d2 - d_1 a_{21})$$

역행렬: Cramer's Rule 3x3

$$Ax = d, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1^* = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

역행렬: Cramer's Rule 연습