

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

수리경제학

리뷰: 행렬

이재석

2025-04-15

목차

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

1 행렬의 존재 이유

2 행렬의 연산

3 행렬 곱셈의 조건 및 연산 규칙

4 행렬식

5 전치행렬(Transpose)

6 역행렬

'인공'적인 행렬

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

- 라이프니츠 이전, 여러가지 '행렬'같은 기법들이 있었으나..
- 1700-1710년 라이프니츠가 선형 연립방정식의 '계수'들을 행과 열형태로 표현하고 연립방정식의 해가 존재하는 조건을 보여줌.
 - * 역행렬을 구하기 위한 조건. 예를 들어 $|A| \neq 0$
- 1750년 크레이머가 Cramer's Rule 을 발표.
- 1850년 실베스터는 행렬의 성질을 'minors'라는 특별한 행렬식으로 정리함. '마치 마법처럼' 연립방정식의 해를 구하는 방법이었기에, 실베스터는 라틴어로 '근원'을 의미하는 'Matrix'라는 이름을 붙임.

이처럼, 매트릭스는 연립방정식의 해를 찾기 위해 '만들어진' 것이기에, 직관적이지 않아서 익숙해지기가 너무 힘들었다.

하지만, 어쩌면 '발견'한 것 처럼, 마법처럼 효율적으로 해를 찾을 수 있다.
컴퓨터도 행렬로 해를 찾음.

행렬의 연산

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

행렬에는 '자연스러운' 사칙연산을 포함하여, '특별한 규칙을 갖는' 다양한 연산이 존재함.

- 행렬의 덧셈, 뺄셈, 스칼라 곱
- 행렬의 곱셈
- 행렬의 전치
- 행렬식
- minors, cofactors
- ...

그저, 필요한 규칙들을 쓰임에 맞게 조합해서 사용한다고 생각하면 됨.

경제학에서 행렬을 배우는 이유: $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

- 경제학에서 행렬을 공부하는 이유는 회귀분석을 사용하기 위함.
- 회귀분석의 시작은 OLS라 불리는 선형회귀모형.
- OLS는 연립방정식의 해를 구하는 것과 같음.
 - 경제모델: $Y = \beta_K \cdot X_K + \beta_L \cdot X_L + \varepsilon(\text{오차항})$
 - $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$
- β 를 구하기 위해서:
 - 행렬곱, 역행렬(역행렬 찾기, 비특이행렬 확인(행렬식 $\neq 0$))
 - 라플라스 변환, 마이너, 코팩터
 - 크레이머 룰.

m by n 행렬 A (m행 n열):

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

라이프니츠 처럼 연립방정식을 행렬로
표현하면,

$$2x + y + 3z = 10$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + 3y + 2z = 13$$

↓

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

행렬의 연산 - 덧셈, 뺄셈, 스칼라 곱

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- 두 행렬 A 와 B 가 같은 차원일 때만 덧셈과 뺄셈 가능
- 스칼라 곱: 행렬의 각 원소에 같은 수를 곱함

행렬 곱셈의 조건 및 연산 규칙

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

- 행렬 A ($m \times p$)과 B ($p \times n$) 조건: 앞 행렬의 **열 수** = 뒤 행렬의 **행 수**
(3×1)(1×3): 가능! \Rightarrow 곱셈 결과 $m \times n$ 행렬
(3×1)(3×1): 불가능! \Rightarrow 행렬곱에서 교환법칙이 (항상)성립되지 않는 이유!
($AB \neq BA$)
- 아래 행렬곱 결과의 차원($m \times n$)은?
(3×3)(3×2) =
(5×5)(5×5) =
(3×5)(5×2) =
(4×2)(3×2) =
(2×100)(100×2) =

행렬곱의 계산

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

■ $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

행렬곱의 계산: 연습

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$\blacksquare \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

행렬식

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

행렬식 (Determinant)

정사각행렬 A 의 행렬식 $\det(A)$ 또는 $|A|$ 은 A 행렬의 특성을 나타내는 값. 각각의 변수들의 관계를 하나의 숫자로 나타낸 것.

(마치 2차방정식 판별식 처럼, 역행렬이 존재하기 위해서는 0이 아닌 값이 필요)

행렬의 차원에 따라, 행렬식을 계산 하는 법이 다름.

■ 1x1 행렬: $|a_{11}| = a$

■ 2x2 행렬: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

행렬식: 3x3 행렬

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

행렬식: 3x3 행렬 연습습

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

행렬식: $n \times n$ 행렬 \Rightarrow 라플라스 전개

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

- 라플라스 전개는 행렬식을 '부분 행렬식(cofactor)'으로 나누어 계산 하는 방법.
- 부분 행렬식(cofactor):는 'minor'에 행과 열의 위치에 따라 부호를 붙인 것.
*cofactor는 행렬식이므로 '값'.
 $\text{cofactor} : |C_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}|, \quad i : \text{행}, j : \text{열}$
- 'minor'는 행렬에서 특정 행과 열을 제거한 나머지의 행렬식.
이전 3×3 행렬식 계산에서, minor M_{11} 는 아래.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |M_{11}| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\text{cofactor는 } |C_{11}| = (-1)^{1+1} |M_{11}|$$

행렬식: $n \times n$ 행렬 \Rightarrow 라플라스 전개

■ minor M_{12} 은

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |M_{21}| = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

cofactor는 $|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|$

따라서,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \end{aligned}$$

행렬식: 4x4 행렬의 전개 (Laplace 전개)

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot |C_{11}| + a_{12} \cdot |C_{12}| + a_{13} \cdot |C_{13}| + a_{14} \cdot |C_{14}|$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} |M_{11}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} |M_{12}| + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} |M_{13}| + a_{14} \cdot (-1)^{1+4} |M_{14}|$$

행렬식: $n \times n$ 행렬, 4×4 연습

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

전치행렬

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A'_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

역행렬

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

행렬식 (Determinant)

행렬 A 의 역행렬은 A^{-1} 로 표기하며, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 를 만족하는 행렬.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{|A|} C',$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{adj}A = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \cdots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |C_{1m}| & |C_{2m}| & \cdots & |C_{nm}| \end{bmatrix}$$

역행렬: 2x2

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| \end{bmatrix}'$$

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \cdot |d| = d, \quad |C_{12}| = (-1)^{1+2} |c| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1) \cdot |c| = -c$$

$$|C_{21}| = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1) \cdot |b| = -b, \quad |C_{22}| = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \cdot |a| = a$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

역행렬: 3x3

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ei - fh),$$

$$|C_{12}| = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (di - fg),$$

$$|C_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (dh - eg),$$

역행렬: 3x3

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$|C_{21}| = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (bi - ch),$$

$$|C_{22}| = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ai - cg),$$

$$|C_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (ah - bg),$$

역행렬: 3x3

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$|C_{31}| = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (bf - ce),$$

$$|C_{32}| = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (af - cd),$$

$$|C_{33}| = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ae - bd),$$

역행렬: 3x3 연습

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

역행렬: Cramer's Rule

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

Cramer's Rule

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_j^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \text{adj} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

이 때,

$$x_j^* = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & d_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

역행렬: Cramer's Rule 2x2

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$Ax = d, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$
$$x_1^* = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot (d_1 a_{22} - a_{12} d_2)$$
$$x_2^* = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 \\ a_{21} & d_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot (a_{11} d_2 - d_1 a_{21})$$

역행렬: Cramer's Rule 3x3

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬

$$Ax = d, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1^* = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

역행렬: Cramer's Rule 연습

수리경제학

이재석

행렬의 존재
이유

행렬의 연산

행렬 곱셈의
조건 및 연산
규칙

행렬식

전치행렬
(Transpose)

역행렬