수리경제학

미분 2: 극한

이재석

2025-04-15

목차

극한

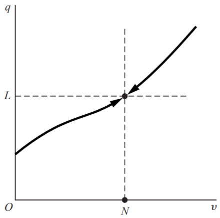
Definition (도함수)

실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 a 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 a 를 포함한다면, a 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

미분계수는, 포인트 a 에서 극한값. 올바른 L 값을 구하기 위해서는, 극한의 성질을 이해해야 함.
또한, 당연하게도 미분가능성의 조건은 포인트 a 에서 올바른 극한값의 조건을 만족해야 함.

여러 함수형태에 따른 극한값

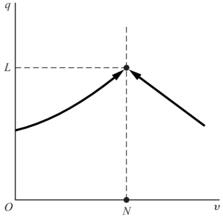


(a)

극한값이 존재

$f(\cdot)$는 'smooth'한 곡선.

좌측에서 N으로 접근하거나, 우측에서 접근할 시, 모두 극한값이 L로 수렴.



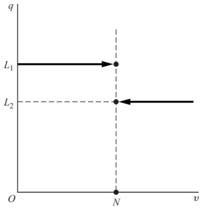
(b)

극한값이 존재

$f(\cdot)$는 'smooth'하지 않는 곡선.

하지만, 좌측에서 N으로 접근하거나, 우측에서 접근할 시, 모두 극한값이 L로 수렴.

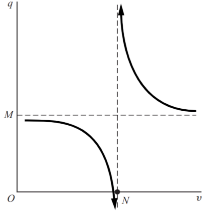
여러 함수형태에 따른 극한값



(c)

극한값이 존재하지 않음

$f(\cdot)$는 'smooth'하지 않는 곡선.
좌측에서 N으로 접근시 극한값 L_1, 우측에서 접근할 시 극한값 L_2.
극한값 L이 존재하지 않음.

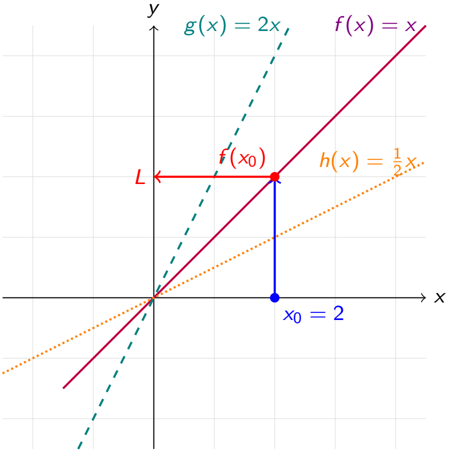


(d)

극한값이 존재하지 않음

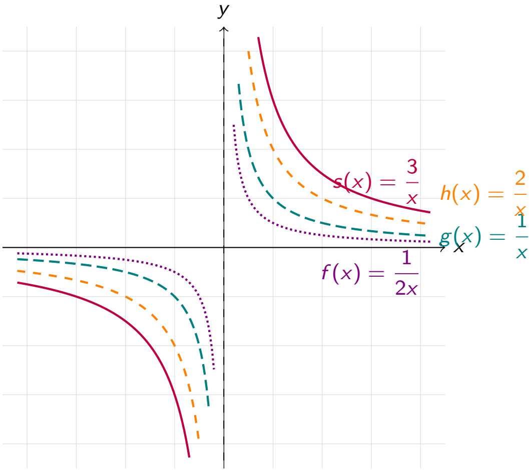
$f(\cdot)$는 'smooth'한 곡선.
좌측에서 극한값 $-\infty$, 우측에서 극한값 ∞.
따라서 L이 존재하지 않음.

함수의 극한: $f(x) = ax$ 의 형태



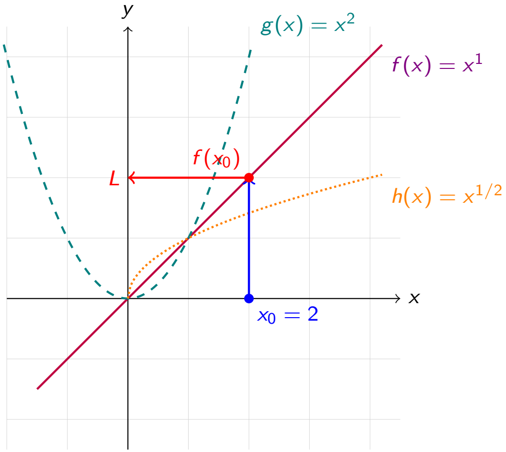
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
  $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$
  $\lim_{x\to 2} h(x) = 1/2$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$

함수의 극한: $f(x) = \dfrac{a}{x}$ 의 형태



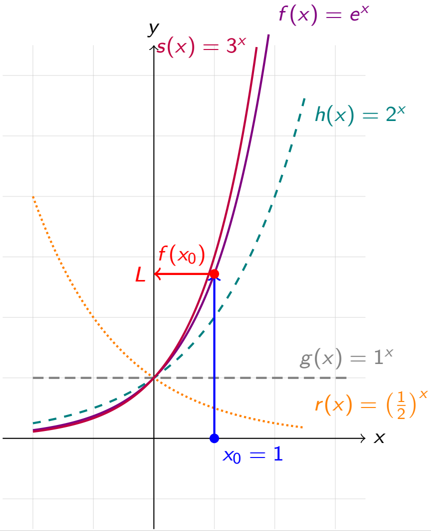
- $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$
  $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$
  $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$
  $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to \infty} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to \infty} h(x) = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$
  $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0^-$
  $\lim_{x\to -\infty} h(x) = 0^-$

함수의 극한: $f(x) = x^a$ 의 형태



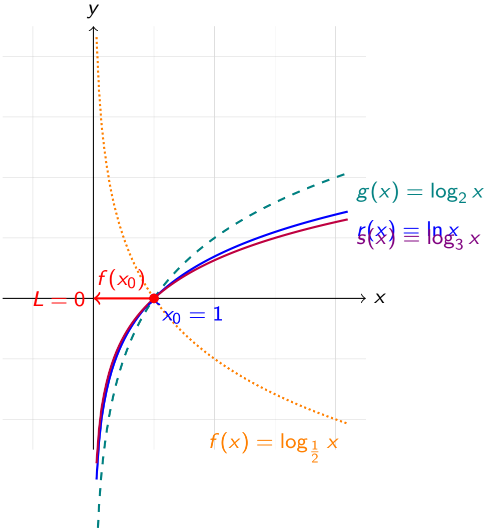
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
  $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$
  $\lim_{x\to 2} h(x) = \sqrt{2}$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = DNE$
  $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to -\infty} h(x) = DNE$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$

함수의 극한: $f(x) = a^x$ 의 형태



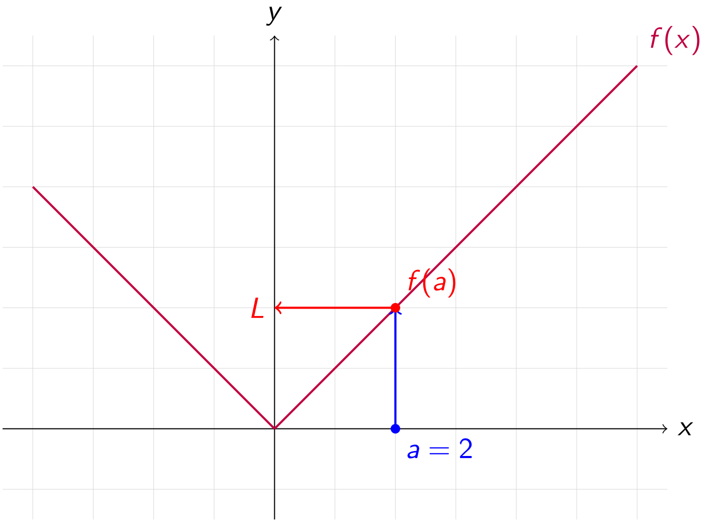
- $\lim_{x\to 1} f(x) = e$
  $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$
  $\lim_{x\to 1} r(x) = 1/2$
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{if } a = 1 \\ \infty & \text{if } a > 1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{if } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{if } a > 1 \end{cases}$

함수의 극한: $f(x) = \log_a x$ 의 형태

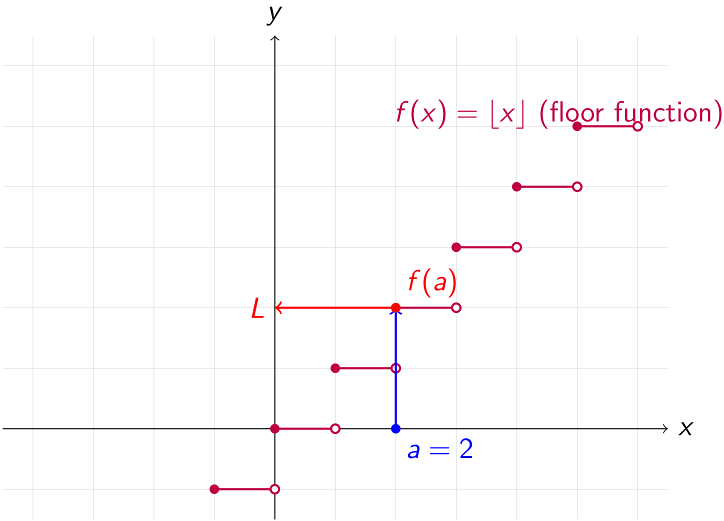


- $x > 0$일 때 정의됨. $x \to 0^+$에서 $\log_a x \to -\infty$
- $\log_{\frac{1}{2}} x$: 감소 함수
- $\log_2 x$, $\log_3 x$, $\ln x$: 증가 함수
- $\log_1 x$는 정의되지 않음 (base 1 불가능)
- $\lim_{x \to 1} \log_a x = 0 \quad$ (모든 $a > 0$, $a \neq 1$)
- $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{if } 0 < a < 1 \\ \infty & \text{if } a > 1 \end{cases}$

Visualizing $f(x) = |x|$ at $a = 2$



Visualizing $f(x) = \lfloor x \rfloor$ at $a = 2$



극한의 성질

함수 $y = f(x)$ 에 대해 (단, a 와 b 는 상수),

- **정리 I**
  $y = ax + b$ 일 때, $\lim_{x \to c} y = ac + b$
- **정리 II**
  $y = f(x) = b$ (상수 함수) 일 때, $\lim_{x \to c} y = b$
- **정리 III**
  $y = x$ 일 때, $\lim_{x \to c} y = c$,
  $y = x^k$ 일 때, $\lim_{x \to c} y = c^k$

일반적으로는 "$x \to c$" 는 "$x = c$" 와 같지 않음 (대입시 다른 값).

- **예시 1:** $y = 5x + 7$

$$\lim_{x \to 2} y = 5(2) + 7 = 17, \quad \lim_{x \to 0} y = 5(0) + 7 = 7$$

- **예시 2:** $y = x^3$

$$\lim_{x \to 2} y = (2)^3 = 8$$

극한의 성질 (두 함수의 조합)

두 개의 함수 $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ 가 x 에 대해 주어지고, 다음과 같은 유한한 실수의 극한값을 가질 때:

$$\lim_{x \to c} y_1 = L_1, \quad \lim_{x \to c} y_2 = L_2$$

- **정리 IV (합/차의 극한)**

$$\lim_{x \to c} (y_1 \pm y_2) = L_1 \pm L_2$$

- **정리 V (곱의 극한)**

$$\lim_{x \to c} (y_1 \cdot y_2) = L_1 \cdot L_2$$

- **정리 VI (나눗셈의 극한)** 단, $L_2 \neq 0$ 이어야 함

$$\lim_{x \to c} \frac{y_1}{y_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

다항식 함수의 극한

주어진 극한의 성질을 활용하면, 모든 다항식 함수의 극한을 쉽게 구할 수 있습니다.

일반적인 다항식 함수:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$x \to c$ 일 때, 각 항의 극한은 다음과 같습니다:

$$\lim_{x\to c} a_0 = a_0, \quad \lim_{x\to c} a_1 x = a_1 c, \quad \lim_{x\to c} a_2 x^2 = a_2 c^2, \quad \cdots$$

따라서 전체 다항식의 극한은 다음과 같이 계산됩니다:

$$\lim_{x\to c} f(x) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n$$

예제 1: 다항식 함수의 극한

함수 $y = f(x) = x^2 - 9x + 7$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

예제 1: 다항식 함수의 극한

함수 $y = f(x) = x^2 - 9x + 7$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0^2 - 9(0) + 7 = 7$

(b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 3^2 - 9(3) + 7 = 9 - 27 + 7 = -11$

(c) $\lim_{x \to -1} f(x) = (-1)^2 - 9(-1) + 7 = 1 + 9 + 7 = 17$

예제 2: 곱 형태의 극한

함수 $y = f(x) = (x+2)(x-3)$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 5} f(x)$

예제 2: 곱 형태의 극한

함수 $y = f(x) = (x+2)(x-3)$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to -1} f(x) = (-1+2)(-1-3) = (1)(-4) = -4$

(b) $\lim_{x \to 0} f(x) = (0+2)(0-3) = (2)(-3) = -6$

(c) $\lim_{x \to 5} f(x) = (5+2)(5-3) = (7)(2) = 14$

예제 3: 분수 함수의 극한

함수 $y = f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 5} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

예제 3: 분수 함수의 극한

함수 $y = f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3(0)+5}{0+2} = \frac{5}{2}$

(b) $\lim_{x\to 5} f(x) = \frac{3(5)+5}{5+2} = \frac{20}{7}$

(c) $\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{3(-1)+5}{-1+2} = \frac{-3+5}{1} = 2$

극한 형태에서 값 찾기

- $\lim \frac{c}{c} = 1$
  (같은 상수의 나눗셈)
- $\lim \frac{c}{\infty} = 0$
  (큰 분모 $\to$ 값이 작아짐)
- $\lim \frac{c}{0^+} = +\infty$
  (작은 양수로 나누면 발산)
- $\lim \frac{0}{\infty} = 0$
  (0이 아무리 큰 수로 나눠져도 0)
- $\lim \frac{\infty}{0^+} = +\infty$
  (큰 수를 작은 수로 나누면 발산)

- $\lim \frac{\infty}{\infty}$: 불확정형
  (함수 전개 필요, 예: 다항식의 차수 비교)
- $\lim \frac{0}{0}$: 불확정형
  (인수분해, 유리화, L'Hôpital 등 필요)

※ 불확정형은 직접 계산이나 정리가 필요합니다.

기본 극한 예시

- $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-3} = 1$

∞/∞ 형태

형태: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ 는 불확정형

전개 방법: 최고차항 비교, 인수 정리 또는 L'Hôpital 적용

예시:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x}{5x^2-x} = \frac{3}{5}$$

→ 최고차항으로 나누기

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$$

→ 지수가 다항보다 빠르게 성장

0/0 형태

형태: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 는 불확정형

해결 방법:

- 인수분해, 유리화, 공통 인자 소거
- 혹은 L'Hôpital Rule 적용

예시:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

L'Hôpital's Rule

정리 조건:

- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 또는 $\frac{\infty}{\infty}$
- $f'(x), g'(x)$ 존재하고, $g'(x) \neq 0$

공식:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

예시:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

도함수는 불확정형 0/0

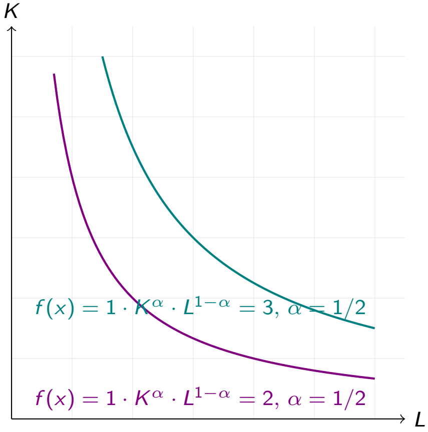
Definition (도함수)

실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 a 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 a 를 포함한다면, a 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

도함수는 0/0의 불확정형태를 가지고 있음. 도함수의 정의를 의용해서 미분계수를 구할때는 인수분해, 유리화, 통 인자 소거 혹은 L'Hôpital Rule 을 적용하여야 함. 이처럼 극한은 미분의 근본을 구성하며, 극한의 성질을 이해하는것이 미분을 이해하는데 중요함. 다시한번 강조하지만, 미분가능성의 조건은 포인트 a 에서 올바른 극한값의 조건을 만족해야 함.

콥더글라스 생산함수



함수형태: $f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$

- $A > 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$
- 생산요소 K, L이 증가할 때 산출물의 극한 분석

예시:

$$\lim_{K \to \infty} AK^{\alpha}L^{\beta} = \infty \quad (\text{고정 } L > 0)$$

→ 규모의 경제 또는 한계생산체감 여부를 확인

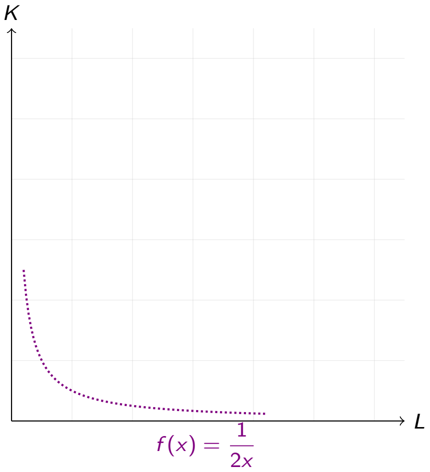
$$\lim_{K \to 0^{+}} AK^{\alpha}L^{\beta} = 0$$

→ 자본이 없는 경우 산출물도 없음

유리함수 형태의 효용함수

수리경제학

이재석



함수형태: $U(x) = \frac{ax}{b+x}$

- 한계효용체감 (Diminishing Marginal Utility) 설명
- 상한값(포화효용)에 접근함

예시:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax}{b+x} = a$$

$\to$ 효용이 한계값 a에 수렴

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{b+x} = 0$$