수리경제학

미분 - 중간고사 대비 Review

이재석

2025-04-17
(updated:April 17, 2025)

목차

극한

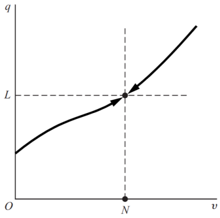
Definition (도함수)

실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 a 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 a 를 포함한다면, a 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

미분계수는, 포인트 a 에서 극한값. 올바른 L 값을 구하기 위해서는, 극한의 성질을 이해해야 함.
또한, 당연하게도 미분가능성의 조건은 포인트 a 에서 올바른 극한값의 조건을 만족해야 함.

여러 함수형태에 따른 극한값

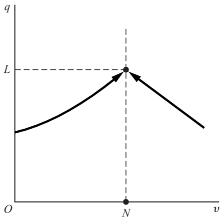


(a)

극한값이 존재

$f(\cdot)$는 'smooth'한 곡선.

좌측에서 N으로 접근하거나, 우측에서 접근할 시, 모두 극한값이 L로 수렴.



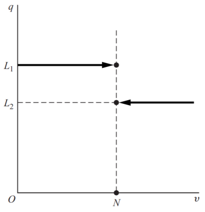
(b)

극한값이 존재

$f(\cdot)$는 'smooth'하지 않는 곡선.

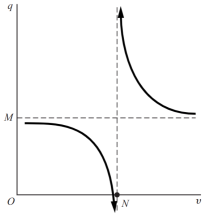
하지만, 좌측에서 N으로 접근하거나, 우측에서 접근할 시, 모두 극한값이 L로 수렴.

여러 함수형태에 따른 극한값



(c)

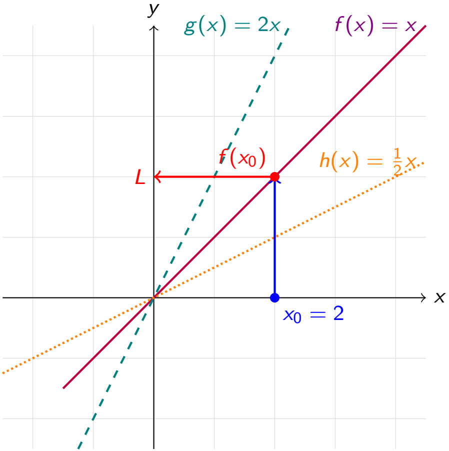
극한값이 존재하지 않음
$f(\cdot)$는 'smooth'하지 않는 곡선.
좌측에서 N으로 접근시 극한값 L_1, 우측에서 접근할 시 극한값 L_2.
극한값 L이 존재하지 않음.



(d)

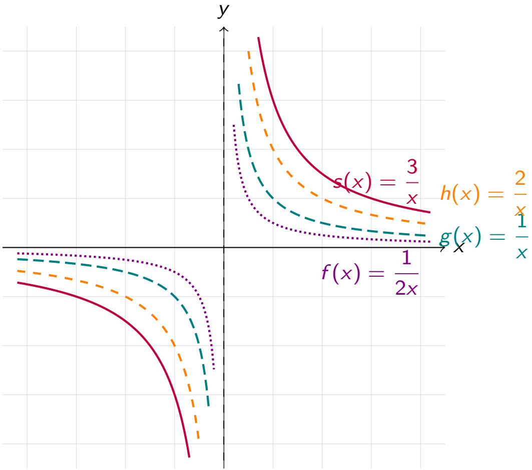
극한값이 존재하지 않음
$f(\cdot)$는 'smooth'한 곡선.
좌측에서 극한값 $-\infty$, 우측에서 극한값 ∞.
따라서 L이 존재하지 않음.

함수의 극한: $f(x) = ax$ 의 형태



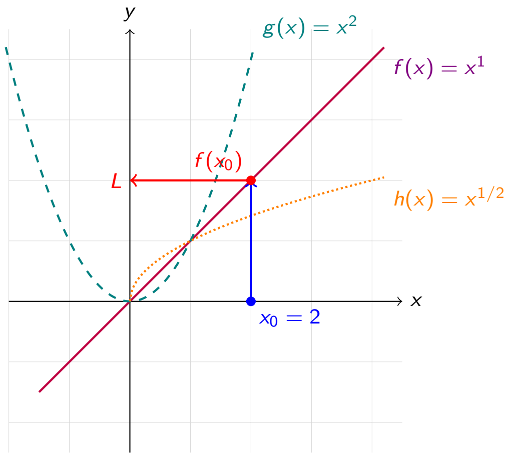
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
  $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$
  $\lim_{x\to 2} h(x) = 1/2$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$

함수의 극한: $f(x) = \frac{a}{x}$ 의 형태



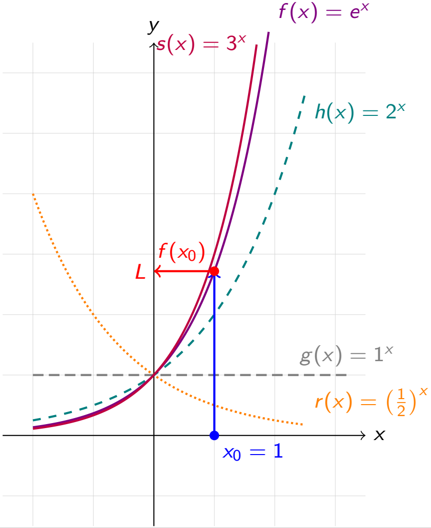
- $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$
  $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$
  $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$
  $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to \infty} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to \infty} h(x) = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$
  $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0^-$
  $\lim_{x\to -\infty} h(x) = 0^-$

함수의 극한: $f(x) = x^a$ 의 형태



- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
  $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$
  $\lim_{x\to 2} h(x) = \sqrt{2}$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = DNE$
  $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to \infty} h(x) = \infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty$
  $\lim_{x\to -\infty} h(x) = DNE$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$
  $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$

함수의 극한: $f(x) = a^x$ 의 형태



- $\lim_{x\to 1} f(x) = e$
  $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$
  $\lim_{x\to 1} r(x) = 1/2$
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{if } a = 1 \\ \infty & \text{if } a > 1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{if } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{if } a > 1 \end{cases}$

극한의 성질

함수 $y = f(x)$ 에 대해 (단, a 와 b 는 상수),

- **정리 I**
  $y = ax + b$ 일 때, $\lim_{x \to c} y = ac + b$
- **정리 II**
  $y = f(x) = b$ (상수 함수) 일 때, $\lim_{x \to c} y = b$
- **정리 III**
  $y = x$ 일 때, $\lim_{x \to c} y = c$,
  $y = x^k$ 일 때, $\lim_{x \to c} y = c^k$

**일반적으로는 "$x \to c$" 는 "$x = c$" 와 같지 않음 (대입시 다른 값).*

- **예시 1:** $y = 5x + 7$

$$\lim_{x \to 2} y = 5(2) + 7 = 17, \quad \lim_{x \to 0} y = 5(0) + 7 = 7$$

- **예시 2:** $y = x^3$

$$\lim_{x \to 2} y = (2)^3 = 8$$

극한의 성질 (두 함수의 조합)

두 개의 함수 $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ 가 x 에 대해 주어지고, 다음과 같은 유한한 실수의 극한값을 가질 때:

$$\lim_{x \to c} y_1 = L_1, \quad \lim_{x \to c} y_2 = L_2$$

- **정리 IV (합/차의 극한)**

$$\lim_{x \to c} (y_1 \pm y_2) = L_1 \pm L_2$$

- **정리 V (곱의 극한)**

$$\lim_{x \to c} (y_1 \cdot y_2) = L_1 \cdot L_2$$

- **정리 VI (나눗셈의 극한)** 단, $L_2 \neq 0$ 이어야 함

$$\lim_{x \to c} \frac{y_1}{y_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

다항식 함수의 극한

주어진 극한의 성질을 활용하면, 모든 다항식 함수의 극한을 쉽게 구할 수 있음.

일반적인 다항식 함수:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$x \to c$ 일 때, 각 항의 극한은 다음과 같음:

$$\lim_{x\to c} a_0 = a_0, \quad \lim_{x\to c} a_1 x = a_1 c, \quad \lim_{x\to c} a_2 x^2 = a_2 c^2, \quad \cdots$$

따라서 전체 다항식의 극한은 다음과 같이 계산됨:

$$\lim_{x\to c} f(x) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n$$

예제 1: 다항식 함수의 극한

함수 $y = f(x) = x^2 - 9x + 7$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

예제 2: 곱 형태의 극한

함수 $y = f(x) = (x+2)(x-3)$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 5} f(x)$

예제 3: 분수 함수의 극한

함수 $y = f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$ 의 극한을 구하시오:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 5} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

극한 형태에서 값 찾기

- $\lim \frac{c}{c} = 1$
  (같은 상수의 나눗셈)
- $\lim \frac{c}{\infty} = 0$
  (큰 분모 → 값이 작아짐)
- $\lim \frac{c}{0^+} = +\infty$
  (작은 양수로 나누면 발산)
- $\lim \frac{0}{\infty} = 0$
  (0이 아무리 큰 수로 나눠져도 0)
- $\lim \frac{\infty}{0^+} = +\infty$
  (큰 수를 작은 수로 나누면 발산)

- $\lim \frac{\infty}{\infty}$: 불확정형
  (함수 전개 필요, 예: 다항식의 차수 비교)
- $\lim \frac{0}{0}$: 불확정형
  (인수분해, 유리화, L'Hôpital 등 필요)

※ 불확정형은 직접 계산이나 정리가 필요.

기본 극한 예시

- $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x}$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3}$

∞/∞ 형태

형태: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ 는 불확정형

전개 방법: 최고차항 비교, 인수 정리 또는 L'Hôpital 적용

예시: $\rightarrow$ 최고차항으로 나누기

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = \frac{3}{5}$$

0/0 형태

형태: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 는 불확정형

해결 방법:

- 인수분해, 유리화, 공통 인자 소거
- 혹은 L'Hôpital Rule 적용

예시: → 인수분해 및 공통인자 소거

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

도함수는 불확정형 0/0

Definition (도함수)

실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 a 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 a 를 포함한다면, a 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

도함수는 0/0의 불확정형태를 가지고 있음. 도함수의 정의는 미분계수를 구할때, 극한의 성질과 계산법 (인수분해, 유리화, 통 인자 소거 등)을 적용하여야 함을 보여줌.
이처럼 극한은 미분의 근본을 구성하므로, 극한의 성질을 이해하는것이 미분을 이해하는데 중요.

미분의 정의와 의미

Definition (도함수)

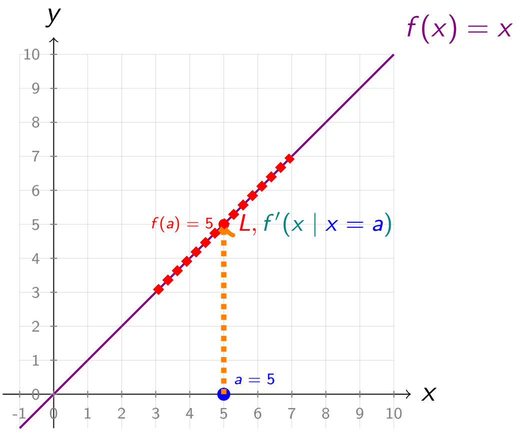
실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 a 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 a 를 포함한다면, a 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

- 미분하다: 함수 $f(x)$ 의 도함수에 x_0 를 대입하여, 미분계수 L의 값을 찾는다
- 어떤 함수 $f(x)$를 미분하다
  $= f(x)$ 의 미분계수를 구하다
  $= f'(x \mid x = x_0) = f'(x)$를 구하다
  $= f(x)$ 의 도함수를 구하다 $= \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$

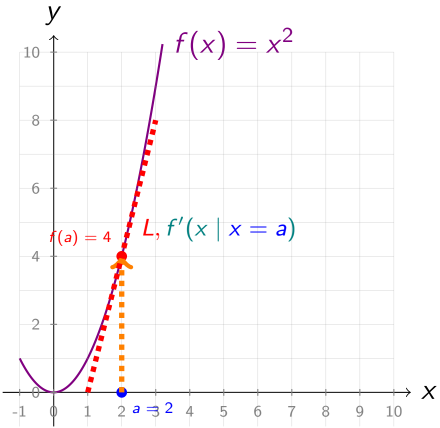
미분의 기하학(Geometry)적 접근 $y = x$

- 미분은 함수의 기울기를 나타내며, 기하학적으로는 접선의 기울기와 관련됨
- 함수의 그래프에서 특정 점에서의 접선의 기울기를 구하는 것이 미분의 본질
- 미분계수는 함수의 순간 변화율을 나타내며, 이는 접선의 기울기와 동일함



미분의 접근법: 기하학(Geometry) $f(x) = x^2$

- 미분=함수의 기울기=접선의 기울기
  미분은 접선의 기울기 $\Longleftrightarrow$ 접선의 기울기는 미분
  미분계수는 함수의 순간 변화율= 접선의 기울기



미분의 접근법: 기하학(Geometry) $f(x) = x^2$

수리경제학

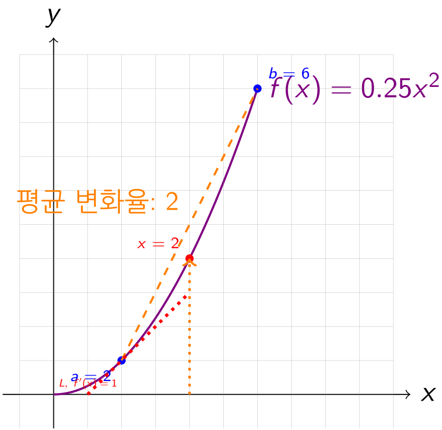
이재석

- 평균변화율: 구간 $[a, b]$에서 함수의 평균적 변화율 (delta y / delta x)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- 순간변화율: 특정 지점 $x = a$에서의 변화율 (미분계수) (dy / dx)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



함수에 따른 미분법: 공식

- Constant (상수): $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}c = 0$
- Polynomial: $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}x^n = n \cdot x^{n-1}$

함수에 따른 미분법: Polynomial $f(x) = ax$

Definition (도함수)

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f(x) = ax, \quad \text{도함수: } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

도함수에 대입. 예를 들어, $f(x+h) = a(x+h)$

$$\to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) - ax}{h}$$

$$\lim \text{ 계산} \to = \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

함수에 따른 미분법: Polynomial $f(x) = ax^2$

$$f(x) = ax^2, \quad \text{도함수: } f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \to f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2ax + \lim_{h\to 0} ah = 2ax + a \cdot 0 = 2ax$$

$$\therefore f'(x) = 2ax$$

$$f'(x \mid x = 1) = 2a \cdot 1, \quad f'(x \mid x = 2) = 4a$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{도함수:} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + hx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1x^{-2}$$

$$f'(x \mid x = 1) = -1, \quad f'(x \mid x = 2) = -\frac{1}{4}$$

함수에 따른 미분법: Polynomial 예제

$$f(x) = a \cdot x^3$$
$$f'(x)' =$$

$$g(x) = \cdot x^{(-4)}$$
$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} f(x) =$$

함수에 따른 미분법: Polynomial 예제

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + x$$
$$f'(x) =$$

$$f(x) = a \cdot x^{10} + b \cdot x^5 + c \cdot x^2 + d$$
$$f'(x) =$$

곱의 미분

곱의 미분법(= 나눗셈의 미분법)

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

곱의 미분

함수 $f(x), g(x)$ 에 대해 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

두 항의 차를 직접 다루기 어렵기 때문에, 더하고 빼기

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

극한은 각각 따로 가능하므로:

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} g(x+h) \right) + f(x) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

곱의 미분: 함수의 형태에 따라.

$$f(x) = a \cdot x, \quad g(x) = c \cdot x^3$$
$$(f(x) \cdot g(x))' =$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^{-4}$$
$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(f(x) \cdot g(x)) =$$

곱의 미분: 함수의 형태에 따라.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2 \cdot x^2 + x$$
$$(f(x) \cdot g(x))' =$$

$$f(x) = x^2 + x$$
$$g(x) = a \cdot x^{10} + b \cdot x^5 + c \cdot x^2 + d$$
$$(f(x) \cdot g(x))' =$$

합성함수의 미분: Chain Rule

Chain Rule

$h = f \circ g$ 인 합성함수 h 라면
h' 혹은 $\mathbf{d}h = (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

e.g. $h = f \circ g = f(g(x))$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}h = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}f(g(x)) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}g(x)}f(g(x)) \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}g(x)$$

이때, $u = g(x)$ 로 치환하면, 편리해 짐. 'u-substitution'이라는 미분 테크닉.
e.g. $u = g(x) \rightarrow h = f \circ g = f(u)$,

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}h = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}f(u) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}u}f(u) \cdot \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x}$$

합성함수의 미분: Chain Rule

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

앞부분은 마치 $\dfrac{\Delta f(g(x))}{\Delta g(x)}$ 인데 $\Delta \to 0$ 이면 미분의 정의

극한을 각각 분리하고, u를 치환하면:

$u = g(x+h) \quad \Rightarrow \quad u \to g(x)$ as $h \to 0$ (왜냐하면 g 가 연속이므로)

$$= \left(\lim_{u\to g(x)} \frac{f(u) - f(g(x))}{u - g(x)} \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

합성함수의 미분: 함수의 형태에 따라.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = a \cdot x, \quad g(x) = c \cdot x^3 \\
&h = f \circ g = \\
&h' = (f \circ g)' =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^2, \quad g(x) = x^{-4} \\
&h = f \circ g = \\
&\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} h = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(f \circ g) =
\end{aligned}
$$

합성함수의 미분: 함수의 형태에 따라.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2 \cdot x^2 + x$$
$$h = f \circ g =$$
$$h' = (f \circ g)' =$$

합성함수의 미분: 함수의 형태에 따라.

$$f(x) = x^{20}$$
$$g(x) = x^a + x^b + c$$
$$h = f \circ g =$$
$$h' = (f \circ g)' =$$