수리경제학
중간고사 풀이

이재석

2025-04-29

1. 계수행렬 A가 다음과 같이 주어지고, 행렬식 $|A| = -6$이다. (20점)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 1행과 2행을 서로 교환하면 행렬식은 얼마인가? (5점)

6

(열이나 행을 홀수번 교환시 행렬식 부호 바뀜)

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

의 행렬식은 얼마인가? (5점)

-12

$|A'| = a_{11}|C_{11}| + 2 * a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| = |A| + a_{12}|C_{12}| =$
$-6 + (1)(-1)^{1+2}(4 \cdot 3 - 1 \cdot 6) = -6 - 6$

A를 확장한 다음 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

의 행렬식은 얼마인가? (10점)

$$(-1)2(-1)^{1+4}(-6) = -12$$

1행과 4행을 스왑한다면, $|(C_{14})'| = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 이때 다시, 1,3 스왑 그리고 2,3 을 스왑한다면 A와 같아짐. 그리고 두번 스왑했으므로 행렬식도 -6 으로 동일.
따라서 $M_{14} = -6$
A의 행렬식은 스왑한 행렬식의 부호가 바뀐 것.
$|A| = (-1)|A'| = (-1) \cdot 2 * |(C_{14})'| = (-1)2(-1)^{1+4}(-6) = -12$

2. 수많은 방정식으로 구성된 국민소득 모형을 생각해보자. 이를 행렬과 벡터로 표시했더니 $Ax = d$로 단순화되었다. 이 선형방정식 체계의 해 x^*를 아래 기호를 이용해 구성하라. (10점)
(A, A', $|A|$, C, M, adj A, d)
$x^* = A^{(-1)}d = \frac{1}{|A|}adj(A)d$

3. 다음 행렬 A에 대해:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

의 $|A|$ 를 계산하고 특이성(singularity)을 검정하라. (20점)
1,4를 스왑한 A' 라면,

$$|A| = (-1)|A'| = (-1) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+4}|M'_{14}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$1 \cdot (-1 - 15) - 4 \cdot (4 - 30) + (-2) \cdot (12 + 6) = 52$
행렬식이 0이 아니므로, 비특이행렬.

4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

의 역행렬을 구하라. (10점)

$|A| = -1$

$$C = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 0 & (-1)^{1+2} \cdot 1 & (-1)^{1+3} \cdot 0 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 0 & (-1)^{2+3} \cdot 0 \\ (-1)^{3+1} \cdot 0 & (-1)^{3+2} \cdot 0 & (-1)^{3+3} \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. 다음의 선형방정식 체계가 주어졌다. 주어진 문제에 답하라. (30점)

$$
\begin{aligned}
6x + 3y + z &= 22 \\
x + 4y - 2z &= 12 \\
4x - y + 5z &= 10
\end{aligned}
$$

(1) 주어진 연립방정식을 행렬과 벡터로 나타내어라. (5점)

$$
\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

(2) 계수행렬의 행렬식 $|A|$을 라플라스 전개를 이용해 구하라. (5점)

$$|A| = 6 \cdot (20 - 2) - 3 \cdot (5 + 8) + 1 \cdot (-1 - 16) = 52$$

(3) adj(A)를 구하라. (10점)

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} (20-2) & -(5+8) & (-1-16) \\ -(15+1) & (30-4) & -(-6-12) \\ (-6-4) & -(-12-1) & (24-3) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

(4) 행렬 A의 역행렬을 구하라. (5점)

$$A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

(5) 위의 결과를 이용해 x, y, z의 값을 구하라. (5점)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$x = \frac{1}{52}(18 * 22 - 16 * 12 - 10 * 10) = \frac{104}{52} = 2$
$y = \frac{1}{52}(-13 * 22 + 26 * 12 + 13 * 10) = \frac{156}{52} = 3$
$x = \frac{1}{52}(-17 * 22 + 18 * 12 + 21 * 10) = \frac{52}{52} = 1$

6. '크래머의 법칙(Cramer's Rule)'을 이용하여 x, y, z의 해를 구하라. 풀이 과정을 요약해 적을 것. (20점)

$$\begin{aligned} 6x + 3y - 2z &= 7 \\ 7x - y - z &= 0 \\ 10x - 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad |A| = -61, \quad x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-61}{-61} = 1$$

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 7 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-183}{-61} = 3, \quad z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \end{vmatrix} = \frac{-244}{-61} = 4$$

7. $y = (3x^3 + 4x^2 + 3x + 4)^{1000}$ 에 대해 다음을 구하시오. (20점)
(1)

$$\frac{dy}{d(3x^3 + 4x^2 + 3x + 4)} = 1000(3x^3 + 4x^2 + 3x + 4)^{999}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = 1000(3x^3 + 4x^2 + 3x + 4)^{999}(9x^2 + 8x + 3)$$