수리경제학
미분

이재석

2025-04-29
(updated:April 29, 2025)

목차

미분의 정의와 의미

Definition (도함수)

실수($\mathbb{R}$)의 어떤 함수 $f(x)$가 정의되는 포인트 a 에서 *미분가능(differentiable)* 하고, 정의역이 포인트 a 를 포함한다면, a 에서 미분계수(순간변화율) L 은

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

- 미분하다: 함수 $f(x)$ 의 도함수에 x_0 를 대입하여, 미분계수 L의 값을 찾는다
- 어떤 함수 $f(x)$를 미분하다
  $= f(x)$ 의 미분계수를 구하다
  $= f'(x \mid x = x_0) = f'(x)$를 구하다
  $= f(x)$ 의 도함수를 구하다 $= \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$

함수에 따른 미분법: Power Rule

상수함수의 미분법칙

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}c = 0, \quad C \text{ 는 상수 (constant)}$$

Polynomial 미분: Power Rule

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

함수에 따른 미분법: Polynomial $f(x) = ax$

Definition (도함수)

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f(x) = ax, \quad \text{도함수: } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

도함수에 대입. 예를 들어, $f(x+h) = a(x+h)$

$$\to f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) - ax}{h}$$

$$\lim \text{ 계산} \to = \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

함수에 따른 미분법: Polynomial $f(x) = ax^2$

$$f(x) = ax^2, \quad \text{도함수: } f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \to f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2ax + \lim_{h\to 0} ah = 2ax + a \cdot 0 = 2ax$$

$$\therefore f'(x) = 2ax$$

$$f'(x \mid x = 1) = 2a \cdot 1, \quad f'(x \mid x = 2) = 4a$$

함수에 따른 미분법: Polynomial $f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = x^{-1}$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{도함수:} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{도함수에 대입} \rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

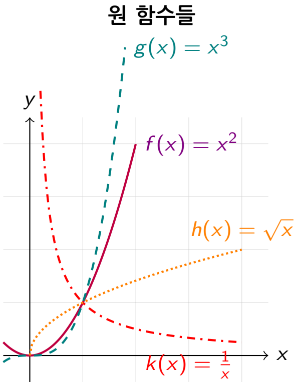
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

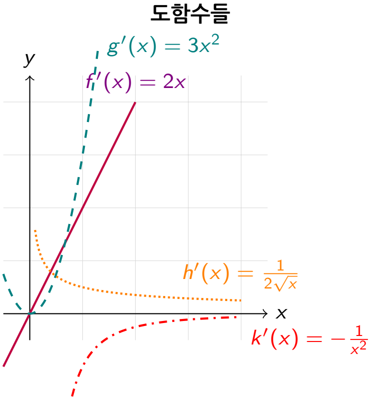
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2 + hx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1x^{-2}$$

$$f'(x \mid x = 1) = -1, \quad f'(x \mid x = 2) = -\frac{1}{4}$$

다항함수와 도함수 비교: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \sqrt{x}$





$f(x) = a \cdot x^2$ $\quad f'(x) =$ $\quad f''(x) =$

$f(x) = x^{(-1/2)}$ $\quad f'(x) =$ $\quad f''(x) =$

$f(x) = 2 \cdot x^2 + x$ $\quad f'(x) =$ $\quad f''(x) =$

도함수의 정의로 미분:지수함수 미분법칙

지수함수의 미분법칙

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x$$
$$f(x) = a^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

도함수의 정의로 미분 - 지수함수

$$f(x) = e^x, \quad \text{도함수에 대입} \to f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

e^h 의 정의 $e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots$ 를 활용하여 대입하면,

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots - 1}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{1!}/h + \frac{h^2}{2!}/h + \cdots\right)$$

$$= e^x \cdot (1 + 0 + \cdots) = e^x$$

도함수의 정의로 미분 - 지수함수

$f(x) = a^x$, 도함수에 대입 $\rightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$e^{\ln x} = x$의 성질을 이용하여 $a = e^{\ln a}$

양변을 h 거듭제곱하면, 로그의 성질에 의해 $\Rightarrow a^h = e^{h \ln a}$

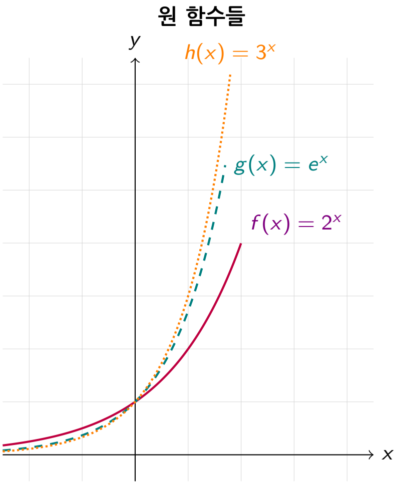
e 의 정의를 활용하기 위해, 양변에 1을빼고 h로 나누면, $\Rightarrow \dfrac{a^h - 1}{h} = \dfrac{e^{h\ln a} - 1}{h}$

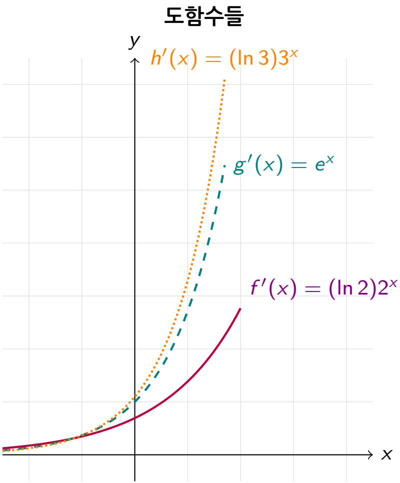
$h \ln a = u$ 로 치환하고 정리하면, $h = \dfrac{u}{\ln a}$, $\quad \dfrac{e^{h\ln a} - 1}{h} = \dfrac{e^u - 1}{\frac{u}{\ln a}} = \dfrac{e^u - 1}{u} \cdot \ln a$

이때, 극한은 u에 대해서로 변함: $\lim_{h\to 0} h \ln a = 0$ 이므로 $u \rightarrow 0$

$$= a^x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \ln a = a^x \cdot 1 \cdot \ln a \qquad (\because \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ 앞에서 찾음!})$$

지수함수와 도함수 비교: $f(x) = 2^x$, $g(x) = e^x$, $h(x) = 3^x$





$f(x) = 2 \cdot e^x \quad f'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad f''(x) =$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad f''(x) =$

도함수의 정의로 미분: 로그함수 미분법칙

로그함수의 미분법칙

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \log_a x \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$$

도함수의 정의로 미분 - 자연로그

$f(x) = \ln x, \quad$ 도함수에 대입 $\rightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

로그의 성질: $\ln(x+h) - \ln x = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

치환: $u = \frac{h}{x} \Rightarrow h = ux, \quad h \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1}{ux} \cdot \ln(1+u) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$$

Mercator series를 이용해, 전개하면 $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$

$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0}(u/u - \frac{u^2}{2}/u + \frac{u^3}{3}/u + \frac{u^4}{4}/u + \cdots) = 1 - 0 + 0 + \cdots = 1$ 이므로,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \cdot 1$$

도함수의 정의로 미분 - 밑이 a 인 로그

$$f(x) = \log_a x$$

로그의 성질에 의해 $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, (ln a 는 상수)

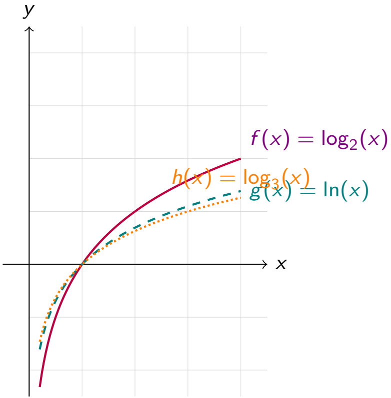
따라서

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} \ln x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

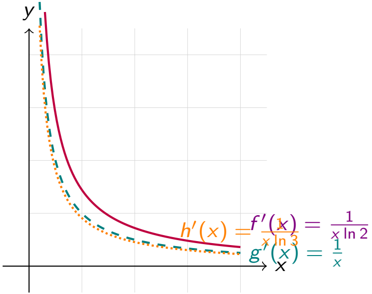
$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

로그함수와 도함수 비교: $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \log_3(x)$

원 함수들



도함수들



$f(x) = \ln x^3 \quad f'(x) = \qquad f''(x) =$

$f(x) = \log_{10} x \quad f'(x) = \qquad f''(x) =$

곱의 미분

곱의 미분법(= 나눗셈의 미분법)

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

곱의 미분

함수 $f(x), g(x)$ 에 대해 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

두 항의 차를 직접 다루기 어렵기 때문에, 더하고 빼기

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

극한은 각각 따로 가능하므로:

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} g(x+h) \right) + f(x) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = a \cdot x^{10} + b \cdot x^5 + c \cdot x^2 + d$$

$$(f(x) \cdot g(x))' =$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' =$$

주요 함수형태와 Chain Rule

Chain Rule

$h = f \circ g$ 인 합성함수 h 라면

$$h' = \mathbf{d}h = (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

- polynomial x polynomial: $f(x) = (ax^2 + bx)^c$
- exponential x polynomial: $g(x) = e^{ax^2+bx+c}$
- logarithm x polynomial: $h(x) = \ln(ax + b)^c$

합성함수의 미분: Chain Rule

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

앞부분은 마치 $\frac{\Delta f(g(x))}{\Delta g(x)}$ 인데 $\Delta \to 0$ 이면 미분의 정의

극한을 각각 분리하고, u를 치환하면:

$u = g(x+h) \quad \Rightarrow \quad u \to g(x)$ as $h \to 0$ (왜냐하면 g 가 연속이므로)

$$= \left(\lim_{u\to g(x)} \frac{f(u) - f(g(x))}{u - g(x)} \right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

주요 함수형태와 Chain Rule

- polynomial x polynomial : $f(x) = (ax^2 + bx)^c$

$$f(x) = (ax+b)^{-1} \qquad f'(x) =$$
$$f''(x) =$$

$$f(x) = (ax+b)^{20} \qquad f'(x) =$$
$$f''(x) =$$

$$f(x) = (ax^2+bx+c)^{20} \qquad f'(x) =$$
$$f''(x) =$$

$$f(x) = a(2x+2)^2 + b(2x+2) + c \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = (ax+b)(cx+d) \qquad f'(x) =$$

주요 함수형태와 Chain Rule

- exponential x polynomial : $g(x) = e^{ax^2+bx+c}$

$$g(x) = e^{ax+b} \qquad g'(x) =$$

$$g(x) = a^{bx+c} \qquad g'(x) =$$

$$g(x) = e^{ax^2+bx+c} \qquad g'(x) =$$

$$g(x) = (ax+b)e^{cx+d} \qquad g'(x) =$$

$$g(x) = e^{ax+b}e^{cx+d} \qquad g'(x) =$$

$$g(x) = \frac{e^{ax+b}}{a^{cx+d}} \qquad g'(x) =$$

주요 함수형태와 Chain Rule

- logarithm x polynomial : $h(x) = \ln(ax+b)^c$

$$h(x) = \ln(ax+b)^{20} \qquad h'(x) =$$

$$h(x) = \ln \frac{ax+b}{cx+d} \qquad h'(x) =$$

$$h(x) = \frac{\ln ax+b}{\ln cx+d} \qquad h'(x) =$$

$$h(x) = \log_{cx+d}(ax+b) \qquad h'(x) =$$

연속성과 미분 가능성

함수의 미분가능성

- 함수 $f(x)$가 $x = a$ 에서 미분 가능하려면, a에서 미분계수가 존재해야 함 :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{존재해야 함}$$

- 미분 가능성은 *연속성을 포함*.
- 연속성이 있다고 해서 *항상 미분 가능하진 않음*.

함수의 연속성

- 함수 $f(x)$가 $x = a$ 에서 연속이려면, a 에서 함수값과 함수의 극한값이 동일해야 함 :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

역함수의 미분법칙 (Inverse-Function Rule)

역함수 존재 조건:

- $y = f(x)$ 가 일대일 대응(one-to-one mapping)이면, 역함수 $x = f^{-1}(y)$ 존재.
- 함수 $f(x)$가 **strictly monotonic** (엄격히 단조 증가 또는 감소)이면 역함수 존재.
- 단조성 확인법: $f'(x)$가 모든 구간에서 부호가 일정하고 $f'(x) \neq 0$.
- $y = f(x)$와 $x = f^{-1}(y)$ 그래프는 $y = x$ 대각선을 기준으로 대칭.

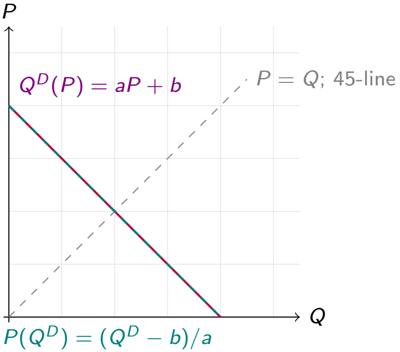
역함수 미분법 (Inverse-Function Differentiation Rule)

원 함수의 도함수와 역함수의 도함수는 **서로 역수 관계**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

역함수 미분법 예시: 완전대체재 수요함수

수요함수와 역수요함수 관계



도함수 관계

- **수요함수:**

$$Q^D(P) = aP + b \quad (a < 0)$$

$$\frac{\mathbf{d}Q^D}{\mathbf{d}P} = a$$

- **역수요함수:**

$$P(Q^D) = \frac{Q^D - b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{d}P}{\mathbf{d}Q^D} = \frac{1}{a}$$

- **Inverse-Function Rule:**

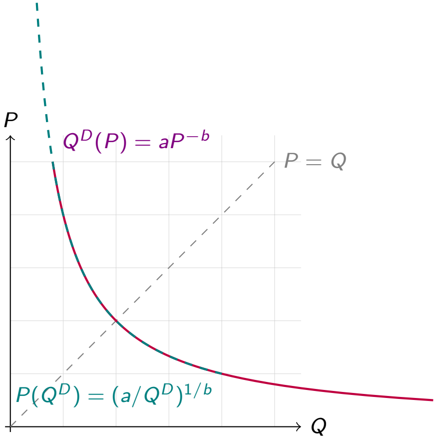
$$\frac{\mathbf{d}P}{\mathbf{d}Q^D} = \frac{1}{\frac{\mathbf{d}Q^D}{\mathbf{d}P}} \quad (\text{역수 관계})$$

- $a < 0$ 이므로:

$$\frac{\mathbf{d}P}{\mathbf{d}Q^D} < 0$$

역함수 미분법 예시: Cobb-Douglas 형태 수요함수

수요함수와 역수요함수 관계



도함수 관계

- **수요함수:**

$$Q^D(P) = aP^{-b} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\frac{\mathbf{d}Q^D}{\mathbf{d}P} = -abP^{-(b+1)}$$

- **역수요함수:**

$$P(Q^D) = \left(\frac{a}{Q^D}\right)^{1/b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{d}P}{\mathbf{d}Q^D} = -\frac{1}{b}\left(\frac{a}{Q^D}\right)^{1/b}\frac{1}{Q^D}$$

- **Inverse-Function Rule:**

$$\frac{\mathbf{d}P}{\mathbf{d}Q^D} = \frac{1}{\frac{\mathbf{d}Q^D}{\mathbf{d}P}} \quad \text{(역수 관계)}$$

- $b > 0$ 이므로:

$$\frac{\mathbf{d}P}{\mathbf{d}Q^D} < 0$$

$$f(x) = x, \quad f^{-1}(x) = 1/x$$

$$f'(x) =$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' =$$

$$g(x) = e^x, \quad g^{-1}(x) = \ln x$$

$$g'(x) =$$

$$\left(g^{-1}(x)\right)' =$$

미분법칙 요약

$$\text{Constant Rule: } \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}c = 0$$

$$\text{Power Rule: } \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{Exponential Rule: } \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$$

$$\text{Logarithm Rule: } \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

미분법칙 요약

Sum-Diff Rule: $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}[f(x) \pm g(x)] = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}f(x) \pm \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}g(x)$

Product Rule: $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}g(x)$

Quotient Rule: $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}g(x)}{g(x)^2}$

Chain Rule: $h = f(y),\ y = g(x)$ then $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}h(y) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}f(g(x)) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}y}f(y) \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}g(x)$

Inverse-Function Rule: *If* $y = f(x)$ *and* $f^{-1}(y) = x$ *exists*, then the differentiation for the inverse funct

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}y}x = \frac{1}{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}y} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}}$$

미분법칙 요약 (Simplified)

Sum-Diff Rule: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Product Rule: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotient Rule: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Chain Rule: $(f(g(\cdot)))' = f'(g(\cdot)) \cdot g'(\cdot)$

Inverse-Function Rule: $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}$