Matemática Para Computação

Prof. Me. Edimar Izidoro Novaes
edimar.novaes@unicesumar.edu.br

Objetivos de Aprendizagem:

- Saber aplicar as probabilidades nas diversas situações.
- Compreender probabilidade condicional.
- Conhecer as principais distribuições de probabilidades.

Probabilidade

- $0<P(A)<1$ = deverá ser um valor entre 0 e 1.
- $P(\Omega) = 1$ = Possível.
- $P(\phi) = 0$ = Impossível.

Operações Com Eventos

Dois eventos A e B:

- $A \cap B$ - é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente - (e)
- $A \cup B$ - é o evento em que A ocorre ou B ocorre - (ou)
- Complementar de A^c =P(S)-P(A) é o evento em que A não ocorre.

- A <u>probabilidade de um ou outro evento ocorrer é dada por P(A∪B).</u>
- A probabilidade de <u>ambos os eventos ocorrerem simultaneamente P(A ∩ B).</u>

- <u>Ambas</u> <u>- implica em P(A e B).</u>
- <u>Uma ou outra - implica em P(A ou B).</u>

REGRA DA ADIÇÃO

Quando tratamos da união de dois eventos temos duas possíveis situações:

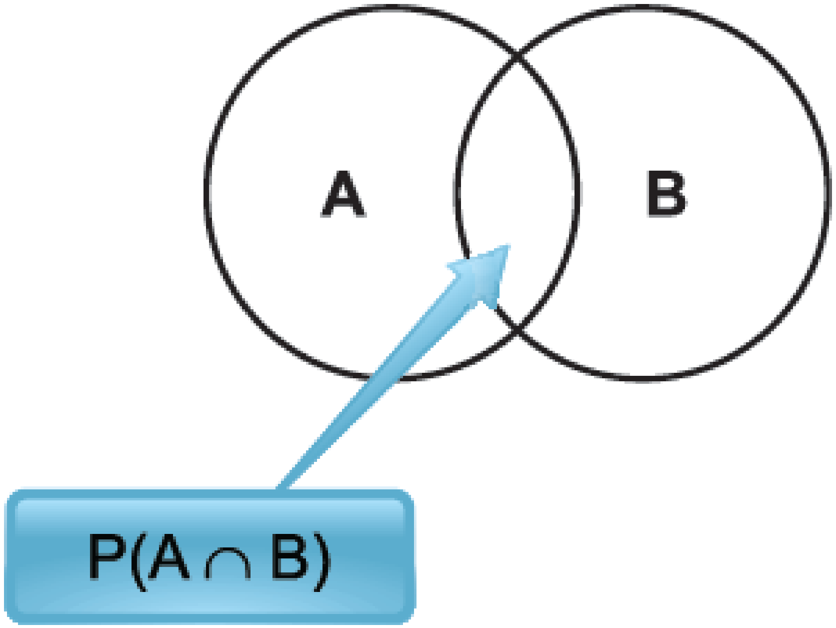
- Quando os eventos A e B são mutuamente exclusivos (não têm elementos em comum).

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

- Quando os eventos A e B não são mutuamente exclusivos (tem elementos em comum). Nesta situação, a fórmula é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- <u>$P(A \cap B)$</u> **–** é a probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente, ou seja, é a intersecção entre os eventos A e B.


A
B
P(A ∩ B)

Ao se retirar **uma** carta de um baralho comum de 52 cartas, qual a probabilidade dela ser um ÁS ou uma carta com naipe de espada?

- Temos 4 cartas de ÁS.
- Temos 13 cartas de Espadas.

...

...

...

- $P(A) = 4/52$
- $P(B) = 13/52$
- Então ... $P(A \cap B) = 1/52$, ou seja, ambos ocorrem simultaneamente sendo então um ÁS de ESPADA.
- Então $P(A \cup B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52$

- P(A | B) e lê-se probabilidade de A dado que ocorra B, sendo a condição B.
- De forma geral, para dois eventos quaisquer A e B, sendo P(B) > 0, definimos a probabilidade condicional de A | B, P(A | B) como sendo:
- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Região	Tipo de Imóvel		Total
	Apartamento	Casa	
Norte	30	28	58
Sul	40	56	96
Leste	38	34	72
Oeste	52	22	74
Total	160	140	300

UniCesumar

Dado que o imóvel é um Apartamento, qual a probabilidade de pertencer a região Norte?

Observe que estamos impondo uma condição ao evento. Sabemos que o imóvel é um apartamento, essa é a condição imposta. Quando impomos alguma condição em probabilidade dizemos então que a probabilidade é condicional e assim,

reduzimos então o espaço amostral

à condição imposta.

P(N|A) e lê-se probabilidade de N dado A, sendo a condição A, ou seja, ser Apartamento, sendo que:

$$P(N|A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{30/300}{160/300} = \frac{30}{160}$$

REGRA DO PRODUTO

Se $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, temos

$P(A \cap B) = P(B) \, . \, P(A \mid B)$

que trata-se da <u>regra do produto das probabilidades.</u>

Para eventos independentes, temos:

<u>$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$</u>

EXEMPLOS ...

- Em uma situação, retira-se, sem reposição, 2 peças de um lote de 10, em que apenas 4 estão boas. Qual a probabilidade de que ambas retiradas estejam em não conformidade?

- A = {primeira peça não conforme}
- B = {segunda peça não conforme}
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$
- $P(A \cap B) = 6/10 \times 5/9 = 30/90 = 1/3$
- $P(B \mid A)$ = probabilidade da segunda ser não conforme, dado que a primeira era não conforme.

- Você tem três jogadas de um dado, qual a probabilidade de sair três vezes o número 4?

- Temos 1/6 em cada vez...Então:
- 1/6 x 1/6 x 1/6 = 1/216.

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Distribuições de probabilidade

- Para situações mais abrangentes, é necessário ampliar os conceitos de modelos probabilísticos para que entendamos situações mais complexas de probabilidade.

Distribuição de Probabilidade

- Modelo matemático que relaciona um certo valor da variável em estudo com a sua probabilidade de ocorrência.

Distribuições discretas mais importantes

- Distribuição de Bernoulli.
- Distribuição Binomial.
- Distribuição Poisson.

Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli consiste em uma distribuição em que a variável aleatória assume apenas dois possíveis resultados: <u>sucesso</u> (o evento se realiza) ou <u>fracasso</u> (o evento não se realiza).

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda: o resultado é cara ou não.
- Uma peça é escolhida ao acaso: o resultado é defeituosa ou não.
- Uma cidade tem esgotamento sanitário: sim ou não.

Deve ficar claro que nem sempre o que é “bom” é o sucesso, mas sim o que se está estudando é o sucesso. Assim, o fato da peça ser defeituosa, por exemplo, seria o sucesso da pesquisa em si.

Em todos os casos temos que definir uma variável aleatória X que só assuma dois possíveis valores:

- 1 em caso de sucesso e
- 0 em caso de fracasso.

Seja **p** a probabilidade de sucesso e **q** a probabilidade de fracasso, com **p + q = 1.**

Definindo a seguinte variável discreta: X: número de sucessos em uma única tentativa do experimento. A função de probabilidade de Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = p^{x} \cdot q^{1-x}$$

Distribuição Binomial

<ins>Um experimento Binomial é aquele que consiste em uma sequência de n ensaios idênticos e independentes</ins>. Cada tentativa pode resultar em apenas dois resultados possíveis: sucesso e fracasso e a probabilidade de sucesso é constante de uma tentativa para outra.

Uma amostra particular será constituída de uma sequência de sucessos e fracassos.

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda 5 vezes.
- 10 peças são escolhidas ao acaso.
- 5 cidades têm ou não têm esgotamento sanitário.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^{k.}.q^{n-k}$$

Em que, $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k.}.q^{n-k}$$

- k = número de sucessos.
- n = número de elementos da amostra.
- p = probabilidade de sucesso.
- q = probabilidade de fracasso.

A média e a variância de uma distribuição binomial são dadas por

- $E(x) = np$
- $Var(x) = npq$

Um processo industrial na fabricação de monitores opera com média de 5% de defeituosos. Baseado em amostras de 10 unidades, calcule as probabilidades de uma amostra apresentar:

A) nenhum defeito.

$$P(x = 0) = \frac{10!}{0!(10-0)!} 0{,}05^{0}.0{,}95^{10} = 0{,}598 \text{ ou } 59{,}8\%$$

Observe que:

- $n = 10$
- $k = 0$
- $p = 5\%$ ou $0{,}05$
- $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

B) 3 monitores com defeito.

$$P(x = 3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} 0{,}05^3 . 0{,}95^7 = 0{,}010 \text{ ou } 1{,}0\%$$

C) pelo menos 9 monitores com defeito

$P(x \geq 9) = P(x = 9) + P(x = 10)$

$P(x = 9) = \dfrac{10!}{9!(10-9)!} 0{,}05^9 . 0{,}95^1 = 1{,}85 \times 10^{-11}$

$$P(x = 10) = \frac{10!}{10!(10-10)!} 0,05^{10}.0,95^{0} = 9,76 \times 10^{-14}$$

- $P(x \geq 9) = 1,85 \times 10^{-11} + 9,76 \times 10^{-14} = 1,86 \times 10^{-11}$

ou 0,0000000000186 ou 0,00000000186%

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrerem num certo período de tempo.

Exemplo:

- Número de chamadas telefônicas durante 10 minutos.
- Número de falhas de uma máquina durante um dia de operação.
- Número de acidentes ocorridos numa semana.

Distribuição de Poisson

$$P(x = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

P(X) = probabilidade de X ocorrências em um intervalo

λ = número esperado de ocorrências em um intervalo

e = constante matemática (aproximadamente 2,71828)

k = número de sucessos por unidade

- O valor médio pela distribuição de Poisson é dado pela sua esperança em que:

$$E(X) = \lambda$$

- A Var(X) pela distribuição de Poisson é dada por:

$$Var\ (X) = \lambda$$

Um servidor está recebendo acesso, em média, de 5 pessoas por segundo. Qual a probabilidade desse servidor receber acesso de 8 pessoas?

$$P(X = 8) = \frac{2{,}71828^{-5} \cdot 5^{8}}{8!} = \frac{0{,}0067379 \cdot 390625}{40320} =$$

= 0,065 X 100% = 6,5%

Colocar o Link a seguir.

- http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/daniele/index.html

Matemática Para Computação

Prof. Me. Edimar Izidoro Novaes
edimar.novaes@unicesumar.edu.br