

Theoretical Physics in One Month

Lectured by Tongzhe

June 26, 2017



TO ALL PHYSICS LOVERS

Preface

China,
January 2017

Sean Zhang

Contents

| | | |
|----------|------------|----------|
| 0 | 导论 | 1 |
| 0.1 | 生而为人关心整个宇宙 | 1 |
| 0.2 | 数学与物理 | 1 |
| 0.3 | 所需的数学工具 | 1 |
| 0.4 | 理论物理的框架 | 2 |
| 0.5 | 先修知识 | 2 |

Part I 数学基础

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | 数学大冒险 | 7 |
| 1.1 | 实数 | 7 |
| 1.1.1 | 戴德金分划 | 7 |
| 1.1.2 | 有理数集和实数集“大小”的比较 | 7 |
| 1.1.3 | 一点点测度论“a little bite of Measure Theory” | 8 |
| 1.2 | 无穷大量的排序 | 9 |
| 1.3 | 级数求和 | 11 |
| 1.3.1 | 一般的级数 | 11 |
| 1.3.2 | 交错级数 | 12 |
| 1.3.3 | Shanks Transformation | 14 |
| 1.3.4 | Richardson Extrapolation | 15 |
| 1.3.5 | 如何拆解困难问题为级数求和 | 16 |
| 1.4 | 变分法与 Euler-Lagrange 方程 | 16 |
| 1.4.1 | 最速降线 | 17 |
| 1.4.2 | Euler-Lagrange 方程 | 17 |
| 1.4.3 | 路径积分的权重因子 | 18 |
| 1.4.4 | E-L 方程应用举例 | 18 |
| 1.4.5 | 理论力学框架 | 20 |
| 2 | 复变函数 | 21 |
| 2.1 | 为什么我们需要复变函数/复变函数能做什么 | 21 |
| 2.2 | 复数 | 21 |
| 2.2.1 | 定义 | 21 |
| 2.2.2 | 复数的性质 | 22 |
| 2.2.3 | 复数的运算 | 22 |
| 2.2.4 | 复共轭 | 22 |
| 2.2.5 | 尺规作图正十七边形 | 23 |

| | | |
|-------|-------------------------|----|
| 2.3 | 复变函数 | 23 |
| 2.3.1 | 极限、连续、导数的定义 | 24 |
| 2.3.2 | Cauchy-Riemann 关系 | 24 |

导论

No pain, no gain.

0.1 生而为人关心整个宇宙

形而上学 \Leftrightarrow metaphysics

0.2 数学与物理

数学

某个公理的集合 $A \Rightarrow$ 很多有趣的结论 A' 。数学即“ \Rightarrow ”：严密的推导过程，但并不关心 A 与 A' 的真实性。例如欧式几何与非欧几何。

物理

物理有实验作为标准。物理关心基本假设（公理） A 的正确性，通过数学的严密的推导我们可以将 A 的正确性传递给 A' ，而通过实验验证 A' 中的结论，我们也可以反过来验证我们的基本假设 A 的正确性。“可证伪性”。

数学研究的是某一个宇宙，物理研究的是我们的宇宙。

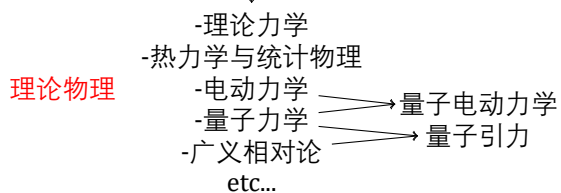
0.3 所需的数学工具

- 高等数学
- 线性代数
- 复变函数
- 群论
- 点集拓扑
- 特殊函数
- 微分方程
- 张量分析
- 微分几何

0.4 理论物理的框架

中学物理 + 普通物理 (力、热、光、电、原子)

基础物理



动态更新：

(1) 光子的 Bose-Einstein 凝聚。

(2) 引力是一种熵力。

(3) 火墙。

0.5 先修知识

$$f'(x), \int e^x dx = e^x + C, \log' x = \frac{1}{x}, \epsilon - \delta \text{语言}$$

6 个初等函数

(1) 常函数： $f(x) = C$

(2) 幂函数： $f(x) = x^a (a \neq 0)$

(3) 指数函数： $f(x) = a^x (a > 0)$

(4) 对数函数： $f(x) = \log_a x$

(5) 三角函数： $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$

(6) 反三角函数： $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

双曲余弦：

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

↔ 余弦函数：

$$\cos x \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Taylor 展开

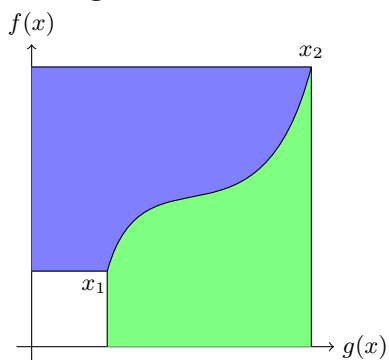
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \dots \quad (0.1)$$

$$\leftrightarrow x = x_0 + vt + \frac{a}{2}t^2$$

分部积分

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)\mathrm{d}x \quad (0.2)$$

Fig. 0.1. 分部积分示意图



微分方程

受迫阻尼振动：

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t)$$

Schrodinger equation:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

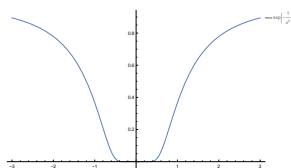
卷积

$$k(t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(t-x)\mathrm{d}x \equiv f * g \quad (0.3)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (0.4)$$

高数中难理解的问题

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



$f(x)$ 在 0 点光滑, $f^{(n)} = 0$, Taylor 展开之后: $f(x) = 0$
复变函数中:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$$

在 $z = 0$ 有本性奇点, 展开半径为 0, 故不能 Taylor 展开, 但可以用 Laurent 展开。

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Taylor 展开的收敛区域为 $(-1, 1)$. 在复数域看: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 在 $\pm i$ 为奇点! 所以展开半径为 1, 只能在 $(-1, 1)$ 展开。

数学基础

数学大冒险

物理是巧妙的要求自己。“费曼估算”

对一般物理学家，误差在 5% 以内便可以接受。粒子物理学家误差 10^{-6} ；天体物理学家，相同数量级。
“实用主义”

1.1 实数

为什么需要实数？

有理数 $p/q, p, q \in \mathbb{Z}$ 。 π 是一个无理数，可以用有理数来逼近，但最后极限却不是有理数：

3, 3.1, 3.14, 3.141, ...

有理数完备化 \rightarrow 实数。“戴德金分划”

1.1.1 戴德金分划

有理数的定义： $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ 。有理数和无理数都很稠密：任一区间都有无穷多的有理数和无理数。

戴德金分划：将有理数切开：

1. $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $\forall a_1 \in A_1, \forall a_2 \in A_2, a_1 < a_2$

这种有理数的分割有三种可能：

- (1) 在下组 A_1 内无最大数，而在上组 A_2 内有最小数 r
- (2) 在下组 A_1 内有最大数 r ，而在上组 A_2 内无最小数
- (3) 在下组 A_1 内既无最大数，在上组 A_2 内也无最小数

前两种分划称为有理分划，最后一种称为无理分划。由分划可以定义实数：下组 A_1 的上确界。

由此还可以定义实数的大小： $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2 = A'_1 \cup A'_2$ ，若 $A_1 \subset A'_1$ ，那么 A_1 所定义的实数要小于 A'_1 所定义的实数。

天生的保证实数具有完备性，再进行分划不能再进行有意义的扩张。

“完备性” \Rightarrow 单调有界序列在 \mathbb{R} 中存在极限。

1.1.2 有理数集和实数集“大小”的比较

“希尔伯特的旅馆”

集合的“势”的比较。“势” \Leftrightarrow 集合元素的个数。

定义：集合元素个数相同：存在两个集合间的一一对应。

有理数与自然数

有理数集 $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}$ 。可以由 $|p| + |q|$ 由小到大一一编号。即 \mathbb{Q} 与 \mathbb{N} 元素个数相同。
 $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ 元素个数相同, \aleph_0 个

实数个数远超有理数个数

$(0, 1)$ 内实数可以表示为: $k = 0.a_1a_2a_3a_4a_5\dots$

“反证法”: 假设存在 $(0, 1)$ 内的所有实数与正整数一一对应。

$$1 \leftrightarrow 0.a_1a_2a_3a_4a_5\dots$$

$$2 \leftrightarrow 0.b_1b_2b_3b_4b_5\dots$$

$$3 \leftrightarrow 0.c_1c_2c_3c_4c_5\dots$$

...

欲构造某个实数 k 不在该序列中。

先构造: $k' = 0.a_1b_2c_3d_4e_5\dots$, 存在某个自然数 $n_0 \leftrightarrow k'$ 。有 k' 构造 k : 每一位若非 9, 则变为 9, 若为 9, 则变为 0。若 $N_1 \leftrightarrow k$, 那么 N_1 位上 k 与 k' 在 N_1 位上必为相同数字 ω ! 矛盾! 故所有实数与正整数不一一对应。

\mathbb{R} 的元素个数: \aleph_1 。

可以证明二维平面上 $(0, 1) \times (0, 1)$ 上的某点可以和一维实轴上的某点一一对应:

$$(0.a_1a_2a_3a_4a_5\dots, 0.b_1b_2b_3b_4b_5\dots) \leftrightarrow 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5\dots$$

\mathbb{R}^n 的元素个数: \aleph_1 。

$\aleph_2? \Rightarrow (0, 1)$ 区间内实函数的个数。

1.1.3 一点点测度论“a little bite of Measure Theory”

为何 \mathbb{R} 元素个数远多于 \mathbb{Q} ?

测度 (measure): 衡量一个区间、集合有多“长”。 A 为集合, 则:

$$M(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

常规结论:

1. $M(a, b) = b - a$
2. 若 $A \subset A'$, 则 $M(A) \geq M(A') \geq 0$
3. $M(\emptyset) = 0$

求证:

$$M(\mathbb{R}) \rightarrow \infty, M(\mathbb{Q}) = 0 \tag{1.1}$$

证明: $M(\mathbb{R} \rightarrow \infty)$ 是平凡的。

\mathbb{Q} 与 \mathbb{N} 是一一对应的, 则 \mathbb{Q} 是可列的。

$$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, \dots\}$$

以 q_i 为中心构造一个开区间包住 q_i , $A_i \equiv (q_i - \frac{\epsilon}{2^i}, q_i + \frac{\epsilon}{2^i})$, $q_i \in A_i$

将所有的 A_i 集合求全集 $A = \cup_{i=1}^{+\infty} A_i$, 因为 $q_i \in A_i$, 所以 $\mathbb{Q} \subset A$, 所以

$$0 \leq M(\mathbb{Q}) \leq M(A)$$

又:

$$M(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} [(q_i + \frac{\epsilon}{2^i}) - (q_i - \frac{\epsilon}{2^i})] = \sum_{i=1}^{\infty} 2\frac{\epsilon}{2^i} = 2\epsilon$$

即：

$$0 \leq M(\mathbb{Q}) \leq M(A) \leq 2\epsilon$$

因为 $\forall \epsilon > 0$, 所以取 $\epsilon \rightarrow 0$, 所以 $M(\mathbb{Q}) = 0$

1.2 无穷大量的排序

$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}; n \rightarrow +\infty$

常见无穷大量： $n^6, \sqrt{n}, n^n, n!, \log n$, 有无穷大量排序

$$\log n \ll n^{\frac{1}{a_1}} \ll n \ll n^{a_2} \ll a_3^n \ll n! \ll n^n \quad (a_1, a_2, a_3 > 1) \quad (1.2)$$

求证： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a_2}}{a_3^n} = 0$

证明：将 a_3^n 展开成幂级数，次数大于 a_2

令 $h = a_3 - 1 > 0$, 有：

$$a_3^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1} + \dots + h^n$$

其中 $k = [a_2] + 1 > a_2$ 。因为：

$$0 \leq \frac{n^{a_2}}{a_3^n} \leq \frac{n^k}{\frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}} = \left[\frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \right] \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(\frac{n}{n-1} \right) \dots \left(\frac{n}{n-k} \right)$$

取 $n \rightarrow \infty$, 根据夹逼定理, 有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{a_2}}{a_3^n} = 0$$

求证： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

证明：取 $N = [a] + 1$, 有：

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N} \cdot \left(\frac{a}{n-N} \right)^{n-N}$$

因为 $n \rightarrow \infty$ 时, $(n-N) \rightarrow \infty$, 所以 $\frac{a}{n-N} < 1$, 那么 $\left(\frac{a}{n-N} \right)^{n-N} \rightarrow 0$, 即：

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [C \cdot \left(\frac{a}{n-N} \right)^{n-N}] = 0$$

由无穷大量排序可得无穷小量的排序：

$$\frac{1}{\log n} \gg \frac{1}{n^{\frac{1}{a_1}}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^{a_2}} \gg \frac{1}{a_3^n} \gg \frac{1}{n!} \gg \frac{1}{n^n} \quad (a_1, a_2, a_3 > 1) \quad (1.3)$$

收敛的边界

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

何时 S_n 有极限？

$$\frac{1}{\log n} \gg \frac{1}{n^{\frac{1}{a_1}}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^{a_2}} \gg \frac{1}{a_3^n} \gg \frac{1}{n!} \gg \frac{1}{n^n} \quad (a_1, a_2, a_3 > 1) \quad (1.4)$$

在求和时竖线右侧的会收敛，左侧则发散。

求证：若 $a > 1$ ，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛。

证明：每 2^n 项一组 $n = 0, 1, 2, \dots$ ：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \left(\frac{1}{1^a}\right) + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}\right) + \frac{1}{8^a} + \dots \leq \frac{1}{1^a} + 2 \cdot \frac{1}{2^a} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{2^{na}} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n(a-1)}}$$

所以：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} = \frac{2^{a-1}}{2^{a-1} - 1} = \text{constant}$$

即： $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛。

更细的收敛边界

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n \log n} \gg \frac{1}{n(\log n)^{a_1}} > \frac{1}{n^{a_2}} \quad (a_1, a_2 > 1) \quad (1.5)$$

更细？

$$\frac{1}{n \log n \log(\log n)} \gg \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^a} \quad (a > 1) \quad (1.6)$$

有趣的未定收敛的例子

规整级数，初等函数 $\rightarrow _ \rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{n^2 \sin n}$$

,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

未定收敛，其收敛性与 π 的无理测度有关。

无理测度 $\mu(x)$

$$\mu(x) \begin{cases} 1 & , x \text{ 有理数} \\ 2 & , \text{代数数阶} > 1 \text{ 的无理数} \\ > 2 & , \text{超越数} \end{cases}$$

已知 $\mu(\pi) < 7.6063$ ，若 $\mu(\pi) < 3$ ，则 a_n 收敛。

1.3 级数求和

1.3.1 一般的级数

1. 利用 Taylor 展开：

利用 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \log 2 \quad (1.7)$$

利用 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开：

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e \quad (1.8)$$

2. 利用 Fourier 级数：

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \quad (1.9)$$

Fourier 级数在中断点取中间值。

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = ?$$

构造：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

且其周期为 2π ，可知它的 Fourier 展开为：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \cos nx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} \sin nx \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

取 $x=0$ ，可以得到：

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4} \quad (1.10)$$

3. 利用 Parseval 定理（“勾股定理加强版”）

由 Fourier 级数我们有：

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

所以：

$$|f(x)|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}b_n^2 \quad (1.11)$$

其中：

$$|f(x)|^2 \equiv \int_L f^*(x)f(x)dx$$

此即 Parseval 定理：

求解：

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = ?$$

解：考虑：

$$f(x) = x, x \in (-1, 1)$$

其周期为 2，有 Parseval 定理可得：

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

所以：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.12)$$

微小的改变将使得级数求和变得极为困难；很多级数求和本身就十分困难。→ 数值求解会是我们最后的希望。

1.3.2 交错级数

交错级数的定义：交错级数是形如：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

的级数，其中 $a_n \geq 0$ 。

交错级数的一个审敛法（莱布尼兹判别法）

若各项非负的数列 a_n 单调递减且趋于零，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

收敛。

证明：考虑 S_{2n} 和 S_{2n+1} ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$)，我们有：

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$$

所以 $S_{2n} > S_{2n+1}$ ，又：

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

所以 S_{2n} 单调递减有上确界，同理 S_{2n+1} 单调递增有下确界。所以由 $S_{2n} > S_{2n+1}$ 知： S_{2n} 单调递减有下确界， S_{2n+1} 单调递增有上确界。所以可知：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = L^+$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = L^-$$

又因为 $n \rightarrow +\infty$ 时， $a_n \rightarrow 0$ ，所以：

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - a_{2n+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}\end{aligned}$$

所以 $L^- = L^+$ ，即：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L$$

此时级数具有极限。

条件收敛与绝对收敛

给定一个实数项无穷级数 $A = \sum_n a_n$ ，如果它自身收敛于一个定值 $C \in \mathbb{R}$ ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = C$$

但由每一项的绝对值构成的正项级数： $A_s = \sum_n |a_n|$ 不收敛，那么就称这个无穷级数 $A = \sum_n a_n$ 是一个条件收敛的无穷级数。

若由每一项的绝对值构成的正项级数： $A_s = \sum_n |a_n|$ 收敛，那么就称这个无穷级数 $A = \sum_n a_n$ 是一个绝对收敛的无穷级数。

考察级数：

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

通过调换顺序可使其收敛至任何值。级数和 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ 是条件收敛的，需要注意到求和顺序。

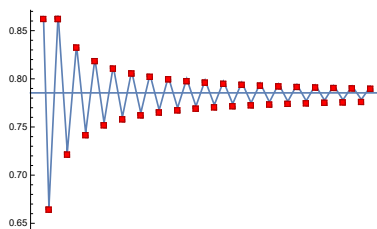


Fig. 1.1. $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$

Riemann 级数定理

Theorem 1.1. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个条件收敛的无穷级数。对任意的一个实数 C ，都存在一种从自然数集到自然数集的排列 $\sigma: n \mapsto \sigma(n)$ ，使得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = C$$

此外，也存在另一种排列 $\sigma': n \mapsto \sigma'(n)$ ，使得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma'(n)} = \infty$$

类似地，也可以有办法使它的部分和趋于 $-\infty$ ，或没有任何极限。

反之，如果级数是绝对收敛的，那么无论怎样重排，它仍然会收敛到同一个值，也就是级数的和。

交错级数收敛极为缓慢

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$$

收敛到 0.001 精确度需要 5000 项。

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots = 0.6048986\dots$$

收敛到 0.001 精确度需要 10^6 ? 项。
即使是绝对收敛的单调级数：

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

收敛到 0.001 精确度需要 1000 项。

1.3.3 Shanks Transformation

如何加速：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

其和的数值表如下：

其收敛图类似于图 1.1。类似于“阻尼振荡”，回想力学中受迫阻尼振荡将使得振荡周期与受迫里周期相同，受

| n | S_n |
|-----|-------------|
| 1 | 1.000 000 0 |
| 2 | 0.500 000 0 |
| 3 | 0.833 333 3 |
| 4 | 0.583 333 3 |
| 5 | 0.783 333 3 |
| 6 | 0.616 666 7 |
| ... | ... |

Table 1.1. $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i}$

迫阻尼振荡的运动方程为：

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

其解为：

$$x(t) = x_0(t) + x^*(t)$$

其中 $x_0(t)$ 为衰减项，将随时间趋近于 0； $x^*(t)$ 为驱动项，具有形式： $x^* = A \cos(\omega t + \phi)$

启示我们：可以给级数附加驱动模型。令：

$$S_n = L + ab^n$$

其中 $b < 0$ ，且 $|b| < 1$ ，但我们真正关心的是 L ，想办法用 S_n 表示 L 。我们有：

$$S_n = L + ab^n$$

$$S_{n+1} = L + ab^{n+1}$$

$$S_{n-1} = L + ab^{n-1}$$

由此可以解得：

$$L = \frac{S_n^2 - S_{n+1}S_{n-1}}{2S_n - S_{n+1} - S_{n-1}}$$

此即 Shanks 变换。

例 1：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = 0.6931472\dots$$

其 $S_1 = 1, S_2 = 0.5, S_3 = 0.8333$, 由此可以利用此即 Shanks 变换得到 :

$$L = 0.700$$

精确度 1%!

利用 Shanks 变换我们可以得到下表 :

| n | S_n | L_n | $L_n^{(2)}$ | $L_n^{(3)}$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 1.000 000 0 | | | |
| 2 | 0.500 000 0 | | | |
| 3 | 0.833 333 3 | 0.700 000 0 | | |
| 4 | 0.583 333 3 | 0.690 476 2 | | |
| 5 | 0.783 333 3 | 0.694 444 4 | 0.693 277 3 | |
| 6 | 0.616 666 7 | 0.692 424 2 | 0.693 105 8 | |
| 7 | 0.759 523 8 | 0.693 589 7 | 0.693 163 3 | 0.693 148 9 |

Table 1.2. Shanks 变换例 1

更详细可以参考华盛顿大学的 Carl Bender 的 <Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory> (《高级数理方法》)

例 2 :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots = 0.6048986\dots$$

利用 Shanks 变换我们可以得到下表 :

| n | S_n | L_n | $L_n^{(2)}$ | $L_n^{(3)}$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 1.000 000 0 | | | |
| 2 | 0.292 893 2 | | | |
| 3 | 0.870 243 5 | 0.610 730 5 | | |
| 4 | 0.370 243 5 | 0.602 294 5 | | |
| 5 | 0.817 457 1 | 0.606 311 5 | 0.605 015 6 | |
| 6 | 0.409 208 8 | 0.604 035 3 | 0.604 858 5 | |
| 7 | 0.787 173 3 | 0.605 470 4 | 0.604 915 5 | 0.604 900 3 |

Table 1.3. Shanks 变换例 2

由此我们可以感受到, 多次 Shanks 变换可以大大加快级数收敛的速度。

1.3.4 Richardson Extrapolation

单调收敛级数, 例如 :

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$$

模型 :

$$S_N \equiv \sum_{i=1}^N a_n \tag{1.13}$$

$$S_N = S + \frac{a}{n} + \frac{b}{N^2} + \frac{c}{N^3} + \dots \tag{1.14}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S \tag{1.15}$$

可取前 n 项消去 a, b, c 等系数得到如下 n 阶 Richardson 公式：
一阶 Richardson：

$$R_1 = (N+1)S_{N+1} - NS_N \quad (1.16)$$

二阶 Richardson：

$$R_2 = \frac{(N+2)^2 S_{N+2} - 2(N+1)^2 S_{N+1} + N^2 S_N}{2} \quad (1.17)$$

三阶 Richardson：

$$R_3 = \frac{(N+3)^3 S_{N+3} - 3(N+2)^3 S_{N+2} + 3(N+1)^3 S_{N+1} - N^3 S_N}{6} \quad (1.18)$$

1.3.5 如何拆解困难问题为级数求和

将一个超级难题等效转化为无数个简单问题。

1. 对原始难题引入参数 ϵ (乘法的方式引入)
2. 将原始难题之解用 ϵ 的幂级数展开

$$x(\epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \epsilon^n$$

3. 令 $\epsilon = 1$ 并对级数求和，得到原来的解。

例：求解 $x^5 + x = 1$ 的解

解：

- (1) 引入 ϵ ，采用乘法。

$$x^5 - \epsilon x = 1$$

- (2) x 作为 ϵ 的函数，令：

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \epsilon^n$$

现在求 a_n ：

若 $\epsilon = 0$ ，可解得 $a_0 = 1$ 。将 x 代入 $x^5 - \epsilon x = 1$ 两边对应幂级数系数相等，最终可以求得：

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{5}, a_2 = -\frac{1}{25}, a_3 = -\frac{1}{125}, a_4 = 0, \dots$$

- (3) $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \epsilon^n$ ，令 $\epsilon = 1$ 可得：

$$x \approx 0.752$$

而精确求解可得 $x \approx 0.754878$, good!

第三天待补充

1.4 变分法与 Euler-Lagrange 方程

如何寻找极值函数？

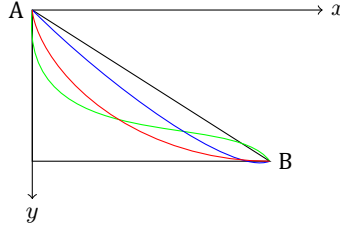


Fig. 1.2. 哪个是最速降线？

1.4.1 最速降线

问题：如何用一条光滑的滑轨连接 A,B 两点，使得某个小球沿此光滑轨道从 A 到 B 时间最短。如图：所需总时间：

$$T = \int_A^B dT = \int_A^B \frac{dL}{v} = \int_A^B \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

抽象 \Rightarrow ：

$$S = \int L(f(x), f'(x), x) dx \quad (1.19)$$

待求函数 $f(x)$ ，使得 S 取极值。数学上这种函数叫做泛函。

1.4.2 Euler-Lagrange 方程

求以下泛函的极值：

$$S = \int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x)) dx \quad (1.20)$$

函数极值问题启示我们应该在极值函数上尝试做微小改变。

目标极值函数 $f_0(x)$ ，微小改变 $|\delta(x)| \ll 1$ ，其中微小改变 $\delta(x) = \epsilon \eta(x)$ ， $\epsilon \rightarrow 0$ 且 $\eta(x)$ 为任意函数。又在端点处应满足： $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$ ，所以 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ，此时有：

$$S = \int_{x_1}^{x_2} L(f, f') dx \geq S' = \int_{x_1}^{x_2} L(f + \epsilon \eta, f' + \epsilon \eta') dx \quad (1.21)$$

可将 S 看作 ϵ 的函数 $S(\epsilon)$ ，在 $\epsilon = 0$ 时取极值。即：

$$\begin{aligned} S'(\epsilon) &= 0 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial(f + \epsilon \eta)} \cdot \frac{\partial(f + \epsilon \eta)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial(f' + \epsilon \eta')} \cdot \frac{\partial(f' + \epsilon \eta')}{\partial \epsilon} \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f} \cdot \eta + \frac{\partial L}{\partial f'} \cdot \eta' \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial f} \cdot \eta dx + \frac{\partial L}{\partial f'} \cdot \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right)' \cdot \eta dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right)' \right] \cdot \eta dx = 0 \end{aligned}$$

因为 $\eta(x)$ 是任意函数，所以：

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) = 0 \quad (1.22)$$

此即 Euler-Lagrange 方程。

$$S = \int L dt$$

S : 作用量 (Action), L : 拉格朗日量 (Lagrangian)

!!!! 为何要求在端点处应满足 : $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$, 即 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$!!!!!

1.4.3 路径积分的权重因子

粒子从 A 到 B 有多个路径, 对每个路径有相应的作用量 S , 每个作用量赋予其一个权重因子 :

$$e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

对所有路径求和 :

$$\sum_{\text{所有路径}} e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

此即路径积分因子。< 态和态之间的投影因子。 >

1.4.4 E-L 方程应用举例

1. 证明 : 两点间直线最短。

证明 : 任意两点间距离 :

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

作用量为 :

$$S = \int_A^B dL = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

代入 E-L 方程 :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y'} \right) = 0$$

所以 :

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

即 :

$$y' = \text{constant}$$

此即两点间直线最短。

2. 最小用料问题 : 优化圆台的侧面使得其侧面面积最小。如图。其作用量为 :

$$S = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi \sqrt{1 + y'^2} dx$$

代入 E-L 方程可得 :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2\pi xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

所以 :

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

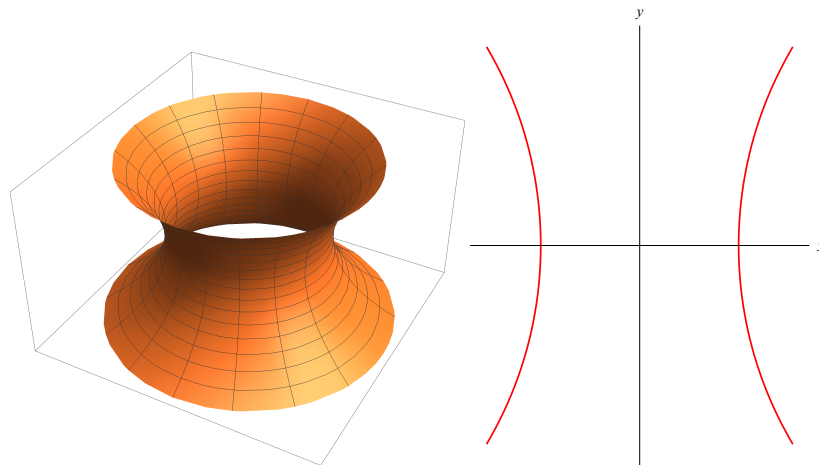


Fig. 1.3. 最小用料问题

即：

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}$$

所以可以解得：

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccosh} \frac{x}{C_1} + C_2 \\ x = C_1 \cosh(y - C_2) \end{cases} \quad (1.23)$$

由端点可以确定 C_1, C_2 。

3. 给定 $z^2 = 8(x^2 + y^2)$ 求连接其上任意两点 A, B 的曲线方程。

解：采用柱坐标 (z, r, θ) ，曲面方程变为： $z = 8r^2$ ，曲面上微元的长度：

$$dl^2 = 9dr^2 + r^2d\theta^2$$

曲线长度：

$$L = \int_A^B dL = \int_A^B \sqrt{9dr^2 + r^2d\theta^2} = \int_A^B \sqrt{9 + r^2\theta'^2} dr$$

代入 E-L 方程：

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{r^2\theta'}{\sqrt{9 + r^2\theta'^2}} \right) = 0$$

所以：

$$\frac{r^2\theta'}{\sqrt{9 + r^2\theta'^2}} = k$$

所以：

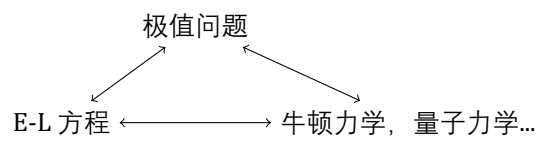
$$\theta' = \frac{3k}{r\sqrt{r^2 - k^2}}$$

所以：

$$\begin{cases} r \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{3}\right) = k \\ z = 2\sqrt{2}r \end{cases} \quad (1.24)$$

其中 α, k 为待定常数。

1.4.5 理论力学框架



改造牛顿第二定律

复变函数

以复数为变量的函数:)

2.1 为什么我们需要复变函数/复变函数能做什么

我们可以通过复变函数方法来相对简单的处理一些在实变函数微积分中难以处理的问题:

- (1) 复杂的实积分: $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t^2 dt$
- (2) 级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1+r^2-2r \cos \theta}$
- (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{7^n} = \sqrt{\frac{7}{3}}$
- (4) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 Taylor 展开只能在区间 $(-1, 1)$ 中收敛。

复数有非常广的应用范围, 如:

- (1) 量子力学 Schrodinger 方程:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \quad (2.1)$$

- (2) Fourier 变换:

$$\begin{cases} G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{-ikx} dx \end{cases} \quad (2.2)$$

- (3) Laplace 变换:

$$\begin{cases} G(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \\ f(x) \leftarrow G(p) \end{cases} \quad (2.3)$$

- (4) 复分析

2.2 复数

2.2.1 定义

我们可以简单的定义:

$$z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

复数是最大的数域。常见的数域如: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \right\} \xrightarrow{\text{完备性}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 。同时, 四元数不是数域, 它不满足乘法交换律。

2.2.2 复数的性质

几种等价描述：

(1) $a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$

(2) Euler 公式： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。对它的一种 Naive 的理解：Taylor 展开：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

将 $x = i\theta$ 代入这三个 Taylor 展开即可得到 Euler 公式。

我们可以将 $re^{i\theta}$ 这种表示看成一种复数的“极坐标表示”。在这种表示下，我们会发现**辐角的多值性**： $\theta_0 + 2n\pi$ 代表同一个 θ_0 。因此我们在处理复变函数时，必须要考虑到**多值性**的问题，如 \sqrt{z} 。

(3) 复数之所以为复数，其本质在于它的代数结构。因此，我们可以定义：

$$\mathbb{C} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.5)$$

我们发现：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完美重现了复数的结构。

2.2.3 复数的运算

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (2.6)$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.7)$$

可以将乘以 z 看成一次防缩加旋转变换（模长放大 r 倍，辅角逆时针旋转 θ 角）。

2.2.4 复共轭

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

运算：

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (2.8)$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2 \quad (2.9)$$

$$\overline{\bar{z}} = z \quad (2.10)$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad (2.11)$$

z 和 \bar{z} 可以看成独立变量。

2.2.5 尺规作图正十七边形

实际上就是求解 $\sin \frac{\pi}{17}$ 的根号表达式。

令 $q = e^{i\frac{\pi}{17}}$, 令:

$$\begin{aligned}s &\equiv q + q^9 + q^{9^2} + \dots + q^{9^7} \\ s' &\equiv q^3 + q^{3^3} + q^{3^5} + \dots + q^{3^{15}}\end{aligned}$$

那么我们有:

$$\begin{cases} s + s' = -1 \\ s \cdot s' = -4 \end{cases}$$

由此可以解得:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1) \\ s' = -\frac{1}{2}(\sqrt{17} + 1) \end{cases}$$

再拆 s 与 s' 为 m, m', n, n' :

$$\begin{aligned}m &= q^1 + q^{13} + q^{16} + q^4 \\ m' &= q^9 + q^{15} + q^8 + q^2 \\ n &= q^3 + q^5 + q^{14} + q^{12} \\ n' &= q^{10} + q^{11} + q^7 + q^6\end{aligned}$$

这样:

$$\begin{cases} m + m' = s ; m \cdot m' = -1 \\ n + n' = s' ; n \cdot n' = -1 \end{cases}$$

可以解出:

$$m = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 4}) \quad n = \frac{1}{2}(s' + \sqrt{s'^2 + 4})$$

再拆 m, n , 令

$$\begin{aligned}r &= q + q^{16} \\ r' &= q^{13} + q^4\end{aligned}$$

这样:

$$\begin{cases} r + r' = m \\ rr' = n \end{cases}$$

由此可以解得:

$$r = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

又:

$$r = 2 \cos \frac{\pi}{17}$$

这样就得到了 $\cos \frac{\pi}{17}$ 的根号表达式。

思考: 还有哪些正 n 边形可以类似的求解?

2.3 复变函数

复变函数 $z \in \mathbb{C}, f(z) \in \mathbb{C}$ 。可以重新表示为 $z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y); x, y, u, v \in \mathbb{R}$, 这样一对 $u(x, y), v(x, y)$ 就唯一确定了一个复变函数 $f(z)$ 。

2.3.1 极限、连续、导数的定义

定义：若 $f(z)$ 在 $z \rightarrow z_0$ 时有极限 L :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

则 $\forall \epsilon, \exists \delta$ s.t. 当 $|z - z_0| < \delta$, 有 $|f(z) - L| < \epsilon$

定义： $f(z)$ 在 z_0 处连续, 若：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.12)$$

定义： $f(z)$ 在 z_0 处的导数为：

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.13)$$

定义： $f(z)$ 在 z_0 处的二阶导数为：

$$f''(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0} \quad (2.14)$$

“若 $f(z)$ 在某点 z_0 有 1 阶导数，那么它在这点存在 n 阶导数”【暂不证明】

2.3.2 Cauchy-Riemann 关系

C-R 关系是导数存在的必要条件。如果其中 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均可微(即四个偏导数 $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ 均存在且连续)，那么 C-R 关系同时为导数存在的充分条件。

求证：若 $f(z)$ 在区域内某点 z_0 处可导，则 C-R 关系成立。

证明：选取沿实轴和沿虚轴两个特殊方向逼近，得到导数，那么：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{i\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y}$$

实部虚部分别相等，即可得到 Cauchy-Riemann 关系：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.15)$$