Theoretical Physics in One Month

Lectured by Tongzhe

January 25, 2017

TO ALL PHYSICS LOVERS

Preface

China,
January 2017

Sean Zhang

Contents

0

导论

No pain, no gain.

0.1 生而为人关心整个宇宙

形而上学 $\Leftrightarrow$metaphysics

0.2 数学与物理

数学

某个公理的集合 $A \Rightarrow$ 很多有趣的结论 A'。数学即"$\Rightarrow$": 严密的推导过程，但并不关心 A 与 A' 的真实性。例如欧式几何与非欧几何。

物理

物理有实验作为标准。物理的关心基本假设（公理）A 的正确性，通过数学的严密的推导可以我们可以将 A 的正确性传递给 A'，而通过实验验证 A' 中的结论，我们也可以反过来验证我们的基本假设 A 的正确性。"可证伪性"。

数学研究的是某一个宇宙，物理研究的是我们的宇宙。

0.3 所需的数学工具

-高等数学
-线性代数
-复变函数
-群论
-点集拓扑
-特殊函数
-微分方程
-张量分析
-微分几何

0.4 理论物理的框架

中学物理 + 普通物理（力、热、光、电、原子）

基础物理

理论物理

-理论力学

-热力学与统计物理

-电动力学

-量子力学

-广义相对论

etc...

量子电动力学

量子引力

动态更新：

(1) 光子的 Bose-Einstein 凝聚。

(2) 引力是一种熵力。

(3) 火墙。

0.5 先修知识

$$f'(x),\ \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C,\ \log' x = \frac{1}{x},\ \epsilon - \delta\text{语言}$$

6 个初等函数

(1) 常函数：$f(x) = C$

(2) 幂函数：$f(x) = x^a (a \neq 0)$

(3) 指数函数：$f(x) = a^x (a > 0)$

(4) 对数函数：$f(x) = \log_a x$

(5) 三角函数：$\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$

(6) 反三角函数：$\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x$

双曲余弦：

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^- x}{2}$$

$\leftrightarrow$ 余弦函数：

$$\cos x \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Taylor 展开

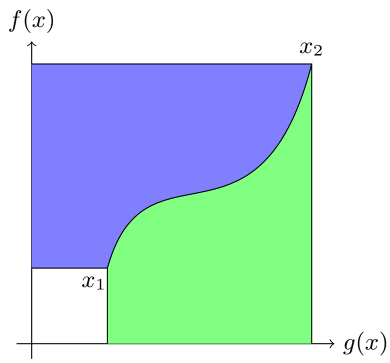
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \ldots \tag{0.1}$$

$\leftrightarrow x = x_0 + vt + \frac{a}{2}t^2$

分部积分

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)\mathrm{d}x \tag{0.2}$$

Fig. 0.1. 分部积分示意图



微分方程

受迫阻尼振动：

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\ddot{x} + F(t)$$

Schrodinger equation:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

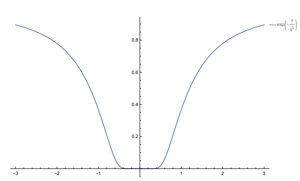
卷积

$$k(t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(t-x)\mathrm{d}x \equiv f * g \tag{0.3}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \tag{0.4}$$

高数中难理解的问题

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



$f(x)$ 在 0 点光滑，$f^{(n)} = 0$，Taylor 展开之后：$f(x) = 0$
复变函数中：

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$$

在 $z = 0$ 有本性奇点，展开半径为 0，故不能 Taylor 展开，但可以用 Laurent 展开。

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Taylor 展开的收敛区域为 $(-1, 1)$. 在复数域看：$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 在 $\pm i$ 为奇点！所以展开半径为 1，只能在 $(-1, 1)$ 展开。

Part I

数学基础

1

数学大冒险

物理是巧妙的要求自己。“费曼估算”

对一般物理学家，误差在 5% 以内便可以接受。粒子物理学家误差 10^{-6}；天体物理学家，相同数量级。

“实用主义”

1.1 实数

为什么需要实数？

有理数 $p/q, p, q \in \mathbb{Z}$。π 是一个无理数，可以用有理数来逼近，但最后极限却不是有理数：

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ \ldots$$

有理数完备化 $\rightarrow$ 实数。“戴德金分划”

1.1.1 戴德金分划

有理数的定义：$\mathbb{Q} = \{p/q |\, p, q \in \mathbb{Z}\}$。有理数和无理数都很稠密：任一区间都有无穷多的有理数和无理数。

戴德金分划：将有理数切开：

1. $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $\forall a_1 \in A_1, \forall a_2 \in A_2, a_1 < a_2$

这种有理数的分割有三种可能：

(1) 在下组 A_1 内无最大数，而在上组 A_2 内有最小数 r
(2) 在下组 A_1 内有最大数 r，而在上组 A_2 内无最小数
(3) 在下组 A_1 内既无最大数，在上组 A_2 内也无最小数

前两种分划称为有理分划，最后一种称为无理分划。由分划可以定义实数：下组 A_1 的上确界。

由此还可以定义实数的大小：$\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2 = A_1' \cup A_2'$，若 $A_1 \subset A_1'$，那么 A_1 所定义的实数要小于 A_1' 所定义的实数。

天生的保证实数具有完备性，再进行分划不能再进行有意义的扩张。

“完备性”$\Rightarrow$ 单调有界序列在 $\mathbb{R}$ 中存在极限。

1.1.2 有理数集和实数集“大小”的比较

“希尔伯特的旅馆”

集合的“势”的比较。“势”$\Leftrightarrow$ 集合元素的个数。

定义：集合元素个数相同：存在两个集合间的一一对应。

有理数与自然数

有理数集 $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}\,|p,q\in\mathbb{Z},q>0\}$。可以由 $|p|+|q|$ 由小到大一一编号。即 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 元素个数相同。
$\mathbb{Q},\mathbb{N},\mathbb{Z}$ 元素个数相同，$\aleph_0$ 个

实数个数远超有理数个数

$(0,1)$ 内实数可以表示为：$k=0.a_1a_2a_3a_4a_5...$
“反证法”: 假设存在 $(0,1)$ 内的所有实数与正整数一一对应。

$$\begin{aligned}1&\leftrightarrow 0.a_1a_2a_3a_4a_5...\\2&\leftrightarrow 0.b_1b_2b_3b_4b_5...\\3&\leftrightarrow 0.c_1c_2c_3c_4c_5...\\&...\end{aligned}$$

欲构造某个实数 k 不在该序列中。
先构造：$k'=0.a_1b_2c_3d_4e_5...$, 存在某个自然数 $n_0\leftrightarrow k'$。有 k' 构造 k: 每一位若非 9，则变为 9，若为 9，则变为 0。若 $N_1\leftrightarrow k$，那么 N_1 位上 k 与 k' 在 N_1 位上必为相同数字 ω！矛盾！故所有实数与正整数不一一对应。
$\mathbb{R}$ 的元素个数：$\aleph_1$。
可以证明二维平面上 $(0,1)\times(0,1)$ 上的某点可以和一维实轴上的某点一一对应：

$$(0.a_1a_2a_3a_4a_5...,0.b_1b_2b_3b_4b_5...)\leftrightarrow 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4a_5b_5...$$

$\mathbb{R}^n$ 的元素个数：$\aleph_1$。
$\aleph_2?\Rightarrow(0,1)$ 区间内实函数的个数。

1.1.3 一点点测度论”a little bite of Measure Theory”

为何 $\mathbb{R}$ 元素个数远多于 $\mathbb{Q}$？
测度 (measure)：衡量一个区间、集合有多“长”。A 为集合，则：

$$M(A)\to\mathbb{R}$$

常规结论：

1. $M(a,b)=b-a$
2. 若 $A\subset A'$, 则 $M(A)\geq M(A')\geq 0$
3. $M(\emptyset)=0$

求证：

$$M(\mathbb{R})\to\infty,\ M(\mathbb{Q}=0)\tag{1.1}$$

证明：$M(\mathbb{R}\to\infty)$ 是平凡的。
$\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 是一一对应的，则 $\mathbb{Q}$ 是可列的。

$$\mathbb{Q}=\{q_1,q_2,q_3,q_4,...\}$$

以 q_i 为中心构造一个开区间包住 q_i，$A_i\equiv(q_i-\frac{\epsilon}{2^i},q_i+\frac{\epsilon}{2^i})$，$q_i\subset A_i$
将所有的 A_i 集合求全集 $A=\cup_{i=1}^{+\infty}A_i$，因为 $q_i\subset A_i$，所以 $\mathbb{Q}\subset A$，所以

$$0\leq M(\mathbb{Q})\leq M(A)$$

又：

$$M(A)\le\sum_{i=1}^{\infty}M(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}[(q_i+\frac{\epsilon}{2^i})-(q_i-\frac{\epsilon}{2^i})]=\sum_{i=1}^{\infty}2\frac{\epsilon}{2^i}=2\epsilon$$

即：

$$0\le M(\mathbb{Q})\le M(A)\le 2\epsilon$$

因为 $\forall\epsilon>0$，所以取 $\epsilon\to 0$，所以 $M(\mathbb{Q})=0$

1.2 无穷大量的排序

$n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R};\ n\to+\infty$

常见无穷大量：$n^6,\sqrt{n},n^n,n!,\log n$, 有无穷大量排序

$$\log n\ll n^{\frac{1}{a_1}}\ll n\ll n^{a_2}\ll a_3^n\ll n!\ll n^n\ \ (a_1,a_2,a_3>1) \tag{1.2}$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{a_2}}{a_3^n}=0$

证明: 将 a_3^n 展开成幂级数，次数大于 a_2

令 $h=a_3-1>0$, 有：

$$a_3^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+...+\frac{n(n-1)...(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}+...+h^n$$

其中 $k=[a_2]+1>a_2$。因为：

$$0\le\frac{n^{a_2}}{a_3^n}\le\frac{n^k}{\frac{n(n-1)...(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}}=\left[\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}\right]\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)...\left(\frac{n}{n-k}\right)$$

取 $n\to\infty$，根据夹逼定理，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a_2}}{a_3^n}=0$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

证明：取 $N=[a]+1$，有：

$$0\le\frac{a^n}{n!}\le\frac{a\cdot a\cdot...a}{1\cdot 2\cdot...N}\cdot\left(\frac{a}{n-N}\right)^{n-N}$$

因为 $n\to\infty$ 时，$(n-N)\to\infty$，所以 $\frac{a}{n-N}<1$，那么 $\left(\frac{a}{n-N}\right)^{n-N}\to 0$，即：

$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\le\lim_{n\to\infty}[C\cdot\left(\frac{a}{n-N}\right)^{n-N}]=0$$

由无穷大量排序可得无穷小量的排序：

$$\frac{1}{\log n}\gg\frac{1}{n^{\frac{1}{a_1}}}\gg\frac{1}{n}\gg\frac{1}{n^{a_2}}\gg\frac{1}{a_3^n}\gg\frac{1}{n!}\gg\frac{1}{n^n}\ \ (a_1,a_2,a_3>1) \tag{1.3}$$

收敛的边界

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

何时 S_n 有极限？

$$\frac{1}{\log n} \gg \frac{1}{n^{\frac{1}{a_1}}} \gg \frac{1}{n}\Bigg| \gg \frac{1}{n^{a_2}} \gg \frac{1}{a_3^n} \gg \frac{1}{n!} \gg \frac{1}{n^n} \;\; (a_1, a_2, a_3 > 1) \tag{1.4}$$

在求和时竖线右侧的会收敛，左侧则发散。

求证：若 $a > 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛。

证明：每 2^n 项一组 $n = 0, 1, 2...$：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \left(\frac{1}{1^a}\right) + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}\right) + \frac{1}{8^a} + ... \leq \frac{1}{1^a} + 2\cdot\frac{1}{2^a} + ... + 2^n\cdot\frac{1}{2^{na}} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n(a-1)}}$$

所以：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} = \frac{2^{a-1}}{2^{a-1} - 1} = constant$$

即：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛。

更细的收敛边界

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n \log n}\Bigg| > \frac{1}{n(\log n)^{a_1}} > \frac{1}{n^{a_2}} \;\; (a_1, a_2 > 1) \tag{1.5}$$

更细？

$$\frac{1}{n \log n \log(\log n)}\Bigg| > \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^a} \;\; (a > 1) \tag{1.6}$$

有趣的未定收敛的例子

规整级数，初等函数 $\rightarrow$ _ $\rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{n^2 \sin n}$$

,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

未定收敛，其收敛性与 π 的无理测度有关。

无理测度 $\mu(x)$

$$\mu(x) \begin{cases} 1 & ,\ x\text{有理数} \\ 2 & ,\ \text{代数数阶 >1 的无理数} \\ > 2 & ,\ \text{超越数} \end{cases}$$

已知 $\mu(\pi) < 7.6063$，若 $\mu(\pi) < 3$，则 a_n 收敛。

1.3 级数求和

1.3.1 一般的级数

1. 利用 Taylor 展开：
   利用 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开：
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...=\log 2 \tag{1.7}$$
   利用 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开：
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...=e \tag{1.8}$$
2. 利用 Fourier 级数：
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx \tag{1.9}$$
   Fourier 级数在中断点取中间值。
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...=?$$
   构造：
$$f(x)=\begin{cases}0 & ,-\pi<x<0\\ 1 & ,0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ,\frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$
   且其周期为 2π，可知它的 Fourier 展开为：
$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\cos nx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}\sin nx\\ =&\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-...\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...\right)\end{aligned}$$
   取 $x=0$，可以得到：
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...=\frac{\pi}{4} \tag{1.10}$$
3. 利用 Parseval 定理（“勾股定理加强版”）
   由 Fourier 级数我们有：
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$$
   所以：
$$|f(x)|^2=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}a_n^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}b_n^2 \tag{1.11}$$
   其中：
$$|f(x)|^2\equiv\int_L f^*(x)f(x)\mathrm{d}x$$
   此即 Parseval 定理：
   求解：
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=?$$

解：考虑：

$$f(x) = x \ \ , x \in (-1, 1)$$

其周期为 2，有 Parseval 定理可得：

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

所以：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.12}$$

微小的改变将使得级数求和变得极为困难；很多级数求和本身就十分困难。$\rightarrow$ 数值求解会是我们最后的希望。

1.3.2 交错级数

交错级数的定义：交错级数是形如：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n$$

的级数，其中 $a_n \geq 0$。

交错级数的一个审敛法（莱布尼兹判别法）

若各项非负的数列 a_n 单调递减且趋于零，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n$$

收敛。

证明：考虑 S_{2n} 和 $S_{2n+1} (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$，我们有：

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$$

所以 $S_{2n} > S_{2n+1}$，又：

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

所以 S_{2n} 单调递减有上确界，同理 S_{2n+1} 单调递增有下确界。所以由 $S_{2n} > S_{2n+1}$ 知：S_{2n} 单调递减有下确界，S_{2n+1} 单调递增有上确界。所以可知：

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = L^+$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = L^-$$

又因为 $n \to +\infty$ 时，$a_n \to 0$，所以：

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} &= \lim_{n \to +\infty} (S_{2n} - a_{2n+1}) \\ &= \lim_{n \to +\infty} S_{2n} - \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} S_{2n} \end{aligned}$$

所以 $L^- = L^+$，即：

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = L$$

此时级数具有极限。

条件收敛与绝对收敛

给定一个实数项无穷级数 $A=\sum_n a_n$，如果它自身收敛于一个定值 $C\in\mathbb{R}$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = C$$

但由每一项的绝对值构成的正项级数：$A_s=\sum_n |a_n|$ 不收敛，那么就称这个无穷级数 $A=\sum_n a_n$ 是一个条件收敛的无穷级数。

若由每一项的绝对值构成的正项级数：$A_s=\sum_n |a_n|$ 收敛，那么就称这个无穷级数 $A=\sum_n a_n$ 是一个绝对收敛的无穷级数。

考察级数：

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...=\frac{\pi}{4}$$

通过调换顺序可使其收敛至任何值。级数和 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...$ 是条件收敛的，需要注意到求和顺序。

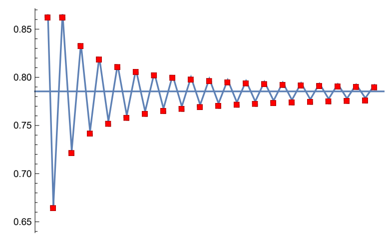


Fig. 1.1. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Riemann 级数定理

Theorem 1.1. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个条件收敛的无穷级数。对任意的一个实数 C，都存在一种从自然数集合到自然数集合的排列 σ： $n\mapsto\sigma(n)$，使得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = C$$

此外，也存在另一种排列 σ'： $n\mapsto\sigma'(n)$，使得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma'(n)} = \infty$$

类似地，也可以有办法使它的部分和趋于 $-\infty$，或没有任何极限。

反之，如果级数是绝对收敛的，那么无论怎样重排，它仍然会收敛到同一个值，也就是级数的和。

交错级数收敛极为缓慢

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...=\log 2$$

收敛到 0.001 精确度需要 5000 项。

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+...=0.6048986...$$

收敛到 0.001 精确度需要 10^6? 项。

即使是绝对收敛的单调级数：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$$

收敛到 0.001 精确度需要 1000 项。

1.3.3 Shanks Transformation

如何加速：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...$$

其和的数值表如下：

其收敛图类似于图 1.1。类似于“阻尼振荡”，回想力学中受迫阻尼振荡将使得振荡周期与受迫里周期相同，受

n	S_n
1	1.000 000 0
2	0.500 000 0
3	0.833 333 3
4	0.583 333 3
5	0.783 333 3
6	0.616 666 7
...	...

Table 1.1. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

迫阻尼振荡的运动方程为：

$$m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}+F_0\cos\omega t$$

其解为：

$$x(t)=x_0(t)+x^*(t)$$

其中 $x_0(t)$ 为衰减项，将随时间趋近于 0；$x^*(t)$ 为驱动项，具有形式：$x^*=A\cos(\omega t+\phi)$

启示我们：可以给级数附加驱动模型。令：

$$S_n=L+ab^n$$

其中 $b<0$，且 $|b|<1$，但我们真正关心的是 L，想办法用 S_n 表示 L。我们有：

$$S_n=L+ab^n$$

$$S_{n+1}=L+ab^{n+1}$$

$$S_{n-1}=L+ab^{n-1}$$

由此可以解得：

$$L=\frac{S_n^2-S_{n+1}S_{n-1}}{2S_n-S_{n+1}-S_{n-1}}$$

此即 Shanks 变换。

例 1：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...=0.6931472...$$

其 $S_1=1, S_2=0.5, S_3=0.8333$，由此可以利用此即 Shanks 变换得到：

$$L=0.700$$

精确度 1%!

利用 Shanks 变换我们可以得到下表：

n	S_n	L_n	$L_n^{(2)}$	$L_n^{(3)}$
1	1.000 000 0			
2	0.500 000 0			
3	0.833 333 3	0.700 000 0		
4	0.583 333 3	0.690 476 2		
5	0.783 333 3	0.694 444 4	0.693 277 3	
6	0.616 666 7	0.692 424 2	0.693 105 8	
7	0.759 523 8	0.693 589 7	0.693 163 3	0.693 148 9

Table 1.2. Shanks 变换例 1

更详细可以参考华盛顿大学的 Carl Bender 的 <Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory>（《高级数理方法》）

例 2：

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+...=0.6048986...$$

利用 Shanks 变换我们可以得到下表：

n	S_n	L_n	$L_n^{(2)}$	$L_n^{(3)}$
1	1.000 000 0			
2	0.292 893 2			
3	0.870 243 5	0.610 730 5		
4	0.370 243 5	0.602 294 5		
5	0.817 457 1	0.606 311 5	0.605 015 6	
6	0.409 208 8	0.604 035 3	0.604 858 5	
7	0.787 173 3	0.605 470 4	0.604 915 5	0.604 900 3

Table 1.3. Shanks 变换例 2

由此我们可以感受到，多次 Shanks 变换可以大大加快级数收敛的速度。

1.3.4 Richardson Extrapolation

单调收敛级数，例如：

$$a_n=\frac{1}{n^2},\ S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\pi^2}{6}$$

模型：

$$S_N\equiv\sum_{i=1}^{N}a_n \tag{1.13}$$

$$S_N=S+\frac{a}{n}+\frac{b}{N^2}+\frac{c}{N^3}+... \tag{1.14}$$

$$\lim_{N\to\infty}S_N=S \tag{1.15}$$

可取前 n 项消去 a, b, c 等系数得到如下 n 阶 Richardson 公式：
一阶 Richardson：

$$R_1 = (N+1)S_{N+1} - NS_N \tag{1.16}$$

二阶 Richardson：

$$R_2 = \frac{(N+2)^2 S_{N+2} - 2(N+1)^2 S_{N+1} + N^2 S_N}{2} \tag{1.17}$$

三阶 Richardson：

$$R_3 = \frac{(N+3)^3 S_{N+3} - 3(N+2)^3 S_{N+2} + 3(N+1)^3 S_{N+1} - N^3 S_N}{6} \tag{1.18}$$

1.3.5 如何拆解困难问题为级数求和

将一个超级难题等效转化为无数个简单问题。

1. 对原始难题引入参数 ϵ（乘法的方式引入）
2. 将原始难题之解用 ϵ 的幂级数展开

$$x(\epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \epsilon^n$$

3. 令 $\epsilon = 1$ 并对级数求和，得到原来的解。

例：求解 $x^5 + x = 1$ 的解
解：

(1) 引入 ϵ，采用乘法。

$$x^5 - \epsilon x = 1$$

(2) x 作为 ϵ 的函数，令：

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \epsilon^n$$

现在求 a_n：
若 $\epsilon = 0$，可解得 $a_0 = 1$。将 x 代入 $x^5 - \epsilon x = 1$ 两边对应幂级数系数相等，最终可以求得：

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{5}, a_2 = -\frac{1}{25}, a_3 = -\frac{1}{125}, a_4 = 0, \ldots$$

(3) $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \epsilon^n$，令 $\epsilon = 1$ 可得：

$$x \approx 0.752$$

而精确求解可得 $x \approx 0.754878$，good!

****
第三天待补充
****

1.4 变分法与 Euler-Lagrange 方程

如何寻找极值函数？

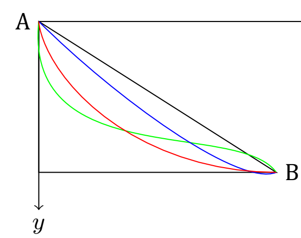


Fig. 1.2. 哪个是最速降线？

1.4.1 最速降线

问题：如何用一条光滑的滑轨连接 A,B 两点，使得某个小球沿此光滑轨道从 A 到 B 时间最短。如图：
所需总时间：

$$T=\int_A^B \mathrm{d}T=\int_A^B \frac{\mathrm{d}L}{v}=\int_A^B \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gy}}=\int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

抽象 $\Rightarrow$：

$$S=\int L(f(x),f'(x),x)\mathrm{d}x \tag{1.19}$$

待求函数 $f(x)$，使得 S 取极值。数学上这种函数叫做泛函。

1.4.2 Euler-Lagrange 方程

求以下泛函的极值：

$$S=\int_{x_1}^{x_2} L(f(x),f'(x))\mathrm{d}x \tag{1.20}$$

函数极值问题启示我们应该在极值函数上尝试做微小改变。

目标极值函数 $f_0(x)$，微小改变 $|\delta(x)|\ll 1$，其中微小改变 $\delta(x)=\epsilon\eta(x),\epsilon\to 0$ 且 $\eta(x)$ 为任意函数。又在端点处应满足：$\delta(x_1)=\delta(x_2)=0$，所以 $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$，此时有：

$$S=\int_{x_1}^{x_2} L(f,f')\mathrm{d}x\geq S'=\int_{x_1}^{x_2} L(f+\epsilon\eta,f'+\epsilon\eta')\mathrm{d}x \tag{1.21}$$

可将 S 看作 ϵ 的函数 $S(\epsilon)$，在 $\epsilon=0$ 时取极值。即：

$$\begin{aligned}
S'(\epsilon)&=0\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial L}{\partial(f+\epsilon\eta)}\cdot\frac{\partial(f+\epsilon\eta)}{\partial\epsilon}+\frac{\partial L}{\partial(f'+\epsilon\eta')}\cdot\frac{\partial(f'+\epsilon\eta')}{\epsilon}\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial f}\cdot\eta+\frac{\partial L}{\partial f'}\cdot\eta'\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial L}{\partial f}\cdot\eta\mathrm{d}x+\frac{\partial L}{f'}\cdot\eta\bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{f'}\right)'\cdot\eta\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial L}{\partial f}-\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)'\right]\cdot\eta\mathrm{d}x=0
\end{aligned}$$

因为 $\eta(x)$ 是任意函数，所以：

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)=0 \tag{1.22}$$

此即 Euler-Lagrange 方程。

$$S = \int L\mathrm{d}t$$

S：作用量 (Action)，L：拉格朗日量 (Lagrangian)

$!!!!!$ 为何要求在端点处应满足：$\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$，即 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ $!!!!!$

1.4.3 路径积分的权重因子

粒子从 A 到 B 有多个路径，对每个路径有相应的作用量 S，每个作用量赋予其一个权重因子：

$$e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

对所有路径求和：

$$\sum_{\text{所有路径}} e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

此即路径积分因子。< 态和态之间的投影因子。>

1.4.4 E-L 方程应用举例

1. 证明：两点间直线最短。
   证明：任意两点间距离：
   $$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$
   作用量为：
   $$S = \int_A^B \mathrm{d}L = \int_A^B \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$
   代入 E-L 方程：
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\sqrt{1+y'^2}}{\partial y'}\right) = 0$$
   所以：
   $$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$
   即：
   $$y' = constant$$
   此即两点间直线最短。

2. 最小用料问题：优化圆台的侧面使得其侧面面积最小。如图。其作用量为：
   $$S = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$
   代入 E-L 方程可得：
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2\pi x y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$
   所以：
   $$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

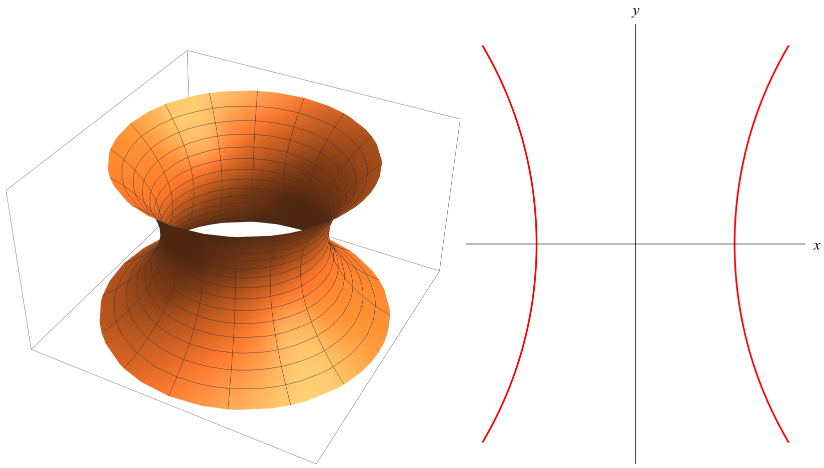


Fig. 1.3. 最小用料问题

即：

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}$$

所以可以解得：

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccosh}\frac{x}{C_1} + C_2 \\ x = C_1 \cosh(y - C_2) \end{cases} \tag{1.23}$$

由端点可以确定 C_1, C_2。

3. 给定 $z^2 = 8(x^2 + y^2)$ 求连接其上任意两点 A,B 的曲线方程。
解：采用柱坐标 (z, r, θ)，曲面方程变为：$z = 8r^2$，曲面上微元的长度：

$$\mathrm{d}l^2 = 9\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

曲线长度：

$$L = \int_A^B \mathrm{d}L = \int_A^B \sqrt{9\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2} = \int_A^B \sqrt{9 + r^2\theta'^2}\mathrm{d}r$$

代入 E-L 方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{r^2\theta'}{\sqrt{9 + r^2\theta'^2}}\right) = 0$$

所以：

$$\frac{r^2\theta'}{\sqrt{9 + r^2\theta'^2}} = k$$

所以：

$$\theta' = \frac{3k}{r\sqrt{r^2 - k^2}}$$

所以：

$$\begin{cases} r\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{3}\right) = k \\ z = 2\sqrt{2}r \end{cases} \tag{1.24}$$

其中 α, k 为待定常数。

1.4.5 理论力学框架

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{极值问题} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{E-L 方程} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{牛顿力学，量子力学...}
\end{tikzcd}
$$

改造牛顿第二定律