Entrega, Geometría Lineal

Benaroya Garzas, Isidro
Carpes Martínez, Antonio Alberto
Muela Cascallana, Juan José
Salamanca Camacho, Jaime
Wu, Xiaoye

2 de enero de 2021

Ejercicio 1

Sean $L := \{x_1 = 0\}$ y

$$X := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0^4 x_2 - x_1^5 + x_1 x_0^4 + x_0^5 = 0\}$$

I) Determinar si X es una variedad proyectiva.

II) Determinar si la intersección $L \cap X$ es una subvariedad proyectiva y en caso negativo, calcular $\mathbb{V}(L \cap X)$.

Solución.

I) Tomamos los siguientes puntos:

$$P_0 = [0:0:1], \qquad P_1 = [-1:1:1];$$

se puede comprobar con facilidad que $P_0, P_1 \in X$, por lo que si X fuese una variedad proyectiva, se tendría que $V = \mathbb{V}(\{P_0, P_1\}) \subset X$.

V, al ser una recta, está descrita por una ecuación de la forma:

$$V : \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0,$$

sustituyendo los puntos P_i, tenemos el siguiente sistema de α_i:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_1, \\ \alpha_2 = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad V = \{x_0 + x_1 = 0\}$$

Podemos ver que el punto $Q = [2:-2:3] \in V$, pero no satisface la ecuación de X, por lo que $V \not\subset X$, y consecuentemente se determina que X no es una variedad proyectiva.

II) La intersección $W = L \cap X$ está descrita por la siguiente ecuación:

$$W : x_0^4 x_2 + x_0^5 = 0, \tag{1.1}$$

Despejando la ecuación [1.1], W sólo contiene dos puntos en $\mathbb{P}^2$:

$$P_2 = [0:0:1], \qquad P_3 = [1:0:-1]$$

Calculamos por tanto $Z = \mathbb{V}(W) = \mathbb{V}(\{P_2, P_3\})$; sea la ecuación:

$$Z : \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0,$$

Sustituyendo los puntos P_2 y P_3, tenemos que:

$$\begin{cases} 0 = \beta_0 = \beta_2, \\ \quad \beta_1 \in \mathbb{K}; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad Z = L = \{x_1 = 0\}$$

Tenemos por tanto $\mathbb{V}(L \cap X) = L$, y como $L \setminus (L \cap X)$ no es vacío[I], $L \cap X$ no es una subvariedad proyectiva. □

[I] Por ejemplo, $Q = [2:0:1] \in L \setminus (L \cap X)$.

Ejercicio 2

Consideramos en $\mathbb{P}^3$ punto $P := [0:0:1:2]$ y las rectas:

$$L_1 := \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ \qquad\qquad x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 := \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ \qquad x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

I) Exhibir ecuaciones implícitas de todas las rectas que pasan por el punto P y cortan a la recta L_1.

II) Exhibir ecuaciones implícitas de todas las rectas que pasan por el punto P y cortan a la recta L_2.

III) Exhibir ecuaciones implícitas de todas las rectas que pasan por P y cortan a L_1 y a L_2. Calcular en dichos casos $L \cap L_1$ y $L \cap L_2$.

Solución.

I) En primer lugar obtendremos la expresión de un punto genérico P_1 de la recta L_1 a través de sus ecuaciones paramétricas. Estas ecuaciones las podemos obtener tomando dos puntos cualesquiera de la recta. En nuestro caso valdrían los puntos

$$Q_1 = [1:1:-1:-1] \qquad \text{y} \qquad Q_2 = [1:-1:0:0].$$

Considerando la proyección canónica del espacio vectorial al proyectivo $\pi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{P}^3$, $u \mapsto [u]$, podemos definir los vectores de $\mathbb{K}^4$ asociados a los puntos Q_i como

$$u_1 := (1,1,-1,-1) \qquad \text{y} \qquad u_2 := (1,-1,0,0).$$

El subespacio vectorial asociado a la recta proyectiva L_1 vendrá dado por esos dos vectores, que son linealmente independientes

$$\widehat{L_1} = \pi^{-1}(L_1) \cup \{0\} = L(\{u_1, u_2\}).$$

Por tanto, unas ecuaciones paramétricas del plano vectorial $\widehat{L_1}$ con respecto a la base estándar de $\mathbb{K}^4$ son:

$$\widehat{L_1} : \begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = -\lambda + \mu \\ x_2 = -\mu \\ x_3 = -\mu \end{cases} \qquad \text{con} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de L_1 respecto de la referencia estándar de $\mathbb{P}^3$ son:

$$L_1 : \begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = -\lambda + \mu \\ x_2 = -\mu \\ x_3 = -\mu \end{cases} \qquad \text{con} \qquad [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$$

En consecuencia, tenemos que el punto genérico de L_1 es $P_1 = [\mu + \lambda : \mu - \lambda : -\mu : -\mu]$ con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$. Por tanto todas las rectas L'_1 que pasen por el punto P y corten a la recta L_1 pasarán también por el punto P_1. Por tanto ya sabemos que $L'_1 = \mathbb{V}(\{P, P_1\})$ por ser los dos puntos independientes y podemos obtener fácilmente unas ecuaciones implícitas:

$$L'_1 : \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_0 & \lambda + \mu & 0 \\ x_1 & -\lambda + \mu & 0 \\ x_2 & -\mu & 1 \\ x_2 & -\mu & 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad L'_1 : \begin{cases} (\mu - \lambda)x_0 - (\mu + \lambda)x_1 = 0; \\ -\mu x_1 - 2(\mu - \lambda)x_2 + (\mu - \lambda)x_3 = 0; \end{cases}$$

con la restricción $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$.

II) Para este segundo apartado seguiremos un procedimiento completamente análogo al anterior. Tomamos dos puntos cualesquiera $R_1, R_2 \in L_2$ de forma que $L_2 = \mathbb{V}(\{R_1, R_2\})$.

Por ejemplo podemos escoger

$$R_1 = [1:0:0:0] \qquad \text{y} \qquad R_2 = [0:2:-1:1].$$

De esta forma unas ecuaciones paramétricas de la recta L_2 con respecto a la referencia estándar serían:

$$L_2 : \begin{cases} x_0 = \ \ \alpha \\ x_1 = \ \ 2\beta \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = \ \ \beta \end{cases} \qquad \text{con} \qquad [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Por tanto, podemos escribir el punto genérico de L_2 como

$$P_2 = [\alpha : 2\beta : -\beta : \beta] \qquad \text{con} \qquad [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado anterior sabemos que la recta L_2' que pasa por el punto P y corta a L_2 también pasa por el punto P_2. Como estos dos puntos son independientes sabemos que $L_2' = \mathbb{V}(\{P, P_2\})$ y por tanto podemos obtener fácilmente unas ecuaciones implícitas:

$$L_2' : \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_0 & \alpha & 0 \\ x_1 & 2\beta & 0 \\ x_2 & -\beta & 1 \\ x_2 & \beta & 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad L_2' : \begin{cases} 2\beta x_0 - \ \alpha x_1 & = 0 \\ \qquad -3\beta x_1 - 4\beta x_2 + 2\beta x_3 & = 0 \end{cases}, \qquad \text{con} \qquad [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1.$$

III) La recta L que verifica estas condiciones es un caso particular de la recta L_1' y además un caso particular de la recta L_2' calculadas en los apartados anteriores. Por lo tanto tendrá que cumplir las ecuaciones de L_1' y de L_2' simultáneamente para un cierto $[\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1$ y para un $[\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1$. A la vista de nuestras ecuaciones implícitas simplemente basta con igual coeficientes para cada coordenada (siempre salvo proporcionalidad). Por tanto,

$$\begin{cases} \mu - \ \lambda \qquad - 2\beta = 0 \\ \mu + \ \lambda - \alpha \qquad = 0 \\ \mu \qquad\qquad - 3\beta = 0 \\ 2\mu - 2\lambda \qquad - 4\beta = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \beta \\ \mu = 3\beta \\ \alpha = 4\beta \\ \beta = \beta \end{cases}$$

Sustituyendo todo en función de β en las ecuaciones de L_2' obtenemos las ecuaciones implícitas de L:

$$L : \begin{cases} 2\beta x_0 - 4\beta x_1 & = 0 \\ \qquad -3\beta x_1 - 4\beta x_2 + 2\beta x_3 & = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Como tenemos que $\beta \neq 0$ podemos suponer $\beta = -1$, por lo que $[\alpha:\beta] = \left[\frac{\alpha}{-\beta} : -1\right] \in \mathbb{P}^1$. Con esto podemos reescribir las ecuaciones implícitas de L como

$$L : \begin{cases} -x_0 + 2x_1 & = 0 \\ \qquad 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = 0. \end{cases}$$

Para calcular $L \cap L_1$ simplemente tenemos que concatenar las ecuaciones y eliminar una ecuación redundante:

$$L \cap L_1 : \begin{cases} x_0 + \ \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_2 - x_3 = 0 \\ -x_0 + 2x_1 \qquad\quad = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad L \cap L_1 : \begin{cases} x_0 = \ \ 2\gamma \\ x_1 = \ \ \gamma \\ x_2 = -\frac{3}{2}\gamma \\ x_3 = -\frac{3}{2}\gamma \end{cases}$$

Tomando $\gamma = 2$ puesto que $x_1 \neq 0$ tenemos que $L \cap L_1 := \{[4:2:-3:-3]\}$.

Para calcular $L \cap L_2$ seguimos un proceso completamente análogo al caso anterior:

$$L \cap L_2 : \begin{cases} \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_2 + x_3 = 0 \\ -x_0 + 2x_1 \qquad\quad = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad L \cap L_2 : \begin{cases} x_0 = \ \ 2\rho \\ x_1 = \ \ \rho \\ x_2 = -\frac{1}{2}\rho \\ x_3 = \ \ \frac{1}{2}\rho \end{cases}$$

Tomando $\rho = 2$ puesto que $x_1 \neq 0$ y tenemos que $L \cap L_2 := \{[4:2:-1:1]\}$.

□

Ejercicio 3

Consideremos en $\mathbb{P}^3$ los puntos $A := [1:0:0:0]$ y $B := [0:1:0:0]$ y las rectas

$$L_1 := \{x_0 = x_1,\ x_2 = 0\} \qquad \text{y} \qquad L_2 := \{x_0 + x_1 = 0,\ x_3 = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow P^3$ una aplicación proyectiva que transforma A en B y deja fijos todos los puntos de $L_1 \cup L_2$.

I) Probar que L_1 y L_2 no son coplanarias.

II) Calcular la familia de los planos que contienen a la recta $L_i,\ i = 1,2$.

III) Demostrar que los planos que contienen a las rectas L_i son invariantes por f para $i = 1,2$.

IV) ¿Es f una homografía?¿Es única?

V) Hallar la matriz respecto de la referencia proyectiva estándar de $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.