系登録試験　数学

s2s

2016 年問題

問 1

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して行列 $A(\alpha)$ を

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & 4\alpha & 1-3\alpha \\ -\alpha & 1+2\alpha & 1-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。$A(\alpha)$ と $A(\beta)$ が相似になるのはいつか、決定せよ。

問 2

次の積分の値を求めよ。

$$\int_D |x|^3 e^{-y^3} dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x^2 \le y\}$$

問 3

$\mathbb{R}^5$ の元 $a_1, \ldots, a_6$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める。$\mathbb{R}^5$ の部分空間 W_1, W_2 を $W_1 =< a_1, a_2, a_3 >$, $W_2 =< a_4, a_5, a_6 >$ と定める。

(1) $\dim W_1$ と $\dim W_2$ を求めよ。

(2) $\dim(W_1 + W_2)$ を求めよ。

(3) $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ。

問 4

$\alpha > 0$ とする。$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{(1+nx)^\alpha}$$

と定める。

(1) $\{f_n(x)\}$ が区間 $[0, \infty)$ 上で 0 に各点収束するための α の条件は何か。

(2) $\{f_n\}$ が区間 $[0, \infty)$ 上で 0 に一様収束するための α の条件は何か。

2016 年解答例

問 1

特性方程式を求めると $\det(xI - A(\alpha)) = (x-1)^3$ である。固有値 1 に属する固有空間の次元を求めると

$$\dim\ker(I - A(\alpha)) = \begin{cases} 2 & (\alpha = 0,1) \\ 1 & (\alpha \neq 0,1) \end{cases}$$

であるから、$A(\alpha)$ の Jordan 標準形は $\alpha = 0,1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0,1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

したがって $A(\alpha)$ と $A(\beta)$ が相似であることと、$\alpha, \beta \in \{0,1\}$ または $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ であることが同値。

問 2

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}$ であることから、

$$\int_D |x|^3 e^{-y^3} dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} |x|^3 e^{-y^3} dxdy = \frac{1-e^{-1}}{6}$$

問 3

(1)

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

より $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ は一次独立だから $\dim W_1 = 3$.

$$\dim\ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

より $\dim W_2 = 3 - 1 = 2$ である。
(2) $W_1 + W_2 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ であることに注意する。

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

より $\dim(W_1 + W_2) = 4$
(3)

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = c_4a_4 + c_5a_5 + c_6a_6$$

とする。すると $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ の一次独立性から $c_1 = c_3 = 0$ を得る。よって、$W_1 \cap W_2 = \langle a_2 \rangle$ だから $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

問 4

(1) $x = 1$ で 0 に収束することから $\alpha > 1$ を得る。逆に $\alpha > 1$ なら、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{(1+nx)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\alpha}x^{2-\alpha}}{(1+\frac{1}{(nx)^\alpha})^\alpha} = 0.$$

よって求める条件は $\alpha > 1$
(2) $\{f_n\}$ が区間 $[0, \infty)$ 上で 0 に一様収束するなら自然数 m について

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{nx^2}{(1+nx)^\alpha} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{n^{1-\alpha}x^{2-\alpha}}{(1+\frac{1}{(nx)^\alpha})^\alpha} \geq \sup_{m\geq 1} \frac{n^{2m+1-(m+1)\alpha}}{(1+\frac{1}{(n^{m+1})^\alpha})^\alpha}$$

の左辺が 0 に収束する。よって右辺も 0 に収束し、

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq 1} n^{2m+1-(m+1)\alpha} = 0$$

でなければならない。よって $\forall m \geq 1 \ 2m + 1 - (m+1)\alpha < 0.$ $m \to \infty$ として $2 \leq \alpha$ である。
逆に $2 \leq \alpha$ なら

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{1}{n} \frac{(nx)^2}{(1+nx)^2} \frac{1}{(1+nx)^{\alpha-2}} \leq \frac{1}{n}$$

より 0 に一様収束することがいえる。したがって求める条件は、$2 \leq \alpha$.

2017 年問題

問 1

次の行列 A, B は対角化可能か判定せよ。理由も示せ。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & -7 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

問 2

$M_2(\mathbb{R})$ を実 2 次正方行列全体とする。$M_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間である。
$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。$\Phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を $\Phi(X) = NX - XN$ によって定める。

(1) Φ は線形写像であることを示せ。
(2) $M_2(\mathbb{R})$ の基底 $\{e_1, \ldots, e_4\}$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める。ここで $\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} e_i$ とするとき、行列 $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ を求めよ。
(3) Φ の階数を求め、$\mathrm{Ker}\Phi$ の基底をひとつ与えよ。

問 3

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \leq x\}$ なるとき、重積分

$$\int_D \exp\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dxdy$$

の値を求めよ。

問 4

$\alpha > 1$ なる $\alpha \in \mathbb{R}$ を固定する。

(1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ について広義積分

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(tx)}{x(1+x^\alpha)}dx$$

が存在することを示せ。ただし $\tan^{-1}$ は $\tan$ を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ へ制限したものの逆写像である。
(2) $F(t)$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ。

2017 年解答例

問 1

(1) 特性方程式を求めると

$$\det(xI - A) = (x+1)(x-2)^2$$

を得る。固有値 2 に属する固有空間を求めると

$$\ker(2I - A) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

であり、固有空間の直和の次元は 2 だから、$\mathbb{R}^3$ 全体にはならない。よって A は対角化可能でない。
実際、$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP$ は Jordan 標準形 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

(2) 特性方程式を求めると

$$\det(xI - B) = (x+1)(x-2)^2$$

を得る。固有値 2 に属する固有空間を求めると

$$\ker(2I - B) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、$\dim(\ker(2I - B)) = 2$ である。よって $\mathbb{R}^3$ 全体が固有空間の直和に等しく, B は対角化可能と判る。
実際 $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}BP$ は対角行列である。

問 2

(1) Φ がスカラー倍と和を保つことから判る。
(2) (i. j) 成分だけが 1 で、あとは 0 という行列を E_{ij} で表すことにする。このとき

$$E_{ij}E_{lk} = \delta_{jl}E_{ik}$$

が成り立つ。(ただし δ_{jl} は Kronecker のデルタである) したがって

$$\Phi(E_{ij}) = \delta_{2i}E_{1j} - \delta_{j1}E_{i2}$$

と計算できるので、代入して

$$\Phi(e_1) = -e_2 \quad \Phi(e_2) = 0 \quad \Phi(e_3) = e_1 - e_4 \quad \Phi(e_4) = e_2$$

ゆえに

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\ker C$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる。よって $\ker \Phi$ の基底として $\{e_1 + e_4, e_2\}$ がとれ、Φ の階数は $4 - 2 = 2$ である。

問 3

極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

により、$E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r^3 \leq r\cos\theta, |\theta| \leq \pi\}$ とすると

$$\int_D \exp(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dxdy = \int_E r\exp(\sin\theta)drd\theta$$

が成り立つ。ここで $E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r \leq \sqrt{\cos\theta},\ |\theta| \leq \frac{\pi}{2}\}$ だから

$$\int_E r\exp(\sin\theta)drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\cos\theta}} r\exp(\sin\theta)drd\theta = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

問 4

(1) $\phi(x) = \tan^{-1}(x)$ とする。$0 \leq \phi'(x) \leq 1$ であることに注意すると Taylor の定理により

$$\left|\frac{\phi(tx)}{x}\right| = \left|\frac{\phi(tx) - \phi(0)}{tx - 0}\right| \cdot |t| \leq |t|$$

がわかる。したがって

$$\int_0^\infty \left|\frac{\phi(tx)}{x(1+x^\alpha)}\right| dx \leq |t| \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha}$$

が成り立つ。ここで

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

であるから

$$\int_0^\infty \left| \frac{\phi(tx)}{x(1+x^\alpha)} \right| dx \le \frac{\alpha}{\alpha-1}|t|$$

であることが判る。

(2) $t, s \in \mathbb{R}$ とする。(1) と同様にして

$$|F(t) - F(s)| \le \frac{\alpha}{\alpha-1}|t-s|$$

であり、F は Lipschitz 連続、とくに一様連続である。