Jérémie Béliveau-Lefebvre – 04 494 470
Sébastien Leblanc – 18 206 273

TP1 - solution

1. Prouver : $H[x,y] = H[x \mid y] + H[x]$

$$H[x,y]$$

$<=>$

$$-\iint p(x,y) \cdot log_2 p(x,y) \partial y \partial x \qquad \text{par définition}$$

$<=>$

$$-\iint p(x,y) \cdot log_2 (p(y \mid x) \cdot p(x)) \partial y \partial x \qquad \text{arythmétique}$$

$<=>$

$$-\iint p(y \mid x) \cdot p(x) \cdot log_2 p(y \mid x) + p(x,y) \cdot log_2 p(x) \, \partial y \partial x \qquad \text{p. jointe}$$

$<=>$

$$-\iint \frac{p(x \mid y) \cdot p(y)}{p(x)} \cdot p(x) log_2 p(y \mid x) + p(x,y) \cdot log_2 p(x) \, \partial y \partial x \qquad \text{Bayes}$$

$<=>$

$$-\iint p(x \mid y) \cdot p(y) \cdot log_2 p(y \mid x) + p(x,y) \cdot log_2 p(x) \, \partial y \partial x \qquad \text{arythmétique}$$

$<=>$

$$-\iint \frac{p(y,x)}{p(y)} \cdot p(y) \cdot log_2 p(y \mid x) + p(x,y) \cdot log_2 p(x) \, \partial y \partial x \qquad \text{p. conditionnelle}$$

$<=>$

$$-\iint p(y,x) \cdot log_2 p(y \mid x) + p(x,y) \cdot log_2 p(x) \, \partial y \partial x \qquad \text{arythmétique}$$

$<=>$

$$-\iint p(y,x) \cdot log_2 p(y \mid x) \, \partial y \partial x - \iint p(x,y) \cdot log_2 p(x) \, \partial y \partial x \qquad \text{par définition}$$

$<=>$

$$H[x \mid y] + H[x] \qquad \text{par définition}$$

CQFD

2. Prouver : $I[x,y] = H[x] - H[x \mid y]$

$$I[x,y]$$

$<=>$

$$\iint p(x,y) \cdot log_2 \frac{p(x,y)}{p(x) \cdot p(y)} \partial y \partial x \qquad \text{par définition}$$

$<=>$

$$\iint p(x,y) \cdot log_2 \frac{p(x|y) \cdot p(y)}{p(x) \cdot p(y)} \partial y \partial x \qquad \text{probabilité jointe}$$

$<=>$

$$\iint p(x,y) \cdot log_2 \frac{p(x|y)}{p(x)} \partial y \partial x \qquad \text{arythmétique}$$

$<=>$

$$\iint p(x,y) \cdot [log_2 p(x \mid y) - log_2 p(x)] \partial y \partial x \qquad \text{arythmétique}$$

$<=>$

$$\iint p(x,y) \cdot log_2 p(x \mid y) \partial y \partial x - \iint p(x,y) \cdot log_2 p(x) \partial y \partial x + \qquad \text{par définition}$$

$<=>$

$$- \iint p(x,y) \cdot log_2 p(x) \partial y \partial x + \iint p(x,y) \cdot log_2 p(x \mid y) \partial y \partial x \qquad \text{par définition}$$

$<=>$

$$H[x] - H[x \mid y] \qquad \text{par définition}$$

CQFD

3. Prouver : $Cov[x, y] = E_{xy}[x, y] - E_x[x] \cdot E_y[y]$

$$Cov[x, y]$$

$<=>$

$$E_{xy}[(x - E_x[x]) \cdot (y - E_y[y])] \quad \text{par définition}$$

$<=>$

$$\iint [(x - E_x[x]) \cdot (y - E_y[y])] \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x \quad \text{par définition}$$

$<=>$

$$\iint \big[xy - E_x[x] \cdot y - E_y[y] \cdot x + E_x[x] \cdot E_y[y]\big] \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x \quad \text{par distributivité}$$

$<=>$

$$\iint x \cdot y \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x - \iint E_x[x] \cdot y \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x$$
$$- \iint E_y[y] \cdot x \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x + \iint E_x[x] \cdot E_y[y] \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x \quad \text{par déf.}$$

$<=>$

$$\iint x \cdot y \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x - E_x[x] \cdot \iint y \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x$$
$$-E_y[y] \cdot \iint x \cdot p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x + E_x[x] \cdot E_y[y] \cdot \iint p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x$$

puisque $E_x[x] et E_y[y]$ sont des constantes

$<=>$

$$E_{xy}[x, y] - E_x[x] \cdot \int E_y[y] \cdot p(x) \partial x$$
$$-E_y[y] \cdot \int E_x[x] \cdot p(y) \partial y + E_x[x] \cdot E_y[y] \cdot \iint p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x$$

par déf

$<=>$

$$E_{xy}[x, y] - E_x[x] \cdot E_y[y] \cdot \int p(x) \partial x$$
$$-E_y[y] \cdot E_x[x] \cdot \int p(y) \partial y + E_x[x] \cdot E_y[y] \cdot \iint p(x) \cdot p(y) \partial y \partial x$$

puisque $E_x[x] et E_y[y]$ sont des constantes

$<=>$

$$E_{xy}[x, y] - E_x[x] \cdot E_y[y] - E_y[y] \cdot E_x[x] + E_x[x] \cdot E_y[y]$$

puisque $\int p(x) \partial x = 1 \; et \int p(y) \partial y = 1$

$<=>$

$$E_{xy}[x, y] - E_x[x] \cdot E_y[y] \quad \text{arythmétique}$$

CQFD