ALGO 3/5

studi

Auteur : Sébastien Inion

https://github.com/SebInfo/AlgoStudi3

Photo de Ali Pazani: https://www.pexels.com/fr-fr/photo/photo-de-femme-portant-un-haut-a-col-roule-2777898/

LE PROBLÈME DU RENDU DE MONNAIE

- Le problème du rendu de monnaie consiste à déterminer le nombre minimal de billets et/ou pièces nécessaires pour rendre une somme donnée.
- L'entrée est constituée de l'ensemble des valeurs des pièces et de la somme à rendre.
- La sortie est soit une liste de pièces, minimale pour atteindre cette somme, soit simplement le nombre minimal de pièces nécessaires (sans avoir la liste).
- Par exemple, la meilleure façon de rendre 7 euros est de rendre un billet de cinq et une pièce de deux, même si d'autres façons existent (rendre 7 pièces de un euro, par exemple).

LE RENDU DE MONNAIE

Définition [modifier | modifier le code]

Les billets et pièces jouant ici le même rôle, on suppose pour simplifier qu'il n'y a que des pièces. Un *système de pièces* est alors un n-uplet

$$S = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

où c_i représente la valeur de la ie pièce. On suppose que ces valeurs sont des entiers strictement croissants, et que $c_1 = 1$ (sinon certaines sommes ne peuvent être rendues — voir le problème des pièces de monnaie).

Étant donné un système S et un entier positif v, le problème de rendu de monnaie est le problème d'optimisation combinatoire qui consiste à trouver un n-uplet d'entiers positifs $T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui minimise

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

sous la contrainte

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = v.$$

Ainsi, v représente la somme de monnaie à rendre et x_i le nombre de pièces c_i à utiliser. La quantité à minimiser est donc le nombre total de pièces rendues, la condition à vérifier traduisant simplement le fait qu'il faut bien rendre la somme v.

On note $M_S(v)$ le nombre minimal de pièces d'un système $S(v)$.

source : wikipédia

LE RENDU DE MONNAIE

Exemple [modifier | modifier le code]

Dans la zone euro, le système en vigueur est, en mettant de côté les centimes d'euros :

S = (1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500).

Il y a par exemple six triplets de pièces (ou billets) de 1, 2 et 5 euros qui permettent de rendre 7 euros (les billets de 10 euros ou plus étant inutiles) :

(7,0,0), (5,1,0), (3,2,0), (1,3,0), (2,0,1), (0,1,1).

La solution au problème de rendu de monnaie (S,7) est alors le triplet (x_1, x_2, x_3) qui minimise le nombre total $x_1 + x_2 + x_3$ de pièces rendues, soit $(0, 1, 1)$, c'est-à-dire une pièce de 2 euros et une de 5 (un billet). On a donc $M_{(1,2,5)}(7) = 2$.

source : wikipédia

ALGO GLOUTON

LE RENDU DE MONNAIE

- Ce problème est **NP-complet** (Un problème NP-complet est un problème qui n'admet pas d'algorithmes capables de trouver une solution en un temps polynomial) dans le cas général, c'est-à-dire difficile à résoudre.
- Cependant pour certains systèmes de monnaie dits canoniques, l'**algorithme glouton** est optimal, c'est-à-dire qu'il suffit de rendre systématiquement la pièce ou le billet de valeur maximale – ce tant qu'il reste quelque chose à rendre.
- Une monnaie canonique rend le minimum de pièces avec l'algol glouton

ALGO GLOUTON

- Il s'agit d'un algorithme qui prend des décisions étape par étape en choisissant à chaque étape la solution localement optimale à ce moment-là, sans se préoccuper des conséquences à long terme.
- L'idée fondamentale derrière un algorithme glouton est de faire les meilleurs choix locaux à chaque étape, en espérant que cela conduira à une solution globalement optimale.
- Important : parfois, ils peuvent donner des solutions sous-optimales ou incorrectes.

ALGO GLOUTON

- Dans le problème du rendu de monnaie, l'algorithme consistant à répéter le choix de la pièce de plus grande valeur qui ne dépasse pas la somme restante est un **algorithme glouton**.
- Par exemple pour rendre 7 euros le minimum est 2 : une pièce de 5 plus une pièce de 2.
- Si l'on prend le système non canonique (1,3,4), l'algorithme glouton calcule 6 = 4+1+1 alors qu'on peut rendre une pièce en moins en remarquant que 6 = 3+3.
- Pour votre culture la livre sterling avant 1971était une monnaie non canonique. De nos jours il n'en n'existe plus.

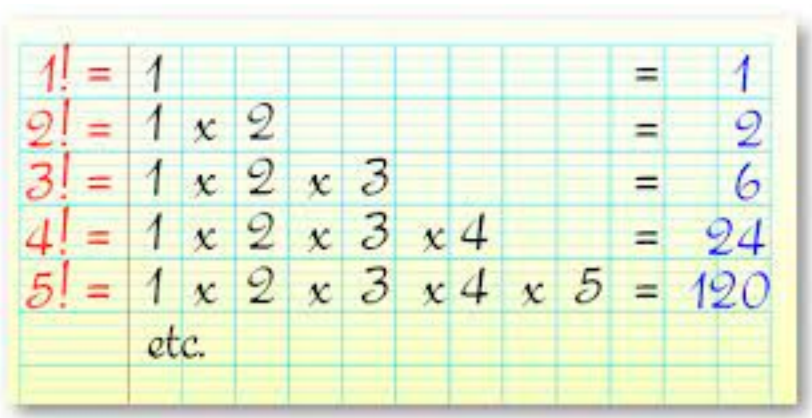
IMPLEMENTATION EN PYTHON

```python
valeurs = [1,2,5,10,20,50,100,200,500]

def renduMonnaie(sommeARendre):
    liste = []
    indice = len(valeurs) - 1

    while sommeARendre > 0:
        piece = valeurs[indice] #glouton
        if piece > sommeARendre:
            indice -= 1
        else:
            liste.append(piece)
            sommeARendre -= piece

    return liste

print(renduMonnaie(7))
```

LA RÉCURSIVITÉ

LA RÉCURSIVITÉ

- Une fonction récursive est une fonction qui s'appelle elle même.
- Prenons l'exemple classique de factorielle :

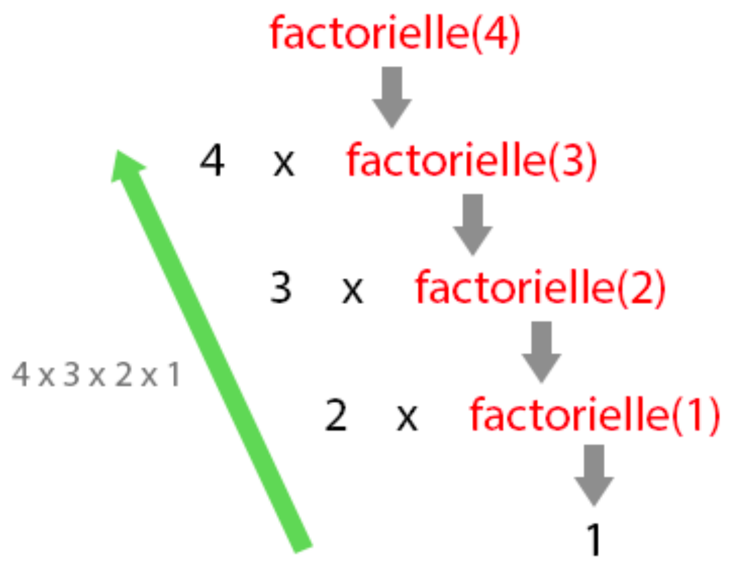


- On peut aussi dire que 5!=5*4! et que 4!=4*3! etc.
- On a ici une fonction récursive se terminant avec 0!=1

LA RÉCURSIVITÉ

- Algo :

```
fonction factorielle(n):
    si n est égal à 0:
        retourne 1
    sinon:
        retourne n multiplié par factorielle(n - 1)
```



- Ce qui donne naturellement en Python :

```python
def factorielle(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * factorielle(n - 1)
```

FACTORIELLE SANS RECURSIVITÉ

- Algo :

```
fonction factorielle(n):
    résultat = 1
    pour i de 1 à n:
        résultat = résultat * i
    retourne résultat
```

- Ce qui donne en Python :

```python
def factorielle(n):
    resultat = 1
    for i in range(1, n + 1):
        resultat *= i
    return resultat
```

AVANTAGES ET INCONVENIENTS

- Avantages :
  - Le code parait presque limpide et ressemble à une définition
  - Pour certains problèmes (Tours de Hanoï par exemple) la récursivité est la seule issue raisonnable.
- Inconvénients :
  - Légèrement plus lent que l'itératif
  - Consomme un peu plus de mémoire ce qui est gênant lors d'appels très nombreux.

RENDU DE MONNAIE EN RÉCURSIF

- On cherche à déterminer, pour un ensemble P de pièces et une somme s **le nombre minimal de pièces** de P pour atteindre la somme s. On note $pieces_P$ (s) ce minimum. (le problème est le même que celui du début du cours)
- On décrit une formule récursive :
  - Si s = 0, alors $pieces_P$ (s) = 0 de manière évidente.
  - Sinon, on peut rendre **n'importe laquelle** des pièces p de P si p<=s. Si on a sélectionné p, il reste la somme s - p à rendre : cette somme nécessite par hypothèse $pieces_P$(s - p) pièces

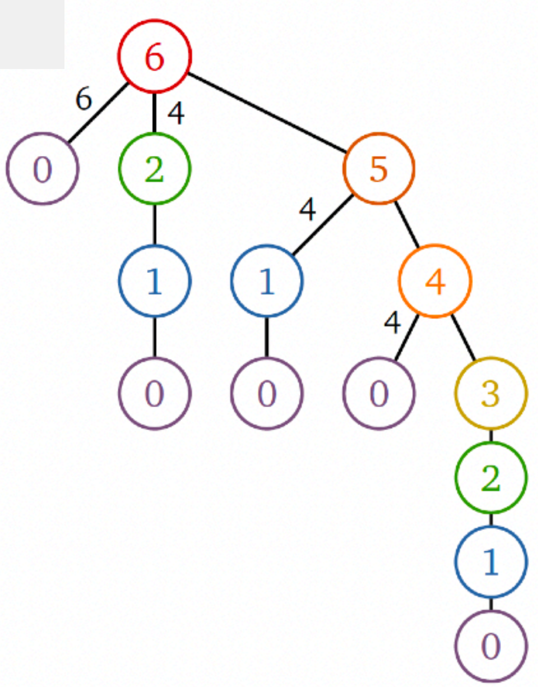
RENDU DE MONNAIE EN RÉCURSIF

$$\text{pieces}_P(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0, \text{ et} \\ 1 + \min\{\text{pieces}_P(s-p) : p \in P, p \leq s\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Entrées : Ensemble P d'entiers, entier s
Sortie : Nombre minimal de pièces de P dont la somme vaut s

```
Si s = 0 : renvoyer 0
n ← +∞
Pour chaque pièce p ∈ P :
   Si p ≤ s :
      n_p ← RenduNaif(P, s − p)
      Si n_p ≤ n : n ← n_p
Renvoyer 1 + n
```

$$\textsc{RenduNaif}(\{6,4,1\},6)$$



RENDU DE MONNAIE EN RÉCURSIF

Entrées : Ensemble P d'entiers, entier s
Sortie : Nombre minimal de pièces de P dont la somme vaut s

Si $s = 0$: renvoyer 0
$n \leftarrow +\infty$
Pour chaque pièce $p \in P$:
  Si $p \leq s$:
    $n_p \leftarrow \textsc{RenduNaif}(P, s - p)$
    Si $n_p \leq n$: $n \leftarrow n_p$
Renvoyer $1 + n$

```python
def rendu_monnaie_nbrPiece(s, P):
    if s == 0:
        return 0
    n = float('inf')
    for p in P:
        if p <= s:
            np = rendu_monnaie_nbrPiece(s - p, P)
            if (np < n):
                n=np
    return 1+n
```

EXERCICES

- Transformer le programme précédent afin d'obtenir cette fois la liste des pièces et non plus le nombre de pièce.
- Tester avec un système non canonique.
- Est-ce que cela fonctionne mieux que les algorithmes glouton ?

MERCI POUR VOTRE ATTENTION