3.3.4: Auf 20 verschiedene Prozessoren, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden, sollen k = 10 Stapelaufträge verteilt werden. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl verschiedener Prozessoren in der Auswahl. Dabei ist die Anzahl Y verschiedener Prozessoren

$$Y = \sum_{1=1}^{20} X_i \; mit \; X_i = 1, falls \; Prozessor \; i \; mind. einmal \; ausgewählt. \; 0, sonst$$

$$E[Y] = E[\sum_{i=1}^{20} X_i] = \sum_{i=1}^{20} E[X_i] = 20 \cdot E[X_i] \approx 8$$

$$E[X_i] = 1 \cdot p(1) + 0 \cdot p(0) = \underbrace{\left(1 - \left(\tfrac{19}{20}\right)^{10}\right)}_{\text{Gegenereignis Prozessor } i \text{ einmal ausgewählt}} \approx 0.4$$

5.3: Die Grünphase (einschließlich Blinkphase) einer Fußgängerampel beträgt 25 Sekunden, die Rotphase 65 Sekunden. Sie kommen zu einem zufälligen Zeitpunkt an die Ampel. X sei die Ankunftszeit und
Y = g(X) die Wartezeit an der Ampel.
Wie lange warten Sie im Mittel, wenn Ihre Ankunft an der Ampel rein zufällig innerhalb eines Intervalls von 90 Sekunden bestehend aus Grün- und Rotphase erfolgt ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{90}, & 0 \le x < 90 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 25 \\ 90-x, & 25 \le x \le 90 \end{cases}$$

$$E[Y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{90} \int_0^{90} g(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{90} \int_{25}^{90} (90-x)\, dx = \frac{1}{90} \left[90x - \frac{1}{2}x^2\right]_{25}^{90} = \ldots = \frac{845}{36} \approx 23{,}5$$

5.4 Beweisen Sie die folgenden Formeln für die Zufallsvariablen X und Y:
a) $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$ b) $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[X \cdot Y] - \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]$

$$Var[X] = E[(x-\mu)^2] = E[x^2 - 2\mu x + \mu^2] = E[x^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$$
$$= E[X^2] - \mu^2 = E[x^2] - (E[X])^2$$

$$Cov[X,Y] = E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big] = E\big[XY - E[Y] \cdot X - E[X] \cdot Y + E[X]E[Y]\big]$$
$$= E[XY] - 2E[Y]E[X] + E[X]E[Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

Klausur: Aussage richtig oder falsch? Falls $X \sim \mathrm{N}_{\mu,\sigma^2}$ gilt, dann gilt $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}_{0,1}$.

$X \sim N_{\mu,\sigma^2}$, d.h. $E[X] = \mu$ und $Var[X] = \sigma^2$

$$\left.\begin{aligned} E[Z] &= E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} \cdot E[X-\mu] = \frac{1}{\sigma} \cdot \underbrace{E[X]}_{\mu} - \mu = 0 \\ Var[Z] &= Var\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \underbrace{Var[X]}_{\sigma^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z \sim N_{0,1} \; ✓$$

6.2(**Summe normalverteilter ZV**): In einer Anlage wird Milch in 1-Liter Flaschen abgefüllt. Die Abfüllmenge X variiert dabei. Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.01 (Liter) und der Standardabweichung 0.01. Das Flaschenvolumen Y variiert unabhängig davon ebenfalls gemäß einer Normalverteilung mit Erwartungswert 1.06 (Liter) und Standardabweichung 0.02.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft eine Flasche beim Befüllen über?

$$\left.\begin{aligned} &\text{Abfüllmenge } X \sim N_{1.01, 0.01^2} \\ &\text{Flaschenvolumen } Y \sim N_{1.06, 0.02^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X - Y \overset{X,Y \text{ stoch. unabh.}}{\sim} N_{-0.05,\, 0.01^2 + 0.02^2}$$

Gesucht: $P(X > Y) = P(X - Y > 0) = 1 - P(X - Y \le 0)$
$= 1 - pnorm(0, -0.05, \sqrt{0.0005})$

6.4 (**Normalverteilung**): Die Lebensdauer eines Bildschirms sei eine normalverteilet Zufallsvariable mit Erwartungswert 8.2 Jahre und Standardabweichung 1.4 Jahre.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert ein Bildschirm länger als 10 Jahre, nicht länger als 5 Jahre bzw. zwischen 5 und 10 Jahren?

$X \sim N_{8.2, 1.4}$

$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - pnorm(10, 8.2, 1.4) \approx 9.9\%$

$P(X \le 5) = pnorm(5, 8.2, 1.4)$

$P(5 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \le 5)$

b) Bestimmen Sie das 10%- und das 90%-Quantile der Lebensdauer.Wie sind diese Werte zu interpretieren?

$qnorm(0.1, 8.2, 1.4) \approx 6.4$ Jahre
$qnorm(0.9, 8.2, 1.4) \approx 10$ Jahre
$\Rightarrow$ 80% der Bildschirme haben eine Lebensdauer zwischen 6.4 und 10 Jahren

c) Sie kaufen einen 3 Jahre alten gebrauchten Bildschirm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert er noch länger als 5 Jahre? Hat die Normalverteilung ein Gedächtnis?

$$P(X > 8 \mid X > 3) = \frac{P(X > 8 \cap X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X > 8)}{P(X > 3)} = \frac{1 - pnorm(8, 8.2, 1.4)}{1 - pnorm(3, 8.2, 1.4)}$$

$P(X > 5) = 1 - pnorm(5, 8.2, 1.4)$

unterschiedliche Ergebnisse
$P(X > 8 \mid X > 3) \neq P(X > 5)$
$\Rightarrow$ Normalverteilung hat "Gedächtnis"!

6.5 (**Poissonverteilung**): Einen Server erreichen Anfragen gemäß einer Poissonverteilung mit einem Erwartungswert von 10 pro Stunde. Bestimmen Sie die Länge eines Zeitintervalls (in Sekunden), so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 während dieses Intervalls keine Anfrage eintrifft.

$\lambda = n \cdot p = 3600 \cdot p = 10 \Rightarrow p = \frac{1}{360}$

Gesucht: n für das gilt: $P(X = 0) = 0.9$

$$P(X=0) = \frac{(n \cdot \frac{1}{360})^0}{0!} \cdot e^{-\frac{n}{360}} = e^{-\frac{n}{360}} \overset{!}{=} 0.9$$

$$-\frac{n}{360} = \ln(0.9) \Leftrightarrow n \approx 38 \; [s]$$

4.1.2 (**Binomialverteilung**): Ein Kommunikationsnetz mit n unabhängig voneinander arbeitenden Komponenten ist funktionsfähig, wenn mind. die Hälfte der Komponenten funktioniert. Die Wahrscheinlichkeit für die Funktionsfähigkeit einer Komponente ist 10%.
(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Netz mit 3 bzw. 5 Komponenten funktionsfähig?

X = "Anzahl funktionierender Komponenten"

$n = 3$: $P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 1 - P(X < 2)$
$= 1 - P(X \le 1) = 1 - pbinom(1, 3, 0.1)$

$n = 5$: $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - pbinom(2, 5, 0.1)$
$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

(b) Für welche Werte von p ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein System mit 5 Komponenten funktioniert größer als bei einem System mit 3 Komponenten?

$P_{n=5}(X \ge 3) > P_{n=3}(X \ge 2)$

$\binom{5}{3} p^3 \cdot (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5 > \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3 \; \ldots \; p > \frac{1}{2}$

4.2.1 (**Stetige Gleichverteilung**): An einer Haltestelle fahren die Busse im 15 Minutentakt um 7:00, 7:15 usw. Ein Fahrgast kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt zwischen 7:00 und 7:30 Uhr an die Haltestelle.
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er weniger als 5 Minuten warten muss?

$P(\text{"Wartezeit} < 5\text{min"}) = P(X \in \,]10; 15[) + P(X \in \,]25; 30[)$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30}\, dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\, dx = 2 \cdot \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 12 Minuten warten muss?

$P(X \in \,]0; 3[) + P(X \in \,]15; 18[) = 2 \cdot \frac{3}{30} = \frac{1}{5}$

4.2.3 (**Exponentialverteilung**): Die Lebensdauer einer Autobatterie entspreche einer Reichweite von 10000 km. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Batterie bei einer
5000 km langen Fahrt nicht ausfällt?

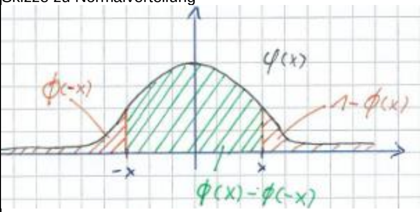
Gegeben: $X \sim Exp_\lambda$ mit $\frac{1}{\lambda} = 10^4 \Leftrightarrow \lambda = 10^{-4}$

Gesucht:
$P(X > 5000) = 1 - P(X \le 5000) = 1 - (1 - e^{-10^{-4} \cdot 5000})$
$= 1 - pexp(5000, 10^{-4})$

Warum gilt pnorm(24, 4, 10) = pnorm(2, 0, 1)?

$$X \sim N_{4,10^2} \overset{\text{standardisierung}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{X-4}{10}}_{z} \sim N_{0,1}$$

Skizze zu Normalverteilung



Die Zufallsvariablen X_i (i = 1, 2, ... , n) seien unabhängig und standardnormalverteilt.
Welchen Erwartungswert und welche Verteilung hat dann $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2, \text{ also } E[Z] = n, \ Var[Z] = 2n$$

7.1 (**ZGWS**): Wir nehmen an, dass die Punktezahl pro Student bei einer Prüfung eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 75 und Varianz 25 sei.
Wieviele Studenten müssten bei der Prüfung antreten, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 der Punktedurchschnitt um weniger als 5 vom Erwartungswert 75 abweicht?

X = "Punktezahl" $\quad \mu = 75 \quad \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$

Gesucht: n, sodass $P(75-5 < \bar{X} < 75+5) \geq 0.9$

$$P(-5 < \bar{X} - \overset{\mu}{75} < 5) = P(-5 \cdot \sqrt{n} < (\bar{X}-75) \cdot \sqrt{n} < 5 \cdot \sqrt{n})$$

$$= P\left(\frac{-5 \cdot \sqrt{n}}{\underset{\sigma}{5}} < \underbrace{\frac{(\bar{X}-75) \cdot \sqrt{n}}{5}}_{= Z \sim N_{0,1}} < \frac{5\sqrt{n}}{5}\right) = P\left(-\sqrt{n} < \frac{(\bar{X}-75) \cdot \sqrt{n}}{5} < \sqrt{n}\right) \geq 0.9$$

$$\Rightarrow 2 \cdot P(Z < \sqrt{n}) - 1 \geq 0.9$$

$$\sqrt{n} \geq \Phi^{-1}(0.95) \ \ldots \quad n \geq 3$$

7.2 (**ZGWS**): Prozessor A hat 20 Jobs zu erledigen, wobei die für die Erledigung der Jobs benötigten Zeitspannen unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert 50 [s] und Standardabweichung 10 [s] sind.
Prozessor B hat ebenfalls 20 Jobs zu erledigen, wobei die für die Erledigung der Jobs benötigten Zeitspannen unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert 52 [s] und Standardabweichung 15 [s] sind.
Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit ist A vor B fertig?

$\mu_X = 50 \quad \sigma_X = 10 \Rightarrow \sigma_X^2 = 100 \quad n_X = 20$

$\mu_Y = 52 \quad \sigma_Y = 15 \Rightarrow \sigma_Y^2 = 225 \quad n_Y = 20$

Gesucht: $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i < \sum_{i=1}^{20} Y_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i - \sum_{i=1}^{20} Y_i < 0\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N_{50n,\,100n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} X_i \sim N_{1000,\,2000}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N_{52n,\,225n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} Y_i \sim N_{1040,\,4500}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} X_i - \sum_{i=1}^{20} Y_i \sim N_{-40,\,6500}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i - \sum_{i=1}^{20} Y_i < 0\right) = \text{pnorm}(0, -40, \sqrt{6500})$$

7.3 (**ZGWS**): Eine bestimmte Komponente sei kritisch für die Funktionsfähigkeit eines Systems und muss nach Ausfall sofort ausgetauscht werden. Wenn die mittlere zu erwartende Lebensdauer dieser Komponente 100 [h] und die Standardabweichung 30 [h] beträgt, wieviele derartige Komponenten müssen vorrätig sein, so dass die Funktion des Systems für die nächsten 2000 Stunden mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 0.95 gewährleistet ist?

$\mu = 100 \quad \sigma = 30 \Rightarrow \sigma^2 = 900$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N_{n\mu,\,n\sigma^2} = N_{100n,\,900n}$$

Gesucht: n, sodass $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 2000\right) \geq 0.95$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2000\right) \geq 0.95$$

$$1 - \left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 100n}{30\sqrt{n}}}_{= Z \sim N_{0,1}} \leq \frac{2000 - 100n}{30\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

$$1 - \Phi\left(\frac{2000 - 100n}{30\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \ldots$$

10.4 (**Gleitpunktarithmetik**): Zu lösen ist die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ mit a = 1.22, b = 3.34, c = 2.28, unter Verwendung eines dreistelligen Gleitpunktsystems mit Basis b = 10.
(a) Wie lautet der berechnete Wert der Diskriminante $b^2 - 4ac$?

$$3.34^2 - 4 \cdot 1.22 \cdot 2.28 = rd(11{,}1556) - rd(4.88 \cdot 2.28)$$
$$= 1.12E1 - 1.11E1 = 1.00E{-1}$$

(b) Wie lautet der wahre Wert der Diskriminante?

$$3.34^2 - 4 \cdot 1.22 \cdot 2.28 = \ldots = 2.92E{-2}$$

(c) Geben Sie den relativen Fehler in dem berechneten Wert der Diskriminante an.

$$\frac{1.00E{-1} - 0.292E{-1}}{0.292E{-1}} \approx 2.42$$

10.6 (**Gleichtpunktarithmetik**): Führen Sie im Dezimalsystem die folgenden Berechnungen in Gleitpunktarithmetik mit einer Genauigkeit von 3 Ziffern durch und bestimmen Sie jeweils den relativen Rundungsfehler.
(a) (121 - 0,327) – 119

$$rd(1.21 \cdot 10^2 - 0.00327 \cdot 10^2) - 1.19 \cdot 10^2$$
$$= rd(1.21 \cdot 10^2 - 1.19 \cdot 10^2) = 2.00 \cdot 10^0$$

(b) (121 - 119) - 0,327

$$rd(1.21 \cdot 10^2 - 1.19 \cdot 10^2) - 3.27 \cdot 10^{-1}$$
$$= rd(2.00 \cdot 10^0 - 0.327 \cdot 10^0) = rd(1.673 \cdot 10^0) = 1.67 \cdot 10^0$$

(**Kondition**): Untersuchen Sie die Kondition von $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ in der Nähe von x = 0.

$$f'(x) = (2(1-x^2))^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2)x = \frac{-2x}{-2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$K_f(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1-\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{x^2}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}-1}_{\approx 0}+x^2} \approx 1$$

Trotz guter Kondition werden Fehler in x für |x| klein extrem verstärkt. Grund hierfür ist die Auslöschung.

(**Stabilität**): Finden Sie eine numerisch günstigere (stabilere) Formulierung von $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$.
⇨ Erweiterun mit 3. binomischer Formel

Gauß Quadratur

12.3 ... Zusammengesetzte Regeln

Fragen Kondition und Gleitpuktarithmetik
(a) Ein Problem ist schlecht konditioniert, wenn seine Lösung sensitiv gegenüber kleinen Störungen ist.
(b) Ein schlecht konditioniertes Problem wird besser konditioniert, wenn man eine genauere Gleitpunktarithmetik verwendet.
(c) Die Kondition eines Problems hängt vom Algorithmus ab, mit dem man es löst.
(d) Unabhängig von der Kondition produziert ein guter Algorithmus eine genaue Lösung.
(e) Sind zwei reelle Zahlen exakt als Gleitpunktzahl darstellbar, dann ist das Resultat einer arithmetischen Operation wieder exakt als Gleitpunktzahl darstellbar.
(f) Gleitpunktzahlen sind über ihrem Darstellungsbereich gleichmäßig verteilt.
(g) Eine Gleitpunktaddition ist zwar assoziativ aber nicht kommutativ.
(h) Was ist der Unterschied zwischen Diskretisierungs- und Rundungsfehlern?
(i) Was ist der Unterschied zwischen relativem und absolutem Fehler?
(j) Falls ein Problem eine Konditionszahl von 1 hat, ist dies gut oder schlecht?

Fragen Interpolation
(a) Es gibt beliebig viele verschiedene Funktionen, die den gleichen Satz von Datenpunkten interpolieren.
(b) Es gibt mindestens zwei verschiedene Interpolationspolynome vom Grad n zu n + 1 verschiedenen Datenpunkten.
(c) Es gibt mindestens zwei verschiedene Interpolationspolynome zu n + 1 verschiedenen Datenpunkten.
(d) Es gibt nur eine mögliche Darstellung des Interpolationspolynoms vom Grad n zu n + 1 verschiedenen Datenpunkten.
(e) Wennmaneine auf [a; b] stetige Funktion an äquidistanten Stützpunkten durch ein Polynom interpoliert, dann konvergiert das Interpolationspolynom für wachsende Anzahl von Stützpunkten immer gegen die Funktion.
(f) Wenn man eine auf [a; b] stetige Funktion an Chebyshev-Punkten durch ein Polynom interpoliert, dann konvergiert das Interpolationspolynom für wachsende Anzahl von Stützpunkten immer gegen die Funktion.

Fragen Quadraturformeln
(a) Die Gewichte einer Quadraturformel sind immer positiv.
(b) Die Newton-Cotes-Formeln basieren auf Interpolationspolynomen nach dem Ansatz von Newton.
(c) Die Simpson-Regel liefert immer exakteWerte für $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn f (x) ein Polynom vom Grad <= 3 ist.
(d) Wenn eine Quadraturformel der Ordnung 2 verwendet wird, dann wird ein Polynom 2. Grades exakt integriert