4_Mathe3_Verteilungen

Aufgabe 1 (Poisson-Verteilung)

An einer einsamen Kreuzung kommen in Mittel täglich 4 Autos vorbei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tauchen heute höchsten 2 Autos auf?

Gegeben: X: "ein Auto kommt an einem Tag vorbei" => X ist diskret & Ein seltenes Ereignis => Zeit wissen wir auch: Δt = Tag

$E[X] = 4 \text{ (Autos)} = \lambda$

Gesucht: $P(X \leq 2)$ -?

$$P(X \leq 2) = \underbrace{\text{ppois}(2,4)}_{F(2)} = \underbrace{P(X=0)}_{\text{dpois}(0,4)} + \underbrace{P(X=1)}_{\text{dpois}(1,4)} + \underbrace{P(X=2)}_{\text{dpois}(2,4)} = \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!}\right) e^{-4} \approx 0.2381$$

Aufgabe 2

In einer Anlage wird Milch in 1-Liter-Flaschen abgefüllt. Die Abfüllmenge X variiert dabei etwas: Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.01 (Liter) und der Standardabweichung 0.01.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Flasche weniger als einen Liter Milch?
b) Eine Flasche läuft über, wenn sie mit mehr also 1.05 Litern befüllt wird. Mit welcher ¨ Wahrscheinlichkeit passiert dies

keine diskrete ZV

Gegeben: X – Abfüllmenge $\quad X \sim N_{1.01,\, 0.01^2}$

$E[X] = 1.01 \text{ (Liter)} = \mu, \quad \sigma = 0.01$

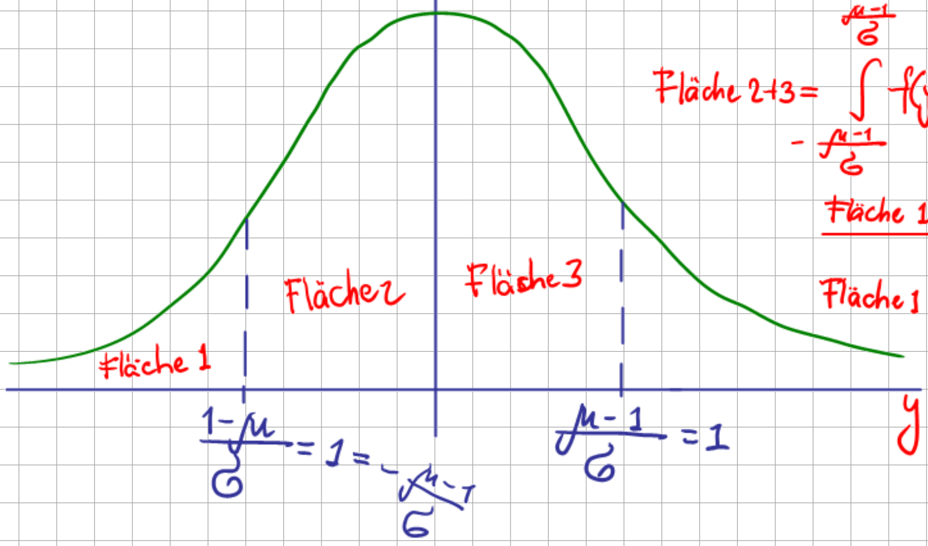
(a) **Gesucht:** $P(X < 1)$ -?

$X \sim N_{1.01,(0.01)^2} \Rightarrow \frac{X - 1.01}{0.01} \sim N_{0,1}$

$$P(X<1) = F(1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

sei $\frac{x-\mu}{\sigma} = y$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$



Fläche 2+3 = $\int_{-\frac{\mu-1}{\sigma}}^{\frac{\mu-1}{\sigma}} f(y)\,dy$ Fläche 2 == Fläche 3

Fläche 1 wird gesucht

Fläche 1 = $\underbrace{\text{Fläche 1 + Fläche 2}}_{\int_{-\infty}^{0}} - \frac{1}{2}$ Fläche 2+3

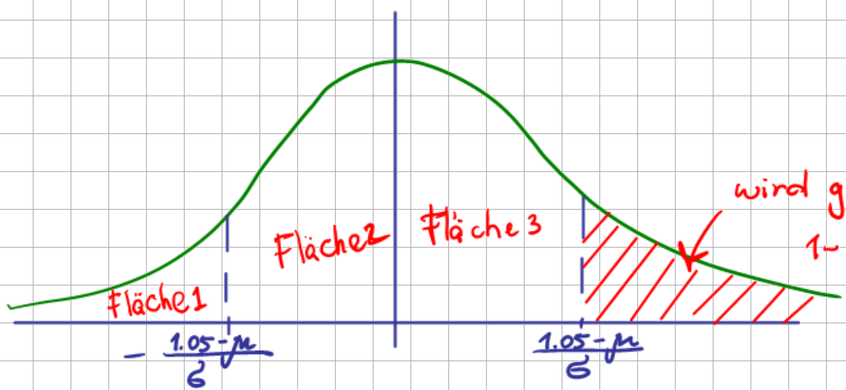
$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy}_{\substack{\Phi(0)\approx 0.5 \\ \sim\Phi(X<0)}} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu-1}{\sigma}}^{\frac{\mu-1}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy}_{\substack{\Phi\left(\frac{\mu-1}{\sigma}\right) \\ \sim\Phi(-z\le X\le z)}}$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1.01-1}{0.01}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(1) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0.6827 \approx 0.15865$$

Analog zu (a)

(b) $P(X > 1.05) = 1 - P(X \le 1.05) = 1 - F(1.05) =$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1.05-1.01}{0.01}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\Phi(4) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0.999937 \approx 0.0000315$$



wird gesucht = 1 − (Fläche (1+2) + $\frac{1}{2}$ · Fläche (2+3))

Aufgabe 3

Die Lebensdauer einer Glühbirne sei exponentiell verteilt. Sie überlebe 100 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0.9.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie 200 Stunden überlebt?
b) Wieviele Stunden überlebt sie mit 95% Wahrscheinlichkeit?

Gegeben: X ist der Zeitpunkt, wenn die Glühbirne durchbrennt

$P(X > 100) = 0.9$

(a) Gesucht: $P(X > 200)$ -?

$P(X>100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - F(100) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 100}) = e^{-\lambda \cdot 100} = 0.9$

$\Downarrow$

$-\lambda \cdot 100 = \ln 0.9 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0.9}{100} \approx 0.001054$

$P(X>200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - F(200) = 1 - (1 - e^{-0.001054 \cdot 200}) \approx e^{-0.2107} \approx 0.81$

(b) Gegeben: $P(X>t) = 0.95$, t ist Anz. der überlebenden Stunden

Gesucht: t?

$P(X>t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-0.001054 t} = 0.95$

$\Downarrow$

$-0.001054 t = \ln(0.95) \Rightarrow t \approx \frac{-0.05129}{-0.001054} \approx 48.67$ (Stunden)