Beschreibende Statistik

Modalwert(e) x_{mod}

- am häufigsten auftretende Ausprägung
- wenn mehrere: $x_{mod} \in \{1,2,5\}$

Mittelwert $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Median $x_{0.5}$

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , n\ ungerade \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & , n\ gerade \end{cases}$$

Spannweite

$$\max x_i - \min x_i$$

Stichprobenvarianz s^2

Auch für ZV möglich

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Stichprobenstandardabweichung s

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{s^2}$$

p-Quantil x_p

$$x_p = \begin{cases} x_{floor(np)+1}, & n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}), & n \cdot p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Empirische Kovarianz s_{xy}

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}\right)$$

Empirischer Korrelationskoeffizient r

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

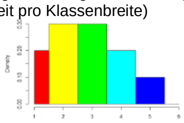
Regressionsgerade

$y = mx + t$ mit

$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$ und $t = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$

Histogramm

Flächentreue Darstellung der Häufigkeitsverteilung
Höhe = Dichte (Häufigkeit pro Klassenbreite)
Fläche =abs. Häufigkeit



Empirische Verteilungsfunktion

Klasse	Intervall	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	relative Summen-häufigkeit
i		h_i	f_i	$F_i = \sum_{k<i} f_k$
1	[1.0, 1.5[	1	0.1	0
2	[1.5, 2.5[	3	0.3	0.1
3	[2.5, 3.5[	3	0.3	0.4
4	[3.5, 4.5[	2	0.2	0.7
5	[4.5, 5.5[	1	0.1	0.9
6	[5.5, 6.0[	0	0	1
Summe		$n = 10$	1	

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

De Morgan

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{E}_i \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} E_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{E}_i$$

Axiome

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=n}^{\infty} P(E_i)$, falls $E_i \cap E_j = \emptyset\ f\ddot{u}r\ i \neq j$

$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Laplace Exeriment

Zufallsexperiment mit n gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen

$$P(E) = \frac{Anz\ der\ f\ddot{u}r\ E\ g\ddot{u}nstigen\ Ergebnisse}{Anz\ der\ m\ddot{o}glichen\ Ergebnisse} = \frac{|E|}{n}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E, wenn F eingetreten ist.

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Für $E, F \neq \emptyset$:

1. $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$
2. $P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Alle E müssen disjunkt sein. Allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass F Eintritt. Man nimmt nicht an, dass E_i eingetreten ist!

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i\ \ mit\ E_i \cap E_j = \emptyset, dann\ gilt:$$

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)$$

Vierfeldertafel

$Spezialfall: \Omega = E \cup \bar{E}$
$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \bar{E})$
$P(\bar{F}) = P(\bar{F} \cap E) + P(\bar{F} \cap \bar{E})$
$P(\bar{E}|F) = 1 - P(E|F)$
$P(E \cap F) = P(F) - P(\bar{E} \cap F) = P(E) - P(E \cap \bar{F})$
$= P(E|F) \cdot P(F) = P(F|E) \cdot P(E)$

Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man $P(F|E_i)$ kennt, nicht aber $P(E_k|F)$

$$P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Unabhängigkeit

Bedeutet nicht unbedingt kausale Unabhängigkeit!
Gilt, wenn

$$P(E|F) = P(E) \quad bzw. \quad P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

Falls E, F unabhängig, gilt auch $\bar{E}, F$ bzw. $E, \bar{F}$ bzw. $\bar{E}, \bar{F}$ unabh

Kombinatorik

Allgemeines Zählprinzip

Anzahl der Möglichkeiten, für ein k-stufiges Zufallsexperiment mit n_i Varianten im i-ten Schritt:

$$n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$$

Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge

n-maliges Ziehen **ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge**

- für n unterscheidbare Elemente:
  $n! = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1$
- für k Klassen mit je n_i nicht unterscheidbaren Elementen:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

k-maliges ziehen aus einer n-elementigen Menge

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
ohne Zurücklegen $k \le n$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Lotto 6 aus 49 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
mit Zurücklegen $k > n$ möglich	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

$TR: \binom{n}{k} = n\ nCr\ k$

Ableitungsregeln

Produktregel

$y = u \cdot v$
$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Quotientenregel

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Kettenregel

$$\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\right)' = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})$$

$$\ln(\mathbf{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{sin^2(x) + cos^2(x) = 1}$$

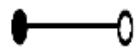
Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion F(x)

$x \in \mathbb{R}, F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = P(X \le x)$$

Eigenschaften:

- $0 \le F(x) \le 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- rechtsseitig stetig, also:
  $\lim_{x \to b+} F(x) = F(b)$ 
- monoton wachsend
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

Diskrete Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), falls\ x = x_i \in X(\Omega) \\ 0, \quad sonst \end{cases}$$

Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- $0 \le p(x) \le 1$
- $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Es gilt:

- $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$

$F(x)$ist eine rechtsseitig **stetige Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei den Realisationen x_i

$P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X < 1)$
$= Sprungh\ddot{o}he, wenn\ 1\ bei\ Sprung.sonst\ 0$

Stetige Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsdichte f(x):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsdichte:

- $f(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Es gilt:

- $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
- $F'(x) = f(x)$
- $F(x)$ ist stetig und
- $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) =$
  $P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
  $= F(b) - F(a)$

Zufallsvariablen

Erwartungswert $E[X] = \mu$

Für diskrete ZV:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

Für stetige ZV:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Sei g(X) eine Funktion der ZV X, dann gilt:
Für diskrete ZV:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot p(x_i)$$

Für stetige ZV:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$$

Eigenschaften des Erwartungswerts:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$

$$E[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Varianz σ^2

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu)^2]$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{Var[X]}$$

Verschiebungssatz:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Eigenschaften der Varianz:

- $Var[b] = 0$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
- $Var[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, X_j]$
- $Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$
- Falls X_i, X_j *paarweise unabhängig*:

$$Var[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

Kovarianz $Cov[X, Y]$

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])\ (Y - E[Y])]$$

Wenn X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow Cov[X, Y] = 0$

Verschiebungssatz:

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

Eigenschaften der Kovarianz:

- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- $Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]$

Zufallsvariablen

Quantile

Das p-Quantil ist der kleinste Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt:
$F(x_p) \ge p$

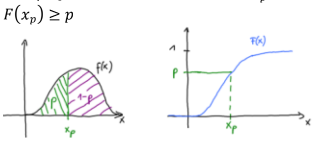


Abbildung: p-Quantil einer stetigen ZV mit streng monoton wachsendem $F(x)$:

$$x_p = F^{-1}(p)$$

Median: $F(x) = 0.5$

Chebyshev Ungleichung

$X: ZV$
$\mu = E[X]$
$\sigma^2: Var[X]$
Es gilt für jedes beliebige $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$:

$$P(|X - \mu| \ge k \cdot \sigma) \le \frac{1}{k^2}$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Mit Chebyshev und

$\mu = E[X_i]\ \ (i = 1, \ldots, n) \quad \Rightarrow \quad \mu = E\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = E[\bar{X}]$

folgt:

$X_1, X_2, \ldots$ ist eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten ZV mit EW $E[X_i] = \mu$ und Varianz $Var[X_i] = \sigma^2$.
Dann gilt für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$:

$$P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \to 0 \qquad f\ddot{u}r\ n \to \infty$$

d.h. der MW $\bar{X}$ konvergiert stochastisch gegen den EW μ.

Diskrete Verteilungen

Bernoulliverteilung $X \sim B_{1,p}$

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg.

$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$
$E[X] = p$

Binomialverteilung $X \sim B_{n,p}$

Anzahl der Erfolge bei n-maligem Ziehen mit zurücklegen.
p = Wahrscheinlichkeit f. Erfolg bei 1mal ziehen.
k = Anz. Erfolge nötig für Gesamterfolg

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1, \ldots, n\}$
$E[x] = np$
$Var[X] = np(1 - p)$
$dbinom(k, n, p) = P(X = k)$
$pbinom(k, n, p) = F(k)$
q-Quantil: $qbinom(q, n, p)$
k binomialverteilte Zufallszahlen: $rbinom(k, n, p)$

Hypergeometrische Verteilung $X \sim H_{M,N,n}$

Anz. d. Erfolge bei n-maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten und N Elementen, die Misserfolg bedeuten.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in \{0,1, \ldots, \min\{n, M\}\}$$

$$E[X] = n \cdot \frac{M}{M + N}$$

$$Var[X] = n \cdot \frac{M}{M + N}\left(1 - \frac{M}{M + N}\right)\frac{M + N - n}{M + N - 1}$$

$dhyper(k, M, N, n) = P(X = k)$
$phyper(k, M, N, n) = F(k)$

Poisson-Verteilung $X \sim P_\lambda$

Verteilung der seltenen Ereignisse. Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge λ pro Maßeinheit (i.a. Zeiteinheit) sei bekannt.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k \in \{0,1, \ldots\} mit \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$$

$E[X] = \lambda = n * p \ \Leftrightarrow 10 = p * 3600 \ \Leftrightarrow p = 1/360$
$Var[X] = \lambda$
$dpois(k, \lambda) = P(X = k)$
$ppois(k, \lambda) = F(k)$

Gleichverteilung $X \sim U_{\{x_1, \ldots, x_n\}}$

Alle Werte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ einer ZV x sind gleichwahrsch.

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}$$

$Var[x] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2$
$sample(1{:}N, n){:} n\ Zufallszahlen\ zw\ 1\ und\ N$

Stetige Verteilungen

Stetige Gleichverteilung $X \sim U_{[a,b]}$

Zufallszahlen aus einem Intervall [a,b] (Bus-H. bsp)

$$f(x) = \frac{1}{b - a}\ f\ddot{u}r\ x \in [a, b]$$

$$E[X] = \frac{a + b}{2}$$

$$Var[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

$dunif(x, a, b) = f(x)$
$punif(x, a, b) = F(x)$
$runif(n){:}\ n\ Zufallszahlen\ zw\ 0\ und\ 1$

Normalverteilung $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}$$

$E[X] = \mu$
$Var[X] = \sigma^2$
$dnorm(x, \mu, \sigma) = f(x)$
$pnorm(x, \mu, \sigma) = F(x)$
$qnorm(q, \mu, \sigma)$: q-Quantil = $F^{-1}(x)$

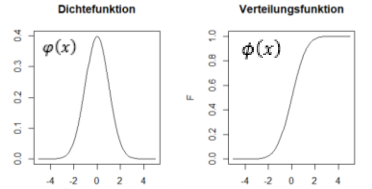
Eigenschaften:

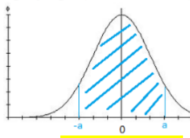
- Max von f(x) bei $x = \mu$
- Wendestellen von f(x) bei $x = \mu \pm \sigma$
- $X \sim N_{\mu,\sigma^2} \ \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu+b, a^2\sigma^2}\ und\ \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$
- $X_1 \sim N_{\mu_1,\sigma_1^2}\ und\ X_2 \sim N_{\mu_2,\sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Standardnormalverteilung $X \sim N_{0,1}$

Dichte: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}$
Verteilung: $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$
Quantile Wegen Achsensymmetrie von $\varphi(x)$ gilt:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$$





$$P(-a \le X \le a) =$$

$$P(X \le a) - P(X \le -a) = P(X \le a) - (1 - P(X \le a))$$

$$= 2P(X \le a) - 1$$

Stetige Verteilungen

Exponentialverteilung $X \sim Exp_\lambda$ (gedächtnislos)
Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten.
Sei $Y_t \sim P_{\lambda t}$ im Intervall [0,t] von t Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit X bis Eintreten eines Ereignisses $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$
$\boldsymbol{\lambda}$: Durchschnittliches Eintreten eines Ereignisses pro Zeiteinheit
x: Zeitabstand (höchstens) zw. zwei Ereignissen

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$E[X] = \frac{1}{\lambda}$
$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
$dexp(x, \lambda) = f(x)$
$pexp(x, \lambda) = F(x)$

Eigenschaft:
Gedächtnislos:
$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

Chiquadrat-Verteilung $X \sim \chi_n^2$
$Z_1, \ldots, Z_n$ seien unabhängige, **standardnormalverteilte** ZV => $X = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden.
Summen unabhängiger, standardnormalverteiler ZV
$E[X] = n$
$Var[X] = 2n$
$dchisq(x, n) = f(x)$
$pchisq(x, n) = F(x)$
Eigenschaft:
$X_1 \sim \chi_{n_1}^2 \text{ und } X_2 \sim \chi_{n_2}^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$

t-Verteilung $Y \sim t_n$
$Z \sim N_{0,1}$ und $X \sim x_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{\frac{X}{\sqrt{n}}}$ ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden
Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz.
$E[Y] = 0 \text{ für } n > 1$
$Var[Y] = \frac{n}{n-2} \text{ für } n > 2$
$dt(y, n) = f(y)$
$pt(y, n) = F(y)$
Eigenschaften:
Für $n \to \infty$: $t_n \to N_{0,1}$
Achsensymmetrie der Dichtefunktion $\Rightarrow n = x_{1-p}$

ZGWS

Wahrscheinlichkeitsaussagen über X_i, wenn Erwartungswert μ und Varianz σ^2 bekannt sind, nicht aber die Verteilung für n unabhängige identisch verteilte (i.i.d.) ZV X_i.

Für hinreichend große n gilt dann näherungsweise:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N_{n\mu, n\sigma^2} \text{ und } \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N_{0,1}$$

$$\bar{X} \sim N_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}} \text{ und } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$$

Fausregel für Größe von n:
n > 30: Verteilung ist schief aber ohne markante Ausreißer (Exponentialverteilung)
n > 15: Verteilung annähering symmetrisch (Binomialverteilung)
n <= 15: Verteilung annähernd normalverteilt

Ja nachdem, was gegeben ist, wählen:
1. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$
2. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$
3. $\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$

Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten berechnen. Übung 5.1.1 und 7.2

Es lässt sich n so bestimmen, dass zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt:
P(Zᵢ > k) >= p bzw. P(-k <= Zᵢ <= k) >= p
Übung 7.1 und 7.3

Die Stichprobenfunktion ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Erwartungswert μ d.h. $E[\bar{X}] = \mu$

Die Stichprobenfunktion S^2 ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2, d.h. $E[S^2] = \sigma^2$

Parameterschätzung

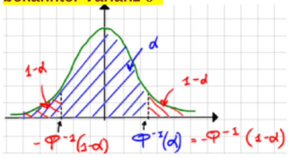
Unbekannter Parameter (z.B. Erwartungswert μ) der Verteilung der Grundgesamtheit soll basierend auf i.i.d Zufallsvariablen geschätzt werden.

Punktschätzer:
für Erwartungswert: Stichprobenmittel $\bar{X}$
für Varianz: Stickprobenvarianz S^2

Keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung.

Intervallschätzer:
Parameter wird mit vorgegebener Sicherheit (Konfidenzniveau $1 - \alpha$) überdeckt.
$\boldsymbol{\alpha}$: Irrtungswahrscheinlichkeit (meist 1-5%)

Konfidenzintervall f. unbekannten EW μ bei bekannter Varianz σ^2



$$I =]\, \bar{X} - \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, ;\, \bar{X} + \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, [$$

$\phi^{-1}(x) = qnorm(x, 0, 1)$

Länge Konfidenzintervall:

$$L = 2\phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Gesucht: **Stichprobenumfang n**

$$\sqrt{n} > 2\phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{L}$$

Gesucht: **Konfidenzniveau $1 - \alpha$**

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \phi\left(\frac{L\sqrt{n}}{2\sigma}\right)$$

Konfidenzintervall f. unbekannten EW μ bei unkekannter Varianz σ^2

$$I =]\, \bar{X} - t_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}\, ;\, \bar{X} + t_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}\, [$$

mit S = Stichprobenvarianz

$t_{n-1}^{-1} = qt(x, n-1)$

Hypothesentests

Entscheidung treffen, ob eine Hypothese für unbekannten Parameter einer Verteilung gültig ist, oder nicht. Bei n i.i.d. Zufallsvariablen.
Nullhypothese H₀: Angezweifelte Aussage, der nicht widersprochen werden kann, wenn Stichprobe keinen Gegenbeweis liefert. z.B. $\mu = \mu_0$
Gegenhypothese H₁: Gegenteil von H₀ z.B. $\mu \neq \mu_0$

TG: Testgröße. z.B. Mittelwert
Kritischer Bereich C:
- Werte von TG, die für H₁ sprechen
- Wenn H₀ gültig ist, treten diese Werte mit Wahrscheinlichkeit $\leq \alpha$ auf (**Signifikanzniveau**).
- $\boldsymbol{\alpha}$: Wahrscheinlichkeit, dass H0 verworfen wird, obwohl richtig => Fehler 1. Art

Fehler 1. Art: H₀ wird verworfen, obwohl richtig
Fehler 2. Art: H₀ wird angenommen, obwohl falsch

	Testentscheidung	
Realität	H_0 wird angenommen.	H_0 wird abgelehnt.
H_0 ist wahr.	richtig	Fehler 1. Art
H_0 ist falsch.	Fehler 2. Art	richtig

- Durch das vorgegebene Signifikanzniveau wird versucht Fehler 1. Art klein zu halten
- Beide Fehler können nicht gleichzeitig kontrolliert werden
- Fehler 2. Art nicht kontrollierbar, wenn man μ_0 nicht kennt

Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art mit standartisierter Testgröße TG^*:

$$P(TG \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)]$$

Wird H₀ verworfen => **signifikante Schlußfolgerung**
Wird H₀ nicht verworfen => es lässt sich keine Schlußfolgerung über Fehler 2. Art treffen, eine **schwache Schlußfolgerung**.

Hypothesentests

Gauß-Test
Test für Erwartungswert einer Normalverteilung bei **bekannter Varianz σ_0^2**

H_0	H_1	Testgröße TG	H_0 ablehnen, falls	p-Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert}{\sigma_0}\sqrt{n}$	$tg > \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - \Phi(tg))$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$	$tg > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$	$1 - \Phi(tg)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$	$tg < \Phi^{-1}(\alpha)$	$\Phi(tg)$

t-Test
Test für Erwartungswert einer Normalverteilung bei **unbekannter Varianz**

H_0	H_1	Testgröße TG	H_0 ablehnen, falls	p-Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert}{S}\sqrt{n}$	$tg > t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - t_{n-1}(tg))$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$	$tg > t_{n-1}^{-1}(1 - \alpha)$	$1 - t_{n-1}(tg)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$	$tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$	$t_{n-1}(tg)$

p-Wert
„beobachtetes Signifikanzniveau.“
- Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von H₀ den beobachteten Wert tg der Testgröße oder einen noch stärker von μ_0 abweichenden Wert zu bekommen.
- Berechnung, ab welchem Signifikanzniveau sich eine Testeintscheidung ändern würde
- Größter Wert von α, für den H₀ nicht abgelehnt wird
- Wenn H₀ abgelehnt wird, ist das Ergebnis immer signifikant!
- p-Wert <0,01: sehr hohe Signifikanz
- p-Wert <0,05: hohe Signifikanz
- p-Wert <0,1: schwache Signifikanz
- p-Wert >0,1: keine Signifikanz

Zusammenhang Konfidenzintervall – Hypothesentest
Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\mathbf{1 - \alpha}$ ist Annahmebereich für H₀
Test:
H0 wird abgelehnt, falls $\mu_0 \notin I$
H0 wird angenommen, falls $\mu_0 \in I$

Numerik/Fehleranalyse

Fehlerquellen:
- Rundungsfehler
- Fehler aufgrund vn Gleitpunktarithmetik
- Diskretisierungsfehler

Rundungsfehler:
- absolut: | gerundetes Ergebnis – tatsächliches |
- relativ: $\frac{|r\, d(x) - x|}{|x|}$ => größenordnungsbereinigt

Gleitpunktarithmetik
Berechnungsreihenfolge spielt eine Rolle!
Bei Addition in aufsteigender Reihenfolge, da sonst signifikante Stellen verloren gehen können.

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{10-1} \frac{1}{10-k}$$

Auslöschung
Entsteht bei der Subtraktion von zwei fast gleich großen Zahlen.
$3.97403 * 10^2 - 3.97276 * 10^2 = 1.27000 * 10^{-1}$
Erhöhung der Signifikanz weniger signifikanter Stellen

$$x^2 + 200x - 0.000015$$

$$(1)\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2) x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

x₁ mit (2) und x₂ mit (1) um Auslöschung zu vermeiden. Weil b > 0

Trick, Erweitern mit 3. binomischen Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot 2a}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot 2a}$$
$$= \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Kondition

$$\frac{\Delta f}{f(x)} \approx \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

$\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$ Konditionszahl $\kappa_f(x)$

Der Verstärkungsfaktor des relativen Fehlers $\frac{\Delta x}{x}$ in den Eingaben heißt Konditionszahl $\kappa_f(x)$

1. Die Kondition eines Problems ist abhängig von x und f
2. Man spricht von schlechter Kondition, wenn $\kappa_f(x) \gg 1$ (Fausregel, falls $K(x) > 10^2$)
3. Falls ein Problem schlecht konditioniert ist, dann gibt es keinen numerisch günstigen Algorithmus zur Lösung des Problems

Stabilität
Ein numerisches Verfahren, das Fehler in den Eingangsdaten bei einem gut konditionierten Problem nicht verstärkt, heißt stabil.

Interpolation

Polynom durch bestimmte Punkte bilden.

Vandermonde Ansatz

Beispiel:

x	-2	3	1
y	-15	-5	3

Ansatz: Polynom 2. Grades
$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & a_0 - 2a_1 + 4a_2 = -15 \\ \text{II} & a_0 + 3a_1 + 9a_2 = -5 \\ \text{III} & a_0 + a_1 + a_2 = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung mit Gauß-Algorithmus: $a_0 = 1,\ a_1 = 4,\ a_2 = -2$
$\Rightarrow p_2(x) = \underline{1 + 4x - 2x^2}$

Lagrange Ansatz

Beispiel:

x	-2	3	1
y	-15	-5	3

Ansatz $p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$
Polynom 2. grades gebildet aus den Stützstellen

$$L_0(x) = \prod_{j=1, j\neq 0}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{\overset{j=1}{(x-3)}\overset{j=2}{(x-1)}}{(-2-3)(-2-1)} = \frac{1}{15}(x-3)(x-1)$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x-(-2))(x-1)}{(3-(-2))(3-1)} = \frac{1}{10}(x+2)(x-1)$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0, j\neq 2}^{1} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x-(-2))(x-3)}{(1-(-2))(1-3)} = -\frac{1}{6}(x+2)(x-3)$$

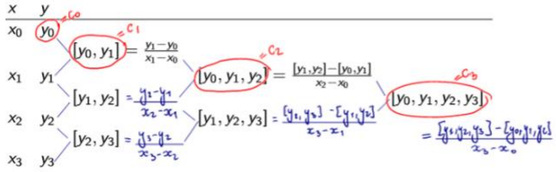
$$p_2(x) = 15 \cdot \frac{1}{15}(x-3)(x-1) + (-5)\frac{1}{10}(x+2)(x-1) + 3\left(-\frac{1}{6}\right)(x+2)(x-3)$$

Newton Ansatz
$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

Interpolationsbedingungen:

$y_0 = c_0$
$y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$
$y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$
$y_3 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

…mit dividierten Differenzen



Horner Schema
$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$

Chebyshev-Punkte
Nicht-äquidistante Stützstellen, die an den Intervallgrenzen dichter sind. So wird Konvergenz erreicht.

Spline-Interpolation
Ansatz um Oszillationen zu vermeiden.
Hinreichend glatte ((k-1)-mal stetig differenzierbare), stückweise zusammengesetzte Polynome, dog. Splines vom Grad k.
Ein kubischer Spline ist eine Funktion $S : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, die auf den Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ zweimal stetig differenzierbar und stückweise aus kubischen Polynomen $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ zusammengesetzt ist.

Spline Eigenschaften:
Stetigkeit zwischen den Abschnitten
Stetigkeit zwisachen den 1. Ableitungen
Stetigkeit zwischen den 2. Ableitungen
2 Randbedingungen: $s_0''(x_0) = 0$, $s_{n-1}''(x_n) = 0$

Numerische Integration

Nicht integrierbarer Integrand wird durch integrierbaren Integranden ersetzt.

Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Simpson Regel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Newton Cotes Regeln
Basieren auf äquidistanten Knoten $t_j = \frac{j}{k}$
Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad <= p-1 exakte Werte liefert.
Punkte immer normieren!

k	α_i					Methode	Ordnung p
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapez	2
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson	4
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$-Rule	4
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne	6

Ordnung der Newton-Cotes Regeln: k+1 (Anz. Knotn)

Ordnung einer Regel Nachweisen
siehe Links unter p-Wert!

Zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx H\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

mit $H = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

Höhere Genauigkeit, aber mehr Fktionsauswertungen

Zusamengesetzte Simpson Regel (für n = 2)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{H}{6}\left(f(a) + 4f\left(a + \frac{H}{2}\right) + 2f(a+H) + 4f\left(a + 3\frac{H}{2}\right) + f(b)\right)$$

mit $H = x_i - x_{i-1}$

Fehler der Summenformeln
Fehler ist proportional zu H^2
Ein Integral kann beliebig genau approximiert werden, wenn H entsprechend klein gewählt wird.
Voraussetzung: f ist hinreichend glatt. d.h. z.B. bei Trapezregel zweimal stetig differenzierbar)

Grenzen der Newton Cotes Regeln
Einfache Verfahren, aber
- Bei Verwendung vieler äquidistanter Knoten treten die bekannten Probleme von Interpolationspolynomen höheren Grades auf.
  $\Longrightarrow$ Gewichte werden negativ, also Verfahren instabil
- Die sog. geschlossenen Newton-Cotes-Regeln machen Funktionsauswetungen an den Grenzen des Intervalls erforderlich.
  $\Longrightarrow$ Problem mit Singularitäten
- Die Newton-Cotes-Regeln erreichen aufgrund der äquidistanten Knoten nicht die größtmögliche Ordnung.

Gauß Quadratur vermeidet diese Probleme
Nur positive Gewichte

k	α_j			t_j			Ordnung
0	1			$\frac{1}{2}$			2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$		4
2	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	6

Gauß-Lobatto Quadraturformeln
Zusätzl Bedingung: $t_0 = 0$, $t_k = 1$

k	α_i					t_i					Ord.
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				0	1				2
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			0	$\frac{1}{2}$	1			4
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$		0	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$	1		6
4	$\frac{9}{180}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{64}{180}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{9}{180}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}$	1	8

Unstetige Funktionen dürfen nicht numerisch integriert werden

TODO:

- Winkelfunktionen
- Ableitung und Integral Regeln
- Viele Bilder für Verteilungen usw.

Beispielaufgaben:

Beispiel 3.3.4 im Skript

Ü5 1. und 3. (1. **FEHLT**!!!!!!)
Ü5 Lösungsansatz Verschiebungssatz
Klausur 1c

Ü6: 2.
Ü6: 4. b) (Quantile) und c)
Ü6: 5.
Beispiele im Skript Kapitel Verteilungen
Test zu Verteilungen 1.
Test zu Verteilungen 2. Skizzen
Test zu Verteilungen 3. Chiquadrat
(Test zu Verteilungen 5.) (**FEHLT**!!!!!!)

Ü7 komplett

Ü10 Gleitpunktarithmetik Beispiel
Beispiel Kondition
Beispiel Stabilität

Beispiele für Interpolation und Numerische Integration
Klausur Horner Beispiel

Ü10/11/12 Verständnisfragen
Ü12 3.