Verteilungen

Diskrete

- **Bernoulliverteilung** : $X \sim B_{1,p}$

$X \in \{1;0\}$

$E[X] = p$

$Var[X] = p(1-p)$

$P(X=1) = p \quad \wedge \quad P(X=0) = 1-p$

- **Binomialverteilung** : $X \sim B_{n,p}$

Anz der Erfolge beim n-maligen Ziehen mit Zurücklegen

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k \leq n, k \in \mathbb{N}_0$

$E[X] = np$

$Var[X] = Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] \overset{X_i \text{ sind unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] =$

$n \, Var[X_i] = n \, p \, (1-p)$

dbinom $(k, n, p) = P(X=k)$

pbinom $(k, n, p) = F(k)$

qbinom $(q, n, p) = x_q$

rbinom (k, n, p) k^{te} binomverteilte Z-Zahl

- **Hypergeometrische Verteilung** : $X \sim H_{M,N,n}$

n mal (ohne Zurücklegen)

M Elementen mit Erfolg

N Elementen ohne Erfolg

$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in [0; \min(n, M)], k \in \mathbb{N}_0$

$E[X] = n \frac{M}{M+N}$

$Var[X] = n \frac{M}{M+N} \left(1 - \frac{M}{M+N}\right) \frac{M+N-n}{M+N-1}$

dhyper $(k, M, N, n) = P(X=k)$

phyper $(k, M, N, n) = F(k)$

- **Poisson-Verteilung**: $X \sim P_\lambda$

P(X) in Zeit $\in \Delta t$ ist bekannt

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \Delta t}$

$E[X] = Var[X] = \lambda$

dpois $(k, \lambda) = P(X=k)$

ppois $(k, \lambda) = F(k)$

Stetige

- **Normalverteilung** : $X \sim N_{\mu, \sigma^2}$

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$E[X] = \mu \;, \quad Var[X] = \sigma^2$

$\max(f(x)) = \mu$

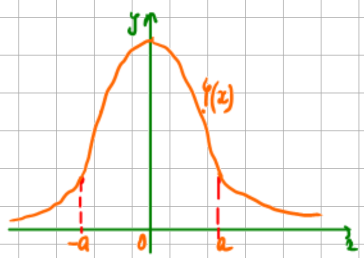
Wendepunkte : $x = \mu \pm \sigma$

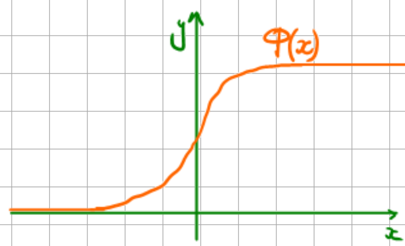
$X \sim N_{\mu, \sigma^2} \Rightarrow \begin{cases} aX + b \sim N_{a\mu + b, a^2\sigma^2} \\ X \sim N_{0,1} \end{cases}$

$\begin{cases} X_1 \sim N_{\mu_1, \sigma_1^2} \\ X_2 \sim N_{\mu_2, \sigma_2^2} \end{cases} \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Fall : Standardnormalverteilung

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$





$\varphi(-x) = 1 - \varphi(x) \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$

$P(-a \leq X \leq a) = 2P(X \leq a) - 1$

$P(X \geq a) = P(X \leq -a) = 1 - P(-a \leq X \leq a)$

dnorm $(x, \mu, \sigma) = f(x)$

pnorm $(x, \mu, \sigma) = F(x)$

qnorm $(q, \mu, \sigma) = x_q$

- **Exponenzialverteilung** : $X \sim Exp_\lambda$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

dexp $(x, \lambda) = f(x)$

pexp $(x, \lambda) = F(x)$

• **Gleichverteilung:** $X \sim U_{\{x_1, x_2, \dots x_n\}}$

alle Werte sind gleichwahrscheinlich

$P(X = x_k) = \frac{1}{n}$, n - Anz. der El-ten

$E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}$

$Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \bar{x}^2$

sample (1 : N, n) n - Anz ZV-len zwischen 1 und N

• **Gleichverteilung:** $X \sim U_{[a,b]}$

$ZV \in [a; b]$

$f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a; b]$

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} =$$

$$\frac{\cancel{(b-a)}(b^2 + ab + b^2)}{3\cancel{(b-a)}} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4b^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} =$$

$$\frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

dunif (x, a, b) = f(x)

punif (x, a, b) = F(x)

runif (n) : n Z-Zahlen zwischen (0; 1)

• **Chi-Quadrat-Verteilung:** $X \sim \chi^2_n$

n unabhängige ZV-len, $Z_i \sim N_{0,1}$, $i \in [1; n]$

$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$

$E[X] = n$ $\quad Var[X] = 2n$

$$\begin{cases} X_1 \sim \chi^2_{n_1} \\ X_2 \sim \chi^2_{n_2} \end{cases} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n_1 + n_2}$$

dchisq(x, n) = f(x)

pchisq(x, n) = F(x)

• **t-Verteilung:** $Y \sim t_n$

$$\begin{cases} Z \sim N_{0,1} \\ X \sim \chi^2_n \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{Z}{\frac{X}{\sqrt{n}}}$$ ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden

$E[Y] = 0$, $n > 1$

$Var[Y] = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$

$n \to \infty \Rightarrow t_n \sim N_{0,1}$

$-x_p = x_{1-p}$

dt (y, n) = f(y)

pt (y, n) = F(y)