|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Beschreibende Statistik Modalwert(e) xmod   * am häufigsten auftretende Ausprägung   Mittelwert  Median x0.5  Spannweite  Stichprobenvarianz s2  Auch für ZV möglich  Stichprobenstandardabweichung s  p-Quantil xp  Empirische Kovarianz sxy  Empirischer Korrelationskoeffizient r  Regressionsgerade  mit  und  **Histogramm**  Flächentreue Darstellung der Häufigkeitsverteilung  Höhe = Dichte (Häufigkeit pro Klassenbreite)  Fläche =abs. Häufigkeit  Empirische Verteilungsfunktion | Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung **De Morgan**  ***Axiome***   1. , falls   **Laplace Exmeriment**  Zufallsexperiment mit n gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen  **Bedingte Wahrscheinlichkeit**  Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E, wenn F eingetreten ist.  Für :  **Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**  Alle E müssen disjunkt sein. Allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass F Eintritt. Man nimmt nicht an, dass Ei eingetreten ist!  **Vierfeldertafel**  **Formel von Bayes**  Hilfreich, wenn man Pkennt, nicht aber P  P  **Unabhängigkeit**  Bedeutet nicht unbedingt kausale Unabhängigkeit!  Gilt, wenn  Falls E, F unabhängig, gilt auch bzw. unabh | Kombinatorik **Allgemeines Zählprinzip**  Anzahl der Möglichkeiten, für ein k-stufiges Zufallsexperiment mit ni Varianten im i-ten Schritt:  **Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge**  n-maliges Ziehen **ohne Zurücklegen** **mit Beachtung der Reihenfolge**   * für n unterscheidbare Elemente: * für k Klassen mit je ni nicht unterscheidbaren Elementen:   k-maliges ziehen  **aus einer**  **n-elementigen Menge**   Ableitungsregeln **Produktregel**  **Quotientenregel**  **Kettenregel**  **Lotto 6 aus 49** | Zufallsvariablen Verteilungsfunktion F(x)  ,  Eigenschaften:   * rechtsseitig stetig, also: * monoton wachsend   Diskrete Zufallsvariablen  Wahrscheinlichkeitsverteilung:  *Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsverteilung:*  Es gilt:  ist eine rechtsseitig **stetige Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei den Realisationen xi  Stetige Zufallsvariablen  Wahrscheinlichkeitsdichte f(x):  Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsdichte:  Es gilt:   * ist stetig und |
| Zufallsvariablen Erwartungswert  Für diskrete ZV:  Für stetige ZV:  Sei g(X) eine Funktion der ZV X, dann gilt:  Für diskrete ZV:  Für stetige ZV:  Eigenschaften des Erwartungswerts:  Varianz  Standardabweichung:  Verschiebungssatz:  Eigenschaften der Varianz:   * Falls Xi, Xj *paarweise unabhängig*:   Kovarianz  Wenn X, Y stochastisch unabhängig  Verschiebungssatz:  Eigenschaften der Kovarianz: | Zufallsvariablen Quantile  Das p-Quantil ist der kleinste Wert für den gilt:    Abbildung: p-Quantil einer stetigen ZV mit streng monoton wachsendem :  *Median*:  Chebyshev Ungleichung  Es gilt für jedes beliebige :  Schwaches Gesetz der großen Zahlen  Mit Chebyshev und  folgt:  ist eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten ZV mit EW und Varianz .  Dann gilt für ein beliebig kleines :  d.h. der MW konvergiert stochastisch gegen den EW . | Diskrete Verteilungen Bernoulliverteilung  Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg.  Binomialverteilung  Anzahl der Erfolge bei n-maligem Ziehen mit zurücklegen.  p = Wahrscheinlichkeit f. Erfolg bei 1mal ziehen.  k = Anz. Erfolge nötig für Gesamterfolg  *q-Quantil*:  *k binomialverteilte Zufallszahlen:*  Hypergeometrische Verteilung  Anz. d. Erfolge bei n-maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten und N Elementen, die Misserfolg bedeuten.  Poisson-Verteilung  Verteilung der seltenen Ereignisse. Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge pro Maßeinheit (i.a. Zeiteinheit) sei bekannt.  Gleichverteilung  Alle Werte einer ZV x sind gleichwahrsch. | Stetige Verteilungen Stetige Gleichverteilung  Zufallszahlen aus einem Intervall [a,b] (Bus-H. bsp)  Normalverteilung  : q-Quantil =  Eigenschaften:   * Max von f(x) bei * Wendestellen von f(x) bei * *+*   Standardnormalverteilung  Dichte:  Verteilung:  Quantile Wegen Achsensymmetrie von gilt: |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Stetige Verteilungen Exponentialverteilung (gedächtnislos)  Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten.  Sei im Intervall [0,t] von t Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit X bis Eintreten eines Ereignisses  : Durchschnittliches Eintreten eines Ereignisses pro Zeiteinheit  **x**: Zeitabstand (höchstens) zw. zwei Ereignissen  Eigenschaft:  Gedächtnislos:  Chiquadrat-Verteilung  seien unabhängige, **standardnormalverteilte** ZV => hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden.  Summen unabhängiger, standardnormalverteiler ZV  Eigenschaft:  t-Verteilung Y  und ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden  Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz.  Eigenschaften:  Für  Achsensymmetrie der Dichtefunktion | ZGWS Wahrscheinlichkeitsaussagen über , wenn Erwartungswert und Varianz bekannt sind, nicht aber die Verteilung für n unabhängige identisch verteilte (i.i.d.) ZV .  Für hinreichend große n gilt dann näherungsweise:  Fausregel für Größe von n:  n > 30: Verteilung ist schief aber ohne markante Ausreißer (Exponentialverteilung)  n > 15: Verteilung annäherng symmetrisch (Binomialverteilung)  n <= 15: Verteilung annähernd normalverteilt  Ja nachdem, was gegeben ist, wählen: | Parameterschätzung Unbekannter Parameter (z.B. Erwartungswert ) der Verteilung der Grundgesamtheit soll basierend auf i.i.d Zufallsvariablen geschätzt werden.  Punktschätzer:  für Erwartungswert: Stichprobenmittel  für Varianz: Stickprobenvarianz  Keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung.  Intervallschätzer:  Parameter wird mit vorgegebener Sicherheit (Konfidenzniveau ) überdeckt.  : Irrtungswahrscheinlichkeit (meist 1-5%)  Konfidenzintervall f. unbekannten EW bei bekannter Varianz  **Länge** Konfidenzintervall:  Gesucht: **Stichprobenumfang n**  Gesucht: **Konfidenzniveau**  Konfidenzintervall f. unbekannten EW bei unkekannter Varianz | Hypothesentests Entscheidung treffen, ob eine Hypothese für unbekannten Parameter einer Verteilung gültig ist, oder nicht. Bei n i.i.d. Zufallsvariablen.  **Nullhypothese H0**: Angezweifelte Aussage, der nicht widersprochen werden kann, wenn Stichprobe keinen Gegenbeweis liefert. z.B.  **Gegenhypothese H1**: Gegenteil von H0 z.B.  TG: Testgröße. z.B. Mittelwert  Kritischer Bereich C:  - Werte von TG, die für H1 sprechen  - Wenn H0 gültig ist, treten diese Werte mit Wahrscheinlichkeit auf (**Signifikanzniveau**).  - : Wahrscheinlichkeit, dass H0 verworfen wird, obwohl richtig => Fehler 1. Art  **Fehler 1. Art**: H0 wird verworfen, obwohl richtig  **Fehler 2. Art**: H0 wird angenommen, obwohl falsch     * Durch das vorgegebene Signifikanzniveau wird versucht Fehler 1. Art klein zu halten * Beide Fehler können nicht gleichzeitig kontrolliert werden * Fehler 2. Art nicht kontrollierbar, wenn man nicht kennt   Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art mit standartisierter Testgröße :  *Wird H0 verworfen* => **signifikante Schlußfolgerung**  *Wird H0 nicht verworfen* => es lässt sich keine Schlußfolgerung über Fehler 2. Art treffen, eine **schwache Schlußfolgerung**. |
| Hypothesentests Gauß-Test  Test für Erwartungswert einer Normalverteilung bei **bekannter Varianz**    t-Test  Test für Erwartungswert einer Normalverteilung bei **unbekannter Varianz**    p-Wert  „beobachtetes Signifikanzniveau.“   * Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von H0 den beobachteten Wert tg der Testgröße oder einen noch stärker von abweichenden Wert zu bekommen. * Größter Wert von , für den H0 nicht abgelehnt wird * Wenn H0 abgelehnt wird, ist das Ergebnis immer signifikant! * p-Wert <0,01: sehr hohe Signifikanz * p-Wert <0,05: hohe Signifikanz * p-Wert <0,1: schwache Signifikanz * p-Wert >0,1: keine Signifikanz   Zusammenhang Konfidenzintervall – Hypothesentest  Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau ist Annahmebereich für H0  Test:  H0 wird abgelehnt, falls  H0 wird angenommen, falls | Numerik/Fehleranalyse Fehlerquellen:   * Rundungsfehler * Fehler aufgrund vn Gleitpunktarithmetik * Diskretisierungsfehler   **Rundungsfehler**:   * absolut: | gerundetes Eregbnis – tatsächliches | * relativ: => größenordnungsbereinigt   Gleitpunktarithmetik  Berechnungsreihenfolge spielt eine Rolle!  Bei Addition in aufsteigender Reihenfolge.  Auslöschung  Entsteht bei der Subtraktion von zwei fast gleich großen Zahlen.  Erhöhung der Signifikanz weniger signifikanter Stellen  x1 mit (2) und x2 mit (1) um Auslöschung zu vermeiden. Weil b > 0  Trick, Erweitern mit 3. binomischen Formel:  Kondition  Konditionszahl  Der Verstärkungsfaktor des relativen Fehlers in den Eingaben heißt Konditionszahl   1. Die Kondition eines Problems ist abhängig von x und f 2. Man spricht von schlechter Kondition, wenn (Fausregel, falls K(x) > 102 ) 3. Falls ein Problem schlecht konditioniert ist, dann gibt es keinen numerisch günstigen Algorithmus zur Lösung des Problems   Stabilität  Ein numerisches Verfahren, das Fehler in den Eingangsdaten bei einem gut konditionierten Problem nicht verstärkt, heißt stabil. | Interpolation Polynom durch bestimmte Punkte bilden.  Vandermonde Ansatz    Lagrange Ansatz    Newton Ansatz    …mit dividierten Differenzen  Horner Schema    Chebyshev-Punkte  Nicht-äquidistante Stützstellen, die an den Intervallgrenzen dichter sind. So wird Konvergenz erreicht.  Spline-Interpolation  Ansatz um Oszillationen zu vermeiden.  Hinreichend glatte ((k-1)-mal stetig differenzierbare), stückweise zusammengesetzte Polynome, dog. Splines vom Grad k.    **Spline Eigenschaften:**  Stetigkeit zwischen den Abschnitten  Stetigkeit zwisachen den 1. Ableitungen  Stetigkeit zwischen den 2. Ableitungen  2 Randbedingungen: s0‘‘(x0)=0, sn-1‘‘(xn)=0 | Numerische Integration Nicht integrierbarer Integrand wird durch integrierbaren Integranden ersetzt.  Trapezregel  Simpson Regel  Newton Cotes Regeln  Basieren auf äquidistanten Knoten  Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad <= p-1 exakte Werte liefert.  **Punkte immer normieren!**    Ordnung der Newton-Cotes Regeln: k+1 (Anz. Knotn)  Ordnung einer Regel Nachweisen  TODO: Beispiel aus Übung  Zusammengesetzte Trapezregel    Höhere Genauigkeit, aber mehr Fktionsauswertungen  Zusamengesetzte Simpson Regel (für n = 2)    Fehler der Summenformeln  Fehler ist proportional zu H2  Ein Integral kann beliebig genau approximiert werden, wenn H entsprechend klein gewählt wird.  Voraussetzung: f ist hinreichend glatt. d.h. z.B. bei Trapezregel zweimal stetig differenzierbar)  Grenzen der Newton Cotes Regeln    Gauß Quadratur vermeidet diese Probleme  Nur positive Gewichte    Gauß-Lobatto Quadraturformeln  Zusätzl Bedingung: t0 = 0, tk = 1    Unstetige Funktionen dürfen nicht numerisch integriert werden |

TODO:

* Winkelfunktionen
* Ableitung und Integral Regeln
* Viele Bilder für Verteilungen usw.
* Mitternachtsformel

Beispielaufgaben:

Ü6: 2.

Ü6: 3. b) (Quantile) und c)

Ü7 komplett

Ü5 Lösungsansatz Verschiebungssatz

Beispiel 3.3.4 im Skript

Beispiele im Skript Kapitel Verteilungen

Beispiele für Interpolation und Numerische Integration

Beispiel Kondition

Beispiel Stabilität

Übung Gleitpunktaruthmetik Beispiel