Aproksymacja profilu wysokościowego

Sebastian Kwaśniak

2024-05-15

Wstęp

W ramach projektu wymagane jest zaimplementowanie dwóch sposobów aproksymacji interpolacyjnej do profilów wysokościowych. Metody te to: wykorzystująca wielomian Lagrange'a, oraz funkcje składane trzeciego stopnia.

Metoda Lagrange zwraca te same wyniki jak metoda Vandermonde, jednak nie musimy rozwiązywać układu równań liniowych. Metoda krzywych sklejanych trzeciego stopnia sprowadza się do rozwiązania układu równań. Do rozwiązania układu równań, zgodnie z zalecniem z wykładu, wykorzystamy metodę LU.

Dane

Dane zostały pobrane z serwisu OpenStreetMap i wyeksportowane za pomocą programu QGIS.

- Trasa 1 - trasa w miarę prosta, lekko poszarpana
- Trasa 2 - poszarpana
- Trasa 3 - jedno wzniesienie

Metoda Lagrange

Funkcja F ma postać(1)

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \phi_i(x)$$

gdzie

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0 \land j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

jest bazą Lagrange'a.

Metoda krzywych sklejanych trzeciego stopnia

Funkcja F ma postać(2)

$$F(x) = S_i(x); x \in [x_i, x_{i+1}]$$

czyli szereg połączonych wielomianów S_i(x) takich, że $\deg(S_i) = 3$. W celu uzyskania układów równań, z których pozyskamy współczynniki S_i(x) przyjmujemy założenia:

$$S_i(x_i) = y_i$$
$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$S'_{j-1}(x_i) = S'_j(x_i); x = 1..n-1$$
$$S''_{j-1}(x_i) = S''_j(x_i); x = 1..n-1$$
$$S''_0(x_0) = 0$$
$$S''_0(x_n) = 0$$

Znalezienie wielomianów S sprowadza się do rozwiązania powyższego układu równań. Można z powyższych układów wyprowadzić wzory na b oraz d w zależności od c, a następnie rozwiązać cały układ równań dla wektora $c = [c_0, ..., c_{n-1}]$.

W kodzie zaimplementowane jest to w następujący sposób:

```
from numpy import linspace
from lu import lu_solve

def splines(X, Y, num_interpolation=15, num_evaluated=1000, indexes=None):
    if indexes is None:
        indexes = [int(i) for i in linspace(0, len(X) - 1, num_interpolation)]
    n = len(indexes)
    a = [Y[ix] for ix in indexes]
    b = []
    d = []
    h = [X[indexes[i+1]] - X[indexes[i]] for i in range(n-1)]
    A = [[0 for _ in range(n)] for _ in range(n)]
    vec = [[0] for _ in range(n)]
    for i in range(1, n-1):
        A[i][i] = 2 * (h[i-1] + h[i])
        A[i][i-1] = h[i-1]
        A[i][i+1] = h[i]
        vec[i][0] = 3 * ((Y[indexes[i+1]] - Y[indexes[i]])/h[i] - \
                         (Y[indexes[i]] - Y[indexes[i-1]])/h[i-1])
    A[0][0] = 1
    A[n-1][n-1] = 1
    c = lu_solve(A, vec)
    for i in range(n-1):
        d.append((c[i+1] - c[i])/(3 * h[i]))
        b.append((Y[indexes[i+1]] - Y[indexes[i]])/h[i] - h[i]/3 * (2 * c[i] + c[i+1]))
    b.append(0)
    d.append(0)
    def F(x):
        ix = n-1
        for ix_num in range(len(indexes) - 1):
            if X[indexes[ix_num]] <= x < X[indexes[ix_num + 1]]:
                ix = ix_num
                break
        h = x-X[indexes[ix]]
        return a[ix] + b[ix] * h + c[ix] * h**2 + d[ix] * h ** 3
    interpolated_X = list(linspace(X[0], X[-1], num_evaluated))
    interpolated_Y = [F(x) for x in interpolated_X]
    return interpolated_X, interpolated_Y, indexes
```

Pierwiastki wielomianu Czebyszewa

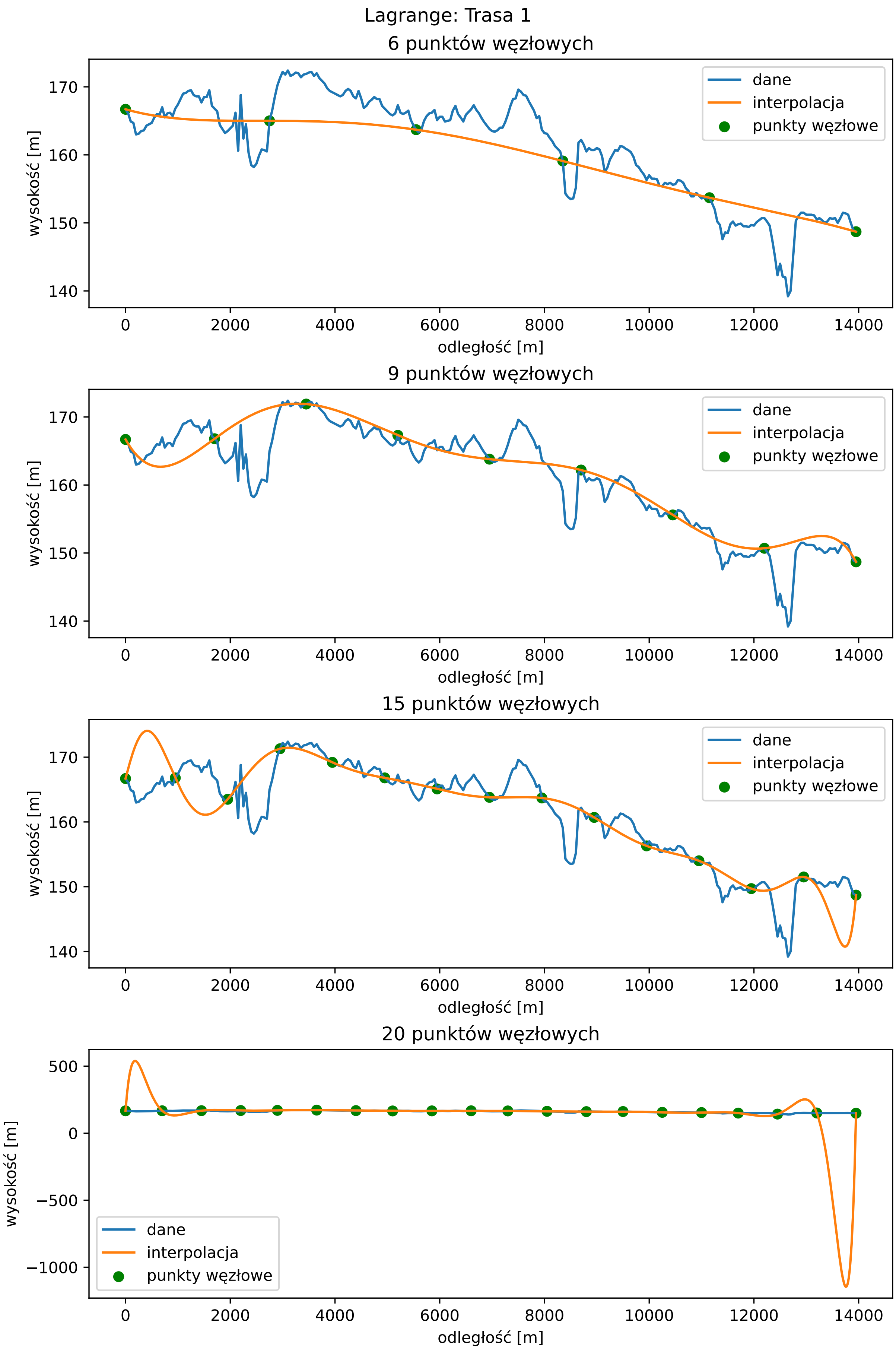
W trakcie pisania wykorzystane będzie także z węzłów Czebyszewa, żeby zminimalizować efekt Rungego. Pierwiastki te są w postaci:

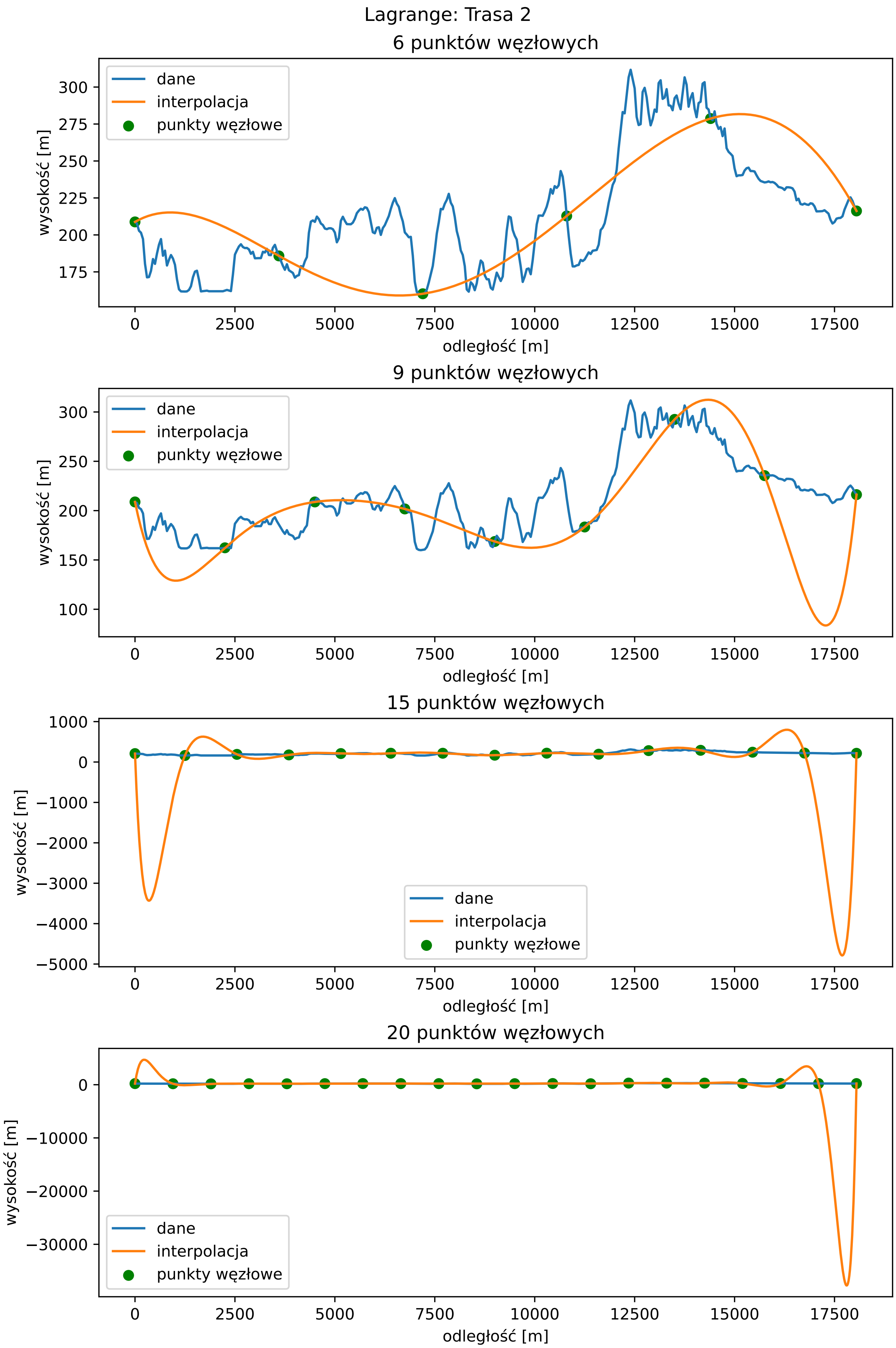
$$x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi), k = 0..n-1$$

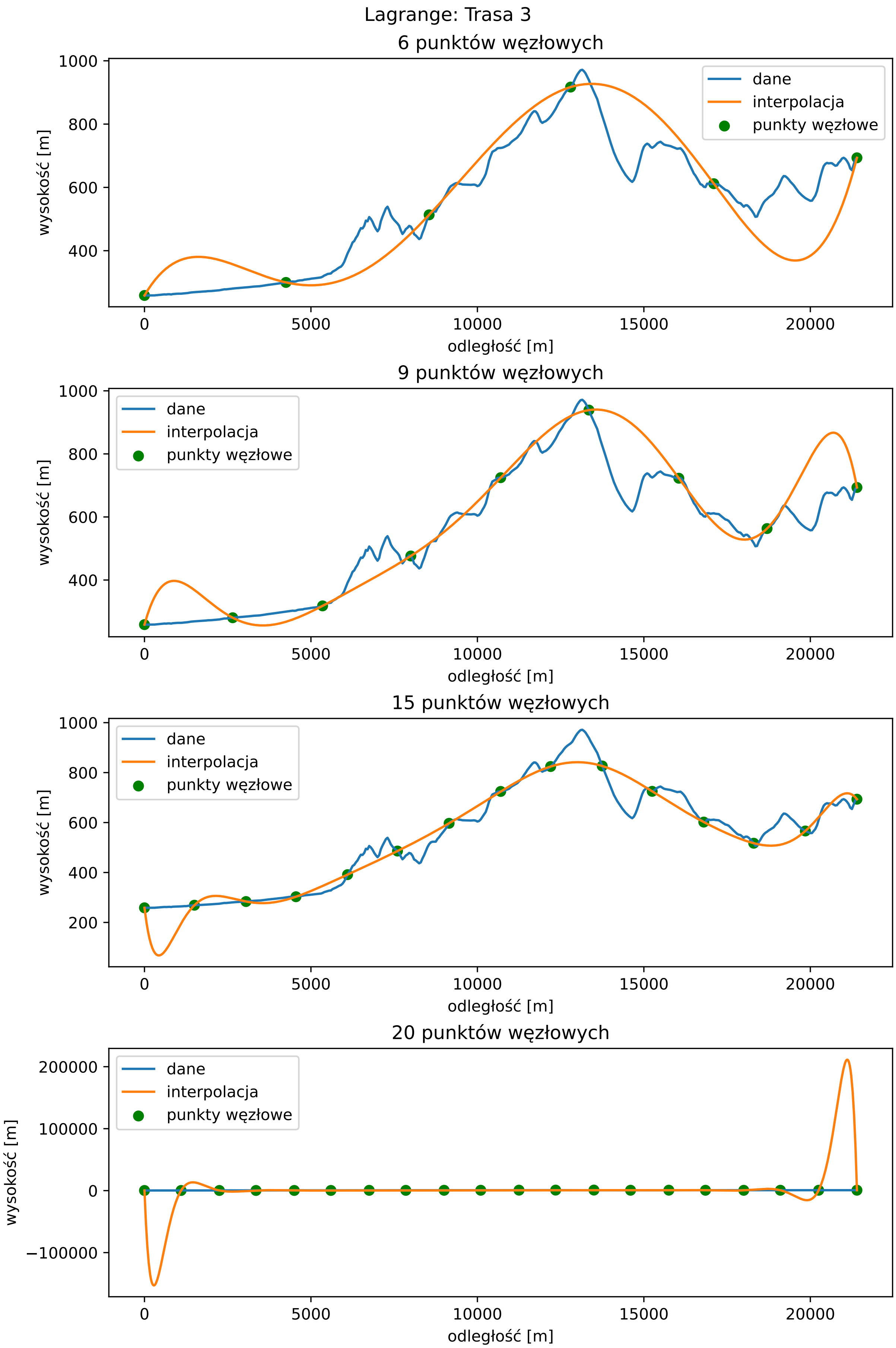
Który w kodzie został zaimplementowany w następujący sposób:

```
def generate_czebyszew(N, data_size):
    import math
    def fu(k):
        return data_size/2 * math.cos((2 * k + 1)/(2 * N) * math.pi) + data_size/2
    return [int(fu(k)) for k in range(N-1, -1, -1)] + [data_size]
```

Analiza interpolacji wielomianowej tras




Lagrange: Trasa 2
6 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
175
200
225
250
275
300
0
2500
5000
7500
10000
12500
15000
17500
9 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
100
150
200
250
300
15 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
−5000
20 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
0
−10000
−20000
−30000


Lagrange: Trasa 3
6 punktów węzłowych
9 punktów węzłowych
15 punktów węzłowych
20 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
0
5000
10000
15000
20000
200
400
600
800
1000
200000
100000
−100000

Trasa 1

Dla tej trasy widzimy, że dla odcinku o stałym nachyleniu (np. od 9km do 11km) odzwierciedlenie jest najlepsze. Problemy są głównie przy nagłych spadkach i wzniesieniach, gdzie nawet zwiększenie liczby węzłów nie wpływa znacząco na poprawienie interpolacji. Do tego, już tutaj można zauważyć efekt Rungego przy 15 węzłach, a przy 20 już znacząco wpływa na czytelność całego wykresu.

Trasa 2

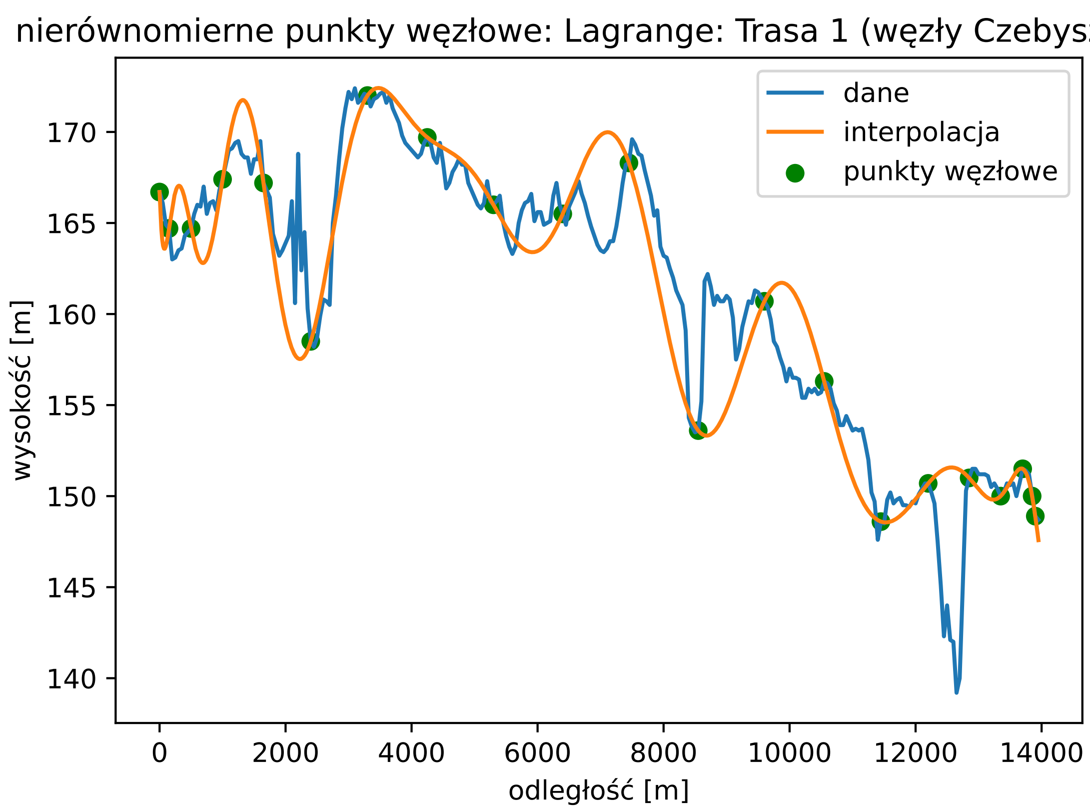
Ta trasa jest najbardziej poszarpaną. Widzimy, że interpolacja tutaj jest bezużyteczna, a dodatkowo jeszcze musimy sobie poradzić z efektem Rungego przy większej ilości węzłów. **Na jakość interpolacji znacząco wpływają nagłe wzniesienia, a dokładniej rozmieszczenia punktów**.

Trasa 3

Przy tej trasie, dla 15 węzłów widzimy, że gdyby pozbyć się efektu Rungego, to interpolacja wyglądałaby całkiem znośnie.

Eliminacja efektu Rungego

Przy pomocy węzłów Czebyszewa możemy spróbować zminimalizować efekt Rungego.

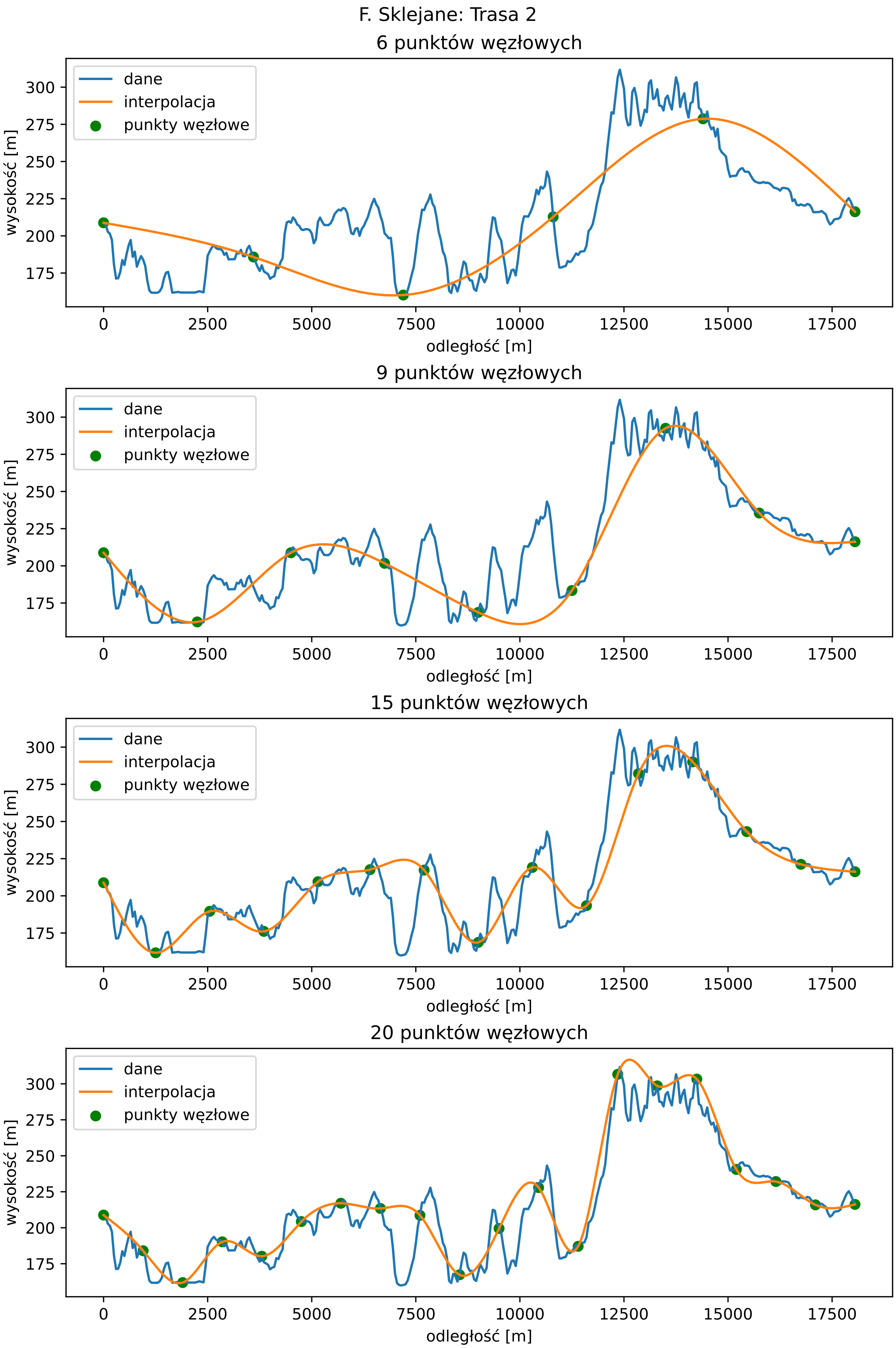


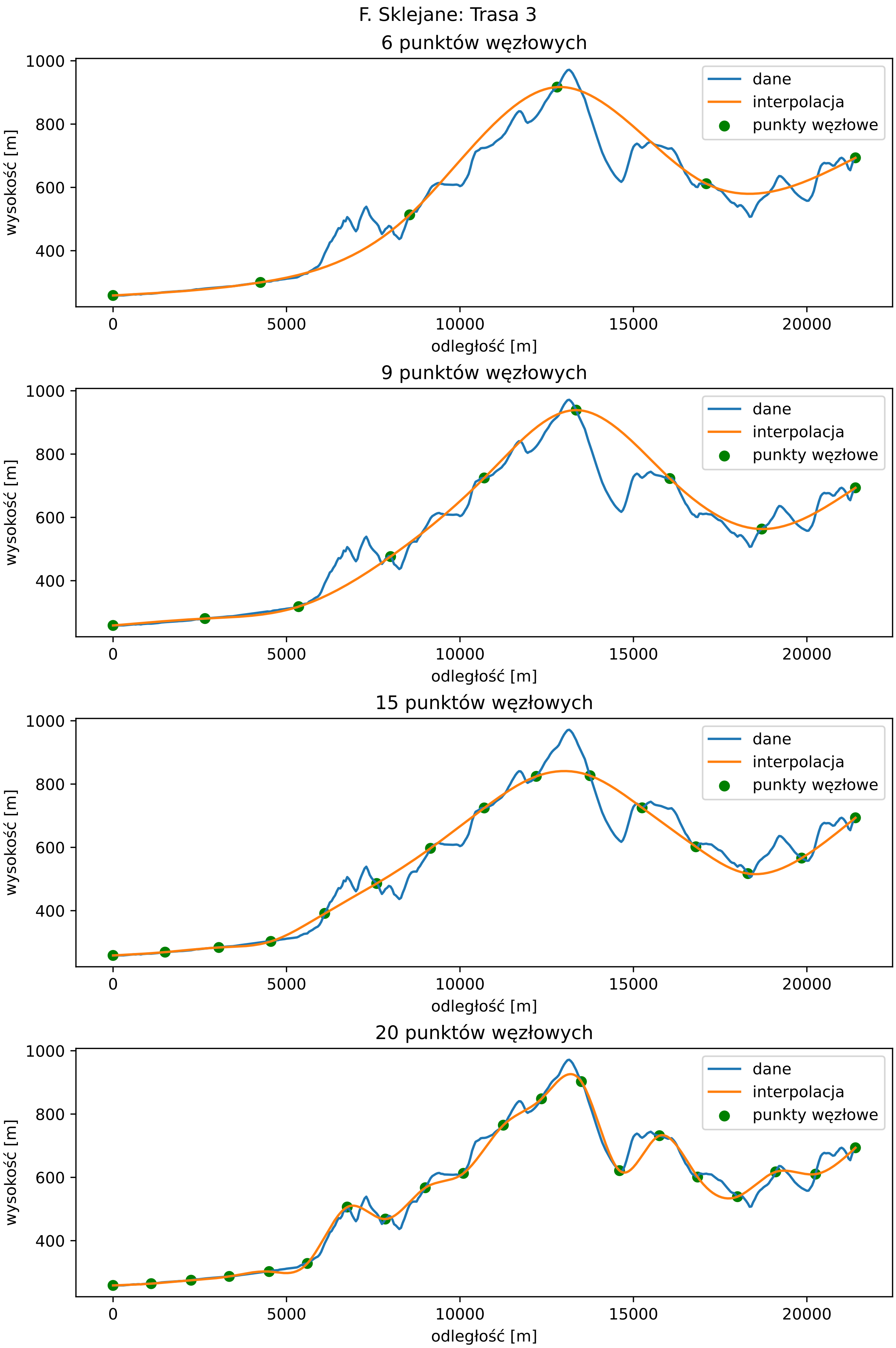
Widzimy, że efekt Rungego dla 20 węzłów został wyeliminowany, lecz nadal interpolacja nie jest w pełni poprawna i nie daje zadowalających wyników.

Podsumowanie metody Lagrange'a

Wszystkie te trasy mają problem z efektem Rungego. Możemy spróbować wyeliminować ten efekt, poprzez skorzystanie z węzłów Czebyszewa, lecz wyniki nadal nie są wystarczająco zadowalające. Możemy spróbować skorzystać z innej metody.

Analiza interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia tras


F. Sklejane: Trasa 2
6 punktów węzłowych
9 punktów węzłowych
15 punktów węzłowych
20 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
175
200
225
250
275
300
0
2500
5000
7500
10000
12500
15000
17500


F. Sklejane: Trasa 3
6 punktów węzłowych
9 punktów węzłowych
15 punktów węzłowych
20 punktów węzłowych
dane
interpolacja
punkty węzłowe
wysokość [m]
odległość [m]
400
600
800
1000
0
5000
10000
15000
20000

Trasa 1

W porównaniu do metody wielomianowej, tutaj są od razu lepsze wyniki. Także na pierwszy rzut oka widać brak efektu Rungego.

Trasa 2

Na tej trasie, przez liczne poszarpania, metoda wielomianowa od początku miała problemy. Tutaj widzimy, że interpolacja jest znacząco lepsza i użyteczna.

Trasa 3

W tym wypadku mamy idealnie zobrazowane zjawisko, że w tej metodzie im więcej węzłów, tym lepsza interpolacja.

Podsumowanie interpolacji funkcjami sklejanymi

Jak widzimy na każdym wykresie jak zwiększymy ilość węzłów, tym lepsze wyniki dostajemy. Tutaj nie ma problemu z efektem Rungego, dlatego możemy dostawać coraz dokładniejsze interpolacje. Jednak, przy np. przetwarzaniu sygnałów, chcemy pozbyć się bycia aż tak dokładnym i **"wygładzenie" może być pożądanym efektem**. Dla każdej trasy w tym wypadku mamy lepsze rezultaty. W szczególności można spojrzeć na 20 węzłów przy trasie trzeciej, gdzie jest to bardzo dobra interpolacja.

Wnioski

Obie metody są przydatne, ale interpolacja z wykorzystaniem wielomianu Laplace'a jest ograniczona przez efekt Rungego. Zjawisko to powoduje oscylacje na krańcach przedziału, wraz ze wzrostem ilości punktów węzłowych, co pogarsza jakość interpolacji.

Krzywe sklejane za to, radzą sobie zarówno z terenami o wolnozmiennym nachyleniu jakość i o nagłych zmianach nachylenia, a metoda wielomianowa ma problem z ostrymi krawędziami.

Efekt Rungego można wyeliminować za pomocą węzłów Czebyszewa, przez co wyniki są lepsze. Im bardziej nieregularna powierzchnia, tym więcej węzłów trzeba do poprawnej interpolacji.

Źródła

1. Wikipedia. Interpolacja wielomianowa — Wikipedia, the free encyclopedia. http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Interpolacja%20wielomianowa&oldid=70764886; 2024.

2. Wikipedia. Interpolacja funkcjami sklejanymi — Wikipedia, the free encyclopedia. http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Interpolacja%20funkcjami%20sklejanymi&oldid=70098639; 2024.