1 Herleitung der klassischen Lösung

Ableitung Potential:

$$V'(x) = \lambda(x^2 - \eta^2) \cdot 4x \tag{1}$$

$$m\ddot{x} = 4x\lambda(x^2 - \eta^2); m\ddot{x}\dot{x} = 4x\lambda(x^2 - \eta^2)\dot{x} \tag{2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{t} m\ddot{x}\dot{x}dt = \int\limits_{-\infty}^{t} 4\lambda x(x^2 - \eta^2)\dot{x}dt \tag{3}$$

nach Substitution und Lösung des Integrals erhält man:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda x^4 - \lambda\eta^4 - 2\lambda\eta^2 x^2 + 2\lambda\eta^4}} \dot{x} = \pm 1 \tag{4}$$

Jetzt kann man nochmal integrieren:

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \eta^2)^2}} = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}(t - t_0) \tag{5}$$

Man erhält für die klassische Lösung:

$$x(t) = \eta \tanh\left(\mp\eta\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}(t - t_0\right) \tag{6}$$

Für die Integrationskonstante erhalten wir:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial x}{\partial t_0}\right)^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\eta(1 - \tanh^2)\left(-\eta\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\right)\right)^2 dt \tag{7}$$

$$= \eta^3 \left(\frac{2\lambda}{m}\right)^{3/2} \frac{4}{3} \tag{8}$$

2 Variation

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta x^2} f = \left[\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial x}(x + \epsilon f, \dot{x} + \epsilon\dot{f}, t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x + \epsilon f, \dot{x} + \epsilon\dot{f}, t)\right)\right)\right]_{\epsilon=0} \tag{9}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x + \epsilon f) \cdot f + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}(x + \epsilon f) \cdot \dot{f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial x}(\dot{x} + \epsilon\dot{f}) \cdot f - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}(\dot{x} + \epsilon\dot{f}) \cdot \dot{f}\right]_{\epsilon=0} \tag{10}$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} f - f\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} - f''\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} - f'\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \tag{11}$$

Für die Fluktuation f erhalten wir:

$$\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta t} = V''(\bar{x}(n \cdot \Delta t, \omega_i))f_i^n - m\Big(\frac{f_i^{n+1} + f_i^{n-1} - 2f_i^n}{\Delta t^2}\Big) + \eta_{f_i^n} \tag{12}$$

$$f_{i+1}^n = f_i^n + f_i^n V''(\bar{x}(n \cdot \Delta t, \omega_i))\Delta\tau - m\frac{\Delta\tau}{\Delta t^2}(f_i^{n+1} + f_i^{n-1} - 2f_i^n) + \Delta\tau\eta_{f_i^n} \tag{13}$$

3 Vergleichswerte für die Energielücke

In dem Paper Kiselev, 1992 finden wir für die Energielücke:

$$\Delta_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \omega \frac{1}{n!}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+1/2} exp[-W(E_n)] \tag{14}$$

mit

$$W(E_n) = \int_{-b}^{b} dx\{2[V(x) - E_n]\}^{1/2} \tag{15}$$

Dabei erhalten wir für einen negativen Exponenten bei der e-Funktion leider nur eine imaginäre Lösung. Kann es sein, dass das Minuszeichen falsch ist?

Literaturverzeichnis

Kiselev, V.G. (1992). “On quantum mechanical tunneling at high energy”. In: *Physics Letters B* 278.4, pp. 454 –456.