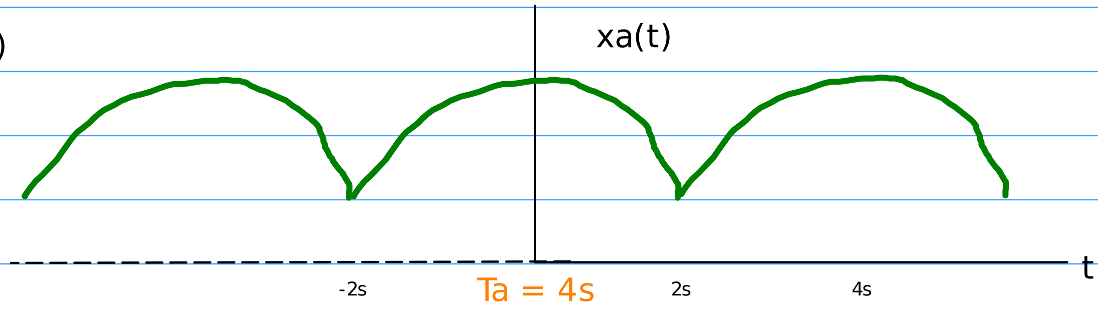
2. Una señal analógica periódica $x_a(t)$, de período $T = 4s$, es muestreada obteniendo la señal discreta $x[n]$ de N muestras y sea $X_N(k)$ su DFT. Se pide:

   a) Si utilizamos una frecuencia de muestreo de $fs = 10Hz$ y tomamos $N = 80$ muestras. ¿Que restricciones debemos imponer sobre $x_a(t)$ para evitar el aliasing? ¿Cual es la resolución frecuencial de $X_N(k)$, en Hz? ¿Cuantos armónicos estarán presentes en $X_N(k)$?

   b) Explique el procedimiento para reconstruir la señal analógica $x_a(t)$ a partir de $X_N(k)$. Que condiciones debemos imponer sobre los valores de la frecuencia de muestreo fs y el número de muestras a tomar N.

a)

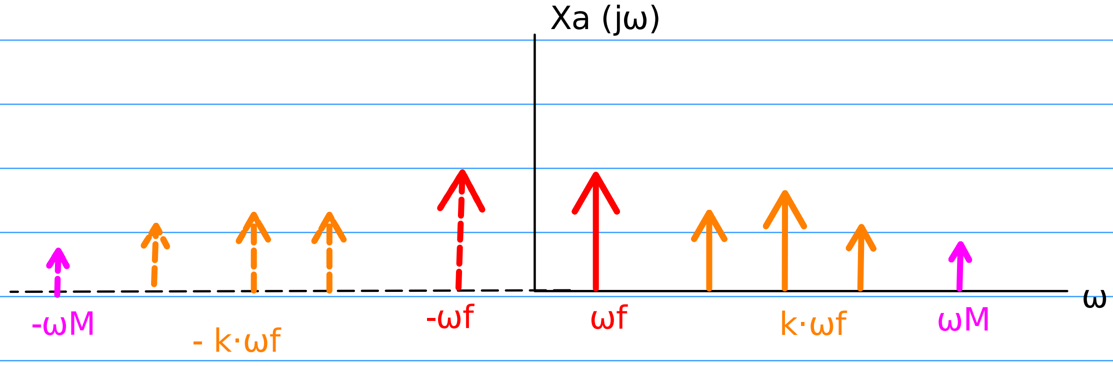


Frecuencia Fundamental: 1/4 Hz , ωf = 2π/Ta = π/2 rad/s

Otras frecuencias son ω_armonicos = k·ωf = k·π/2 rad/s

Como la señal es periodica se puede representar con una serie de cosenos y senos con diferentes frecuencias , los valores de coseno y senos se repetiran cada ω_armonicos + 2π·k
El armónico fundamental corresponde a la frecuencia más baja presente en la señal que no es cero. Es el primer armónico, y todos los demás armónicos son múltiplos enteros de esta frecuencia.

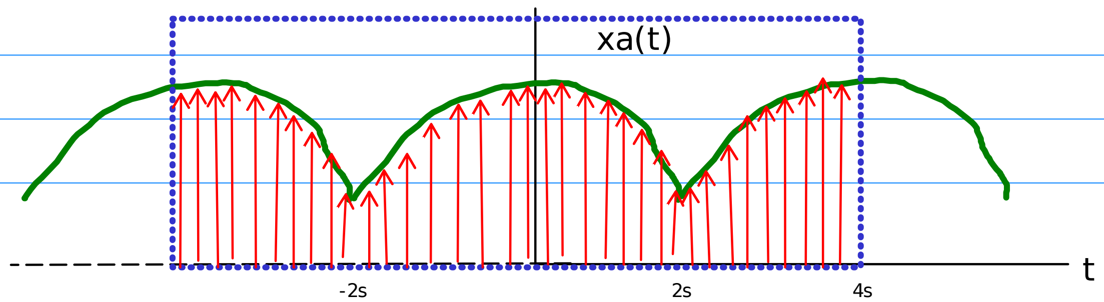
Expectro de Xa (jω) generico :



Existe un maximo ωM = k·ωf , que para que no se produzca aliasing debe ser la mitad de la frecuencia de muestreo ωs >= 2ωM

Se toman 10 muestras cada 1 segundo , y se consiguen 80 muestras

tiempo de muestreo = 80/10 = 8 s



Se puede observar que se han muestreado 2 periodos

Para que se cumpla el teorema de muestreo las caracteristicas de Xa deben ser:

La señal Xa , debe tener una componente de frecuencia maxima en

$\omega = (2\pi)f$

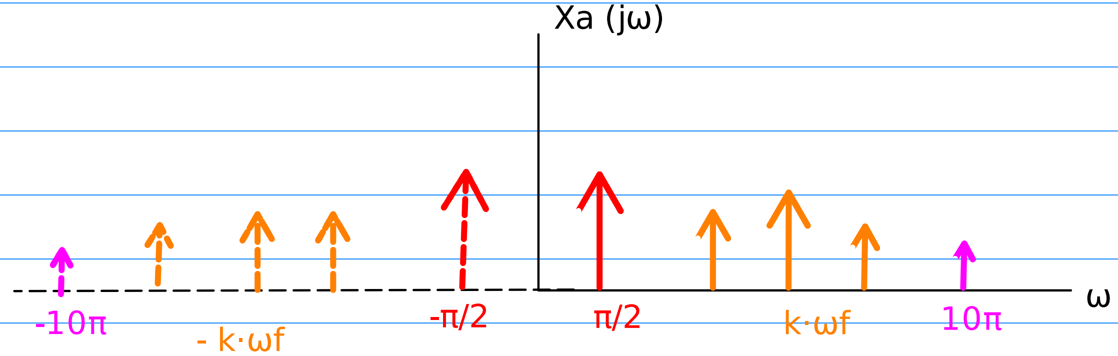
$\omega M = \omega s/2 = 2\pi 10/2 = \pi 10$

Para evitar solapamiento o aliasing :

$\omega M = 10\pi \quad , \quad \omega\_fund = \pi/2$

Divido por 2π:

$\boxed{FM = 5 \text{ Hz} \ , \ Fmin = 1/4 \text{ Hz}}$

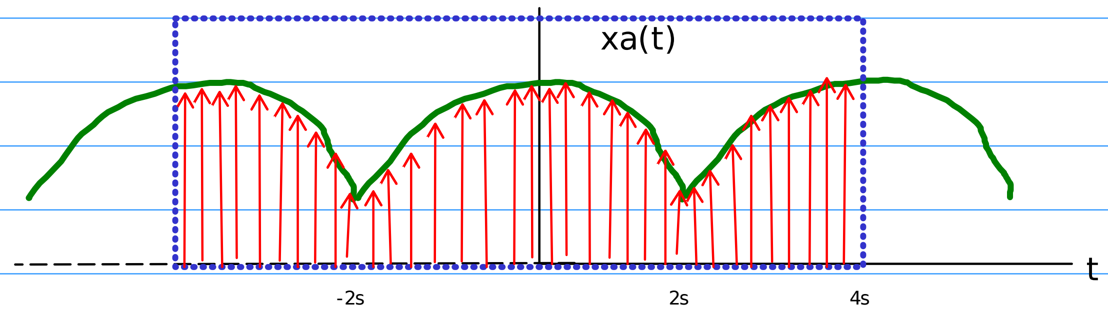


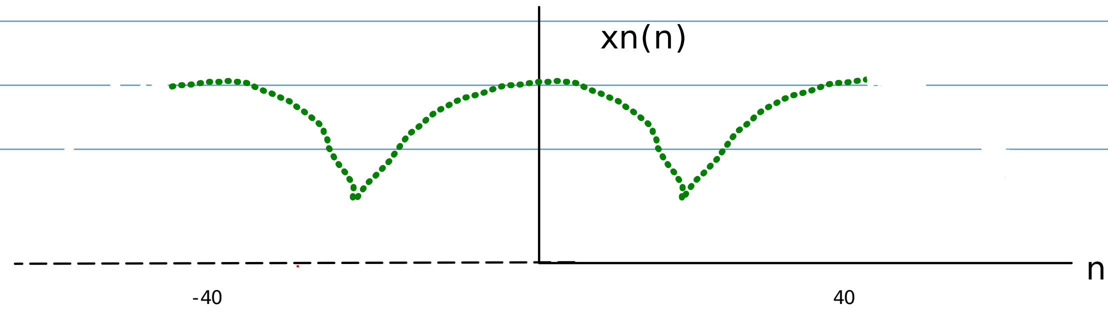
La resolución de frecuencia es simplemente la frecuencia de muestreo dividida por la cantidad de muestras .

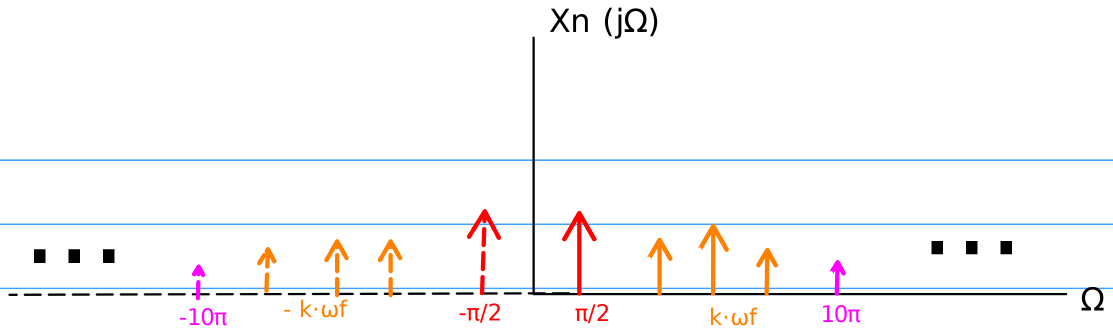
10 Hz
80 muestras

$\boxed{\text{Resolucion : } 1/8 \text{ Hz}}$

Cantidad de armonicos : Como se toman dos ciclos de Xa para hacer el muestreo de 80 muestras , en el caso limite de que hayan 80 frecuencias involucradas en X[n] habran 40 que se repetiran , ya que se toman dos ciclos , por lo tanto habremos to mado como maximo 40 armonicos

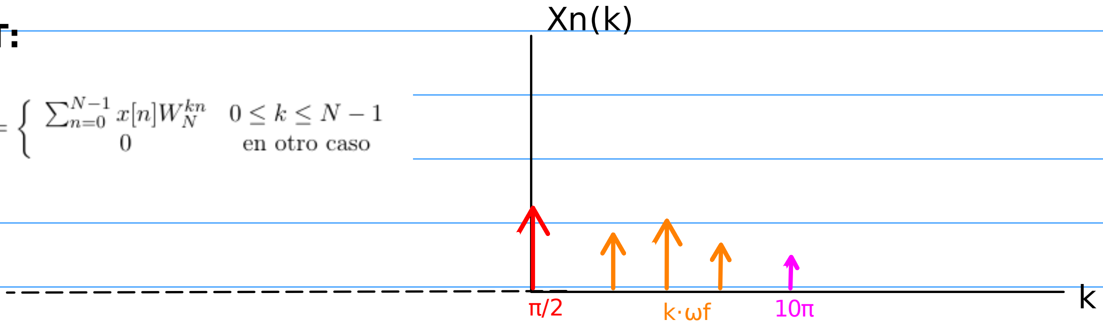






DFT:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

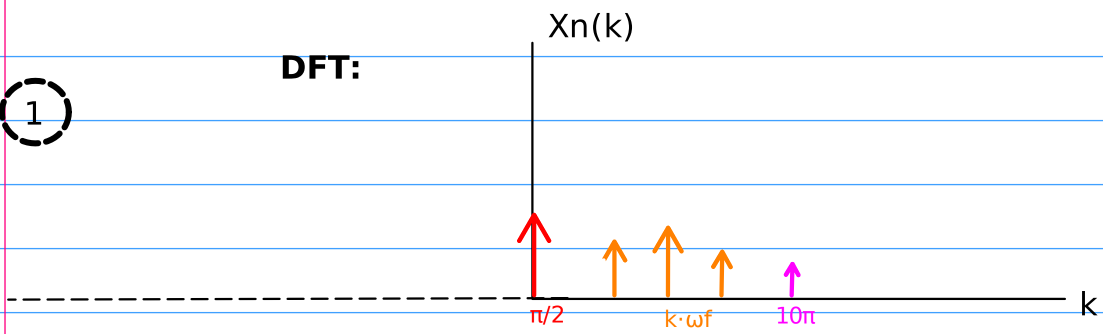


40 armonicos

b) Indicar el procedimiento para recontruir xa(t) a partir de Xn[k]

1

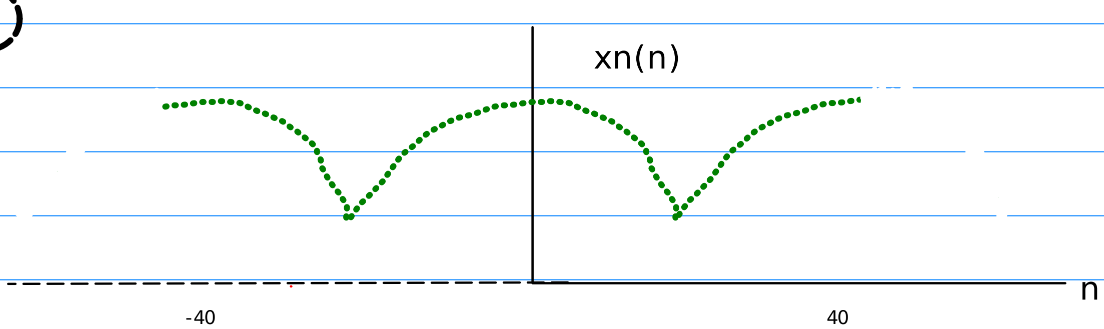
DFT:



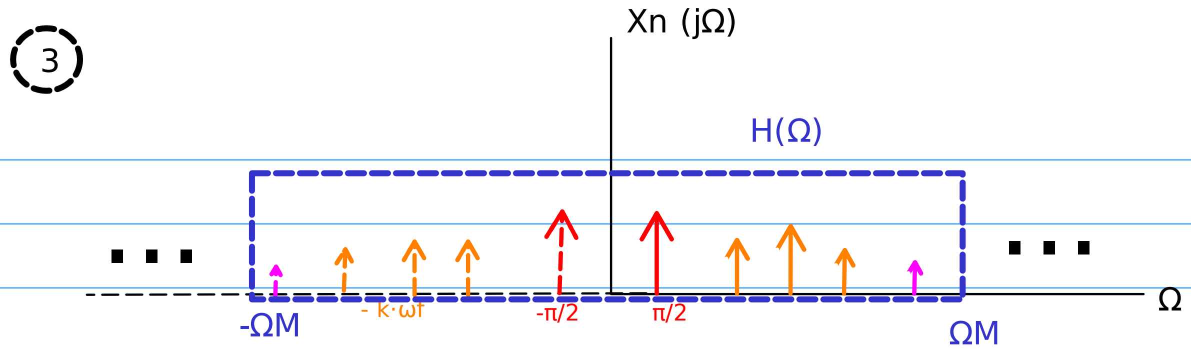
Vuelvo a la señal con la que hice la DFT :

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

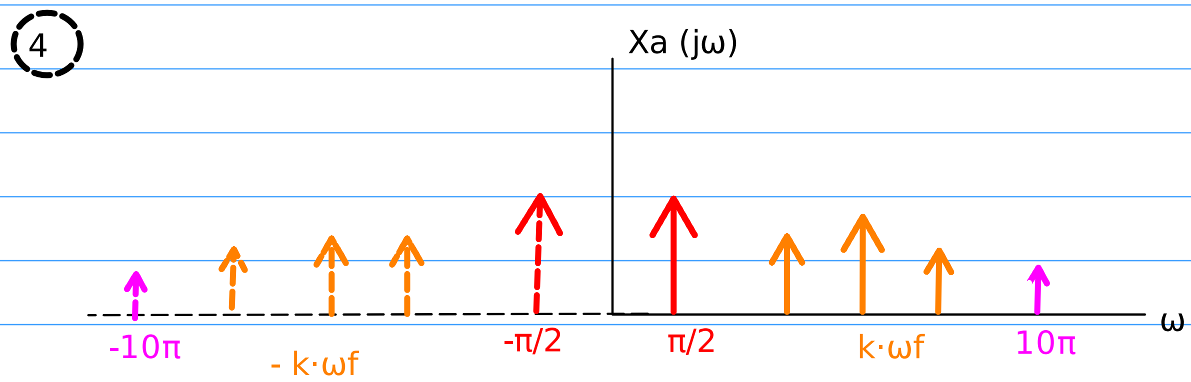
2



Se utiliza un filtro pasabajos H[Ω] con frecuencia de corte :
Ωc = ΩM = π (ejemplo con fM = 5 Hz)



Divido por el periodo de muestreo Ts , para pasar a ω = Ω/Ts y obtenfo Xa(ω)



Aplico la antitransformada:

5

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \ t \in \mathbb{R}$$

Obtengo nuevamente Xa(t)