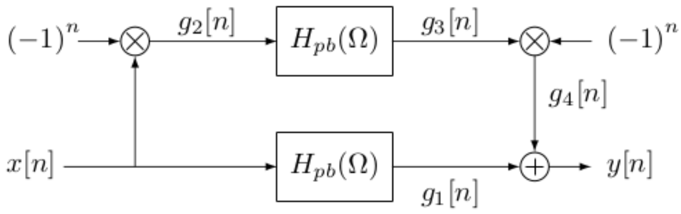
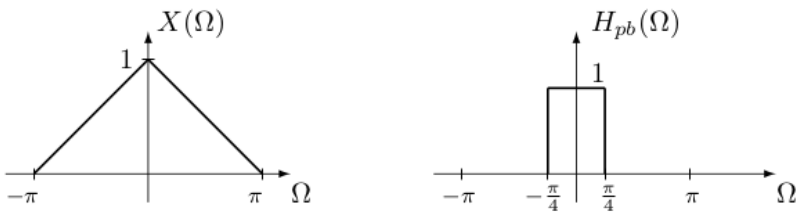
Parcial de Señales y Sistemas (66.74 y 86.05)

14 de noviembre de 2022

1. Sea el sistema de la figura:



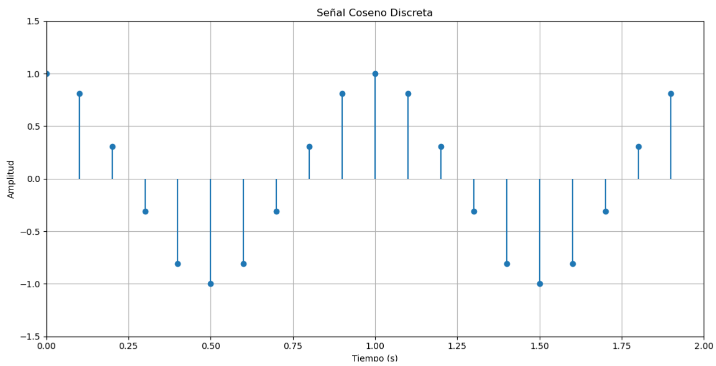
Donde:



Graficar los espectro de frecuencias de las señales $g_1[n]$, $g_2[n]$, $g_3[n]$, $g_4[n]$ y $y[n]$.

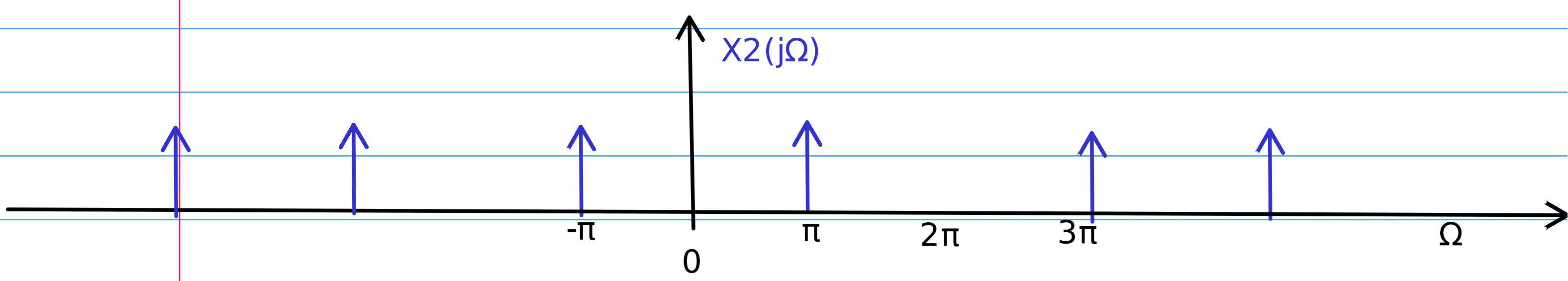
Observacion las entradas : (-1)^n corresponden a cos(π·n) y como el seno siempre vale 0 para π·n , se puede expresar con la notacion compleja de euler:

x2[n] (-1)^n = exp(j·π·n) ,

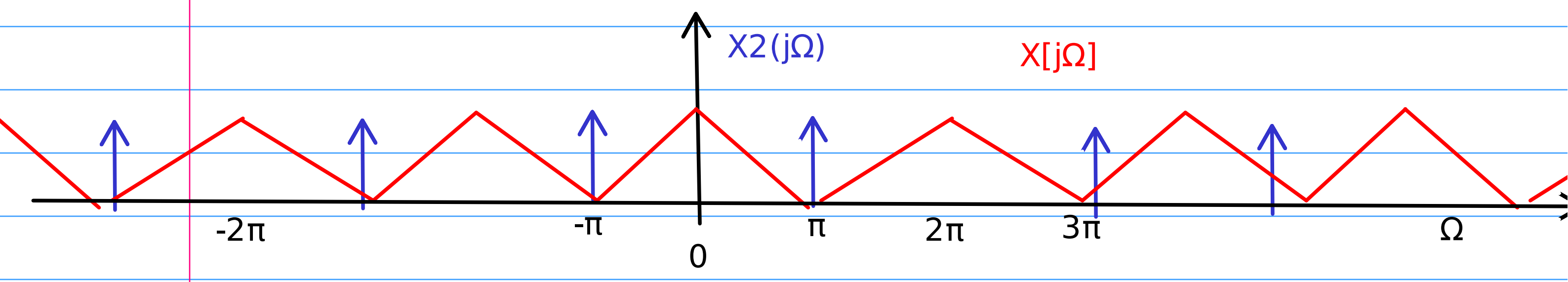


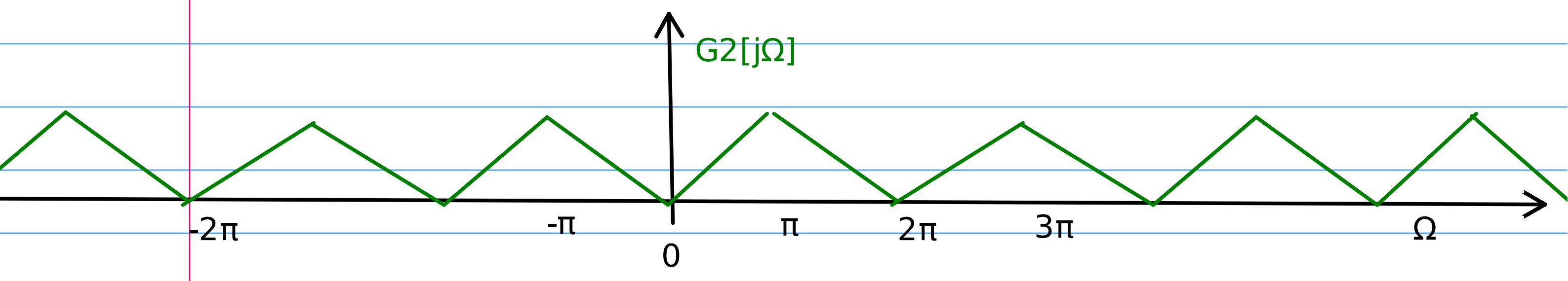
cuya transformada de Fourier corresponde a

$$X2(j\Omega) = \sum \pi[\ \delta(\pi - \Omega - 2\cdot\pi\cdot k) + \delta(\pi + \Omega - 2\cdot\pi\cdot k)$$

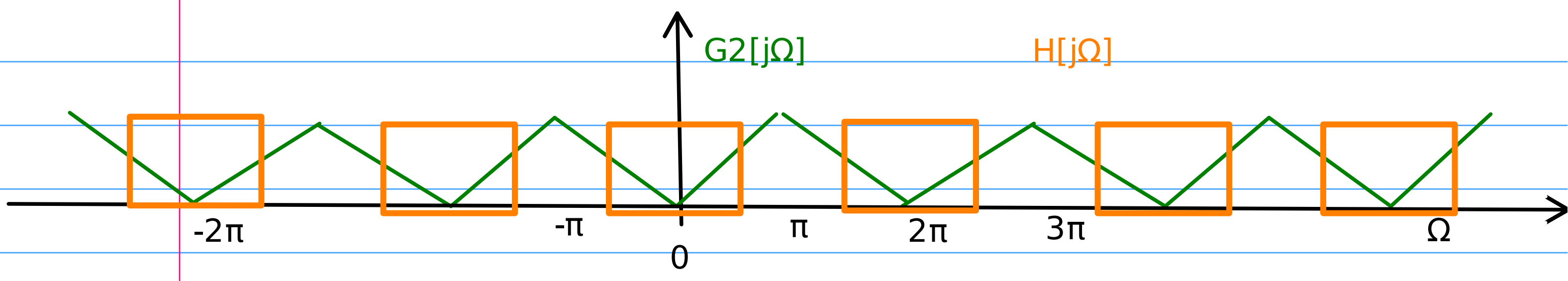


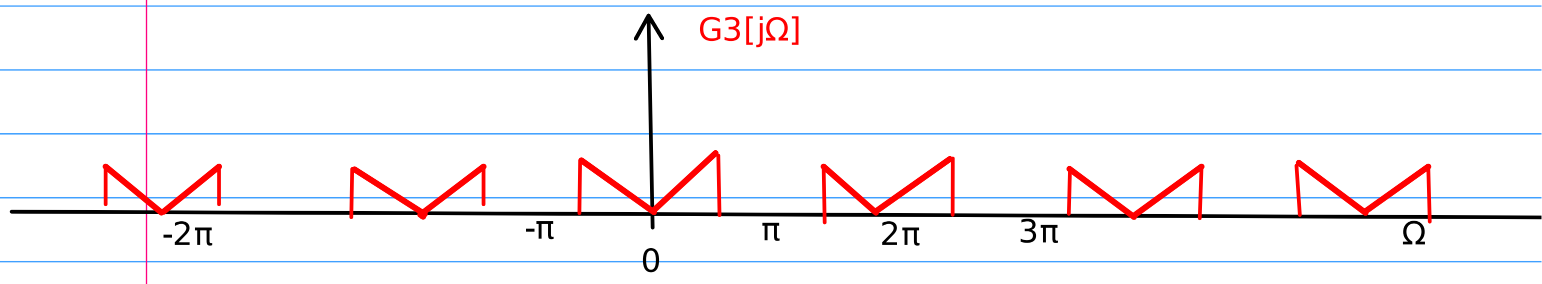
Si $g2[n] = x2[n] \divideontimes x[n]$, por propiedad : $G2[j\Omega] = X2[j\Omega]X[j\Omega]$



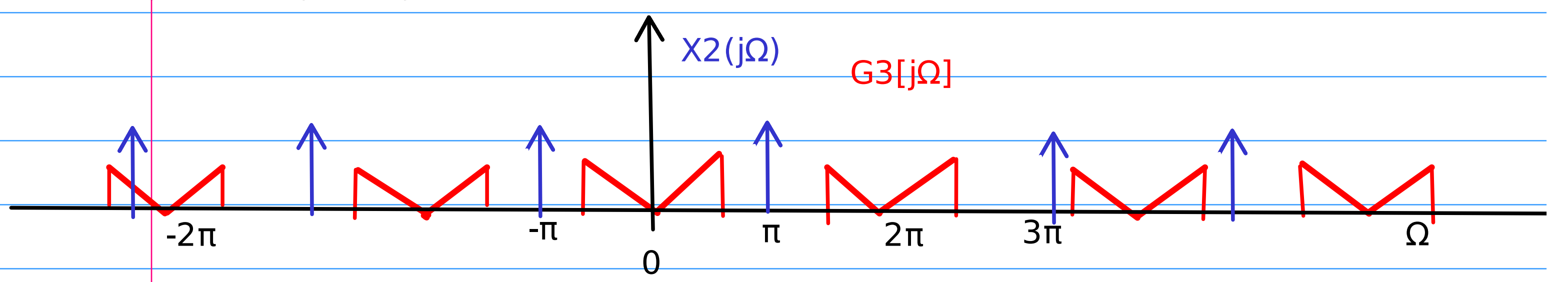


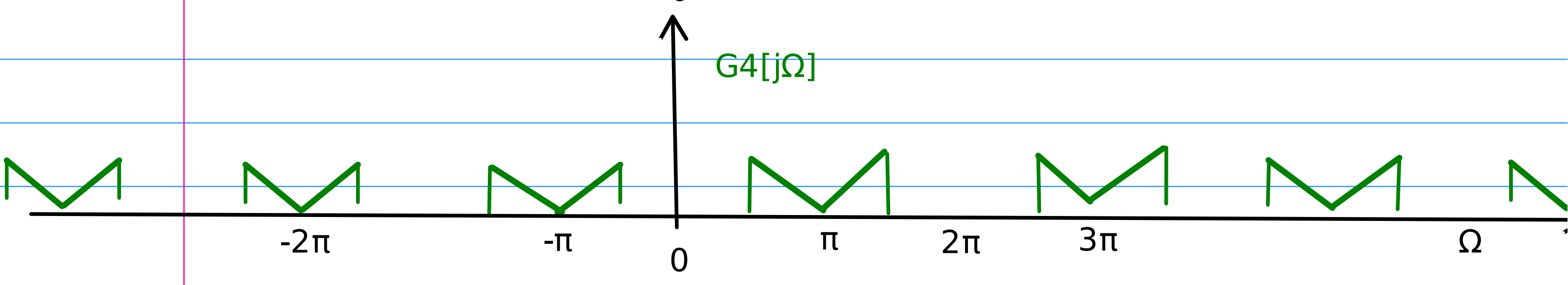
$g3[n] = g2[n] \divideontimes h[n]$, por propiedad : $G3[j\Omega] = G2[n]H[j\Omega]$



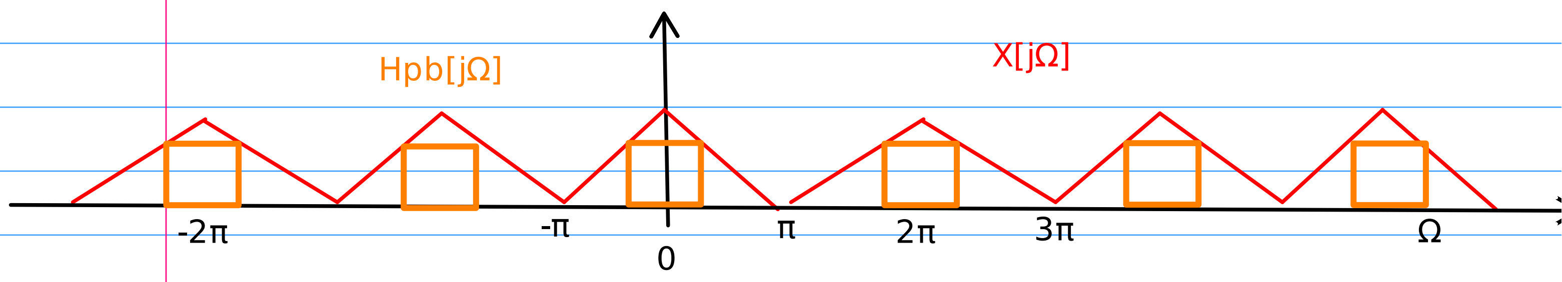


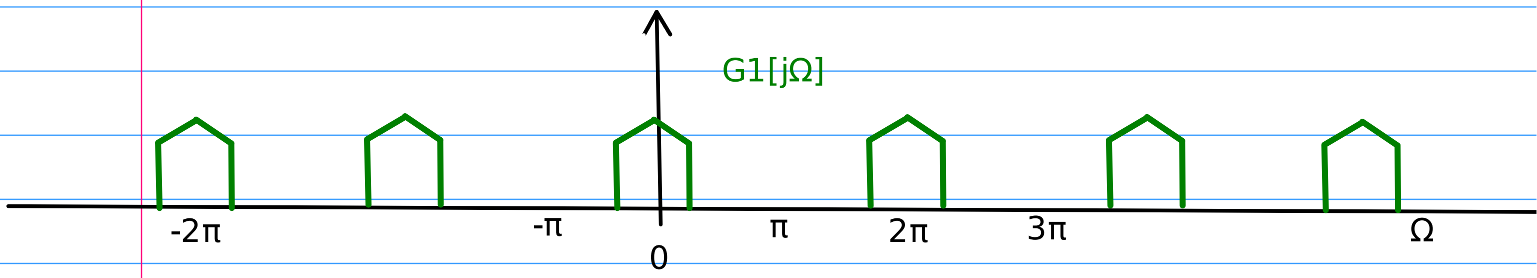
$G4[j\Omega] = G3[j\Omega]X2[j\Omega]$



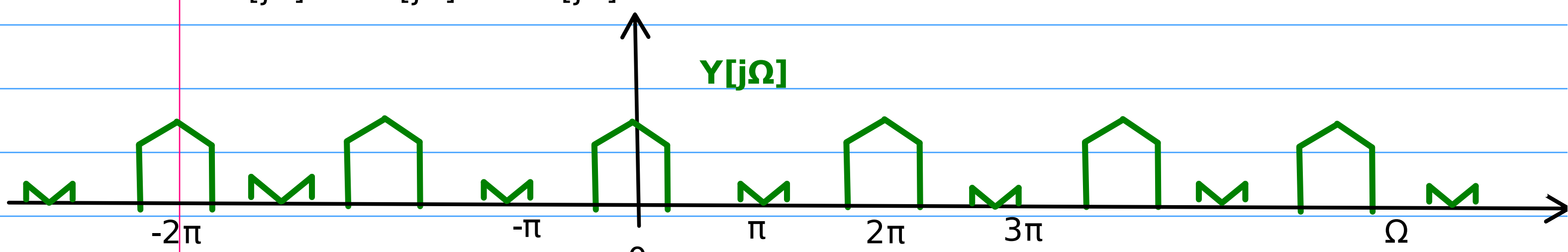


G1[jΩ] = X[jΩ]Hpb[jΩ]





Y[jΩ] = G4[jΩ] + G1[jΩ]

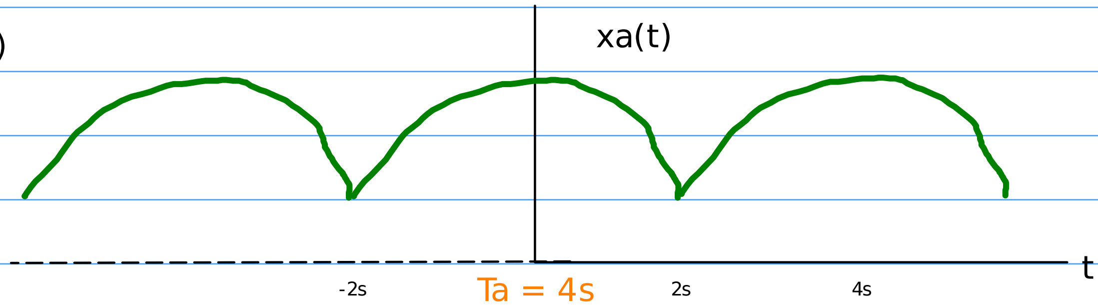


2. Una señal analógica periódica $x_a(t)$, de período $T = 4s$, es muestreada obteniendo la señal discreta $x[n]$ de N muestras y sea $X_N(k)$ su DFT. Se pide:

   a) Si utilizamos una frecuencia de muestreo de $fs = 10Hz$ y tomamos $N = 80$ muestras. ¿Que restricciones debemos imponer sobre $x_a(t)$ para evitar el aliasing? ¿Cual es la resolución frecuencial de $X_N(k)$, en Hz? ¿Cuantos armónicos estarán presentes en $X_N(k)$?

   b) Explique el procedimiento para reconstruir la señal analógica $x_a(t)$ a partir de $X_N(k)$. Que condiciones debemos imponer sobre los valores de la frecuencia de muestreo fs y el número de muestras a tomar N.

a)



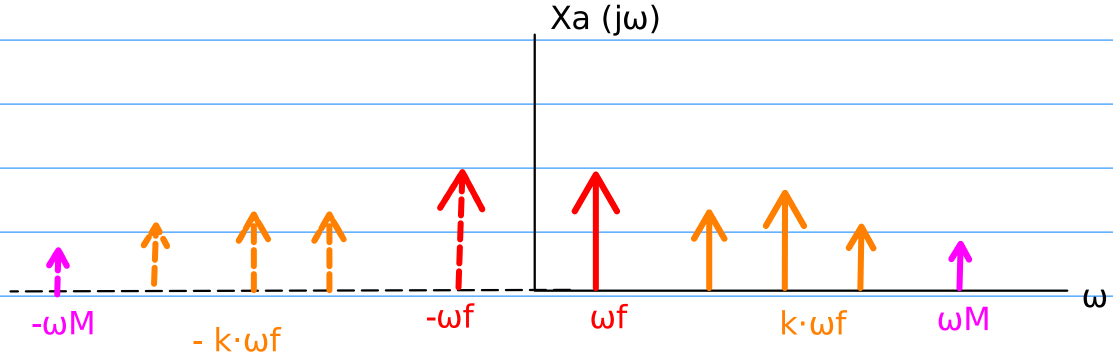
Frecuencia Fundamental: 1/4 Hz , ωf = 2π/Ta = π/2 rad/s

Otras frecuencias son ω_armonicos = k·ωf = k·π/2 rad/s

Como la señal es periodica se puede representar con una serie de cosenos y senos con diferentes frecuencias , los valores de coseno y senos se repetiran cada ω_armonicos + 2π·k

El armónico fundamental corresponde a la frecuencia más baja presente en la señal que no es cero. Es el primer armónico, y todos los demás armónicos son múltiplos enteros de esta frecuencia.

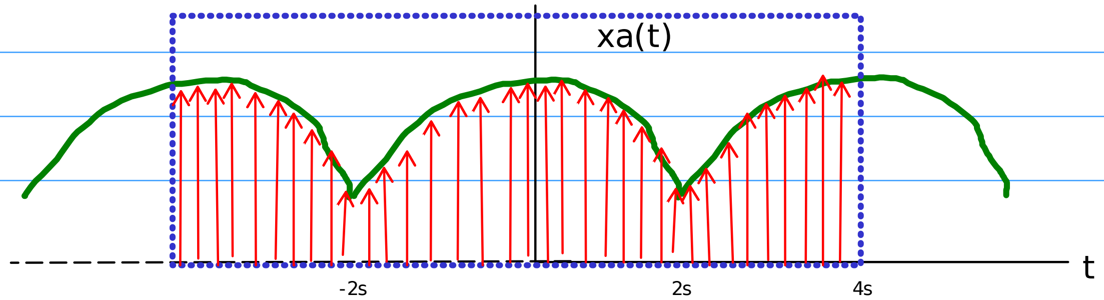
Expectro de Xa (jω) generico :



Existe un maximo ωM = k·ωf , que para que no se produzca aliasing debe ser la mitad de la frecuencia de muestreo ωs >= 2ωM

Se toman 10 muestras cada 1 segundo , y se consiguen 80 muestras

tiempo de muestreo = 80/10 = 8 s



Se puede observar que se han muestreado 2 periodos

Para que se cumpla el teorema de muestreo las caracteristicas de Xa deben ser:

La señal Xa , debe tener una componente de frecuencia maxima en

$\omega = (2\pi)f$

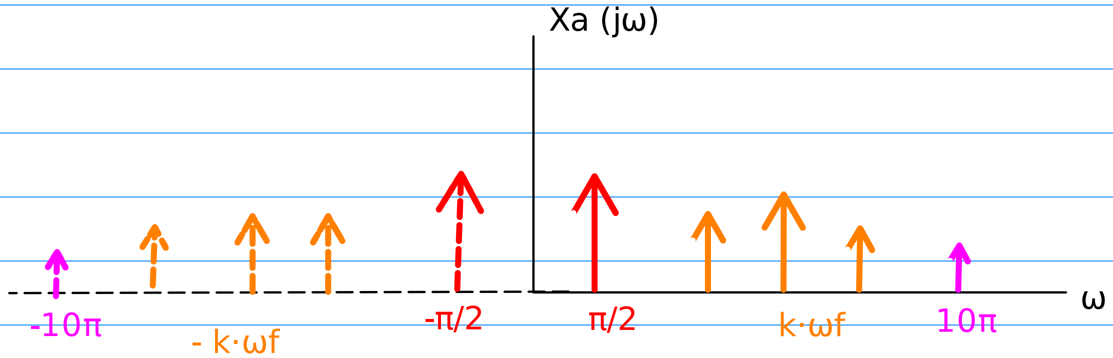
$\omega M = \omega s/2 = 2\pi 10/2 = \pi 10$

Para evitar solapamiento o aliasing :

$\omega M = 10\pi \quad , \quad \omega\_fund = \pi/2$

Divido por 2π:

$$\boxed{FM = 5 \text{ Hz} \quad , \quad Fmin = 1/4 \text{ Hz}}$$

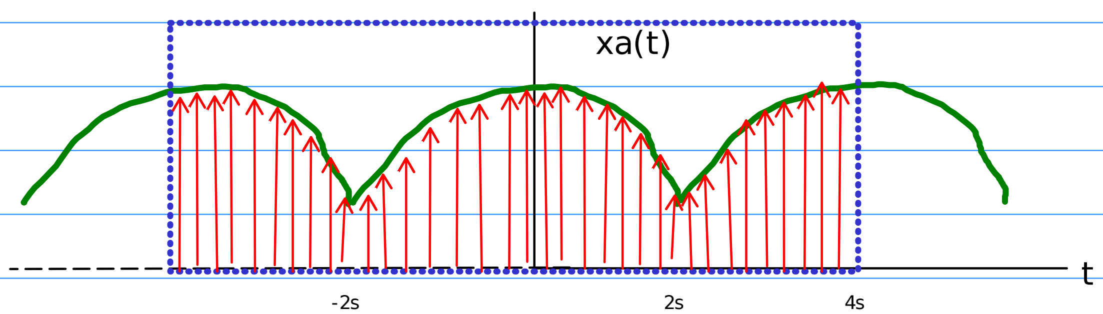


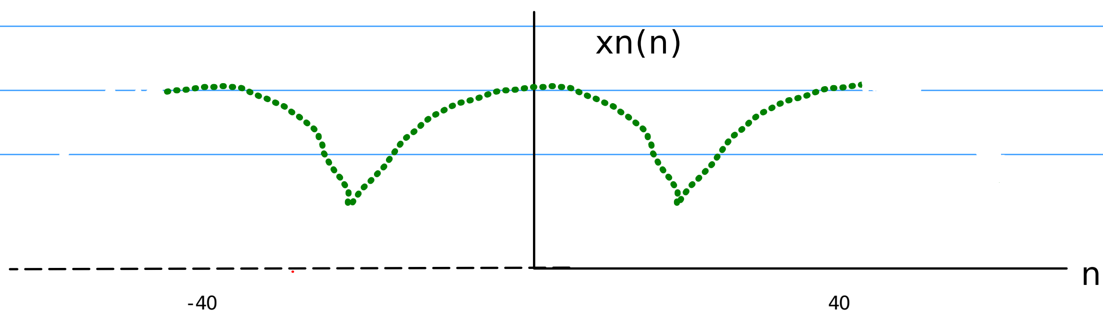
La resolución de frecuencia es simplemente la frecuencia de muestreo dividida por la cantidad de muestras .

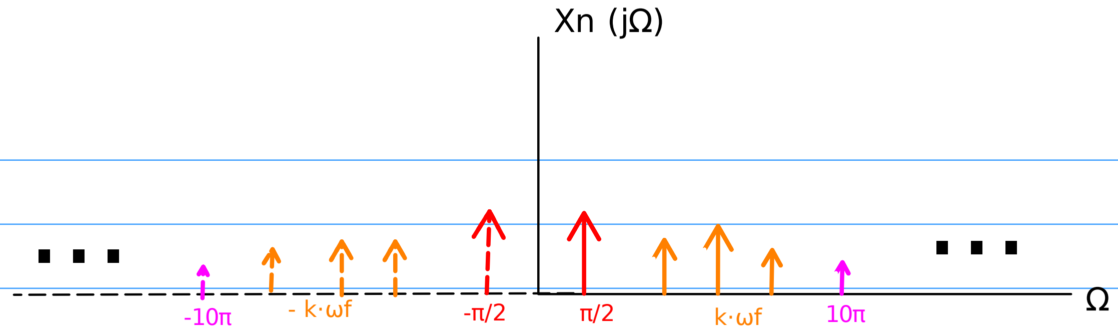
10 Hz
80 muestras

$$\boxed{\text{Resolucion : } 1/8 \text{ Hz}}$$

Cantidad de armonicos : Como se toman dos ciclos de Xa para hacer el muestreo de 80 muestras , en el caso limite de que hayan 80 frecuencias involucradas en X[n] habran 40 que se repetiran , ya que se toman dos ciclos , por lo tanto habremos to mado como maximo 40 armonicos

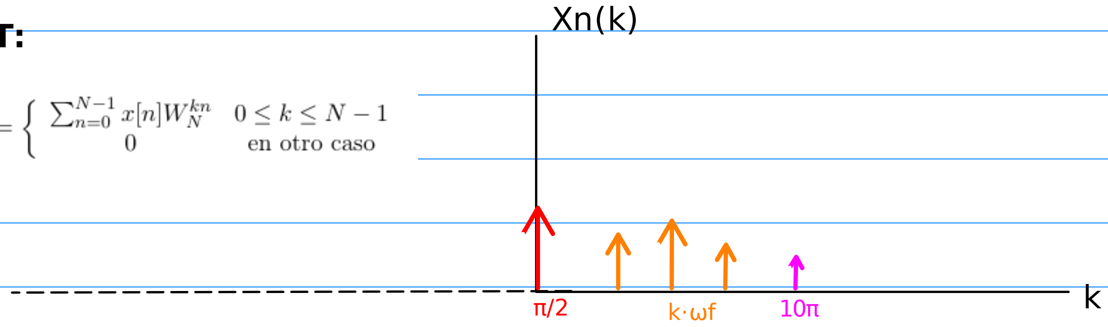






DFT:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

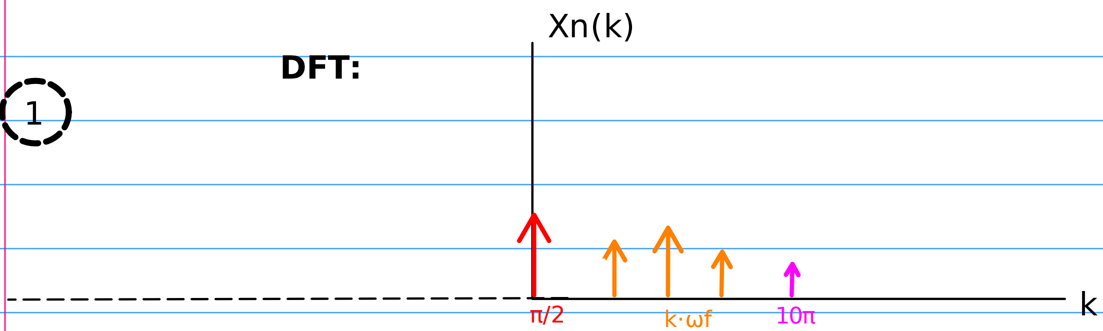


40 armonicos

b) Indicar el procedimiento para recontruir xa(t) a partir de Xn[k]

1

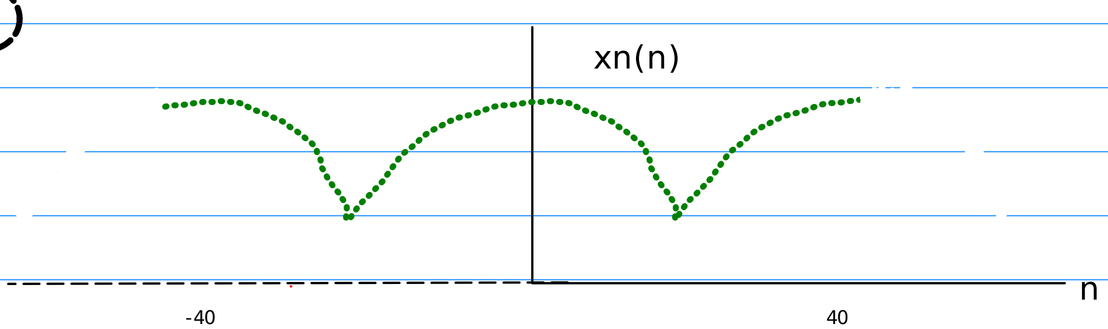
DFT:



Vuelvo a la señal con la que hice la DFT :

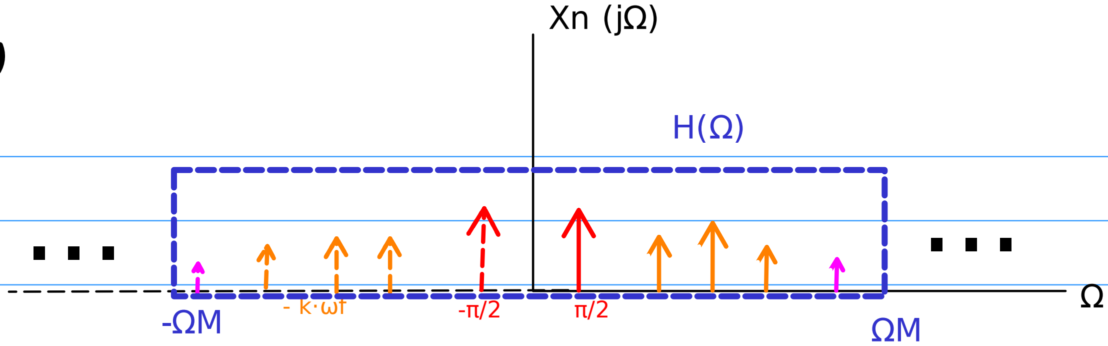
$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2



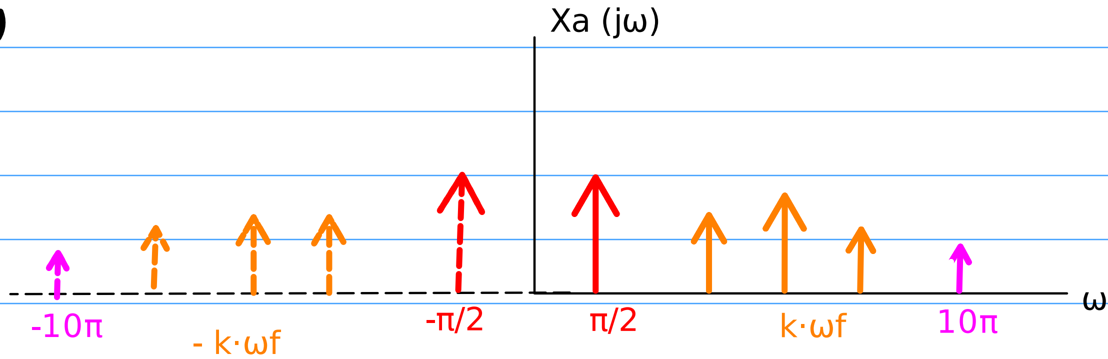
Se utiliza un filtro pasabajos H[Ω] con frecuencia de corte :
Ωc = ΩM = π (ejemplo con fM = 5 Hz)

3



Divido por el periodo de muestreo Ts , para pasar a ω = Ω/Ts y obtenfo Xa(ω)

4

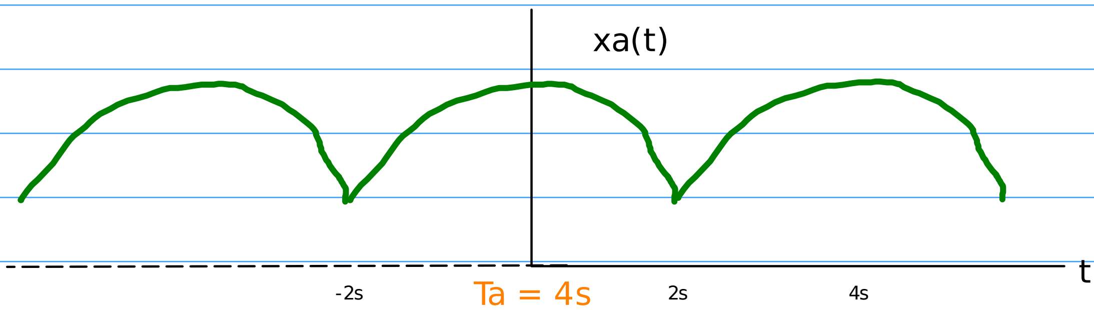


Aplico la antitransformada:

5

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ t \in \mathbb{R}$$

Obtengo nuevamente Xa(t)



3. Sea un sistema LTI descripto por $y[n] = 0{,}75\ x[n] + 0{,}25\ x[n-1]$. Se pide:

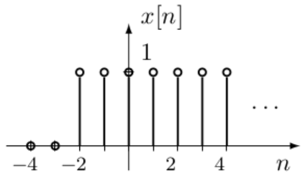
a) Estimar y graficar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

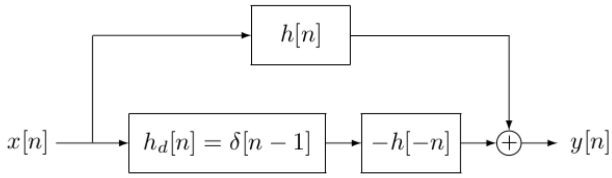
b) ¿El sistema es causal? ¿es estable? Justifique.

c) Estimar y graficar la salida cuando la señal de entrada $x[n]$ es como en la figura de abajo.

d) Sea la interconección de sistema LTI como en la figura de abajo, donde $h[n]$ es la respuesta al impulso estimada en el punto a). Estimar y graficar la respuesta al impulso del sistema total.

e) Estimar y graficar la salida del sistema de la parte d) cuando la señal de entrada $x[n]$ es como en la figura de abajo.

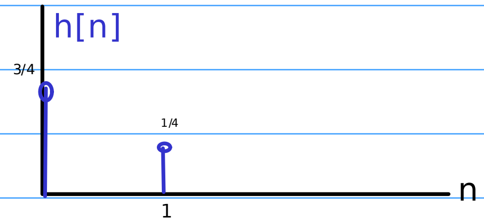




a)

La respuesta al impulso , es el sistema con δ[n] como entrada :

$h[n] = (3/4)\ \delta[n] + (1/4)\delta[n-1]$



b)

Causalidad: El sistema no depende de valores de la señal mayores a n , como la entrada $x[n] = \delta[n]$ nunca es evaluada para $\delta[n+k]$, el sistema es causal

Estabilidad: dada una señal de entrada acotada $|x[n]| < M$, para cualquier n

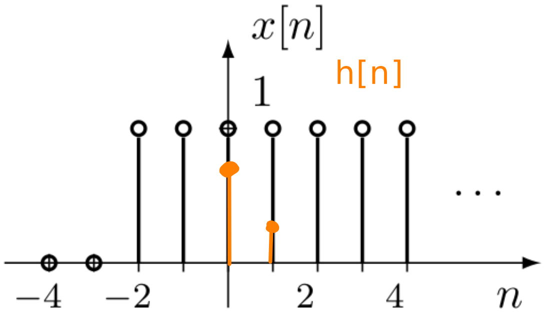
si se la convoluciona con h[n] , dara como resultado

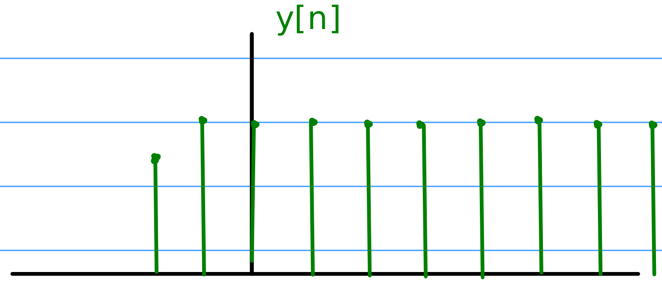
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[k-n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (3/4)\ x[k]\delta[k-n] + (1/4)x[k]\delta[k-n-1]$$

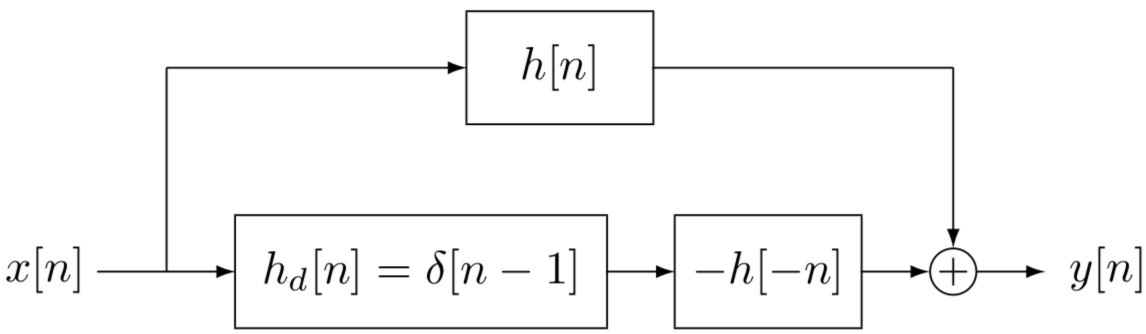
Como la h[n] , vale != 0 , para dos valores ,
la salida sera acotada y el sistema es estable .

c) Si la señal es x[n] = u[n+2]





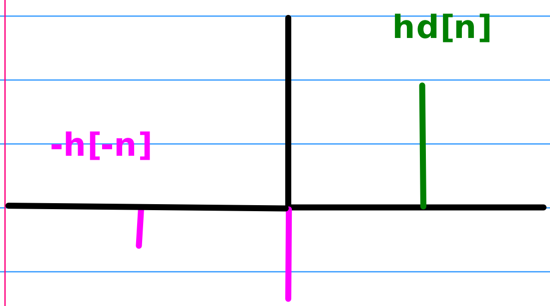
d) Si se ingresa a un sistema total compuesto por:



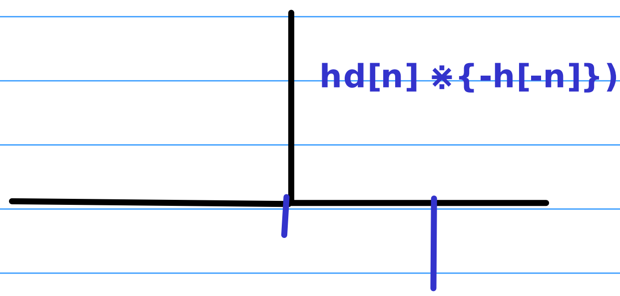
ai) Estimar y graficar el impulso total h_t[n] = h[n] + (hd[n] ※{-h[-n]})

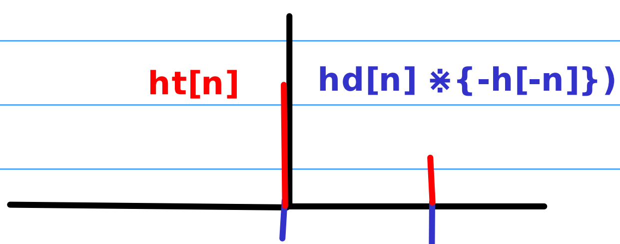
h_t[n] = h[n] + (hd[n] ※{-h[-n]})

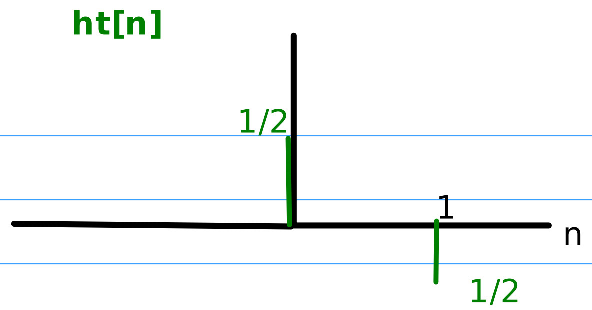
hd[n] ※{-h[-n]})



>>>>

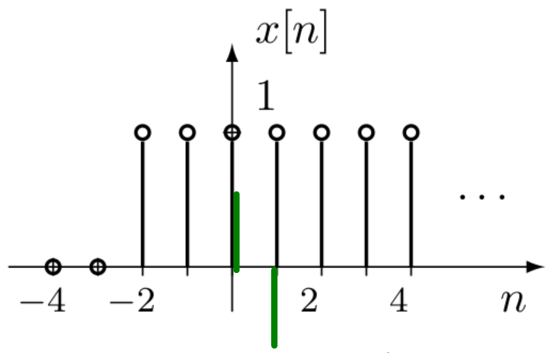


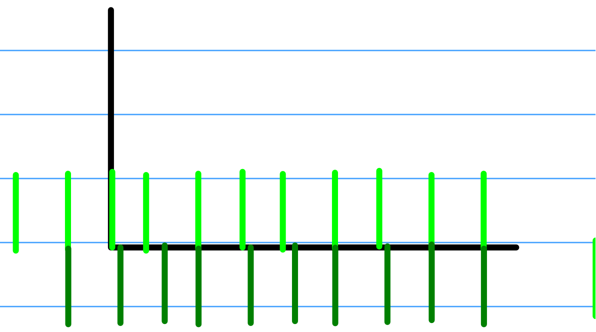


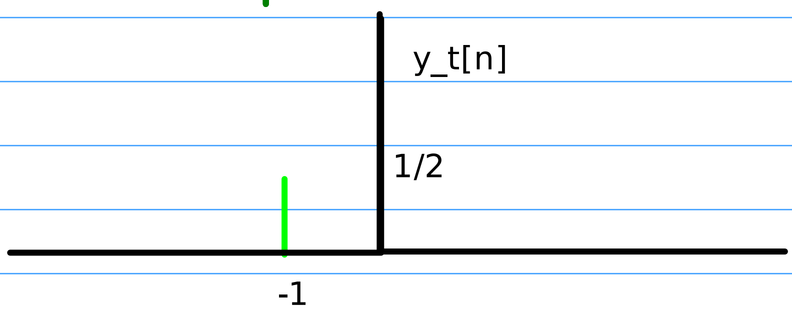


$$\boxed{h_t[n] = (1/2)\ \delta[n] - (1/2)\ \delta[n-1]}$$

d) Estimar y graficar yt[n] , ingresando la x[n] del grafico







$y[n] = (1/2)\delta[n+2]$