Parcial de Señales y Sistemas (1era oportunidad)

28 de Octubre de 2024

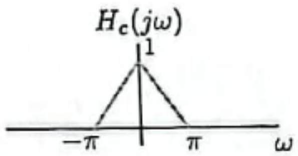
1. Considera la señal periódica $x(t)$ con $T = 2$ y tal que cuando $t \in [0, 2)$ es igual $1 - t$. Se pide:

   (a) Los coeficientes de Fourier de $x(t)$.

   (b) Usando los coeficientes de Fourier del punto anterior muestre que es posible escribir:

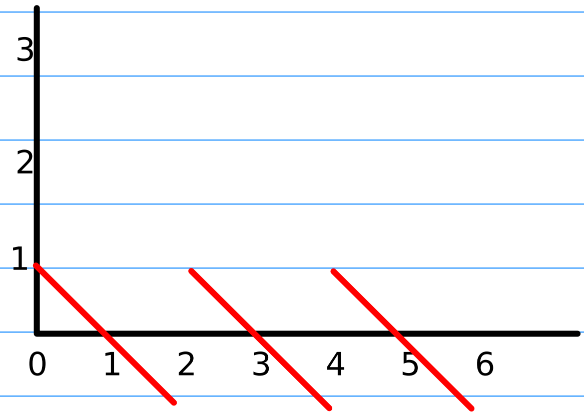
$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$$

   (c) Determine la señal $y(t)$ que es el resultado de ingresar $x(t)$ a un sistema LTI con la siguiente respuesta en frecuencia:



Daria cero aparentemente

(a) Los coeficientes de Fourier de $x(t)$.



x(t) = δ(t) + (1 - t) , para t [0 , 2]

- **Diferenciación**: Sea $x(t)$ señal periódica de periodo T tal que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Entonces:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 a_k$$

dx(t)/dt = u(t) - 1

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt,\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Señal	Transformada de Fourier	Serie de Fourier
1	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1$ $a_k = 0\ \forall k \neq 0$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	No aplica

dx(t)/dt = u(t) - 1 =>>>> a'(k) = -1 , para k = 0
0 ,enotrocaso

ωo = 2π/T = π

a(k) = -1/jωok

$$\boxed{\begin{array}{l} a(k) = j/\pi k \text{ , para } k = 0 \\ \qquad 0 \quad \text{, en otro caso} \end{array}}$$

(b) Usando los coeficientes de Fourier del punto anterior muestre que es posible escribir:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$$

Como la señal es periodica se puede expresar como:

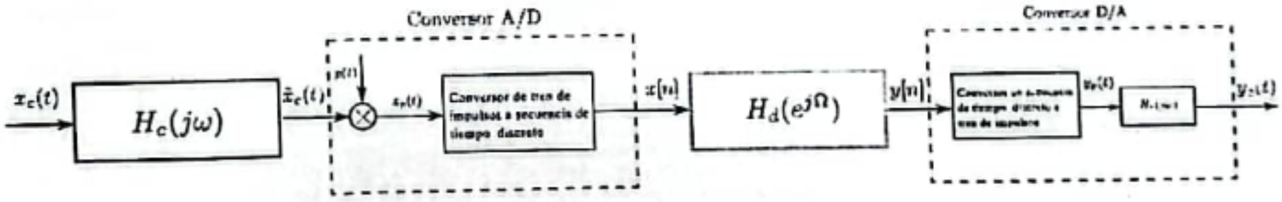
Si $x(t) \in L_2[-T/2, T/2]$ podemos escribir:

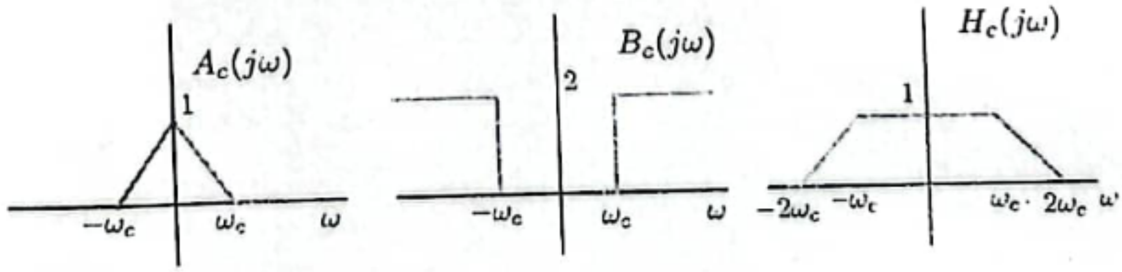
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

x(t) = j/πk·exp(j·k·π·t) , para k = 0

0 , en otro caso

2. Considere el sistema de la figura. La señal de entrada es $x_c(t) = a_c(t) + b_c(t)$, y los espectros de $a_c(t)$ y $b_c(t)$ se muestran en la figura. Vemos que se usa antes del muestreo un filtro que limita el espectro de la señal $b_c(t)$ y cuya magnitud de su respuesta en frecuencia se muestra en la figura. El filtro $H_r(j\omega)$ del conversor D/A es el interpolador ideal.



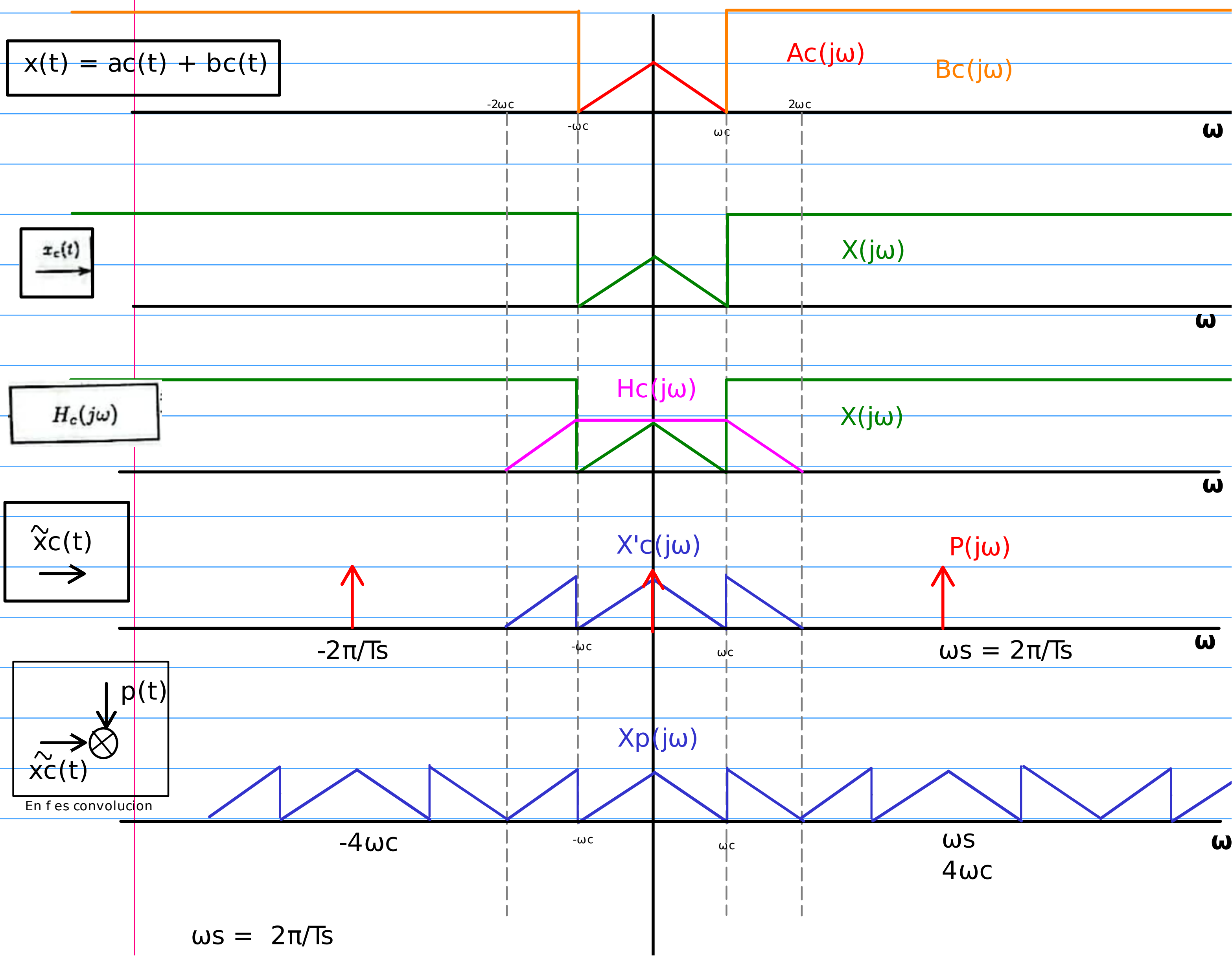


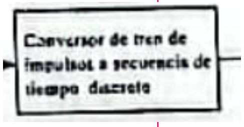
(a) Suponga que la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 4\omega_c$. Determine $H_d(e^{j\Omega})$ de forma tal que $y_c(t) = a_c(t)$.

(b) Determine si es posible que $y_c(t) = a_c(t)$ si $\omega_s < 4\omega_c$. Si ese es el caso determine el mínimo valor de ω_s que permite lograr esto y determine $H_d(e^{j\Omega})$ para ese caso.

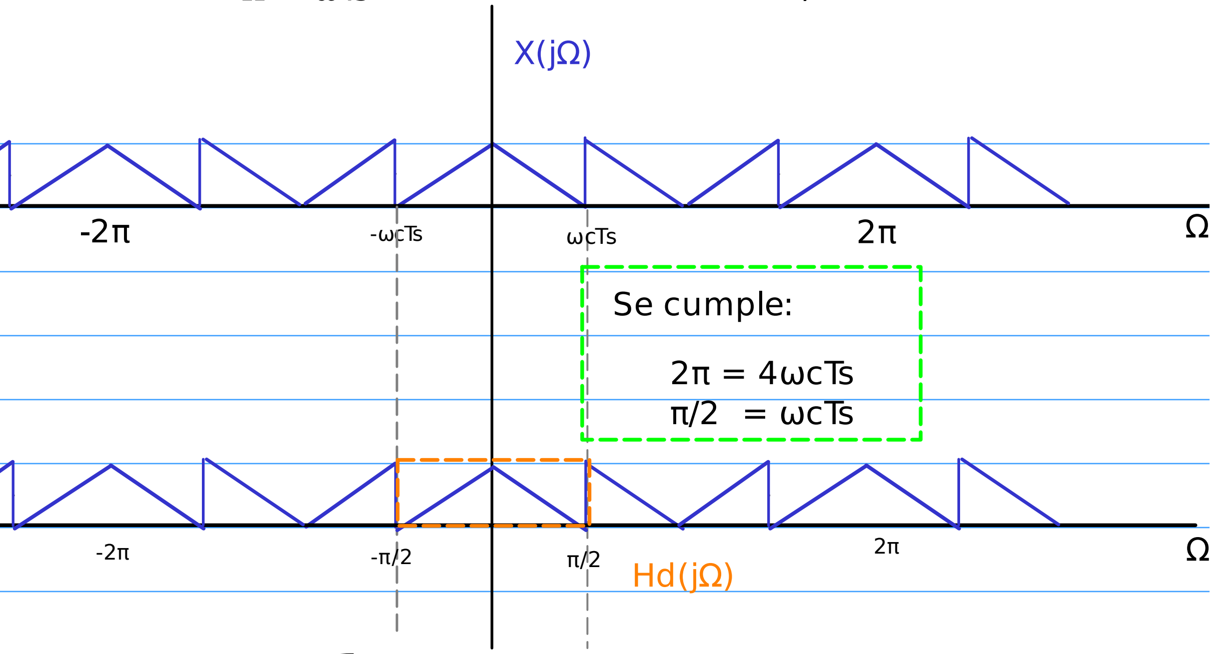
a) Suponga que ωs = 4ωc , en este caso como coincide con el ancho de banda cumple Nysq

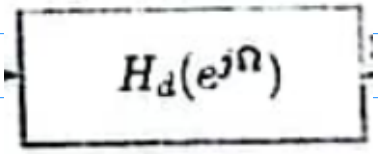
Determine Hd[jΩ] de forma tal que yd(t) = ac(t)





$\Omega = \omega T_s$ $\omega_s = 2\pi/T_s \rightarrow \Omega = 2\pi$



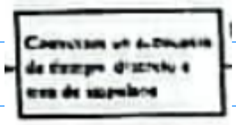


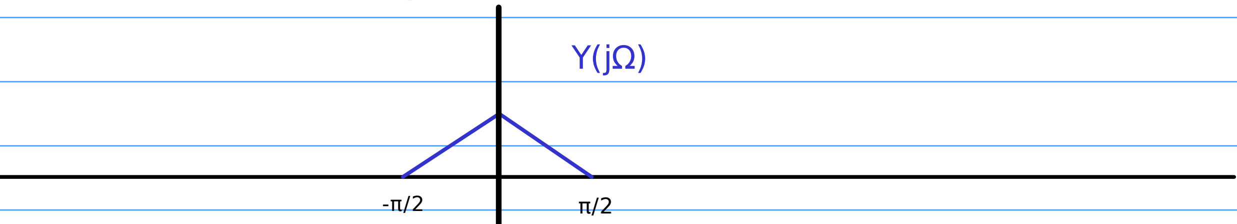
Se cumple:

$2\pi = 4\omega_c T_s$

$\pi/2 = \omega_c T_s$

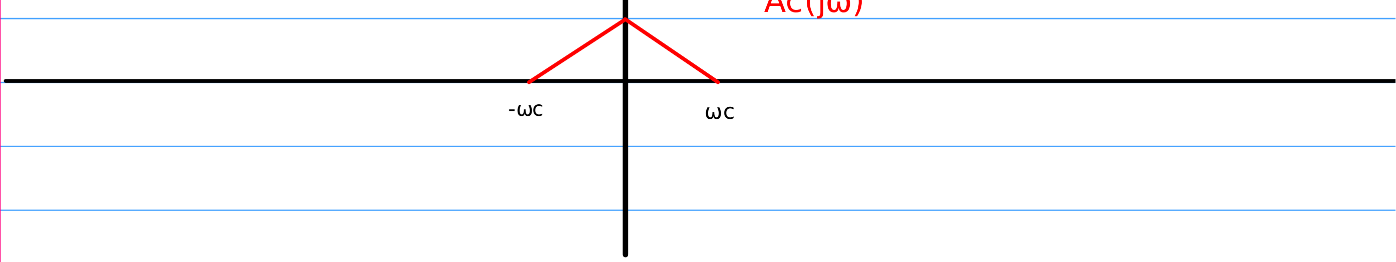
Propongo el filtro $H_d(j\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{, para } |\Omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$





Finalmente llego a $A_c(j\omega)$

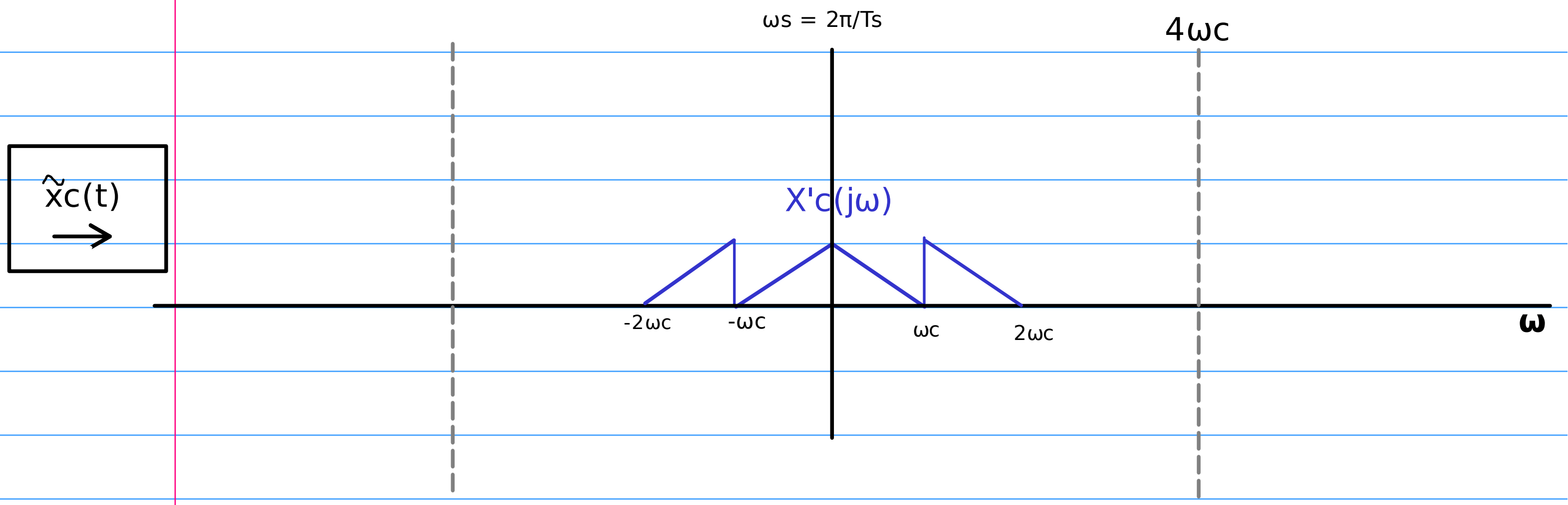
$\omega = \Omega / T_s$



Respuesta final:

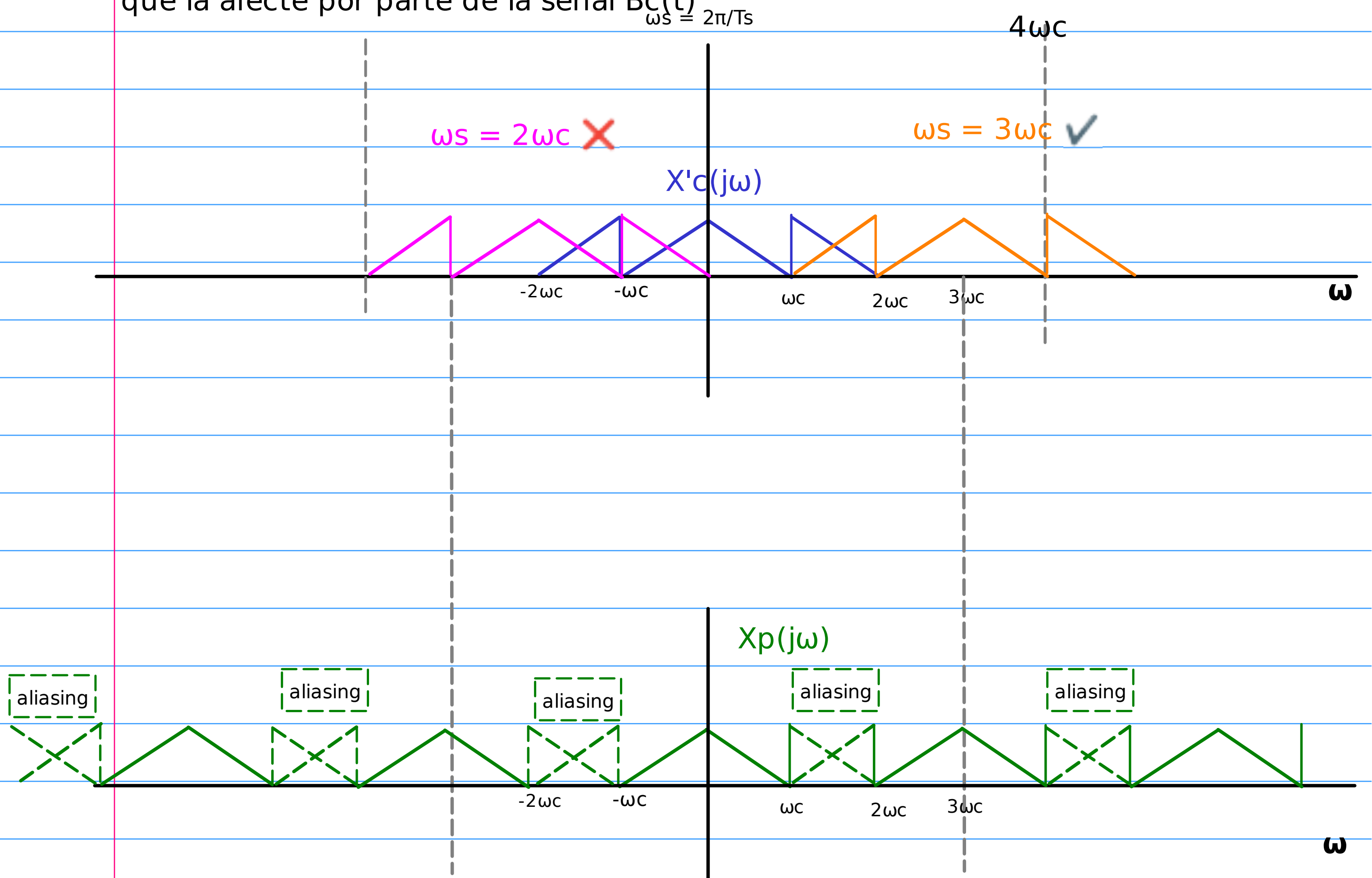
Propongo el filtro $H_d(j\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{, para } |\Omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$

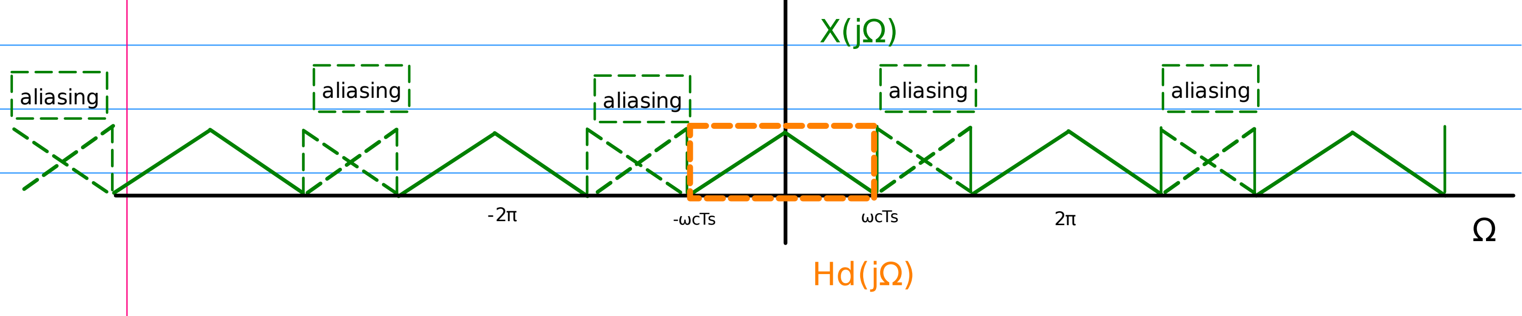
(b) Determine si es posible que $y_c(t) = a_c(t)$ si $\omega_s < 4\omega_c$. Si ese es el caso determine el mínimo valor de ω_s que permite lograr esto y determine $H_d(e^{j\Omega})$ para ese caso.



Rango de ωs posibles < 4ωc

Como deja de cumplir el teorema , habra solapamiento , debo contemplarlo para que luego no afecte , como solo me interesa reconstruir la señal Ac(t) ,con ancho de banda 2ωc podria pensar que es suficiente , sin embargo existira un solapamiento que la afecte por parte de la señal Bc(t)





Se cumple:

$$2\pi = 3\omega c Ts$$
$$2\pi/3 = \omega c Ts$$

Respuesta final: Sí , es posibe

Propongo el filtro $Hd(j\Omega) = \begin{cases} 1 & , \text{para } |\Omega| \leq 2\pi/3 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$

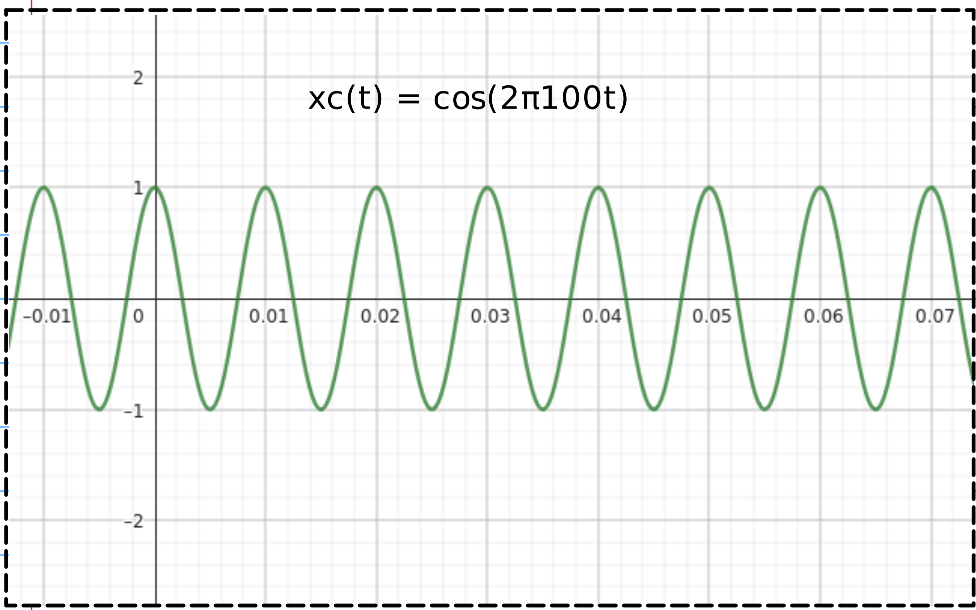
valor de ω_s que ...

3. Sea la señal $x_c(t) = \cos(2\pi \times 100t)$. La misma se muestrea con período de muestreo T que verifica el teorema del muestreo. Se juntan $N = 1500$ muestras de la señal $x[n] = x_c(nT)$ con $n = 0, \ldots, N-1$ y se procede a calcular la DFT $X[k]$ de 1500 puntos de dicha secuencia con $k = 0, \ldots, 1499$. Se desea que la DFT tenga la siguiente forma:

$$X[k] = \begin{cases} A & k = k_1 \\ A & k = k_2 \\ 0 & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

(a) Determine el valor de T para que $k_1 = 150$.
(b) En base a lo determinado en el punto anterior determine k_2 y el valor de A

Periodizar señal , agregando ce



Se conoce $\omega_M = 200\pi$

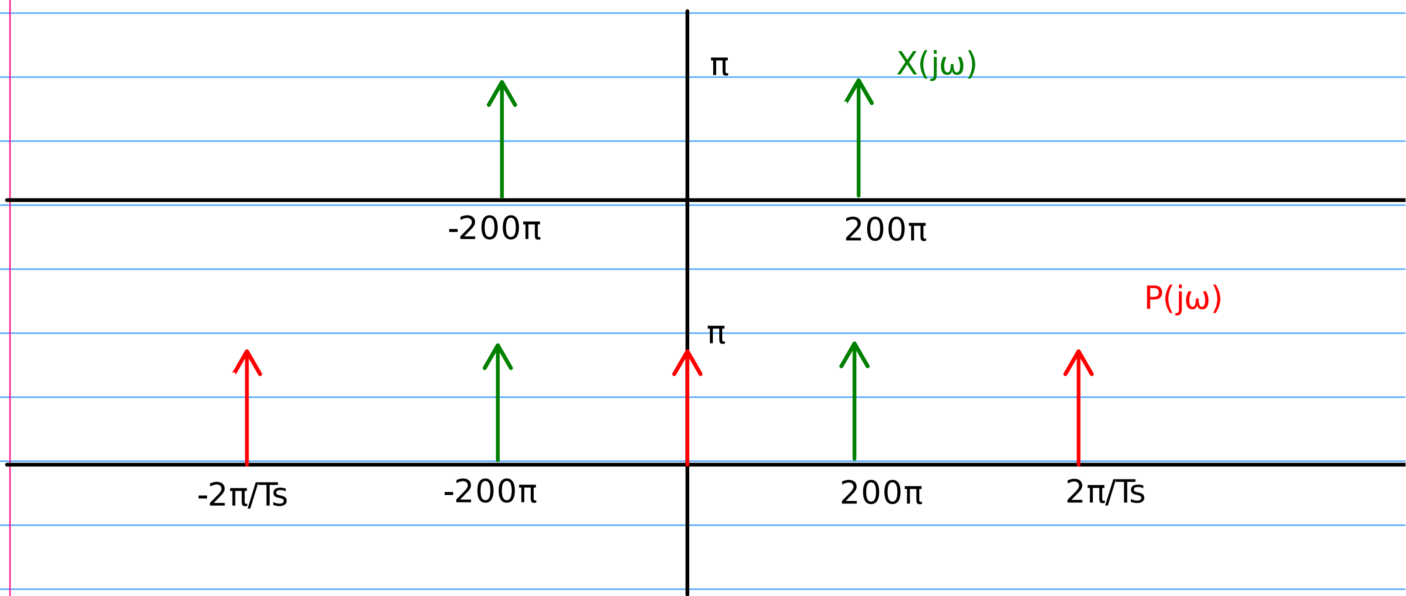
$f_o = 100s$

y si cumple el teorema

$\omega_s = 400\pi = 2\pi T_s$

$T_s = 200$ s

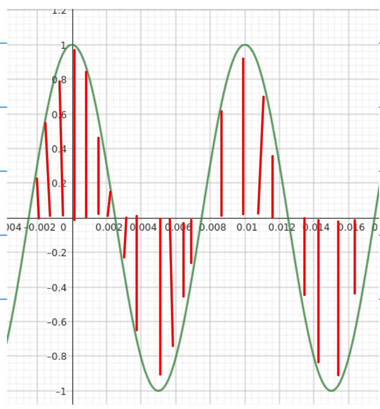
$f_s = 1/200$ Hz

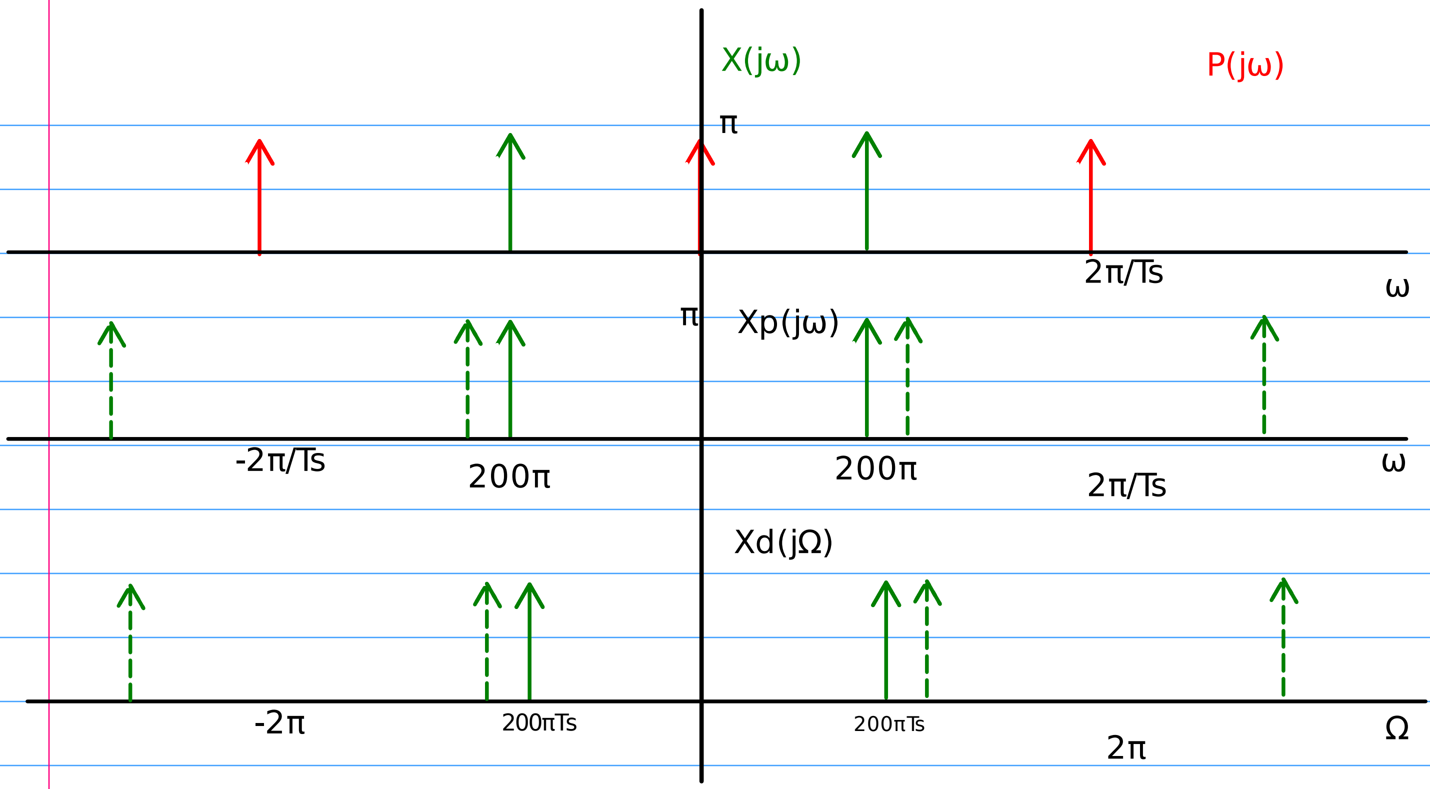


Se juntan N = 1500 muestras

Formando $X_n[n] = x(Tn)$

con $n \in (0, N-1) = (0, 1499)$





Se puede pensar en la DFT (Transformada Discreta de Fourier) como un muestreo de la transformada de Fourier de una señal periódica.

$$W_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

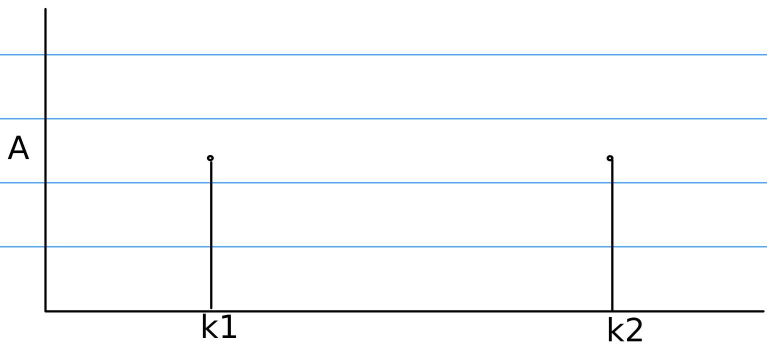
Calculo de la DFT:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{1499} x(Ts\cdot n)\cdot \exp(-j2\pi kn/1500)$$

Es la transformada de x(t) ,pero solo tomando los valores Ts·n

Se espera que la DFT sea de la forma



fs = 1/Ts

$$X[k] = \sum_{n=0}^{1499} x(Ts \cdot n) \cdot \exp(-j \cdot \omega o \cdot Ts \cdot n)$$

$-j2\pi kn/N = -j \cdot \omega o \cdot Ts \cdot n = -j \cdot 2\pi \cdot fo \cdot Ts \cdot n$

$k/N = fo \cdot Ts$

$k/N = fo/fs$

Reemplazo K = k1 = 150 , N = 1500 , fo = 100Hz

$fs = N \cdot fo/k = 1500(100Hz)/150 = 1000$ Hz

$\boxed{Ts = 1/1000 \text{ s}}$

(b) En base a lo determinado en el punto anterior determine k_2 y el valor de A

La DFT se repite cada nTs , si k1 = 150 , k2 = k1/Ts = 1500

K2 = 1500

Como la DFT es equivalente a un muestreo de la transformada de $\cos(\omega o \cdot n)$ y esta tiene amplitud de π.

A = π.

Señal	Transformada de Fourier
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$

A = π