Technische Universität Berlin

Bandlimitierte FM-Synthese per DSF

Semesterpräsentation von Martin Johannes Lieser und Sebastian Zimmermann

1. Problemstellung

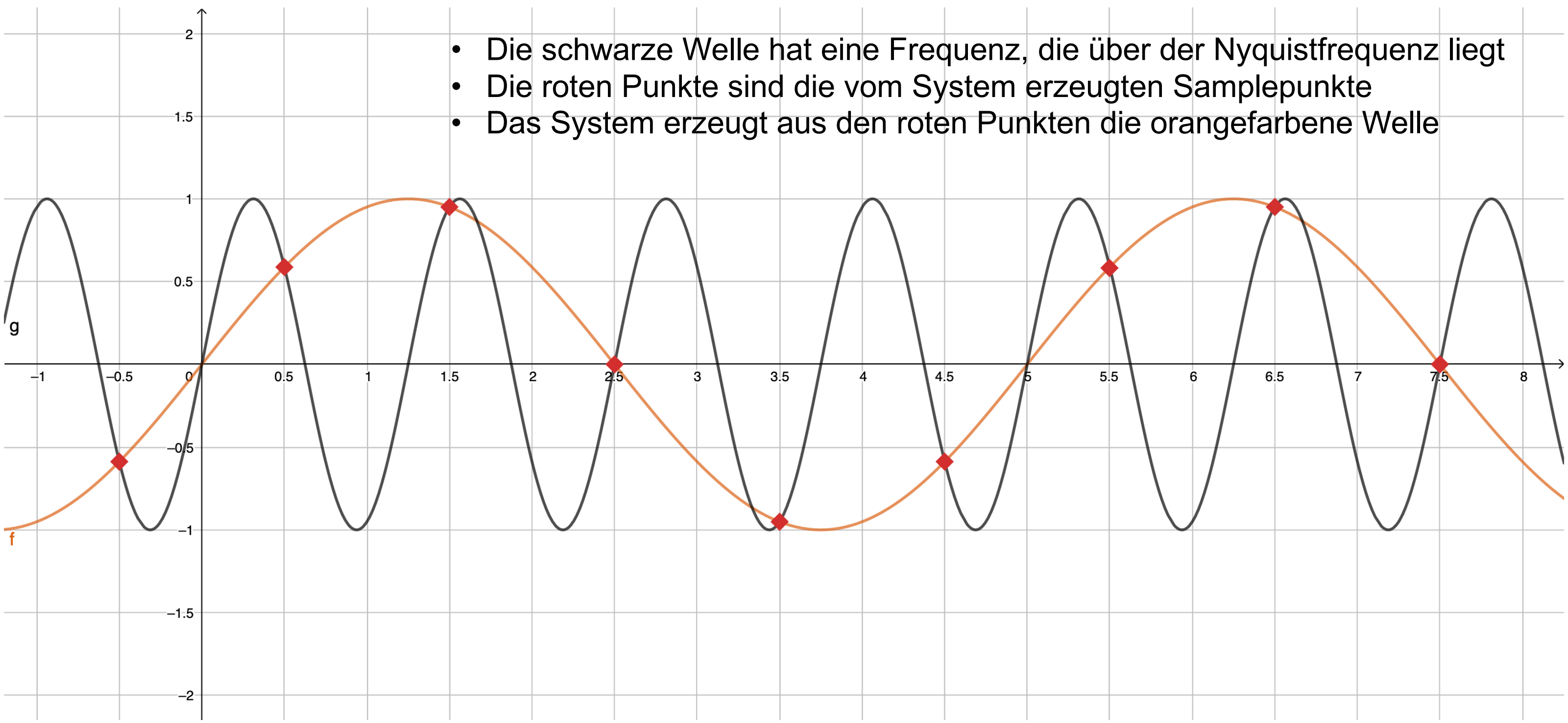
Aliasfrequenzen und Lösungsstrategien

Aliasing

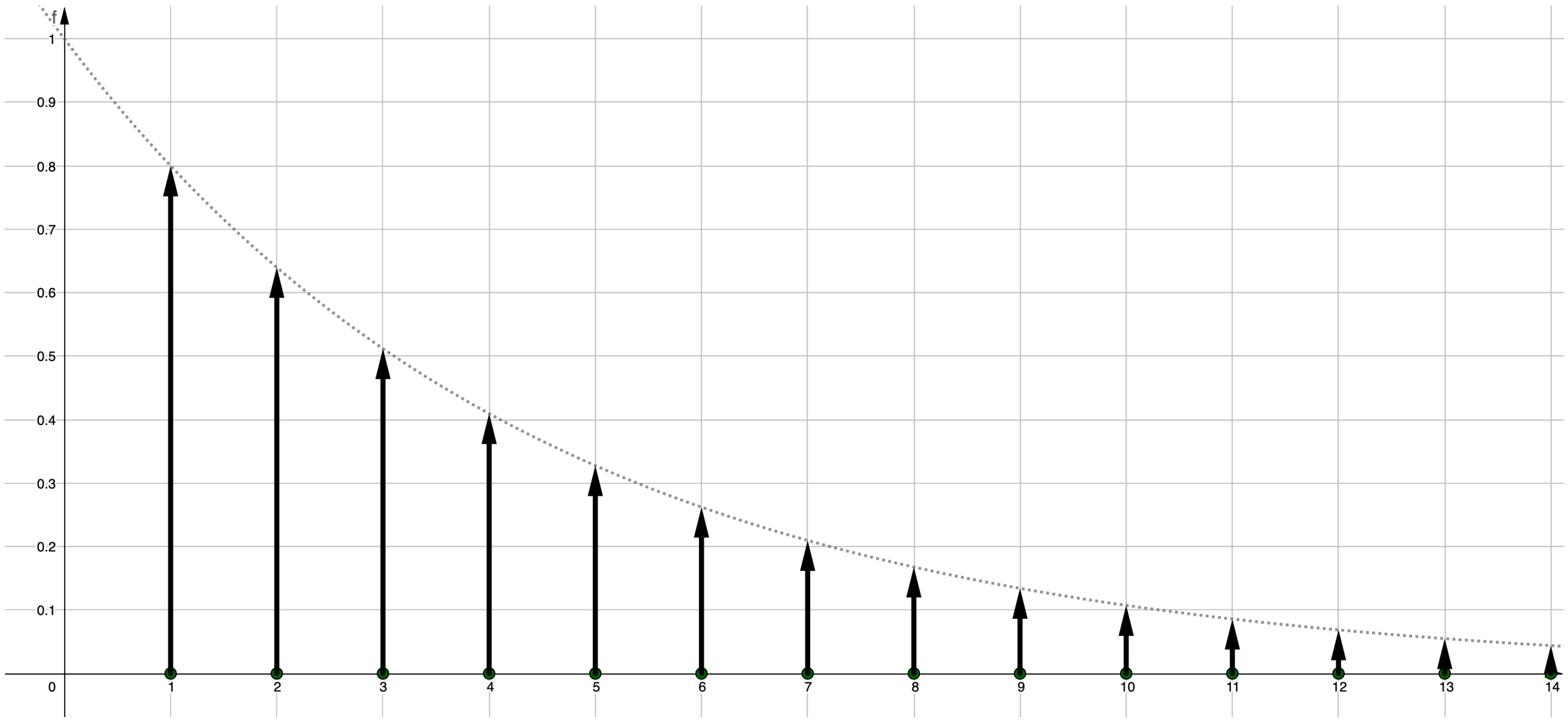
- Bei der digitalen Erzeugung von obertonreichen Wellen entstehen Aliase
- Aliase sind Erzeugungsartefakte – Frequenzen, die keinen Bestandteil des beabsichtigten Frequenzspektrums darstellen

Aliasing

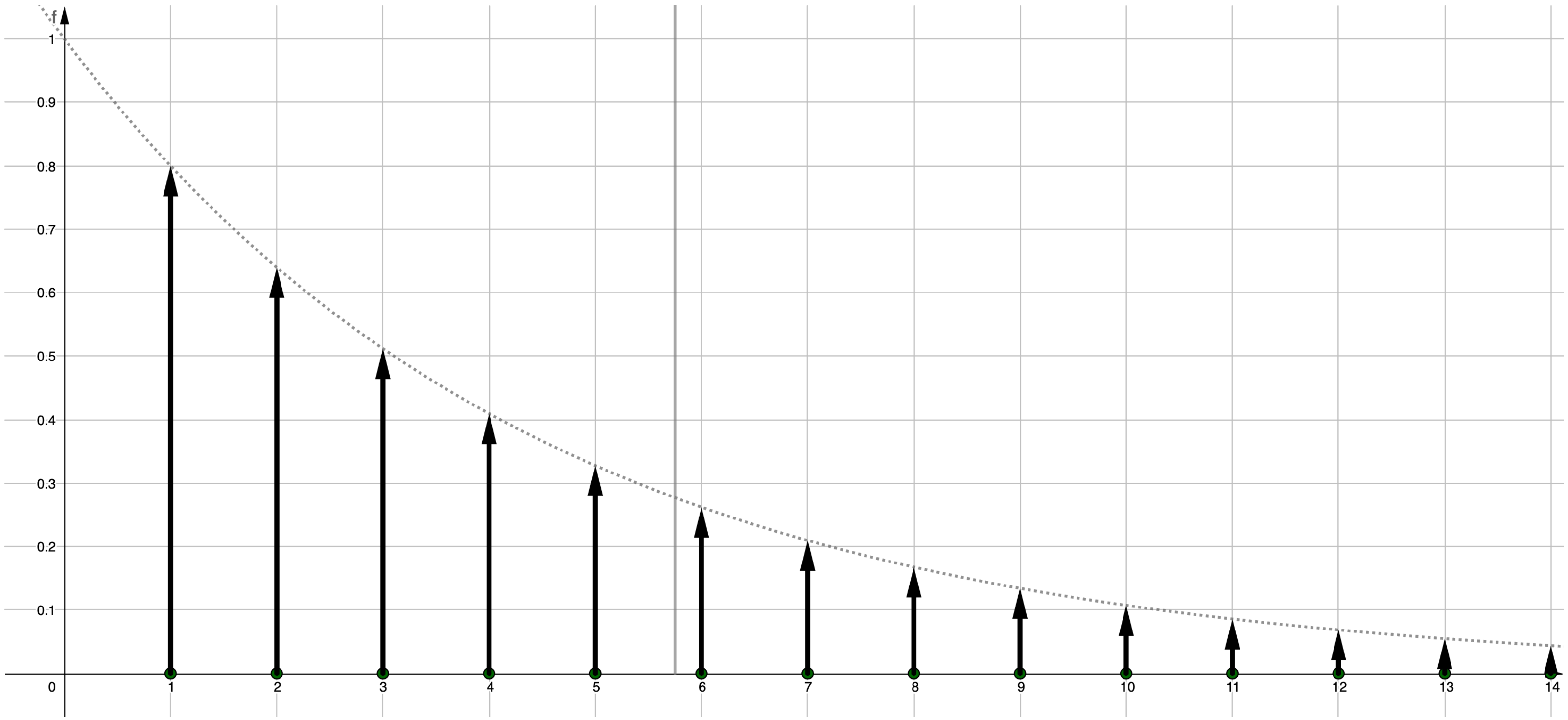
- Die schwarze Welle hat eine Frequenz, die über der Nyquistfrequenz liegt
- Die roten Punkte sind die vom System erzeugten Samplepunkte
- Das System erzeugt aus den roten Punkten die orangefarbene Welle



Aliasing

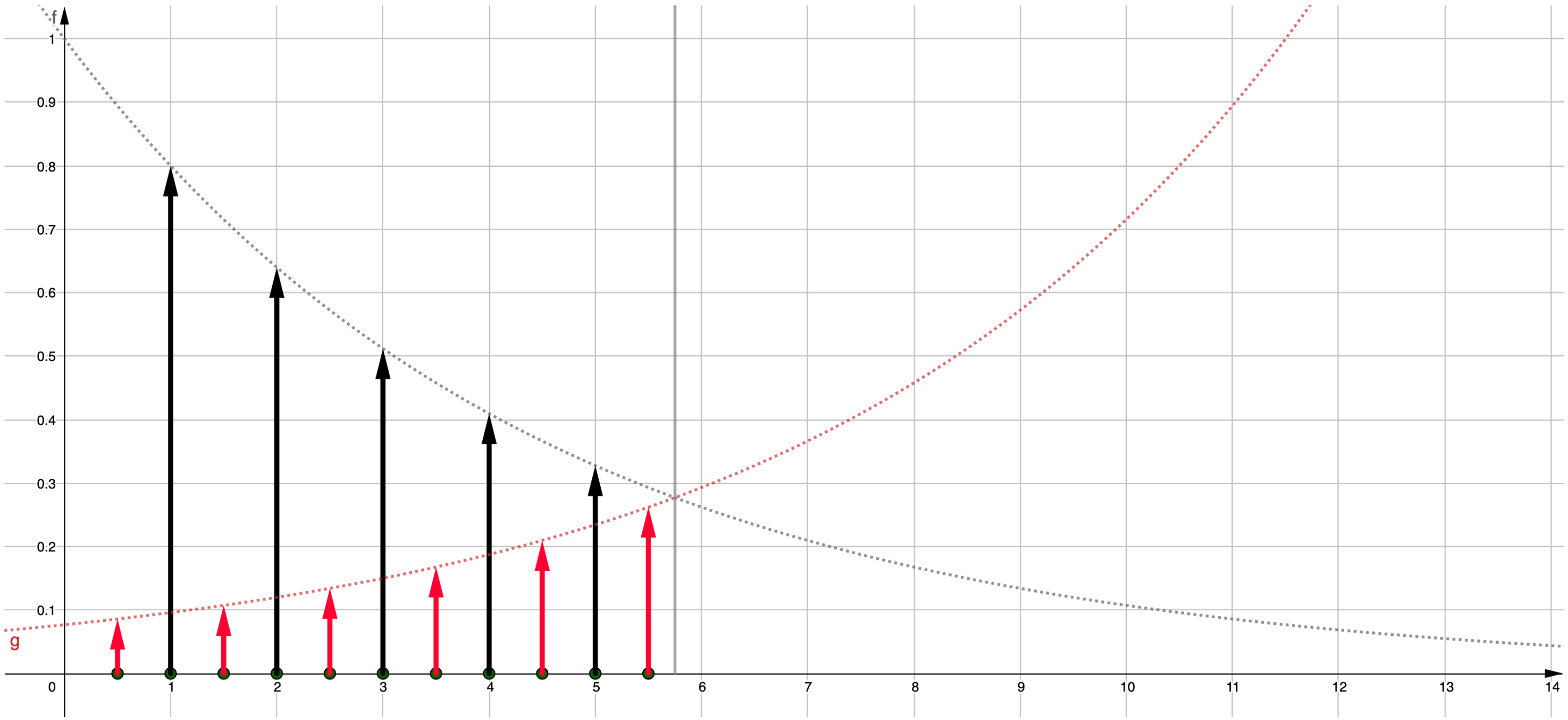


Aliasing



Aliasing

Obertöne jenseits der Nyquistfrequenz werden ins Spektrum „zurückgespiegelt“



Behandlung von Aliasen

- Da Aliase innerhalb des beabsichtigten Frequenzspektrums entstehen, lassen sie sich nicht durch einen Low-Pass-Filter behandeln
- Da die Frequenzen der Aliase durch das Verhältnis von erzeugter Welle und Nyquist-Frequenz bestimmt sind, ist es auch nicht trivial, sie gezielt herauszufiltern (Verhältnis ändert sich mit jeder neuen erzeugten Note)

Behandlung von Aliasen

- Look-Up Tables mit vorgenerierten aliasfreien Wellen (Nachteil: hohe Speicherkomplexität)
- Fouriertransformation von Spektren in den Zeitbereich (Nachteil: Samples werden in Blöcken erstellt, wodurch sich Latenzen akkumulieren können)
- Additive Synthese: Generieren und Aufaddieren der einzelnen Obertöne (Nachteil: hohe Berechnungszeiten für tiefe Töne)
- …
- DSF-Synthese berechnet Obertöne bis zu einer definierten Grenze bei konstanter Laufzeitkomplexität

2. Komplexer Phasor

Erzeugung von Sinuswellen mit komplexen Phasoren

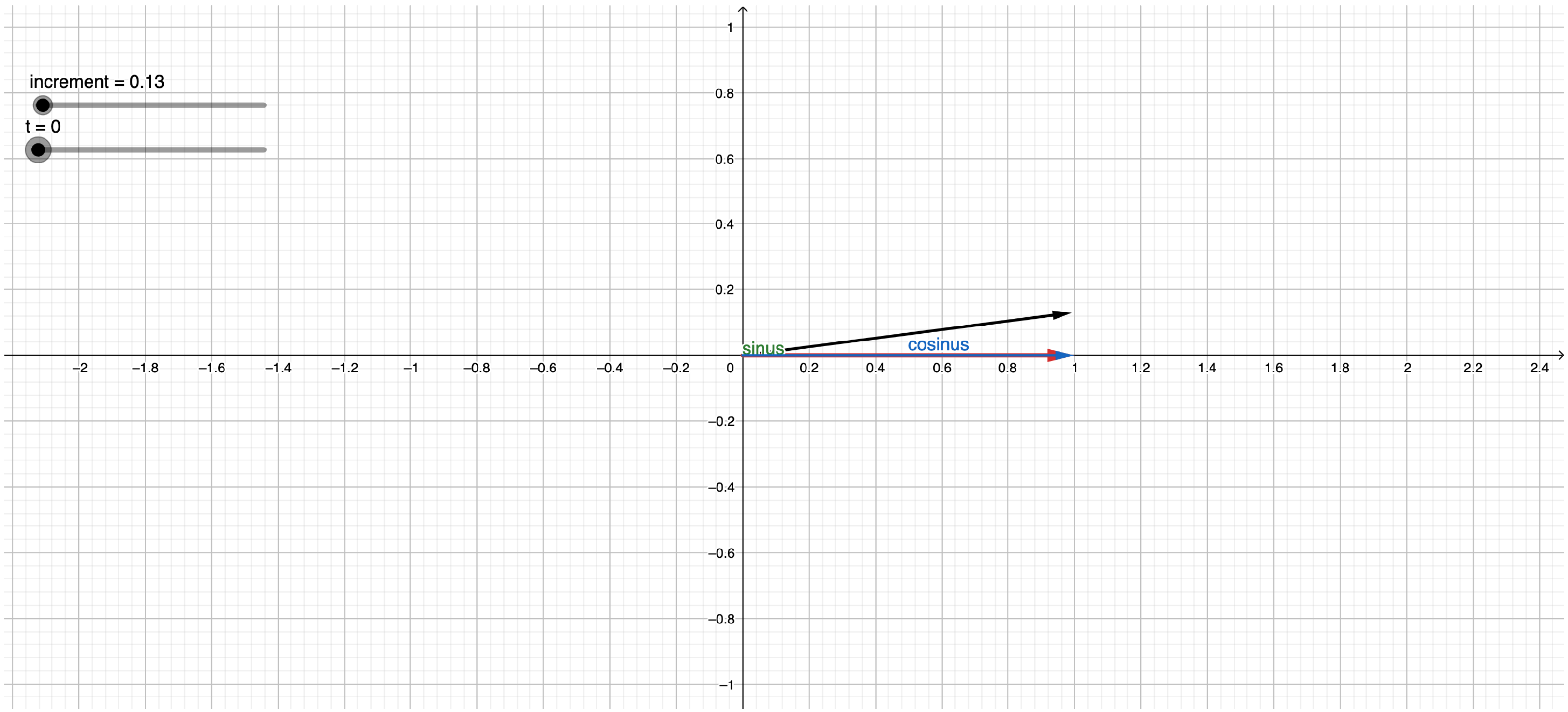
Komplexer Phasor

- Multipliziert man zwei komplexe Zahlen, die auf dem Einheitskreis liegen, liegt das Ergebnis wieder auf dem Einheitskreis
- Betrachtet man die Zahlen als Vektoren, dann ist das Ergebnis die Summe der Vektorenwinkel
- Seien die Variablen x, y komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis
- Wenn in jedem Sampleschritt die Variable x neu berechnet wird, indem x mit y multipliziert wird, dann läuft die Variable x schrittweise den Einheitskreis ab

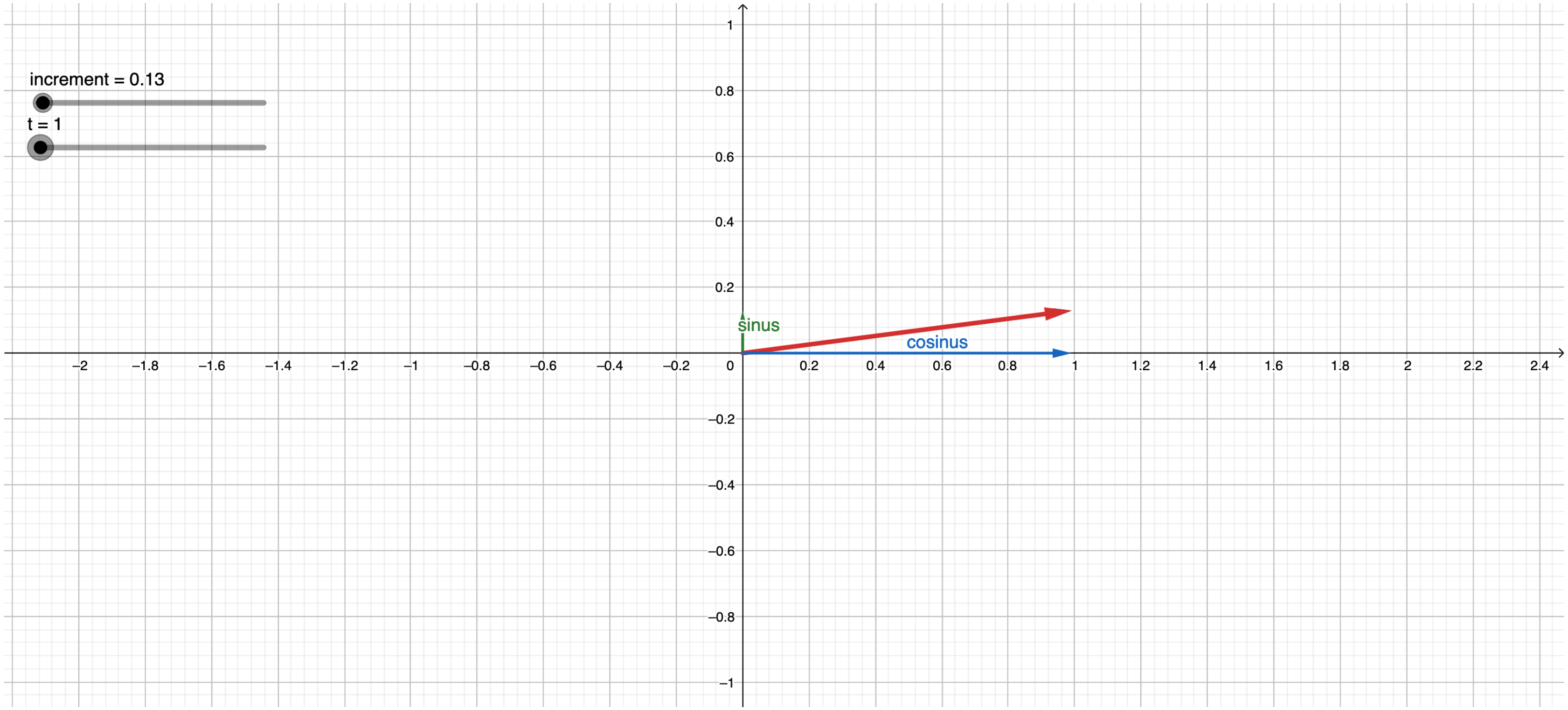
$$x_t = x_{t-1} * y$$

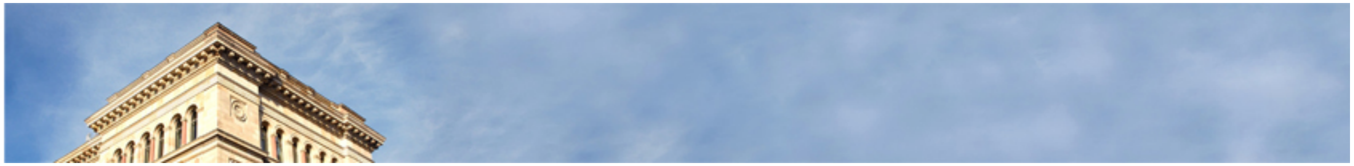
- Schrittgröße ist dabei der Winkel der Variablen y

Komplexer Phasor



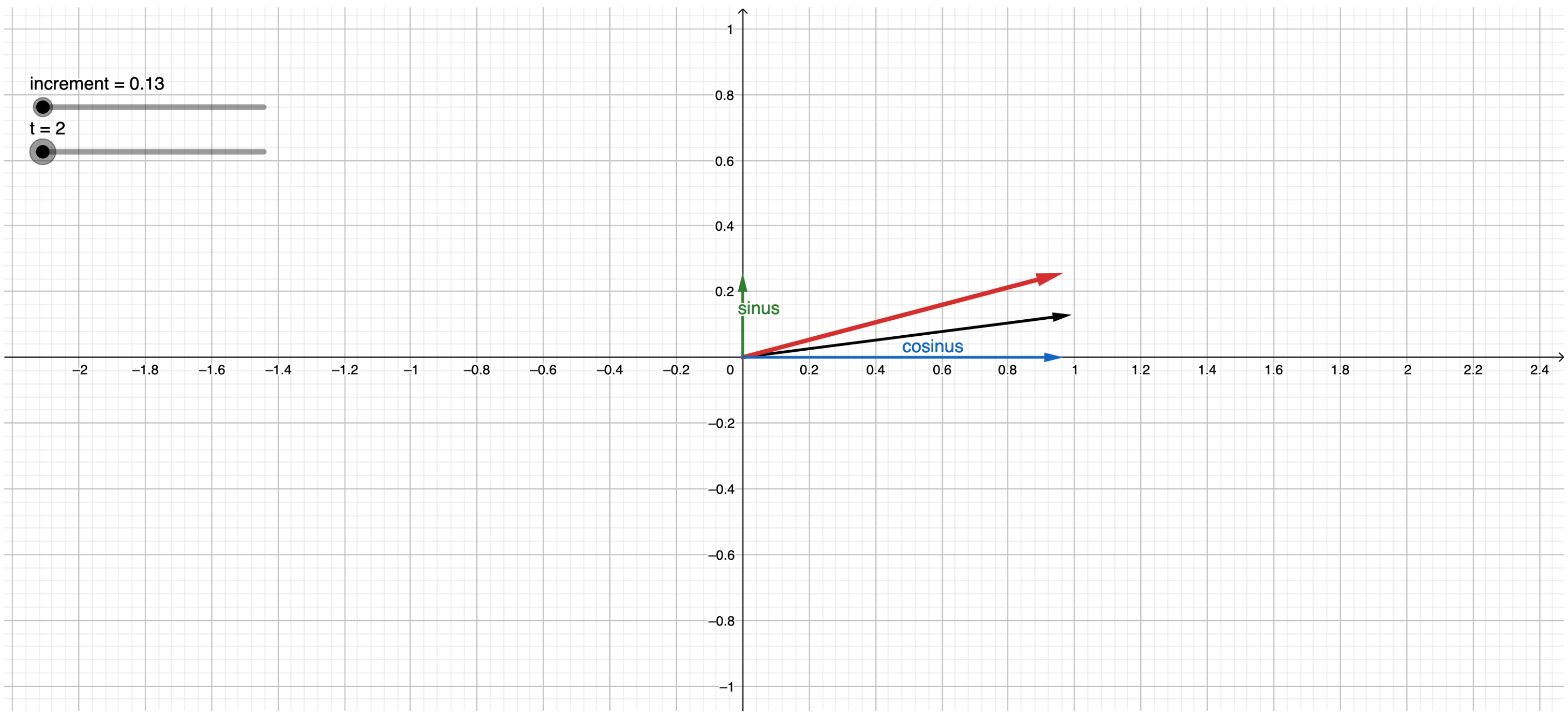
Komplexer Phasor



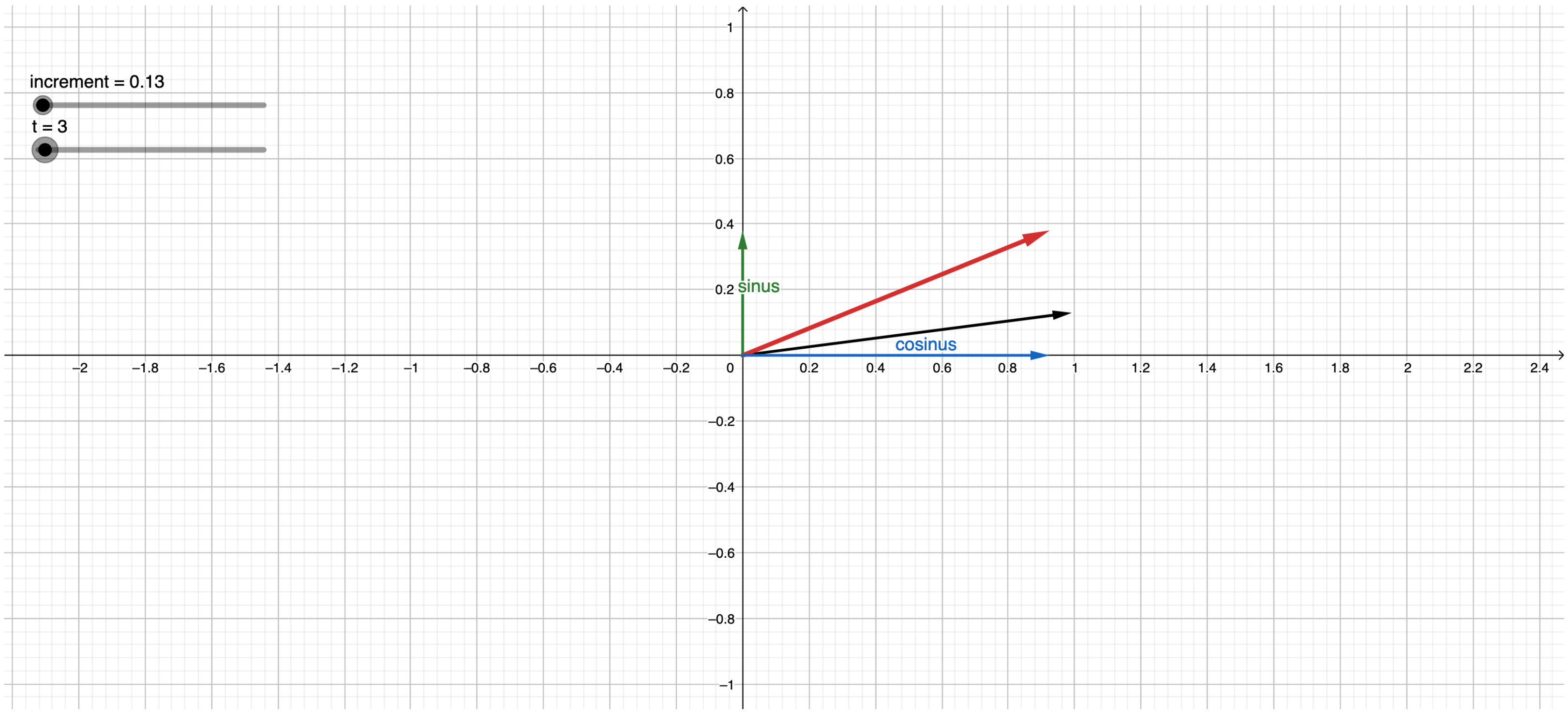


Technische Universität Berlin

Komplexer Phasor



Komplexer Phasor

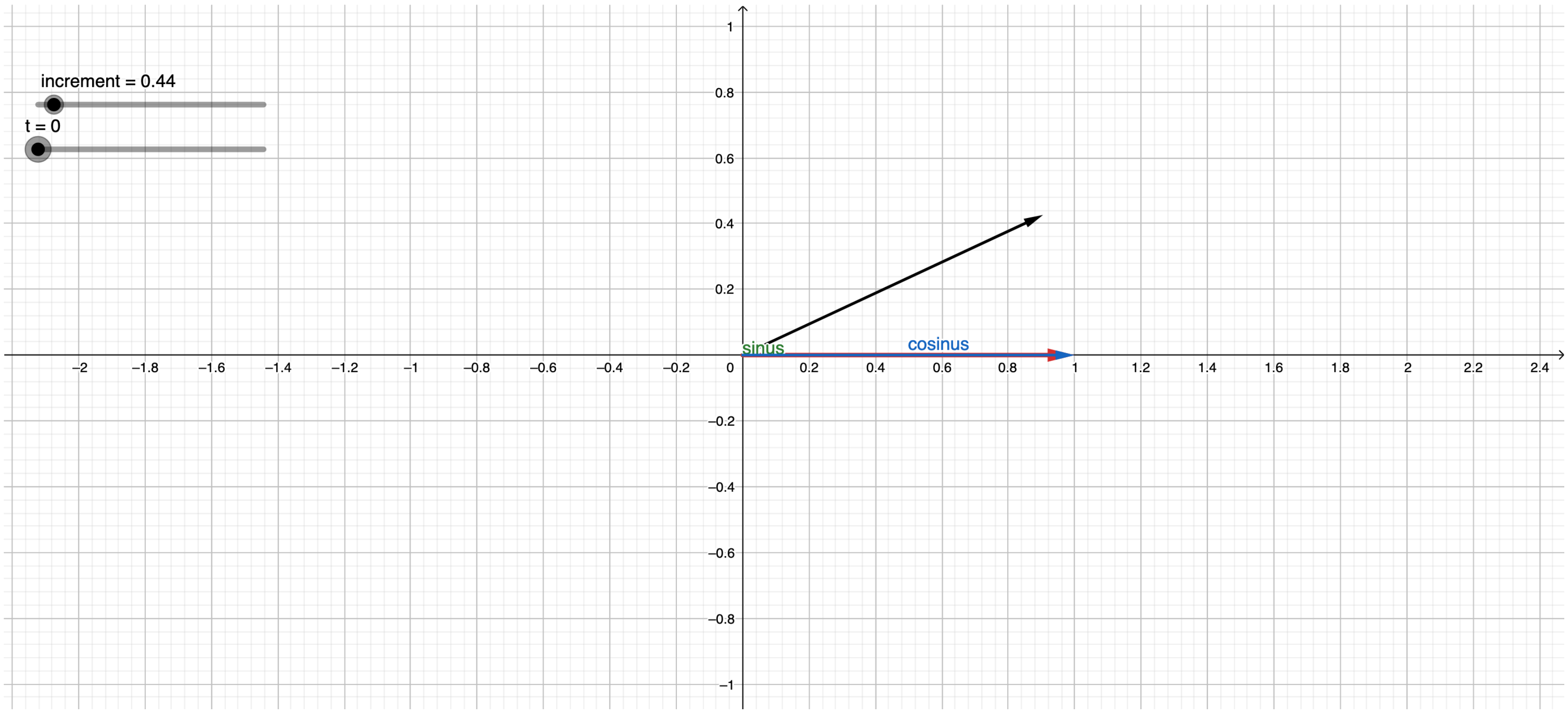


Komplexer Phasor

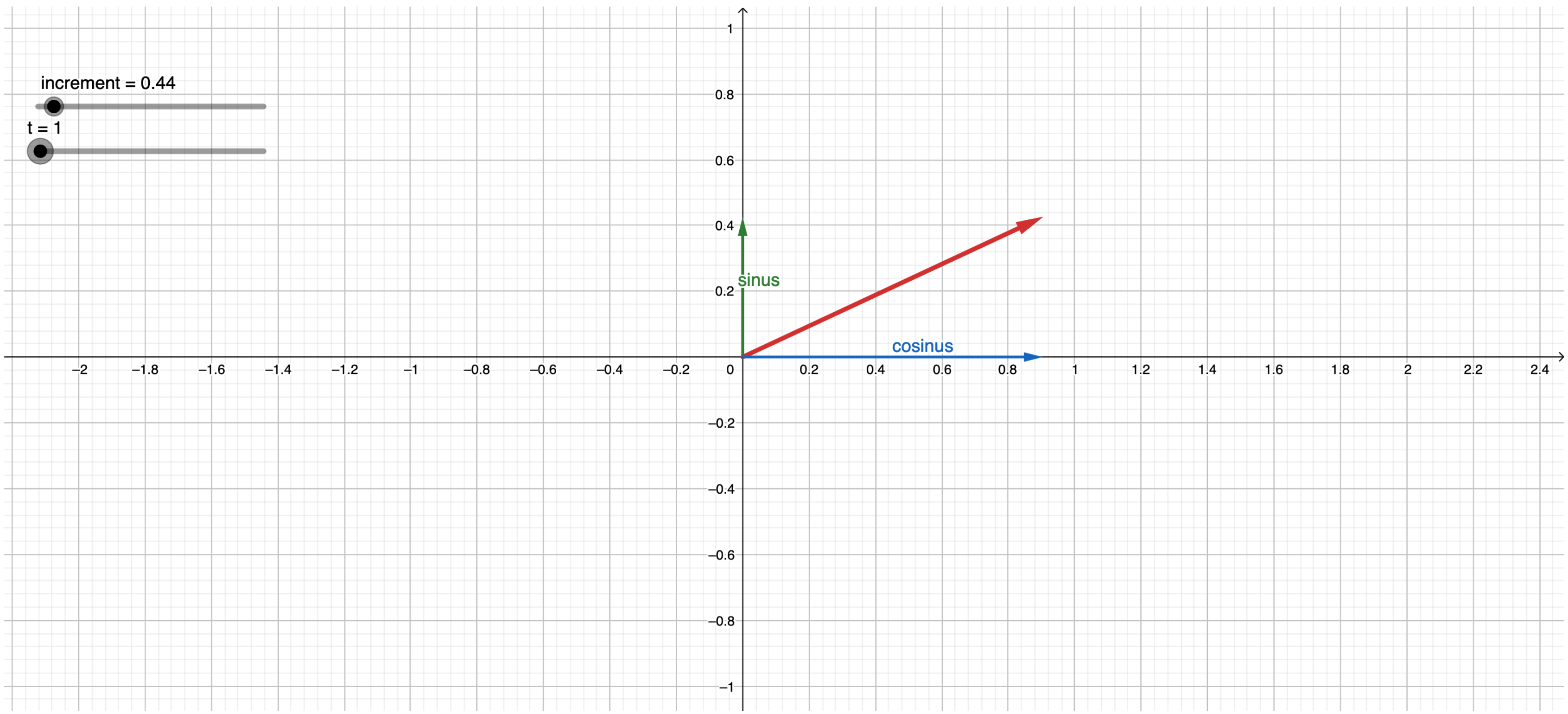
Frequenz kontrollieren

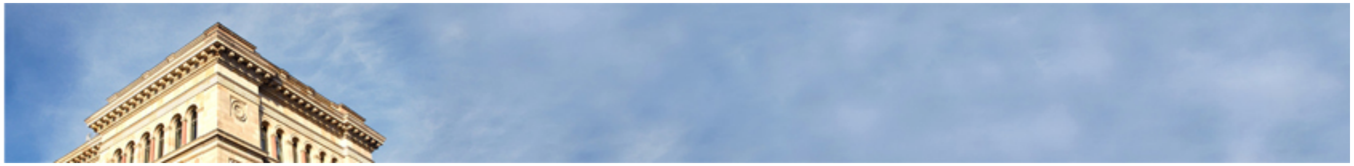
- Durch die Wahl von y kann die Frequenz kontrolliert werden, mit der x um den Einheitskreis wandert
- Realteil und Imaginärteil von x können als Cosinus- und Sinuswellen ausgegeben werden
- Die direkte Berechnung der Cosinus- und Sinuswellen wird durch die komplexe Multiplikation in der Formel $x_t = x_{t-1} * y$ ersetzt
- Da Cosinus und Sinus in Quadratur zueinander liegen, kann man die Ausgabe benutzen, um die Phase zu manipulieren

Komplexer Phasor, höhere Frequenz



Komplexer Phasor, höhere Frequenz

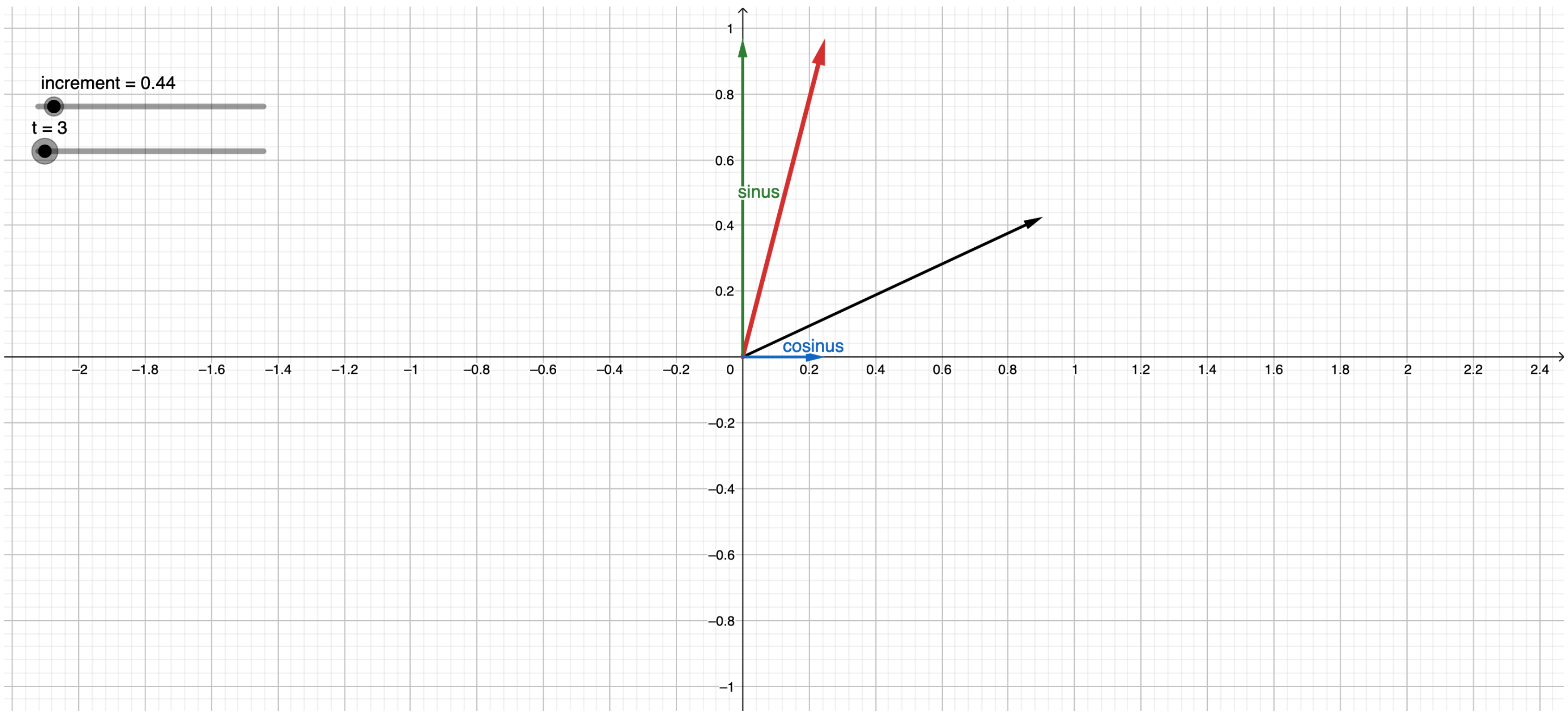




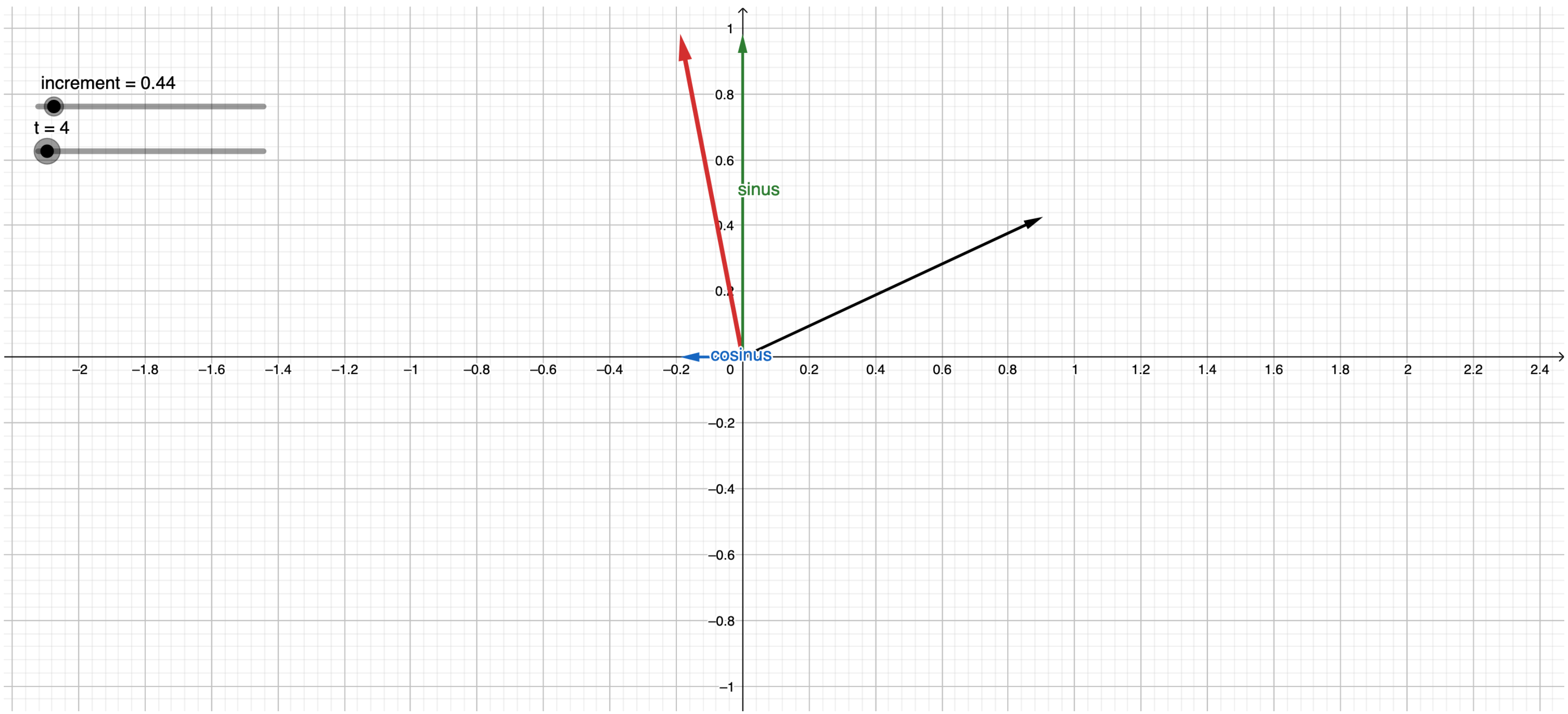
Technische Universität Berlin

Komplexer Phasor, höhere Frequenz

Komplexer Phasor, höhere Frequenz



Komplexer Phasor, höhere Frequenz



3. DSF

Erzeugung von bandlimitierten obertonreichen Signalen

Ziel der DSF

- Es soll eine Summe von Sinuswellen erzeugt werden

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N} A^k \sin(2\pi(f_c + k * f_h) * \frac{t}{f_s})$$

- $0 < A < 1$
- $f_c = Grundfrequenz$
- $f_h = Frequenz\ der\ Obertöne$
- $f_s = Samplefrequenz$
- $N = höchster\ zu\ erzeugender\ Oberton$

Umformulierung mit komplexen Phasoren

- Statt die Sinuswellen direkt zu berechnen, benutzen wir die komplexe Multiplikation von Phasoren:

$$x_t = \sum_{k=0}^{N} x_{t-1} * y^k$$

- $0 < |y| < 1$
- $N = \textit{höchster zu erzeugender Oberton}$
- x_t muss noch normiert werden!

Geschlossene Form

- Diese Summe entspricht einer geometrischen Reihe, für die die folgende geschlossene Form abgeleitet werden kann:

$$x_t = \sum_{k=0}^{N} x_{t-1} * y^k = x_{t-1} * \frac{1 - y^{N+1}}{1 - y}$$

- Diese geschlossene Form kann nun in einem Berechnungsschritt berechnet werden
- Der Ausdruck y^{N+1} kann durch einen *divide & conquer*-Ansatz mit $\log(n)$ Schritten berechnet werden

Normalisierung

- Durch Summierung der Obertöne steigt die Amplitude des Signals
- Die erzeugte Lautstärke lässt sich berechnen durch:

$$A = \sum_{k=0}^{N} |y|^k = \frac{1 - |y|^{N+1}}{1 - |y|}$$

- Die erzeugten Signale müssen durch diesen Faktor geteilt werden, um sie auf den Bereich $-1..1$ zu normalisieren

4. Ausblick

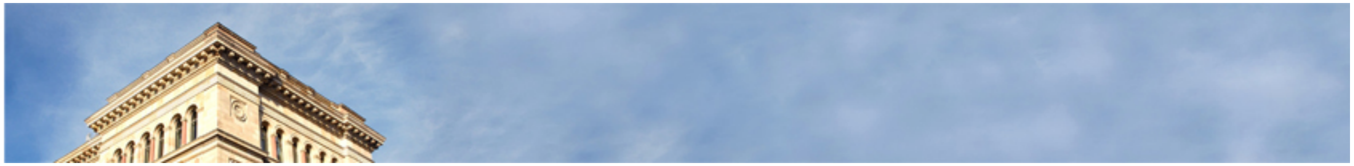
FM-Synthese und Anti-Aliasing

FM-Synthese

- FM-Synthese erzeugt eine unendliche Anzahl an neuen Frequenzbändern
- Diese Frequenzbänder werden wieder an den Grenzen des darstellbaren Spektrums zurückgespiegelt und erzeugen Aliase
- Klassische FM-Synthesizer wie der FM7 behandeln die Aliase nicht

FM-Synthese mit DSF

- Wir wollen für die unendlichen Seitenbänder, die durch FM-Synthese entstehen, eine geschlossene Formel finden
- Diese geschlossene Formel wollen wir analog zur Berechnung der Obertöne mit komplexen Phasoren berechnen
- Den Prototypen entwickeln wir schrittweise entlang der Schritte, die wir hier vorgestellt haben
- Unser Prototyp ist aktuell auf dem Stand, dass ein frequenzgenau einstellbarer Sägezahn erzeugt wird, wobei Impementierung und PureData-Interface voneinander getrennt sind und alles problemlos kompiliert und ausgeführt werden kann



Ende.

Fragen?