

# Trajectory Tracking in a Mobile Robot without Using Velocity Measurements for Control of Wheels

R. Silva-Ortigoza, G. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, V. R. Barrientos-Sotelo, J. M. Albarrán-Jiménez y V. M. Silva-García

**Abstract**— In this paper we present a solution for the trajectory tracking problem in a Newt mobile robot. We exploit the differential flatness property of the robot kinematic model to propose an input-output linearization controller which allows both the position and the orientation to track a desired trajectory. An important assumption is that robot has to be initially placed at a point on such a desired trajectory. This controller provides the velocity profiles that the robot wheels have to track and a second controller has to be designed in order to ensure the latter. This is accomplished by means of another differential flatness based control scheme which does not require measurements of any mechanical variables, i.e. velocities, to control the DC motors used as actuators at the wheels. We verify our findings through numerical simulations.

**Keywords**— DC Motor, Differential flatness, Mobile Robots, Trajectory Tracking.

## I. INTRODUCCIÓN

EN las últimas décadas el control de robots móviles con ruedas (RMR) ha sido objeto de interés. Éstos se enmarcan dentro de la teoría de control en el área que se conoce como control de sistemas no-holónomos, los cuales se caracterizan por estar sujetos a restricciones no integrables en las velocidades; es decir, su plano de velocidades está restringido [1]. Desde el punto de vista de la teoría de control, los problemas principales asociados a los RMR son: la regulación a un punto de equilibrio, el seguimiento de trayectorias, la planificación de trayectorias y la evasión de obstáculos.

---

R. Silva-Ortigoza, V. R. Barrientos-Sotelo y V. M. Silva-García se encuentran adscritos al Área de Mecatrónica del CIDETEC-IPN. Unidad Profesional Adolfo López Mateos. C.P. 07700, México, D.F., MÉXICO. (correos e.: rsilvao@ipn.mx, vrbs11@yahoo.com, vsilvag@ipn.mx). RSO agradece el soporte económico recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN (SIP-IPN), a través del proyecto 20080821 y del programa EDI, así como del Sistema Nacional de Investigadores (SNI-México).

G. Silva-Ortigoza se encuentra adscrito a la Universidad Autónoma de Puebla. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Ap. Postal 1152. C.P. 72001, Puebla, Pue., MÉXICO. (correo e.: gsilva@fcfm.buap.mx). Agradece el soporte económico recibido por la UAP, así como del SNI-México.

V. M. Hernández-Guzmán se encuentra adscrito a la Universidad Autónoma de Querétaro. Facultad de Ingeniería. Ap. Postal 3-24. C.P. 76150, Querétaro, Qro., MÉXICO. (correo e.: vmhg@uaq.mx).

J. M. Albarrán-Jiménez se encuentra adscrito al Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco. C.P. 55700, Coacalco, Edo. de México, MÉXICO. (correo e.: martin\_albarran@hotmail.com).

Según [2], se sabe que un sistema no-holónomo no puede ser estabilizado asintóticamente a un punto de equilibrio por medio de una ley de control diferenciable, a pesar de que el sistema sea completamente controlable. En consecuencia, el problema de estabilización de sistemas no-holónomos sólo puede lograrse mediante leyes de control no diferenciables [3] o dependientes del tiempo [4]-[8], si bien, el problema de seguimiento de trayectoria de sistemas no-holónomos puede llevarse a cabo por medio de leyes de control diferenciables. El diseño de controladores para resolver este problema ha sido abordado desde diferentes puntos de vista. En [9] se presentaron resultados experimentales del control de seguimiento de trayectoria en un robot móvil tipo trailer. Para controlar el movimiento del móvil se propuso un esquema de control jerarquizado en dos niveles. El nivel bajo en la jerarquía de control consiste en dos sistemas de control de velocidad independientes, uno para el motor de tracción y otro para el motor de dirección. El control de velocidad de los motores se realiza con controladores PID sintonizados de forma individual, aunque no es transparente el modelo dinámico que se emplea. El nivel alto del control jerarquizado se encarga de controlar el modelo cinemático del móvil para llevar a cabo la tarea de seguimiento de trayectoria. El controlador de este nivel se basa en un esquema de control LQR (Linear Quadratic Regulator) y se encarga de generar los perfiles de velocidad deseados para el control de nivel bajo. En [10] se presentaron resultados en simulación y experimentales del control de seguimiento de trayectoria en un RMR tipo Newt. En [10] se propuso un control jerarquizado en dos niveles: control interno y control externo. El lazo de control interno, compuesto de dos controladores PID, se encarga de controlar las velocidades angulares de los motores que generan la tracción del móvil. El diseño de los controladores PID toma en cuenta que el valor de las inductancias de armadura son despreciables, i.e.,  $L=0$ . El lazo de control externo consiste de un esquema de linealización entrada-salida por realimentación de estado. Este control se asocia al modelo cinemático del móvil y se encarga de generar los perfiles de velocidad angular deseados de los motores. Con el fin de evitar las singularidades inherentes a este tipo de leyes de control, se propone un esquema de control de estructura variable que conmuta entre dos variables de salida diferentes. Por otro lado, explotando la propiedad de planitud diferencial que satisface el modelo cinemático del robot móvil tipo Newt [11], en [12] se propuso un control basado en

modos deslizantes. En la referencia [13], linealizando el modelo dinámico de un RMR por medio del método del par calculado [14], se llevo a cabo el control de seguimiento de trayectorias a través de un control basado en modos deslizantes.

El objetivo de este trabajo es diseñar un control de seguimiento de trayectorias preestablecidas en el plano cartesiano de un RMR tipo Newt, sin utilizar sensores mecánicos en el control de los actuadores. Esto se consigue diseñando dos controladores independientes, como se explica a continuación, que luego se interconectan para que trabajen juntos.

Para el modelo cinemático del RMR, se propone un control sencillo que permite llevar a la posición y a la orientación a que sigan una trayectoria nominal bajo la condición de que el móvil se encuentre inicialmente sobre un punto de esta trayectoria, que sin pérdida de generalidad se elige como el origen. Esto se realiza mediante un controlador basado en linealización de entrada-salida, que controla directamente a la orientación y a una de las coordenadas de posición del móvil. Esto genera una dinámica remanente la cual se demuestra que es estable asegurando un correcto seguimiento de la trayectoria deseada.

Para el sistema de actuadores del RMR, formado por dos motores de CC independientes, se propone, para cada uno, un controlador basado en planitud diferencial. Este controlador lleva a cabo la tarea de seguimiento de los perfiles de velocidad angular requeridos por el modelo cinemático del robot móvil. A diferencia de los trabajos previos en el tema, en los que se controla en forma explícita los actuadores del móvil, ver [9] y [10], en este trabajo se considera la dinámica eléctrica del motor para diseñar el controlador; es decir, no se supone que la inductancia de armadura es cero. De hecho, esta es una característica adecuada a este proyecto porque permite diseñar un controlador para la velocidad de las ruedas del robot, usando solamente medidas de tensión y corriente de armadura. Esto significa que no es necesario utilizar sensores para medir la velocidad de las ruedas. Es importante subrayar que en la mayoría de los trabajos citados en la literatura existente, sobre el control de robots móviles, no se estudia el control de los motores o actuadores debido a que se trabaja con robots comerciales, los cuales incluyen el control de estos. Por lo tanto, basta con programarles los perfiles de velocidad deseados.

Este trabajo está organizado de la forma siguiente. En la sección II se presenta un controlador basado en linealización de entrada-salida para el modelo cinemático del móvil. Además, empleando el concepto de planitud diferencial se introduce un control de velocidad angular para un motor de CC. Al final de esta sección, se presenta la integración de estos controladores, lo cual permite llevar a cabo la tarea de seguimiento de trayectoria del robot móvil. En la sección III se presentan algunos resultados obtenidos en simulación, con la finalidad de evaluar el funcionamiento de los controladores propuestos. Finalmente, en la sección IV se presentan las conclusiones del trabajo, así como trabajos futuros y

probables extensiones del mismo.

## II. CONTROL DEL RMR SIN USO DE SENSORES MECÁNICOS

En primer lugar se propone, por separado, un controlador para el modelo cinemático y otro controlador para los motores de CC que constituyen los actuadores del RMR. Después, mediante la propuesta de un control jerarquizado análogo a los presentados en [9] y [10] se integran ambos controladores.

### II-A. Control del modelo cinemático del robot móvil usando linealización entrada-salida por realimentación estática

El robot móvil bajo estudio es un vehículo que tiene dos llantas traseras, izquierda y derecha, idénticas que son paralelas entre sí, no deformables y unidas por un eje. Además, usa una rueda frontal omnidireccional que asegura que la plataforma del robot se encuentre sobre un plano. Suponiendo que el movimiento se lleva a cabo sobre el plano  $XY$  y que las llantas ruedan sin deslizarse, en la literatura existente se encuentra que las ecuaciones que describen la cinemática del móvil están dadas por [11]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \cos\varphi, \\ \dot{y} &= \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{(\omega_d - \omega_i)r}{2l},\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $(x,y)$  denota la posición del punto medio del eje que une las dos llantas traseras,  $\varphi$  es el ángulo que forma el eje de simetría del móvil respecto al eje  $X$  positivo,  $\omega_i$  y  $\omega_d$  son las velocidades angulares de las llantas izquierda y derecha respectivamente, mientras que  $r$  es el radio de las llantas y  $2l$  es la separación entre ellas, para mayor claridad véase la Fig. 1. Este robot móvil es conocido como robot tipo Newt. En estas ecuaciones, y en lo que resta del trabajo, la derivada con respecto al tiempo,  $t$ , se denota por un punto.

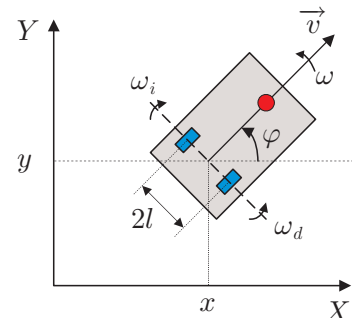


Fig. 1. Diagrama del robot móvil.

Dadas las entradas de control  $(\omega_d, \omega_i)$ , un controlador basado en linealización de entrada-salida, mediante realimentación estática, podría llevarse a cabo para cualquier par de salidas:  $(x,y)$ ,  $(x,\varphi)$  o  $(y,\varphi)$ . En consecuencia, en cada uno de los casos, existirá una *dinámica remanente* o *dinámica cero*, que para asegurar que el sistema en lazo cerrado sea

estable es crucial analizar su propiedad de estabilidad.

En este trabajo, siguiendo [10], se diseña un control sobre las variables de salida  $(x, \varphi)$  y se estudia la estabilidad en lazo cerrado de la dinámica remanente, asociada a la variable de estado  $y$ . Para ello se reescriben las ecuaciones que describen la cinemática del robot móvil en dos subsistemas. El primero, dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{r \cos \varphi}{2} & \frac{r \cos \varphi}{2} \\ \frac{r}{2l} & -\frac{r}{2l} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

el cual implica únicamente las variables de estado a controlar,  $(x, \varphi)$ , y el segundo

$$\dot{y} = \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \sin \varphi, \quad (3)$$

tiene en cuenta la dinámica remanente asociada a la variable de estado  $y$ , una vez que se han controlado los estados  $(x, \varphi)$ , es decir,  $x \rightarrow x^*$  y  $\varphi \rightarrow \varphi^*$ .

Puesto que,  $\det(A_1) = -\frac{r^2 \cos \varphi}{2l}$ , es claro que se puede proponer un controlador donde se toma como salida al par  $(x, \varphi)$  excepto en  $\varphi = \frac{k\pi}{2}$  donde  $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ . Es decir, siempre que  $A_1$  sea invertible. Para obtener la relación entre los controles de entrada,  $(\omega_d, \omega_i)$ , y las variables de salida,  $(x, \varphi)$ , de (2) se obtiene directamente que:

$$\begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} & \frac{l}{r} \\ \frac{1}{r \cos \varphi} & -\frac{l}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

De estas relaciones de entrada-salida, se obtiene que los controles,  $(\omega_d, \omega_i)$ , que permiten que los estados  $(x, \varphi)$  tiendan asintóticamente a la trayectoria deseada  $(x^*, \varphi^*)$ , se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} & \frac{l}{r} \\ \frac{1}{r \cos \varphi} & -\frac{l}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\varphi \end{pmatrix}, \quad (5)$$

donde  $u_x$  y  $u_\varphi$  son dos variables auxiliares de control, las cuales se prescriben como

$$\begin{aligned} u_x &= \dot{x}^* - \alpha_x (x - x^*), \\ u_\varphi &= \dot{\varphi}^* - \alpha_\varphi (\varphi - \varphi^*). \end{aligned} \quad (6)$$

De esta manera, la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado, queda determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} \dot{e}_x + \alpha_x e_x &= 0, \\ \dot{e}_\varphi + \alpha_\varphi e_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $e_x = x - x^*$  y  $e_\varphi = \varphi - \varphi^*$ , denotan los errores de seguimiento de las variables  $x$  y  $\varphi$ , respectivamente,  $\alpha_x$  y  $\alpha_\varphi$  son dos constante positivas. De (7) se tiene que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $(e_x, e_\varphi) \rightarrow (0, 0)$  y por tanto  $(x, \varphi) \rightarrow (x^*, \varphi^*)$ , el cual es el objetivo deseado de control.

Ahora se analiza la dinámica remanente asociada con la variable de estado  $y$ ; es decir, el comportamiento de  $y$  cuando

$(x, \varphi) \rightarrow (x^*, \varphi^*)$ . Para ello, en (3) se reemplaza  $\varphi$  por  $\varphi^*$  y se sustituyen los controles,  $\omega_d$  y  $\omega_i$ , dados por (5) y (6), obteniendo que

$$\dot{y} = [\dot{x}^* - \alpha_x (x - x^*)] \tan \varphi^*. \quad (8)$$

Por lo tanto, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\dot{y} = \dot{x}^* \tan \varphi^*. \quad (9)$$

Si  $x^*$  y  $y^*$  son tales que

$$y^* = f(x^*), \quad (10)$$

donde  $f(x^*)$  es una función suave y es tal que  $f(0) = 0$ , entonces usando (10) y (1), un cálculo directo muestra que

$$\varphi^* = \arctan \left( \frac{\dot{y}^*}{\dot{x}^*} \right) = \arctan \left( \frac{df(x^*)}{dx^*} \right), \quad (11)$$

de donde se obtiene que (9) se reduce a

$$\dot{y} = \dot{x}^* \tan \varphi^* = \dot{x}^* \left( \frac{df(x^*)}{dx^*} \right) = \frac{df(x^*)}{dt}. \quad (12)$$

Por lo tanto, integrando se obtiene que

$$y(t) = f(x^*(t)) = y^*, \quad (13)$$

donde se ha elegido la constante de integración de tal manera que  $y(0) = f(0) = 0$ .

En conclusión se ha mostrado que bajo la condición inicial  $(x, y, \varphi) = (0, 0, 0)$ , los controles (5) imponen que las variables de estado  $(x, y, \varphi)$  tiendan a  $(x^*, y^*, \varphi^*)$ , respectivamente.

Finalmente, se concluye esta subsección presentando las expresiones de la primera y segunda derivada de los perfiles de velocidad angular deseados (5), las cuales se utilizarán en la subsección II-C, para realizar la síntesis de los controladores de los dos motores independientes que generan el movimiento del robot. Usando (5) y (6), un cálculo directo muestra que,

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_d \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}_x \frac{1}{r \cos \varphi} + u_x \dot{\varphi} \frac{\sin \varphi}{r \cos^2 \varphi} + \frac{l}{r} \dot{u}_\varphi \\ \dot{u}_x \frac{1}{r \cos \varphi} + u_x \dot{\varphi} \frac{\sin \varphi}{r \cos^2 \varphi} - \frac{l}{r} \dot{u}_\varphi \end{pmatrix}, \quad (14)$$

donde

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}^* - \alpha_x (\dot{x} - \dot{x}^*) \\ \dot{\varphi}^* - \alpha_\varphi (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^*) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

y

$$\begin{pmatrix} \ddot{\omega}_d \\ \ddot{\omega}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} \left[ \ddot{u}_x + (2\dot{u}_x \dot{\varphi} + u_x \ddot{\varphi}) \tan \varphi \right] + \frac{1}{r} \ddot{u}_\varphi \\ \frac{1}{r \cos \varphi} \left[ \ddot{u}_x + (2\dot{u}_x \dot{\varphi} + u_x \ddot{\varphi}) \tan \varphi \right] - \frac{l}{r} \ddot{u}_\varphi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

con

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}^* - \alpha_x (\ddot{x} - \ddot{x}^*) \\ \ddot{\varphi}^* - \alpha_\varphi (\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}^*) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

En este conjunto de expresiones  $\dot{x}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\varphi}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(\omega_d + \omega_l)r}{2} \cos\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{(\omega_d - \omega_l)r}{2l}, \\ \ddot{x} &= \frac{(\dot{\omega}_d - \dot{\omega}_l)r}{2l} \cos\varphi - \dot{\varphi} \frac{(\omega_d + \omega_l)r}{2} \sin\varphi, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{(\dot{\omega}_d - \dot{\omega}_l)r}{2l}, \end{aligned} \quad (18)$$

las cuales son obtenidas de (2).

## II-B. Control de un motor de CC de imán permanente usando planitud diferencial

De los resultados obtenidos en la subsección anterior se observa que los perfiles de velocidad angular,  $\omega_d$  y  $\omega_i$ , que se requieren en el modelo cinemático del móvil, para que se lleve a cabo el seguimiento de la trayectoria preestablecida o nominal, están determinados por (5) y (6). Recuérdese que quien produce el movimiento del robot son dos motores de CC de imán permanente independientes, asociados a las llantas traseras del móvil. Por lo tanto, en forma natural, surge la necesidad de desarrollar un esquema de control, para cada motor, que permita reproducir un perfil de velocidad angular deseado. En este caso se requiere que el perfil de velocidad angular deseado sea  $\omega_d$  o  $\omega_i$ .

Es importante mencionar que en la literatura se recoge el diseño de diferentes controladores para motores de CC de imán permanente. Sin embargo, en el diseño de controladores para un robot móvil generalmente no se estudia el control de los actuadores de forma explícita. En el mejor de los casos, cuando se toman en cuenta, por simplicidad, es común despreciar la inductancia de los motores [10].

Siguiendo [11] y [15], el objetivo de esta subsección es diseñar un control usando el concepto de planitud diferencial para un motor de CC, que toma en cuenta el hecho de que la inductancia del motor es diferente de cero, generalizando así el trabajo realizado en [10]. Para ello, se usa el modelo dinámico de un motor de CC, expresado en términos de la velocidad angular de la rueda  $\varpi = \dot{\theta}$ , dado por [11]

$$L \frac{di}{dt} = u - Ri - nk_e \varpi, \quad (19)$$

$$J \frac{d\varpi}{dt} = -b\varpi + nk_m i, \quad (20)$$

donde  $u$  es la tensión aplicada en las terminales de armadura del motor,  $i$  es la corriente eléctrica de armadura,  $k_e$  es la constante de fuerza contra-electromotriz,  $k_m$  es la constante de par del motor,  $L$  es la inductancia de armadura,  $R$  es la resistencia de armadura,  $J$  es la inercia del rotor y de la carga del motor (constituida por la rueda que se desea hacer girar),  $b$

es la constante de fricción viscosa del motor y de la carga. Finalmente,  $n$  representa la relación de engranes o factor de reducción del motor.

Para obtener el control, se expresa el sistema (19)-(20) en forma matricial, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A\chi + Bu, \\ y &= C\chi, \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\chi = (i \quad \varpi)^T$  y

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{nk_e}{J} \\ \frac{nk_m}{J} & -\frac{b}{J} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

La matriz de controlabilidad del sistema (21) está dada por

$$C = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \\ 0 & -\frac{nk_m}{JL} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

la cual, claramente es de rango completo, puesto que

$$\det C = \frac{nk_m}{JL^2} \neq 0, \quad (23)$$

de donde se sigue que el sistema es controlable y por lo tanto diferencialmente plano [15]. La salida plana del sistema se obtiene multiplicando la última fila de la inversa de la matriz de controlabilidad,  $C$ , por el vector de estados,  $\chi$ , [11], i.e.,

$$(0 \quad 1) C^{-1} \chi = \frac{JL}{nk_m} \varpi. \quad (24)$$

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, se toma como salida plana,  $F$ , simplemente a la variable de la velocidad angular del rotor

$$F = \varpi. \quad (25)$$

Así, se tiene que las variables de estado del sistema,  $\chi$ , y la entrada de control,  $u$ , se pueden escribir en términos de  $F$  y sus derivadas. Usando (19) y (20), un cálculo directo muestra que la parametrización diferencial de todas las variables del sistema en términos de la salida plana,  $F$ , está dada por

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{nk_m} (J\dot{F} + bF), \\ \varpi &= F, \end{aligned} \quad (26)$$

$$u = \frac{JL}{nk_m} \ddot{F} + \frac{1}{nk_m} (bL + JR)\dot{F} + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) F.$$

De la última ecuación en (26), es claro que si se elige como control del sistema a

$$u = \frac{JL}{nk_m} v + \frac{JL}{nk_m} (bL + JR)\dot{F} + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) F, \quad (27)$$

entonces, el problema de seguimiento de trayectoria de la salida plana o de la velocidad angular del rotor se reduce a controlar el siguiente sistema

$$\ddot{F} = v. \quad (28)$$

Es decir, si  $F^*$  es el perfil deseado de la velocidad angular del rotor, es necesario elegir a  $v$ , denominada variable de control

auxiliar, de tal forma que cuando  $t \rightarrow \infty$  entonces  $F \rightarrow F^*$ . Como se muestra a continuación una elección de  $v$  que logra esta tarea está dada por

$$v = \ddot{F}^* - \gamma_2[\dot{F} - \dot{F}^*] - \gamma_1[F - F^*] - \gamma_0 \int_0^t [F - F^*] d\tau. \quad (29)$$

Para hacer ver que  $v$  dada por (29) cumple con este objetivo se sustituye en (28) y la expresión integro-diferencial resultante se deriva una vez con respecto al tiempo. Definiendo el error de seguimiento como  $e = F - F^*$ , se encuentra que

$$\ddot{e} + \gamma_2 \dot{e} + \gamma_1 e + \gamma_0 \int_0^t e d\tau = 0, \quad (30)$$

la cual, en teoría de control, es conocida como *dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado* del sistema. El polinomio característico asociado con (30) es

$$p(s) = s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0, \quad (31)$$

de donde se requiere que  $p(s)$  sea un polinomio de clase Hurwitz para garantizar que cuando  $t \rightarrow \infty$  entonces  $e \rightarrow 0$ , es decir  $F \rightarrow F^*$ . Tomando el siguiente polinomio de Hurwitz,

$$p_d(s) = (s + a)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2), \quad (32)$$

se encuentra que los parámetros  $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$  quedan determinados por

$$\gamma_2 = a + 2\zeta\omega_n, \quad \gamma_1 = 2\zeta\omega_n a + \omega_n^2, \quad \gamma_0 = a\omega_n^2, \quad (33)$$

En conclusión, se ha obtenido el control

$$u = \frac{JL}{nk_m} v + \frac{1}{nk_m} (bL + JR)\dot{\varpi} + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) \varpi, \quad (34)$$

donde

$$v = \ddot{\varpi}^* - \gamma_2(\dot{\varpi} - \dot{\varpi}^*) - \gamma_1(\varpi - \varpi^*) - \gamma_0 \int_0^t (\varpi - \varpi^*) d\tau, \quad (35)$$

tal que cuando  $t$  tiende a  $\infty$ ,  $\varpi$  tiende asintóticamente a la velocidad angular deseada,  $\varpi^*$ .

De (34) y (35) se evidencia que para implementar el control de un motor de CC de imán permanente es necesario el conocimiento de  $\varpi^*$  y sus derivadas, así como de la medida de la velocidad angular  $\varpi$  y  $\dot{\varpi}$ , las cuales normalmente se realizan empleando sensores mecánicos. A continuación se presenta el diseño de un control alternativo que sustituye el uso de sensores mecánicos por sensores electrónicos, mediante la reconstrucción integral de  $\varpi$  y  $\dot{\varpi}$ .

Integrando (19) se obtiene:

$$\int_0^t \varpi d\tau = \int_0^t \dot{\varpi} d\tau + \frac{L}{nk_e} i(0), \quad (36)$$

$$\overline{\int_0^t \varpi d\tau} = \frac{L}{nk_e} \left[ -i + \frac{1}{L} \int_0^t (u - Ri) d\tau \right]. \quad (37)$$

Por otro lado, integrando (20) y usando (36) se obtiene:

$$\varpi = \dot{\varpi} + \varpi(0) - \frac{bL}{nJk_e} i(0), \quad (38)$$

$$\dot{\varpi} = -\frac{b}{J} \left[ \frac{L}{nk_e} \left[ -i + \frac{1}{L} \int_0^t (u - Ri) d\tau \right] - \frac{nk_m}{b} \int_0^t i d\tau \right]. \quad (39)$$

Finalmente, sustituyendo (38) en (20) se obtiene:

$$\ddot{\varpi} = \hat{\ddot{\varpi}} - \frac{b}{J} \varpi(0) + \frac{b^2 L}{nJ^2 k_e} i(0) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \hat{\ddot{\varpi}} = & \frac{b^2}{J^2} \left[ \frac{L}{nk_e} \left[ -i + \frac{1}{L} \int_0^t (u - Ri) d\tau \right] - \frac{nk_m}{b} \int_0^t i d\tau \right] \\ & + \frac{nk_m}{J} i. \end{aligned} \quad (41)$$

Se propone usar la siguiente versión modificada de la ley de control (34) y (35):

$$u = \frac{JL}{nk_m} v + \frac{1}{nk_m} (bL + JR)\hat{\ddot{\varpi}} + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) \hat{\ddot{\varpi}}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} v = & \ddot{\varpi}^*(t) - \gamma_2(\hat{\ddot{\varpi}} - \ddot{\varpi}^*) - \gamma_1(\hat{\ddot{\varpi}} - \ddot{\varpi}^*) \\ & - \gamma_0 \left( \int_0^t \hat{\ddot{\varpi}} d\tau - \int_0^t \ddot{\varpi}^* d\tau \right), \end{aligned} \quad (43)$$

la cual, usando (36), (38) y (40) se puede escribir como

$$\begin{aligned} u = & \frac{JL}{nk_m} v + \\ & + \frac{1}{nk_m} (bL + JR) \left( \hat{\ddot{\varpi}} - \frac{b}{J} \varpi(0) - \frac{b^2 L}{nJ^2 k_e} i(0) \right) + \\ & + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) \left( \hat{\ddot{\varpi}} - \varpi(0) + \frac{bL}{nJk_e} i(0) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} v = & \ddot{\varpi}^*(t) - \gamma_2 \left( \hat{\ddot{\varpi}} + \frac{b}{J} \varpi(0) - \frac{b^2 L}{nJ^2 k_e} i(0) - \ddot{\varpi}^* \right) - \\ & - \gamma_1 \left( \hat{\ddot{\varpi}} - \varpi(0) + \frac{bL}{nJk_e} i(0) - \ddot{\varpi}^* \right) - \\ & - \gamma_0 \left( \int_0^t \hat{\ddot{\varpi}} d\tau - \frac{L}{nk_e} i(0) - \int_0^t \ddot{\varpi}^* d\tau \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Sustituyendo (44) y (45) en (26), recordando que  $F = \varpi$ , y derivando una vez respecto al tiempo se obtiene (30) de nuevo, por lo que la regla de sintonía que sigue a dicha expresión aún es válida. En resumen, el controlador que se propone está constituido por (42), (43), (37), (39), (41). Nótese que este controlador se construye utilizando únicamente medidas de tensión y corriente de armadura, por lo que no es necesario medir variable mecánica alguna; es decir, no se necesita medir la velocidad de la rueda.

## II-C. Integración de los controles del robot móvil

Una vez diseñados los controladores asociados a los dos sistemas que conforman el RMR, la estructura cinemática y los actuadores (ver las subsecciones II-A y II-B, respectivamente) en esta subsección, siguiendo un esquema de control jerarquizado, similar a los presentados en [9] y [10], se lleva a cabo la integración de los controladores propuestos, obteniendo finalmente el control del RMR, para mayor claridad véase la Fig. 2. En la Fig. 2, se presenta en un diagrama de bloques la integración de los controles asociados a la estructura cinemática y a los actuadores del RMR. En lo que respecta al control de los actuadores, a fin de hacer

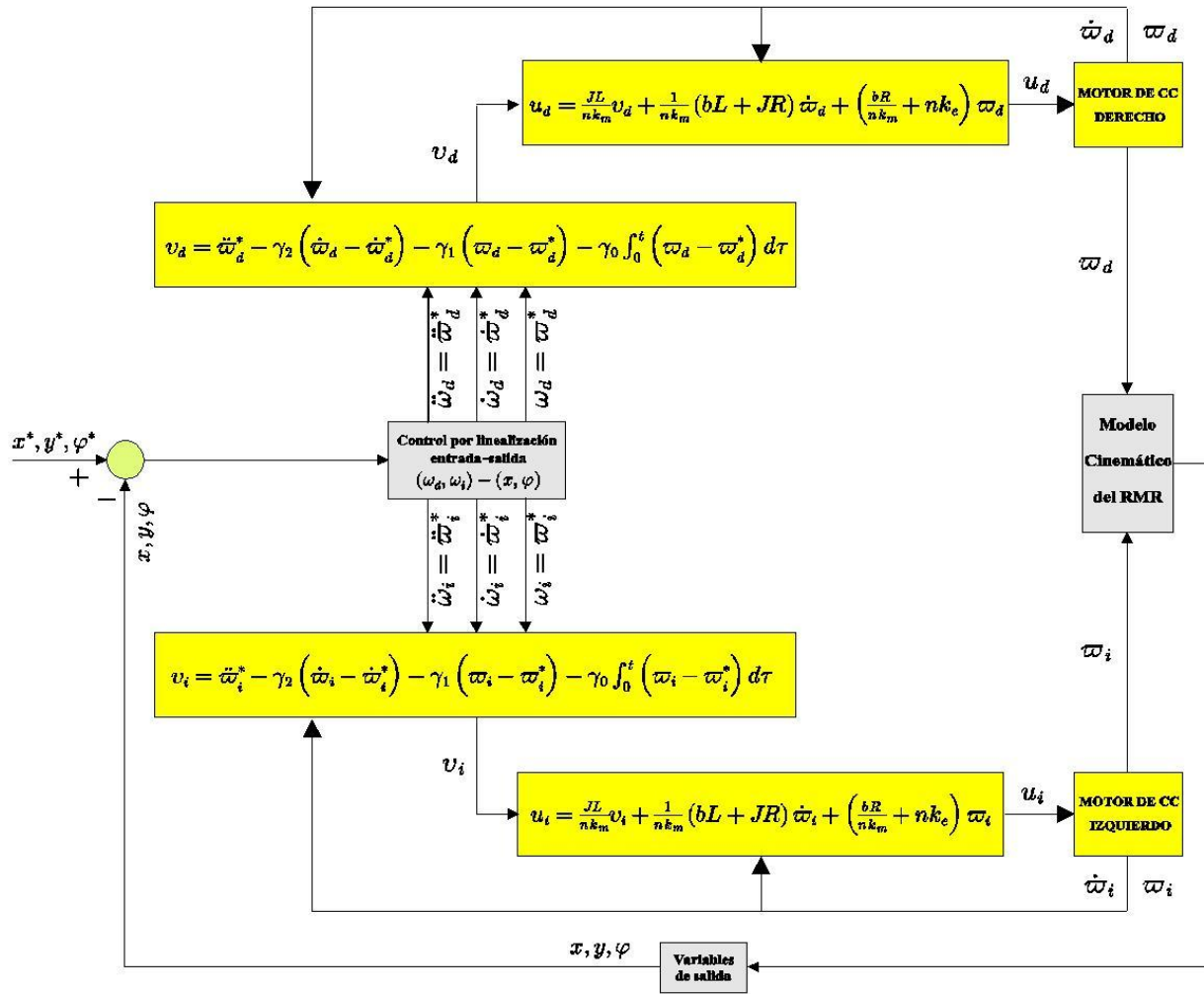


Fig. 2. Diagrama a bloques del control jerarquizado aplicado al RMR. Por claridad, en lo relativo a los actuadores, únicamente se bosqueja el control basado en planitud diferencial.

más claro el proceso de integración, en esta figura y en lo que resta de esta sección, sólo se esboza el control basado en planitud diferencial dado por (34) y (35). Procediendo de manera análoga se puede incluir el uso del controlador (42), (43), (37), (39), (41) que no precisa medir variables mecánicas.

En lo referente al control basado en planitud diferencial para motores de CC la salida plana deseada; es decir, la variable  $\varpi^*$  usada en (35), está determinada por los perfiles de velocidad angular requeridos,  $\omega_d$  o  $\omega_i$ , asociados a las llantas derecha o izquierda del robot que están definidos por (5) y (6).

Como se supone que el robot móvil tiene dos motores independientes iguales, derecho e izquierdo, entonces los modelos dinámicos de los actuadores están dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} L \frac{di_d}{dt} &= u_d - Ri_d - nk_e \varpi_d, \\ J \frac{d\varpi_d}{dt} &= -b\varpi_d + nk_m i_d, \\ y_d &= \varpi_d, \end{aligned} \quad (46)$$

y

$$\begin{aligned} L \frac{di_i}{dt} &= u_i - Ri_i - nk_e \varpi_i, \\ J \frac{d\varpi_i}{dt} &= -b\varpi_i + nk_m i_i, \\ y_i &= \varpi_i. \end{aligned} \quad (47)$$

Por lo tanto, se requiere de dos controles,  $u_d$  y  $u_i$ , que de acuerdo con la subsección anterior, están dados por (27) y (29), es decir,

$$u_d = \frac{JL}{nk_m} v_d + \frac{1}{nk_m} (bL + JR) \ddot{\vartheta}_d + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) \dot{\vartheta}_d, \quad (48)$$

$$u_i = \frac{JL}{nk_m} v_i + \frac{1}{nk_m} (bL + JR) \ddot{\vartheta}_i + \left( \frac{bR}{nk_m} + nk_e \right) \dot{\vartheta}_i,$$

donde

$$v_d = \ddot{\vartheta}_d^* - \gamma_2 (\ddot{\vartheta}_d - \ddot{\vartheta}_d^*) - \gamma_1 (\dot{\vartheta}_d - \dot{\vartheta}_d^*) - \gamma_0 \int_0^t (\dot{\vartheta}_d - \dot{\vartheta}_d^*) d\tau,$$

$$v_i = \ddot{\vartheta}_i^* - \gamma_2 (\ddot{\vartheta}_i - \ddot{\vartheta}_i^*) - \gamma_1 (\dot{\vartheta}_i - \dot{\vartheta}_i^*) - \gamma_0 \int_0^t (\dot{\vartheta}_i - \dot{\vartheta}_i^*) d\tau,$$

y

$$(\ddot{\vartheta}_d^*, \ddot{\vartheta}_i^*) = (\ddot{\omega}_d, \ddot{\omega}_i), \quad (\dot{\vartheta}_d^*, \dot{\vartheta}_i^*) = (\dot{\omega}_d, \dot{\omega}_i), \quad (49)$$

$$(\ddot{\vartheta}_d^*, \ddot{\vartheta}_i^*) = (\ddot{\omega}_d, \ddot{\omega}_i).$$

donde  $\ddot{\omega}_d, \ddot{\omega}_i, \dot{\omega}_d, \dot{\omega}_i$  se calculan de acuerdo a (14) y (16). Es decir, los perfiles de velocidad angular deseados para los motores de CC,  $(\ddot{\vartheta}_d^*, \ddot{\vartheta}_i^*)$ , están determinados por los perfiles de velocidad  $(\dot{\omega}_d, \dot{\omega}_i)$ , obtenidos de controlar el modelo cinemático del robot móvil, que permiten se lleve a cabo el seguimiento asintótico de una trayectoria nominal.

### III. SIMULACIONES

En esta sección se llevan a cabo simulaciones del sistema en lazo cerrado, con la finalidad de evaluar el comportamiento de los controladores propuestos. Se aplican los resultados generales al caso particular cuando la trayectoria deseada es una parábola. Es decir,

$$y^*(t) = x^{*2}(t). \quad (50)$$

Eligiendo la siguiente parametrización, ver [10]:

$$x^*(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{P} t\right), \quad (51)$$

se encuentra que  $\varphi^*(t)$  está determinada por la siguiente ecuación

$$\varphi^*(t) = \arctan(2x^*(t)). \quad (52)$$

Con esta parametrización el RMR se desplazará del origen al punto  $(x, y) = (A, A^2)$ , posteriormente al punto  $(x, y) = (-A, A^2)$  pasando por el origen, y finalmente retornará al origen, todo esto en un tiempo de  $P$  segundos. El valor de los parámetros  $A$  y  $P$ , asociados a (51), se propusieron como:

$$A = 1.5 \text{ m}, \quad P = 90 \text{ s}.$$

En las simulaciones realizadas, se consideraron los siguientes parámetros para el modelo cinemático del robot móvil:

$$r = 6.5 \text{ cm}, \quad l = 15 \text{ cm}.$$

En lo que respecta a los motores de CC independientes, los cuales generan el movimiento de la estructura cinemática del móvil, se hizo la suposición de que ambos tiene los mismos parámetros, dados por:

$$J = 6.42 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2, \quad k_m = 42.42 \times 10^{-3} \text{ V-s/rad},$$

$$L = 10.15 \times 10^{-3} \text{ H}, \quad k_e = 51 \times 10^{-3} \text{ N-m/A},$$

$$b = 200.62 \times 10^{-3} \text{ N-ms}, \quad R = 5.5 \text{ } \Omega, \quad n = 3.$$

Los parámetros de diseño de los controles asociados a los motores de CC,  $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$ , los cuales se determinan por:

$$\gamma_2 = a + 2\zeta\omega_n, \quad \gamma_1 = 2\zeta\omega_n a + \omega_n^2, \quad \gamma_0 = a\omega_n^2.$$

se diseñaron con la siguiente elección

$$a = 20, \quad \zeta = 1.5, \quad \omega_n = 12.$$

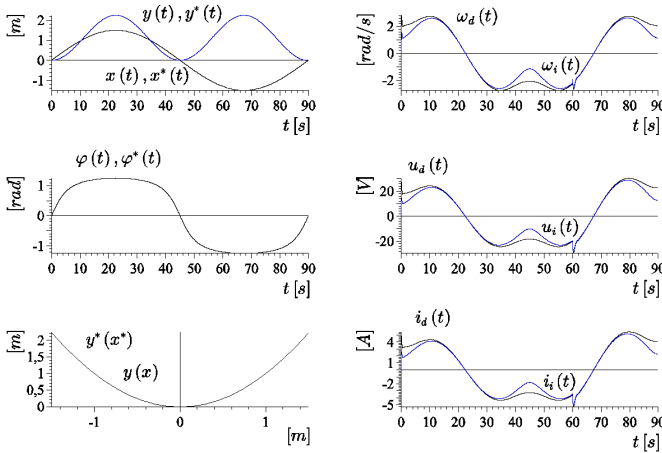
Las simulaciones presentadas muestran los resultados obtenidos en lazo cerrado del RMR usando la estrategia de control determinada por (5)-(6), para la estructura cinemática del robot móvil, en combinación con la versión modificada de la ley de control (34)-(35) determinada por (42), (43), (37), (39) y (41), para el control de los actuadores del móvil. Nótese que esta parte del controlador se construye utilizando únicamente medidas de tensión y corriente de armadura.

Para resaltar la eficacia del controlador diseñado, primero se introdujeron incertidumbres en el valor de la inercia,  $J$ , y en el valor de la constante de fricción viscosa del sistema,  $b$ , del orden de 25% respecto a sus valores nominales. Estas incertidumbres se propusieron como sigue:

$$J_m = \begin{cases} J + 1.5 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2 & \text{para } t < 30 \text{ s} \\ J & \text{para } t \geq 30 \text{ s} \end{cases}$$

$$b_m = \begin{cases} b + 50 \times 10^{-3} \text{ N-ms}, & \text{para } t > 60 \text{ s} \\ b & \text{para } t \leq 60 \text{ s} \end{cases}$$

Esto significa que en el periodo de tiempo  $0 \text{ s} < t < 30 \text{ s}$ ,  $J_m = J + 1.5 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$  y  $b_m = b$ . Mientras que en el periodo de tiempo  $30 \text{ s} \leq t \leq 60 \text{ s}$ ,  $J_m = J$  y  $b_m = b$ . Finalmente, para  $t > 60 \text{ s}$ ,  $J_m = J$  y  $b_m = b + 50 \times 10^{-3} \text{ N-ms}$ . Es importante subrayar que este tipo de cambios abruptos en  $J$  y  $b$  no suceden en la práctica. Sin embargo, debido a la extensión del trabajo se decidió presentar estas pruebas en una sola simulación, lo cual es posible sólo si los cambios se introducen escalonadamente. Los resultados correspondientes se muestran en la Fig. 3. Es claro que la evolución de las variables mecánicas  $(x, y, \varphi)$  siguen la trayectoria nominal,  $(x^*, y^*, \varphi^*)$ , lo cual muestra la eficacia del controlador basado en planitud diferencial modificado, que se propuso para los actuadores, ante incertidumbres en los parámetros del sistema  $J$  y  $b$ , con la ventaja adicional de que para realizar su síntesis no es necesario medir variables mecánicas.

Fig. 3. Simulaciones obtenidas con incertidumbre en los parámetros  $J$  y  $b$ .

Por otro lado, con la finalidad de mostrar que el controlador propuesto es robusto respecto a ruido de alta frecuencia introducido en los estados del sistema, se introduce ruido aleatorio en los mismos, los cuales están determinados de la forma siguiente:

$$x_m = x + \eta(t)$$

$$y_m = y + \vartheta(t)$$

$$\varphi_m = \varphi + \varepsilon(t)$$

donde  $\eta(t)$ ,  $\vartheta(t)$  y  $\varepsilon(t)$  son variables aleatorias de tipo rectangular distribuidas uniformemente en el intervalo  $[0.5, -0.5]$ , generadas a nivel computacional por la instrucción  $rect(t)$ , y definidas por

$$\eta(t) = 0.1[rect(t) - 0.5]$$

$$\vartheta(t) = -0.3[rect(t) - 0.5]$$

$$\varepsilon(t) = 0.2[rect(t) - 0.5]$$

Las variables  $x_m$ ,  $y_m$  y  $\varphi_m$  denotan los estados medidos; éstos se introducen en el controlador y los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 4. Dicha figura muestra en simulación el comportamiento de las variables mecánicas y eléctricas en lazo cerrado del RMR, cuando se introduce ruido en los estados  $x$ ,  $y$  y  $\varphi$ , y se observa como el control de seguimiento de trayectoria para la estructura cinemática del RMR se lleva a cabo con éxito.

Finalmente, en la Fig. 5 se presentan las simulaciones obtenidas cuando se tiene en cuenta no linealidades. La no linealidad que se introduce se ejecuta en el modelo dinámico de los motores de CC, al incluir en estos modelos el término de la fricción de Coulomb. Es decir, el modelo dinámico de los motores de CC (19)-(20) se transforma en:

$$L \frac{di}{dt} = u - Ri - nk_e \varpi, \quad (53)$$

$$J \frac{d\varpi}{dt} = -b\varpi - b_1 \text{sign}(\varpi) + nk_m i, \quad (54)$$

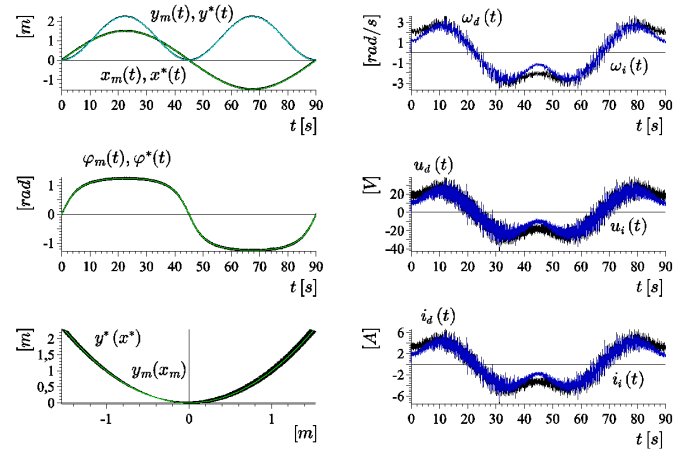


Fig. 4. Resultados obtenidos en simulación, con ruido aleatorio introducido.

En la Fig. 5 se muestra que el seguimiento de trayectoria del RMR se lleva a cabo con éxito, incluso cuando se ha introducido una no linealidad en el modelo dinámico de los motores de CC. Nótese que el efecto de esta no linealidad se aprecia en las señales de tensión y corriente cuando la velocidad de las ruedas cruza por cero, lo cual, sin embargo, no tiene efectos apreciables en la posición y la orientación del RMR.

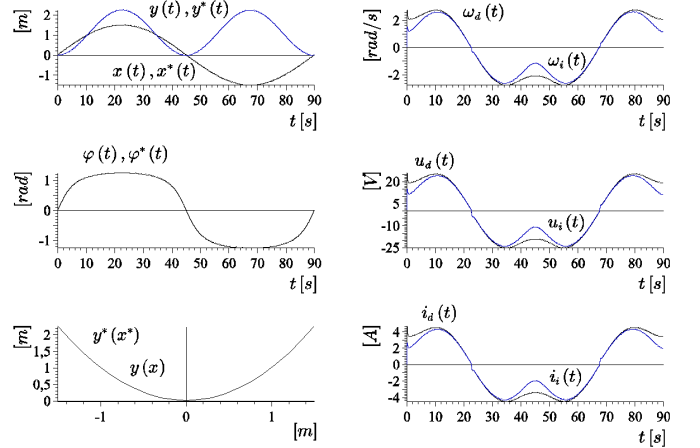


Fig. 5. Resultados en simulación, con consideraciones de no linealidades.

#### IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha diseñado el control de un robot móvil y se obtuvieron resultados satisfactorios por simulación. Más específicamente, este control consiste de dos subcontroles: el primero controla el modelo cinemático y el segundo los actuadores del móvil. El primero es un subcontrol sencillo y se basa en linealización de entrada-salida  $(\omega_d, \omega_i) - (x, \varphi)$ , generando una dinámica remanente para  $y$ , que resulta ser estable. A diferencia de técnicas de control no lineal que conmutan entre dos leyes de control para llevar a cabo el control de todas las variables de estado, este control determina los perfiles de  $\omega_d$  y  $\omega_i$  tales que  $x \rightarrow x^*$ ,  $y \rightarrow y^*$  y  $\varphi \rightarrow \varphi^*$ , con la condición inicial:  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $\varphi = 0$ . Una de sus



desventajas es que se indefinir en  $\varphi = \frac{k\pi}{2}$  para  $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ . El segundo subcontrol emplea el concepto de planitud diferencial para generar los perfiles de velocidad angular,  $\omega_d$  y  $\omega_i$ , que se requieren en el modelo cinemático del móvil, bajo la condición de que el modelo dinámico de cada uno de los actuadores está dado por (19) y (20). Este subcontrol tiene en cuenta la dinámica asociada a la corriente de armadura de cada uno de los actuadores a diferencia del modelo usado en [10]. Otra característica importante es que no se necesita medir la velocidad de la rueda, ni su derivada, ni su integral, para construir este controlador y, sin embargo, se asegura que la velocidad de la rueda converge exponencialmente al perfil de velocidad dictado por la parte cinemática del controlador. Lo único que se necesita medir es la tensión y la corriente en la armadura de los motores que actúan a cada una de las ruedas. Empleando el concepto de control jerarquizado en RMR, introducido en [9] y utilizado en [10], se llevó a cabo la integración de los subcontroles, tal y como se representa en la Fig. 2.

Además, se mostró que el controlador diseñado, objeto del presente artículo, es robusto ante incertidumbres asociadas a la inercia,  $J$ , y la constante de fricción viscosa,  $b$ . Asimismo, se mostró que el sistema es robusto a posibles ruidos aleatorios que pudieran introducirse en la medida de los estados  $x$ ,  $y$  y  $\varphi$ , respectivamente. También se ha puesto de manifiesto que este controlador es robusto a consideraciones de no linealidades.

Asimismo, en esta investigación se observó que una propuesta de control basada en linealización de entrada-salida para  $(\omega_d, \omega_i) - (y, \varphi)$ , resulta posible siempre que  $\varphi \neq k\pi$  para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , pues en estos puntos la matriz que relaciona estas entradas-salidas se vuelve singular, pero impone que inicialmente  $\varphi \neq 0$ , siendo  $\varphi = 0$  una suposición bajo la cual se diseñó el controlador propuesto en este trabajo.

Finalmente, es conveniente mencionar que este controlador podría emplearse en el problema de evasión de obstáculos, lo cual sería digno de un trabajo futuro. Un siguiente proyecto sería construir la topología analizada de robot móvil e implementar la ley de control diseñada sobre éste en tiempo real.

## REFERENCIAS

- [1] R. M. Murray, "Nonholonomic motion planing: steering using sinusoids", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, pp. 700-716, 1993.
- [2] R. W. Brockett, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, In Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millmann and H. J. Sussmann, Eds. Boston, MA: Birkhauser, 1983, pp. 181-191.
- [3] C. Canudas de Wit and O. J. Sordalen, "Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 1791-1797, 1992.
- [4] C. Samson, *Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart*, In Advanced Robot Control, C. Canudas, Ed., vol. 162 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York Springer-Verlag, 1991, pp. 125-151.
- [5] C. Samson, "Control of chained systems Applications to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, pp. 64-77, 1995.
- [6] J. M. Coron, "Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift", *Math. Contr. Signals Syst.*, vol. 5, pp. 295-312, 1992.
- [7] J. M. Coron and B. D'Andrea-Novet, "Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems Application to mobile robots", in *Proc. of the IFAC Conf. Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS)*, Bordeaux, France, 1992, pp. 649-654.
- [8] J. B. Pomet, "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift", *Syst. Contr. Lett.*, vol. 18, pp. 147-158, 1992.
- [9] A. W. Divelbiss and J. T. Wen, "Trajectory tracking control of a cartrailer system", *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, vol. 5, pp. 269-278, 1997.
- [10] E. Aranda Bricaire, T. Salgado-Jiménez y M. Velasco-Villa, "Control no lineal discontinuo de un robot móvil", *Computación y Sistemas*, Número Especial, pp. 42-49, 2002.
- [11] H. Sira-Ramírez and S. K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, New York, 2004.
- [12] J. A. Chacal B. and H. Sira-Ramírez, "On the sliding mode control of wheeled mobile robots", in *Proc. of the IEEE Conf. Sys. Man. Cybern.*, 1994, pp. 1938-1943.
- [13] J. M. Yang, I. H. Choi and J. H. Kim, "Sliding mode control of a nonholonomic wheeled mobile robot for trajectory tracking", in *Proc. Of the IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, 1998, vol. 4, pp. 2983- 2988.
- [14] F. L. Lewis, C. T. Abdallah and D. M. Dawson, *Control of robot manipulators*, Macmillan, New York, 1993.
- [15] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin and P. Rouchon, "Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and applications", *Int. J. Contr.*, vol. 61, pp. 1327-1361, 1995.



**Ramón Silva-Ortigoza** nació en Puebla, México. Recibió el título de Licenciado en Electrónica de la Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, en 1999, y los grados de Maestro y Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV-IPN), México, en 2002 y 2006, respectivamente. Actualmente es investigador Titular y encargado del Área de Mecatrónica del Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo del IPN (CIDETEC-IPN) y miembro del Sistema Nacional de Investigadores, México. Es co-autor del libro: Control Design Techniques in Power Electronics Devices (Springer-Verlag, London, 2006). Sus áreas de interés son el control de sistemas mecatrónicos, la robótica móvil y el diseño de técnicas de control aplicadas a sistemas electrónicos de potencia.



**Gilberto Silva-Ortigoza** nació en Puebla, México. Recibió el título de Licenciado en Física de la Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, en 1988, y los grados de Maestro y Doctor en Ciencias en Física del CINVESTAV-IPN, México, en 1991 y 1995, respectivamente. Actualmente es profesor investigador titular de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla y miembro del Sistema Nacional de Investigadores (Nivel II), México. Ha publicado 40 artículos de investigación en revistas indizadas. Sus áreas de interés son: relatividad general, óptica geométrica y modelado matemático de sistemas dinámicos.



**Victor Manuel Hernández-Guzmán** nació en Querétaro, Qro., México en 1964. Recibió el título de Ingeniero Industrial en Eléctrica por parte del Instituto Tecnológico de Querétaro en 1988, el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica (Control) por parte del Instituto Tecnológico de la Laguna, en Torreón, Coah., en 1991 y el grado de Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica) por parte del CINVESTAV-IPN, en México, D.F., en 2003. Actualmente es Profesor en el

programa de Licenciatura y Maestría en Instrumentación y Control de la Universidad Autónoma de Querétaro. Su trabajo de investigación trata sobre el control de robots manipuladores y sistemas electro-mecánicos. Tiene particular interés en la construcción de prototipos didácticos para la enseñanza de técnicas de control clásicas y modernas (no lineales).



**Víctor Ricardo Barrientos-Sotelo** nació en México, D.F. en 1981. Recibió el título de Ingeniero en Robótica Industrial de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en el 2005. Actualmente realiza sus estudios de Maestría en el CIDETEC-IPN. Las áreas de interés del Ing. Barrientos-Sotelo son la robótica móvil, la aplicación de microcontroladores, el diseño de tarjetas electrónicas y el control de sistemas robóticos.



**Juan Martín Albarrán-Jiménez** nació en México DF, es Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica de la ESIME del IPN, y Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica) del CINVESTAV-IPN. Ha recibido formación tecnológica en el área de Mecatrónica en Japón y Corea del Sur. Ha sido profesor, Jefe del Área de Control y Subdirector Técnico del Centro Nacional de Actualización Docente. Ha dirigido más de 10 proyectos y tesis de Especialistas en Ingeniería Mecatrónica. Actualmente es

Director de la División de Ingeniería Mecánica Electrónica de la Universidad Politécnica del Valle de México. Sus áreas de interés son la robótica y la automatización de procesos industriales.



**Víctor Manuel Silva-García** es Licenciado Físico-Matemático de la ESFM-IPN (1974), Maestro en Ciencias en Estadística de la UACH en 1980 y Doctor en Ciencias de la Computación del CIC-IPN en 2007. Es miembro de la Sociedad Matemática Mexicana y Presidente Ejecutivo del "Simposium Internacional: Aportaciones de las Universidades a la Docencia y Desarrollos Tecnológicos". Ha dictado conferencias en el

extranjero en el área de criptografía. Actualmente es director y profesor investigador del CIDETEC-IPN.