

# CAPITULO 3

## 3. MODELOS DISCRETOS DETERMINISTICOS

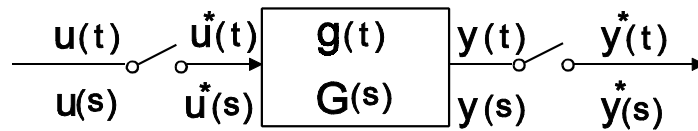
### 3.1 Función de Transferencia de Impulsos.

La función de transferencia de un sistema monovariante continuo está definida como la relación de la transformada de Laplace de la señal de salida respecto de la transformada de la entrada, para condiciones iniciales nulas.

Es importante extender este concepto para el tratamiento de los sistemas de tiempo discreto, para los cuales se puede definir la **Función de Transferencia de Impulsos** como la relación de la transformada de Laplace de la señal discretizada de salida respecto de la transformada de la señal discretizada de entrada para condiciones iniciales nulas.

Referido a la Fig. 3.1.1, se define la función de transferencia de impulsos  $G^*(s)$  como

$$G^*(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} \quad (3.1-1)$$



**Fig. 3.1.1. Sistema muestreado.**

Siendo  $u(t)$  una señal continua, el tren de impulsos a la entrada del proceso es, según Ec. 2.3-7

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) \delta(t-kT_o). \quad (3.1-2)$$

La señal de salida continua  $y(t)$  se calcula mediante la sumatoria de convolución entre la entrada y la función de peso o respuesta al impulso  $g(t)$ ,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g(t-kT_o). \quad (3.1-3)$$

Cuando la salida continua  $y(t)$  se muestrea sincrónicamente con la entrada, la Ec. 3.1-3 puede escribirse en tiempo discreto

$$y(nT_o) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g[(n-k)T_o]. \quad (3.1-4)$$

La transformada de Laplace de la salida muestreada es

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_o) e^{-nT_o s}. \quad (3.1-5)$$

Reemplazando  $y(nT_o)$

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g[(n-k)T_o] e^{-nT_o s}. \quad (3.1-6)$$

Haciendo un cambio de variable

$$q = n - k$$

$$y^*(s) = \sum_{q=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g(qT_o) e^{-qT_o s} e^{-kT_o s}. \quad (3.1-7)$$

Reordenando

$$y^*(s) = \sum_{q=-k}^{\infty} g(qT_o) e^{-qT_o s} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) e^{-kT_o s}. \quad (3.1-8)$$

La función  $g(qT_o)$  representa los valores de tiempo discreto de la función de peso  $g(t)$  del sistema y se denomina **Secuencia de Ponderación**. La segunda sumatoria de la Ec. 3.1-8 representa la transformada de Laplace de la entrada muestreada  $u^*(s)$ . Considerando que por causalidad del sistema es  $g(qT_o) = 0$  con  $q < 0$ , resulta,

$$y^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_o) e^{-qT_o s} u^*(s). \quad (3.1-9)$$

De acuerdo con la definición adoptada en Ec. 3.1-1, la **Función de Transferencia de Impulsos**  $G^*(s)$  queda definida como

$$G^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_o) e^{-qT_o s}. \quad (3.1-10)$$

Esto es,  $G^*(s)$  está definida como la transformada de Laplace de la secuencia de ponderación  $g(qT_o)$ .

### 3.2 Función de Transferencia de Tiempo Discreto.

La función de **Transferencia de Tiempo Discreto**, también denominada **Función de Transferencia Z**, se obtiene reemplazando en la Ec. 3.1-10 de la Función de Transferencia de Impulsos, la siguiente igualdad

$$z = e^{T_o s}$$

obteniéndose

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_o) z^{-q} \quad (3.2-1)$$

$$G(z) = Z\{g(qT_o)\}. \quad (3.2-2)$$

Esto es, la función de transferencia de tiempo discreto puede obtenerse realizando la Transformada Z de la secuencia de ponderación  $g(qT_o)$ .

A modo de ejemplo se calcula la función de transferencia de tiempo discreto para un sistema de primer orden. Un sistema tal está definido en el dominio temporal por su ecuación diferencial de primer orden, donde  $u(t)$  representa la entrada, e  $y(t)$  la salida.

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t). \quad (3.2-3)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial para una entrada impulsiva

$$u(t) = \delta(t)$$

se obtiene la respuesta impulsiva  $g(t)$  que es una función exponencial decreciente

$$g(t) = \frac{K e^{-t/T}}{T}. \quad (3.2-4)$$

Tratándose de un sistema muestreado, la respuesta impulsiva de tiempo discreto, o secuencia de ponderación, será

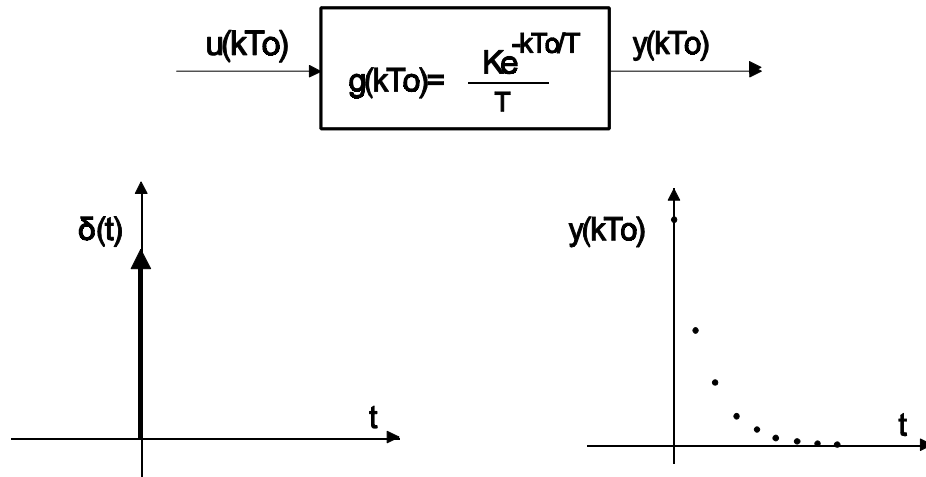
$$g(kT_o) = \frac{K e^{-kT_o/T}}{T} \quad (3.2-5)$$

que se representa en la Fig. 3.2.1.

De acuerdo con la Ec. 3.2-2, se puede obtener la función de transferencia de tiempo

discreto

$$G(z) = \frac{K}{T} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_o/T} z^{-k} = \frac{K}{T} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{T_o/T} z)^{-k}. \quad (3.2-6)$$



**Fig. 3.2.1. Secuencia de ponderación de un sistema de primer orden.**

En forma cerrada la Ec. 2.3-6 toma la siguiente forma

$$G(z) = \frac{K}{T} \frac{z}{z - e^{-T_o/T}} = \frac{K/T}{1 - e^{-T_o/T} z^{-1}}. \quad (3.2-7)$$

queda  $G(z)$  para un sistema de primer orden

$$G(z) = \frac{b_o}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{y(z)}{u(z)}. \quad (3.2-8)$$

La Ec. 3.2-8, puede también expresarse como

$$y(z) - a_1 y(z) z^{-1} = b_o u(z). \quad (3.2-9)$$

Antitransformando al dominio temporal, se obtiene

$$y(kT_o) - a_1 y[(k-1)T_o] = b_o u(kT_o) \quad (3.2-10)$$

La Ec. 3.2-10, que representa una ecuación en diferencias de primer orden, podría haberse obtenido por discretización de la ecuación diferencial, Ec. 3.2-3.

Para sistemas de mayor orden se pueden generalizar estos conceptos. La ecuación diferencial de un sistema de orden  $m$  tendrá, en su caso más general, la forma representada en la Ec. 3.2-11.

$$\begin{aligned} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_o u(t). \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

La función de transferencia, es

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_o + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_m s^m} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (3.2-12)$$

En el campo discreto se puede plantear la ecuación en diferencias de orden  $m$  que tendrá la forma

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) &= \\ &= b_o u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). \end{aligned} \quad (3.2-13)$$

La Ec. 3.2-13 se puede transformar en  $Z$  aplicando el teorema de desplazamiento a la derecha, obteniéndose

$$\begin{aligned} y(z) + a_1 y(z)z^{-1} + \dots + a_m y(z)z^{-m} &= \\ &= b_o u(z) + b_1 u(z)z^{-1} + \dots + b_m u(z)z^{-m}. \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

A partir de Ec. 3.2-14 se obtiene la función de transferencia discreta del sistema de orden  $m$ .

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (3.2-15)$$

En forma compacta  $G(z)$  se expresa como

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (3.2-16)$$

donde  $B$ ,  $A$  representan los polinomios de numerador y denominador respectivamente

y el exponente negativo de  $z$  es una notación que indica que la función de transferencia discreta esta expresada en términos de potencias negativas de  $z$ . Multiplicando numerador y denominador por  $z^m$  se puede obtener una expresión de  $G(z)$  en términos de potencias positivas de  $z$  lo que resulta de utilidad en algunos casos particulares. Despejando  $y(k)$  de la ecuación en diferencias Ec. 3.2-13 se obtiene

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_m y(k-m) + b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m).$$

Esta forma de expresar la ecuación en diferencias se denomina modelo ARMA del proceso. El nombre generalizado de modelo ARMA proviene de su nombre en inglés *autoregressive* (AR), *moving average* (MA). La parte autoregresiva se refiere a aquella que contiene los términos pasados (regresivos) de la propia (auto) variable de salida en un número igual al orden del proceso. El concepto de media móvil (MA) se refiere al caso en que siendo  $u(k)$  una entrada estocástica, los coeficientes  $b$  realizan una media pesada de los últimos  $m$  valores de la entrada  $u(k)$ . Como esta media se va actualizando con  $k$ , se la denomina móvil. Este concepto de media fue extendido a los sistemas determinísticos y conserva el nombre.

Cuando son los coeficientes  $a_i = 0$  se tiene un modelo de media móvil puro (modelo MA). Esto es, los valores pasados de  $y(k)$  no influyen en el valor presente.

Cuando son los coeficientes  $b_i = 0$  se tiene un modelo autoregresivo puro (modelo AR). Bajo esta condición, el modelo no es sensible a entradas y sólo tiene la dinámica propia.

El modelo ARMA, expresado en forma de sumatoria tiene la forma

$$y(k) = - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i)$$

### 3.3 Características y propiedades de la Función de transferencia discreta.

#### 3.3.1 Realizabilidad.

$G(z)$  representa un sistema realizable si haciendo el cociente,

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (3.3-1)$$

resulta

$$G(z^{-1}) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (3.3-2)$$

sin términos con potencias positivas de  $z$ , impuesto por condiciones de causalidad. Obsérvese que los  $c_i$ , representan en el dominio temporal los valores de la secuencia de ponderación del sistema (Ec. 3.2-5). Esto implica que el orden del denominador puede ser igual o mayor que el del numerador pero no menor, cuando  $G(z)$  se expresa en potencias positivas de  $z$ .

#### 3.3.2 Retardo puro.

La función de transferencia de un retardo puro, tiempo muerto o demora  $T$ , se representa como

$$D(s) = e^{-Ts}. \quad (3.3-4)$$

Si el tiempo de demora  $T$  se expresa en múltiplos de intervalos de muestreo  $T_o$  es

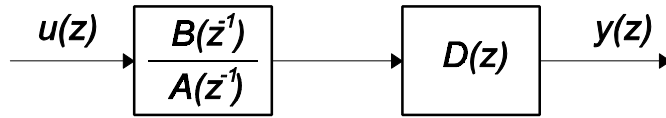
$$T = dT_o \quad (3.3-5)$$

con  $d = 1, 2, 3, \dots$ . La función de transferencia en  $z$ , será

$$D(z) = z^{-d}. \quad (3.3-6)$$

Un proceso como el representado en la Fig. 3.3-1 que tiene un retardo puro de  $d$  intervalos de muestreo, tendrá como función de transferencia discreta

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} \quad (3.3-7)$$



**Fig. 3.3.1 Proceso con retardo puro.**

### 3.3.3 Constante de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad  $K$  de un sistema se obtiene utilizando el teorema del valor final.  $K$  está dado por el valor final de  $y(k)$  para una entrada escalón unitario.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) u(z)$$

siendo

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

por ser un escalón unitario, resulta

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1 + \dots + a_m}. \quad (3.3-8)$$

### 3.3.4 Constante de integración.

La constante de integración de un sistema se obtiene en base a la determinación de la pendiente de la salida en estado estacionario para una entrada escalón unitario.

Si el sistema tiene comportamiento integral tendrá un polo en el origen del plano  $S$  o bien en  $z = 1$  en el plano  $Z$ , el cual se puede sacar como factor común.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{m-1} z^{-(m-1)}} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{B(z^{-1})}{D(z^{-1})} \end{aligned} \quad (3.3-9)$$

Siendo la transformada de la señal de variación de la salida,



$$\Delta y(z) = y(z)(1 - z^{-1})$$

para una entrada escalón unitario, con  $u(z) = 1.z/(z - 1)$  resulta

$$\Delta y(z) = \frac{B(z^{-1})}{D(z^{-1})} \frac{z}{z - 1}.$$

Utilizando el teorema del valor final, se obtiene el gradiente de crecimiento de la salida, el cual se denomina constante de integración.

$$K_I = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + d_1 + \dots + d_{m-1}} \quad (3.3-10)$$

### 3.4 Operaciones con funciones de transferencia discretas.

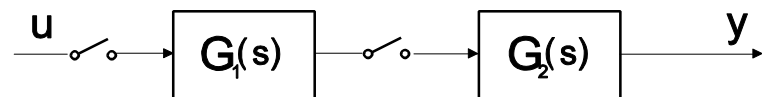
Para realizar la transformada Z del sistema en cascada representado en la Fig. 3.4.1, debe primero efectuarse el producto  $G_1(s)G_2(s) = G_T(s)$ , al no estar separados los bloques por un muestreador sincrónico.

$$G_T(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = Z\{G_1(s) G_2(s)\} = Z\{G_T(s)\} \quad (3.4-1)$$



**Fig. 3.4.1 Bloques en cascada.**

Si ambos bloques están separados por un muestreador sincrónico como en la Fig. 3.4.2, se realizan las transformadas independientemente



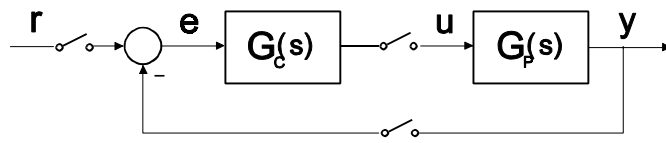
**Fig. 3.4.2 Bloques separados por muestreador.**

$$G_M(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = Z\{G_1(s)\} Z\{G_2(s)\} = G_1(z)G_2(z) \quad (3.4-2)$$

resultando en general

$$G_M(z) \neq G_T(z).$$

La función de transferencia discreta para el sistema de la Fig. 3.4.3, es



**Fig. 3.4.3. Sistema realimentado.**

$$G_T(z) = \frac{y(z)}{r(z)}$$

con

$$y(z) = G_p(z) G_c(z) [r(z) - y(z)]$$

resulta

$$G_T(z) = \frac{G_p(z)G_c(z)}{1 + G_p(z)G_c(z)} \quad (3.4-3)$$

### 3.5 Condiciones de estabilidad de sistemas de tiempo discreto.

Para analizar conceptualmente la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto se hace primeramente el estudio en base a la ubicación de un polo real único. La función de transferencia continua de un sistema con un polo real único es

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{1 + sT} = \frac{K/T}{1/T + s}.$$

De acuerdo a la Ec. 3.2-8, resulta

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_o}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (3.5-1)$$

$G(z)$  tiene un polo en  $z_1 = a_1$ .

La correspondiente ecuación en diferencias de  $G(z)$  es

$$y(k) - a_1 y(k-1) = b_o u(k).$$

La ecuación homogénea en diferencias que corresponde a la evolución libre resulta

$$y(k) - a_1 y(k-1) = 0.$$

Si la condición inicial es  $y(0) \neq 0$ , se puede analizar la evolución temporal de  $y(k)$  en forma recursiva.

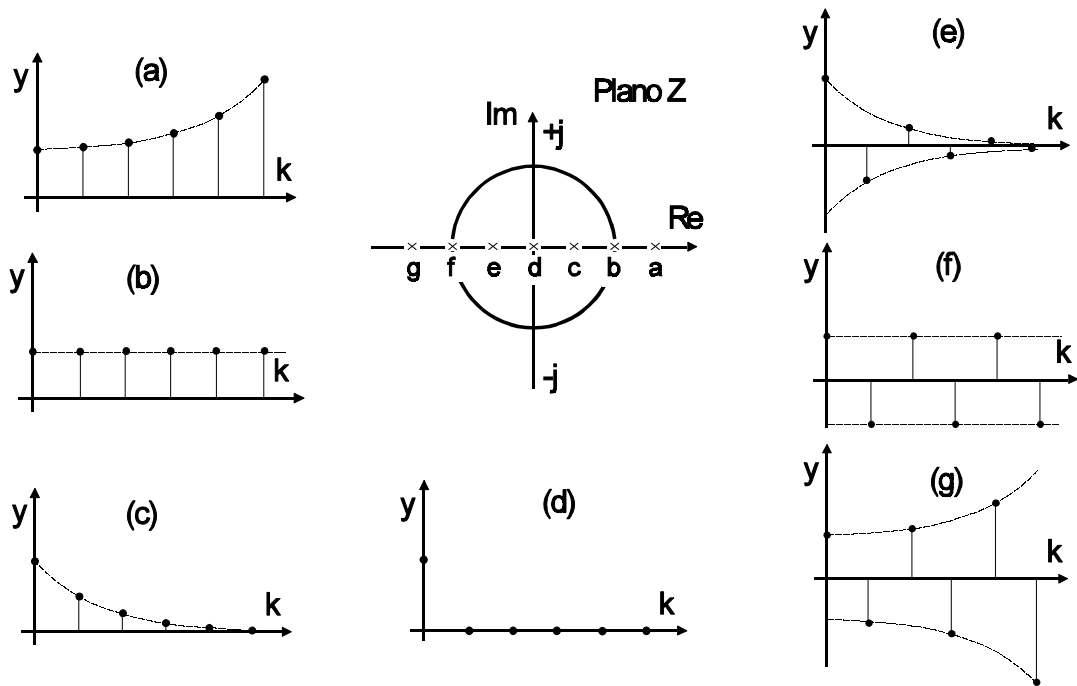
$$y(1) = a_1 y(0) \neq 0$$

$$y(2) = a_1 y(1) = a_1^2 y(0)$$

•  
•  
•

$$y(k) = a_1 y(k-1) = a_1^k y(0).$$

De esta expresión se observa que el sistema con la función de transferencia en  $z$  representada en Ec. 3.5-1, tendrá una evolución tendiendo a cero -sistema estable- si  $|a_1| < 1$ . Por el contrario, con  $|a_1| > 1$ , la salida  $y(k)$  crece indefinidamente. La condición  $|a_1| = 1$  representa el límite de estabilidad. El valor de  $a_1$  fija la posición del polo en el plano  $Z$ . En la Fig. 3.5.1 se representan distintas posiciones de un polo real y su correspondiente comportamiento temporal.



**Fig. 3.5.1. Polos reales y comportamiento temporal**

Los polos en los planos  $S$  y  $Z$  están relacionados por

$$z_1 = a_1 = e^{T_o s_1}$$

$$s_1 = -1/T.$$

Los polos reales en el plano  $S$ , comprendidos en el rango  $-\infty < s_i < +\infty$  corresponden a polos reales en el plano  $Z$  comprendidos en el rango  $0 < z_i < \infty$ . Esto es, solamente polos reales positivos en  $Z$ . Polos reales negativos en  $Z$  no tienen correspondencia en el plano  $S$ .

Para extender este concepto a los sistemas con polos complejos, se considera un sistema cuya ecuación característica tenga un par de polos complejos conjugados. La función de transferencia en variable  $s$  tendrá la forma

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N_s(s)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$s_{1,2} = -a \pm j\omega_1$$

Transformando al dominio  $Z$  se obtiene

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{N_z(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

Los polos complejos son

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{aT_o} e^{\pm j\omega_1 T_o} \\ &= M e^{\pm j\omega_1 T_o} = M \angle [\omega_1 T_o] \end{aligned}$$

Para valores  $M > 0$  existe correspondencia entre los polos en  $Z$  y en  $S$ . En un contexto digital es posible la existencia de polos con  $M < 0$ . Estos polos no tienen correspondencia en el dominio  $S$ , ya que no es posible su transformación. Este tipo de polos tienen poca significación práctica ya que la discretización de un sistema continuo real generará solo polos en  $Z$  con  $M > 0$ .

Considerando un sistema discreto con un par de polos complejos conjugados, la solución de la ecuación en diferencias homogénea, para evolución libre a partir de una condición inicial  $y(0)$ , tiene la forma

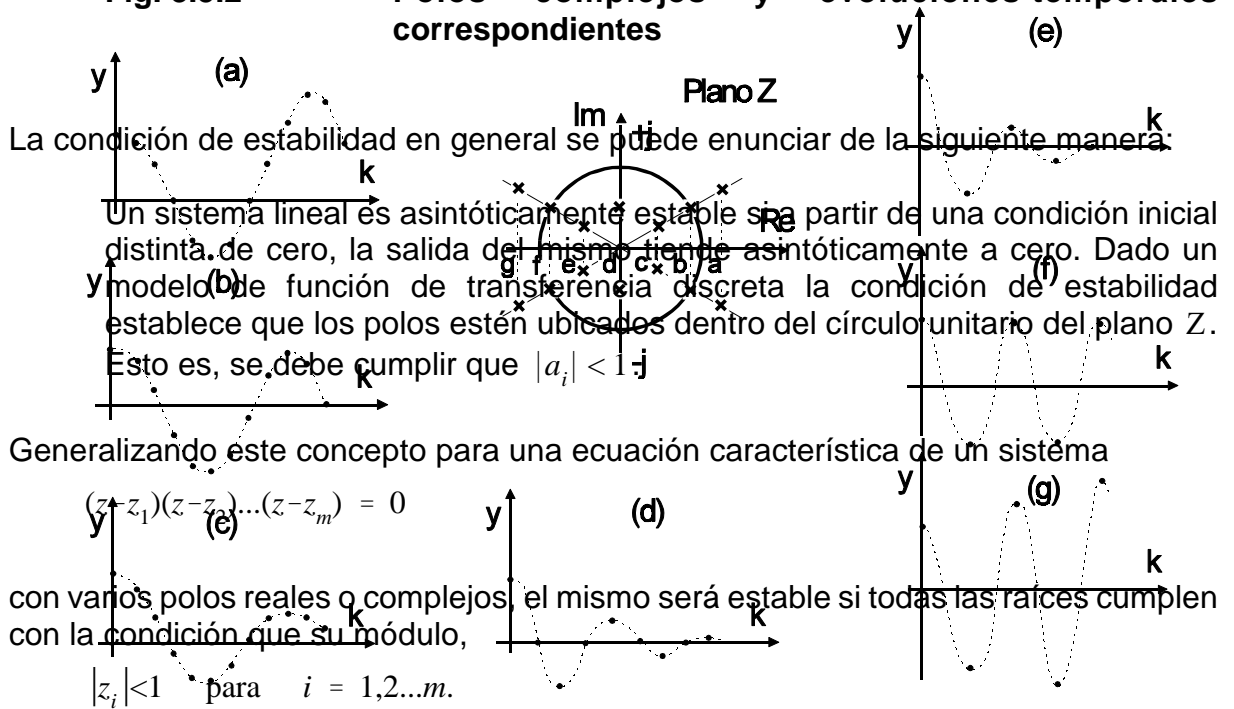
$$y(k) = M^k \cos(\omega_1 k T_o) y(0)$$

La salida del sistema  $y(k)$  permanecerá acotada si y solo si es  $M \leq 1$ . Esto es, el sistema será estable si los polos complejos se encuentran dentro del círculo de radio unitario en el plano  $Z$ .

En la Fig. 3.5.2 se representan distintas posiciones de un par de polos complejos conjugados y sus correspondientes evoluciones temporales esquemáticas.

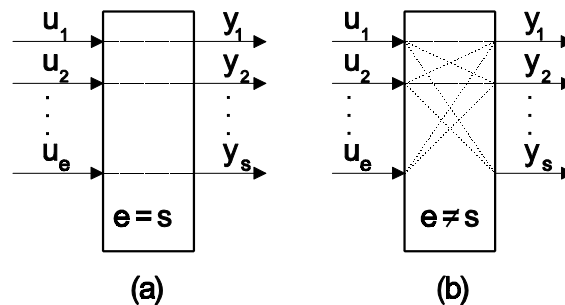
Para ángulos  $\omega_1 T_o < 90^\circ$  se obtienen las representaciones **a**, **b** y **c** en las cuales se cumple correctamente el teorema de Shannon ya que la frecuencia de muestreo es suficientemente alta en relación a la frecuencia de la armónica producida por el par de polos complejos. Cuando  $\omega_1 T_o = 90^\circ$  los polos se ubican sobre el eje imaginario. En este caso la señal  $y(k)$  se anula para  $k = 1, 3, 5, \dots$  y su signo cambia alternativamente para  $k = 0, 2, 4, \dots$  (representación **d**). El amortiguamiento está definido por el valor de  $M$ . Para ángulos  $\omega_1 T_o > 90^\circ$  se obtienen las representaciones **e**, **f** y **g** en las que comienza a violarse el teorema de Shannon.

**Fig. 3.5.2 Polos complejos y evoluciones temporales correspondientes**



### 3.6 Modelos para la representación de sistemas multivariables de tiempo discreto.

En forma general se define **proceso multivariable**, a aquel que tiene más de una entrada y más de una salida. Sin embargo, cuando cada salida esta vinculada a una y sólo una entrada, como se muestra en la Fig. 3.6.1 (a), entonces más que un proceso multivariable, se tiene un conjunto de procesos de una entrada y una salida, cuyo tratamiento se puede hacer en forma individual para cada uno de ellos, con las herramientas de control monovariable conocidas hasta ahora y se podrán controlar con lazos individuales de control. Comúnmente se los denomina **sistemas desacoplados**, y no presentan ningún problema adicional. Más específicamente un proceso es multivariable cuando además de tener múltiples entradas y múltiples salidas, cada entrada está vinculada a más de una salida, y cada salida a más de una entrada, en este caso toman el nombre de **procesos acoplados**, como se muestra en la Fig. 3.6.1 (b).



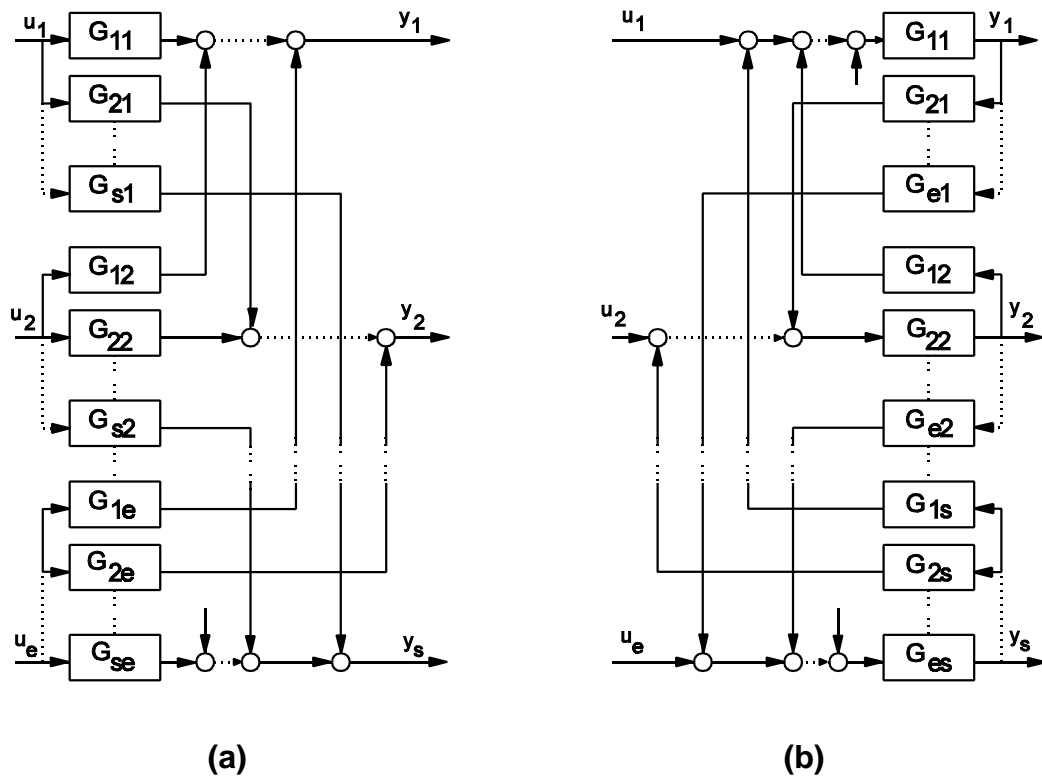
**Fig. 3.6.1 Esquema de sistemas multivariables.**  
**(a). Entradas y salidas desacopladas.**  
**(b). Entradas y salidas acopladas.**

La particularidad más importante de los procesos acoplados es la **interacción** entre entradas y salidas, de manera que no se puede tratar por separado cada relación entrada-salida, sino que se debe realizar un estudio en conjunto, lo que lleva a aplicar el **cálculo matricial-vectorial**.

#### 3.6.1 Estructuras canónicas para procesos multivariables.

Los procesos multivariables se pueden representar bajo modelos denominados **estructuras canónicas**. Las más importantes son la **estructura canónica P** y la **estructura canónica V**, ilustrados en Fig. 3.6.2 (a) y (b) respectivamente. En la estructura canónica **P** todas las entradas actúan sobre cada salida, mientras que en la estructura canónica **V** todas las salidas se conectan a cada entrada. La estructura **V** se define para igual número de entradas y salidas.





**Fig. 3.6.2. Estructuras canónicas más importantes**  
**(a) Estructura P. (b) Estructura V ( $e = s$ ).**

### 3.6.2 Modelo matemático para las estructuras canónicas multivariables.

Se puede considerar que cada salida se vincula a una entrada a través de una función de transferencia de tiempo discreto de manera que para  $e$  entradas y  $s$  salidas se tiene

$$y_i(z) = \sum_{j=1}^e G_{ij}(z)u_j(z) \quad (3.6-1)$$

con  $i = 1, \dots, s$  para el caso de una estructura **P** y

$$y_i(z) = G_{ii}(z)[u_i(z) + \sum_{j=1}^s G_{ij}(z)y_j(z)] \quad (3.6-2)$$

con  $G_{ij} = 0$  si  $i = j$ , para la estructura **V**.

Considerando todas las salidas y representando el sistema de ecuaciones en forma

matricial, para la estructura **P** se tiene

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \cdots & G_{1e}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \cdots & G_{2e}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(z) & G_{s2}(z) & \cdots & G_{se}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_e(z) \end{bmatrix} \quad (3.6-3)$$

o con notación vectorial-matricial

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{u}(z). \quad (3.6-4)$$

Para la estructura **V**

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{ss}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_s(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G_{12}(z) & \cdots & G_{1s}(z) \\ G_{21}(z) & 0 & \cdots & G_{2s}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(z) & G_{s2}(z) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_s(z) \end{bmatrix} \quad (3.6-5)$$

compacta

En forma

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_1(z) [\mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_2'(z) \mathbf{y}(z)]. \quad (3.6-6)$$

Operando en Ec. 3.6-6 se tiene

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_1(z) \mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_1(z) \mathbf{G}_2'(z) \mathbf{y}(z) \quad (3.6-7)$$

$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_1(z) \mathbf{G}_2'(z)]^{-1} \mathbf{G}_1(z) \mathbf{u}(z). \quad (3.6-8)$$

Denominando:

$$\mathbf{G}^*(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_1(z) \mathbf{G}_2'(z)]^{-1} \mathbf{G}_1(z) \quad (3.6-9)$$

$$y(z) = \mathbf{G}^*(z)u(z). \quad (3.6-10)$$

Comparando Ec. 3.6-10 con Ec. 3.6-4, se deduce que se ha transformado una estructura **V** en una **P**.

Para pasar de **P** a **V** es más complejo. La Ec. 3.6-4 se estructura de la forma

$$y(z) = \mathbf{G}_a(z)u(z) + \mathbf{G}_b(z)u(z) \quad (3.6-11)$$

o también

$$y(z) = \mathbf{G}_a(z) [u(z) + \mathbf{G}_a^{-1}(z)\mathbf{G}_b(z)u(z)]. \quad (3.6-12)$$

con  $\mathbf{G}_a(z)$  diagonal conteniendo sólo los elementos  $G_{ii}$ .

Despejando  $u(z)$  de Ec. 3.6-4

$$u(z) = \mathbf{G}^{-1}(z)y(z) \quad (3.6-13)$$

$$y(z) = \mathbf{G}_a(z) [u(z) + \mathbf{G}_a^{-1}(z)\mathbf{G}_b(z)\mathbf{G}^{-1}(z)y(z)]. \quad (3.6-14)$$

Comparando Ec. 3.6-6 con Ec. 3.6-14

$$\mathbf{G}_1(z) = \mathbf{G}_a(z) \quad (3.6-15)$$

$$\mathbf{G}_2'(z) = \mathbf{G}_a^{-1}(z)\mathbf{G}_b(z)\mathbf{G}^{-1}(z). \quad (3.6-16)$$

Las funciones de transferencia  $G_{ij}$  se denominan **elementos principales** si  $i = j$  y **elementos de acoplamiento** si  $i \neq j$ , y la estructura se dice simétrica si  $G_{ij} = G_{ji}$  para  $i \neq j$ .

### 3.6.3 Ecuación característica y factor de acoplamiento.

Suponiendo una realimentación desacoplada del sistema mediante una matriz de realimentación de la forma

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H_{22}(z) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_{ee}(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6-17)$$

y un vector de referencia  $\mathbf{r}(z)$  vinculado a través de una matriz  $\mathbf{M}(z)$ , se busca obtener la matriz de transferencia de lazo cerrado. Puesto que  $\mathbf{r}(z)$  es la referencia deseada para  $\mathbf{y}(z)$ ,  $\mathbf{r}(z)$  e  $\mathbf{y}(z)$  tienen la misma dimensión. El vector de entrada será

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{M}(z)\mathbf{r}(z) - \mathbf{H}(z)\mathbf{y}(z). \quad (3.6-18)$$

Reemplazando Ec. 3.6-18 en Ec. 3.6-4 se obtiene

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z) [\mathbf{M}(z)\mathbf{r}(z) - \mathbf{H}(z)\mathbf{y}(z)]. \quad (3.6-19)$$

Reordenando se encuentra

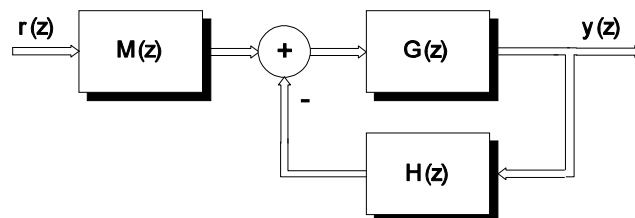
$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]^{-1} \mathbf{G}(z)\mathbf{M}(z)\mathbf{r}(z) \quad (3.6-20)$$

de manera que la matriz de transferencia de lazo cerrado es

$$\mathbf{G}^*(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]^{-1} \mathbf{G}(z)\mathbf{M}(z). \quad (3.6-21)$$

Dado que la dimensión de  $\mathbf{G}$  es  $(s \times e)$ , de  $\mathbf{H}$  es  $(e \times s)$ , y de  $\mathbf{M}$  es  $(e \times s)$ , entonces  $\mathbf{G}^*$  es  $(s \times s)$ .

En la Fig. 3.6.3 se puede observar un diagrama en bloques del modelo multivariable de lazo cerrado.



**Fig. 3.6.3. Diagrama en bloques de un sistema multivariable realimentado.**

Puesto que la matriz inversa se define como

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]}{\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]} \quad (3.6-22)$$

ésta se puede reemplazar en Ec. 3.6-21 obteniéndose

$$\mathbf{G}^*(z) = \frac{\text{Adj}[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]\mathbf{G}(z)\mathbf{M}(z)}{\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]} \quad (3.6-23)$$

y por lo tanto la **ecuación característica** del proceso multivariable de lazo cerrado es

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)] = 0 \quad (3.6-24)$$

es decir una generalización del polinomio característico estudiado para el caso de una entrada y una salida.

Un caso particular de bastante importancia se presenta cuando  $\mathbf{H}$  es una matriz identidad en el caso de procesos de dos entradas y dos salidas y además se coloca en cascada con  $\mathbf{G}$  un sistema desacoplado  $\mathbf{Gc}$ , de manera que se tiene

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{Gc}(z)\mathbf{G}(z)] = \det \begin{bmatrix} [1 + G_{c11}G_{11}] & G_{c11}G_{12} \\ G_{c22}G_{21} & [1 + G_{c22}G_{22}] \end{bmatrix} = 0. \quad (3.6-25)$$

Desarrollando el determinante

$$[1 + G_{c11}G_{11}][1 + G_{c22}G_{22}] - G_{12}G_{21}G_{c11}G_{c22} = 0$$

sacando factor común el primer término y multiplicando y dividiendo en el segundo por  $G_{11}G_{22}$  se obtiene

$$[1 + G_{c11}G_{11}][1 + G_{c22}G_{22}] \left[ 1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}} \frac{G_{c11}G_{11}G_{c22}G_{22}}{[1 + G_{c11}G_{11}][1 + G_{c22}G_{22}]} \right] = 0$$

Definien

do la función de transferencia de lazo cerrado desacoplada

$$Gr_i(z) = \frac{G_{c_{ii}}(z)G_{ii}(z)}{1 + G_{c_{ii}}(z)G_{ii}(z)} \quad (3.6-26)$$

y e l

**factor de acoplamiento dinámico**

$$f_{ad}(z) = \frac{G_{12}(z)G_{21}(z)}{G_{11}(z)G_{22}(z)} \quad (3.6-27)$$

el polinomio característico queda

$$(1 + Gc_{11}G_{11})(1 + Gc_{22}G_{22})(1 - f_{ad}Gr_1Gr_2) = 0.$$

En esta última ecuación los dos primeros factores son los polinomios característicos de los lazos simples desacoplados y sólo el tercer término depende de las funciones de transferencia cruzadas, agregando raíces al polinomio característico debidas al acoplamiento. De acuerdo con la ecuación del factor de acoplamiento dinámico, ya sea  $G_{12}$  o  $G_{21}$  o ambas igual a cero, no se modificará el conjunto de autovalores del sistema desacoplado.

Los resultados anteriores son difíciles de generalizar para procesos de más de dos entradas y dos salidas, sin embargo se puede demostrar que sólo se necesita que una de las dos funciones de transferencia cruzada  $G_{ij}$ ,  $G_{ji}$  para todo  $i$  y todo  $j$  sean cero para que se conserven los autovalores del sistema desacoplado.

También se puede definir un **factor de acoplamiento estático** como

$$f_{ae} = \frac{G_{12}(1)G_{21}(1)}{G_{11}(1)G_{22}(1)} \quad (3.6-28)$$

La matriz  $Gc$  constituye el **controlador del proceso**, y se puede elegir de manera que el efecto de acoplamiento sea mínimo.