CONTROLADORES DISCRETOS DE BAJO ORDEN

1. Introducción.

El controlador digital más difundido es sin lugar a dudas el controlador PID, cuya estructura se ha obtenido por semejanza con su homónimo continuo, como lo muestra la Fig. 1. Este controlador es del tipo “parámetros optimizados” y sus tres parámetros se ajustan con métodos ya muy conocidos. La implementación común de este controlador es en un procesador digital, capaz de calcular una ecuación en diferencias en cada intervalo de muestreo o lo que también se llama “en tiempo real”. Esta ecuación en diferencias representa el algoritmo de control y en él están incluidos todos los parámetros del controlador. Cualquier modificación de un parámetro del controlador, implica modificar uno o más términos de la ecuación en diferencias. Por razones de tiempo de cálculo y facilidad para modificar los parámetros del controlador, es conveniente que esta ecuación en diferencias sea lo más simple posible. Este es justamente el objetivo con que se desarrollaron los controladores discretos de bajo orden (CDBO). Estos controladores con solo tres parámetros se pueden ajustar para tener un comportamiento PID, PI, PD, P e I y su estudio se desarrolla a continuación.

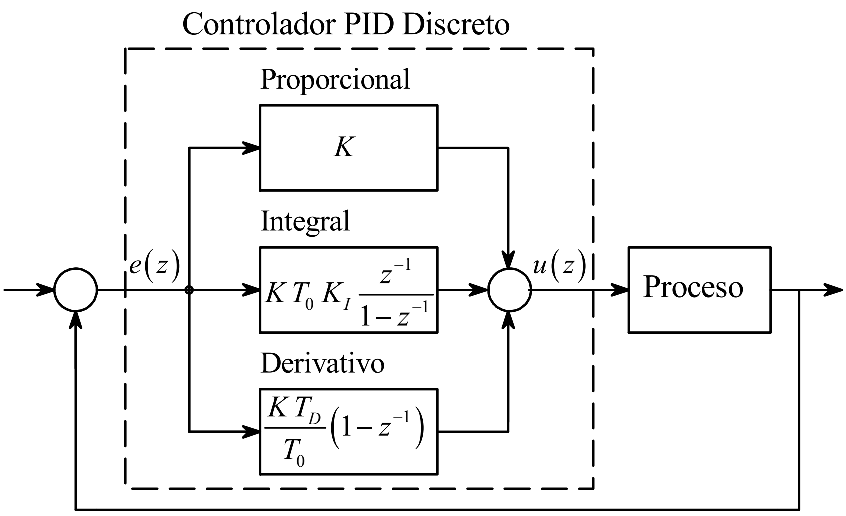

Fig. 1: Controlador PID discreto.

2. Controlador discreto de bajo orden

Diseñar un Controlador Discreto de Bajo Orden (CDBO) es encontrar una expresión simple del controlador PID de la Fig. 1 y que se pueda implementar en un procesador digital. Desarrollando el diagrama de bloque se obtiene (1) y (2).

$$u(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\left[K\left(1-z^{-1}\right)+K\,T_0\,K_I\,z^{-1}+\frac{K\,T_D}{T_0}\left(1-z^{-1}\right)^2\right]e(z) \tag{1}$$

$$u(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\left[\left(K+\frac{K\,T_D}{T_0}\right)+\left(KT_0K_I-K-\frac{2KT_D}{T_0}\right)z^{-1}+\frac{KT_D}{T_0}z^{-2}\right]e(z) \tag{2}$$

Haciendo los reemplazos (3), (4) y (5) se obtiene (6) y (7).

$$\mathrm{A} = \left(K + \frac{K\,T_D}{T_0} \right) \tag{3}$$

$$\mathrm{B} = \left(KT_0K_I - K - \frac{2KT_D}{T_0} \right) \tag{4}$$

$$\mathrm{C} = \left(\frac{KT_D}{T_0} \right) \tag{5}$$

$$G_C(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}z^{-1} + \mathrm{C}z^{-2}}{1 - z^{-1}} \tag{6}$$

$$u(k) = u(k-1) + \mathrm{A}e(k) + \mathrm{B}e(k-1) + \mathrm{C}e(k-2) \tag{7}$$

Con un controlador como el presentado en (6) se puede lograr un PID, PI, PD, P e I con solo calcular adecuadamente las constantes A, B y C. La ecuación en diferencias (7) es muy simple y el procesador digital la debe calcular en cada intervalo de muestreo.

Se analizarán las distintas variantes que pueden surgir de un controlador caracterizado por (6). Para ello se calcula y analiza la respuesta temporal de (7), cuando la entrada es un escalón unitario (8).

$$e(k) = \begin{cases} 1 & \forall \quad k \ge 0 \\ 0 & \forall \quad k < 0 \end{cases} \tag{8}$$

2.1 Controlador discreto de bajo orden con comportamiento PID

Con (7) se calculan los primeros valores de $u(k)$ obteniéndose (9).

$$\begin{cases} u(0) = A \\ u(1) = 2A + B \\ u(2) = 3A + 2B + C \\ \ldots \\ u(k) = (k+1)A + kB + (k-1)C \end{cases} \tag{9}$$

Operando algebraicamente (9), se obtiene (10), que representa una recta con una ordenada al origen $(A - C)$ y pendiente $(A + B + C)$.

$$u(k) = (A - C) + k(A + B + C) \tag{10}$$

La respuesta temporal de un controlador PID a un escalón, debe tener un valor elevado en la primera acción de control, para t=0, debido a la parte derivativa, para luego disminuir a un valor mínimo y finalmente crecer a velocidad constante (parte I). Entonces, para tener un comportamiento PID con una entrada escalón se debe cumplir que $u(0) > u(1)$, $u(2) > u(1)$.

Un controlador PID con ganancia positiva deberá tener una respuesta temporal como muestra la Fig.2 y se deben cumplir las siguientes relaciones:

$A > 0$

$(A - C) > 0$

$A > (2A + B)$

$(A + B + C) > 0$

De esto resultan las siguientes condiciones relativas de los parámetros para que el controlador tenga un comportamiento PID.

$A > 0$

$B < -A$

$-(A + B) < C < A$

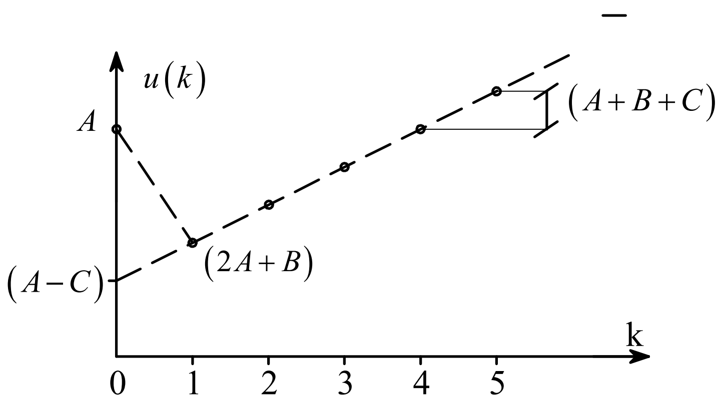

Fig. 2: Respuesta de un controlador discreto con comportamiento PID

Asociando la respuesta temporal de la Fig.2 al comportamiento de un controlador PID continuo cuando la entrada es un escalón unitario, se puede definir a (11), (12) y (13) como ganancia estática, constante de derivación y constante de integración respectivamente.

$$G = A - C \tag{11}$$

$$C_D = \frac{A - (A - C)}{G} = \frac{C}{G} \tag{12}$$

$$C_I = \frac{A + B + C}{G} \tag{13}$$

Se pueden establecer las equivalencias (14) entre el PID discreto y continuo.

$$\begin{aligned} &K \to G \\ &\frac{T_D}{T_0} \to C_D \\ &K_I T_0 \to C_I \end{aligned} \tag{14}$$

2.2 Controlador discreto de bajo orden con comportamiento PI

En este caso C=0 y la función de transferencia del controlador será (15) y la ecuación en diferencias (16).

$$G_C(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{A + Bz^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{15}$$

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) \tag{16}$$

Se calcula y grafica en la Fig. 3 la respuesta temporal para una entrada escalón unitario. Su evolución puede ser comparada con un controlador PI continuo, con las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} A > 0 \\ A + B > 0 \end{cases}$$

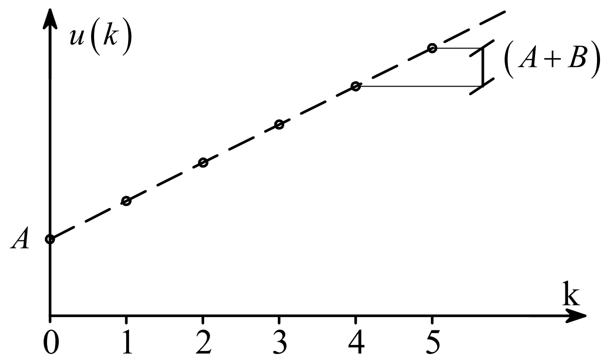

Fig. 3 Respuesta del controlador tipo PI

Donde la ganancia estática y la constante de integración está definidas por (17) y (18) respectivamente.

$$G = A \tag{17}$$

$$C_I = 1 + \frac{B}{A} \tag{18}$$

Si $B = 0$, se obtiene un controlador PI con constante de integración unitaria.

2.3 Controlador discreto de bajo orden con comportamientoI

Si $A = 0$, $C = 0$ y $B > 0$, la ecuación en diferencias es (19), su respuesta temporal es la Fig. 4 se obtiene un controlador tipo integral puro, Fig. 4.

$$u(k) = u(k-1) + Be(k) \tag{19}$$

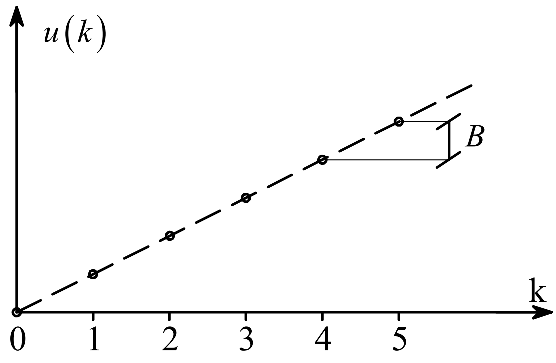

Fig. 4: Respuesta de un controlador tipo I

2.4 Controlador discreto de bajo orden con comportamiento PD

Cuando no interesa el efecto integrador y $C = 0$, la función de transferencia del controlador es (20) y la ecuación en diferencias es no recursiva como lo muestra (21).

$$G_C(z) = A + Bz^{-1} \tag{20}$$

$$u(k) = Ae(k) + Be(k-1) \tag{21}$$

La respuesta temporal está presentada en la Fig. 5, donde se observa que corresponde a un controlador tipo PD, donde $G = A + B$ y $C_D = -\dfrac{B}{G}$.

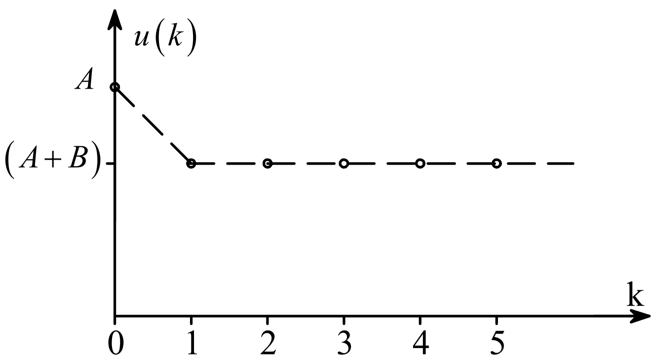

Fig. 5: Respuesta de un controlador tipo PD

2.5 Controlador discreto de bajo orden con comportamiento P

Cuando $B = 0$, $C = 0$ y sin el integrador, el controlador se reduce a un proporcional con ganancia $G = A$.

2.6 Controlador discreto de bajo orden con comportamiento D

En el caso de que $A=-B$, $C=0$ y sin el integrador, se obtiene un controlador que puede asociarse a uno continuo tipo D, Fig. 6.

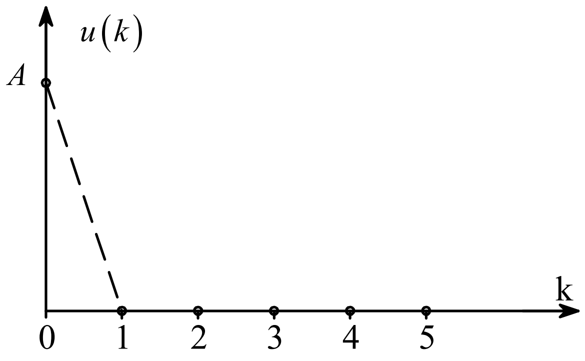

Fig. 6: Respuesta de un controlador tipo D

Ejemplo Nº 1

Un controlador discreto de segundo orden debe tenerun comportamientod el tipo: PID, PI, PD, P, D e I.

a) Calcular los coeficientes A, B y C.

b) Calcular las tres primeras acciones de control para $e(k)=1 \ \forall \ k \geq 0$.

El controlador a diseñar debe tener la estructura definida en la Ec. (22)

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) \tag{22}$$

Recordando de la teoría las Ec. (23), (24) y (25).

$$G = A - C \tag{23}$$

$$C_D = \frac{A-(A-C)}{G} \tag{24}$$

$$C_I = \frac{A+B+C}{A-C} \tag{25}$$

Haciendo las siguientes equivalencias:

$K_P = G$: Constante proporcional.

$\frac{T_D}{T_0} = C_D$: Constante derivativa.

$T_I \ T_0 = C_I$: Constante integral

Resolviendo algebraicamente (23), (24) y (25), se obtienen (26), (27) y (28).

$$A = G(1+C_D) \tag{26}$$

$$B = G(C_I - 1 - 2C_D) \tag{27}$$

$$C = G \ C_D \tag{28}$$

A partir de los valores dados para G, C_D, C_I y con las Ecs. (26), (27) y (28) se realizan los cálculos de los coeficientes A, B y C. La tabla siguiente resume los cálculos de los coeficientes y de las tres primeras acciones de control para los distintos controladores.

Controlador	G	C_D	C_I	**A**	**B**	**C**	$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$	$u(3)$
PID	2.0	0.1	0.01	2.2	-2.38	0.2	2.2	2.02	2.04	2.06
PI	2.0	0	0.01	2.0	-1.98	0	2.0	2.02	2.04	2.06
PD	2.0	0.1	0	2.2	-2.4	0.2	2.2	2.0	2.0	2.0
P	2.0	0	0	2.0	-2.0	0	2.0	2.0	2.0	2.0
D	1.0	0.1	0	1.1	-1.2	0.1	1.1	1.0	1.0	1.0
I	1.0	0	0.1	1	-0.99	0	1.0	1.01	1.02	1.03