

Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos

Claudio Rosales[†], Gustavo Scaglia[†], Ricardo Carelli[†] y Mario Jordan^{††}

[†] Instituto de Automática (INAUT). Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
Av. Libertador San Martín (oeste) 1109. J5400ARL. San Juan, Argentina.
e-mail:{crosales,gscaglia,rcarelli}@inaut.unsj.edu.ar

^{††} Instituto Argentino de Oceanografía (IADO-CONICET)
Florida 8000, Complejo CRIBABB, Edificio E1, Bahía Blanca B8000FWD Argentina
mjordan@criba.edu.ar

Resumen— En este trabajo se presenta el diseño de un controlador para un helicóptero de cuatro rotores, de manera que éste pueda seguir una trayectoria previamente establecida. Para ello se utiliza como descripción el modelo dinámico del mismo obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. De esta aproximación se obtiene las acciones de control para un funcionamiento óptimo del sistema. El controlador propuesto es simple y presenta un adecuado nivel de robustez ante la incertidumbre en el modelo del sistema a controlar. Se presentan resultados de simulación que muestran el buen desempeño del sistema de control propuesto.

Palabras Clave— Helicóptero de cuatro rotores, métodos numéricos, control de trayectoria.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas importantes en el control de los vehículos aéreos autónomos, también llamados drones o UAVs (Unmanned Autonomous Vehicles), es que estos puedan seguir una trayectoria previamente calculada.

Los helicópteros se utilizan en diferentes tipos de tareas, de las civiles hasta las militares, siendo estas últimas las más conocidas o empleadas. Dentro de las aplicaciones civiles se puede mencionar la vigilancia del tráfico en carreteras, las operaciones de búsqueda aérea y salvamento, la recolección de información para la predicción meteorológica o detección de fuego, etc.

La configuración clásica y la más conocida, está equipada con un rotor principal y otro de cola. Existen otros tipos de configuración, una de ellas es el helicóptero de cuatro rotores o también conocidos como cuadrirotor, que son vehículos complejos y difíciles de controlar, poseyendo todas las propiedades aerodinámicas de los helicópteros clásicos. El interés de estudiar este tipo de helicópteros se deriva de su versatilidad, y de su maniobrabilidad, permitiendo un gran número de tareas.

El helicóptero de cuatro rotores, como el que se observa en la Figura 1 (ver [9]), posee ciertas ventajas sobre los helicópteros convencionales. El control de la posición y orientación se logra variando la velocidad angular de

cada uno de los cuatro motores ($i = 1, \dots, 4$), dado que las hélices son de paso fijo.

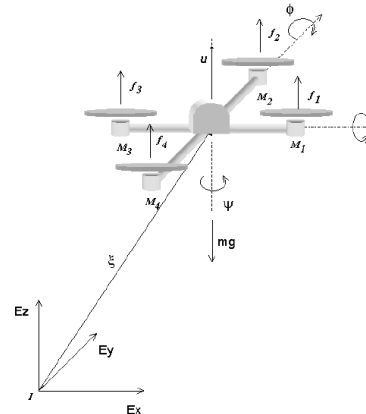


Fig. 1 Helicóptero de cuatro rotores o cuadrirotor.

El control automático del cuadrirotor ha despertado el interés de los investigadores en los últimos años, quienes se interesan cada vez más por el estudio y desarrollo de leyes de control no lineales para controlar la dinámica de dichos vehículos [1].

En la literatura se han propuesto diferentes estrategias de control, algunas utilizan técnicas de linealización. En [2] trata de una ley de control por realimentación dinámica y un cambio de variables en el espacio de estados con el objetivo de transformar el sistema no lineal en un sistema lineal y controlable. Este problema es conocido como linealización exacta por realimentación. Además, se reduce el sistema por el enfoque entrada-salida para trabajar con un conjunto de sistemas SISO independientes, siendo este el problema de desacoplamiento entrada-salida.

Otras propuestas utilizan técnicas de backstepping, como en [3]. También se implementan técnicas de H_∞ , como es el caso de [4] En éste se desarrolla una estrategia de control que tiene como objetivo estabilizar de forma robusta el subsistema de rotación, siendo capaz de mantener el buen funcionamiento del helicóptero cuando este está sujeto a perturbaciones que generan

momentos aerodinámicos. Para ello se utiliza una ley de control H^∞ no lineal que es robusta ante la presencia de incertidumbres y capaz de rechazar perturbaciones mantenidas. Una vez estabilizado el subsistema de rotación, se implementa un controlador del subsistema de traslación lineal.

En el presente trabajo, se propone utilizar métodos numéricos, con el objeto de encontrar las acciones de control óptimas que permitan llevar el vehículo del estado actual al deseado. Otros trabajos se implementaron en el área de la robótica móvil utilizando la misma técnica de trabajo, ver [5-8].

El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo dinámico de un helicóptero de cuatro rotores. En la sección 3 se aproxima el modelo del helicóptero utilizando métodos numéricos y se obtiene la expresión del controlador propuesto. En la sección 4 se muestran resultados de la simulación del algoritmo de control, donde se pueden apreciar las características del controlador propuesto. En la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo y las propuestas para trabajos futuros.

2. MODELO DINÁMICO

En esta sección se utiliza el modelo dinámico del helicóptero de cuatro rotores utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este se puede observar en forma completa en [9].

Las ecuaciones generalizadas de un vehículo aéreo pueden escribirse como:

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in R^6 \quad (1)$$

Donde $\xi = (x, y, z) \in R^3$ denota la posición del centro de masa del helicóptero relativo al eje de referencia (I), y $\eta = (\psi, \theta, \phi) \in R^3$ son los ángulos de Euler, ψ es el ángulo de *yaw*, θ es el ángulo de *pitch* y ϕ es el ángulo de *roll*, los cuales representan la orientación del helicóptero.

Definiendo el Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U \quad (2)$$

Donde $T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}$ es la energía cinética translacional, $T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\omega}^T I \dot{\omega}$ es la energía cinética rotacional, $U = mgz$ es la energía potencial del sistema, z es la altura del vehículo, m denota la masa del helicóptero, ω es la velocidad angular, I es la matriz de inercia, y g es la aceleración gravitacional. El vector velocidad angular ω respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con las velocidades generalizadas (en donde los ángulos de Euler son válidos) utilizando una relación cinemática estándar,

$$\dot{\eta} = W_\eta^{-1} \omega \quad (3)$$

Donde

$$W_\eta^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Definiendo,

$$J(\eta) = W_\eta^T I W_\eta \quad (5)$$

Tal que:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (6)$$

La matriz J actúa como matriz de inercia para la energía cinética total rotacional del helicóptero, expresada en términos de coordenadas generalizadas η .

El modelo dinámico completo del helicóptero se obtiene de las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas generalizadas externa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde F_ξ es la fuerza traslacional aplicada al vehículo debido a la entrada de control principal, entonces podemos escribir $\hat{F} = [0 \ 0 \ u]^T$ y

$$u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (8)$$

Donde

$$f_i = k_i \omega_i^2 \quad \forall i = 1, \dots, 4, k_i > 0 \quad (9)$$

, k_i es una constante y ω_i es la velocidad angular del motor i -ésimo. Por lo tanto $F_\xi = R \hat{F}$ donde R denota la matriz rotacional $R(\psi, \theta, \phi)$ representando la orientación del cuadrirotor relacionada al eje de referencia fijo.

Los momentos o pares generalizados son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \\ (f_2 - f_4)l \\ (f_3 - f_1)l \end{bmatrix} \quad (9)$$

Donde l es la distancia entre los motores y el centro de gravedad, y τ_{M_i} es el momento producido por el motor $M_i, i = 1, \dots, 4$, alrededor del centro de gravedad del vehículo.

Debido a que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando ξ con η , las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en la dinámicas para las coordenadas de ξ y las coordenadas de η .

$$m \ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi \quad (10)$$

$$J \ddot{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) = \tau \quad (11)$$

Definiendo los términos de Coriolis que contiene los efectos giróscopos y centrífugos asociados con η como,

$$C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} = J \dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) \quad (12)$$

Finalmente obtenemos

$$m \ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi \quad (13)$$

$$J \ddot{\eta} = -C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} + \tau$$

Con el objetivo de simplificar el modelo se propone el siguiente cambio en la variable de entrada

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} + J \ddot{\tau} \quad (14)$$

Donde $\ddot{\tau} = [\ddot{\tau}_\psi, \ddot{\tau}_\theta, \ddot{\tau}_\phi]^T$, son las nuevas entradas. Entonces

$$\ddot{\eta} = \ddot{\tau} \quad (15)$$

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\
m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\
m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\
\ddot{\psi} &= \ddot{\tau}_\psi \\
\ddot{\theta} &= \ddot{\tau}_\theta \\
\ddot{\phi} &= \ddot{\tau}_\phi
\end{aligned} \quad (16)$$

Donde x y y son las coordenadas en el plano horizontal, z es la posición vertical, y τ_ψ , τ_θ y τ_ϕ son los momentos de yaw, pitch y roll, respectivamente, los cuales están relacionadas con los momentos generalizados τ_ψ , τ_θ y τ_ϕ por la Ec.(14).

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

3.1 Planteo del Problema

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y' = f(y, t) \quad y(0) = y_0 \quad (17)$$

En el cual el objetivo es conocer el valor de $y(t)$ en instantes discretos de tiempo $t = nTs$, donde Ts es el periodo de muestreo y $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. El valor de la variable $y(t)$ en $t = nTs$, se simbolizará como y_n . De esta forma, si se desea calcular y_{n+1} conociendo el valor de y_n , se debe integrar (15) en el intervalo de tiempo $nTs \leq t \leq (n+1)Ts$, como

$$y_{n+1} = y_n + \int_{nTs}^{(n+1)Ts} f(y, t) dt \quad (18)$$

Se puede obtener, un valor aproximado de y_{n+1} si se utilizan métodos numéricos para calcular la integral del segundo miembro de (2). Por ejemplo se puede aproximar como,

$$y_{n+1} \cong y_n + Ts f(y_n, t_n) \quad (19)$$

o como,

$$y_{n+1} \cong y_n + \frac{Ts}{2} \{f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})\} \quad (20)$$

en donde y_{n+1} en el segundo miembro de la Ec. (20) se desconoce y por lo tanto se puede estimar como indica la Ec. (19). Estas aproximaciones reciben el nombre de método de Euler y de Runge-Kutta de 2do orden, respectivamente.

En el presente trabajo se propone aplicar esta aproximación al modelo dinámico de una cuادريrotor y de esta manera obtener las acciones de control óptimas que permitan al helicóptero seguir una trayectoria previamente establecida. En la siguiente sección se analizará el modelo dinámico y el diseño del controlador propuesto.

3.2 Diseño del controlador

En esta sección se diseña una ley de control capaz de generar las señales $[u, \tau_\psi, \tau_\theta, \tau_\phi]$, con el objetivo de que la posición del helicóptero $[x(t), y(t), z(t), \psi(t)]$ siga la trayectoria deseada $[x_d(t), y_d(t), z_d(t), \psi_d(t)]$. La

relación entre los pares generalizados y las nuevas entradas ($\tilde{\tau}$) se encuentra en la Ec. (14).

El primer paso para el diseño del controlador consiste en pasar a variables de estado el modelo anteriormente mencionado.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x & x_5 &= z & x_9 &= \theta \\
x_2 &= \dot{x} & x_6 &= \dot{z} & x_{10} &= \dot{\theta} \\
x_3 &= y & x_7 &= \psi & x_{11} &= \phi \\
x_4 &= \dot{y} & x_8 &= \dot{\psi} & x_{12} &= \dot{\phi}
\end{aligned} \quad (21)$$

De la Ec.(21) resulta la obtención del modelo de estados de nuestro helicóptero.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_2 &= -\frac{u}{m} \sin(x_9) \\
\dot{x}_3 &= x_4 & \dot{x}_4 &= \frac{u}{m} \cos(x_9) \sin(x_{11}) \\
\dot{x}_5 &= x_6 & \dot{x}_6 &= \frac{u}{m} \cos(x_9) \cos(x_{11}) - g \\
\dot{x}_7 &= x_8 & \dot{x}_8 &= \tau_\psi \\
\dot{x}_9 &= x_{10} & \dot{x}_{10} &= \tau_\theta \\
\dot{x}_{11} &= x_{12} & \dot{x}_{12} &= \tau_\phi
\end{aligned} \quad (22)$$

Si se utiliza la aproximación de Euler se tiene,

$$\begin{aligned}
x_{1(n+1)} &= Ts x_{2(n)} + x_{1(n)} \\
x_{2(n+1)} &= -Ts \frac{u}{m} \sin x_{9(n)} + x_{2(n)} \\
x_{3(n+1)} &= Ts x_{4(n)} + x_{3(n)} \\
x_{4(n+1)} &= Ts \frac{u}{m} \cos x_{9(n)} \sin x_{11(n)} + x_{4(n)} \\
x_{5(n+1)} &= Ts x_{6(n)} + x_{5(n)} \\
x_{6(n+1)} &= Ts \frac{u}{m} \cos x_{9(n)} \cos x_{11(n)} - Ts g + x_{6(n)} \\
x_{7(n+1)} &= Ts x_{8(n)} + x_{7(n)} \\
x_{8(n+1)} &= Ts \tau_{\psi(n)} + x_{8(n)} \\
x_{9(n+1)} &= Ts x_{10(n)} + x_{9(n)} \\
x_{10(n+1)} &= Ts \tau_{\theta(n)} + x_{10(n)} \\
x_{11(n+1)} &= Ts x_{12(n)} + x_{11(n)} \\
x_{12(n+1)} &= Ts \tau_{\phi(n)} + x_{12(n)}
\end{aligned} \quad (23)$$

Expresando el modelo de estado discreto en forma matricial queda:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{1(n+1)} \\ x_{2(n+1)} \\ x_{3(n+1)} \\ x_{4(n+1)} \\ x_{5(n+1)} \\ x_{6(n+1)} \\ x_{7(n+1)} \\ x_{8(n+1)} \\ x_{9(n+1)} \\ x_{10(n+1)} \\ x_{11(n+1)} \\ x_{12(n+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{1(n)} \\ x_{2(n)} \\ x_{3(n)} \\ x_{4(n)} \\ x_{5(n)} \\ x_{6(n)} \\ x_{7(n)} \\ x_{8(n)} \\ x_{9(n)} \\ x_{10(n)} \\ x_{11(n)} \\ x_{12(n)} \end{bmatrix} + Ts \left\{ \begin{bmatrix} x_{2(n)} \\ 0 \\ x_{4(n)} \\ 0 \\ x_{6(n)} \\ -g \\ x_{8(n)} \\ 0 \\ x_{10(n)} \\ 0 \\ x_{12(n)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin x_{9(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{9(n)} \sin x_{11(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{9(n)} \cos x_{11(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \tau_{\psi(n)} \\ \tau_{\theta(n)} \\ \tau_{\phi(n)} \end{bmatrix} \right\} \quad (24)
\end{aligned}$$

$$Ax = \frac{1}{Ts} [X_{(n+1)} - X_{(n)} - TsC] \quad (25)$$

Se define

$$b = \frac{1}{Ts} [X_{(n+1)} - X_{(n)} - TsC] \quad (26)$$

Reescribiendo la Ec. (23) y reemplazando en ella la Ec. (24),

$$Ax = b \quad (27)$$

El cual representa un sistema de ecuaciones lineales, y permite en cada instante de muestreo calcular las acciones de control que permiten que el cuadricoptero cumpla el objetivo del seguimiento de la trayectoria deseada. Ahora es necesario determinar las condiciones para que este sistema tenga solución exacta. Por ello reescribimos la Ec. (27) de manera completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin x_{9(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{9(n)} \sin x_{11(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{9(n)} \cos x_{11(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \tau_{\psi(n)} \\ \tau_{\theta(n)} \\ \tau_{\phi(n)} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_s} \begin{bmatrix} x_{1(n+1)} - x_{1(n)} - T_s x_{2(n)} \\ x_{2(n+1)} - x_{2(n)} \\ x_{3(n+1)} - x_{3(n)} - T_s x_{4(n)} \\ x_{4(n+1)} - x_{4(n)} \\ x_{5(n+1)} - x_{5(n)} - T_s x_{6(n)} \\ x_{6(n+1)} - x_{6(n)} + T_s g \\ x_{7(n+1)} - x_{7(n)} - T_s x_{8(n)} \\ x_{8(n+1)} - x_{8(n)} \\ x_{9(n+1)} - x_{9(n)} - T_s x_{10(n)} \\ x_{10(n+1)} - x_{10(n)} \\ x_{11(n+1)} - x_{11(n)} - T_s x_{12(n)} \\ x_{12(n+1)} - x_{12(n)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

La primera condición para que el sistema de Ec.(28) tenga solución exacta es, que el sistema de 6 ecuaciones y 4 incógnitas de la Ec.(29) tenga solución exacta, estas condiciones están dadas por las Ec.(31) y Ec.(32).

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sin x_{9(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x_{9(n)} \sin x_{11(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \tau_{\psi(n)} \\ \tau_{\theta(n)} \\ \tau_{\phi(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{2(n+1)} - x_{2(n)}}{T_s} \\ \frac{x_{4(n+1)} - x_{4(n)}}{T_s} \\ \frac{x_{6(n+1)} - x_{6(n)} + T_s g}{T_s} \\ \frac{x_{8(n+1)} - x_{8(n)}}{T_s} \\ \frac{x_{10(n+1)} - x_{10(n)}}{T_s} \\ \frac{x_{12(n+1)} - x_{12(n)}}{T_s} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sin x_{9(n)}}{m} \\ \frac{\cos x_{9(n)} \sin x_{11(n)}}{m} \\ \frac{\cos x_{9(n)} \cos x_{11(n)}}{m} \end{bmatrix} [u] = \begin{bmatrix} \frac{x_{2(n+1)} - x_{2(n)}}{T_s} \\ \frac{x_{4(n+1)} - x_{4(n)}}{T_s} \\ \frac{x_{6(n+1)} - x_{6(n)} + T_s g}{T_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_2}{T_s} \\ \frac{\Delta x_4}{T_s} \\ \frac{\Delta x_6 + T_s g}{T_s} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\tan x_{11(n)} = \frac{\Delta x_4}{\Delta x_6 + T_s g} \quad (31)$$

$$\tan x_{9(n)} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_4} \sin x_{11(n)} \quad (32)$$

De las ecuaciones Ec.(31) y Ec.(32) se obtienen las referencias de las variables x_{d9} y x_{d11} para que el sistema de ecuaciones Ec.(28) tenga solución exacta y de esta manera, el cuadricoptero pueda seguir la trayectoria de referencia.

De la Ec.(28) se puede ver que para que el sistema de ecuaciones tenga solución exacta, la segunda condición

que se tiene que cumplir es que las filas de b correspondientes a filas de A nulas sean igual a cero, entonces,

$$\begin{aligned} x_{2(n)} &= \frac{x_{1(n+1)} - x_{1(n)}}{T_s} & x_{4(n)} &= \frac{x_{3(n+1)} - x_{3(n)}}{T_s} \\ x_{6(n)} &= \frac{x_{5(n+1)} - x_{5(n)}}{T_s} & x_{8(n)} &= \frac{x_{7(n+1)} - x_{7(n)}}{T_s} \\ x_{10(n)} &= \frac{x_{9(n+1)} - x_{9(n)}}{T_s} & x_{12(n)} &= \frac{x_{11(n+1)} - x_{11(n)}}{T_s} \end{aligned} \quad (33)$$

De las ecuaciones anteriores se obtendrán las referencias de velocidades para que el cuadricoptero pueda seguir la trayectoria deseada. En [10] se demuestra que para que el error de seguimiento tienda a cero, se define,

$$\begin{aligned} x_{1(n+1)} &= x_{1d(n+1)} - kx_1(x_{1d(n)} - x_{1(n)}) \\ x_{3(n+1)} &= x_{3d(n+1)} - kx_3(x_{3d(n)} - x_{3(n)}) \\ x_{5(n+1)} &= x_{5d(n+1)} - kx_5(x_{5d(n)} - x_{5(n)}) \\ x_{7(n+1)} &= x_{7d(n+1)} - kx_7(x_{7d(n)} - x_{7(n)}) \\ x_{9(n+1)} &= x_{9d(n+1)} - kx_9(x_{9d(n)} - x_{9(n)}) \\ x_{11(n+1)} &= x_{11d(n+1)} - kx_{11}(x_{11d(n)} - x_{11(n)}) \end{aligned} \quad (34)$$

Donde $0 < kx_1, kx_3, kx_5, kx_7, kx_9, kx_{11} < 1$.

Si se reemplaza las Ecs.(34) en las Ecs.(33), se obtienen las velocidades necesarias para que el error de seguimiento tienda a cero,

$$\begin{aligned} x_{2ref(n+1)} &= \frac{x_{1d(n+1)} - kx_1(x_{1d(n)} - x_{1(n)}) - x_{1(n)}}{T_s} \\ x_{4ref(n+1)} &= \frac{(x_{3d(n+1)} - kx_3(x_{3d(n)} - x_{3(n)})) - x_{3(n)}}{T_s} \\ x_{6ref(n+1)} &= \frac{(x_{5d(n+1)} - kx_5(x_{5d(n)} - x_{5(n)})) - x_{5(n)}}{T_s} \\ x_{8ref(n+1)} &= \frac{(x_{7d(n+1)} - kx_7(x_{7d(n)} - x_{7(n)})) - x_{7(n)}}{T_s} \\ x_{10ref(n+1)} &= \frac{(x_{9d(n+1)} - kx_9(x_{9d(n)} - x_{9(n)})) - x_{9(n)}}{T_s} \\ x_{12ref(n+1)} &= \frac{(x_{11d(n+1)} - kx_{11}(x_{11d(n)} - x_{11(n)})) - x_{11(n)}}{T_s} \end{aligned} \quad (35)$$

Aplicamos la misma estructura de aproximación que la expresada en la Ec.(34) con los valores de velocidad de referencia obtenidas en la Ec.(35), para lograr el objetivo de que la velocidad del cuadricoptero tienda de manera asintótica a la velocidad de referencia obtenida en la ecuación (35).

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)} &= x_{2ref(n+1)} - k_2(x_{2ref(n)} - x_{2(n)}) \\ x_{4(n+1)} &= x_{4ref(n+1)} - k_4(x_{4ref(n)} - x_{4(n)}) \\ x_{6(n+1)} &= x_{6ref(n+1)} - k_6(x_{6ref(n)} - x_{6(n)}) \\ x_{8(n+1)} &= x_{8ref(n+1)} - k_8(x_{8ref(n)} - x_{8(n)}) \\ x_{10(n+1)} &= x_{10ref(n+1)} - k_{10}(x_{10ref(n)} - x_{10(n)}) \\ x_{12(n+1)} &= x_{12ref(n+1)} - k_{12}(x_{12ref(n)} - x_{12(n)}) \end{aligned} \quad (36)$$

Donde $0 < k_2, k_4, k_6, k_8, k_{10}, k_{12} < 1$.

El sistema final a resolver es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin x9ref_{(n+1)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x9_{(n)} \sin x11_{(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x9_{(n)} \cos x11_{(n)}}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \tau_{\psi_{(n)}} \\ \tau_{\theta_{(n)}} \\ \tau_{\phi_{(n)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x2ref_{(n+1)} - k2(x2ref_{(n)} - x2_{(n)}) - x2_{(n)}}{T_s} \\ \frac{x4ref_{(n+1)} - k4(x4ref_{(n)} - x4_{(n)}) - x4_{(n)}}{T_s} \\ \frac{x6ref_{(n+1)} - k6(x6ref_{(n)} - x6_{(n)}) - x6_{(n)}}{T_s} \\ \frac{x8ref_{(n+1)} - k8(x8ref_{(n)} - x8_{(n)}) - x8_{(n)}}{T_s} \\ \frac{x10ref_{(n+1)} - k10(x10ref_{(n)} - x10_{(n)}) - x10_{(n)}}{T_s} \\ \frac{x12ref_{(n+1)} - k12(x12ref_{(n)} - x12_{(n)}) - x12_{(n)}}{T_s} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Y lo resolvemos utilizando la matriz pseudoinversa, dado que las columnas de la matriz de incógnitas son linealmente independientes y así obtenemos las 4 acciones de control.

$$x = A^+b \quad (38)$$

Esta es la solución óptima por mínimos cuadrados según [11]. Solo esta resolver en cada periodo de muestreo el sistema de ecuaciones y así obtener las acciones de control necesarias para que el helicóptero siga la trayectoria deseada.

4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

En el ejemplo de Simulación se implementa el modelo de la sección II, y se utilizo los parámetros del helicóptero del trabajo [3].

$$m = 0.50\text{kg}, l = 0.24\text{m}, g = 9.81\text{m/s}^2,$$

$$I = \text{diag}[3.8, 3.8, 7.1] \times 10^{-3}\text{Nm.s}^2/\text{rad}$$

Para comprobar el desempeño del controlador propuesto se utilizó como trayectoria deseada un helicóide, centrada en el origen del sistema de coordenadas, de radio 1m y además que la orientación del cuadrirotor (ψ) sea de π radianes. La trayectoria se genera con una velocidad ascendente $v_z = 0.1\text{ m/seg}$ y una velocidad angular de $\omega = 0.5\text{ rad/seg}$. El helicóptero se larga desde el origen del sistema. Los valores de las constantes para las simulaciones fueron de, $kx_1 = 0.8, k_1 = 0.6, kx_3 = 0.8, k_3 = 0.6, kx_5 = 0.65, k_5 = 0.6, kx_7 = 0.9, k_7 = 0.7, kx_9 = 0.75, k_9 = 0.7, kx_{11} = 0.75, k_{11} = 0.7$.

En las Fig. 2-4 se observa la respuesta del sistema sin error en los parámetros del controlador. En la misma el helicóptero sigue la trayectoria deseada y se aprecia que el error tiende a cero.

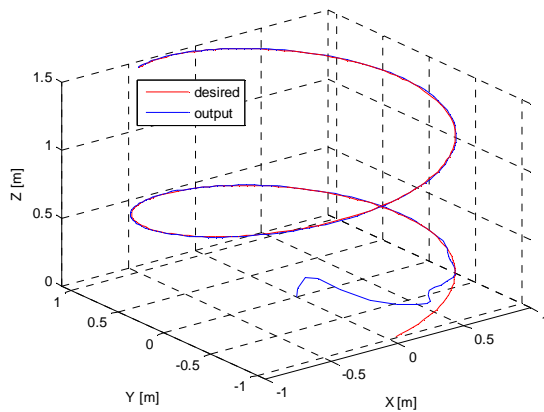


Fig. 2 Evolución de la posición del cuadrirotor

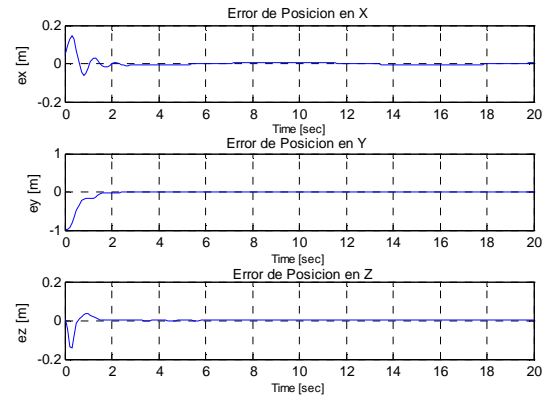


Fig. 3 Error de seguimiento.

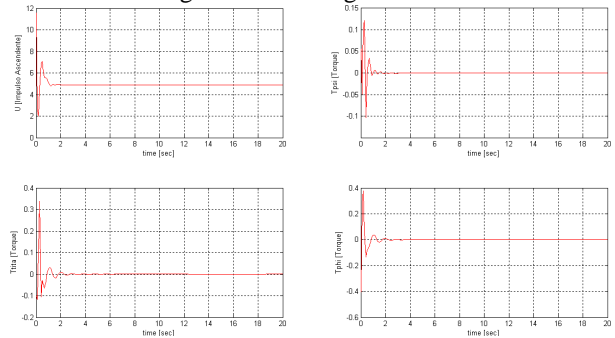


Fig. 4 Acciones de control.

Para analizar la robustez del controlador frente a errores de paramétricos, se simula la situación en donde existe un error entre los parámetros del controlador y del modelo real, del orden del 20%, tanto en los momentos de inercia como la masa del helicóptero. En las Figs. 5-7, se observa el desempeño del controlador, el error de control tiende a cero en x, y, ψ ; aunque en z existe un error de estado estacionario debido al error que existe en el valor de masa del helicóptero, aunque el error es muy bajo en función del error en el parámetro, lo cual verifica el buen desempeño del controlador.

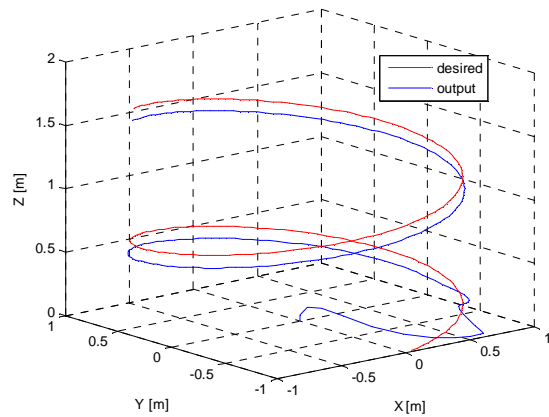


Fig. 5 Evolución de la posición del cuadrirotor, con un error de los parámetros del 20%.

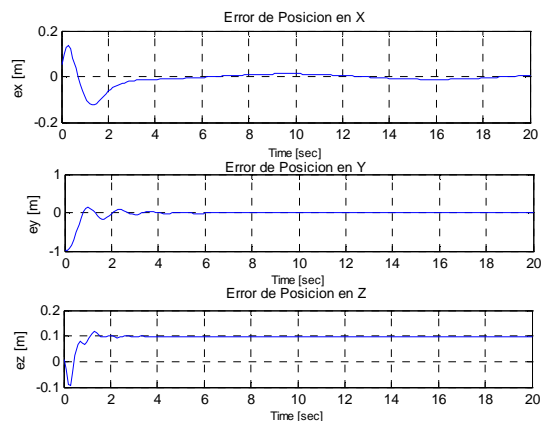


Fig. 6 Error de seguimiento, con un error de los parámetros del 20%.

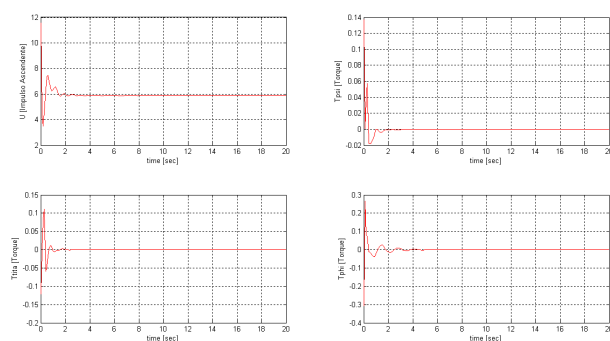


Fig. 4 Acciones de control, con un error de los parámetros del 20%.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un controlador para un helicóptero de cuatro rotores de manera que este pueda seguir una trayectoria previamente establecida. Para ello se utiliza una aproximación del modelo dinámico del helicóptero utilizando métodos numéricos. El controlador propuesto es fácil de implementar y como se puede observar de los experimentos realizados, el ajuste de los parámetros para asegurar un funcionamiento óptimo del sistema es sencillo.

Además se comprobó la robustez del controlador frente a errores en los parámetros. Esto es muy importante debido a que no siempre se cuenta con los valores de los parámetros de la planta de manera exacta, y la respuesta obtenida es bastante satisfactoria.

Como trabajo futuro se pretende aplicar esta metodología utilizando un cuadrirotor eléctrico experimental.

REFERENCIAS

- [1] S. Bouabdallah, P. Murrieri and R. Siegwart. "Design and control of an indoor micro quadrotor". In Proc. ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation 5, 4393-4398, 2004.
- [2] V. Mistler, A. Benallegue, and N. K. M'Sirdi. "Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback". In Proc. IEEE Int. Workshop on Robot and Human Inter. Communic., 586 - 593 ,2001.

- [3] T. Madani, A. Benallegue. "Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique". Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control, 1515 – 1520, 2006.
- [4] G. Raffo, M Ortega, F. Rubio. "Backstepping/Nonlinear H_∞ Control for Path Tracking of a QuadRotor Unmanned Aerial Vehicle". In Proc. of ACC, American Control Conference, 3356 - 3361 ,2008.
- [5] G. Scaglia, L. Quintero, V. Mut, F. di Sciascio. "Numerical Methods Based Controller Design for Mobile Robots". Robotica, Volume 27, Issue 02, Mar 2009, pp 269-279 doi: 10.1017/S0263574708004669, Published online by Cambridge University Press 23 Jun 2008 ISSN 0263-5747.
- [6] G. Scaglia, V. Mut, M. Jordan, C. Calvo, L. Quintero. "Mobile robot control based on robust techniques", Journal of Engineering Mathematics Volume 63 Number 1, DOI 10.1007/s10665-008-9252-0, enero 2009, page 17-32, ISSN 0022-0833 (Print) 1573-2703 (Online), Editor Springer Netherlands
- [7] A. Rosales, G. Scaglia, V. Mut, F. di Sciascio. "Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments-a linear algebra approach". Robotica, Volumen 27 , Issue 07 , Dec 2009 , pp 981-997 doi: 10.1017/S0263574709005402, Published online by Cambridge University Press 26 Feb 2009.
- [8] A. Rosales, G. Scaglia, V. Mut , F. di Sciascio, "Formation Control and Trajectory Tracking of Mobile Robotic Systems – A Linear Algebra Approach", Volumen 29 , Issue 03 , Dec 2009 , pp 335-349 doi 10.1017/S0263574710000068, Published online by Cambridge University Press 5 May 2010.
- [9] P . Castillo, R. Lozano, A. Dzul, "Modelling and Control of Mini-Flying Machines". USA: Springer, 2005.
- [10] G. Scaglia, A. Rosales, L. Quintero, V. Mut, R. Agarwal. "A Linear-Interpolation-based Controller Design for trajectory Tracking of Mobile Robots". Control Engineering Practice, vol. 18 (2010), 318–329 doi:10.1016/j.conengprac.2009.11.011. ISSN: 0967-0661.
- [11] G. Strang, "Linear Algebra and its Application", Academic Press, 1980.