

# CAPITULO 2

## 2. TRATAMIENTO DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

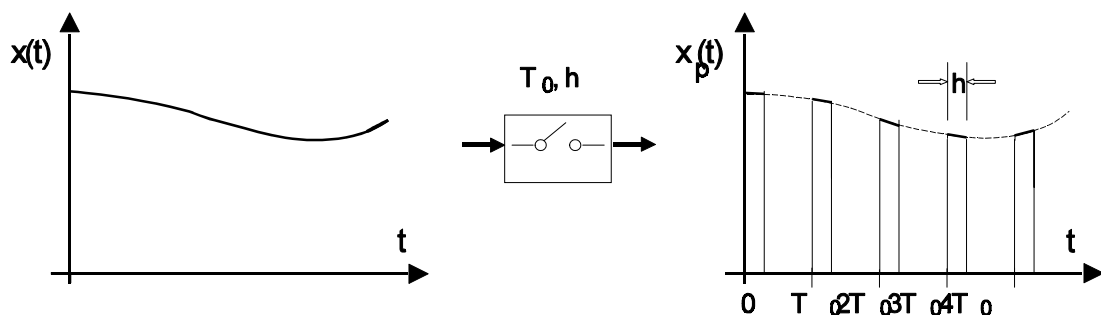
### 2.1 Digitalización de señales continuas.

Para realizar el control digital directo de un proceso, las señales involucradas, tanto las de entrada como las de salida, deben ser medidas a intervalos regulares para posibilitar su procesamiento digital. De esta forma resultan señales discontinuas que están discretizadas tanto en el tiempo como en su amplitud. Cada medida se denomina muestra y la acción de obtener las muestras discretas de una señal continua se denomina **discretización o muestreo**.

En este capítulo se presentarán resumidamente las herramientas teóricas para el tratamiento de las señales discretizadas, sin tocar el aspecto tecnológico de la obtención de las muestras.

Contrariamente a las señales continuas, que pueden tener cualquier amplitud para cualquier instante, las señales discretas contienen solamente valores discretos de amplitud para instantes determinados. Normalmente las señales discretas se obtienen por discretización de señales continuas a intervalos de tiempo constantes. Si bien es posible obtener pulsos discretos modulados en distintas formas, por ejemplo, modulación de ancho, de alto o modulación de frecuencia, en el control digital se utiliza casi con exclusividad la modulación en amplitud; esto es, cuando la amplitud del pulso que representa a la muestra es proporcional al valor de la señal continua en ese instante de tiempo, como se esquematiza en la Fig. 2.1.1.

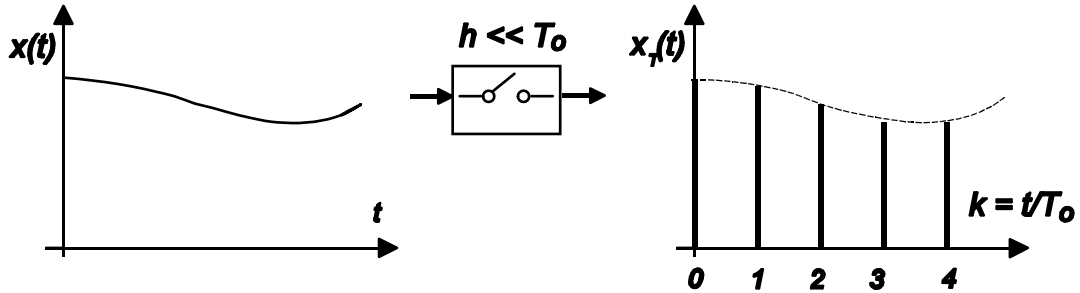
Cuando el intervalo entre muestras  $T_0$  es constante, se denomina muestreo coherente y es el único que se considera aquí. Con este tipo de modulación es fácil encontrar relaciones lineales en el tratamiento de los sistemas dinámicos lineales y se puede aplicar el principio de superposición.



**Fig 2.1.1. Discretización por modulación de amplitud.**

Si el tiempo  $h$  de duración de los pulsos es pequeño en comparación con el tiempo de

muestreo  $T_o$  y si además las constantes de tiempo asociadas al proceso sobre el que va actuar la señal discretizada son grandes respecto de  $h$ , se puede considerar al tren de pulsos de ancho infinitesimal, lo cual introduce simplificaciones de importancia en el tratamiento matemático. Esto se representa en la Fig. 2.1.2.



**Fig. 2.1.2. Señal discretizada para  $h \ll T_o$ .**

En este caso  $x(kT_o)$  representa la amplitud de la señal para el instante de muestreo  $t = kT_o$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$

La función  $x(t)$  modulada en amplitud en tiempo discreto queda definida como

$$x_T(t) = \begin{cases} x(kT_o) & \text{para } t = kT_o \\ 0 & \text{para } kT_o < t < (k+1)T_o \end{cases} \quad (2.1-1)$$

con  $k = 0, 1, 2, \dots$

De esta forma las funciones continuas pueden expresarse en los instantes de muestreo como funciones discretas, por ejemplo la función continua

$$x(t) = e^{-at} \quad (2.1-2)$$

al ser discretizada, queda

$$x(kT_o) = e^{-akT_o} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1-3)$$

La integración continua,

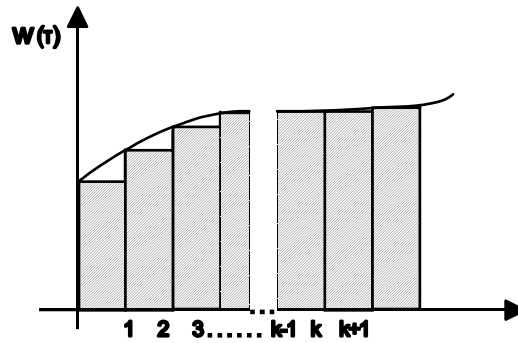
$$x(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad (2.1-4)$$

para ser procesada numéricamente puede resolverse por una aproximación denominada escalera.

De acuerdo a la Fig. 2.1.3, el área bajo la función continua  $w(t)$  puede aproximarse por la sumatoria de los rectángulos de base  $T_0$  y altura  $w(lT_0)$ . De esta manera el área hasta el instante  $k$  queda expresada en forma aproximada por

$$x(kT_0) = \sum_{l=0}^{k-1} w(lT_0) T_0 \quad (2.1-5)$$

siendo para  $kT_0 = t$ ,  $x(kT_0) \approx x(t)$ .



**Fig. 2.1.3. Integración discreta en escalera.**

## 2.2 Ecuación en diferencias.

La Ec. 2.1-5 se puede escribir en un intervalo posterior

$$x[(k+1)T_0] = \sum_{l=0}^k w(lT_0) T_0 \quad (2.2-2)$$

Haciendo la diferencia entre los valores dados por las Ecs. 2.1-5 y 2.2-2, se obtiene

$$\begin{aligned} x[(k+1)T_0] - x(kT_0) &= \sum_{l=0}^k w(lT_0) T_0 - \sum_{l=0}^{k-1} w(lT_0) T_0 = \\ &= T_0 w(kT_0) \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

Tomando  $a_1 = -1$ ,  $b_1 = T_0$ ,  $kT_0 = k$ , la expresión anterior puede escribirse

$$x(k+1) + a_1 x(k) = b_1 w(k) \quad (2.2-4)$$

o bien, en un intervalo anterior

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 w(k-1) \quad (2.2-5)$$

A esta ecuación se la denomina **Ecuación en Diferencias de Primer Orden** y establece una relación lineal entre instantes de la función discretizada  $x(k)$  que difieren en un intervalo.

Cuando existen relaciones entre instantes de la función que difieren en más de un intervalo, se pueden plantear ecuaciones en diferencias de mayor orden. Una ecuación en diferencias de orden  $m$  tiene la forma

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m) \quad (2.2-6)$$

Asumiendo que  $w(k)$  es la entrada de un sistema y  $x(k)$  su salida, si se conocen los  $m$  valores pasados de la entrada  $w(k)$  y la salida  $x(k)$  y además el valor presente de la entrada, resulta posible calcular el valor presente de la salida del sistema como

$$x(k) = -a_1 x(k-1) - \dots - a_m x(k-m) + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m) \quad (2.2-7)$$

Las ecuaciones en diferencias pueden obtenerse directamente discretizando las ecuaciones diferenciales en el campo continuo. Por ejemplo, la derivada de  $x(t)$  está definida por

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

Puede considerarse como primera aproximación de la derivada a la expresión

$$\frac{\Delta x(k)}{T_o} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_o}$$

o también

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1) \quad (2.2-8)$$

Para la derivada segunda, se tiene

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t-\Delta t)}{dt}}{\Delta t}$$

discreta puede expresarse como

En forma

$$\begin{aligned}\Delta^2 x(k) &= \Delta x(k) - \Delta x(k-1) \\ &= [x(k) - x(k-1)] - [x(k-1) - x(k-2)]\end{aligned}$$

o bien,

$$\Delta^2 x(k) = x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) \quad (2.2-9)$$

Esta expresión constituye una ecuación en diferencias de segundo orden.

### 2.3 Representación de la señal muestreada mediante impulsos.

Es posible obtener un tratamiento matemático sencillo de las funciones de tiempo discreto si el **tren de pulsos**, producto del muestreo se aproxima por un **tren de impulsos**. Un impulso está definido por

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad (2.3-1)$$

O bien si está desplazado un tiempo  $T$  se define como

$$\delta(t-T) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq T \\ \infty & \text{para } t = T \end{cases} \quad (2.3-2)$$

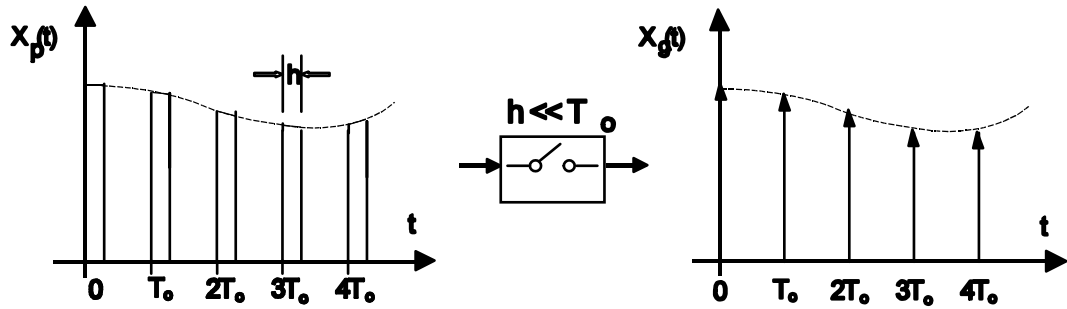
También se especifica el área del impulso. Cuando el área es unitaria, se lo denomina impulso unitario.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.3-3)$$

Como normalmente el ancho  $h$  de los pulsos muestreados es pequeño con respecto al período de muestreo  $T_o$ , el tren de pulsos muestreados puede aproximarse por un tren de impulsos donde cada impulso tiene un área igual a la del pulso respectivo. Esta aproximación se esquematiza en la Fig. 2.3.1, donde la longitud de las flechas es proporcional al área del pulso.

Cada impulso que representa a una muestra, está desplazado en el tiempo tal como se expresa en la Ec. 2.3-2. El área de cada pulso de muestreo en el instante  $nT_o$  y de ancho  $h$  estará representado por el impulso

$$x_g(nT_o) = x(t)h \delta(t - nT_o). \quad (2.3-4)$$



**Fig. 2.3.1. Aproximación de un tren de pulsos  $x(t)$  por un tren de impulsos.**

El tren de pulsos muestreados podrá aproximarse como

$$x_p(t) \approx x_g(t) = x(t)h \delta(t) + x(t)h \delta(t - T_o) + \dots \quad (2.3-5)$$

Expresado en forma de sumatoria, queda

$$x_p(t) \approx x_g(t) = x(t)h \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_o) \quad (2.3-6)$$

Cuando la señal discretizada debe actuar sobre un proceso continuo, se requiere retener el nivel de la muestra hasta la aparición del próximo pulso. En ese caso, la duración  $h$  del pulso resulta irrelevante. Por esta razón es importante eliminar la duración del pulso  $h$  en la expresión de la Ec. 2.3-6. Esto se logra suponiendo una duración unitaria del pulso ( $h = 1$  seg) y asociando el área del impulso a la magnitud  $x(t)$  de la muestra. Introduciendo  $x(t)$  dentro de la sumatoria, la señal muestreada puede expresarse matemáticamente como

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) \delta(t - kT_o) \quad (2.3-7)$$

Con esta aproximación y normalización la señal muestreada queda expresada como el producto de la magnitud de la muestra en el instante  $kT_o$  por el impulso unitario en ese instante.

## 2.4 Transformada de Laplace de una función de tiempo discreto.

La transformada de Laplace de una función continua se define como

$$x(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (2.4-1)$$

siendo  $s = \sigma + j\omega$

Aplicando esta definición a un impulso unitario, se obtiene

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \quad (2.4-2)$$

Cuando la transformada se realiza sobre un impulso unitario desplazado en el tiempo resulta, de acuerdo a la propiedad de desplazamiento de la transformada de Laplace

$$L\{\delta(t - kT_o)\} = L\{\delta(t)\}e^{-kT_o s} = e^{-kT_o s} \quad (2.4-3)$$

La transformada de Laplace del tren de impulsos representado por la Ec. 2.3-7, es

$$L\{x^*(t)\} = x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o)e^{-kT_o s} \quad (2.4-4)$$

Definiendo la frecuencia angular

$$\omega_o = 2\pi/T_o \quad (2.4-5)$$

y sustituyendo el argumento  $s$  por  $s + jn\omega_o$  en la Ec. 2.4-4, se obtiene

$$x^*(s + jn\omega_o) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o)e^{-kT_o(s + jn\omega_o)} \quad (2.4-6)$$

$$x^*(s + jn\omega_o) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o)e^{-kT_o s} e^{-jkn2\pi} \quad (2.4-7)$$

Esto es

$$x^*[s + j(n\omega_o)] = x^*(s) \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Con  $s = \sigma + j\omega$  se obtiene también

$$x^*[\sigma + j(\omega + n\omega_o)] = x^*(\sigma + j\omega)$$

$$\text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4-8)$$

Esto significa que la transformada de Laplace de una función de tiempo discreto como la representada por la Ec. 2.3-7, es una función periódica con frecuencia angular

$$\omega_o = 2\pi/T_o. \quad (2.4-9)$$

De la Ec. 2.4-8, se concluye que  $x^*(s)$  se repite, para cada  $n\omega_o$ . La transformada estará totalmente definida si se conoce para todo  $\sigma$  y para

$$-\frac{\omega_o}{2} < \omega < \frac{\omega_o}{2} \quad (2.4-10)$$

La función  $x^*(s)$  tendrá iguales valores para frecuencias que difieren en  $n\omega_o$ .

## 2.5 Teorema de muestreo.

La transformada de Laplace de una señal continua definida por la Ec. 2.4.1, puede aproximarse por la Ec. 2.5.1 cuando se disponen muestras de la señal  $x(t)$  tomadas en intervalos  $T_o = \Delta t$  suficientemente pequeños.

$$x(s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-k\Delta t s} \Delta t. \quad (2.5-1)$$

Comparando la Ec. 2.5-1 con la transformada de Laplace de un tren de impulsos (Ec. 2.4-4), resulta

$$T_o x^*(s) \approx x(s)$$

o también,

$$T_o x^*(\sigma + j\omega) \approx x(\sigma + j\omega) \quad (2.5-2)$$

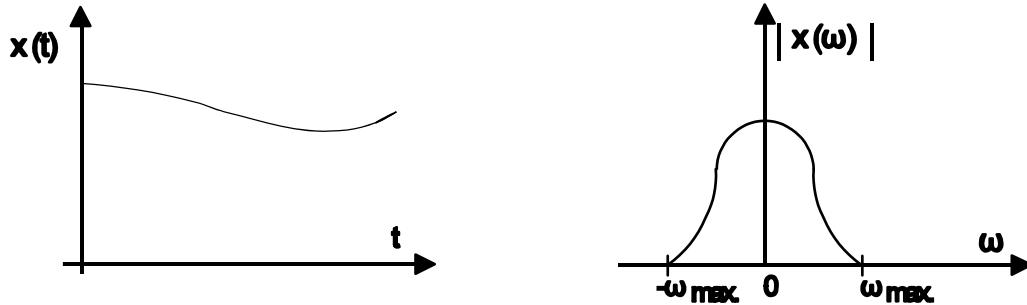
para  $T_o$  suficientemente pequeño. Se asume que las señales continuas están limitadas en frecuencia, esto es, la transformada de Fourier  $x(j\omega)$  está acotada en su frecuencia máxima,

$$x(j\omega) \neq 0 \quad -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

$$x(j\omega) = 0 \quad -\omega_{\max} > \omega > \omega_{\max}$$



De esta forma la Ec. 2.5-1 aproxima a  $x(j\omega)$  en el rango de valores no nulos. Esta condición se representa en el espectro de amplitudes de la Fig. 2.5.1.



**Fig. 2.5.1 Función temporal y espectro de amplitudes.**

Si  $T_o$  es suficientemente pequeño la transformada de Fourier provee un espectro alrededor de  $\omega = 0$ , denominado espectro base. De la Ec. 2.5-2 puede escribirse para  $\sigma = 0$

$$T_o x^*(j\omega) \approx x(j\omega)$$

para  $-\omega_{\max} < \omega < \omega_{\max}$  . (2.5-3)

El espectro de la señal muestreada está compuesto por el espectro base y repeticiones del mismo con una periodicidad  $\omega_o = 2\pi/T_o$ . De la Ec. 2.4-8, con  $\sigma = 0$  se obtiene

$$T_o x^*[j(\omega + n\omega_o)] \approx x(j\omega)$$

para  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  (2.5-4)

La transformada de Fourier de la señal muestreada se representa en la Fig. 2.5.2.

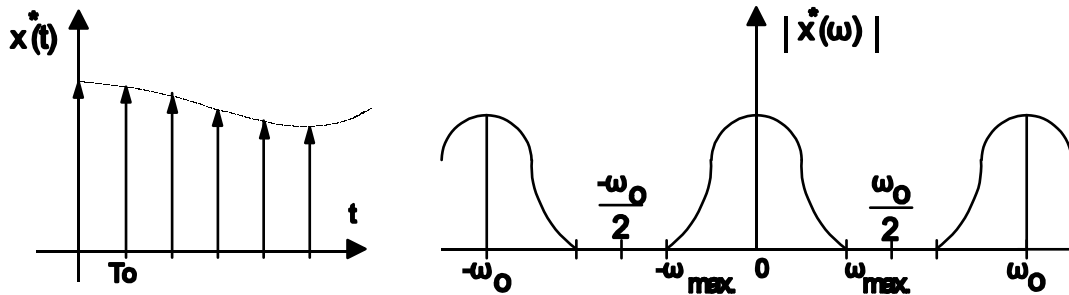
Cuando la señal continua se debe recuperar a partir de las muestras, se deben eliminar estas bandas laterales. Una forma de hacerlo es a través de filtros pasa bajos con los cuales se puede recuperar el espectro base. Esta función también la puede cumplir un elemento retenedor de nivel como se verá en el punto 2.6.

En el caso de disponer de un filtro ideal, con el objeto de poder rescatar solamente la banda base, las bandas laterales tendrán que estar separadas y no deberá existir superposición de bandas. Esto implica que la frecuencia de muestreo  $\omega_o$  debe ser:

$$\omega_o \geq 2\omega_{\max} \quad (2.5-5)$$

como surge de la Fig. 2.5.2. La Ec. 2.5-5 puede expresarse como

$$T_o \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}} = \frac{1}{2f_{\max}} \quad (2.5-6)$$



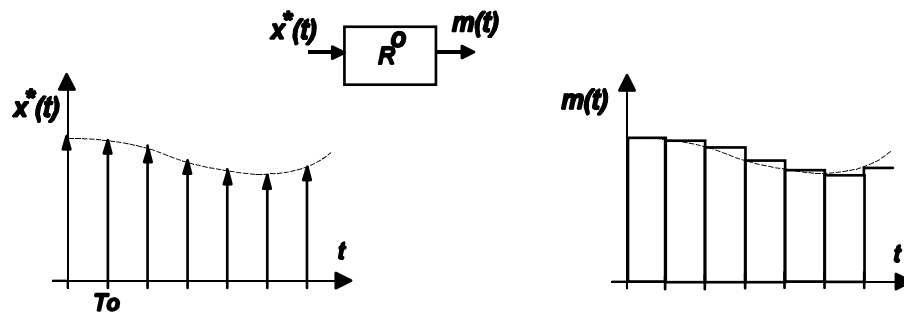
**Fig. 2.5.2 Transformada de Fourier de la señal muestreada.**

Esta expresión constituye el teorema de Shannon. Este teorema expresa que la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el doble de la máxima frecuencia armónica contenida en la señal. Este valor de frecuencia de muestreo se lo denomina también frecuencia de Nyquist  $f_o$ . Frecuencias de muestreo menores conducen a distorsión del espectro base por superposición de las bandas laterales. Bajo estas condiciones, la señal temporal no es más recuperable a partir de las muestras. Por esta razón el valor de esta frecuencia es de fundamental importancia en los sistemas muestreados como valor límite inferior.

Debido a que el filtrado no es ideal, consideraciones prácticas aconsejan elevar en por lo menos un factor 2 esta frecuencia de muestreo para lograr una mejor separación de las bandas espectrales laterales. Si es posible se utilizan factores aún mayores. Es común usar un factor 5.

## 2.6 Elemento Retenedor de nivel

Cuando las señales digitalizadas deben actuar sobre un proceso continuo, se requiere transformar a éstas también en señales continuas o cuasi continuas. Esto se denomina reconstrucción de las señales. Existen distintos procedimientos para reconstruir la señal, aunque casi con exclusividad se utiliza el denominado retenedor de orden cero. Este dispositivo retiene el valor de una muestra de la señal en forma constante (orden cero) hasta la llegada de la próxima muestra, asumiendo el valor de esta última. Cuando se utiliza una interpolación lineal entre muestras, el elemento se denomina reconstructor de primer orden. El orden del reconstructor de la señal evidencia el orden del polinomio con que se interpolan las muestras. Por simplicidad tecnológica y por los satisfactorios resultados que provee se utiliza normalmente el de orden cero, representado por  $R^0$ . La Fig. 2.6.1 representa esquemáticamente su operación.



**Fig. 2.6.1 Retenedor de orden cero.**

La función de transferencia de un elemento  $R^0$ , se obtiene del siguiente modo. El tren de impulsos de la entrada se representa matemáticamente por

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0). \quad (2.6-1)$$

La transformada de Laplace ya obtenida, es

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) e^{-kT_0 s}. \quad (2.6-2)$$

Definiendo la función

$$F(t) = U(t - kT_0) \quad (2.6-3)$$

como un escalón unitario que toma valor 1 para  $t \geq kT_0$  y 0 para  $t < kT_0$ , la señal de salida del retenedor  $R^0$  se puede expresar en el dominio temporal como

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o)[U(t - kT_o) - U[t - (k+1)T_o]]. \quad (2.6-4)$$

Aplicando la transformada de Laplace, se obtiene

$$m(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o)e^{-kT_o s} 1 \cdot (1 - e^{-T_o s})/s. \quad (2.6-5)$$

Comparando la Ec. 2.6-5 con la Ec. 2.6-2, resulta

$$m(s) = x^*(s) \frac{1 \cdot (1 - e^{-T_o s})}{s}. \quad (2.6-6)$$

La función de transferencia del retenedor de orden cero quedará expresada como

$$R^o(s) = \frac{m(s)}{x^*(s)} = \frac{1 \cdot (1 - e^{-T_o s})}{s}. \quad (2.6-7)$$

Puede considerarse que este retenedor se comporta para bajas frecuencias como un filtro pasabajos de primer orden, como se observa haciendo el análisis frecuencial en baja frecuencia. Tomando  $s = j\omega$ , se obtiene

$$R^o(j\omega) = \frac{(1 - e^{-T_o j\omega})}{j\omega}. \quad (2.6-8)$$

Con el desarrollo en serie de  $e^{-T_o j\omega}$  queda

$$R^o(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left( 1 - \frac{1}{1 + T_o j\omega + (T_o j\omega)^2/2 + \dots} \right).$$

Despreciando la contribución de los términos  $T_o j\omega$  de orden superior, se puede escribir para bajas frecuencias .

$$R^o(j\omega) \cong \frac{T_o}{1 + T_o j\omega}. \quad (2.6-9)$$

La Ec. 2.6-9 representa la respuesta frecuencial de un filtro pasabajos de primer orden.

## 2.7 Transformada Z.

La transformada Z constituye una herramienta matemática de singular importancia para el tratamiento de señales de tiempo discreto. La misma está relacionada con la transformada de Laplace y se obtiene introduciendo la siguiente relación

$$z = e^{T_o s} \quad (2.7-1)$$

con  $s = \sigma + j\omega$ .

Su utilidad en las señales de tiempo discreto puede apreciarse a través de algunos ejemplos de aplicación cuyos resultados serán utilizados posteriormente.

### 2.7.1 Transformada Z de un tren de impulsos.

La transformada de Laplace de un tren de impulsos (Ec. 2.4-4), es

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) e^{-kT_o s}. \quad (2.7-2)$$

Introduciendo la Ec. 2.7-1, se obtiene

$$x(z) = Z\{x^*(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) z^{-k} \quad (2.7-3)$$

también en forma expandida

$$x(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (2.7-4)$$

Esta serie converge, si  $|x(kT_o)|$  es finito y además  $|z| = e^{\sigma T_o} > 1$ .

### 2.7.2 Transformada Z de la función escalón.

La función escalón se define como

$$x(kT_o) = U(kT_o) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ U & \text{para } k \geq 0 \end{cases}$$

siendo

$U = \text{cte.}$ , la amplitud del escalón. Si el escalón es unitario, entonces es  $U = 1$ . De acuerdo a la Ec. 2.7-3, la transformada Z del escalón unitario es

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \quad (2.7-5)$$

también,

$$x(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (2.7-6)$$

Resulta una serie de potencias que con  $|z| > 1$ , puede escribirse como

$$x(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (2.7-7)$$

De forma similar pueden obtenerse las transformadas para otras funciones. En la bibliografía especializada se proveen tablas que incluyen las transformadas de Laplace y Z.

### 2.7.3 Características y teoremas generales de la transformada Z.

#### Correspondencia de denominadores.

Para expresiones de orden finito, los denominadores de una transformada en  $s$  y en  $z$  tienen el mismo orden y forma, obteniéndose por simple reemplazo de  $z_i = e^{T_o s_i}$ . No existe correspondencia entre los numeradores.

$$\frac{P_s(s)}{(s - s_i)^n} \rightarrow \frac{P_z(z)}{(z - z_i)^n} \quad (2.7-8)$$

con  $z_i = e^{T_o s_i}$

#### Linealidad.

La linealidad de la transformada Z puede expresarse como

$$Z\{ax_1(kT_o) + bx_2(kT_o)\} = a Z\{x_1(kT_o)\} + b Z\{x_2(kT_o)\} \quad (2.7-9)$$

#### Desplazamiento temporal.

La transformada Z de una función temporal desplazada  $d$  intervalos de muestreo

hacia tiempos crecientes es igual a la transformada Z de la función sin desplazar multiplicada por  $z^{-d}$ . Esto es

$$Z\{x(kT_o - dT_o)\} = z^{-d}x(z)$$

$$\text{para } d \geq 0 \quad (2.7-10)$$

El desplazamiento temporal hacia tiempos decrecientes es más complejo y queda expresado de la siguiente forma

$$Z\{x(kT_o + dT_o)\} = z^{+d}[x(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(qT_o)z^{-q}]$$

$$\text{para } d \geq 0. \quad (2.7-11)$$

### Teorema del valor inicial.

En forma similar al teorema del valor inicial en variable s se puede demostrar que

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z). \quad (2.7-12)$$

### Teorema del valor final.

Se demuestra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_o) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} x(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) x(z). \quad (2.7-13)$$

### Antitransformada.

Cuando sobre una función temporal  $x(t)$  se realiza la transformada de Laplace y sobre esta  $x(s)$  se realiza la transformada inversa o antitransformada, se obtiene la misma función temporal. Esta propiedad de antitransformada unívoca no se verifica con la antitransformada Z debido a la posible pérdida de información entre muestras. Con un intervalo de muestreo definido  $T_o$ , existe la antitransformada única.

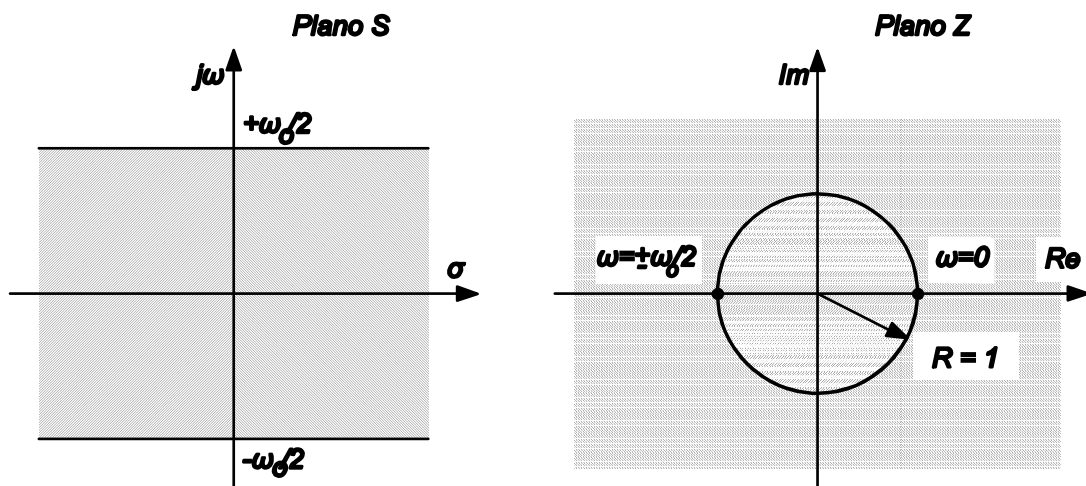
$$Z\{x(kT_o)\} = x(z)$$

$$Z^{-1}\{x(z)\} = x(kT_o) \quad (2.7-14)$$

### 2.7.4 Relaciones entre los planos S y Z.

Las expresiones en  $z$  permiten una interpretación en el plano  $Z$  del mismo tipo que se hace para las expresiones en el plano  $S$ . Las relaciones que existen entre los planos  $S$  y  $Z$ , se representan en la Fig. 2.7-1.

Cada zona del plano  $S$  de la variable  $s = \sigma + j\omega$ , tiene su correlato en el plano  $Z$ . Dado que el estudio de la correspondencia del eje  $j\omega$  es de fundamental importancia para analizar la estabilidad de sistemas continuos controlados digitalmente, se analizará en primer lugar qué sucede en el plano  $Z$ , cuando un punto en el plano  $S$  se mueve sobre el eje  $j\omega$ .



**Fig. 2.7.1. Correspondencia del plano S y Z.**

En este caso,  $s = j\omega$  corresponde a  $z = e^{j\omega T_o}$ . En esta transformación  $T_o$  representa el período de muestreo y está relacionado con la frecuencia de muestreo a través de

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}.$$

(2.7-15)

Esto significa que si en el eje  $j\omega$  del plano  $S$  un punto se mueve entre  $-\omega/2$  y  $+\omega/2$  en el plano  $Z$  estará describiendo un círculo de radio unitario. Se considera ahora la semibanda izquierda limitada por  $\pm\omega/2$ . Para dicha banda  $\sigma$  es siempre negativo. Cuando se hace la transformación a  $Z$  el módulo es



$$M = e^{\sigma T_0} < 1.$$

El argumento  $\phi$  varía entre  $-\pi$  y  $+\pi$ . Esto significa que toda la semibanda izquierda se transforma en el interior del círculo de radio unitario. En forma análoga, toda la semibanda derecha limitada por  $\pm\omega_0/2$  tiene como superficie transformada el exterior del círculo de radio unitario.

Puede verificarse también que todas las bandas que están comprendidas en los intervalos  $(2n+1)\omega_0/2$  y  $(2n+3)\omega_0/2$  así como entre  $-(2n+1)\omega_0/2$  y  $-(2n+3)\omega_0/2$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , es decir, todas las bandas de amplitud  $\omega_0$  a partir de la original, son transformadas según una superficie que coincide con todo el plano  $Z$ . Las semibandas izquierdas se superponen con el interior del círculo y las semibandas derechas se superponen con el exterior del círculo. Como consecuencia de esta situación, una función que presenta infinitos polos en el plano  $S$ , podrá tener una cantidad finita de polos en el plano  $Z$ .

Cuando se transforma una señal continua en una señal muestreada y se calcula la transformada de Laplace de la secuencia, se obtiene una función periódica en el plano  $S$  como muestra la Ec. 2.4-8. Esto significa, por ejemplo, que una función continua con un polo en el plano  $S$  al ser muestreada, su transformada de Laplace tiene infinitos polos, ya que el polo original aparece en su posición inicial y repetido en múltiplos de  $\omega_0$ . Es decir, que la secuencia muestreada representada en el plano  $S$ , tendrá infinitos polos. Con la transformada  $Z$ , debido a que todas las bandas están superpuestas, esa cantidad infinita de polos se convierte en una cantidad finita lo cual hace más conveniente analizar una secuencia mediante esta última transformación.

A modo de ejemplo se toma una función temporal que decae exponencialmente

$$f(t) = e^{-t/T}.$$

Transformando se obtiene,

$$F(s) = 1/(s + 1/T).$$

(2.7-16)

$F(s)$  tiene un polo en  $s = -1/T$ . Si esta señal ingresa a un muestreador ideal, a su salida se tendrá

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0/T} \delta(t - kT_0).$$

La transformada de Laplace de esta secuencia de impulsos, será

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_d/T} e^{-ksT_o}$$

o también en forma cerrada,

$$F^*(s) = 1/[1 - e^{-T_d/T} e^{-sT_o}]. \quad (2.7-17)$$

Es interesante analizar los polos de esta función. Estos se verifican para,

$$e^{-T_d/T} \cdot e^{-sT_o} = 1.$$

se obtienen las siguientes implicancias para el módulo

$$e^{-T_d/T} \cdot e^{-\sigma T_o} = 1 \quad (2.7-18)$$

y la fase

$$\varphi = -\omega T_o = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2... \quad (2.7-19)$$

Se observa que existen infinitos polos cuyas partes reales se obtienen de Ec. 2.7-18

$$-T_d/T - \sigma T_o = 0$$

$$\sigma = -1/T$$

y resultan una constante. Las partes imaginarias se obtienen de Ec. 2.7-19

$$\omega = \pm 2k\pi / T_o = \pm k\omega_o.$$

La Ec. 2.7-17 factorizada en sus polos puede escribirse como

$$F^*(s) = \prod_{k=0}^{\infty} 1/[s + (1/T + jk\omega_o)].$$

(2.7-20)

Tomando ahora en la Ec. 2.7-17,  $a = e^{-T_d/T}$ ,  $z = e^{sT_o}$ , se tendrá la transformada en Z

$$F(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})} = \frac{z}{(z - a)} \quad (2.7-21)$$

$F(z)$  tiene un solo polo en  $z = a$ .

La Fig. 2.7.2 representa las posiciones de los polos en los planos S y Z de las funciones representadas por las ecuaciones Ec. 2.7-16, Ec. 2.7-20 y Ec. 2.7-21.

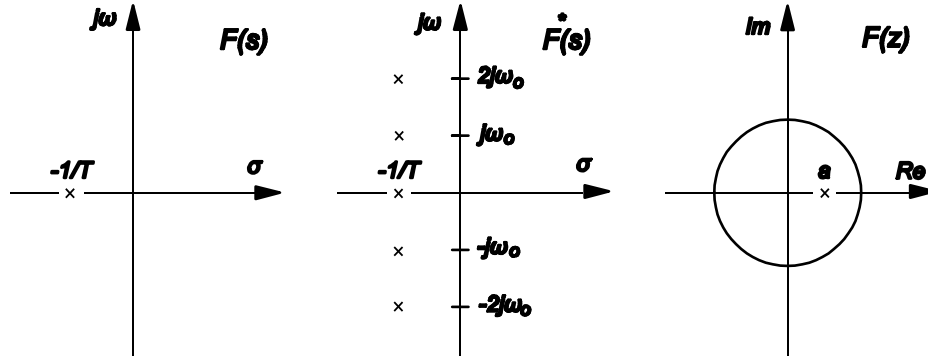


Fig. 2.7.2 Relaciones entre los planos S y Z.

## 2.8 Respuesta en frecuencia y formas bilineales.

Con el objeto de poder aplicar las técnicas de análisis y diseño de sistemas continuos en el dominio frecuencial a los sistemas de tiempo discreto, se ha propuesto una transformación adicional denominada Transformada W. Esta transformación, denominada también **Transformada Bilineal de Tustin**, está definida por las relaciones

$$w = \frac{2}{T_o} \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1 + wT_o/2}{1 - wT_o/2} \quad (2.8-1)$$

Considerando la relación de la variable z con s,  $z = e^{sT_o}$ , y recordando la definición de tangente hiperbólica de x como

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

resulta

$$w = \frac{2}{T_o} \frac{e^{sT_o} - 1}{e^{sT_o} + 1} = \frac{2}{T_o} \text{th} \frac{sT_o}{2}. \quad (2.8-2)$$

Tomando  $s = j\omega$  para realizar el análisis frecuencial, teniendo en cuenta que por

definición es  $\text{th } jx = j \text{tg } x$  se obtiene

$$w = j \frac{2}{T_o} \text{tg} \frac{\omega T_o}{2} = jv.$$

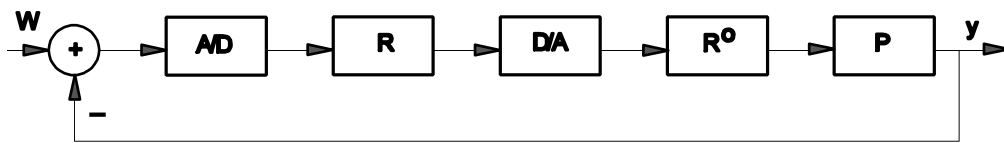
con

$$v = \frac{2}{T_o} \text{tg} \left( \omega \frac{T_o}{2} \right) \quad (2.8-3)$$

Siendo  $z = e^{j\omega T_o}$ , al desplazarse  $z$  alrededor del círculo unitario en el plano  $Z$ , en el plano  $W$ ,  $v$  es real y varía entre menos infinito y más infinito.

Cuando  $\omega$  varía entre  $0 \leq \omega \leq \omega_o/2 = \pi/T_o$ ,  $z$  se mueve a lo largo de la mitad superior del círculo unitario y la nueva variable  $w$  varía entre 0 y  $+\infty$  sobre el eje imaginario. Cuando  $\omega = \omega_o/2 = \pi/T_o$ ,  $v \rightarrow \infty$ . La función  $v = f(\omega)$  es periódica con período  $\omega_o = 2\pi/T_o$ . Para baja frecuencia angular cuando  $\omega \ll 2/T_o$ ,  $v \rightarrow \omega$ .

Para considerar su aplicación se toma como ejemplo el sistema de control esquematizado en la Fig. 2.8.1.



**Fig. 2.8.1 Sistema de Control muestreado.**

Con el objeto de analizar sólo los aspectos conceptuales se toma un caso muy simple cuando el proceso es un integrador puro y el controlador es proporcional.

$$P(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(z) = K.$$

La función de transferencia del retenedor de orden cero  $R^0$  es según la Ec. 2.6-7,

$$R^0 = \frac{1 - z^{-1}}{s}. \quad (2.8-4)$$

Por lo tanto la función de transferencia del proceso con retenedor es

$$P_1(z) = (1 - z^{-1}) Z(1/s^2). \quad (2.8-5)$$

Reemplazando la transformada

$$Z\{1/s^2\} = \frac{T_o z}{(z-1)^2}$$

se obtiene

$$P_1(z) = \frac{T_o}{z-1}.$$

Transformando con

$$z = \frac{1 + wT_o/2}{1 - wT_o/2}$$

obtiene la Ec. 2.8-6

$$P_1(w) = T_o / \left( \frac{1 + wT_o/2}{1 - wT_o/2} - 1 \right) = \frac{1 - wT_o/2}{w}. \quad (2.8-6)$$

Siendo la transformada  $W$  del controlador  $R(w) = K$  la función de transferencia de lazo abierto es

$$G(w)H(w) = P_1(w)R(w) = K \frac{1 - wT_o/2}{w}. \quad (2.8-7)$$

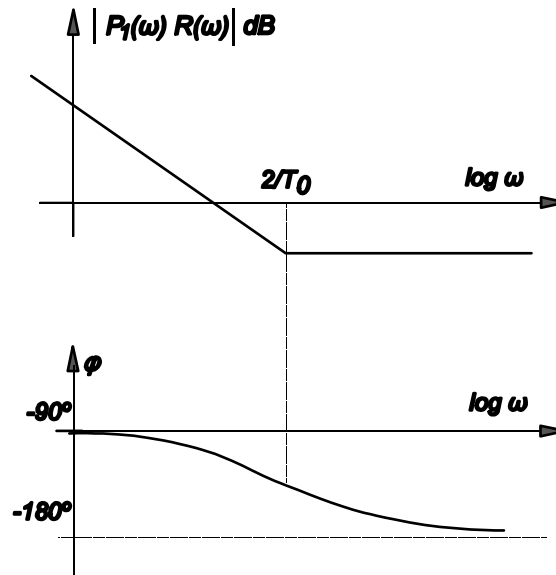
Considerando el rango de frecuencias  $\omega \ll 2/T_o$  de acuerdo a la Ec. 2.8-3, resulta

$$w \approx j\omega \quad (2.8-8)$$

con lo cual se puede escribir

$$G(j\omega)H(j\omega) \approx K \frac{1 - \omega T_o/2}{j\omega}. \quad (2.8-9)$$

La Ec. 2.8-9 representa la respuesta frecuencial del sistema muestreado para frecuencias de análisis pequeñas respecto del doble de la frecuencia de muestreo y puede analizarse con los métodos clásicos en el dominio frecuencial. En la Fig. 2.8.2 se representa la aproximación asintótica del diagrama de Bode.



**Fig. 2.8.2. Diagrama de Bode del sistema muestreado.**

Comparando la respuesta frecuencial de la Fig. 2.8.2 (Ec. 2.8-9) con la que tendría el sistema equivalente en el campo continuo constituido por un integrador puro y un controlador proporcional, se observa la aparición de un cero en el semiplano derecho del plano  $S$  (sistema de fase no mínima) debido al efecto del muestreo.

Debe tenerse en cuenta que este análisis frecuencial es válido para  $\omega \ll 2/T_0$ . Cuando  $\omega$  se aproxima a  $2/T_0$  aparecen distorsiones de importancia y la aproximación de la Ec. 2.8-8 no es válida, debiéndose utilizar la expresión completa de la Ec. 2.8-3.

Debe notarse no obstante que en razón del teorema de muestreo de Shannon la frecuencia máxima contenida en la señal no debe ser mayor que  $\pi/T_0$

$$\omega_{\text{máx}} \leq \pi/T_0. \quad (2.8-10)$$

Por razones prácticas de recuperación de la señal muestreada, normalmente se toman valores que fluctúan entre 2 y 10 veces del dado por la Ec. 2.8-10.

$$f_o = \frac{1}{T_0} = P \frac{\omega_{\text{máx}}}{\pi}$$

$$\text{con } 2 < P < 10.$$

En tal caso la condición restrictiva de análisis  $\omega \ll 2/T_0$  se cumple normalmente ya que para frecuencias mayores se comenzaría a contravenir el teorema de muestreo. En este ejemplo no se presentan dificultades para la obtención de  $G(\omega)$  a partir de

$G(z)$ . Normalmente esta operación puede resultar complicada por lo que existen tablas de transformadas equivalentes a las de  $G(z)$  a partir de  $G(s)$ .

## 2.9 Cuantificación de amplitud.

En el tratamiento matemático de los sistemas de control discreto se desprecian los errores debido a la cuantificación de amplitud. Esta hipótesis es válida para grandes cambios de las señales y el uso de computadoras con gran longitud de palabra. De no ser así deben considerarse los efectos de la cuantificación de amplitud en el sistema de control. La cuantificación de amplitud en un sistema de control se origina en la digitalización de valores continuos que se envían al computador mismo y en la salida del computador, como queda esquematizado en la Fig. 2.9.1.

### 2.9.1 Cuantificación de la señal de entrada continua.

La señal continua  $y(t)$  (0-10 V, 0-20 mA, 4-20 mA) es muestreada y digitalizada en el conversor A/D. El **rango numérico**  $R$  para una longitud de palabra del conversor de  $n$  bits es, para una polaridad,

$$R = 2^n - 1. \quad (2.9-1)$$

La **resolución** resulta

$$U = R^{-1} = 1/(2^n - 1) \approx 1/2^n. \quad (2.9-2)$$

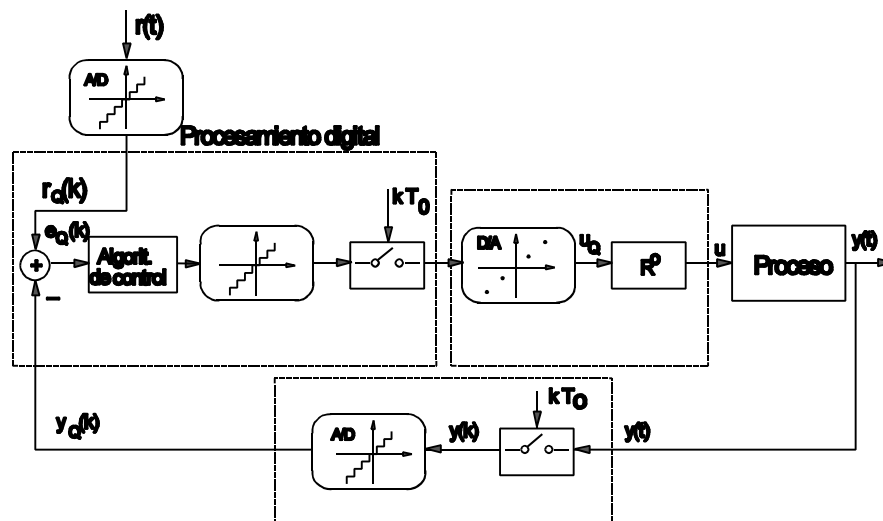


Fig. 2.9.1 Diagrama de un sistema de control con efectos de cuantificación.

Si el máximo valor numérico a representar es  $M$ , la unidad más pequeña representable o **unidad de cuantificación** resulta

$$\Delta = M/R.$$

Un valor analógico es representado por  $L$  unidades de cuantificación,

$$y(k) \rightarrow y_Q(k) = L\Delta \quad L = 0, 1, 2 \dots R$$

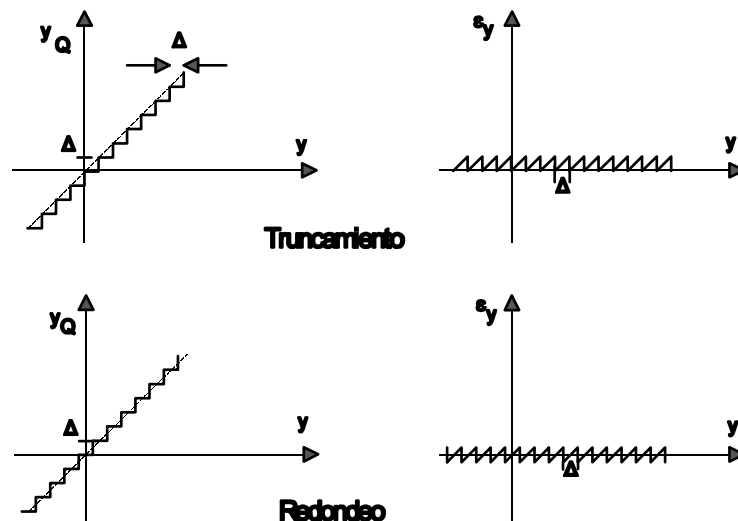
$$y(k) = y_Q(k) + \varepsilon_y \quad |\varepsilon_y| < \Delta \quad (2.9-3)$$

El error de cuantificación es  $\varepsilon_y$ , el que resulta distinto según se trate de redondeo o truncamiento.

Rango para redondeo:  $-0,5 \leq (\varepsilon_y/\Delta)_R < 0,5$

Rango para truncamiento:  $0 \leq (\varepsilon_y/\Delta)_T < 1$  (2.9-4)

La Fig. 2.9.2 muestra la no-linealidad y el error introducido por redondeo y truncamiento.



**Fig. 2.9.2. Truncamiento y redondeo.**

### 2.9.2 Cuantificación en la Unidad Central de Procesamiento.

La señal  $y(k)$  discretizada en el conversor A/D es transferida a la unidad de cómputo y allí representada normalmente por una palabra de mayor longitud. Para un algoritmo de control lineal se realizan normalmente los siguientes cálculos:



\* cálculo del error de control,

$$e_Q(k) = r_Q(k) - [y_Q(k)]_{AD} \quad (2.9-5)$$

\* cálculo de la variable de control,

$$u_Q(k) = -p_{1Q}u_Q(k-1) - \dots - p_{mQ}u_Q(k-m) + \\ + q_{0Q}e_Q(k) + q_{1Q}e_Q(k-1) + \dots + q_{mQ}e_Q(k-m) \quad (2.9-6)$$

siendo

variable de referencia  $r_Q(k)$

variable manipulada  $u_Q(k-i), i = 1, 2, \dots, m$

parámetros  $p_{iQ}, p_{0Q}, q_{iQ} \quad i = 1, 2, \dots, m$

productos  $p_{iQ}u_Q(k-i), q_{0Q}e_Q(k), q_{iQ}e_Q(k-i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$

suma de productos  $u_Q(k)$ .

En la Unidad Central de Procesamiento ocurren errores de cuantificación debidos a la representación en palabra finita. En representación en punto flotante, normalmente la menor unidad representable es despreciable para el control digital. Para el caso de representación en punto fijo los errores de cuantificación se originan en los productos, que ocasionan no-linealidades al incorporar potencias de los errores de cuantificación.

La cuantificación de la variable continua de referencia  $r(t)$  y de los parámetros del controlador originan sólo desviaciones de los valores nominales sin introducir no-linealidades en el lazo de control.

### 2.9.3 Cuantificación en la salida.

La variable  $u_Q(k)$  es transferida del computador al conversor D/A seguido del retenedor. El intervalo de cuantificación del D/A depende de su longitud de palabra. El conversor D/A introduce una no-linealidad como se muestra en la Fig. 2.9.1.

El tratamiento teórico de todas las cuantificaciones originadas en el lazo es muy difícil. Los tratamientos analíticos se basan en el estudio del máximo error posible o en la modelación estadística de los errores de cuantificación. Los efectos no lineales de la cuantificación se estudian usando funciones descriptivas o el método directo de Lyapunov. La simulación es quizás el único modo viable de analizar los casos más complejos.

Se analizan a continuación los efectos de cuantificación de las variables que incluye la cuantificación de señales en los conversores A/D, D/A y la Unidad Central de Procesamiento. En la Fig. 2.9.2, se dan las características de cuantificación por redondeo y truncamiento, así como los correspondientes errores.

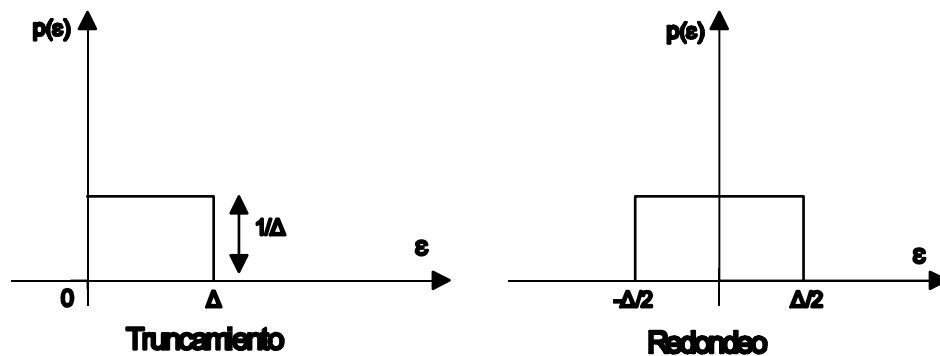
#### 2.9.4 Modelación estocástica del error de cuantificación.

Si una variable cambia estocásticamente atravesando diferentes niveles de cuantificación, puede asumirse que los errores de cuantificación  $\varepsilon(k)$  son estadísticamente independientes. Además, al ser la curva de error tipo diente de sierra, no existen valores preferenciales y puede asumirse una distribución uniforme como en la Fig. 2.9.3.

La señal cuantificada puede representarse por el valor continuo con un ruido  $\varepsilon(k)$  aditivo de cuantificación,

$$y_Q(k) = y(k) - \varepsilon(k).$$

(2.9-7)



**Fig. 2.9.3 Distribución de probabilidad del ruido de cuantificación.**

El valor medio de  $\varepsilon(k)$  para errores de redondeo y truncamiento es

\* redondeo:

$$E \{ \varepsilon(k) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = 0$$

\* truncamiento

$$E \{ \varepsilon(k) \} = \Delta/2. \quad (2.9-8)$$

La varianza  $\sigma$  resulta en ambos casos igual del siguiente cálculo,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon - E\{\varepsilon\}]^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = \Delta^2/12. \quad (2.9-9)$$

Si el ruido de cuantificación es generado en el conversor A/D, éste actúa sobre la variable controlada y su varianza no puede ser reducida por ningún control pues equivale a un ruido de medición. Esto conduce a cambios indeseables en la variable de control  $u(k)$  que pueden ser mayores que la unidad de cuantificación del D/A.

**Ejemplo:** Suponiendo un algoritmo de control,

$$u(k) = -q_0 y(k) - q_1 y(k-1)$$

$$e(k) = -y(k).$$

El ruido de cuantificación genera,

$$\varepsilon_u(k) = -q_0 \varepsilon(k) - q_1 \varepsilon(k-1).$$

Si se considera que el proceso filtra  $\varepsilon_u$  tal que  $\varepsilon_y = 0$  y que  $\varepsilon$  es un ruido blanco, la varianza de  $\varepsilon_u$  es,

$$\sigma_{\varepsilon_u}^2 = [q_0^2 + q_1^2] \sigma_{\varepsilon}^2. \quad (2.9-10)$$

Según los valores de  $q_0$ ,  $q_1$ , la varianza del ruido sobre la acción de control  $\sigma_{\varepsilon_u}^2$ , puede ser varias veces mayor que la del ruido de cuantificación  $\sigma_{\varepsilon}^2$ .

Tomando por ejemplo:  $q_0 = 3$ ,  $q_1 = -1,5$  será

$$\sigma_{\varepsilon_u} = 3,35 \sigma_{\varepsilon}.$$

### 2.9.5 Consideraciones determinísticas.

### Desviaciones (Offset).

Debido a la cuantificación del conversor A/D (en particular para truncamiento) se producen desviaciones en el valor de la salida controlada y en relación al valor que alcanzaría en un sistema continuo. Esto se verifica fácilmente tomando un ejemplo y operando hasta llegar al valor de estado permanente, truncando  $y(k)$  en cada paso de iteración.

### Ciclos límites.

Aparecen como consecuencia de la no-linealidad introducida por la cuantificación. Se verifican particularmente con algoritmos de control de fuerte acción (gran ganancia) y se manifiestan como oscilación periódica de la variable controlada  $y(k)$ . También la acción de control  $u(k)$  muestra esta oscilación. La oscilación de ciclo límite puede desaparecer al disminuir la ganancia del controlador. El estudio de estos efectos puede hacerse por simulación digital. También podría usarse la función descriptiva o el método directo de Lyapunov usados en sistemas no-lineales.

### 2.9.6 Efectos de la cuantificación de coeficientes.

La influencia de los efectos de redondeo de los parámetros del controlador puede usualmente ser despreciada, aún en el caso de representación en punto fijo. Esto resulta obvio si los errores de cuantificación de esos parámetros se comparan con los errores del modelo del proceso que influencia el diseño del controlador.

Los errores en los parámetros no causan no-linealidades en el lazo sino sólo desviaciones respecto del comportamiento nominal. Es sobre todo importante estudiar la influencia que puede tener en la respuesta dinámica, particularmente en la estabilidad del sistema. Para esto se estudia cómo cambian las raíces de la ecuación característica con los cambios de los parámetros. Esto requiere de un análisis de robustez paramétrica que se remite a la bibliografía especializada.

Suponiendo la ecuación característica.

$$P(z,a) = z^n - a_1 z^{n-1} - \dots - a_n = 0 \quad (2.9-11)$$

con sus raíces  $l_1, l_2, \dots, l_n$  donde  $l_i = r_i e^{j\theta_i}$ . Suponiendo que un coeficiente, por ejemplo  $a_k$ , está sujeto al error  $\varepsilon_{a_k}$  y se quiere computar el efecto sobre la raíz  $l_j$  y especialmente sobre su módulo  $r_j$  para verificar la estabilidad.

Analizando en  $z = l_j$ , resulta  $P(l_j, a_k) = 0$ . Si se cambia  $a_k$  por  $a_k + \varepsilon_{a_k}$  también cambia  $l_j$  y el polinomio característico desarrollado en serie de Taylor es

$$P(l_j + \varepsilon_{l_j}, a_k + \varepsilon_{a_k}) = P(l_j, a_k) + \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=l_j} \varepsilon_{l_j} + \left. \frac{\partial P}{\partial a_k} \right|_{z=l_j} \varepsilon_{a_k} + \dots = 0.$$

El primer sumando es  $P(l_j, a_k) = 0$  y los términos de orden superior son despreciables. Resulta así

$$\varepsilon_{l_j} = - \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial a_k} \right|_{z=l_j}}{\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=l_j}} \varepsilon_{a_k}.$$

(2.9-12)

De la Ec. 2.9-11 puede evaluarse la derivada

$$\left. \frac{\partial P}{\partial a_k} \right|_{z=l_j} = -l_j^{n-k}.$$

Por otra parte, usando la expresión de factores se obtiene

$$P(z, l_j) = (z-l_1)(z-l_2)\dots(z-l_n)$$

la derivada toma la forma

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=l_j} = \prod_{i \neq j} (l_j - l_i).$$

Entonces

s la Ec. 2.9-12 queda

$$\varepsilon_{l_j} = \frac{l_j^{n-k}}{\prod_{i \neq j} (l_j - l_i)} \varepsilon_{a_k}. \quad (2.9-13)$$

Analizando la Ec. 2.9-13 pueden obtenerse algunas conclusiones sobre la sensibilidad paramétrica. Como es  $|l_j| < 1$ , a mayor diferencia  $n - k$  la sensibilidad es menor. Por lo tanto el parámetro más sensible es  $a_n$ , el término independiente de la Ec. 2.9-11. También para valores de raíces cerca del círculo unitario, la sensibilidad es mayor.

Con respecto al denominador de la Ec. 2.9-13, se analiza cómo es el producto de los vectores de las raíces características hasta  $l_j$ . Si las raíces están muy juntas, la sensibilidad será alta. Por ejemplo en el caso de un filtro pasa-bajos digital con una estrecha banda y corte abrupto, el sistema tendrá muchos polos juntos cerca de  $z = 1$ . Por tal razón, es muy importante la estructura con la que se diseñe el filtro (canónica, cascada, paralela) en lo que respecta a la sensibilidad.

### 2.9.7 Efectos de cuantificación de resultados intermedios.

En algoritmos de control lineal los resultados intermedios son productos de coeficientes y variables. Los factores y los productos son sometidos a redondeo. Considérese el producto  $q.e$  con

$$\begin{aligned} q &= Q\Delta + \varepsilon_q; & e &= E\Delta + \varepsilon_e \\ q.e &= QE\Delta^2 + Q\Delta\varepsilon_e + E\Delta\varepsilon_q + \varepsilon_q\varepsilon_e \end{aligned} \quad (2.9-14)$$

siendo  $E\{\varepsilon_q\} = E\{\varepsilon_e\} = 0$

Si los errores de redondeo  $\varepsilon_q, \varepsilon_e$  son estadísticamente independientes y con varianza  $\sigma_\varepsilon^2 = \Delta^2/12$ , el error del producto obtenido por redondeo de los factores tiene una varianza definida por

$$\sigma_1^2 = E\{[Q\Delta\varepsilon_e + E\Delta\varepsilon_q]^2\}.$$

Teniendo en cuenta que  $\varepsilon_e, \varepsilon_q$  son independientes con igual varianza  $\sigma_\varepsilon$ , resulta

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= E\{(Q\Delta)^2\varepsilon_e^2 + (E\Delta)^2\varepsilon_q^2\} \\ &= (Q\Delta)^2\sigma_\varepsilon^2 + (E\Delta)^2\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Por lo

tanto,

$$\sigma_1^2 = (Q^2 + E^2)\Delta^2\sigma_\varepsilon^2. \quad (2.9-15)$$

Debe además considerarse el error de redondeo del producto  $QE$  en la Ec. 2.9-14

$$\varepsilon_{QE} = QE\Delta^2 - (QE)_Q\Delta. \quad (2.9-16)$$

Si este error tiene varianza  $\sigma_2^2 = \sigma_\varepsilon^2$ , para errores independientes la varianza del error total es

$$\sigma_{\varepsilon_{qe}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = [1 + \Delta^2(Q^2 + E^2)]\sigma_\varepsilon^2 \approx [1 + q^2 + e^2]\sigma_\varepsilon^2.$$

Se ve que para valores grandes respecto de la unidad de los factores  $q$ ,  $e$ , el error debido al redondeo de los factores es el predominante.

El error de la suma de los productos de la Ec. 2.9-6 es

$$\begin{aligned} \varepsilon_u(k) = & -\varepsilon_{pu_1}(k-1) - \dots - \varepsilon_{pu_m}(k-m) + \varepsilon_{qe_0}(k) + \dots + \\ & + \varepsilon_{qe_m}(k-m). \end{aligned}$$

(2.9-18)

Si se asume independencia de los errores de cuantificación

$$\sigma_{\varepsilon_u}^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_{\varepsilon_{pu_i}}^2 + \sum_{i=0}^m \sigma_{\varepsilon_{qe_i}}^2.$$

(2.9-19)

### 2.9.8 Consideraciones para disminuir los efectos de errores de cuantificación.

Las longitudes de palabras de los conversores A/D y D/A como de la CPU deben ser suficientemente grandes y compatibles. La longitud de palabra del A/D debe elegirse tal que su error de cuantificación sea menor que los errores estático y dinámico de los sensores. Una longitud de 10 bits es usualmente suficiente (resolución 0.1%). La longitud de palabra del D/A debe ser compatible con la del A/D. Para control digital puede tomarse tal que una unidad de cuantificación de la variable de control después de pasar por el proceso corresponda a una unidad de cuantificación del A/D.

Las longitudes de palabra donde se localizan los errores de cuantificación deben usarse en el mejor modo posible, mediante un escalado apropiado de las variables.

Para evitar errores excesivos de factores y productos, la longitud de palabra de la CPU para cálculos de punto fijo debe ser significativamente mayor que la del A/D (por ejemplo el doble).

Si ocurren ciclos límites en un lazo de control, los parámetros del controlador deberán modificarse para obtener acciones de control más débiles.

La estructura de implementación de filtros y controladores tiene importancia en la sensibilidad de los polos del sistema de lazo cerrado a variaciones de los parámetros

debidos a errores de cuantificación, y por lo tanto debe tenerse cuidado con el diseño.