

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES POR APROXIMACIÓN A FILTROS ACTIVOS ANALÓGICOS

1. Introducción.

El esquema de un sistema de control digital como el presentado en la Fig. 7 ya es conocido y se han propuesto distintas alternativas para realizar el bloque de “Controlador Digital”. El bloque “Sensado y Acondicionamiento de Señal” es el que cierra el lazo de control y es el encargado de convertir el valor de una variable física en una palabra digital que sirve como una de las entradas del controlador. Este bloque puede estar compuesto por: transductores, amplificadores, atenuadores, desplazadores de nivel, convertidores A/D, dispositivos para linealizar y/o compensar y filtros. Los filtros tienen la función de procesar la señal sensada para que sea un fiel reflejo de la variable física de salida. Estos filtros pueden ser analógicos o digitales.

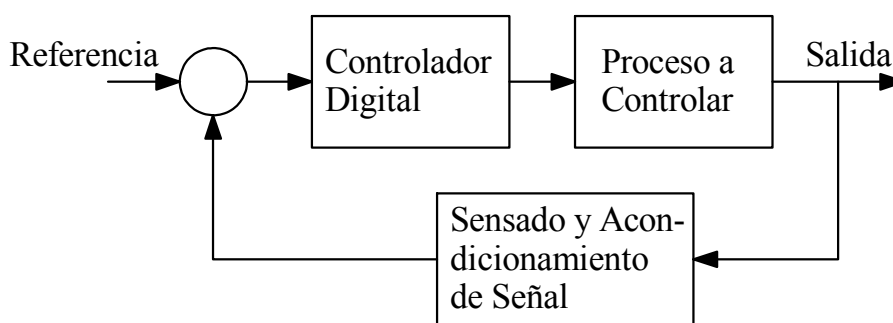


Fig. 7: Esquema de un sistema de control digital

Los filtros digitales requieren de un procesador digital que puede ser el mismo donde se implementa el controlador digital. El estudio de este tipo de filtros es un tema amplio que es tratado en profundidad en la literatura, sin embargo se pueden diseñar en forma sencilla digitalizando los filtros activos analógicos.

Los filtros activos son circuitos bien conocidos en la electrónica analógica y se utilizan como: pasa bajos, pasa altos, pasa banda y rechaza banda. Se construyen con amplificadores operacionales realimentados con resistencias y condensadores. El diseño se realiza generalmente en base filtros de características conocidas y estudiadas cuyos parámetros se pueden encontrar tabulados en cualquier libro de electrónica lineal. Los filtros más conocidos son de Butterworth, de Bessel, de Chebyshev y los Elípticos. Cada uno de ellos tiene sus características especiales que lo hace más aconsejable a determinada aplicación.

Estos filtros han sido desarrollados en el dominio continuo y su función de transferencia está formada por polinomios cuyos términos ya están calculados y tabulados. Estos filtros analógicos se pueden implementar en el dominio discreto con dispositivos digitales, obteniéndose prestaciones similares. En este capítulo se estudiará el diseño y cálculo de este tipo de filtros digitales. En primer término se verá la forma de obtener el filtro deseado a partir de un “Filtro Prototipo” y posteriormente se discretizará para obtener un filtro digital. Un detalle a tener en cuenta en el diseño del sistema de control, es que todos los filtros, ya sean analógicos o digitales, producen un corrimiento de fase.

2. Filtros prototipo.

En la literatura se encuentran tablas con los términos de los polinomios de los filtros prototipo. Un filtro prototipo es un filtro pasa bajos con frecuencia de corte $\omega_c = 1 \frac{Rad}{Seg}$ y su ganancia estática $G = 0db$ y cumple con las características de la clase al que pertenece (Butterworth, Bessel, etc.). En las tablas II y III se presentan los términos de los polinomios de Butterworth y Bessel hasta el orden ocho.

A modo de ejemplo, la Ec. (1) representa la función de transferencia de un filtro prototipo de Butterworth de cuarto orden. Se puede observar que la ganancia es unitaria y que la frecuencia de corte es uno. Los términos del polinomio del denominador se obtienen de la Tabla II.

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1} \quad (1)$$

3. Obtención de la función de transferencia del filtro deseado a partir de un prototipo.

Como ya se dijo, los filtros cuyos parámetros vienen tabulados corresponden a un filtro prototipo. El filtro deseado generalmente difiere del prototipo, por lo que se deben realizar algunas modificaciones. Una de estas modificaciones es multiplicar la función de transferencia del filtro prototipo por la ganancia deseada en la banda pasante. La otra modificación es cambiar la banda pasante de acuerdo con las necesidades del problema. Para esto se debe sustituir 's', como lo indica la Tabla I, de acuerdo con el filtro que se necesite.

Tipo de filtro	F. pasa bajo	F. pasa alto	F. pasa banda	F. rechaza banda
Sustituir	$s \rightarrow \frac{s}{\omega_c}$	$s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}$	$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_i \omega_s}{s(\omega_s - \omega_i)}$	$s \rightarrow \frac{s(\omega_s - \omega_i)}{s^2 + \omega_i \omega_s}$

Tabla I

Donde:

ω_c : frecuencia angular de corte para los filtros pasa bajos y pasa altos.

ω_s y ω_i : frecuencia angular superior e inferior respectivamente para los filtros pasa banda y rechaza banda.

Finalmente para obtener un filtro digital a partir de filtro analógico calculado, se procede a discretizar la función de transferencia para periodo de muestreo deseado.

Ejemplo N° 1:

Diseñar un filtro digital de Butterworth de 4° orden pasa altos, para una pulsación angular de corte $\omega_c = 100 \frac{Rad}{Seg}$ con un periodo de muestreo $T_o = 5ms$ y ganancia 0 db

Como primer paso se debe encontrar la función de transferencia en el dominio continuo. El filtro prototipo Butterworth de cuarto orden ya está calculado en (1). Para convertirlo

en un filtro pasa altos se realiza el reemplazo indicado en la tabla II, $s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}$ en la (1) y se (2)

$$G(s) = \frac{s^4}{s^4 + 2.6131\omega_c s^3 + 3.4142\omega_c^2 s^2 + 2.6131\omega_c^3 s + \omega_c^4} \quad (2)$$

El diagrama de Bode de la función de transferencia continua esta mostrado en la Fig. 8. En este caso la ganancia en la banda pasante es 1 (0 db), pero en el caso de requerir una diferente, se debe multiplicar el numerador por la ganancia deseada.

El segundo y último paso es discretizar la función de transferencia para el período de muestreo deseado. Para el presente caso la función de transferencia discreta será como lo expresa (3).

$$G(z^{-1}) = \frac{1 - 3.647z^{-1} + 5.069z^{-2} - 3.178z^{-3} + 0.755z^{-4}}{1 - 2.715z^{-1} + 2.908z^{-2} - 1.430z^{-3} + 0.270z^{-4}} \quad (3)$$

Ejemplo N° 2:

Diseñar un filtro de Butterworth de segundo orden pasa banda entre $\omega_s = 100 \frac{Rad}{s}$ y $\omega_i = 10 \frac{Rad}{s}$ con una ganancia 20 db en la banda pasante y una frecuencia de muestreo de 200 Hz.

De la tabla II y haciendo la sustitución indicada en la tabla I, se obtiene la función de transferencia del filtro analógico expresado en (4) que corresponde al diagrama de Bode presentado en la Fig. 9. En este diagrama se puede apreciar y verificar la banda pasante y la ganancia de 20 db en esa banda.

$$G(s) = \frac{10(\omega_s - \omega_i)^2 s^2}{s^4 + \sqrt{2}(\omega_s - \omega_i)s^3 + (2\omega_s \omega_i + (\omega_s - \omega_i)^2)s^2 + \sqrt{2}(\omega_s - \omega_i)\omega_s \omega_i s + (\omega_s \omega_i)^2} \quad (4)$$

Discretizando se obtiene la función de transferencia discreta, (5) y la ecuación en diferencias (6).

$$G(z^{-1}) = \frac{0.811z^{-1} - 0.966z^{-2} - 0.500z^{-3} + 0.655z^{-4}}{1 - 3.339z^{-1} + 4.220z^{-2} - 2.409z^{-3} + 0.529z^{-4}} = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} \quad (5)$$

$$y(k) = 3.339 y(k-1) - 4.220 y(k-2) + 2.409 y(k-3) - 0.529 y(k-4) + 0.811 x(k-1) - 0.966 x(k-2) - 0.500 x(k-3) + 0.655 x(k-4) \quad (6)$$

FILTRO DE BUTTERWORTH PASA ALTO DE 4° ORDEN

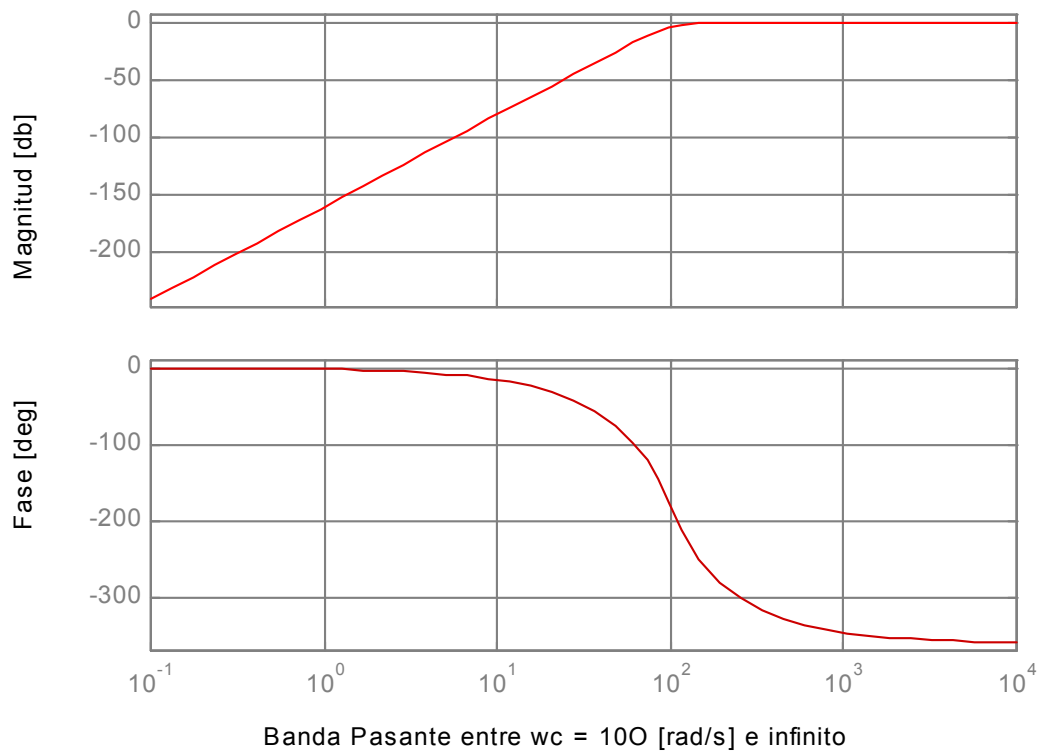


Fig. 8: Diagrama de Bode de un filtro de Butterworth de 4° orden pasa altos

FILTRO DE BUTTERWORTH PASA BANDA DE 2° ORDEN

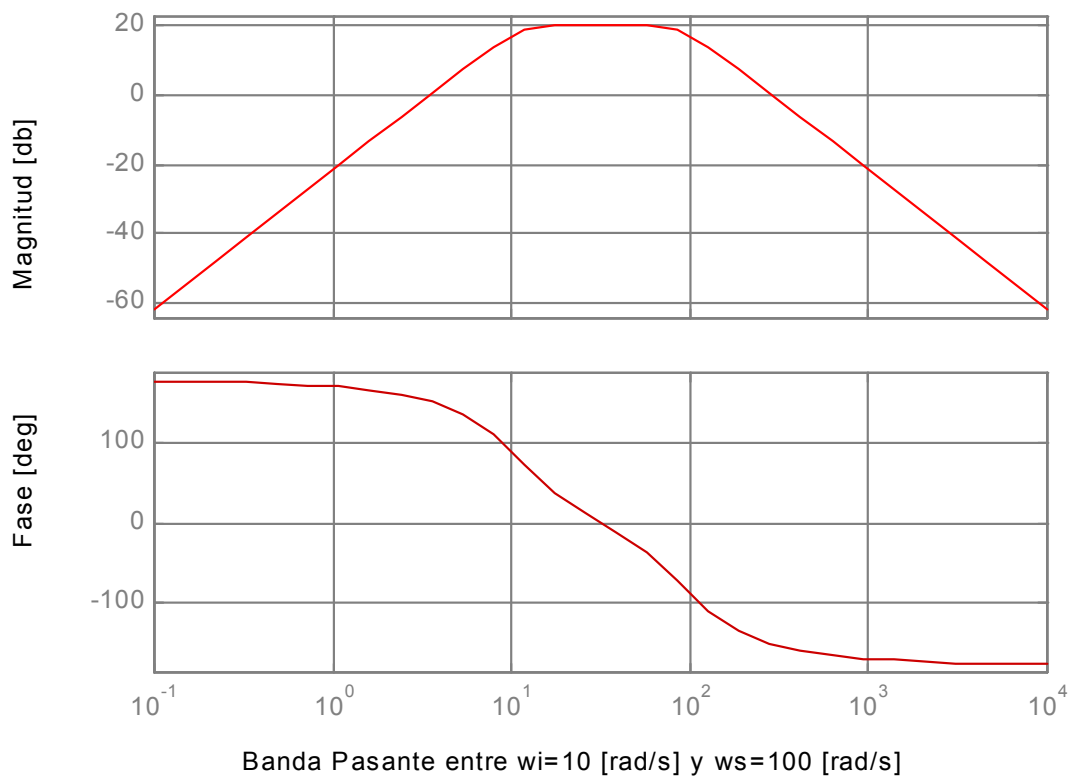


Fig. 9: Diagrama de Bode de filtro de Butterworth de 2° orden pasa banda

Orden del filtro	Términos de los polinomios de Butterworth
1	1.0 1.0
2	1.0 1.4142 1.0
3	1.0 2.0 2.0 1.0
4	1.0 2.6131 3.4142 2.6131 1.0
5	1.0 3.2361 5.2361 5.2361 3.2361 1.0
6	1.0 3.8637 7.4641 9.1416 7.4641 3.8637 1.0
7	1.0 4.4940 10.097 14.5918 14.5918 10.0978 4.4940 1.0
8	1.0 5.1258 13.137 21.8462 25.6884 21.8462 13.1371 5.1258 1.0

Tabla I

Orden del filtro	Términos de los polinomios de Bessel
1	1.0 1.0
2	1.0 1.7321 1.0
3	1.0 2.4662 2.4329 1.0
4	1.0 3.2011 4.3916 3.1239 1.0
5	1.0 3.9363 6.8864 6.7767 3.8107 1.0
6	1.0 4.6717 9.9202 12.3583 9.6223 4.4952 1.0
7	1.0 5.4071 13.4940 20.2678 19.9255 12.9288 5.1783 1.0
8	1.0 6.1427 17.6085 30.9037 36.5061 29.8993 16.6965 5.8606 1.0

Tabla III

Ejemplo N° 3

Diseñar un filtro digital del tipo Bessel de cuarto orden pa sa bajos, para 100 Hz de frecuencia de corte. La ganancia en la banda pasante es de 30 db.

Filtro de Bessel de 4° orden, $f_c = 100 \text{ Hz}$, $G = 30 \text{ db}$

$$\omega_c = 2\pi f_c = 628 \frac{\text{Rad}}{\text{s}},$$

Se elige como frecuencia de muestreo $f_m = 2000 \text{ Hz}$, por lo tanto $T_0 = 0.5 \text{ ms}$

La ganancia estática será: $K = 10^{\frac{G}{20}} = 31.62$

El filtro prototipo aplicada la ganancia es la Ec. (7)

$$G(s) = \frac{31.62}{s^4 + 3.20s^3 + 4.39s^2 + 3.12s + 1} \quad (7)$$

Aplicando la transformación de frecuencia queda la Ec. (8).

$$G(s) = \frac{4.928 \cdot 10^{12}}{s^4 + 2011s^3 + 1.773 \cdot 10^6 s^2 + 7.448 \cdot 10^8 s + 1.558 \cdot 10^{11}} \quad (8)$$

El diagrama de Bode del filtro continuo se presenta en la Fig. 10 y el filtro digitalizado en la Ec. (9)

$$G(z) = \frac{0.136z^{-1} + 1.0003z^{-2} + 0.668z^{-3} + 0.0409z^{-4}}{1 - 2.274z^{-1} + 2.042z^{-2} - 0.842z^{-3} + 0.133z^{-4}} \quad (9)$$

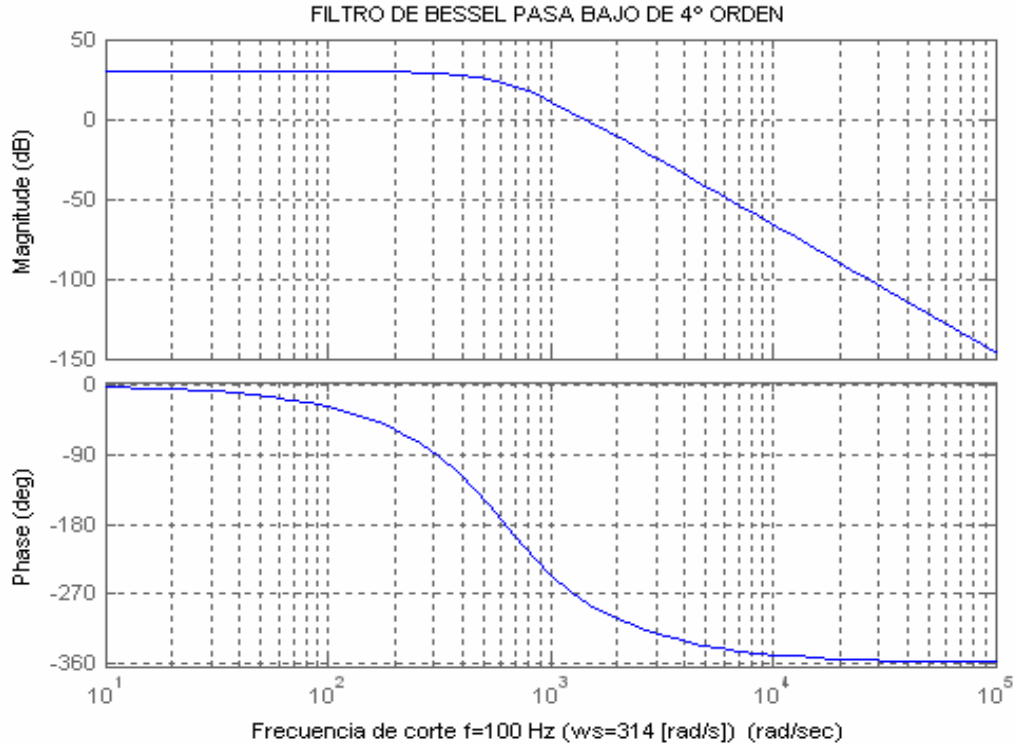


Fig. 10: Filtro de Bessel de cuarto orden pasa bajos.

Ejemplo N° 4

Diseñar un filtro digital del tipo Butterworth de cuarto orden para la banda pasante de 100 a 500 Hz. La ganancia en la banda pasante es de 10 db.

Filtro de Butterworth de 4° orden, $f_i = 100 \text{ Hz}$, $f_s = 500 \text{ Hz}$, $G = 10 \text{ db}$

$$\omega_s = 2\pi f_s = 3141 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}, \quad \omega_i = 2\pi f_i = 628 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_s \omega_i} = 1405 \frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

Se elige como frecuencia de muestreo $f_m = 2000 \text{ Hz}$, por lo tanto $T_0 = 0.5 \text{ ms}$

La ganancia estática será: $K = 10^{\frac{G}{20}} = 3.16$

De tablas y reemplazando la ganancia se tiene la Ec. (10)

$$G(s) = \frac{K}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1} \quad (10)$$

Realizando las transformaciones de la tabla I y discretizando se obtiene la Ec.(11).

$$G(z) = \frac{0.152z^{-7} + 0.122z^{-6} - 1.629z^{-5} + 2.260z^{-4} - 0.541z^{-3} - 0.687z^{-2} + 0.301z^{-1} + 0.0216}{z^{-8} - 3.89z^{-7} + 6.88z^{-6} - 7.514z^{-5} + 5.795z^{-4} - 3.264z^{-3} + 1.278z^{-2} - 0.311z^{-1} + 0.0375} \quad (11)$$

El diagrama de Bode del filtro continuo es presentado en la Fig. 11.

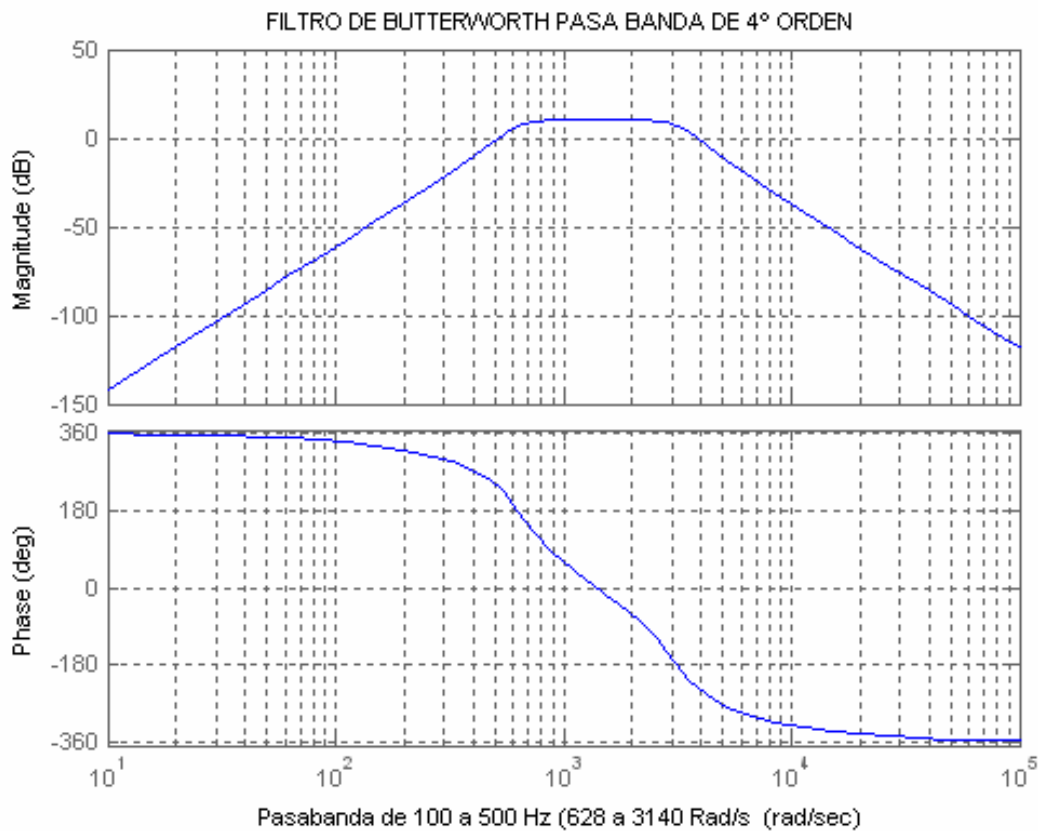


Fig. 11: Filtro Butterworth de cuarto orden pasa banda.

Resumen de las etapas de diseño de filtros digitales basados en filtros activos analógicos.

1. Definición de las características del filtro a diseñar:
 - Orden del filtro
 - Tipo de filtro (Bessel, Butterworth, Chebyshev, Elíptico, etc.)
 - Características del filtro: pasa bajos, pasa altos, pasa banda y rechaza banda.
 - Frecuencias características.
 - Ganancia de la banda pasante.
 - Frecuencia de muestreo deseada.
2. Diseño del filtro prototipo (*besself*, *butter*, *cheby1*, *cheby2*, *ellip*).
3. Aplicación de la ganancia estática deseada al filtro prototipo.
4. Realización de las transformaciones de la Tabla I (*lp2lp*, *lp2hp*, *lp2bp*, *lp2bs*).
5. Realización del diagrama de Bode de la función continua obtenida en el punto anterior para verificación (*bode*).
6. Digitalización de la función obtenida en el punto 4 para la frecuencia de muestreo deseada (*c2dm*).