

CONTROL DE PROCESOS CON RETARDOS

1. Introducción.

En capítulos anteriores se han estudiado y desarrollado controladores digitales para procesos sin retardo o con retardos pequeños tal que se puedan considerar incluidos dentro de la constante de tiempo del sistema. Para procesos cuyos retardos son comparables con estas constantes de tiempo, las técnicas desarrolladas no son aplicables en forma directa. Una excepción es el caso del controlador de tiempo finito, en donde se hizo una consideración especial para procesos con retardo. Por otra parte, los procesos con retardos son comunes de encontrar en la práctica, por lo tanto se justifica analizar este caso particular.

Los retardos, generalmente son producidos por el tiempo de transporte de energía o materia dentro del sistema. Otro origen de los retardos son las dinámicas de distintos elementos colocados a lo largo del proceso que, por efecto cascada se suman y generan entre la entrada y salida un retardo que puede ser considerable. Desde el punto de vista del control, se puede considerar un único retardo, que es la sumatoria de todos. En control digital el retardo se expresa en (1), donde $d = 1, 2, 3, \dots, m$ y T_0 es el periodo de muestreo.

$$\text{Retardo} = d T_0 \quad (1)$$

En este capítulo se presenta una solución a este problema de control que es conocida como “Predictor de Smith”. Esta solución permite utilizar técnicas ya conocidas para el diseño de controladores para sistemas sin retardo y adaptarlas a sistemas con retardo.

2. Modelos de Sistemas con Retardo.

Como ya se dijo, independientemente del origen del retardo, el efecto visto desde la entrada y salida es el mismo y por lo tanto en el modelo se puede considerar un único retardo que incluye a todos. El modelo de un sistema con retardo se puede expresar como una función de transferencia discreta (2) o como una ecuación en diferencias (3).

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = b z^{-d} \quad (2)$$

$$y(k) = b u(k-d) \quad (3)$$

En general un proceso con retardo y dinámica adicional se puede expresar como lo indica la Ec. (4)

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d} \quad (4)$$

3. Principio de Smith.

El “Principio de Smith” plantea como objetivo de diseño lograr que la respuesta del sistema con retardo, tenga las mismas características dinámicas del sistema sin retardo, por ejemplo que tenga la misma respuesta a la entrada escalón, pero desplazada en el tiempo el valor del retardo. La Fig. 1 presenta la respuesta a una entrada escalón unitario para un sistema sin retardo y con retardo. Se puede observar que la salida con retardo tiene la mismas características dinámicas pero

desplazada en el tiempo el valor del retardo. El sistema presentado cumple con el principio de Smith.

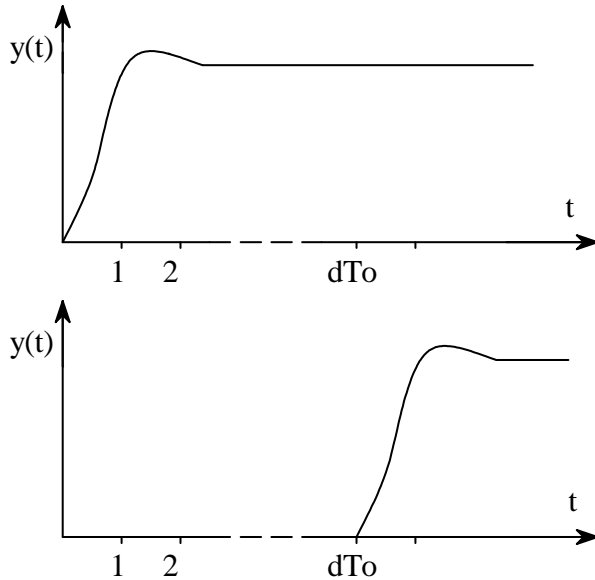


Fig. 1: Respuesta de un sistema que cumple el Principio de Smith

4. Método de Smith.

En un sistema sin retardo, la función de transferencia de lazo cerrado es como lo indica (5).

$$G_T(z) = \frac{G_C(z)G_P(z)}{1 + G_C(z)G_P(z)} \quad (5)$$

Para un proceso con un retardo $d T_0$, la función de transferencia de lazo cerrado para un sistema que cumpla con el Principio de Smith deberá ser como lo expresa (6).

$$G_T(z) = \frac{G_C(z)G_P(z)}{1 + G_C(z)G_P(z)} z^{-d} \quad (6)$$

El objetivo es diseñar un controlador $G^*(z)$, presentado en la Fig. 2, de tal forma que el sistema de control cumpla con el principio de Smith. Esta condición está expresada en (7).

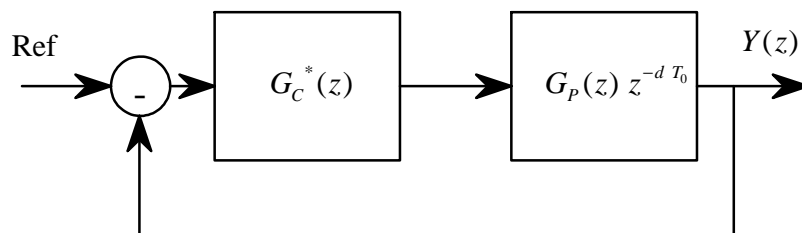


Fig. 2 Sistema de control a diseñar

$$\frac{G_C^*(z)G_P(z)z^{-d}}{1+G_C^*(z)G_P(z)z^{-d}} = \frac{G_C(z)G_P(z)}{1+G_C(z)G_P(z)}z^{-d} \quad (7)$$

De (7) se obtiene (8) que es la expresión del controlador buscado.

$$G_C^*(z) = \frac{G_C(z)}{1+G_C(z)G_P(z)(1-z^{-d})} \quad (8)$$

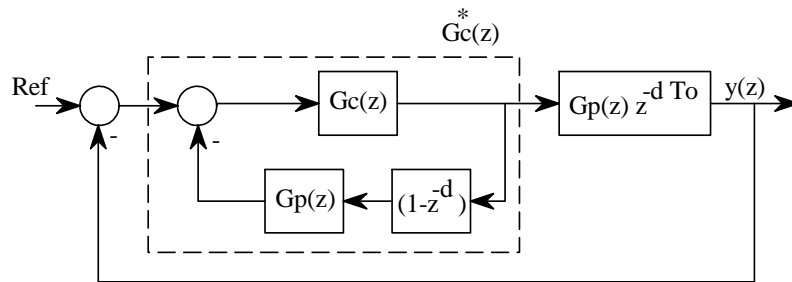


Fig. 3: Diagrama de bloques que se corresponde con la Ec. (8)

Como se puede apreciar en (8), para el cálculo de $G_C^*(z)$ hace falta conocer el modelo del proceso, esto implica una previa identificación de la planta. La función de transferencia del controlador $G_C^*(z)$ corresponde a un diagrama de bloques como el mostrado en la Fig. 3.

Otra forma de presentar un controlador con Predictor de Smith para un proceso con retardo es el mostrado en la Fig. 4, donde se ha expresado la posible diferencia entre el modelo y la planta

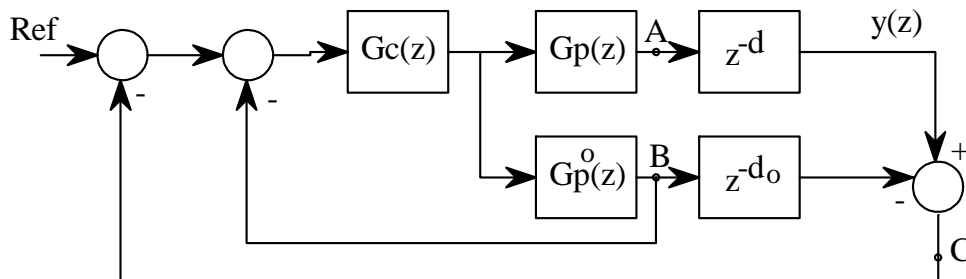


Fig. 4 Otro diagrama de bloques que se corresponde con la Ec. (8)

En la Fig. 4, $G_p^o(z)$ representa al modelo del proceso y d_o al modelo del retardo.

Si $G_p^o(z) = G_p(z)$ y $d_o = d$ (modelado exacto), entonces se verifica el principio de Smith.

De la Fig. 4, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- El lazo interno realimenta al proceso en base a un modelo de la planta. Este lazo realiza el control como si los retardos no existieran y el valor instantáneo de la variable a controlar (punto A) fuera accesible. Este lazo funciona como un observador-predicador de la salida.
- El lazo externo sirve para realimentar los errores de modelado. Si el modelo del proceso y del retardo se corresponden exactamente con los correspondientes al sistema real, la señal en C es nula para condiciones iniciales iguales.

Resumiendo, el proceso de diseño de un controlador con predictor de Smith es el siguiente:

- Realizar el diseño del controlador para un proceso sin retardo.
- Obtener un modelo de la planta y del retardo.
- Obtener $G_C^*(z)$.

La función de transferencia del sistema presentado en la Fig. 4 está expresada en (9).

$$G_T(z) = \frac{G_C(z)G_P(z)z^{-d}}{1 + G_C(z)G_P^0(z) + G_C(z)(G_P(z)z^{-d} - G_P^0(z)z^{-d_0})} \quad (9)$$

5. Necesidad de Precisión en el Modelado.

Si el modelado es exacto ($G_P(z) = G_P^0(z)$ y $d = d_0$) se cumple (10) y observando (9) se verifica el principio de Smith, como lo demuestra (11).

$$G_C(z)(G_P(z)z^{-d} - G_P^0(z)z^{-d_0}) = 0 \quad (10)$$

$$G_T(z) = \frac{G_C(z)G_P(z)z^{-d}}{1 + G_C(z)G_P(z)} \quad (11)$$

Cuando el modelado es inexacto, los polos del sistema cambian y de (9) pueden calcularse las raíces del sistema mediante (12).

$$\left[1 + G_C(z)G_P^0(z) + G_C(z)(G_P(z)z^{-d} - G_P^0(z)z^{-d_0})\right]z^d = 0 \quad (12)$$

Por lo expuesto se desprende la necesidad de un modelado preciso del proceso y del retardo.

Ejemplo N° 1:

Para el proceso $G_p(z) = b$, con un tiempo de retardo dT_0 en el lazo de control, diseñar:

- Un controlador de tiempo finito para el sistema con retardo
- Un controlador de tiempo finito aplicando Predictor de Smith
- Un controlador PI para el sistema con retardo.
- Un controlador PI aplicando predictor de Smith

a) *Diseño de un controlador de tiempo finito para el sistema con retardo.*

El modelo del proceso se puede expresar como en (13).

$$G_p(z) = b z^{-d} = 0 z^{-1} + 0 z^{-2} + \dots + b z^{-d} \quad (13)$$

De (13) se calculan los parámetros de controlador:

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = \frac{1}{b}; \quad q_1 = a_1 q_0 = 0; \quad p_d = b_1 q_0 = 1$$

El controlador de tiempo finito diseñado para el sistema con retardo queda como lo expresa (14)

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - p_d z^{-d}} = \frac{\frac{1}{b}}{1 - z^{-d}} \quad (14)$$

b) *Diseño con un controlador de tiempo finito para el sistema sin retardo y aplicar Predictor de Smith contemplando el retardo*

Se puede descomponer el modelo del proceso con retardo como lo expresa (15)

$$G_p(z) = b z^{-d} = b z^{-1} z^{-(d-1)} \quad (15)$$

Se calculan los parámetros del controlador de tiempo finito:

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = \frac{1}{b}; \quad p_1 = b \frac{1}{b} = 1$$

El controlador de tiempo finito para el sistema sin retardo está expresado en

$$G_c(z) = \frac{q_0}{1 - p_1 z^{-1}} = \frac{\frac{1}{b}}{1 - z^{-1}} \quad (16)$$

El Predictor de Smith para este sistema queda expresado en

$$G_c^*(z) = \frac{G_c(z)}{1 + G_c(z) G_p(z) (1 - z^{-(d-1)})} = \frac{\frac{\frac{1}{b}}{1 - z^{-1}}}{1 + \frac{\frac{1}{b}}{1 - z^{-1}} b z^{-1} (1 - z^{-(d-1)})} = \frac{\frac{1}{b}}{1 - z^{-d}} \quad (17)$$

Se observa de (14) y (17) se llega al mismo controlador por dos caminos diferentes:

- Considerando el retardo en el diseño del controlador de tiempo finito.
- Diseñando un controlador de tiempo finito para el sistema sin retardo y aplicando (8).

c) *Diseño de un controlador PI para $G_p(z) = b$*

El controlador PI está expresado en (18), donde $q_0 > 0$ y $(q_0 + q_1) > 0$

$$G_C(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (18)$$

La función de transferencia total del sistema es (19) y su ecuación característica (20).

$$G_T(z) = \frac{G_C(z) b z^{-d}}{1 + G_C(z) b z^{-d}} = \frac{q_0 b z^{-d} + q_1 b z^{-(d+1)}}{1 - z^{-1} + q_0 b z^{-d} + q_1 b z^{-(d+1)}} \quad (19)$$

$$z^{d+1} - z^{-d} + q_0 b z + q_1 b = 0 \quad (20)$$

d) *Diseño de controlador PI y aplicación de Predictor de Smith para contemplar el retardo puro d*

Aplicando (8) se obtiene el controlador (21) y la función de transferencia total (22).

$$G_C^*(z) = \frac{\frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}}{1 + \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} b (1 - z^{-d})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{(1 + q_0 b) + (q_1 b - 1) - q_0 b z^{-d} - q_1 b z^{-(d+1)}} \quad (21)$$

$$G_T(z) = \frac{\frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} b}{1 + \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} b} z^{-d} = \frac{(q_0 + q_1 z^{-1}) b}{1 - z^{-1} + q_0 b + q_1 b z^{-1}} z^{-d} \quad (22)$$

La ecuación característica de (22) es (23).

$$(1 + q_0 b) z^d - z^{d-1} + q_1 b z^{d-1} = ((1 + q_0 b) z + (q_1 b - 1)) z^{d-1} = 0 \quad (23)$$

Se observa que la ecuación característica tiene: $\begin{cases} (d-1) \text{ raíces en el origen} \\ 1 \text{ raíz en } \frac{1 - q_1 b}{1 + q_0 b} \end{cases}$

6. Sensibilidad a Errores del Modelo de Retardo

Para el controlador de tiempo finito ya calculado, (24) es la ecuación del controlador, (25) es el modelo de la planta y z^{d-1} es el retardo.

$$G_C(z) = \frac{1}{b} \quad (24)$$

$$G_P(z) = b z^{-1} \quad (25)$$

La ecuación característica del sistema total fue obtenida en (12):

$$\left[1 + G_C(z) G_P^0(z) + G_C(z) (G_P(z) z^{-d} - G_P^0(z) z^{-d_0}) \right] z^d = 0 \quad (26)$$

Asumiendo que se tiene incertidumbre solo en el retardo, entonces $G_P(z) = G_P^0(z)$ y $d \neq d_0$, la ecuación característica (26) queda como lo expresa (27).

$$\begin{aligned} & \left[1 + G_C(z)G_P(z) + G_C(z)G_P(z)(z^{-d} - z^{-d_0}) \right] z^d = \\ & z^d + G_C(z)G_P(z)z^d + G_C(z)G_P(z) - G_C(z)G_P(z)z^{d-d_0} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

En el caso analizado se tiene $\begin{cases} d \rightarrow d-1 \\ d_0 \rightarrow d_0-1 \end{cases}$ obteniéndose,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\frac{1}{b}}{1-z^{-1}} bz^{-1} \right) z^{d-1} + \frac{\frac{1}{b}}{1-z^{-1}} bz^{-1} - \frac{\frac{1}{b}}{1-z^{-1}} bz^{-1} z^{d-d_0} = \\ & \frac{1}{1-z^{-1}} z^{d-1} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} z^{d-d_0} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Sacando factor común $\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$ se obtiene (29).

$$z^d + 1 - z^{d-d_0} = 0 \quad (29)$$

Si $d_0 = d-1$, se obtiene (30).

$$z^d + 1 - z = 0 \quad (30)$$

Si $d_0 = d+1$, se obtiene (31).

$$z^d + 1 - z^{-1} = 0 \quad (31)$$

Si $d = d_0$, $z^d = 0$ (se obtienen d raíces en el origen).

Si $\begin{cases} d = 2 \\ d_0 = 1 \end{cases}$ se obtienen 2 raíces en $\begin{cases} 0.5 + j0.866 \\ 0.5 - j0.866 \end{cases}$, es un sistema estable y se corresponde con (32).

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad (32)$$

Si $\begin{cases} d = 2 \\ d_0 = 3 \end{cases}$ se obtienen 3 raíces en $\begin{cases} -0.3412 + j1.1615 \\ -0.3412 - j1.1615 \\ 0.6823 \end{cases}$, es un sistema inestable y se corresponde con (33).

$$z^3 - z - 1 = 0 \quad (33)$$

Ejemplo N° 2:

Se desea controlar el nivel del tanque 2 de la planta hidráulica presentada en la Fig. 5. El modelo matemático del proceso está descrito por (34) y (35). En el lazo de control existe un retardo total debido al sensor y al actuador de 2 segundos ($D = 2s$).

Desarrollar las siguientes actividades:

- Ajustar un controlador PID para la planta sin retardo
- Ajustar un controlador PID para la planta con retardo.
- Aplicar Predictor de Smith con un modelado exacto de la planta y del retardo.
- Aplicar Predictor de Smith cuando el modelo de la planta tiene un error del 20%.
- Aplicar Predictor de Smith cuando el modelo del retardo tiene un error del 20%.
- Obtener conclusiones.

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{R_1} (h_2(t) - h_1(t)) + q(t) \quad (34)$$

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} (h_2(t) - h_1(t)) - \frac{1}{R_2} h_2(t) \quad (35)$$

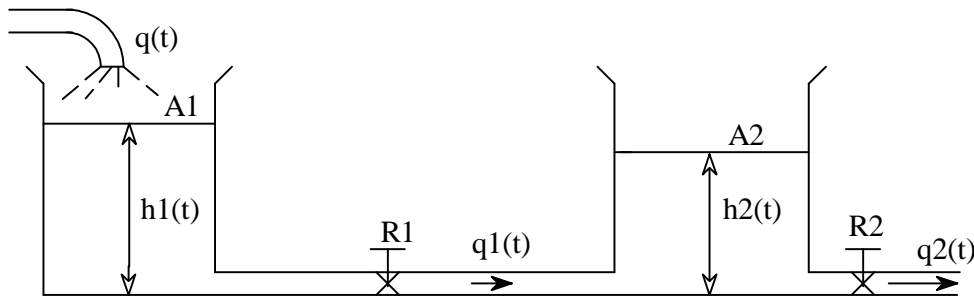


Fig. 5: Planta hidráulica

Donde: $A_1 = 2$, $A_2 = 2$, $R_1 = \frac{1}{3}$, $R_2 = \frac{1}{4}$

De (34) y (35) operando y reemplazando por los valores de los parámetros se obtiene la función de transferencia (36).

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 A_1 A_2 s^2 + (R_2 A_1 + A_1 R_1 + A_2 R_2) s + 1} = \frac{0.75}{s^2 + 5s + 3} \quad (36)$$

- Ajustar un controlador PID para la planta sin retardo

Se ensaya el proceso a lazo abierto con una entrada escalón, de la respuesta temporal obtenida, se determinan los valores de T_U , T_G , K_E y posteriormente con tablas y realizando ajustes se obtienen los siguientes parámetros del controlador PID: $K = 0.85$, $T_D = 0.0835$, $K_I = 0.555$, $T_0 = 0.5$.

El diagrama de bloques del sistema simulado lo muestra la Fig. 6 y la respuesta del sistema se presenta en la Fig. 7. Se observa que el sistema se establece aproximadamente a los 1.8s.

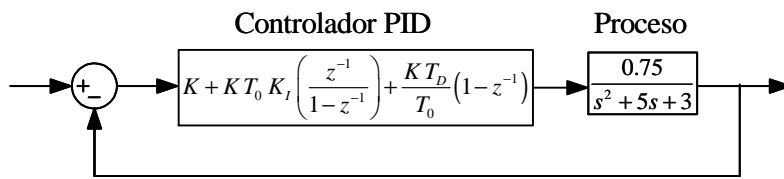


Fig. 6: Diagrama de bloques del sistema sin retardo controlado con un PID

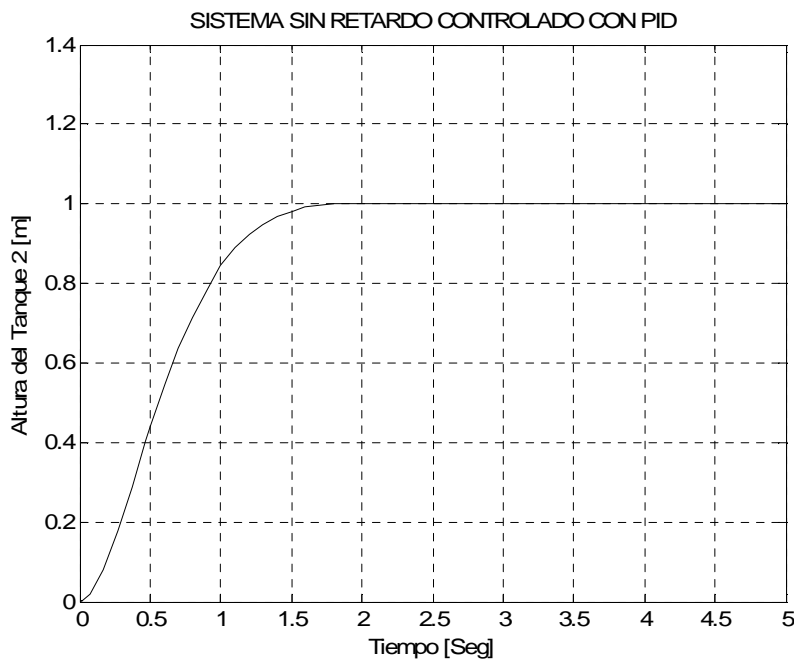


Fig. 7: Respuesta del sistema sin retardo controlado con un PID

b) *Ajustar un controlador PID para la planta con retardo*

Se ajusta un controlador PID para el sistema con retardo. La Fig. 8 presenta el diagrama de bloques del sistema simulado para el proceso con retardo. Se ajustaron los parámetros del controlador $K=1$, $T_D=0.25$, $K_I=0.75$ y $T_0=0.5$.

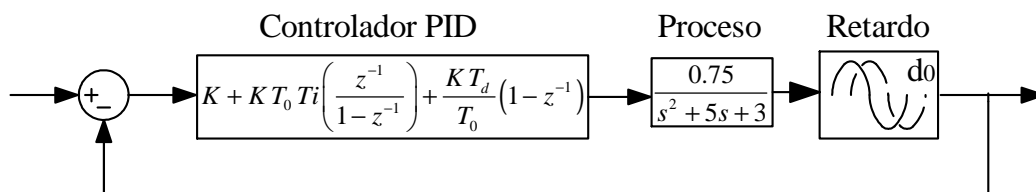


Fig. 8: Diagrama de bloques del controlador PID aplicado a un proceso con retardo

La salida del sistema se presenta en la Fig. 9. Se observa de la respuesta temporal de la salida, que el sistema se establece aproximadamente a los 21 s.

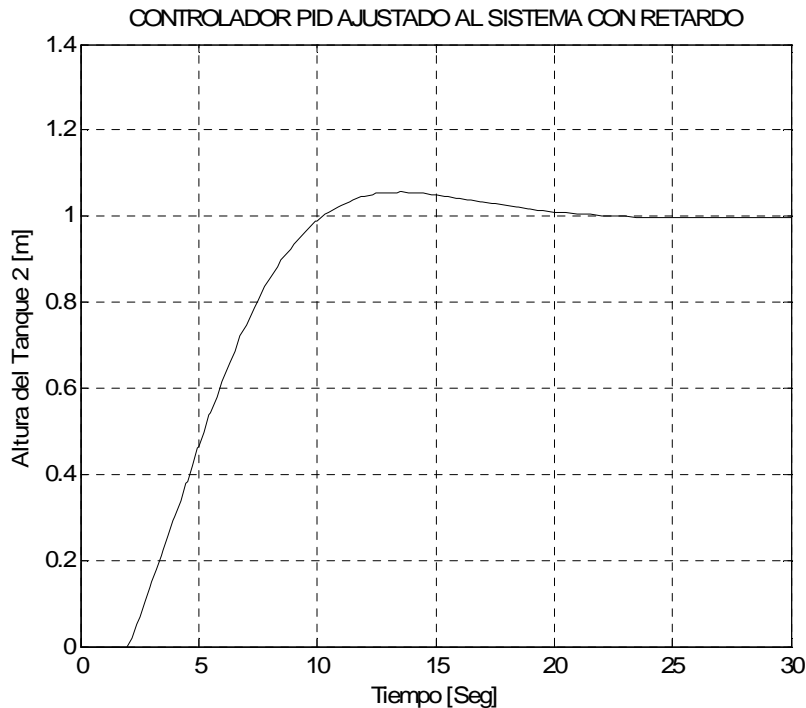


Fig. 9: Control con un PID del proceso con retardo

c) *Aplicar Predictor de Smith con un modelado exacto de la planta y del retardo.*

Se aplica Predictor de Smith al sistema con retardo. El PID se ajustó con los parámetros que se obtuvieron cuando no tenía retardo ($K = 8.35$, $T_D = 0.0835$, $K_I = 0.555$, $T_0 = 0.5$). La respuesta temporal de la salida es presentada en la Fig. 10. Se observa que el tiempo de establecimiento es aproximadamente 3.8 s.

d) *Aplicar Predictor de Smith cuando el modelo del proceso tiene un error del 20%*

Se aplica Predictor de Smith en el caso de que el modelo del proceso tiene un error del 20% en sus parámetros ($A_1 = 2.4$, $A_2 = 2.4$, $R_1 = 0.4$, $R_2 = 0.3$). La respuesta temporal obtenida es presentada en la Fig. 11.

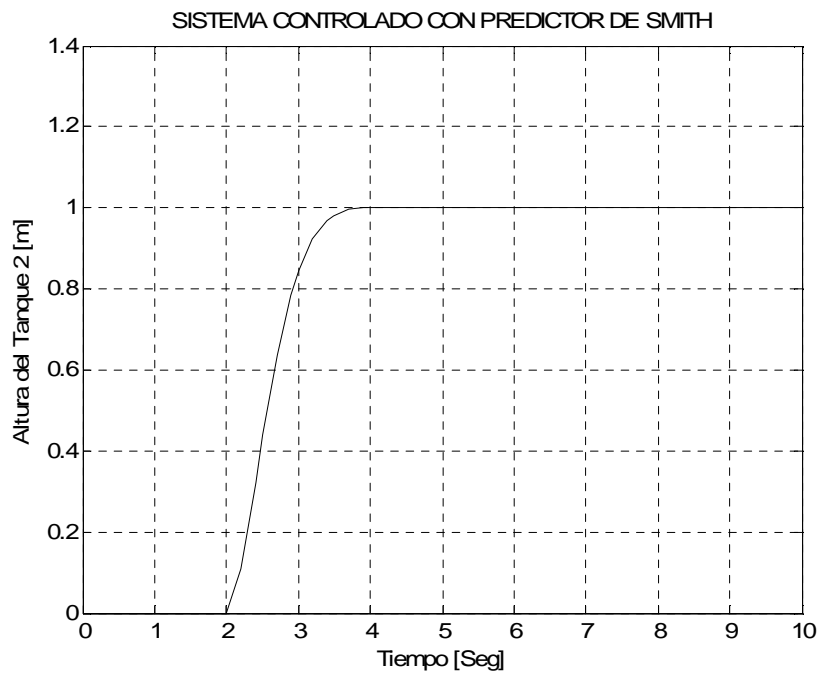


Fig. 10: Respuesta del sistema con Predictor de Smith con un correcto modelado del proceso y el retardo.

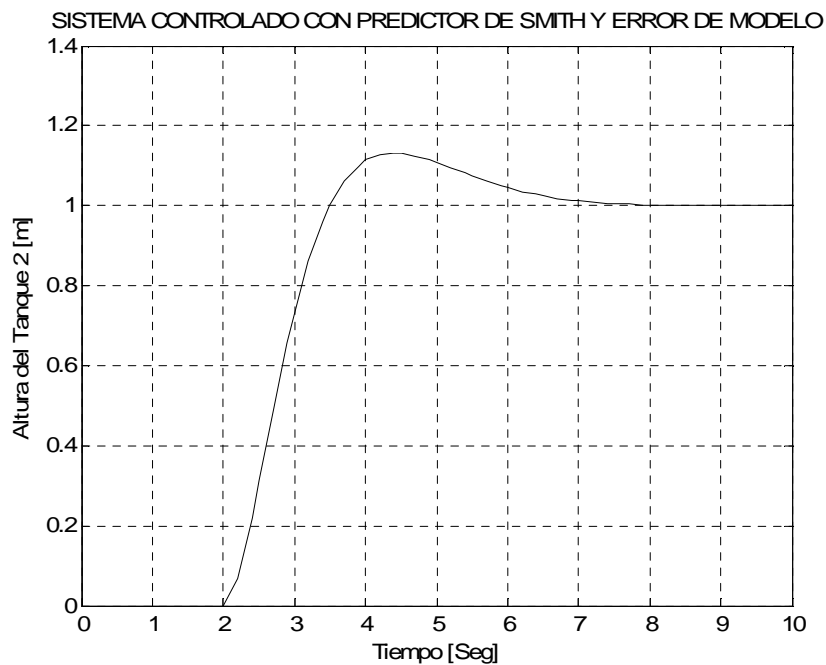


Fig. 11: Respuesta del sistema con Predictor de Smith con error en el modelado del proceso

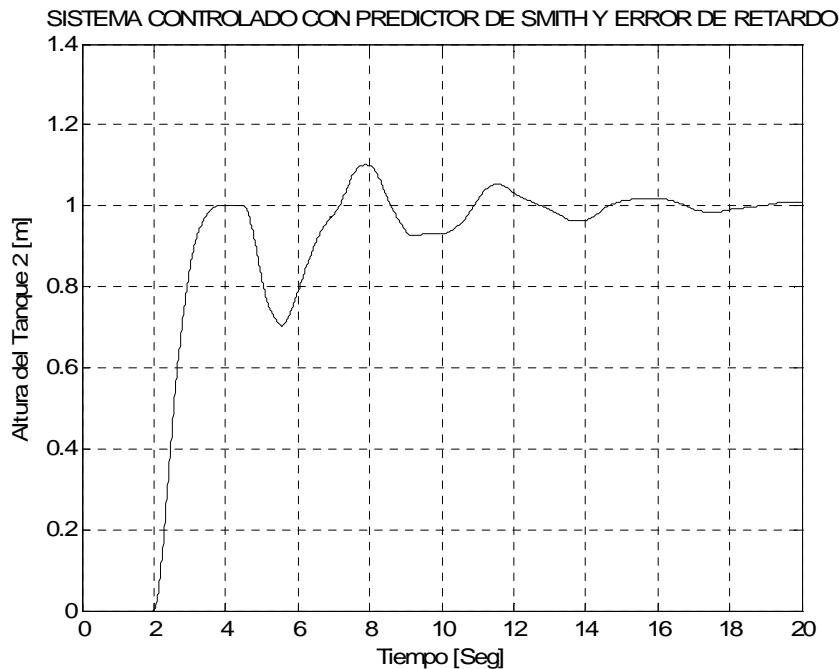


Fig. 12: Respuesta del sistema con Predictor de Smith con error en el modelado del retardo

e) *Aplicar Predictor de Smith cuando el modelo del retardo tiene un error de 20%.*

Se aplica Predictor de Smith para el caso de que el modelo del retardo tiene un error del 20% ($d = 2.2s$). La respuesta del sistema controlado se muestra en la Fig. 12. El sistema es oscilante hasta llegar a la referencia.

f) *Conclusiones.*

Del desarrollo del presente ejercicio se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- De la Fig. 10 se observa que el tiempo de establecimiento que se logra en el sistema con retardo aplicando Predictor de Smith es de 3.8 segundos, mientras que si se ajusta un controlador PID para el mismo sistema se logra en aproximadamente 21 segundos (Fig. 9).
- El tiempo de establecimiento que se consigue con un Predictor de Smith es la suma de la respuesta del sistema sin retardo (1.8 seg.) y el valor del retardo (2 seg.).
- Cuando hay errores en el modelado, Fig. 11, la respuesta del sistema con Predictor de Smith se degrada (hay sobreimpulso y el tiempo de establecimiento es mayor) pero puede ser una respuesta aceptable. Esto se debe a que el PID es tolerante a variaciones en el proceso.
- Cuando se cometen errores en el modelado del retardo, Fig. 12, la respuesta del sistema es oscilante y tarda más en llegar a la referencia.
- Se puede decir en forma general que es más importante tener un buen modelo del retardo que de la planta.