

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/228415969>

Modelo Dinámico y Controlador de Seguimiento para Robots Móviles Tipo Uniciclo

Conference Paper · January 2008

CITATIONS

0

READS

998

4 authors, including:



Felipe Nascimento Martins

Hanzehogeschool Groningen

50 PUBLICATIONS 236 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Mário Sarcinelli-Filho

Universidade Federal do Espírito Santo

188 PUBLICATIONS 1,142 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Teodiano Bastos

Universidade Federal do Espírito Santo

245 PUBLICATIONS 1,201 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



RoSoS - Robot Soccer Simulator [View project](#)



Muscle-Computer Interface Based on Myoelectric Signals for Control of Dexterous Hand/Finger Movements [View project](#)

All content following this page was uploaded by [Felipe Nascimento Martins](#) on 18 June 2014.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

Modelo Dinámico y Controlador de Seguimiento para Robots Móviles Tipo Uniciclo

Felipe Nascimento Martins[†], Ricardo Carelli[‡], Mário Sarcinelli-Filho[†], Teodiano Freire Bastos[†]

[†] UFES - Universidade Federal do Espírito Santo, Dep. Engenharia Elétrica, Vitória, Espírito Santo, Brasil

[‡] UNSJ - Universidad Nacional de San Juan, Instituto de Automática, San Juan, Argentina

Emails: felipem,mario.sarcinelli,tfbastos@ele.ufes.br, rcarelli@inaut.unsj.edu.ar

Resumen— Este artículo presenta una nueva manera para representar el modelo dinámico del robot móvil tipo uniciclo, y propone un controlador de seguimiento de trayectoria basado en dicho modelo. El modelo dinámico propuesto recibe velocidades lineal y angular como entradas, lo que es usual en robots móviles comerciales. Propiedades importantes del nuevo modelo son estudiadas, como su característica de pasividad y la anti-simetría de su matriz C. Algunas de dichas propiedades son utilizadas en el desarrollo del controlador de seguimiento de trayectoria y en el análisis de estabilidad del sistema, que es estudiada con base en la teoría de Lyapunov. Finalmente, resultados experimentales muestran que el controlador diseñado tiene buen desempeño.

Keywords— Robots Móviles, Control No-lineal, Modelo dinámico, Teoría de Pasividad, Teoría de Lyapunov.

I. INTRODUCCIÓN

Entre las distintas estructuras de robots, el tipo uniciclo es frecuentemente utilizado en varias tareas debido a su buena movilidad y configuración simple. Por ejemplo, esta estructura ha sido utilizada en aplicaciones como vigilancia [1], limpieza de pisos [2] y transporte de cargas en ambientes industriales [3].

Varios estudios han tratado del diseño de controladores de seguimiento de trayectoria para robots móviles. Algunos fueron diseñados con base apenas en el modelo cinemático del robot, como aquellos presentados en [4] y [5]. Sin embargo, para ejecutar tareas que requieren altas velocidades o transporte de cargas, es fundamental considerar la dinámica del robot, además de su cinemática. Por eso, algunos estudios presentan el diseño de controladores que compensan la dinámica del robot. Por ejemplo, [6] presentó una ley de control para robots móviles no-holonómicos que lleva en consideración la dinámica del vehículo, aún que las señales de control generadas por este controlador sean pares y que solamente resultados de simulación sean mostrados. El diseño de un controlador adaptable para seguimiento de trayectoria que genera señales de pares, basado en modelo dinámico, fue presentado en [7] aunque, una vez más, solamente resultados de simulaciones fueron mostrados. En [8] fue propuesto un controlador adaptable en el cual la incertidumbre del sistema es estimada por un sistema basado en lógica fuzzy y sus parámetros son ajustados en línea. El modelo dinámico usado en dicho trabajo incluye la dinámica de los actuadores, y las señales generadas son voltajes para los motores del robot.

Otros tipos de controladores de seguimiento de trayecto-

ria basados en la dinámica del robot fueron desarrollados en [9] y [10], pero solo resultados de simulaciones fueron presentados. En [11] fue propuesto un controlador robusto adaptable para robots móviles dividido en dos partes. La primera parte es basada en la cinemática, y es responsable por generar señales de referencia para la segunda, que compensa la dinámica del robot. Una vez más, solamente resultados de simulaciones fueron presentados.

Las señales de control generadas por los controladores dinámicos presentados en la literatura son, en general, pares o voltajes para los motores del robot, como en los trabajos mencionados anteriormente. Sin embargo, robots comerciales usualmente reciben comandos de velocidades lineal y angular. En este contexto, en [12] fue presentado un modelo dinámico para robots tipo uniciclo que tiene la ventaja de aceptar velocidades lineal y angular como entradas, además de un controlador de seguimiento de trayectoria diseñado con base en dicho modelo. El mismo modelo fue utilizado en [13] para diseñar un controlador dinámico adaptable de seguimiento de trayectoria para robots tipo uniciclo, en el cual los parámetros dinámicos son ajustados en línea.

Este artículo presenta un nuevo modelo dinámico para robots móviles de tipo uniciclo. El nuevo modelo resulta de una modificación hecha en el modelo desarrollado y presentado en [12], manteniendo las señales de velocidades lineal y angular como entradas. Las propiedades de dicho modelo son estudiadas y discutidas, y algunas de ellas son usadas en el diseño de un controlador de seguimiento de trayectoria. Es presentado el análisis de estabilidad de todo el sistema, basado en la teoría de Lyapunov, y la conclusión muestra que los errores de control convergen asintóticamente a cero cuando el controlador diseñado es utilizado. Por fin, resultados experimentales muestran un buen desempeño del controlador propuesto.

II. MODELO DEL ROBOT UNICICLO

El modelo dinámico del robot tipo uniciclo propuesto en [12] es escrito de otra manera a fin de que su ecuación sea similar a la ecuación dinámica de un robot manipulador. Finalmente, algunas propiedades del modelo desarrollado son destacadas.

A. Modelo Dinámico

La figura 1 muestra la representación del robot móvil tipo uniciclo, sus parámetros y variables de interés. En la

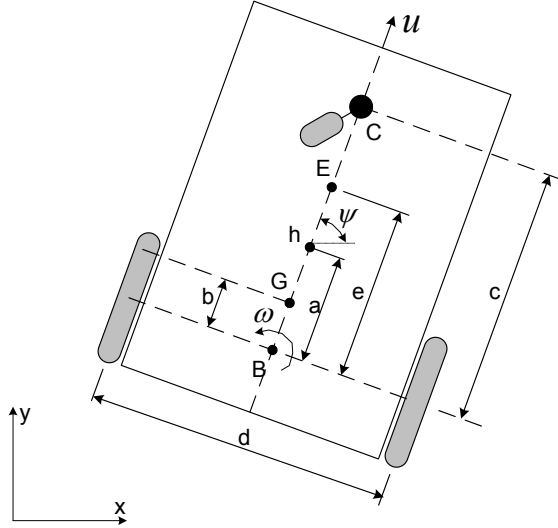


Fig. 1. Modelo del robot uniciclo.

figura, u y ω son, respectivamente, las velocidades lineal y angular, G es el centro de masa, C es la posición de la rueda castor, E es la localización de una herramienta a bordo del robot, h es el punto de interés (de coordenadas x y y en el plano XY), ψ es la orientación del robot, y a es la distancia entre el punto de interés y el punto central del eje virtual que conecta las ruedas (punto B).

El modelo matemático completo puede ser escrito como [12]

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a\omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a\omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3}{\theta_1}\omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2}u\omega - \frac{\theta_6}{\theta_2}\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x & \delta_y & 0 & \delta_u & \delta_\omega \end{bmatrix}^T, \quad (1)$$

donde u_{ref} y ω_{ref} son las señales de referencia de velocidades lineal y angular, respectivamente, $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$ es el vector de parámetros (identificados) del modelo y $\delta = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \delta_u \ \delta_\omega]^T$ es el vector de incertidumbres paramétricas asociado al robot móvil. En el modelo, δ_x y δ_y son funciones de las velocidades de desplazamiento y de la orientación del robot, δ_u y δ_ω son funciones de parámetros físicos como masa, inercia, diámetros de las ruedas y neumáticos, parámetros de los motores y servos, fuerzas en las ruedas, etc.

Los parámetros incluidos en el vector θ son funciones de algunos parámetros físicos del robot, como su masa m , su momento de inercia I_z en el punto G , la resistencia eléctrica R_a de sus motores, la constante electromotriz k_b de sus motores, la constante de torque k_a de sus motores, su coeficiente de fricción B_e , el momento de inercia I_e de cada grupo rotor-reducción-engranaje-rueda, el radio r de sus ruedas, el radio nominal R_t de los neumáticos, y las distancias b y d (Figura 1). Fue asumido que los servos del robot tienen controladores PD para controlar las velocidades de cada motor, con ganancias proporcionales

$k_{PT} > 0$ y $k_{PR} > 0$, y derivativas $k_{DT} \geq 0$ y $k_{DR} \geq 0$. También fue asumido que los motores asociados a ambas ruedas tienen características idénticas, y que sus inductancias son despreciables. Las ecuaciones que describen los parámetros θ_i fueron primeramente presentadas en [12], y son reproducidas aquí por conveniencia. Son ellas

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left[\frac{R_a}{k_a} (mR_t r + 2I_e) + 2rk_{DT} \right] \frac{1}{2rk_{PT}}, \\ \theta_2 &= \frac{\left[\frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2R_t r (I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR} \right]}{(2rdk_{PR})}, \\ \theta_3 &= \frac{R_a}{k_a} \frac{mbR_t}{2k_{PT}}, \\ \theta_4 &= \frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) \frac{1}{rk_{PT}} + 1, \\ \theta_5 &= \frac{R_a}{k_a} \frac{mbR_t}{dk_{PR}}, \text{ y} \\ \theta_6 &= \frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) \frac{d}{2rk_{PR}} + 1. \end{aligned}$$

Debe ser observado que $\theta_i > 0$, $i = 1, 2, 4, 6$. Los parámetros θ_3 y θ_5 , por su parte, serán nulos si, y sólo si, el centro de masa G estuviera exactamente en el punto central del eje virtual que une las ruedas de tracción (punto B), i.e. $b = 0$. En este trabajo se considera que $b \neq 0$, de manera que θ_3 y θ_5 son distintos de cero.

El modelo del robot tipo uniciclo presentado en (1) es dividido en una parte cinemática y una parte dinámica, como presentado a continuación. El modelo cinemático del robot es representado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

y su modelo dinámico es dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1}\omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2}u\omega - \frac{\theta_6}{\theta_2}\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Reagrupando los términos y despreciando δ_u y δ_ω , (3) puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & \theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

o, en una forma compacta, como

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}_r, \quad (5)$$

donde $\mathbf{v}_r = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ es el vector de referencias de velocidades, $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$ es el vector que contiene las velocidades reales del robot, y las matrices \mathbf{H} y $\mathbf{c}(\mathbf{v})$ son

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{c}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \theta_4 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & \theta_6 \end{bmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{c}(\mathbf{v})$ puede ser dividida en dos matrices distintas $\mathbf{c}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}'(\mathbf{v}) + \mathbf{F}'$, donde

$$\mathbf{C}'(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix},$$

de modo que el modelo dinámico puede ser escrito como

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}'(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{F}'\mathbf{v} = \mathbf{v}_r. \quad (6)$$

Es importante observar que en (6) los productos de las matrices \mathbf{H} por $\dot{\mathbf{v}}$, \mathbf{C}' por \mathbf{v} y \mathbf{F}' por \mathbf{v} resultan en velocidades, y no en pares. Por lo tanto, el modelo presentado es distinto del modelo dinámico clásico basado en pares, y sus propiedades serán analizadas.

B. Propiedades del Modelo Dinámico

Para analizar las propiedades del modelo, el término $\mathbf{c}(\mathbf{v})\mathbf{v}$ de (4) será reescrito como

$$\begin{bmatrix} \theta_4 & -\theta_3\omega \\ \theta_5\omega & \theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_4 & -\theta_3\omega \\ I\theta_3\omega & \theta_6 + (\theta_5 - I\theta_3)u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (7)$$

donde $I = 1\text{rad}^2/m^2$ es una constante necesaria para compatibilizar las unidades. Considerando que $\theta_6 \gg |(\theta_5 - I\theta_3)u|$, el término $\mathbf{c}(\mathbf{v})\mathbf{v}$ puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta_3\omega \\ I\theta_3\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{F}\mathbf{v} \quad (8)$$

y el modelo dinámico del robot puede ser escrito como

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{v}_r. \quad (9)$$

Una importante característica del modelo presentado es que sus entradas son velocidades lineal y angular, no pares. Robots comerciales usualmente reciben comandos de velocidades lineal y angular y, por lo tanto, el modelo propuesto es útil para ser utilizado en conjunto con estos robots. Además, el modelo dinámico representado por (9) posee importantes propiedades que pueden ayudar en el diseño de controladores que tengan en cuenta la dinámica del robot. Estas propiedades son:

1. La matriz \mathbf{H} es simétrica y definida positiva, o sea $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > \mathbf{0}$;
2. La inversa de \mathbf{H} existe y también es definida positiva, o sea $\exists \mathbf{H}^{-1} > \mathbf{0}$;
3. La matriz \mathbf{F} es simétrica y definida positiva, o sea $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T > \mathbf{0}$;
4. Las matrices \mathbf{H} y \mathbf{F} son constantes;
5. La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ es anti-simétrica;
6. El mapeo $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}$ es estrictamente pasivo de salida.

Las propiedades 1 y 2 pueden ser probadas observándose que \mathbf{H} es una matriz diagonal, y que sus términos son todos positivos. La propiedad 3 es válida si $\theta_6 > -(\theta_5 - I\theta_3)u$, o cuando se considera $\theta_6 \gg |(\theta_5 - I\theta_3)u|$. La propiedad 4 es verdadera bajo la hipótesis de que no hay cambio en los valores de los parámetros, i.e., la estructura del robot, su masa, su momento de inercia,

etc. no cambian. Es importante mencionar que \mathbf{F} es constante cuando se considera $\theta_6 \gg |(\theta_5 - I\theta_3)u|$, y que \mathbf{H} no depende de la posición del robot desde que se desplace en el plan horizontal, ya que el desplazamiento en un plano inclinado provocaría cambio en su momento de inercia.

Resultados de identificación de parámetros realizada para tres distintos robots tipo unicycle, presentados en [12], muestran que $\theta_6 \gg |(\theta_5 - I\theta_3)u|$ para los tres robots considerados. Estos robots son dos Pioneer 2-DX (uno de ellos posee computadora de bordo y el otro no la posee) y un Pioneer 3-DX que posee computadora de bordo y sensor de barrido láser, todos de la empresa Mobile Robots. Dichos robots tienen diferentes masas y distintas características dinámicas, especialmente el Pioneer 3-DX, pues el sensor de barrido láser montado en su parte delantera superior tiene masa de aproximadamente 40% de la masa del propio robot. O sea, dicho sensor provoca un cambio importante en la dinámica del robot.

Los parámetros identificados para el robot Pioneer 2-DX que no posee computadora de bordo son

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.3037 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0.2768 \text{ s}, \\ \theta_3 &= -0.000402 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0.9835, \\ \theta_5 &= 0.00382 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 1.0725, \end{aligned}$$

mientras que para el robot Pioneer 2-DX con computadora de bordo ellos son

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.1932 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0.1377 \text{ s}, \\ \theta_3 &= 0.000352 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0.9833, \\ \theta_5 &= -0.01042 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 0.9837, \end{aligned}$$

y, finalmente, para el robot Pioneer 3-DX ellos son

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.2604 \text{ s}, \\ \theta_2 &= 0.2509 \text{ s}, \\ \theta_3 &= -0.000499 \text{ sm/rad}^2, \\ \theta_4 &= 0.9965, \\ \theta_5 &= 0.00263 \text{ s/m}, \\ \theta_6 &= 1.0768. \end{aligned}$$

Como u es limitado a $1, 2\text{m/s}$ (limitación de los robots Pioneer), la hipótesis de que $\theta_6 \gg |(\theta_5 - I\theta_3)u|$ es verdadera para los tres robots considerados. Por lo tanto, el modelo dinámico de los robots mencionados anteriormente puede ser representado por (9), y todas las propiedades son válidas. También es posible observar que $(\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C})$ es anti-simétrica, ya que la matriz \mathbf{H} es constante y, por lo tanto, $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$.

La propiedad de pasividad del sistema puede ser utilizada en el diseño de un controlador estable para dicho sistema [14]. Para mostrar que el mapeo $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}$

es estrictamente pasivo de salida, considerando el modelo dinámico dado por (9), considerase la función definida positiva $V = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v}$, y su primera derivada temporal $\dot{V} = \mathbf{v}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{v}}$. Usando (9) y aplicando la propiedad de anti-simetría de $\mathbf{C}(\mathbf{v})$, \dot{V} puede ser escrito como

$$\dot{V} = \mathbf{v}^T (\mathbf{v}_r - \mathbf{C}\mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_r - \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{v}. \quad (10)$$

Integrando (10),

$$V(T) - V(0) = \int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{v}_r dt - \int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{v} dt, \quad (11)$$

que resulta, después de despreciar $V(T)$, en la desigualdad

$$\int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{v}_r dt \geq -V(0) + \lambda_{\min}(\mathbf{F}) \|\mathbf{v}\|_{2,T}^2, \quad (12)$$

donde $\lambda_{\min}(\cdot)$ representa el menor autovalor de una matriz. Por lo tanto, basado en (12) se puede concluir que el mapeo $\mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}$ de (9) es estrictamente pasivo de salida [15].

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El diseño del controlador de seguimiento de trayectoria es dividido en dos partes, como en [11, 13]. Una de las partes es basada en la cinemática y la otra realiza la compensación de la dinámica del robot. La estructura completa de control es presentada en la figura 2.

A. Controlador Cinemático

El controlador cinemático es basado en el modelo cinemático del robot, dado por (2). Despreciándose las incertidumbres δ_x y δ_y y considerando las coordenadas del punto de interés $\mathbf{h} = [x \ y]^T$, la ecuación cinemática puede ser escrita como

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (13)$$

y la ley de control cinemática propuesta es

$$\begin{bmatrix} u_{ref}^c \\ \omega_{ref}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d + l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \dot{y}_d + l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde, $a > 0$; $\mathbf{v}_d = [u_{ref}^c \ \omega_{ref}^c]^T$ es la salida del controlador cinemático; $\tilde{x} = x_d - x$ y $\tilde{y} = y_d - y$ son los errores actuales de posición en los ejes X y Y, respectivamente; $k_x > 0$ y $k_y > 0$ son las ganancias del controlador; $l_x \in \mathbb{R}$, $l_y \in \mathbb{R}$ son constantes de saturación; y (x, y) y (x_d, y_d) son las coordenadas actual y deseada del punto de interés, respectivamente. El controlador cinemático genera las referencias de velocidades lineal y angular para el controlador dinámico, como mostrado en la figura 2.

Para el análisis de estabilidad se supone seguimiento perfecto de velocidad, o sea, se considera que $u \equiv u_{ref}$ y $\omega \equiv \omega_{ref}$, lo que significa que los efectos de la dinámica del robot son ignorados. La ecuación del sistema en lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Definiendo el vector de error de salida como $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$, ecuación (15) puede ser escrita como

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} = - \begin{bmatrix} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) & l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}^T, \quad (16)$$

que posee un unico punto de equilibrio en la origen. Para el análisis de estabilidad de dicho equilibrio, considerase la función candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$, que es definida positiva. Su primera derivada temporal es

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -\tilde{x} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) - \tilde{y} l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right),$$

que es definida negativa. Por lo tanto, se puede concluir que el equilibrio (la origen) es asintóticamente estable, lo que significa que $\tilde{x} \rightarrow 0$ y $\tilde{y} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En la proxima subsección la estabilidad del equilibrio será analizada nuevamente para el sistema completo, después de la adición del controlador dinámico.

B. Controlador Dinámico

El controlador dinámico recibe señales de referencia de velocidades lineal y angular \mathbf{v}_d del controlador cinemático, y genera otro par de señales de velocidad lineal y angular \mathbf{v}_r que son enviadas como comandos para los servos del robot, como ilustra la figura 2.

El diseño del controlador dinámico es basado en el modelo dinámico representado por (9), considerando que $\theta_6 \gg |(\theta_5 - I\theta_3)u|$. La ley de control propuesta es

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) + \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}}_d + \mathbf{C}\mathbf{v}_d + \mathbf{F}\mathbf{v}_d, \quad (17)$$

donde $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}$ es el vector de errores de velocidad. La matriz $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}})$ es

$$\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} l_u & 0 \\ 0 & l_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_u}{l_u} \tilde{u}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_\omega}{l_\omega} \tilde{\omega}\right) \end{bmatrix},$$

donde $k_u > 0$ y $k_\omega > 0$ son ganancias constantes y $l_u \in \mathbb{R}$ y $l_\omega \in \mathbb{R}$ son constantes de saturación. El término $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}})$ provoca una saturación para garantizar que los comandos enviados al robot están dentro de los límites aceptables.

Considerando la ley de control (17), la ecuación de lazo cerrado es

$$\mathbf{H}\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{F}\tilde{\mathbf{v}}.$$

Para el análisis de estabilidad, se considera la función definida positiva $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{v}}$. Su primera derivada temporal es $\dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{H} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}$, que puede ser escrita como

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}.$$

Considerando la propiedad 5 de anti-simetría de la matriz \mathbf{C} , se puede escribir que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}}.$$

Recordando la propiedad 3 que garantiza que \mathbf{F} es una matriz simétrica y definida positiva, se puede concluir que $\dot{V} < 0$. O sea se puede concluir que $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{L}_\infty$ y $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow 0$

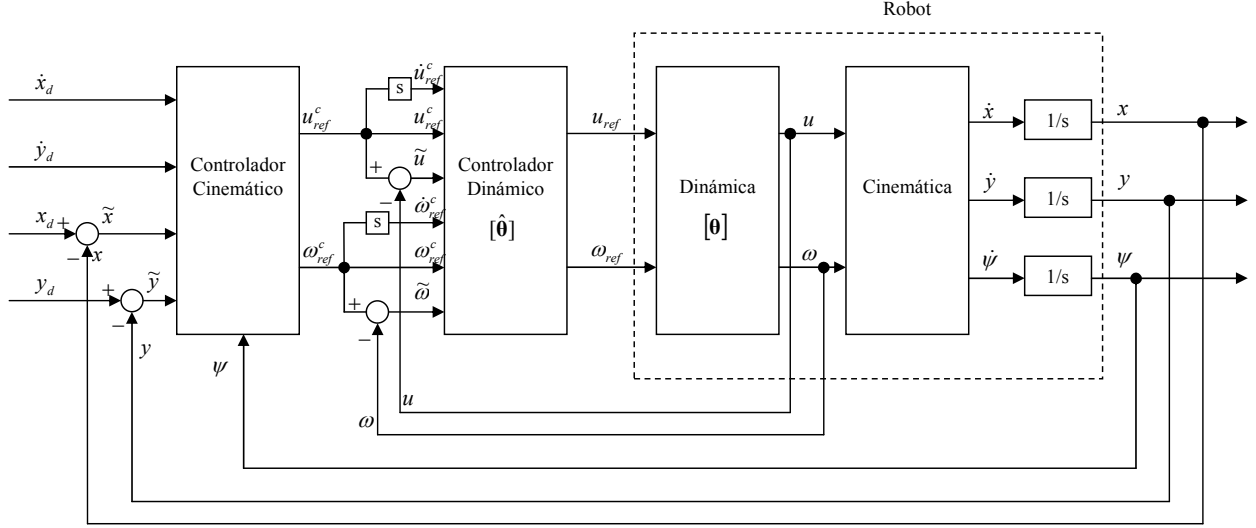


Fig. 2. Estructura de control.

con $t \rightarrow \infty$, lo que muestra que el objetivo de control es cumplido.

La señal del error $\tilde{\mathbf{v}}$ también es cuadrado integrable, como se muestra a continuación. Integrando \dot{V} , resulta en

$$V(T) - V(0) = - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) dt - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}} dt.$$

Despreciando el término $V(T)$,

$$-V(0) \leq - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) dt - \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{v}} dt,$$

o

$$V(0) \geq \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) dt + \lambda_{\min}(\mathbf{F}) \int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 dt,$$

donde $\lambda_{\min}(\mathbf{F})$ representa el menor autovalor de \mathbf{F} . La desigualdad anterior muestra que los términos están todos acotados y, por lo tanto, puede ser escrita como

$$V(0) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{F}) \int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 dt + \alpha,$$

donde $\alpha = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) dt$. Por lo tanto,

$$\int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 dt \leq \frac{V(0) - \alpha}{\lambda_{\min}(\mathbf{F})} \Rightarrow \int_0^\infty \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 dt \leq \frac{V(0) - \alpha}{\lambda_{\min}(\mathbf{F})}, \quad (18)$$

lo que permite concluir que $\tilde{\mathbf{v}}$ es cuadrado integrable, i.e., $\tilde{\mathbf{v}} \in L_2$.

Nota. Durante el análisis anterior fue considerado que los parámetros dinámicos del robot son exactamente conocidos. Pero, si dichos parámetros no pueden ser identificados, o pueden cambiar de una tarea a otra, se debe considerar el desarrollo de un controlador dinámico adaptable, como presentado en [16].

Ahora el comportamiento del error de seguimiento $\tilde{\mathbf{h}}$ es analizado nuevamente, relajándose la condición de seguimiento perfecto previamente asumida. Cuando no

hay seguimiento perfecto de velocidad la ecuación (15) debe ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}) \\ \tanh(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

donde el vector de error $[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$ puede también ser escrito como $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}$, y la matriz \mathbf{A} fue previamente definida en esta sección. Se puede escribir la ecuación (19) como $\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{t})$, donde

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}) \\ \tanh(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}) \end{bmatrix}.$$

Se considera la misma función candidata de Lyapunov utilizada en el análisis anterior, o sea, $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$. Su primera derivada temporal es ahora escrita como

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = \tilde{\mathbf{h}}^T (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}})),$$

y una condición suficiente para $\dot{V} < 0$ puede ser $\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}|$. Para valores pequeños del error de control $\tilde{\mathbf{h}}$, se puede escribir $\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) \approx \mathbf{K}_{xy} \tilde{\mathbf{h}}$, donde

$$\mathbf{K}_{xy} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una condición suficiente para estabilidad asintótica es

$$\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{K}_{xy} \tilde{\mathbf{h}} > |\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}|,$$

$$\min(k_x, k_y) \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 > \|\tilde{\mathbf{h}}\| \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}\|,$$

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}\|}{\min(k_x, k_y)}, \quad (20)$$

Como fue probado que $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$, la condición (20) es asintóticamente verificada para cualquier valor de $\tilde{\mathbf{h}}$. Consecuentemente, el error de control $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{0}$, lo que está de acuerdo con el objetivo de control.

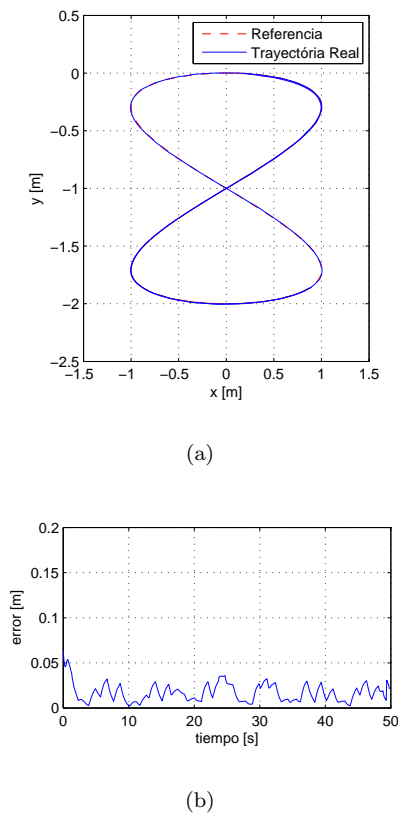


Fig. 3. (a) Trayectorias real y de referencia y (b) error de distancia durante el experimento.

IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El controlador propuesto fue implementado en un robot móvil Pioneer 3-DX, que admite comandos de velocidades lineal y angular. Los parámetros dinámicos θ fueron identificados y los valores correspondientes fueron usados en el controlador dinámico.

El robot inicia en la posición $(0.2 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$, y debe seguir una trayectoria de referencia en forma de ocho, que se inicia en $(0.0 \text{ m}, 0.0 \text{ m})$. La velocidad lineal del robot varía entre 0.1 m/s y 0.4 m/s , y su velocidad angular varía entre -0.75 rad/s y 0.75 rad/s . La figura 3(a) presenta las trayectorias real y de referencia. Se puede observar que el robot sigue la referencia con pequeño error (la posición actual del robot es recuperada a través de su sistema de odometría). La figura 3(b) muestra la evolución del error para este experimento. Se puede notar que el valor del error de seguimiento se mantiene en un valor menor que 0.04 m .

V. CONCLUSIONES

Fue presentada una nueva forma de representar el modelo dinámico del robot móvil tipo unicycle. El modelo obtenido tiene como entradas señales de velocidades lineal y angular, lo que es común en robots comerciales, pero no en la literatura. Propiedades importantes del modelo fueron presentadas y probadas, y algunas fueron utilizadas en el diseño de un controlador de seguimiento de trayecto-

ria que compensa los efectos provocados por la dinámica del robot. Fue realizado el análisis de estabilidad basado en propiedades del modelo y en la teoría de Lyapunov, y la convergencia asintótica de los errores de control a cero fue garantizada. Resultados experimentales también fueron presentados para validar el modelo propuesto, y mostraron el buen desempeño del controlador diseñado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a CAPES/MEC (Brasil) y a SPU (Argentina) por el apoyo financiero para el proyecto 018/04 CAPG-BA entre UFES, Brasil, y UNSJ, Argentina, en el cual este trabajo está incluido. También agradecen a FAPES, una Fundación del gobierno del estado de Espírito Santo, Brasil, por el soporte dado a esta investigación. Sr. Martins también agradece a UCL - Facultad del Centro Leste - por el apoyo que le permitió participar de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] S. Patel, R. Sanyal, and T. Sobh, "RISCBOT: A WWW-Enabled Mobile Surveillance and Identification Robot," *Journal of Intel. Robotic Systems*, vol. 45, no. 1, pp. 15–30, 2006.
- [2] E. Prassler, A. Ritter, C. Schaeffer, and P. Fiorini, "A Short History of Cleaning Robots," *Autonomous Robots*, vol. 9, no. 3, pp. 211–226, 2000.
- [3] B. Stouten and A. de Graaf, "Cooperative transportation of a large object-development of an industrial application," *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA '04*, vol. 3, pp. 2450–2455, 2004.
- [4] R. Carelli, H. Secchi, and V. Mut, "Algorithms for Stable Control of Mobile Robots with Obstacle Avoidance," *Latin American Applied Research*, vol. 29, no. 3/4, pp. 191–196, 1999.
- [5] W. Wu, H. Chen, Y. Wang, and P. Woo, "Adaptive exponential stabilization of mobile robots with uncertainties," *Proc. 38th IEEE Conf. Decision and Control*, pp. 3484–3489, 1999.
- [6] R. Fierro and F. L. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics," in *34th Conf. Decision and Control*, December 1995, pp. 3805–3810.
- [7] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi, "Adaptive tracking control of a mobile robot," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, no. 5, pp. 609–615, 2000.
- [8] T. Das and I. Kar, "Design and implementation of an adaptive fuzzy logic-based controller for wheeled mobile robots," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 14, no. 3, pp. 501–510, 2006.
- [9] S. Liu, H. Zhang, S. Yang, and J. Yu, "Dynamic control of a mobile robot using an adaptive neurodynamics and sliding mode strategy," *5th World Cong. on Intel. Control and Automation, WCICA*, vol. 6, pp. 5007–5011, 2004.
- [10] W. Dong and Y. Guo, "Dynamic tracking control of uncertain nonholonomic mobile robots," *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intel. Robots and Systems, IROS*, pp. 2774–2779, 2005.
- [11] M. Kim, J. Shin, and J. Lee, "Design of a robust adaptive controller for a mobile robot," *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intel. Robots and Systems, IROS*, vol. 3, pp. 1816–1821, 2000.
- [12] C. De La Cruz and R. Carelli, "Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots," in *32nd Conf. IEEE Industrial Electronics, IECON 2006*, November 2006, pp. 3880–3885.
- [13] F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho, and T. F. Bastos-Filho, "An Adaptive Dynamic Controller for Autonomous Mobile Robot Trajectory Tracking," *Control Engineering Practice*, vol. 16, no. 11, pp. 1354–1363, 2008.
- [14] H. Khalil, *Nonlinear systems*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [15] A. J. v. d. Schaft, *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer, 1999.
- [16] F. N. Martins, R. Carelli, T. F. Bastos-Filho, and M. Sarcinelli-Filho, "Un Controlador Dinámico Adaptable de Seguimiento para Robots Móviles tipo Unicycle," *Jornadas Argentinas de Robótica, JAR08*, 2008.