

# **Notas sobre el diseño de sistemas de control**

Fernando D. Bianchi  
fbianchi@ing.unlp.edu.ar

Octubre de 2005



# Índice general

<b>1. Conceptos de control de sistemas</b>	<b>1</b>
1.1. Ejemplo introductorio . . . . .	1
1.2. Términos y objetivos del control de sistemas . . . . .	3
1.2.1. Variables en un sistema de control . . . . .	3
1.2.2. Tipos de sistemas de control . . . . .	4
1.3. Estrategias de control . . . . .	4
1.4. Diseño de sistemas de control . . . . .	6
<b>2. Modelos de sistemas dinámicos</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Modelos y respuestas de sistemas dinámicos . . . . .	8
2.2.1. Función de transferencia . . . . .	9
2.2.2. Respuesta temporal y estabilidad . . . . .	11
2.2.3. Respuesta en frecuencia . . . . .	13
2.3. Métodos experimentales para obtener modelos simples . . . . .	14
2.3.1. Característica estática . . . . .	15
2.3.2. Métodos basados en la respuesta al escalón . . . . .	16

2.3.3. Métodos basados en la respuesta en frecuencia . . . . .	21
<b>3. Control PID</b>	<b>25</b>
3.1. Introducción . . . . .	25
3.2. Principio de realimentación . . . . .	25
3.2.1. Control ON-OFF . . . . .	26
3.2.2. Control proporcional . . . . .	26
3.3. Control PID . . . . .	29
3.3.1. Acción proporcional . . . . .	29
3.3.2. Acción integral . . . . .	31
3.3.3. Acción derivativa . . . . .	32
3.3.4. Resumen . . . . .	34
3.4. Elección del tipo de controlador . . . . .	35
3.5. Algoritmos PID modificados . . . . .	36
3.5.1. Representaciones alternativas . . . . .	36
3.5.2. Algoritmos PID de dos grados de libertad . . . . .	37
3.5.3. Limitación de la ganancia derivativa . . . . .	40
3.5.4. Algoritmo de velocidad . . . . .	40
3.6. Windup . . . . .	40
3.6.1. Limitación del setpoint . . . . .	41
3.6.2. Algoritmos incrementales . . . . .	42
3.6.3. Seguimiento integral . . . . .	42
3.7. Implementación digital . . . . .	44
3.7.1. Aproximaciones numéricas . . . . .	45
3.7.2. Aspectos a tener en cuenta respecto al período de muestreo . . .	48
<b>4. Diseño del controlador</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	51
4.2. Especificaciones . . . . .	51
4.2.1. Rechazo de las perturbaciones . . . . .	52
4.2.2. Sensibilidad al ruido de medición . . . . .	53

4.2.3.	Sensibilidad a las características de la planta . . . . .	54
4.2.4.	Seguimiento de referencia . . . . .	55
4.3.	Método de ajuste de Ziegler–Nichols . . . . .	57
4.3.1.	Método de la respuesta al escalón . . . . .	57
4.3.2.	Método de la respuesta en frecuencia . . . . .	58
4.3.3.	Evaluación de los métodos de Ziegler–Nichols . . . . .	59
4.3.4.	Método de Cohen–Coon . . . . .	61
4.3.5.	Método del margen de fase . . . . .	63
4.4.	Método de ajuste basados en optimización . . . . .	64
4.5.	Métodos de ajuste analíticos . . . . .	66
4.5.1.	Método de ajuste- $\lambda$ . . . . .	67
4.5.2.	El método Haalman . . . . .	69
4.6.	Controladores de modelo interno (IMC) . . . . .	71
4.7.	El predictor de Smith . . . . .	75
<b>5.</b>	<b>Esquemas de control multivariables</b>	<b>79</b>
5.1.	Introducción . . . . .	79
5.2.	Control en cascada . . . . .	79
5.2.1.	Elección de las variables secundarias . . . . .	81
5.2.2.	Elección de los modos de control . . . . .	82
5.3.	Control feedforward . . . . .	83
5.4.	Control de relación . . . . .	84
5.5.	Lazos interactuantes . . . . .	84

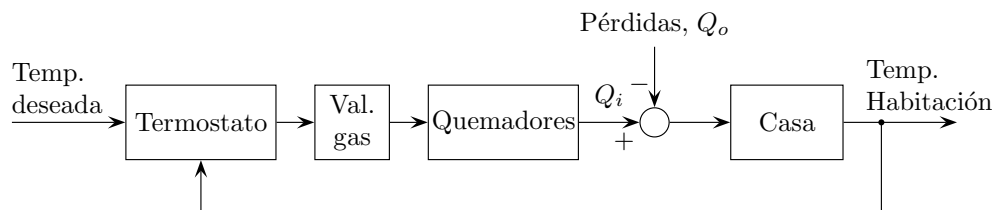


# 1

## Conceptos de control de sistemas

### 1.1 Ejemplo introductorio

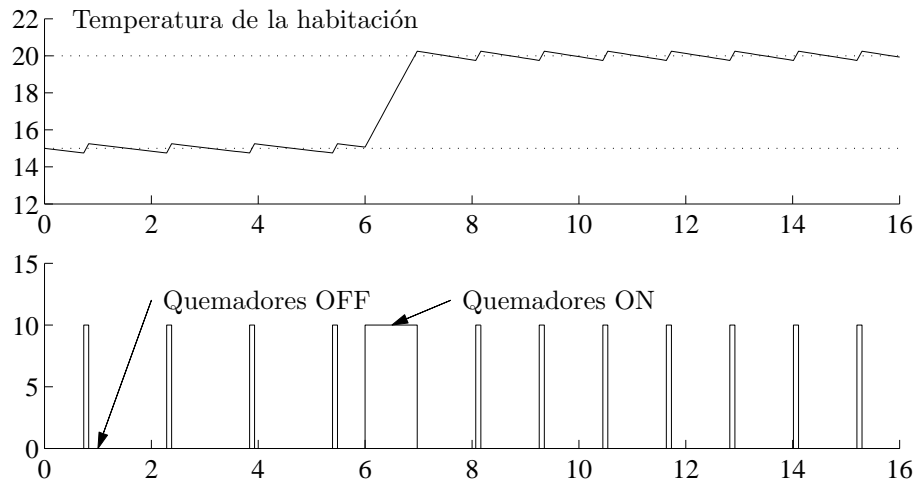
A los efectos de introducir algunos conceptos básicos de control, consideremos el sistema de calefacción de una casa con control de temperatura por medio de un termostato. Los componentes de este sistema y sus interconexiones se muestran en la [Figura 1.1](#). En dicha figura se indican las partes más importantes del sistema y se muestra la dirección del flujo de información de un componente al otro.



**Figura 1.1:** Sistema de calefacción con control de temperatura

La [Figura 1.1](#) nos permite comprender en forma cualitativa el funcionamiento del sistema de control de temperatura. Supongamos que tanto la temperatura de la habitación, donde se ubica el termostato, y la temperatura exterior son bastante inferiores al valor de referencia cuando se enciende el calefactor. En esta situación el termostato estará en ON y la lógica de control abrirá la valvula de gas y encenderá los quemadores. Esto hará que la habitación reciba una cantidad de calor  $Q_i$  a una tasa de crecimiento bastante mayor a la pérdida de calor  $Q_o$ . Como consecuencia, la temperatura de la habitación se incrementará hasta exceder levemente el valor de referencia al cual fue ajustado el termostato. En este instante, los quemadores son apagados y la temperatura de la habitación comienza a descender. Una vez que la temperatura cae

a un valor levemente inferior al valor de referencia, nuevamente el termostato encenderá los quemadores y el ciclo se repetirá. La Figura 1.2 nos muestra la evolución de la temperatura de la habitación y de la cantidad de calor inyectado por los quemadores. La temperatura fuera de la habitación es  $10^\circ$  y el termostato es inicialmente ajustado a  $15^\circ$ . A las 7 de la mañana, el termostato es ajustado a  $20^\circ$ , por lo cual los quemadores son encendidos y la temperatura sube hasta el nuevo nivel de referencia, de ahí en más continúan los ciclos alrededor de la temperatura deseada.

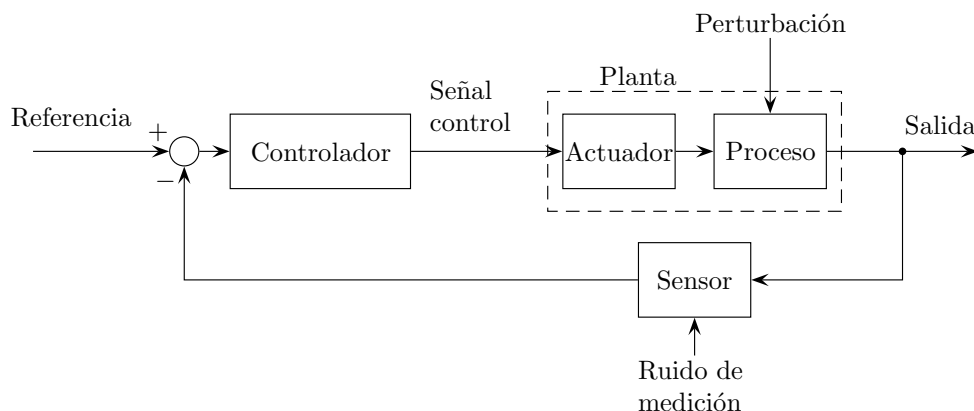


**Figura 1.2:** Evolución de las variables en el control de temperatura de una casa

A partir de este ejemplo podemos identificar los componentes genéricos de un lazo de control realimentado (Figura 1.3). El componente central es el **proceso** cuya salida deseamos controlar. En nuestro ejemplo el proceso es la casa y la salida que deseamos controlar es la temperatura de la habitación. La **perturbación** al proceso es el flujo de calor desde la habitación hacia el exterior debido a la conducción a través de las paredes y del techo. Debemos notar que el diseño del proceso puede tener un impacto importante sobre la efectividad del control. Evidentemente, es más fácil controlar la temperatura de una habitación con una buena aislación térmica. El **actuador** es el dispositivo que puede influenciar la variable controlada, el flujo de gas hacia los quemadores en nuestro ejemplo. Un punto crucial en la elección del actuador es su habilidad para cambiar la salida del proceso con suficiente velocidad y dentro de un rango adecuado. Los quemadores deben producir más calor que las pérdidas de la habitación en el peor día y distribuirla rápidamente, si pretendemos que la temperatura de la habitación se mantenga dentro de un rango estrecho. Potencia, velocidad y confiabilidad generalmente son más importante que exactitud. Generalmente, el proceso y el actuador están íntimamente relacionados y el diseño del control se centra en hallar una adecuada entrada o señal de control para enviar al actuador. La combinación del proceso y del actuador se la denomina **planta** y el elemento que realmente calcula la señal de control es el **controlador**.

El termostato en la Figura 1.1 mide la temperatura de la habitación y es llamado **sensor** en la Figura 1.3, un dispositivo que inevitablemente produce ruido de medición. La selección del sensor y su ubicación son factores importantes en el diseño del control, porque no siempre es posible que la variable controlada coincida con la variable medida. Por ejemplo, aunque deseamos controlar la temperatura de toda la casa, el termostato está ubicado en una habitación particular, la cual puede tener o no la misma





**Figura 1.3:** Diagrama en bloques de un lazo de control realimentado

temperatura del resto de la casa. Otros puntos importantes en lo que respecta al sensor es la exactitud, el ruido, la confiabilidad y la linealidad. Habitualmente, un sistema de control también contará con dispositivos que acondicionarán la variable medida por el sensor y la señal de referencia para luego transmitirla de modo que pueda utilizada para generar la entrada al controlador. Finalmente, un comparador para calcular la diferencia entre la señal de referencia y la salida del sensor para dar al controlador una medida del error del sistema.

**Tabla 1.1:** Componentes fundamentales de un sistema de control

Componente	Descripción
Proceso	El sistema al cual queremos controlar alguna variable.
Sensor	También llamado elemento primario, es el encargado de medir la variable que se desea controlar.
Transmisor	Capta la salida y la acondiciona para transmitirla al controlador.
Controlador	Es el “cerebro” del sistema de control que compara el valor de la variable controlada con el valor deseado y decide que hacer para mantener la variable controlada en el valor deseado.
Actuador	También llamado elemento final de control, es el dispositivo capaz de modificar la variable de control de acuerdo a las indicaciones del controlador.

## 1.2 Términos y objetivos del control de sistemas

### 1.2.1 Variables en un sistema de control

Introduciremos algunos términos utilizados en el campo del control de sistemas. Comenzamos con la denominación de las variables presente en un sistema de control. La **variable controlada** es la variable que deseamos mantener o controlar dentro de algún

valor deseado. La **referencia**, también llamada **valor deseado** o **setpoint**, es la señal a la cual debe tender la variable controlada. La **variable manipulada** o **acción de control** es la variable que se utiliza para mantener la variable controlada en el valor deseado. Finalmente, la **perturbación** es una variable que aparta la variable controlada del valor deseado. La denominación de todas estas señales se resumen en la [Tabla 1.2](#), junto con el símbolo generalmente utilizado para representarlas en los diagramas en bloques. Volviendo al ejemplo del control de temperatura de una casa. La variable controlada es la temperatura de la habitación. El setpoint es valor de temperatura al cual se fijó el termostato. La variable manipulada es la apertura de la válvula de gas. Finalmente, la perturbación corresponde a la pérdida de calor debido a la conducción de la paredes y del techo.

**Tabla 1.2:** Señales presentes un sistema de control

Denominación	Símbolo	Descripción
Variable controlada	$y$	La variable que deseamos mantener o controlar dentro de algún valor deseado.
Referencia, valor deseado o setpoint	$r$	La señal a la cual debe tender la variable controlada.
Variable manipulada o acción de control	$u$	La variable que se utiliza para mantener la variable controlada en el valor deseado.
Perturbación	$d$	La variable que aparta la variable controlada del valor deseado.

### 1.2.2 Tipos de sistemas de control

Los sistemas de control pueden clasificarse de varias maneras. Un sistema que requiere a una persona para controlar una máquina, como por ejemplo cuando un persona maneja un auto, lo llamaremos sistema de **control manual**. En cambio, un sistema que involucre sólo máquinas, como el control de temperatura de una habitación por medio de un termostato, lo denominaremos sistema de **control automático**.

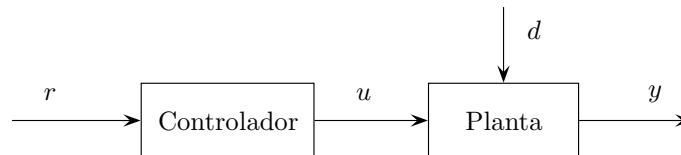
Los sistemas de control diseñados para rechazar perturbaciones desconocidas los llamaremos **reguladores**. En estos casos, la referencia es un valor constante y el controlador tiene como objetivo corregir lo más rápidamente posible las desviaciones de la variable controlada causadas por la perturbación. El ejemplo de control de temperatura que estudiamos previamente es un ejemplo de regulador. Los sistemas de control donde el objetivo es copiar lo más fielmente posible los cambios de una señal de referencia, los denominaremos **seguidores** o **servocontroles**. Los controles de posición son ejemplos típicos de servocontroles.

## 1.3 Estrategias de control

El problema de control consiste en lograr que el comportamiento de un proceso se aproxime lo mejor posible a un comportamiento deseado. La aproximación al com-

portamiento deseado debe lograrse a pesar de las incertidumbres del proceso y de la presencia de perturbaciones externas no controlables que actúan sobre el proceso. De acuerdo a la definición de las variables que hemos presentado en la sección anterior, el problema de control consiste en determinar la acción de control  $u$  de manera que la salida del proceso  $y$  se aproxime lo mejor posible a la referencia o setpoint  $r$ .

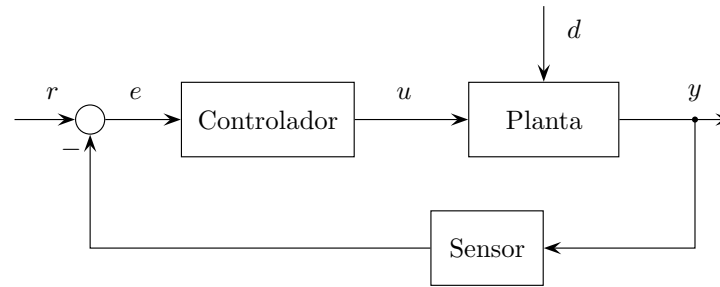
Si conocemos como será la salida del proceso cuando aplicamos una entrada  $y$ , además, hemos establecido cual debe ser el comportamiento deseado, entonces la forma más simple de resolver el problema de control es invertir la relación entrada-salida. Esta inversión nos permitirá calcular la entrada  $u$  necesaria para que la salida  $y$  se comporte como deseamos. Esta estrategia de control se ilustra en la [Figura 1.4](#) en donde el bloque “controlador” realiza la inversión de la relación entrada-salida. Una estrategia de control como la mostrada en la [Figura 1.4](#) se denomina **control a lazo abierto**. En estas estrategias, el controlador no utiliza una medida de la variable controlada para determinar la acción de control. Un sistema de calefacción donde no se mide la temperatura de la habitación y la válvula de gas se mueve en forma manual, es un sistema de control a lazo abierto. Esta tipo de estrategia se conoce también con el nombre de control por acción precalculada.



**Figura 1.4:** Sistemas de control a lazo abierto

Desafortunadamente, una estrategia de control a lazo abierto no resolverá el problema de control en forma satisfactoria, a menos que dispongamos de una representación exacta del comportamiento del proceso y las perturbaciones tengan un efecto despreciable sobre la salida del proceso (o puedan ser medidas en forma exacta). Por ejemplo, en el control de temperatura discutido previamente, para calcular la acción de control necesaria para mantener la temperatura en un valor constante deberíamos conocer en forma exacta las pérdidas de calor y como éstas afectan a la temperatura de la habitación. También necesitaríamos quemadores más precisos que entreguen la cantidad de calor exacta para mantener la temperatura.

La forma más simple y económica de evitar los problemas mencionados es utilizar una estrategia de **control a lazo cerrado** como se ilustra en la [Figura 1.5](#). En las estrategias de control a lazo cerrado se emplea el principio de realimentación que utiliza una medida de la variable controlada para determinar la acción de control. En la [Figura 1.5](#), podemos observar que la variable controlada  $y$  es comparada con el valor deseado  $r$  para generar la señal de error  $e = r - y$  que sirve de entrada al controlador. Este último tomará las decisiones adecuadas modificando la acción de control con la finalidad de minimizar el error  $e$ . Gracias a que en los controles de lazo cerrado la señal realimentada tiene información de lo que sucede en la salida del proceso, estas estrategias tienen la ventaja de ser mucho menos sensibles a los efectos de las perturbaciones. Además, las estrategias de control a lazo cerrado no requieren ni un conocimiento muy exacto del comportamiento del proceso ni de actuadores muy precisos, lo que se traduce en una reducción de los costos de implementación del sistema de control.



**Figura 1.5:** Sistema de control a lazo cerrado

## 1.4 Diseño de sistemas de control

El diseño de sistemas de control puede descomponerse en una serie de pasos. Lo primero que debemos hacer es obtener algún conocimiento respecto del comportamiento del proceso que deseamos controlar. El conocimiento del comportamiento del proceso está estrechamente vinculado con el desempeño que pueda lograr el controlador. Si disponemos de una descripción detallada de como se comporta el proceso, podremos diseñar estrategias de control más eficientes y agresivas que redunden en un mejor desempeño del sistema de control. La descripción matemática del comportamiento del proceso lo llamaremos modelo del proceso. En el próximo capítulo nos dedicaremos a estudiar algunos métodos que permitan hallar modelos simples que servirán luego para el diseño los controladores.

El segundo paso en el diseño de una estrategia de control es establecer los objetivos, es decir, definir lo que pretendemos que haga el sistema de control. Esto implica seleccionar las variables a controlar y el nivel de calidad (exactitud, velocidad, etc.) con que deben ser controladas. En el [Capítulo 3](#) analizaremos algunos de los objetivos más comunes en el control de proceso y presentaremos algunas cantidades que servirán para medir la eficacia del control para cumplir los objetivos.

Una vez que disponemos de algún conocimiento respecto del comportamiento del proceso y hemos establecidos los objetivos de control, podremos avanzar en el diseño del sistema de control. En este curso nos concentraremos sólo en las estrategias de control del tipo proporcional–integral–derivativa (PID). Si bien en la actualidad existe una muy amplia variedad de opciones para el control de sistemas, los controles PID son, sin dudas, las estrategias más populares en el control de procesos industriales. Las técnicas de control del tipo PID se caracterizan en fijar una estructura para el controlador con una serie de parámetros que deben ser ajustados para lograr el desempeño deseado. El procedimiento de ajustar dichos parámetros se denomina ajuste o sintonía del controlador. En el [Capítulo 3](#) nos dedicaremos a estudiar las distintas características de los controles del tipo PID. Posteriormente, en el [Capítulo 4](#), veremos una serie de métodos para sintonizar los controladores. Finalmente, estudiaremos algunas estrategias de control más complejas aplicables a los casos donde es necesario controlar más de una variable.

# 2

## Modelos de sistemas dinámicos

### 2.1 Introducción

El objetivo de un sistema de control es mantener la variable controlada cerca de la referencia a pesar de las perturbaciones o de los cambios que pueda experimentar la misma referencia o la dinámica del proceso. Para cumplir con este complejo objetivo es necesario conocer como se comportará el proceso en distintas situaciones. Si bien es posible determinar un controlador adecuado mediante un procedimiento de prueba y error, sin conocimiento de como se comporta el proceso, en la gran mayoría de los casos este enfoque no resulta factible por cuestiones de costo, eficiencia y seguridad. Además, una comprensión del comportamiento del sistema también es útil para poder evaluar el desempeño del control por medio de simulaciones, lo cual evita situaciones que sería riesgosas en el sistema real.

Luego, podemos afirmar que el primer paso en el diseño de un control debe ser el desarrollo de una descripción matemática del comportamiento del proceso, la cual llamaremos **modelo**. El término modelo es utilizado por los ingenieros de control para referirse a un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del proceso. Un punto importante a tener en cuenta en el momento de construir un modelo matemático es que todo proceso real es complejo. Por tanto, hallar una descripción exacta del proceso es muy difícil o inclusive imposible de lograr. Afortunadamente, la realimentación permite diseñar controles exitosos sobre la base de modelos simples que capturen características fundamentales del comportamiento del proceso. En este capítulo, nos concentraremos en técnicas para hallar modelos simples que luego nos sean de utilidad para el diseño de controladores del tipo PID.

## 2.2 Modelos y respuestas de sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es aquel donde su salida no sólo depende del valor actual de la entrada sino también de su estado previo. Por ejemplo, en el sistema de control de temperatura de una casa, visto en el [Capítulo 1](#), la relación entre la cantidad de calor entregada por los quemadores y la temperatura de la habitación es un sistema dinámico. La temperatura actual depende de la cantidad de calor que entregan los quemadores y también del calor almacenado previamente en la casa.

En un gran número de problemas de control basta con describir el comportamiento dinámico con un modelo **lineal invariante en el tiempo** (LTI). Tal tipo de modelo suele utilizarse para describir el comportamiento de un sistema de control cuando existen pequeñas desviaciones respecto de un punto de equilibrio. Un sistema se dice que es **lineal** si se verifica el principio de superposición. Esto implica que si la salida del proceso es  $y_1$  cuando la entrada es  $u_1$  y es  $y_2$  cuando la entrada es  $u_2$ , entonces la salida para una entrada  $au_1 + bu_2$  es  $ay_1 + by_2$  (con  $a$  y  $b$  constantes). Un sistema es **invariante en el tiempo** cuando su comportamiento dinámico no varía con el tiempo.

En los sistemas LTI, el comportamiento dinámico siempre puede ser representado por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t), \quad m \leq n, \quad (2.1)$$

donde  $y$  es la salida del proceso y  $u$  es la entrada. Veamos un ejemplo.

### Ejemplo 2.1: Tanque drenado por gravedad

Consideremos el proceso mostrado en la [Figura 2.1](#). En este sistema tenemos interés en analizar como se comporta el nivel del líquido  $h$  ante cambios en el caudal de entrada  $q_i$ .

Aplicando el principio de conservación de la masa tenemos que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{\rho}(q_i - q_o) \quad (2.2)$$

donde  $m$  es la masa,  $\rho$  es la densidad del líquido,  $q_i$  y  $q_o$  son los caudales de entrada y salida, respectivamente. Además, si el tanque tiene un área transversal  $A$  constante con la altura,  $dm/dt = A\rho dh/dt$ .

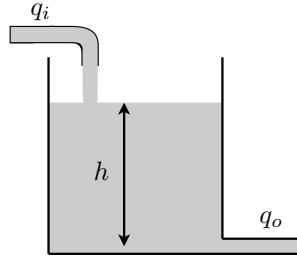
El flujo de líquido que sale del tanque es resistido por la restricción que impone la válvula de salida. Este efecto de resistencia se puede expresar en la forma

$$q_o = \frac{1}{R\rho} \sqrt{p_1 - p_2}$$

donde  $R$  es una constante que depende de la válvula,  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones a cada extremo de la restricción. En el caso del tanque drenado por gravedad,  $p_1 = \rho gh + p_a$  ( $g = 9,81$  m/s es la aceleración de la gravedad y  $p_a$  la presión atmosférica) y  $p_2 = p_a$ . Reemplazando en (2.2) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria que describe el comportamiento del sistema

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_i - k\sqrt{h}) \quad (2.3)$$

donde  $k = g/R\sqrt{\rho}$  es una constante del sistema.



**Figura 2.1:** Tanque drenado por gravedad (Ejemplo 2.1)

### 2.2.1 Función de transferencia

La **transformada de la Laplace** es una herramienta matemática fundamental para hallar descripciones del comportamiento de un sistemas LTI. Dada una señal  $y(t)$  con  $0 \leq t < \infty$ , la transformada de Laplace se define como

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (2.4)$$

donde  $s$  es una variable compleja.

Una propiedad muy útil de la transformada de Laplace es que la transformada de la derivada de una función es

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0). \quad (2.5)$$

El valor  $y(0)$ , correspondiente al valor de la señal en el instante inicial  $t = 0$ , lo llamaremos condición inicial.

Aplicando la propiedad (2.5) a la ecuación diferencial (2.1) y asumiendo condiciones iniciales nulas ( $y(0) = 0$ ,  $dy(0)/dt = 0, \dots$ ), tenemos que

$$s^n Y(s) + a_n s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_m s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s),$$

Luego, podemos expresar la relación entre la transformada de la entrada  $U(s)$  y la transformada de la salida  $Y(s)$  como

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} N(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0, \\ D(s) &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0. \end{aligned}$$

La función  $G(s)$  se la denomina **función de transferencia** del sistema y es un modelo entrada-salida. Las raíces del polinomio  $N(s)$  son los **ceros** del sistema y las raíces del polinomio  $D(s)$  son los **polos**.

**Ejemplo 2.2:** Tanque drenado por gravedad (Continuación)

Pudimos observar que el comportamiento del nivel del líquido en un tanque drenado por gravedad está descrito por la ecuación diferencial no lineal (2.7). Lidar con ecuaciones diferenciales no lineales es bastante engorroso. Sin embargo, si nos concentramos en pequeñas variaciones respecto de un punto de trabajo  $\bar{h}_0$ , el comportamiento del nivel del líquido puede ser descrito, en forma aproximada, por la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \frac{1}{A}(\hat{q}_i - k_0\hat{h}) \quad (2.7)$$

donde  $\hat{h} = h - \bar{h}_0$  y  $\hat{q}_i = q_i - \bar{q}_{i0}$  corresponden a las variaciones respecto del punto de trabajo  $\bar{h}_0$ . El parámetro  $k_0$  lo obtenemos de hacer

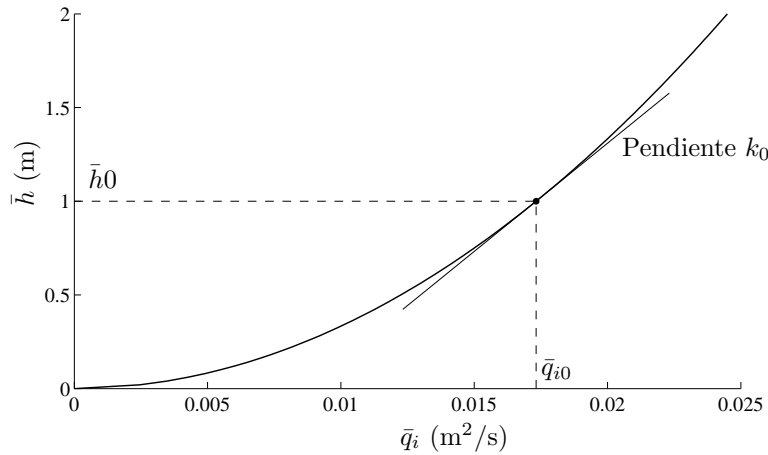
$$k_0 = A \frac{d(dh/dt)}{dh} = \frac{k}{2\sqrt{\bar{h}_0}}.$$

que es una función del punto de trabajo  $\bar{h}_0$  como podemos ver en la Figura 2.2.

Una vez linealizado la ecuación diferencial (2.7) podemos hallar la función de transferencia del sistema

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{sA + k_0},$$

No debemos olvidar que esta transferencia es válida sólo cuando el sistema opera en el punto de operación  $\bar{h}_0$ .



**Figura 2.2:** Linealización de la característica estática del tanque drenado por gravedad

En los procesos industriales es común la existencia de **retardos** o **demoras** entre algunas variables del sistema. Por ejemplo, si en vez de medir el caudal  $q_1(t)$  en la salida de un tanque lo hacemos a una distancia  $x$ , el caudal que veremos será  $q_1(t - L)$  donde  $L$  es el tiempo que tarda el líquido en recorrer la distancia  $x$ . La demora pura tiene relación entrada-salida de la forma

$$y(t) = u(t - L)$$



y su función de transferencia es

$$G(s) = e^{-sL}. \quad (2.8)$$

Finalmente, notemos que si tenemos dos sistemas con la siguiente relación entrada-salida

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s), \\ Y_2(s) &= G_2(s)U_2(s), \end{aligned}$$

el sistema resultante de hacer la interconexión en serie de los dos sistemas, es decir, hacer  $u_2 = y_1$ , tiene la transferencia  $G_2(s)G_1(s)$ . En cambio, el sistema resultante de hacer la interconexión en paralelo de los dos sistemas, es decir, hacer  $y = y_1 + y_2$  y  $u = u_1 = u_2$ , tiene la transferencia  $G_2(s) + G_1(s)$ .

## 2.2.2 Respuesta temporal y estabilidad

Una vez que disponemos de la función de transferencia del proceso podemos determinar la respuesta temporal a una dada entrada. La respuesta de un sistema LTI está gobernada por la ubicación de los polos y los ceros en el plano complejo. Si consideramos un proceso cuya transferencia es  $G(s)$ , la respuesta temporal a una entrada  $u(t)$  está dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

donde el símbolo  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$  es antitransformada de Laplace de  $Y(s)$ .

En particular, si la entrada es un pulso de área 1 su transformada de Laplace es 1, con lo cual tenemos que la respuesta temporal es la antitransformada de la transferencia, es decir,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Esta respuesta particular se suele denominar **respuesta impulsiva** o **natural** del sistema y nos permite identificar algunas características importantes del proceso.

Por ejemplo, consideremos un proceso cuya transferencia es

$$G_p(s) = \frac{1}{s - p}.$$

La respuesta impulsiva es

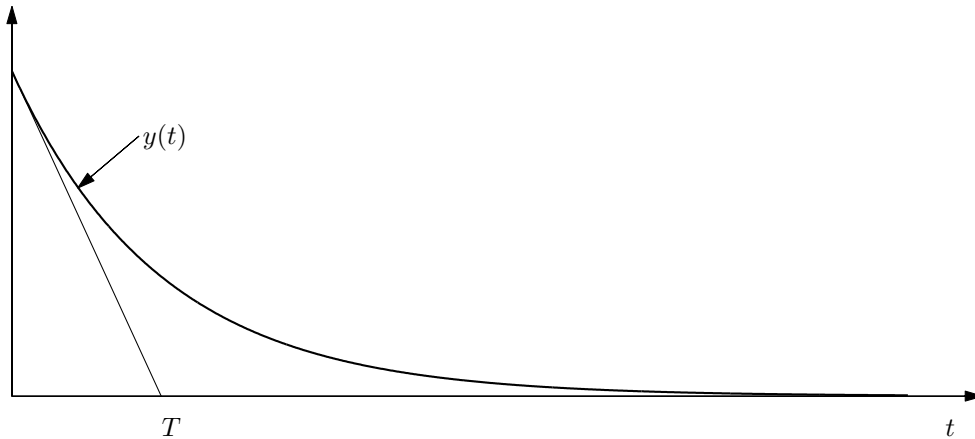
$$y(t) = e^{pt},$$

es decir, una función exponencial del tiempo. Podemos ver que la respuesta  $y(t)$  será acotada si  $p < 0$  y crecerá sin límite si  $p > 0$ . En la [Figura 2.3](#) podemos observar la respuesta impulsiva del sistema si  $p < 0$ . En dicha figura, también se define la **constante de tiempo**  $T = -1/p$ , la cual que tan rápido se anula la respuesta del sistema.

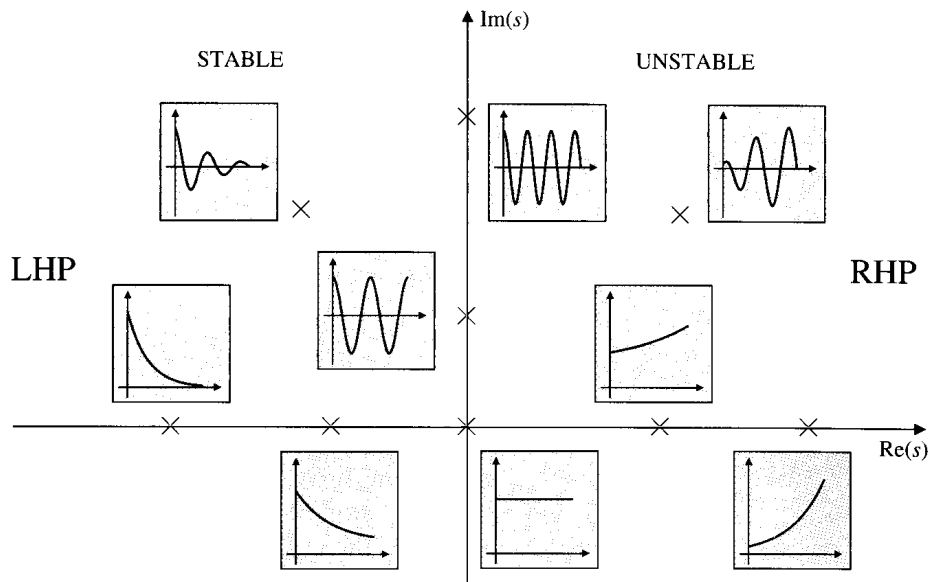
En general, la respuesta impulsiva de una transferencia con polos  $p_1, \dots, p_n$  tiene una respuesta de forma

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + \dots + c_n e^{p_n t} = c_1 e^{-t/T_1} + \dots + c_n e^{-t/T_n} \quad (2.9)$$

donde  $c_1, \dots, c_n$  son constantes. Esta expresión nos indica que la forma de la respuesta natural del sistema está vinculada a la ubicación de los polos en plano complejo. En la [Figura 2.4](#), se ilustra la relación entre la ubicación de los polos y la respuesta impulsiva.



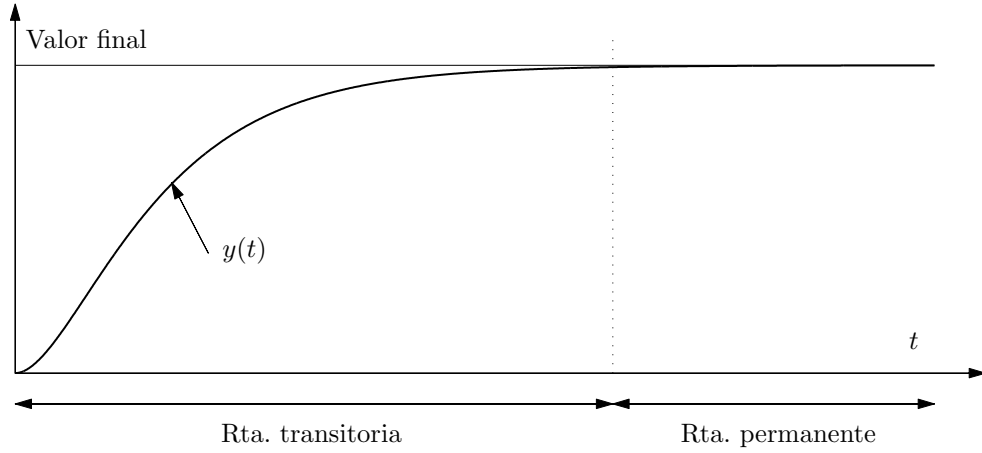
**Figura 2.3:** Respuesta a un impulso de una transferencia de primer orden



**Figura 2.4:** Respuestas temporales asociadas a la ubicación de los polos

**Estabilidad.** Un concepto fundamental en el control de sistemas es la **estabilidad**. Decimos que un sistema es **estable** si la respuesta a una entrada acotada es también acotada. A partir de la expresión (2.9), podemos concluir que el sistema es estable si todos los polos de su transferencia están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo, es decir, todos los polos tienen parte real negativa.

La Figura 2.5 ilustra una respuesta temporal a un escalón correspondiente a una transferencia estable. Podemos observar que en la medida que el tiempo crece la respuesta tiende a un valor constante. Esto nos permite dividir la respuesta en dos partes: la **respuesta transitoria** donde la señal presenta los mayores cambios y la **respuesta permanente** o de **estado estacionario** donde la señal permanece constante o varía en forma periódica. Si la entrada es una señal del tipo escalón de amplitud uno, el valor de la respuesta de estado estacionario es una magnitud constante y está dado por  $G(0)$ . Esta cantidad se conoce como la **ganancia estática** o **de continua** de la transferencia  $G(s)$ .



**Figura 2.5:** Respuesta temporal de un sistema estable

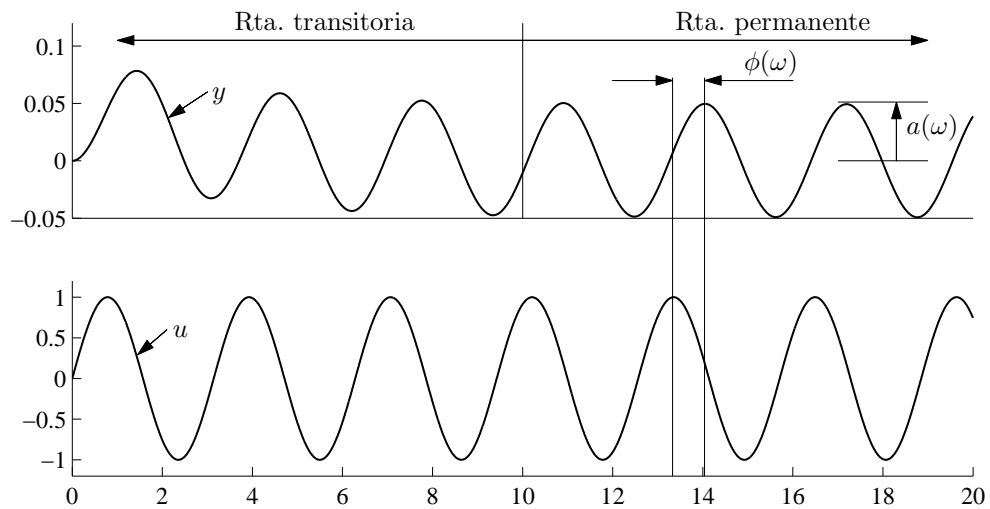
### 2.2.3 Respuesta en frecuencia

Otra forma de caracterizar la dinámica de un sistema LTI es utilizar ondas sinusoidales como señales de prueba. La idea es que la dinámica puede caracterizarse estudiando como las ondas sinusoidales se propagan a través del sistema.

En el caso de sistemas lineales estables, la respuesta del sistema a una entrada sinusoidal es también sinusoidal, luego de extinguirse el transitorio. La salida sinusoidal tendrá la misma frecuencia que la señal de entrada, pero con distinta amplitud y fase. Esto implica que, en condiciones estacionarias, la relación entre la entrada y la salida puede ser descrita por dos números: el cociente entre las amplitudes  $a$  y el desfase  $\phi$  (ver Figura 2.6). Las funciones  $a(\omega)$  y  $\phi(\omega)$  describen  $a$  y  $\phi$  para toda frecuencia  $\omega$ . Resulta conveniente considerar a  $a$  y  $\phi$  como la magnitud y la fase de un número complejo, es decir,

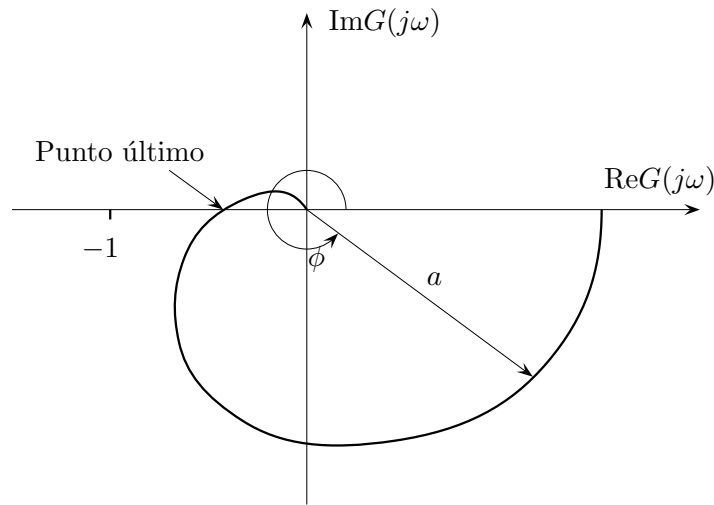
$$G(j\omega) = a(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}. \quad (2.10)$$

La función  $G(j\omega)$  la denominaremos **respuesta en frecuencia** del sistema. La función  $a(\omega) = |G(j\omega)|$  la llamaremos **amplitud** y a la función  $\phi(\omega) = \arg(G(j\omega))$  **fase**.



**Figura 2.6:** Entrada sinusoidal  $u$  y la salida  $y$  correspondiente

El número complejo  $G(j\omega)$  puede ser representado como un vector de longitud  $a(\omega)$  que forma un ángulo  $\phi(\omega)$  con el eje real. Cuando la frecuencia toma valores entre 0 e  $\infty$ , dicho vector forma una curva en el plano complejo la cual se conoce como **diagrama de Nyquist** (Figura 2.7). Este diagrama es de gran utilidad para determinar características fundamentales del comportamiento dinámico del sistema. El diagrama de Nyquist puede obtenerse experimentalmente aplicando sinusoides de distintas frecuencias en la entrada del sistema, lo cual puede demandar un considerable esfuerzo. No obstante, en general es suficiente obtener una parte del diagrama de Nyquist. Para la sintonía de un controlador PID nos basta conocer un punto particular que llamaremos **punto último**. Este punto del diagrama de Nyquist corresponde a la menor frecuencia donde la fase es  $-180^\circ$ , dicha frecuencia la denominaremos **frecuencia última**  $\omega_u$ .



**Figura 2.7:** Diagrama de Nyquist de un sistema

**Criterio de estabilidad de Nyquist.** Los diagramas de Nyquist permiten determinar la estabilidad de un sistema realimentado sin necesidad de hallar los polos de lazo cerrado. El criterio establece que si la transferencia formada por el controlador y la planta no tiene ceros con parte real negativa y su diagrama de Nyquist no encierra el punto crítico  $-1$ , entonces se puede afirmar que el sistema de lazo cerrado es estable. Este método para establecer la estabilidad de un sistema de lazo cerrado se conoce como criterio de Nyquist.

## 2.3 Métodos experimentales para obtener modelos simples

Básicamente, existen dos enfoques para construir modelos. El enfoque analítico consiste en construir el modelo empleando leyes físicas (conservación de masa, energía y momento) para obtener las relaciones entre las distintas variables del proceso. En cambio, en el enfoque experimental, se postula una estructura para el modelo y se ajustan sus parámetros hasta que el comportamiento del modelo se aproxime al observado en los ensayos del proceso. En esta sección, nos dedicaremos a estudiar algunos métodos para construir modelos simples basados en este último enfoque.

Una propiedad muy útil de los sistemas LTI es que la respuesta a una entrada arbitraria

puede ser caracterizada completamente en términos de la respuesta a una señal simple. Esto nos permite obtener modelos aproximados basándonos en ciertas características de la respuesta del sistema a entrada simples. Podemos utilizar una gran variedad de señales para caracterizar un sistema. A grandes rasgos podemos dividirlos en respuesta transitoria y respuesta en frecuencia. A continuación estudiaremos algunos métodos basados en ambos tipos de señales. Previo a esto veremos como hallar la característica estática, la cual nos sirve, entre otras cosas, para dimensionar los sensores y los actuadores y cuantificar a grandes rasgos algunas características fundamentales del proceso.

### 2.3.1 Característica estática

La característica estática de un proceso es una curva que establece la relación de estado estacionario entre la señal de entrada  $u$  y la salida  $y$ . La determinación de la curva estática debe ser el punto de partida en todo estudio de un proceso. Esta curva nos puede resultar útil para determinar el rango de las señales de control necesarias para modificar la salida del proceso dentro del rango deseado, para dimensionar los actuadores, especificar la resolución de los sensores, etc. También nos permite evaluar si las variaciones de la ganancia estática son suficientemente importantes para ser tenidas en cuenta en el diseño del control (sistemas no lineales).

#### **Ejemplo 2.3:** Tanque drenado por gravedad (Continuación)

Volvamos a considerar el tanque drenado por gravedad presentado en el Ejemplo 2.1. Vimos que el comportamiento de la altura del nivel de líquido está gobernada por

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_i - k\sqrt{h})$$

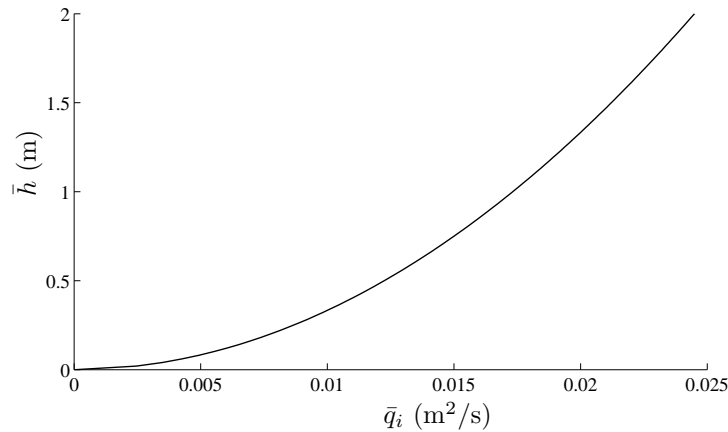
donde  $k = g/R\sqrt{\rho}$  es una constante del sistema.

Luego, para el proceso en cuestión la condición de reposo es  $dh/dt = 0$ , con lo cual podemos obtener la curva estática dada por

$$\bar{h} = (\bar{q}_i/k)^2, \quad (2.11)$$

mostrada en la Figura 2.8. La curva estática de este proceso muestra que la relación entre la entrada  $q_i$  y la salida  $h$  no es lineal.

En el ejemplo anterior obtuvimos la característica estática a partir de las relaciones matemáticas que describen la dinámica del proceso. Cuando no conocemos las relaciones matemáticas o el proceso es muy complejo para tratarlo analíticamente, es conveniente obtener el modelo estático en forma experimental. Una forma de hallar el modelo estático de un proceso es con experimentos de lazo abierto. Un experimento de lazo abierto consiste en aplicar una señal constante en la entrada del proceso y medir la salida cuando ésta alcanza el valor estacionario. Este procedimiento nos da un punto de la característica estática, la curva completa la obtenemos luego de repetir el procedimiento para todo el rango de valores de la entrada. Alternativamente, podemos emplear un procedimiento de lazo cerrado. En este caso, asignamos una referencia de valor constante y medimos la variable controlada una vez que haya alcanzado el estado



**Figura 2.8:** Característica estática del tanque drenado por gravedad (Ejemplo 2.3)

estacionario. El procedimiento se repite para cubrir todo el rango de referencias. Estos experimentos para determinar la característica estática son útiles, también, para ganar intuición respecto de que tan difícil puede ser controlar al sistema, si es estable y si existen muchas perturbaciones.

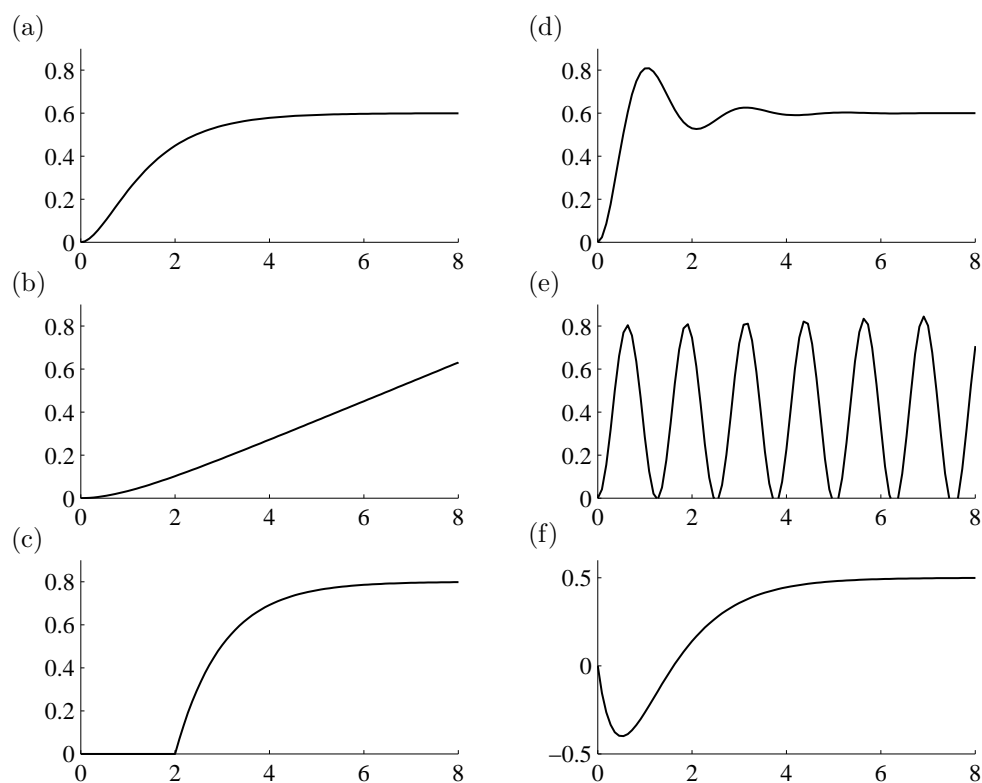
### 2.3.2 Métodos basados en la respuesta al escalón

Como mencionamos previamente, la dinámica de un proceso puede ser determinada a partir de la respuesta del sistema a entradas simples. En principio, la dinámica queda unívocamente determinada por la respuesta transitoria. Sin embargo, el sistema debe estar inicialmente en reposo, una condición que no siempre puede asegurarse. También habrá errores de medición, de modo que el método de la respuesta transitoria está limitado a modelos simples. No obstante, estos modelos simples son suficientes para la sintonía de controladores muy difundidos como los del tipo PID.

Suponiendo que tenemos un sistema a lazo cerrado con un controlador, la respuesta al escalón la obtenemos de la siguiente forma. Ponemos el controlador en manual (es decir, abrimos el lazo), producimos un cambio rápido de la variable de control, registramos el cambio de la salida del proceso y lo escalamos por la amplitud del cambio de la variable de control. Debemos buscar que la amplitud del cambio de la variable de control sea tan grande como sea posible para tener una buena relación señal ruido. El límite máximo lo impone las condiciones permisibles de operación del proceso. Una buena práctica es repetir el procedimiento con distintas amplitudes de la señal de entrada y en diferentes condiciones de operación. Esto nos dará una idea del rango de amplitudes de la señal de entrada en donde el sistema es lineal. También nos indicará si la dinámica del proceso cambia en distintas condiciones de operación.

En la Figura 2.9 se muestran varios ejemplos de respuestas al escalón. Podemos ver que es posible deducir algunas propiedades del sistema a partir de estas repuestas. La Figura 2.9a corresponde al tipo de respuesta que más comúnmente se encuentra en el control de procesos. En este caso, la salida del proceso cambia monótonamente hacia el nuevo estado estacionario. En cambio, en la Figura 2.9b, la salida del proceso oscila en torno al valor final, este tipo de respuesta se puede hallar por ejemplo en sistema mecánicos donde existe materiales elásticos, como resortes. El tipo de respuesta

observada en la [Figura 2.9c](#) se encuentra en sistemas con integradores, como por ejemplo en sistemas de control de nivel en tanques de almacenamiento de líquidos, en sistemas de control de temperatura en cámaras bien aisladas. El común denominador de estos sistemas es la existencia de algún tipo de almacenamiento (en el control de líquidos se almacena masa, en el control de temperatura se almacena energía). Podemos observar



**Figura 2.9:** Distintos tipos de respuestas al escalón (lazo abierto)

que las [Figura 2.9a](#) y [b](#) corresponden a sistemas estables, mientras que las [Figura 2.9c](#) y [d](#) a sistema inestables. Por otro lado, la [Figura 2.9e](#) corresponde a un sistema con un retardo de transporte importante y la [Figura 2.9f](#) es el tipo de respuesta observada en sistemas de fase no mínima (sistemas con ceros con parte real positiva). En estos sistemas, la variable medida se mueve inicialmente en la dirección “equivocada”. El nivel de agua en una caldera frecuentemente reacciona de esta forma luego de un cambio abrupto del flujo de alimentación de agua.

En el caso de sistemas lineales, la respuesta siempre será proporcional a la amplitud del escalón de la señal de entrada. Por este motivo, es conveniente normalizar las respuesta, dividiendo la señal medida por la amplitud del escalón aplicado en la entrada. En el resto de estas notas consideraremos que las repuestas están normalizadas.

La respuesta al escalón resulta útil para caracterizar la dinámica de un proceso debido a su simple interpretación física. Muchos métodos de ajuste de controladores se basan en esta respuesta. También es posible hallar modelos matemáticos formales a partir de la respuesta al escalón. Existe una amplia variedad de métodos para hallar modelos paramétricos a partir de la respuesta al escalón. A continuación veremos algunos métodos para hallar modelos de dos o tres parámetros. La cantidad de parámetros necesarios para describir la dinámica de un proceso depende de su complejidad. En

general, los modelos de dos o tres parámetros son suficientes para diseñar controles para los sistemas comúnmente hallados en el control de procesos.

### Modelos de tres parámetros

Un compromiso razonable entre simplicidad y aproximación lo podemos obtener con un modelo de tres parámetros de la forma

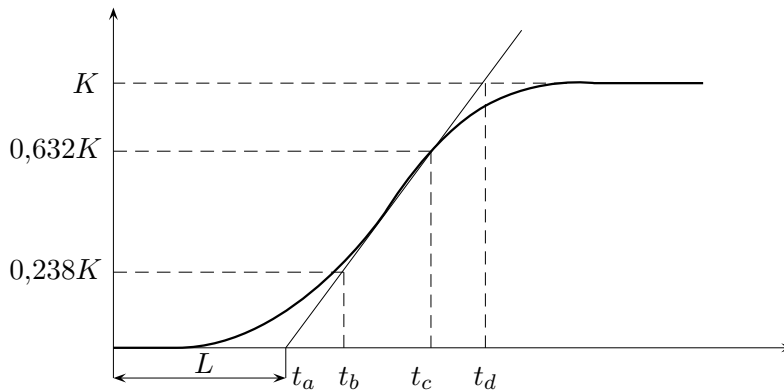
$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-sL} \quad (2.12)$$

donde  $K$  es la ganancia estática,  $T$  es la constante de tiempo y  $L$  es el retardo o demora. Éste es el modelo más comúnmente usado para aproximar procesos que son controlados por medio de controladores PID. Este modelo permite aproximar las respuestas al escalón con forma de S, como la mostrada en la [Figura 2.10](#). La respuesta al escalón de un sistema descrito por la (2.12) es

$$s(t) = K(1 - e^{-(t-L)/T}). \quad (2.13)$$

Los parámetros del modelo (2.12) pueden ser determinados en forma gráfica. La ganancia estática  $K$  la obtenemos del valor final de la salida del proceso. Recordar que la salida del proceso debe estar escala por la amplitud del cambio de la variable manipulada. Para hallar los otros dos parámetros hay varias alternativas. Una de ellas consiste en trazar una recta tangente al punto donde de la respuesta al escalón presenta la mayor pendiente. El valor de la demora  $L$  lo obtenemos de la intersección de esta recta con el eje horizontal. El valor de la constante de tiempo  $T$  lo podemos obtener a partir de la distancia  $t_a - t_c$ , donde  $t_c$  es el tiempo donde la respuesta al escalón es  $0,632K$ . Otro método, un poco más preciso, consiste en determinar los puntos  $t_b$  y  $t_c$  donde  $s(t)$  toma los valores  $0,283K$  y  $0,632K$ , respectivamente. Luego, la demora y la constante de tiempo la hallamos a partir de

$$\begin{aligned} T &= 1,5 \cdot (t_c - t_b), \\ L &= t_c - T. \end{aligned}$$



**Figura 2.10:** Determinación gráfica de los parámetros de un modelo a partir de la respuesta escalón en forma de S



**Ejemplo 2.4:**

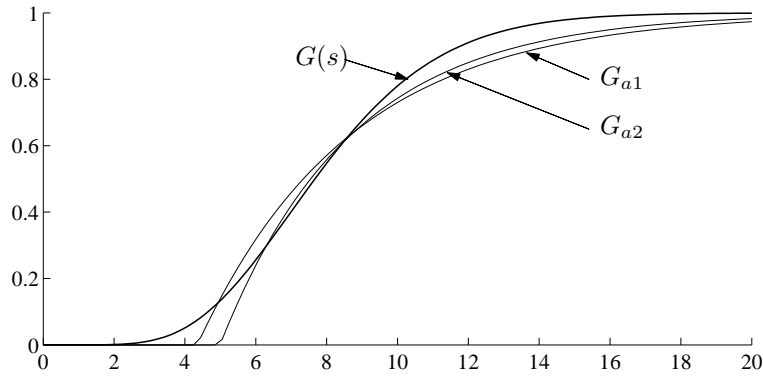
Como ejemplo, ajustemos el modelo de tres parámetros (2.12) a un proceso cuyo comportamiento dinámico es descrito por la transferencia

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^8}. \quad (2.14)$$

Utilizando el primer y segundo método, respectivamente, obtenemos

$$G_{a1}(s) = \frac{1}{4,315s+1}e^{-4,35s}, \quad G_{a2}(s) = \frac{1}{3,96s+1}e^{-4,99s}.$$

En la Figura 2.11 puede observarse las respuestas al escalón de las distintas aproximaciones junto a la de  $G(s)$ .



**Figura 2.11:** Respuesta al escalón del proceso  $G(s)$  y de los modelos aproximados  $G_{a1}(s)$  y  $G_{a2}(s)$

Otro modelo de tres parámetro es

$$G(s) = \frac{K}{(1+sT)^2}e^{-sL}. \quad (2.15)$$

La respuesta al escalón es

$$s(t) = K \left( 1 - \left( 1 - \frac{t-L}{T} \right) e^{-(t-L)/T} \right) \quad (2.16)$$

Este modelo tiene también una respuesta al escalón en forma S y suele lograr una mejor aproximación que el modelo (2.12). La ganancia estática  $K$  y la demora  $L$  pueden ser determinada en la misma manera que para el modelo (2.12). La constante de tiempo se puede determinar de (2.16) si conocemos el valor de la respuesta al escalón en un cierto tiempo. La ecuación debe resolverse en forma numérica.

### Modelos para sistemas con integradores

Existen algunos sistemas de control de proceso donde la dinámica contiene integración o constantes de tiempo muy grandes. Para estos casos, la respuesta a un escalón nunca

alcanza el estado estacionario. Sin embargo, cuando la entrada es un pulso de corta duración el sistema sí alcanza el estado estacionario. Luego, la dinámica la podemos obtener aplicando un impulso al proceso, normalizando la salida respecto del área del pulso y usando los métodos previos para obtener la respuesta al escalón. La transferencia de un sistema con acción integral es obtenida luego multiplicando por  $1/s$ .

### Ejemplo 2.5:

Suponiendo que hemos aplicado un pulso cuadrado de altura unitaria y duración  $\tau$  al proceso y que el modelo

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-sL}$$

ha sido ajustado de acuerdo a los métodos previamente discutidos. La función de transferencia está dada por

$$G(s) = \frac{1}{s\tau} \frac{K}{1 + sT} e^{-sL}$$

Los procesos con acción integral pueden ser descritos por modelos de la forma

$$G(s) = \frac{a}{sL} e^{-sL} \quad (2.17)$$

o

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + sT)} e^{-sL}. \quad (2.18)$$

Este último es caracterizado por tres parámetros: la ganancia de velocidad  $K$ , la constante de tiempo  $T$  y la demora  $L$ . La respuesta al escalón del modelo (2.18) es

$$s(t) = K \left( t - L - T \left( 1 - e^{-(t-L)/L} \right) \right). \quad (2.19)$$

La demora  $L$  y la constante de tiempo  $T$  puede ser determinados ajustando la (2.19) a un punto de la respuesta al escalón. Un punto adecuado es

$$s(L + T) = KTe^{-1}$$

el cual da

$$T = \frac{s(L + T)}{K} e^{-1}.$$

### Modelos para sistemas oscilatorios

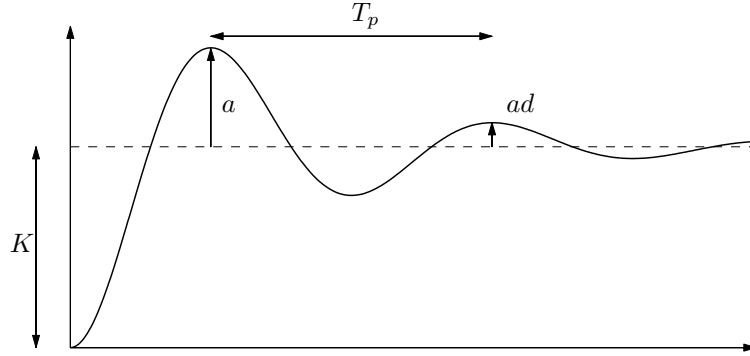
Para sistemas con respuesta al escalón oscilatoria, un modelo de tres parámetros que puede capturar el comportamiento dinámica es

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2.20)$$

Este modelo tiene tres parámetros: la ganancia estática  $K$ , la frecuencia natural  $\omega_n$  y el amortiguamiento relativo  $\xi$ . Estos parámetros pueden obtenerse en forma aproximada

como se indica en la [Figura 2.12](#). El período de la oscilación  $T_p$  y la relación de atenuación  $d$  son determinadas en primer lugar. Los parámetros  $\omega_n$  y  $\xi$  están relacionados con  $T_p$  y  $d$  por medio de las siguientes expresiones

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi/\log d)^2}}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1 - \xi^2}}.$$



**Figura 2.12:** Determinación gráfica del modelo matemático para sistemas con respuesta al escalón oscilatorias

También es posible agregar una demora al modelo (2.20). En este caso, el parámetros  $L$  se determina en forma similar que para los modelos previos.

### 2.3.3 Métodos basados en la respuesta en frecuencia

Otra forma de obtener una descripción del comportamiento del proceso es utilizar la respuesta en frecuencia. Como mencionamos previamente, relevar la respuesta en frecuencia puede resultar muy laborioso. Afortunadamente, para el diseño de controladores PID es suficiente obtener el punto último del diagrama de Nyquist. En esta sección, estudiaremos dos métodos para determinar dicho punto. Ambos están basados en la idea de usar realimentación para generar sinusoides de frecuencias adecuadas.

#### Método de Ziegler–Nichols

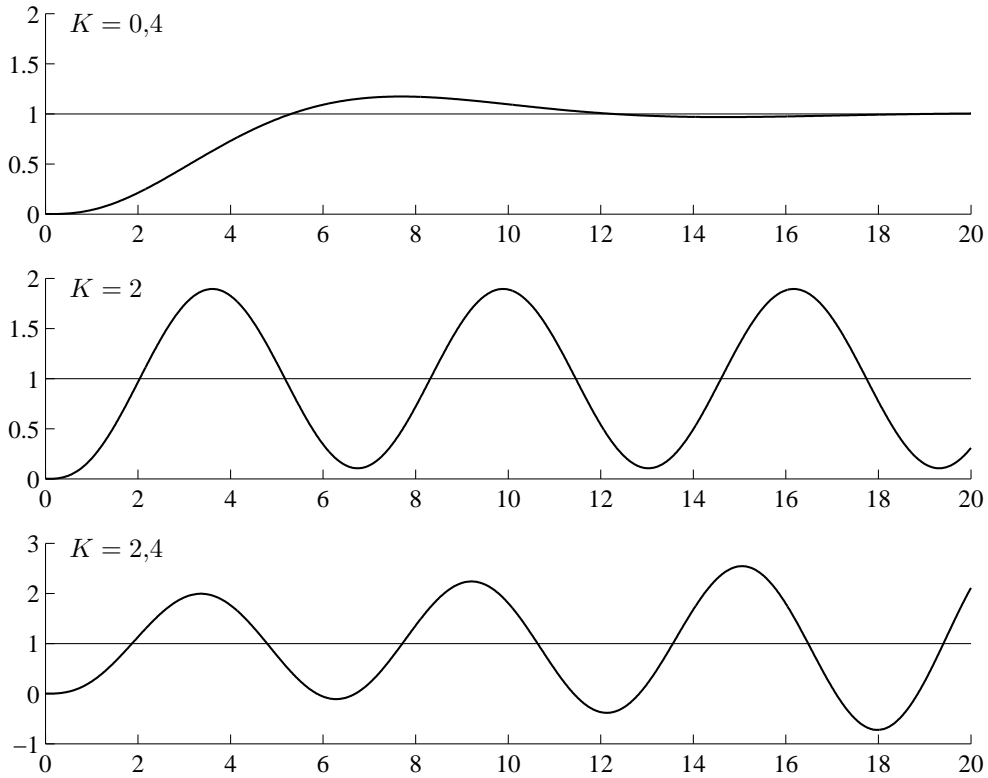
Ziegler y Nichols han propuesto un método para determinar el punto último del diagrama de Nyquist en forma experimental. El método se basa en la observación de que muchos sistemas pueden hacerse inestables bajo realimentación proporcional (ver [Figura 2.13](#)). Suponiendo que la ganancia es ajustada de modo que el sistema esté en el límite de estabilidad. La acción de control y la salida del proceso son sinusoides con desplazamiento de fase de  $-180^\circ$  (ver [Figura 2.14](#)). Debido a la realimentación proporcional ellas están relacionadas por medio de

$$u = -Ky,$$

donde por simplicidad hemos supuesto que  $r = 0$ .

Ya que la ganancia total del lazo debe ser  $-1$  para mantener la oscilación, tenemos que

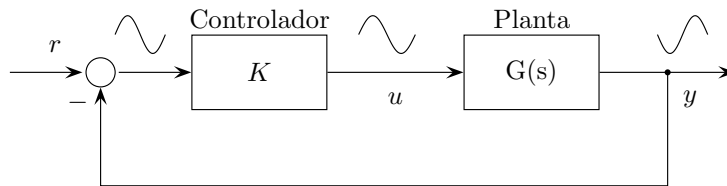
$$K_u G(j\omega_u) = -1$$



**Figura 2.13:** Salida del proceso  $y$  a lazo cerrado con realimentación proporcional. La figura corresponde a tres valores de ganancia  $K$  (el setpoint es 1)

donde la ganancia  $K_u$ , la cual lleva al sistema al límite de estabilidad, la llamaremos **ganancia última**. De la ecuación previa tenemos que

$$G(j\omega_u) = -\frac{1}{K_u}.$$

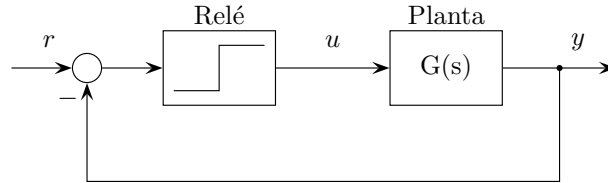


**Figura 2.14:** Diagrama en bloque de un sistema de lazo cerrado con realimentación proporcional

El método de la respuesta en frecuencia de Ziegler–Nichols tiene algunas ventajas. Está basado en un experimento simple y el proceso mismo es utilizado para hallar la frecuencia última. Sin embargo, es difícil automatizar el experimento o lograr que la amplitud de la oscilación se mantenga bajo control. Además, operar un proceso cerca de la inestabilidad es peligroso en plantas industriales. Por este motivo, han sido propuestos otros métodos que evitan estos inconvenientes y que serán presentados en la siguiente subsección.

### Método del relé

Un método alternativo para determinar los puntos de interés del diagrama de Nyquist se basa en la oscilación que puede ser generada por una realimentación con relé. El sistema es conectado como se indica en la [Figura 2.15](#). Para muchos sistemas habrá una oscilación (como muestra la [Figura 2.16](#)) donde la acción de control es una onda cuadrada y la salida del proceso es un senoide. Notar que la entrada y la salida del proceso tienen fases opuestas.

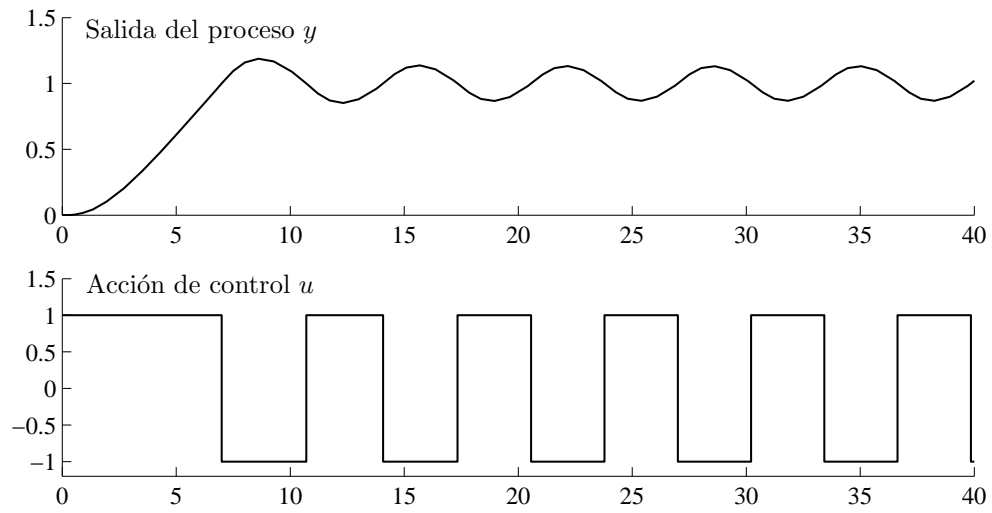


**Figura 2.15:** Diagrama en bloque de un sistema de lazo cerrado con realimentación con relé

Para entender como funciona el sistema, supongamos que la salida del relé se descompone en serie de Fourier y que el proceso atenúa los armónicos de alta frecuencia en forma eficiente. Entonces es suficiente considerar sólo el primer armónico de la entrada. Como la entrada y la salida del proceso tiene fases opuestas, la frecuencia tiene que ser la frecuencia última. Si  $d$  es la amplitud del relé, el primer armónico de la onda cuadrada es  $4d/\pi$ . Si  $a$  es la amplitud de la oscilación de la salida del proceso, entonces

$$G(j\omega_u) = -\frac{\pi a}{4d}.$$

Podemos notar que el experimento del relé es fácilmente automatizable. Ya que la amplitud es proporcional a la salida del relé y es fácil controlar la amplitud de la oscilación. También podemos observar que la oscilación se establece rápidamente.



**Figura 2.16:** Salida del proceso  $y$  a lazo cerrado con realimentación con relé.

# 3

## Control PID

### 3.1 Introducción

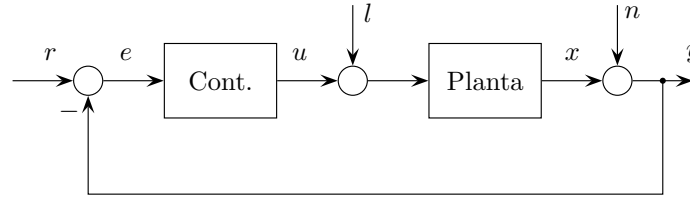
Si bien en la actualidad existe una gran variedad de herramientas de control muchos más poderosas, los controladores PID son sin dudas los más comúnmente utilizados en aplicaciones industriales. En este capítulo, estudiaremos los aspectos más relevantes del control PID. Analizaremos, en forma intuitiva, los efectos de los controladores sobre los sistemas de lazo cerrado. Veremos, además, las distintas alternativas de implementación de los algoritmos PID y las ventajas de cada una. También trataremos el problema de windup que ocurre como consecuencia de la saturación del actuador y presentaremos algunas opciones para atenuar sus efectos negativos. Finalmente, discutiremos la implementación digital de los controladores PID.

### 3.2 Principio de realimentación

Como ya hemos mencionado, el concepto de realimentación permite diseñar sistemas de control con la capacidad de reducir los efectos de las perturbaciones y la sensibilidad a los errores de modelado.

La [Figura 3.1](#) presenta un diagrama en bloques general de un sistema de control por realimentación. La variable controlada es  $y$ , el setpoint o referencia es  $r$  y la acción de control es  $u$ . También hemos incluido algunas de las perturbaciones comúnmente presentes en los lazos de realimentación, esto es una perturbación en la entrada de la planta  $l$  y el ruido o error en la medición de la salida de la planta  $n$ . Notemos que la salida real de la planta es  $x$ , distinta a la variable controlada  $y$  como consecuencia del error de medición. Esto pone en evidencia la importancia del sensor en un lazo de realimentación. Tengamos en cuenta que por más efectivo que sea el lazo de realimentación, la variable controlada es  $y = x + n$ . Otra variable importante es el error  $e$  formada al comparar la

referencia con la variable controlada ( $e = r - y$ ), la cual es la entrada al controlador.



**Figura 3.1:** Diagrama en bloques de un sistema realimentado

La función del lazo de realimentación es hacer que la variable controlada  $y$  se asemeje a la referencia o setpoint  $r$  a pesar de las perturbaciones. Para comprender el principio de realimentación, consideremos una situación donde el sistema se encuentra en reposo e ingresa una perturbación en la entrada de la planta. Si suponemos, por ejemplo, que la salida  $x$  se incrementa con dicha perturbación, entonces la variable controlada superará el valor de la referencia dando un error positivo. Esta señal hace que el controlador modifique la acción de control de manera tal que el valor de la salida de proceso vuelva a su condición de equilibrio. Este tipo de realimentación se denomina **realimentación negativa** porque la acción de control se mueve en la dirección opuesta a la variable controlada. En el diagrama en bloques de la [Figura 3.1](#), el signo negativo en el nodo sumador denota que el lazo opera por realimentación negativa.

Existen un gran número de alternativas para implementar el principio de realimentación. En este curso nos concentraremos en la estrategias del proporcional-integral-derivativo. Previo a discutir este tipo de estrategia de control, estudiaremos dos de las alternativa más simples de control por realimentación.

### 3.2.1 Control ON-OFF

El principio de realimentación puede implementarse de muchas maneras. Una forma simple de implementarlo puede ser descrita matemáticamente como

$$u = \begin{cases} u_{\text{máx}}, & \text{si } e > 0 \\ u_{\text{mín}}, & \text{si } e < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

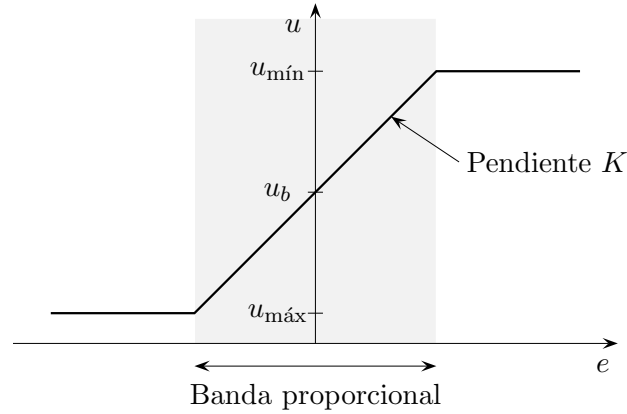
Esta ley control implica que siempre es utilizada la máxima acción correctiva. La acción de control toma el valor máximo cuando el error es positivo y el valor mínimo cuando el error es negativo. Este tipo de realimentación es llamado **control on-off**. Es simple y no hay parámetros para elegir. En general, el control on-off es útil para mantener la variable controlada cerca del setpoint pero típicamente resulta en un sistema donde la variable controlada oscila en torno al setpoint (recordar el ejemplo de control de temperatura presentado en el [Capítulo 1](#)).

### 3.2.2 Control proporcional

La razón por la cual un control on-off da lugar a oscilaciones en la variable controlada es que el controlador sobreactúa. Ante pequeños cambios en el error, el controlador aplica la máxima acción de control. Este efecto puede ser evitado con el **control proporcional**, donde la acción de control es proporcional al error (cuando éste es pequeño).



La característica de un controlador proporcional se muestra en la [Figura 3.2](#). Como podemos observar, el controlador es caracterizado por una función no lineal  $u = f_c(e)$ .



**Figura 3.2:** Característica de un controlador proporcional. La entrada es el error  $e$  y la salida es la variable manipulada  $u$ .

Para describir la característica de un controlador proporcional debemos dar los valores límites de la acción de control  $u_{\text{mín}}$  y  $u_{\text{máx}}$ . El rango lineal se especifica por la pendiente (**ganancia**  $K$ ) o por el rango donde la característica es lineal (**banda proporcional**  $P_b$ ). Habitualmente, este rango es centrado alrededor del setpoint. La banda proporcional y la ganancia están relacionadas por medio de

$$u_{\text{máx}} - u_{\text{mín}} = KP_b(e_{\text{máx}} - e_{\text{mín}}) \quad (3.2)$$

Normalmente, se toma  $KP_b = 100\%$  por tanto

$$K = \frac{100}{P_b}. \quad (3.3)$$

Podemos notar que un controlador proporcional se comporta como uno on-off, cuando el error toma valores grandes.

Habitualmente los controladores comerciales también cuentan con un selector para cambiar el signo de la ganancia  $K$ . Esto sirve para lograr realimentación negativa aun cuando la planta presenta ganancia negativa. Recordemos que definimos como planta al sistema formado por el actuador y el proceso. Es común, que los actuadores presente ganancia negativa. Un ejemplo típico es una válvula que se cierra ante un incremento de su señal de entrada, lo cual reduce el caudal que ingresa al proceso. En general, en los controladores el cambio de signo se indica como acción directa o acción inversa. Cuando  $K > 0$  se dice que el controlador es de **acción directa**. En este caso, si se produce un incremento positivo de la variable controlada, el controlador responde con un incremento negativo de la variable de control para contrarrestarlo. Cuando  $K < 0$  se dice que el controlador es de **acción inversa**. En este caso, si se produce un incremento positivo de la variable controlada, el controlador responde con un incremento positivo de la variable de control.

Utilizando la característica estática de la planta, podemos cuantificar una de los parámetros importantes a la hora de evaluar la eficacia de un control, el error de estado estacionario  $e_{ss}$ . Este parámetro se define como la diferencia entre el valor de setpoint y el valor final de la variable controlada.

Supongamos que el controlador es proporcional y su característica es

$$u = f_c(r - y). \quad (3.4)$$

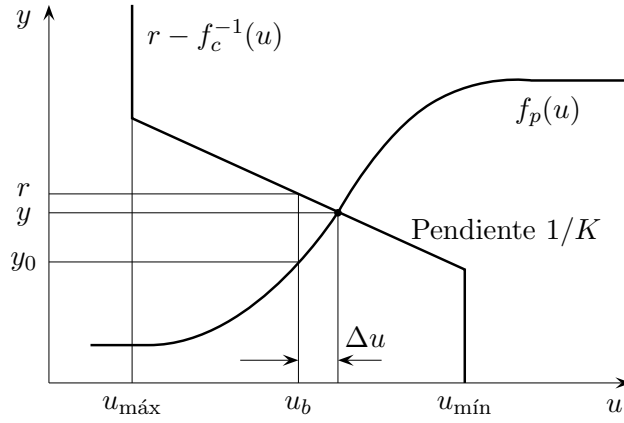
Introduciendo la característica inversa del controlador  $f_c^{-1}$ , esto puede ser escrito como

$$r - y = f_c^{-1}(u). \quad (3.5)$$

Si la característica estática de la planta es  $y = f_p(u)$  encontramos que el valor final o, valor de equilibrio,  $u$  debe satisfacer la ecuación

$$r - f_p(u) = f_c^{-1}(u). \quad (3.6)$$

Esta ecuación puede resolverse gráficamente buscando la intersección entre las curvas de las funciones  $f_p(u)$  y  $f_c^{-1}(u)$  (ver Figura 3.3). La intersección es única si la característica estática de la planta es monótona. El valor final de la variable controlada corresponde a la coordenada del punto de intersección  $y$ .



**Figura 3.3:** Determinación del punto de equilibrio a partir de las características estáticas de la planta y del controlador.

En la Figura 3.3, podemos observar que el equilibrio está fuertemente influenciado por el setpoint  $r$  y la ganancia del controlador. El equilibrio coincide con el setpoint sólo si

$$r = y_0 \triangleq f_p(u_b). \quad (3.7)$$

En este caso, el error de estado estacionario será nulo. Para cualquier otro valor de setpoint tendremos una diferencia entre  $r$  y  $y_0$ . Si aproximamos la característica estática de la planta por una línea con pendiente  $K_p$  y la ganancia del controlador es  $K$ , podemos calcular fácilmente la desviación. Definiendo el parámetro  $\Delta u$  como se indica en la Figura 3.3, tenemos que

$$r - y_0 = \left( K_p + \frac{1}{K} \right) \Delta u$$

y

$$r - y = \frac{1}{K} \Delta u.$$

Esto implica que el error de estado estacionario está dado por

$$e_{ss} = r - y = \frac{1}{1 + K_p K} (r - y_0). \quad (3.8)$$

La desviación será menor en la medida que la ganancia de lazo  $K_p K$  sea mayor.

### 3.3 Control PID

Hemos visto en la sección previa que el control proporcional tiene la desventaja de presentar cierto error de estado estacionario. En general, los controladores utilizados en la práctica son más complejos. Empíricamente se ha encontrado que los llamados **controladores proporcional–integral–derivativo** (PID) resulta una estructura muy versátil. Dentro de la banda proporcional, el comportamiento de libro de texto del algoritmo PID puede ser descrito como

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.9)$$

donde  $u$  es la variable de control y  $e$  es el error ( $e = r - y$ ). La variable de control resulta, por tanto, de la suma de tres términos:

- el **término proporcional** (P) al error,
- el **término integral** (I) proporcional a la integral del error
- y el **término derivativo** (D) proporcional a la derivada del error.

Los parámetros del controlador son

- la **ganancia proporcional**  $K$ ,
- el **tiempo integral**  $T_i$
- y el **tiempo derivativo**  $T_d$ .

#### 3.3.1 Acción proporcional

En el caso de control puramente proporcional, la ecuación (3.9) se reduce a

$$u(t) = K e(t) + u_b, \quad (3.10)$$

es decir la acción de control es simplemente proporcional al error. La variable  $u_b$  es un término de bias o de reset. Cuando el error  $e$  es cero, la variable manipulada es  $u(t) = u_b$ . Habitualmente, el valor  $u_b$  es ajustado a  $(u_{\text{máx}} + u_{\text{mín}})/2$  pero a veces puede ser ajustado de forma tal que el error de estado estacionario sea cero en un dado valor de setpoint.

Un simple análisis estático revela ciertas características del control proporcional. Consideremos el sistema realimentado mostrado en la [Figura 3.1](#) compuesto por la planta y el controlador. El controlador es proporcional con ganancia  $K$  y la planta es modelada por una ganancia estática  $K_p$ , es decir,

$$x = K_p(u + l). \quad (3.11)$$

A partir del diagrama en bloques podemos llegar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= x + n, \\ x &= K_p(u + l), \\ u &= K(r - y) + u_b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Luego de unos pasos matemáticos para eliminar las variables intermedias obtenemos las relaciones entre la salida de la planta  $x$ , el setpoint  $r$ , la perturbación  $l$  y el ruido de medición  $n$ ,

$$x = \frac{KK_p}{1 + KK_p}(r - n) + \frac{K_p}{1 + KK_p}(l + u_b). \quad (3.13)$$

El producto  $KK_p$  se lo llama **ganancia del lazo**. La ecuación (3.13) nos permite ver algunas propiedades interesantes de este lazo de control. Primero, si suponemos que  $n$  y  $l$  son cero, entonces la ganancia del lazo debería ser grande para asegurar que la salida de la planta sea cercana al setpoint. Un valor alto de  $KK_p$  también hace que el sistema se vuelva insensible a la perturbación  $l$ . Sin embargo, cuando  $n$  es distinto de cero, la (3.13) muestra también que el ruido de medición afecta la salida  $x$  en forma similar a como lo hace la referencia. Por tanto, para evitar que el sistema sea insensible al ruido de medición es necesario que la ganancia del lazo no sea demasiado grande. Además, el término  $u_b$  también afecta al sistema en forma similar a la perturbación  $l$ . En resumen, el diseño de un lazo de control requiere un cierto compromiso entre los distintos objetivos de control y no existe una única respuesta respecto de cual es el mejor valor de ganancia del lazo. El valor estará dado en función de cual de los objetivos es el más importante.

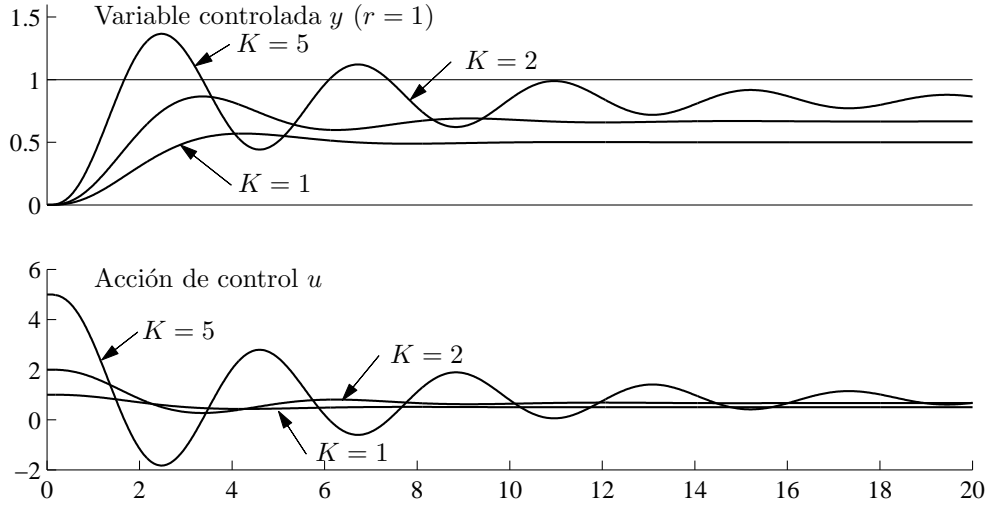
Otra conclusión que podemos deducir de la ecuación (3.13) es que siempre habrá cierto error de estado estacionario cuando se utiliza sólo acción proporcional. Intuitivamente, podemos ver en la (3.12) que el error será cero sólo cuando  $u = u_b$  en estado estacionario. Por tanto, es posible anular el error de estado estacionario con un adecuado ajuste del valor de  $u_b$ , pero debemos tener en cuenta que este ajuste sólo servirá para un valor particular de setpoint.

En el análisis previo nos hemos basado en que el sistema se describe sobre un modelo estático, pero esto no captura todas las características del sistema de lazo cerrado. La más importante es que, en general, los sistemas de lazo cerrado son inestables para valores altos de ganancia del lazo cuando se considera la dinámica de la planta. Precisamente, en la práctica, la máxima ganancia del lazo se determina por la dinámica de la planta. Una manera de tener en cuenta la dinámica de la planta es usar una ecuación como la (3.13) pero dependiente de la frecuencia.

La Figura 3.4 ilustra las respuestas típicamente halladas en sistemas de lazo cerrado con control proporcional. La figura muestra el comportamiento de la variable controlada y de la acción de control luego de un cambio del tipo escalón en el setpoint. Los errores de estado estacionarios pueden ser calculados a partir de la (3.13). El término de bias  $u_b$ , la perturbación  $l$  y el error de medición  $n$  se consideraron nulos en las simulaciones. Con una ganancia del controlador  $K = 1$  y una ganancia estática de la planta de  $K_p = 1$ , el error es del 50%. La figura muestra que el error de estado estacionario disminuye cuando se incrementa la ganancia del controlador, según lo predice la (3.13). También podemos notar que la respuesta se vuelve más oscilatoria en la medida que se incrementa la ganancia del controlador. Esto es consecuencia de la dinámica de la planta.

En resumen, cuando se incrementa  $K$

- el error de estado estacionario se reduce,
- la respuesta es más rápida,
- el sobrepaso y las oscilaciones aumentan.



**Figura 3.4:** Simulación de un sistema de lazo cerrado con control proporcional. La función de transferencia de la planta es  $G(s) = 1/(s + 1)^3$ .

### 3.3.2 Acción integral

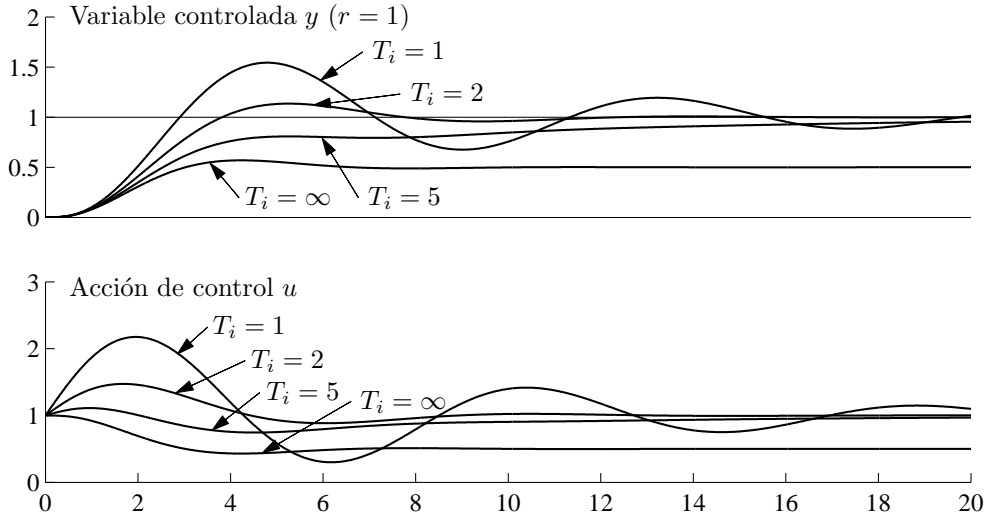
La principal función de la acción integral es hacer que la variable controlada coincida con el valor deseado en estado estacionario, es decir, anular el error de estado estacionario. Como vimos al usar control proporcional normalmente tendremos un cierto error en estado estacionario. En cambio, con acción integral un pequeño error positivo siempre dará como resultado una acción de control creciente y un error negativo dará una acción decreciente sin importar que tan pequeño sea el error. Por tanto, el error en estado estacionario debe ser cero.

Otro argumento intuitivo para probar que el error de estado estacionario siempre será cero con acción integral es el siguiente argumento. Supongamos que el sistema está en estado estacionario con acción de control constante  $u_0$  y error constante  $e_0$ . De la ecuación (3.9) tenemos que la señal de control será

$$u_0 = K \left( e_0 + \frac{e_0}{T_i} t \right)$$

Mientras que  $e_0 \neq 0$ , es claro que se contradice la suposición de que la señal de control es constante. Luego, un controlador con acción integral siempre obtiene un error de estado estacionario nulo.

En la [Figura 3.5](#) podemos observar comportamientos típicos de un sistema de lazo cerrado con acción integral. El controlador utilizado para las simulaciones es del tipo PI. Las curvas corresponden a distintos valores de tiempo integral  $T_i$ , la ganancia proporcional se mantiene constante en  $K = 1$ . En el caso  $T_i = \infty$ , el control es puramente proporcional, y coincide con el caso  $K = 1$  de la [Figura 3.4](#) donde el error de estado estacionario es del 50 %. Claramente podemos ver que para valores finitos del tiempo integral el error de estado estacionario se hace cero. También podemos ver que para valores grandes de  $T_i$ , la variable controlada crece lentamente hacia el setpoint. Por el contrario, la aproximación se hace más rápida en la medida que reducimos el tiempo integral  $T_i$ , pero también se vuelve más oscilatoria. En general, la acción integral si bien anula el error de estado estacionario también tiene un efecto desestabilizador.



**Figura 3.5:** Simulación de un sistema de lazo cerrado con un controlador PI para distintos valores de tiempo integral ( $K = 1$ ). La función de transferencia de la planta es  $G(s) = 1/(s + 1)^3$ .

En resumen, cuando introducimos acción integral

- el error de estado estacionario se anula para valores finito de  $T_i$ ,
- en la medida que reducimos  $T_i$  la respuesta se vuelve más rápida pero también más oscilatoria, inclusive podemos hacer que el sistema de lazo cerrado se vuelva inestable.

### 3.3.3 Acción derivativa

El propósito de la acción derivativa es mejorar la estabilidad del sistema de lazo cerrado. El mecanismo de inestabilidad se puede entender intuitivamente en la siguiente manera. Debido a la dinámica de la planta, tomará cierto tiempo antes de que el cambio en la variable de control se manifieste en forma apreciable en la variable de la planta. Como consecuencia, el controlador estará atrasado en la corrección del error.

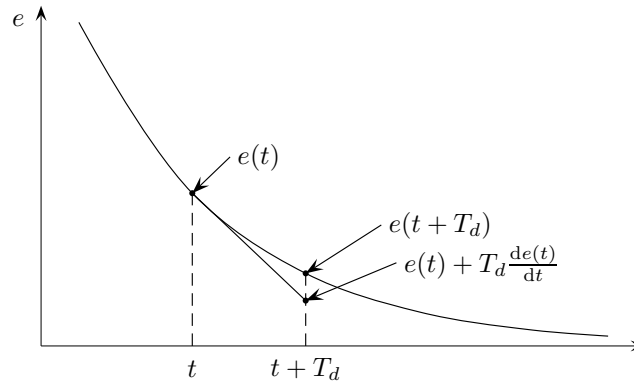
La variable manipulada en un controlador con acción proporcional y derivativa puede interpretarse como si el control fuese proporcional a una predicción de la salida de la planta. En este caso, la predicción de la salida se hace extrapolando el error por medio de la tangente a la curva del error. Teniendo en cuenta que la estructura básica de un control PD es

$$u(t) = K \left( e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.14)$$

y que la expansión en serie de Taylor de  $e(t + T_d)$  es

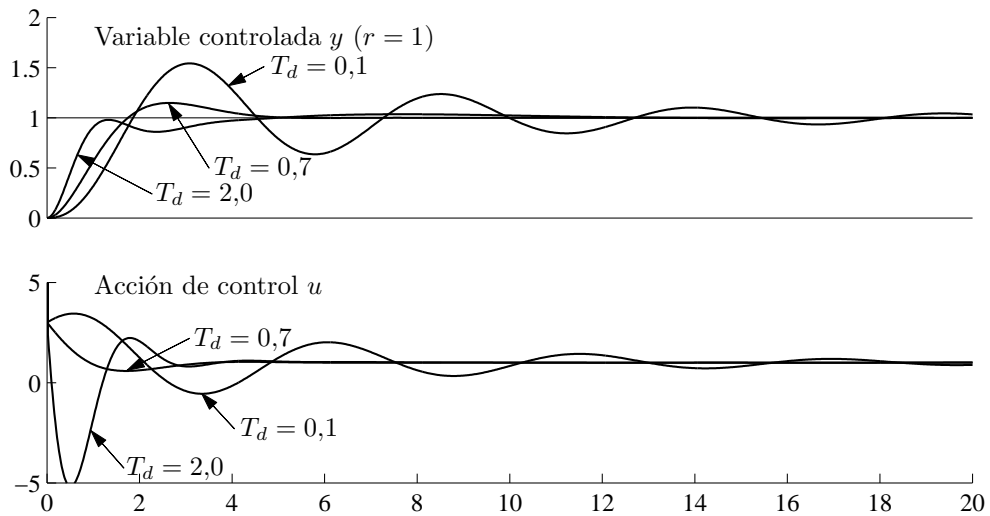
$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}.$$

Claramente, la señal de control es una estimación del error en el tiempo  $T_d$  hacia adelante, donde la estimación se obtiene por extrapolación lineal (ver [Figura 3.6](#)).



**Figura 3.6:** Interpretación de la acción derivativa como control predictivo, donde la predicción es obtenida por extrapolación.

Las propiedades de la acción derivativa se muestran en la [Figura 3.7](#), en donde se presentan simulaciones correspondientes a un sistema de lazo cerrado con un controlador PID. La ganancia y el tiempo integral se mantienen constantes en  $K = 3$  y  $T_i = 2$  y el tiempo derivativo es modificado. Para  $T_d = 0$  tenemos un control puramente PI y con esta elección de los parámetros del controlador la respuesta es oscilatoria. En la medida que incrementamos el tiempo derivativo  $T_d$  el sistema se vuelve menos oscilatorio (o más amortiguado). Esto es, cuando aumentamos  $T_d$  el sistema se vuelve más rápido y más estable. Sin embargo, esto es válido hasta cierto punto y si las señales no están contaminadas con ruido. Si aumentamos  $T_d$  por encima de un determinado valor la estabilidad del sistema comenzará a empeorar. Como ya hemos mencionado, la función de la acción derivativa es estimar el cambio del error en  $T_d$  unidades de tiempo hacia adelante, cuando  $T_d$  es grande esta estimación es mala.



**Figura 3.7:** Simulaciones de un sistema de lazo cerrado con control PID para distintos valores de tiempo derivativo ( $K = 3$ ,  $T_i = 2$ ). La función de transferencia de la planta es  $G(s) = 1/(s + 1)^3$ .

### 3.3.4 Resumen

El control PID tiene tres términos. El término P que es proporcional al error. El término integral I da una acción de control que es proporcional a la integral temporal del error. Esto asegura que el error de estado estacionario resulte cero. El término derivativo D es proporcional a la derivada temporal del error. Este término permite predecir el error futuro y mejorar las condiciones de estabilidad. En la [Tabla 3.1](#), se resumen los cambios que pueden observarse en la respuesta del sistema de lazo cerrado cuando cambiamos los parámetros del controlador. Estas son algunas reglas empíricas y por tanto hay excepciones.

**Tabla 3.1:** Reglas empíricas respecto a como los parámetros del controlador afectan a la respuesta del sistema a lazo cerrado

	$K$ aumenta	$T_i$ disminuye	$T_d$ aumenta
<b>Estabilidad</b>	disminuye	disminuye	aumenta
<b>Velocidad de respuesta</b>	aumenta	aumenta	aumenta
<b>Error de estado estacionario</b>	disminuye	eliminado	no cambia
<b>Acción de control</b>	aumenta bruscamente	aumenta gradualmente	aumenta muy bruscamente

Para ajustar los parámetros del controlador en forma manual puede seguirse el siguiente procedimiento.

1. Anular las acciones integral ( $T_i = \infty$ ) y derivativa ( $T_d = 0$ ) y ajustar la acción proporcional hasta obtener la respuesta deseada.
2. Ir reduciendo el tiempo integral  $T_i$  hasta un valor apropiado. Al reducir el tiempo integral estamos reduciendo la estabilidad, por lo cual deberemos reducir la ganancia  $K$ . Cuando el controlador PI da una respuesta satisfactoria podemos comenzar a ajustar el tiempo derivativo.
3. Ir aumentando el tiempo derivativo  $T_d$  hasta un valor apropiado. Esto mejorará la estabilidad lo cual nos permite incrementar la ganancia del control  $K$  y reducir el tiempo integral  $T_i$ .

En general, este procedimiento resulta poco práctico y es más habitual utilizar otros métodos más efectivos basados en ciertas características de la planta que veremos en el capítulo siguiente. No obstante, conviene tener presente este procedimiento para realizar ajustes finos de los parámetros luego de haber aplicados los procedimientos dados en el próximo capítulo.



## 3.4 Elección del tipo de controlador

Ahora que hemos estudiado las distintas de acciones de control, veamos cuando es aconsejable desactivar alguna de ellas.

**Controlador P.** En ciertos tipos de procesos es posible trabajar con alta ganancia sin tener problemas de estabilidad. Los procesos que tengan una constante de tiempo dominante o son integradores puros son candidatos para ser controlados únicamente con acción integral. Si el proceso tolera alta ganancia sin comprometer la estabilidad, podremos lograr que el error sea pequeño sin necesidad de incorporar acción integral. Por otro lado, en los casos de procesos integradores la acción integral ya está incluida por lo cual lograremos que el error de estado estacionario sea nulo simplemente con acción proporcional.

**Controlador PD.** Los procesos térmicos con buen aislamiento operan en forma similar a un integrador. En este tipo de proceso es posible aplicar una elevada ganancia para lograr un error pequeño sin comprometer la estabilidad. Sin embargo, estos procesos además de actuar como integradores tienen una dinámica difícil de controlar relativa a como el calor se propaga dentro de la materia. Esto implica que, en general, sea necesaria incluir acción derivativa. La función de la acción derivativa es permitir detener a tiempo la entrada de energía. Los controles PD son muy sensibles a los ruidos ya que presentan elevada ganancia en alta frecuencia. Por este motivo, los controladores PD solo pueden utilizarse en aplicaciones donde las variables son medidas con poco ruido, como los procesos térmicos.

**Controlador PI.** El controlador PI es la opción más común en aplicaciones que requieren eliminar el error de estado estacionario. Si no se imponen especificaciones muy severas respecto de la velocidad de respuesta, es posible lograr un comportamiento aceptable sin acción derivativa. En general, un controlador PI será adecuado para plantas con dinámica esencialmente de primer orden, esto es, sistemas con una constante de tiempo dominante o incluso con integradores puros. Otro caso donde es recomendable el uso de controladores PI es en plantas con demoras moderadas. Si bien en estas plantas es bueno poder predecir el comportamiento del error, la acción derivativa no logra una buena predicción. Si la demora es importante lo mejor es utilizar esquemas como el predictor de Smith.

**Controlador PID.** La incorporación de acción derivativa suele mejorar el comportamiento del sistema de lazo cerrado, ya que permite incrementar las acciones proporcional e integral. Los controladores PID resultan útiles para sistemas con desfases importantes pero con retardos moderados. Por lo general, los controladores PID logran buenos resultados en sistemas de segundo orden. Un caso típico donde la incorporación de acción derivativa resulta beneficiosa son casos donde las constantes de tiempo difieren en magnitud. Otra situación en donde resulta útil la acción derivativa es en plantas de órdenes elevados. En estos casos la incorporación de acción derivativa permite incrementar la ganancia sin comprometer la estabilidad, lo cual se traduce en una respuesta más rápida.

### 3.5 Algoritmos PID modificados

El algoritmo PID dado por la ecuación (3.9) no es frecuente en la práctica pues existen variantes que permiten obtener una mejor performance. Estas variantes son analizadas en esta sección.

#### 3.5.1 Representaciones alternativas

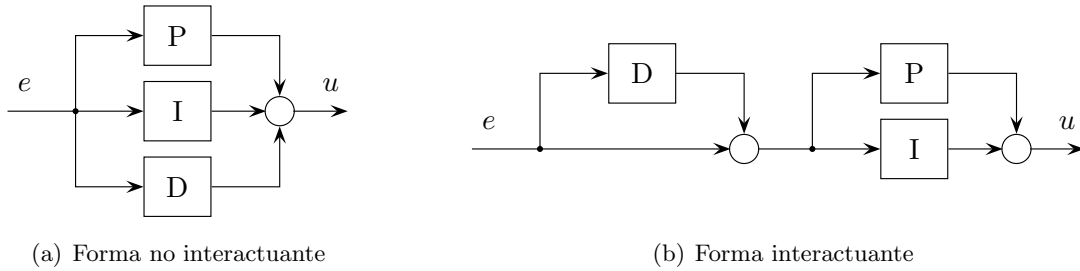
El algoritmo dado por la (3.9) puede ser representado por la función de transferencia

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right). \quad (3.15)$$

En implementaciones comerciales es más común una versión levemente diferente, la cual tiene una transferencia de la forma

$$G'(s) = K' \left( 1 + \frac{1}{sT'_i} \right) (1 + sT'_d). \quad (3.16)$$

Las dos estructura de controladores se muestran en diagramas en bloques en la Figura 3.8. El controlador dado por la (3.15) es llamado no interactuante y el dado por la (3.16) es llamado interactuante. El motivo de esta nomenclatura es que en la forma (3.15) el tiempo integral  $T_i$  no afecta a la parte derivativa y el tiempo derivativo  $T_d$  no afecta a la parte integral. Por tanto, los términos son no interactuantes. Por el contrario, en la forma (3.16) el tiempo derivativo  $T'_d$  afecta el término integral y por esto es denominado interactuante.



**Figura 3.8:** Formas interactuante y no interactuante del algoritmo PID

Un controlador interactuante (3.16) siempre puede expresarse en la forma no interactuante (3.15), cuyos parámetros están dados por

$$\begin{aligned} K &= K' \frac{T'_i + T'_d}{T'_i}, \\ T_i &= T'_i + T'_d, \\ T_d &= \frac{T'_i T'_d}{T'_i + T'_d}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Un controlador interactuante puede llevarse a la forma no interactuante sólo si  $T_i \geq 4T_d$ .

En este caso,

$$\begin{aligned} K' &= \frac{K}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right), \\ T_i' &= \frac{T_i}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right), \\ T_d' &= \frac{T_i}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

La forma no interactuante es más general y será utilizada en adelante, sin embargo, debe notarse que la forma interactuante es más fácil de sintonizar en forma manual.

Es importante tener en mente que distintos controladores pueden tener distintas estructuras. Esto significa que si reemplazamos un controlador en un dado lazo, puede ser necesario cambiar los parámetros. Notar que los controladores interactuantes y no interactuantes difieren sólo si se utilizan tanto la parte integral como la derivativa. Cuando el algoritmo se utiliza en la forma P, PI, PD ambas formas son equivalentes.

Una tercera representación es

$$G'''(s) = k + \frac{k_i}{s} + sk_d \quad (3.19)$$

Los parámetros se relacionan con la forma estándar por

$$\begin{aligned} k &= K, \\ k_i &= \frac{K}{T_i}, \\ k_d &= KT_d. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La representación (3.19) es equivalente a la forma estándar pero los parámetros son levemente diferentes y puede traer grandes dificultades si no se tiene en cuenta estas diferencias. Especialmente, si el parámetro  $1/k_i$  es llamado tiempo integral y  $k_d$  tiempo derivativo. Esta forma es preferida en cálculos analíticos pues los parámetros aparecen en forma lineal. También tienen la ventaja de permitir obtener acción puramente proporcional, integral o derivativa con valores finitos de los parámetros.

### 3.5.2 Algoritmos PID de dos grados de libertad

En la [Figura 3.1](#), el controlador calcula la acción control en función de la diferencia entre la salida de la planta y el valor deseado. Una esquema más flexible se obtiene cuando se trata en forma separada el valor deseado y la salida de la planta. Un controlador PID de este tipo está dado por

$$u(t) = K \left( e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de_d(t)}{dt} \right) \quad (3.21)$$

donde el error en la parte proporcional es

$$e_p(t) = br(t) - y(t)$$

y el error en la parte derivativa es

$$e_d(t) = cr(t) - y(t).$$

**Tabla 3.2:** Resumen de las variantes del algoritmo PID

Algoritmo	Comentarios
Estándar o no interactuante $G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right)$	Las acciones P, I y D no interactúan en el dominio temporal. Admite ceros complejos lo cual es útil para el control de sistemas oscilatorio.
Interactuante, serie o clásica $G'(s) = K' \left( 1 + \frac{1}{sT'_i} \right) (1 + sT'_d)$	Es la forma más comúnmente usada por cuestiones de implementación. También tiene una interpretación atractiva en el dominio de la frecuencia. Las inversas de los parámetros $T'_i$ y $T'_d$ son los ceros del controlador. Solo puede implementarse ceros reales.
Forma paralela $G''(s) = k + \frac{k_i}{s} + sk_d$	Es posible obtener acción puramente proporcional e integral con valores finitos de los parámetros. El controlador puede tener ceros complejos. No obstante, los parámetros tienen poca interpretación física.

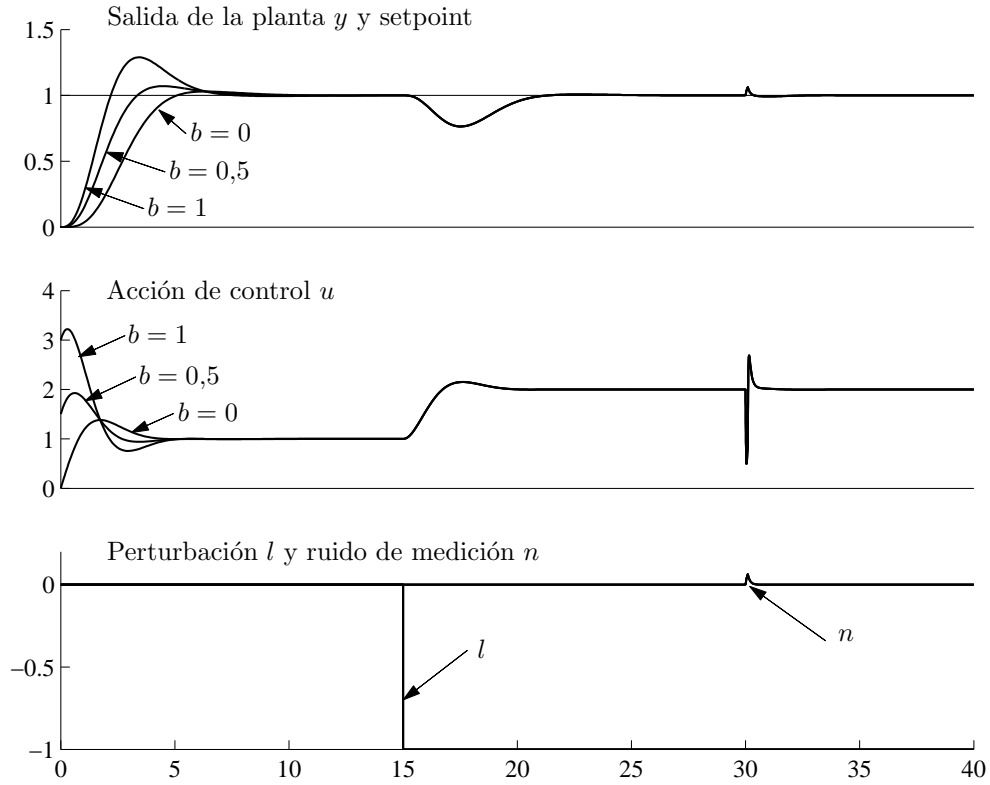
El error en la parte integral debe ser

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

para asegurarse que el error de estado estacionario sea nulo. El controlador obtenido con diferentes valores de  $b$  y  $c$  responderán en forma similar a los cambios en la perturbación y en el ruido de medición. En cambio, la respuesta a cambios en el setpoint dependerá de los valores de  $b$  y  $c$ . Esto se ilustra en la [Figura 3.9](#), la cual muestra la respuesta de un sistema a lazo cerrado con un controlador PID a cambios en el setpoint, en la perturbación y en el error de medición para diferentes valores de  $b$ . La figura muestra claramente los efectos de cambiar el parámetro  $b$ . El sobrepaso es mínimo cuando  $b = 0$  (el caso donde referencia solo entra en la parte integral) y se incrementa cuando se incrementa  $b$ . También podemos observar que las respuestas del sistema a los cambios en la perturbación  $l$  y en el ruido de medición  $n$  son iguales para todos los valores de  $b$ .

Normalmente, el parámetro  $c$  se elige igual a cero para evitar los grandes transitorios en la señal de control debidos a los cambios abruptos en el setpoint. Excepto cuando se sabe que el setpoint cambia lentamente, como en los casos donde el controlador es un controlador secundario en un acoplamiento en cascada. Los controladores con  $b = 0$  y  $c = 0$  suelen ser llamados I-PD y los controladores con  $b = 1$  y  $c = 0$  suelen ser llamados PI-D.

En general, un sistema de control debe cumplir varias especificaciones simultáneas. Debería presentar una buena respuesta transitoria a los cambios en el setpoint y un buen rechazo a las perturbaciones y al ruido de medición. En un sistema de control donde un único error  $e$  entra a los tres términos del controlador PID, se intenta cumplir todos los objetivos con un único mecanismo de control. Un sistema de este tipo se denomina **sistema con un grado de libertad**. En cambio, cuando empleamos distintas trayectorias para la referencia y la salida de la planta (**sistemas de dos grado de libertad**) obtendremos una mayor flexibilidad para lograr un compromiso entre los distintos objetivos de control. El diagrama en bloque de un sistema con dos grados de libertad se

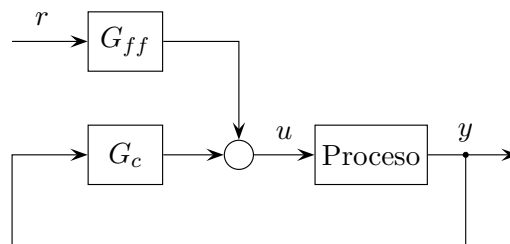


**Figura 3.9:** Simulación de un sistema de lazo cerrado con control PID con distintos valores de  $b$ .

puede observar en la [Figura 3.10](#), donde

$$G_{ff}(s) = K \left( b + \frac{1}{sT_i} + csT_d \right),$$

$$G_c(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right).$$



**Figura 3.10:** Diagrama en bloques de un sistema realimentado con un controlador PID de dos grados de libertad.

### 3.5.3 Limitación de la ganancia derivativa

La acción derivativa puede traer dificultades si existe ruido de medición de alta frecuencia. Un ruido de medición sinusoidal

$$n = a \sin(\omega t)$$

contribuye al término derivativo de la señal de control como

$$u_n = KT_d \frac{dn}{dt} = aKT_d \omega \cos(\omega t).$$

Podemos observar que la amplitud de la señal de control puede ser arbitrariamente grande si la frecuencia  $\omega$  es suficientemente alta.

Por este motivo, es común que la ganancia del término derivativo sea limitada en alta frecuencia. Esto puede lograrse implementando el término derivativo como

$$D = \frac{sKT_d}{1 + sT_d/N} e.$$

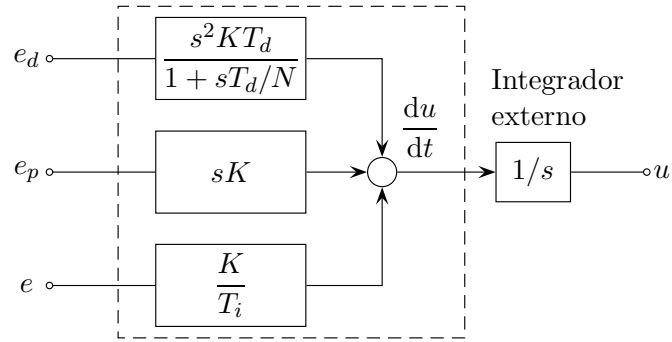
Esta modificación puede interpretarse como la derivada ideal filtrada por un sistema de primer orden con constante de tiempo  $T_d/N$ . La aproximación actúa como un derivador para las señales de baja frecuencia, pero ahora la ganancia está limitada a  $KN$ . Esto significa que el ruido de alta frecuencia es amplificado como máximo por un factor  $KN$ . Los valores típicos de  $N$  están entre 8 y 20.

### 3.5.4 Algoritmo de velocidad

Los algoritmos descritos previamente se denominan de posición porque la salida del controlador es la acción de control. En ciertos casos, el sistema de control se arregla de manera que el sistema es manejado directamente por un integrador, por ejemplo, un motor. En estas situaciones es natural modificar el algoritmo PID para que la salida del controlador sea la derivada de la acción de control, es decir, la velocidad de la variable de control. La variable de control se obtiene integrando la salida del controlador. Un algoritmo de este tipo se denomina algoritmo de velocidad. Un diagrama en bloques del algoritmo de velocidad para un controlador PID se puede observar en la [Figura 3.11](#). Una de las razones para utilizar el algoritmo de velocidad es para obtener protección contra efectos como windup y bumpless.

## 3.6 Windup

Si bien muchos aspectos del control de sistemas puede ser analizado con de la teoría de sistemas lineales, algunos efectos no lineales deben ser tenidos en cuenta. Todos los actuadores presentan limitaciones, por ejemplo, un motor tiene un límite de velocidad, una válvula no puede ir más allá de completamente abierta o completamente cerrada. Si el rango de operación del sistema es muy amplio, es posible que la acción de control supere los límites del actuador. Cuando esto sucede, el sistema está a lazo abierto ya que la entrada al proceso queda fija en el límite del actuador sin importar el valor de la salida del proceso. Como consecuencia, el error puede tomar valores elevados. Si además



**Figura 3.11:** Diagrama en bloques de un controlador PID basado en el algoritmo de velocidad.

el controlador tiene acción integral, el error continuará siendo integrado y el término integral tomará valores muy grandes. Esto significa que para volver al estado normal, es necesario que el error presente signo opuesto durante un largo período de tiempo. Este fenómeno se conoce como **windup** o reajuste excesivo y da como resultado grandes sobrepasos en la variable controlada o incluso inestabilidad.

### Ejemplo 3.1: Ilustración del fenómeno de windup

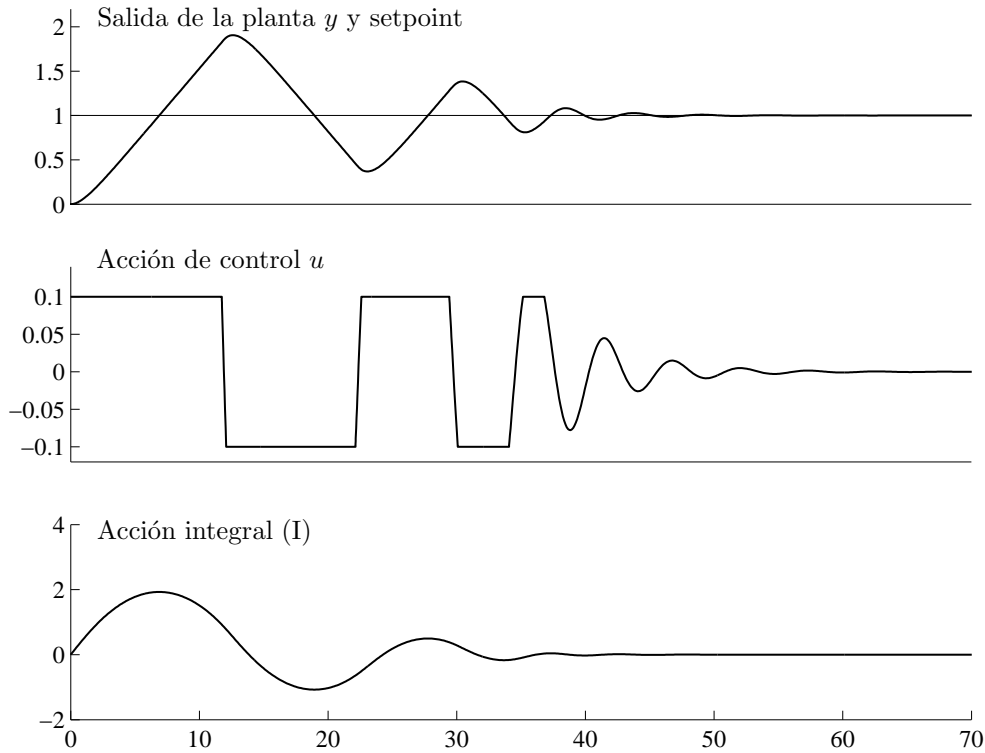
En la [Figura 3.12](#) se ilustra el fenómeno de windup en una planta con un integrador y un controlador PI. El cambio inicial del setpoint es tan grande que el actuador satura en el límite superior. El término integral se incrementa inicialmente porque el error es positivo y alcanza el valor máximo en  $t = 6,85$ , cuando el error se hace cero. Debido a que el término integral es muy grande, el actuador permanece saturado. Solo luego de transcurrido un tiempo apreciable, el error se hace negativo y el término integral comienza a reducirse en forma importante. Podemos observar que la acción de control va de un límite al otro varias veces hasta finalmente quedar dentro de la zona lineal. El efecto neto sobre la variable controlada es un gran sobrepaso y una oscilación amortiguada, donde la acción de control va de un extremo al otro como si fuese un control on-off.

El fenómeno de windup puede originarse cuando se producen cambios importantes en el setpoint, surgen grandes perturbaciones o fallas en los equipos. También se puede producir cuando se utiliza un selector para varios controladores que manejan un mismo actuador, en control en cascada, etc.

A lo largo de los años un buen número de soluciones han sido propuestas para evitar y mitigar el fenómeno de windup. Estas soluciones suelen denominarse algoritmos de anti-windup. Algunas serán discutidas a continuación.

#### 3.6.1 Limitación del setpoint

Una forma de evitar el fenómeno de windup es introducir límites sobre las variaciones del setpoint, de modo que la acción de control nunca alcance los límites del actuador.



**Figura 3.12:** Ilustración del fenómeno de windup.

Esta solución en general da cotas conservadoras y limita apreciablemente la performance del sistema. Tampoco es capaz de evitar el windup originado por las perturbaciones.

### 3.6.2 Algoritmos incrementales

En los casos que el controlador PID es implementado con un algoritmo de velocidad, el problema de windup es manejado automáticamente. En los algoritmos de velocidad la derivada de la acción de control es calculada primero y luego es alimentada a un integrador. Por tanto, el problema de windup se evita fácilmente inhibiendo la integración cuando el actuador satura.

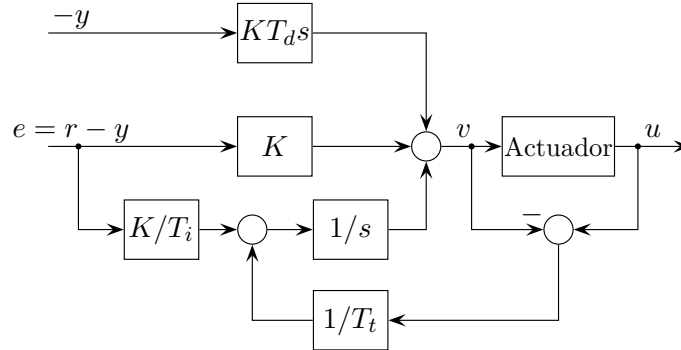
### 3.6.3 Seguimiento integral

El algoritmo de seguimiento integral compara la salida del controlador con la salida del actuador (saturada) y utiliza esta comparación para hacer que la salida del controlador sea igual al valor de la señal saturada.

La [Figura 3.13](#) muestra un diagrama del algoritmo anti-windup conocido como seguimiento integral o back-calculation. Podemos observar que el sistema tiene una trayectoria de realimentación adicional. En este algoritmo, se mide la salida real del actuador  $u$  y se la compara con la salida del controlador  $v$ , formando la señal de error  $e_s$ . Este error es alimentado en la entrada del integrador a través de la ganancia  $1/T_t$ . En operación normal, donde el actuador no está saturado, la señal  $e_s$  es cero y la trayectoria de realimentación adicional no tiene efecto. Cuando el actuador satura,



la trayectoria de realimentación normal se abre por efecto de la saturación pero ahora existe otra trayectoria de realimentación alrededor del integrador. Esta trayectoria adicional permite conducir la salida del integrador el valor que anula la entrada del integrador, evitando el efecto de windup.



**Figura 3.13:** Diagrama en bloques de un algoritmo PID con seguimiento integral.

Teniendo en cuenta que la entrada del integrador es

$$\frac{1}{T_t}e_s + \frac{K}{T_i}e$$

donde  $e = r - y$ , si anulamos dicha señal entonces

$$e_s = -\frac{KT_t}{T_i}e$$

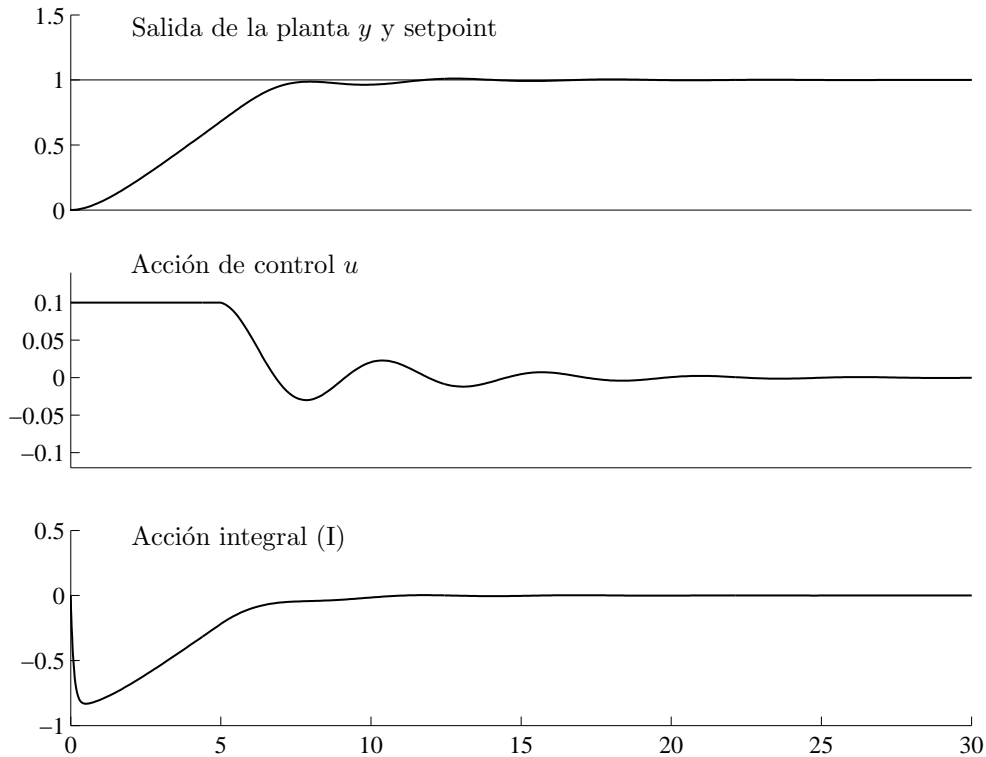
en estado estacionario. Ya que  $e_s = u - v$  tenemos que

$$v = u_{\text{lím}} + \frac{KT_t}{T_i}e$$

donde  $u_{\text{lím}}$  es el valor de saturación de la variable de control. Como las señales  $e$  y  $u_{\text{lím}}$  tienen el mismo signo, concluimos que  $v$  siempre es mayor que  $u_{\text{lím}}$  en magnitud. Esto previene que el integrador entre en windup.

La constante  $T_t$  puede interpretarse como una constante de tiempo y determina cuan rápidamente se anula la entrada del integrador. Tomando valores pequeños de  $T_t$  se logra una mejor respuesta ya que los efectos de windup son rápidamente anulados. Sin embargo, cuando se utiliza acción derivativa no conviene tomar valores de  $T_t$  muy pequeños. Con valores pequeños de  $T_t$ , errores espurios puede saturar la salida, reseteando accidentalmente el integrador. La constante  $T_t$  debería ser mayor que  $T_d$  y menor que  $T_i$ , un valor empírico es  $T_t = \sqrt{T_i T_d}$ .

En la [Figura 3.14](#) se ilustra el efecto de utilizar el algoritmo anti-windup en el sistema de la [Figura 3.12](#). Podemos notar que la salida del integrador es rápidamente reseteada a un valor tal que la salida del controlador permanece en el límite de saturación. También, podemos observar que la integral tiene un valor negativo en la etapa inicial donde el actuador está saturado. Este comportamiento es completamente diferente al mostrado en la [Figura 3.12](#), donde la integral tiene valor positivo en la etapa inicial. La performance observada es notablemente mejorada respecto de la [Figura 3.12](#).

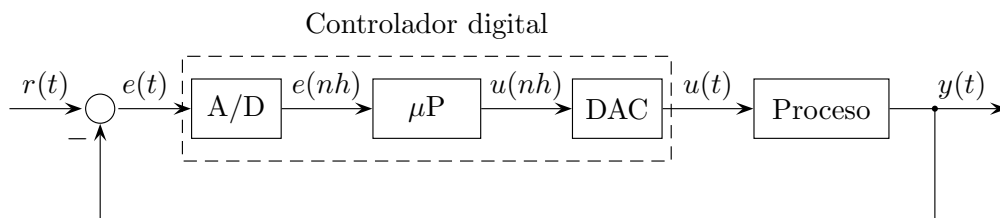


**Figura 3.14:** Simulación del sistema de la Figura 3.12 con un controlador con algoritmo anti-windup por back-calculation.

### 3.7 Implementación digital

En la actualidad, la gran mayoría de los controladores se implementan en forma digital utilizando microprocesadores. Por este motivo, veremos a continuación algunos aspectos referidos a la implementación digital de los algoritmos PID.

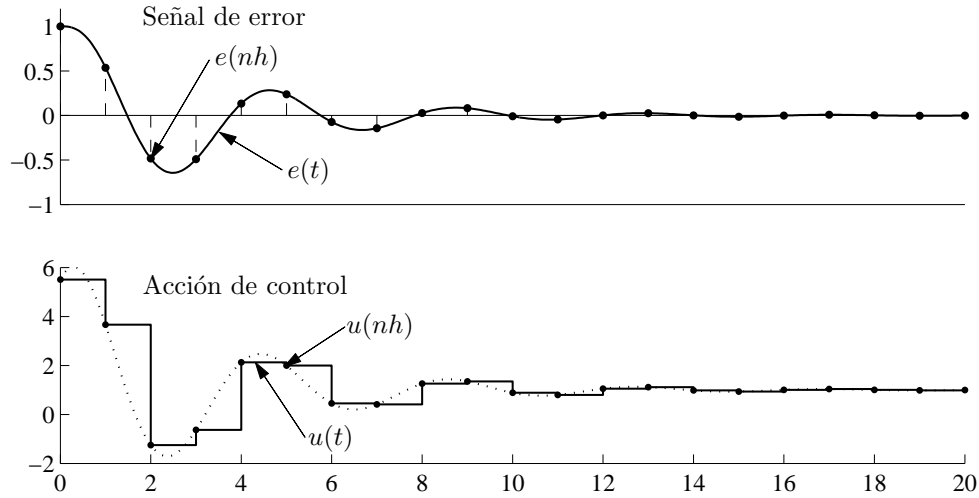
En la Figura 3.15, podemos ver un sistema de lazo cerrado con un controlador implementado en forma digital. El bloque A/D representa el convertidor analógico a digital, el bloque  $\mu P$  representa el microprocesador que calcula la acción de control en forma digital y el bloque DAC es el convertidor digital a analógico.



**Figura 3.15:** Diagrama en bloques de un sistema a lazo cerrado con un controlador digital.

El convertidor A/D toma muestras a intervalos regulares de la señal de entrada al controlador  $e(t)$ . El resultado de este procedimiento es una secuencia discreta de valores representada por  $e(nh)$ , donde  $h$  es el período de muestreo y  $n$  es un entero que indica

el número de la muestra. En la [Figura 3.16](#) podemos ver tanto la señal  $e(t)$  como la secuencia resultante  $e(nh)$ . El procedimiento de tomar las muestras se denomina **muestreo**.



**Figura 3.16:** Señales y secuencias en un controlador digital.

En un controlador digital, la secuencia de las muestras  $e(nh)$  son luego utilizadas por el microprocesador para determinar el valor de la acción de control correspondiente el próximo instante de muestreo  $u((n+1)h)$ . Luego, el convertidor DAC transforma el valor  $u((n+1)h)$  en un señal analógica  $u(t)$ . La opción más sencilla para convertir la señal discreta  $u((n+1)h)$  en una señal analógica, es mantener constante la salida durante el período  $h$  como se muestra en la [Figura 3.16](#). En la próxima subsección nos concentraremos en el procesamiento que debe hacer el bloque  $\mu P$  para implementar el algoritmo PID.

### 3.7.1 Aproximaciones numéricas

Para implementar una ley de control continua, tal como un controlador PID, en una computadora digital necesitamos aproximar los términos proporcional, integral y derivativo. Para ello tenemos varias opciones.

#### Acción proporcional

El término proporcional es

$$P(t) = K(r(t) - y(t)).$$

Este término es implementado simplemente reemplazando las variables continuas por sus versiones muestreadas. Por tanto,

$$P(nh) = K(r(nh) - y(nh)).$$

### Acción integral

El término integral está dado por

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(t) dt. \quad (3.22)$$

Esta ecuación coincide con el área bajo la curva  $Ke(t)/T_i$ , la cual puede ser aproximada de las siguientes formas.

**Regla rectangular hacia delante.** En este caso, la integral (3.22) es aproximada por la sumatoria

$$I(nh) = \frac{K}{T_i} h \sum_0^{n-1} e(nh) \quad (3.23)$$

Sin embargo esta ecuación requiere almacenar las muestras anteriores para aproximar la integral en el instante  $t = nh$ . Normalmente, se emplea un algoritmo recursivo que solo requiere el valor de la muestra anterior. De la (3.23), tenemos que

$$I(nh) = \underbrace{\frac{K}{T_i} h \sum_0^{n-2} e(nh)}_{I((n-1)h)} + \frac{K}{T_i} h e((n-1)h) = I((n-1)h) + \frac{K}{T_i} h e((n-1)h).$$

**Regla rectangular hacia atrás.** En este caso, la integral (3.22) se aproxima por la sumatoria

$$I(nh) = \frac{K}{T_i} h \sum_0^n e(nh) = I((n-1)h) + \frac{K}{T_i} h e((n)h). \quad (3.24)$$

Esta aproximación se diferencia de la anterior, en que utiliza la muestra actual de la señal  $e(nh)$  en vez de la muestra anterior  $e((n-1)h)$ .

**Regla trapezoidal.** En este caso, la integral (3.22) se aproxima por la ecuación

$$I(nh) = \frac{K}{T_i} \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (e((i-1)h) + e(ih)) = I((n-1)h) + \frac{K}{T_i} \frac{e(nh) + e((n-1)h)}{2}. \quad (3.25)$$

Esta regla utiliza el valor anterior de la integral en el instante y los valores actual  $e(nh)$  y previo  $e((n-1)h)$  de la señal.

### Acción derivativa

El término derivativo está dado por

$$D(t) = K T_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (3.26)$$

En este caso podemos utilizar la aproximación por diferencias hacia atrás. Esta es la opción más difundida para aproximar la derivada de una señal.

Utilizando la aproximación por diferencias hacia atrás tenemos que

$$D(nh) \approx KT_d \frac{e(nh) - e((n-1)h)}{h}. \quad (3.27)$$

Esta aproximación requiere el valor de la señal en los instantes actual y previo.

### Algoritmo PID digital

Ahora podemos utilizar las aproximaciones de cada término para hallar el algoritmo PID digital. Si consideramos la ecuación integro-diferencial de un controlador PID

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.28)$$

y reemplazamos el término integral por la aproximación (3.23) y el término derivativo por la (3.27), obtenemos la siguiente versión discreta de la (3.28),

$$u(nh) = u((n-1)h) + k_1 e(nh) + k_2 e((n-1)h) + k_3 e((n-2)h) \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= K \left( 1 + \frac{T_d}{h} \right), \\ k_2 &= -K \left( 1 + \frac{2T_d}{h} - \frac{h}{T_i} \right), \\ k_3 &= K \frac{T_d}{h}. \end{aligned}$$

En cambio, si utilizamos la aproximación (3.24) para el término integral, llegamos a

$$u(nh) = u((n-1)h) + \tilde{k}_1 e(nh) + \tilde{k}_2 e((n-1)h) + \tilde{k}_3 e((n-2)h) \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= K \left( 1 + \frac{T_d}{h} + \frac{h}{2T_i} \right), \\ \tilde{k}_2 &= -K \left( 1 + \frac{2T_d}{h} - \frac{h}{2T_i} \right), \\ \tilde{k}_3 &= K \frac{T_d}{h}. \end{aligned}$$

Las expresiones (3.29) y (3.30) son ecuaciones en diferencias que pueden implementarse fácilmente como un programa de computación.

En la medida que el tiempo de muestreo sea suficientemente pequeño, las conclusiones que sacamos en las secciones previas son también válidas para la versión digital del controlador PID. Por tanto, podremos diseñar un controlador digital utilizando los métodos de diseño que veremos en los próximos capítulos y luego determinar los coeficientes de las ecuaciones en diferencias a partir de los valores de los parámetros del controlador PID continuo.

### 3.7.2 Aspectos a tener en cuenta respecto al período de muestreo

Los controladores digitales tienen un parámetro adicional, el período de muestreo. Este debe ser elegido cuidadosamente a los fines de no deteriorar la performance del sistema de control.

Uno de los puntos a tener en cuenta es la pérdida de información de la señal muestreada en la medida que se incrementa el período de muestreo  $h$ . Esto resulta evidente a partir del siguiente argumento, consideramos las señales

$$s(t) = \cos(k\omega_s t \pm \omega t)$$

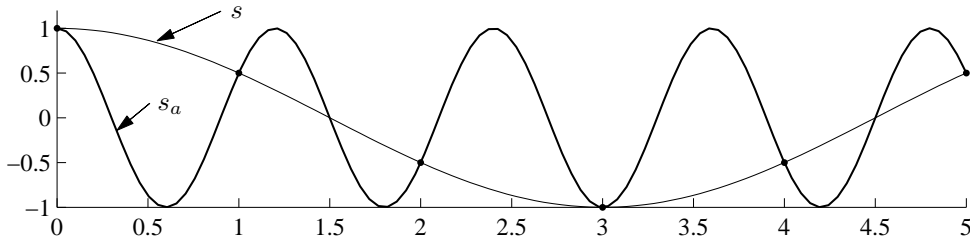
y

$$s_a(t) = \cos(\omega t)$$

donde  $\omega_s = 2\pi/h$  es la frecuencia de muestreo. Es bien sabido que en el caso de la función coseno se verifica que

$$s(nh) = \cos(k\omega_s nh \pm \omega nh) = \cos(\omega nh) = s_a(\omega nh), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esto es, las señales  $s$  y  $s_a$  tienen los mismos valores en los instantes de muestreo. Esto significa que no podremos diferenciar estas señales si sólo contamos con los valores correspondientes a los instantes de muestreo. Por este motivo, la señal  $s_a$  es llamada alias de la señal  $s$  y el fenómeno es denominado aliasing. La [Figura 3.17](#) ilustra el efecto de aliasing. El teorema de Shanon o del muestreo establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos dos veces superior a la mayor frecuencia de la señal a muestrear. Si disponemos de un controlador con cierto período de muestreo y tenemos conocimiento que pueden ingresar señales con frecuencias mayores al límite de Shanon, es conveniente utilizar filtros anti-aliasing.



**Figura 3.17:** Ilustración del efecto de aliasing.

Otros de los efectos negativos del muestreo es un atraso de fase adicional que puede desestabilizar el sistema de lazo cerrado. Para ilustrar el este efecto consideremos el siguiente ejemplo.

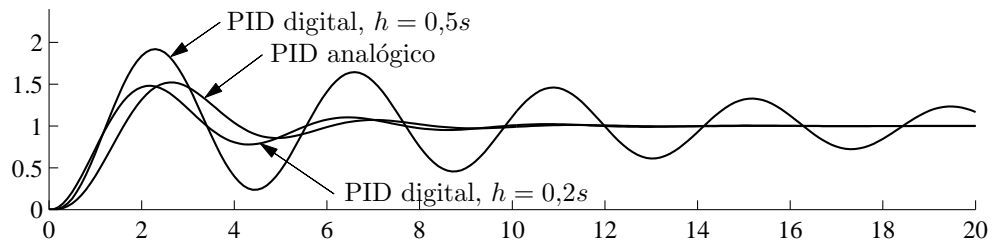
#### Ejemplo 3.2: Efecto desestabilizante del muestreo

Supongamos que el proceso tiene la siguiente transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

y que los parámetros del controlador PID analógico son  $K = 4,8$ ,  $T_i = 1,81$  y  $T_d = 0,44$ . La [Figura 3.18](#) muestra las respuestas del sistema de lazo cerrado a

un escalón unitario en el setpoint. Si comparamos la respuesta obtenida con un PID analógico y la obtenida con los PID digitales, es claro que el período de muestreo tiene un efecto desestabilizador. Este efecto se acentúa en la medida que incrementamos el período de muestreo.



**Figura 3.18:** Ilustración del efecto desestabilizador del muestreo.

Puede probarse que el muestreo aporta un atraso de fase aproximadamente de  $\omega h/2$ . Para evitar el efecto desestabilizador, es recomendable que el aporte de fase en la frecuencia de cruce  $\omega_x$  no supere  $15^\circ$ . Esto equivale a imponer que

$$\omega_x h = 0,17 \text{ a } 0,72$$

A partir de esta expresión puede deducirse el máximo período de muestreo.

Hasta ahora hemos visto dos efectos negativos que nos dan un límite superior para el período de muestreo. El límite inferior surge del costo de implementación. Un período de muestreo excesivamente pequeño requiere una elevada velocidad de cálculo y como consecuencia de microprocesadores más costosos.

Una posible regla para definir el período de muestreo es tomar entre  $1/6$  y  $1/20$  del tiempo de crecimiento de la respuesta al escalón de la planta.





# 4

## Diseño del controlador

### 4.1 Introducción

En el caso de los controles PID, el diseño del controlador consiste en elegir los valores de los parámetros del algoritmo. Este procedimiento se lo denomina **sintonía** o **ajuste** del controlador. En este capítulo, estudiaremos algunos de los distintos métodos que han sido propuestos para sintonizar controladores PID. Previamente, discutiremos como establecemos las especificamos que debe cumplir el sistema de lazo cerrado.

### 4.2 Especificaciones

Para resolver cualquier problema de control es necesario establecer cuales son los objetivos. Las especificaciones típicas pueden ser

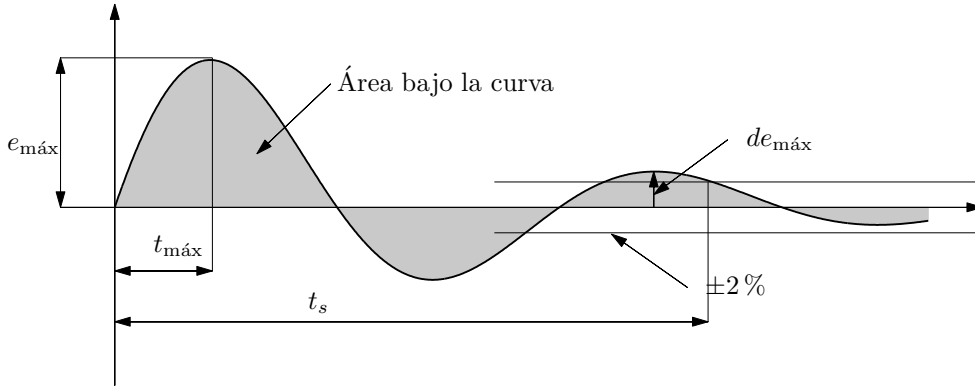
- Rechazo de las perturbaciones
- Sensibilidad al ruido de medición
- Robustez ante las incertidumbre del modelo
- Seguimiento de la referencia o setpoint

Estas especificaciones pueden ser expresadas como características de la respuesta temporal a ciertas entradas típicas. También pueden establecerse sobre la respuesta en frecuencia o sobre la función de transferencia. Algunas especificaciones pueden ser conflictivas, como por ejemplo el rechazo de las perturbaciones y la sensibilidad a los ruidos de medición. Otras como el seguimiento de la referencia y el rechazo de perturbaciones no.

### 4.2.1 Rechazo de las perturbaciones

Las perturbaciones son señales que desvían la salida de la planta del valor deseado. La atenuación o rechazo de las perturbaciones es uno de los objetivos principales en el control de proceso. Especialmente, en los problemas de regulación donde el proceso opera en estado estacionario con un setpoint constante por largos períodos de tiempo. Ya que las perturbaciones suelen ser de baja frecuencia, el rechazo de las perturbaciones se especifica sobre la respuesta a un escalón. Las perturbaciones pueden entrar en diversos puntos del sistema a lazo cerrado, en general, y si no se aclara lo contrario, supondremos que la perturbación ingresa en la entrada de la planta.

En la Figura 4.1 podemos observar la señal de error cuando se aplica una perturbación del tipo escalón en la entrada de la planta. Las características indicadas en la figura suelen utilizarse para especificar la atenuación de la perturbación. El parámetro  $e_{\text{máx}}$  es el error máximo,  $t_{\text{máx}}$  es el tiempo donde se alcanza el máximo,  $t_s$  es el tiempo de establecimiento y  $d$  es la tasa de atenuación. Cuando existe error de estado estacionario, las magnitudes previamente definidas se toman con respecto al valor final del error.



**Figura 4.1:** El error debido a una perturbación tipo escalón en la entrada de la planta y algunos parámetros que caracterizan su rechazo.

Las especificaciones también pueden ser establecidas por medio de índices de performance. Uno de ellos es la integral del valor absoluto del error, definido como

$$\text{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt. \quad (4.1)$$

El criterio del índice IAE suele utilizarse especialmente cuando se controla variables que reflejan la calidad del producto. Sin embargo, requiere cierto esfuerzo de cálculo y simulación de la planta en forma bastante exacta y por un período de tiempo prolongado.

Para proceso que no oscilan, el índice IAE puede reemplazarse por la integral del error IE definido como

$$\text{IE} = \int_0^{\infty} e(t) dt. \quad (4.2)$$

La ventaja de utilizar el índice IE es que está directamente relacionado con los parámetros del controlador. Para verificar esto, supongamos que aplicamos la siguiente ley de control

$$u(t) = ke(t) + k_i \int_0^t e(t) dt - k_d \frac{dy}{dt}$$

y que el controlador estabiliza el sistema a lazo cerrado. Supongamos, además, que el error es inicialmente cero y que la perturbación ingresa en la entrada de la planta. Ya que el controlador es estabilizante y tiene acción integral, el error tenderá a cero. Por tanto, tenemos que

$$u(\infty) - u(0) = k_i \int_0^{\infty} e(t) dt.$$

Como la perturbación es aplicada en la entrada de la planta, el cambio en la acción de control es igual a la amplitud de la perturbación. Por tanto,

$$IE = \int_0^t e(t) dt = \frac{1}{k_i} = \frac{T_i}{K}$$

Luego, la ganancia  $k_i$  es inversamente proporcional al valor del índice IE.

El índice IE es la elección natural en los casos donde se controla variables de calidad. Sin embargo, puede resultar una medida errónea en otras situaciones. En particular, resulta cero en el caso de sistema oscilatorios sin amortiguamiento.

Otro criterio es la integral del cuadrado del error defino como

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (4.3)$$

que también es fácil de calcular. Sin embargo, tiene la desventaja de penalizar demasiado los errores de gran amplitud, lo cual conduce a sistemas de lazo cerrado poco amortiguados.

#### 4.2.2 Sensibilidad al ruido de medición

En general, el ruido de medición tiene componentes de alta frecuencia y siempre debemos tener la precaución de atenuarlo con un adecuado filtrado. El ruido de medición será alimentado dentro del sistema por medio de la realimentación afectando a la acción de control y al error. La transmisión del ruido de medición a la acción de control está descrita por la transferencia

$$G_{nu} = \frac{G_c}{1 + G_l}$$

donde  $G_p$  es la transferencia de la planta,  $G_c$  es la transferencia del controlador y  $G_l = G_p G_c$  es la transferencia del lazo. La transferencia desde el ruido de medición a la salida de la planta es

$$G_{ny} = \frac{1}{1 + G_l} = S$$

donde  $S$  es la transferencia denominada sensibilidad.

En altas frecuencias,  $G_l$  suele ser pequeña y por tanto tenemos que  $G_{nu} \approx G_c$ . En el caso de un controlador PID, la ganancia de alta frecuencia es

$$K_{af} = K(1 + N) \quad (4.4)$$

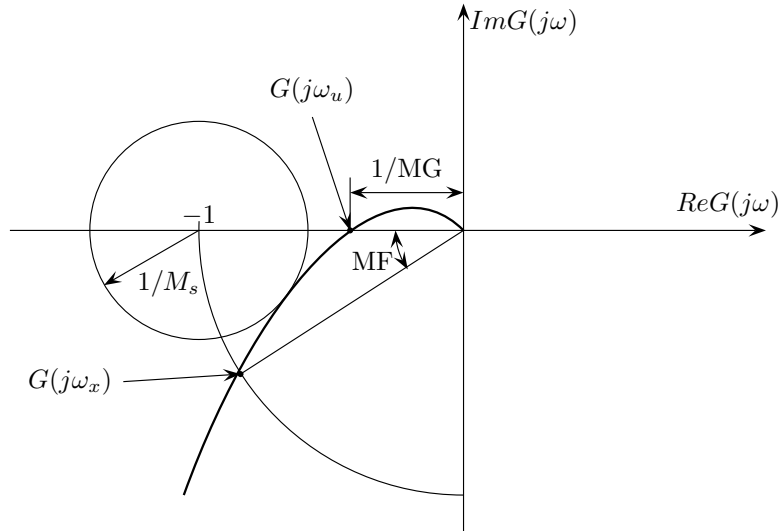
Luego, las fluctuaciones de la acción de control como consecuencia del ruido de medición  $n(t)$  será  $K_{af}n(t)$ . Si tenemos en cuenta que en el caso de un controlador PI  $N = 0$ , podemos concluir que la ganancia  $K_{af}$  será mucho menor que en el caso de un PID. Esto es una de las desventajas del uso de acción derivativa. En general, la  $K_{af}$  de un PID puede ser un orden de magnitud mayor que la de un PI.

### 4.2.3 Sensibilidad a las características de la planta

Los parámetros del controlador son ajustados de acuerdo a la dinámica de la planta. Ya que ésta puede cambiar por diversos motivos, es importante que los parámetros del controlador sean elegidos de forma tal que el sistema de lazo cerrado no sea muy sensible a los cambios en la dinámica de la planta. Un criterio conveniente para especificar la sensibilidad es a través del diagrama de Nyquist de la transferencia del lazo  $G_l = G_p G_c$ . Podemos tomar como medida

$$M_s = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \left| \frac{1}{1 + G_p(j\omega)G_c(j\omega)} \right| = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} |S(j\omega)|. \quad (4.5)$$

Observemos que la transferencia, que llamamos la sensibilidad, también aparece en la sensibilidad al ruido. La cantidad  $M_s$  es la inversa de la menor distancia del diagrama de Nyquist de  $G_l$  al punto crítico  $-1$  (ver Figura 4.2).



**Figura 4.2:** Definición de la sensibilidad  $M_s$ , margen de fase MF y margen de ganancia MG.

Desde el punto de vista de la sensibilidad al ruido de medición, la medida  $M_s$  nos indica cuanto será amplificado el ruido en el peor caso. Esto lo podemos entender si suponemos que el ruido de medición es sinusoidal de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $a_0$ . En esta situación, la amplitud de la respuesta del sistema a lazo cerrado será  $a_0|S(j\omega)|$ . Por tanto, el sistema realimentado atenuará la perturbación si  $|S(j\omega)| < 1$  y la amplificará si es  $|S(j\omega)| > 1$ . Bajo suposiciones muy generales es posible mostrar que la sensibilidad no puede ser menor que uno en todas las frecuencias. Si aplicamos un controlador con acción integral, tendremos que  $|S(0)| = 0$  por lo cual las perturbaciones de bajas frecuencias será rechazadas en forma efectiva. En general, no sucede lo mismo con las perturbaciones de alta frecuencia. Luego, la magnitud  $M_s$  nos sirve para especificar en el diseño del controlador la mínima atenuación del ruido de medición requerida. Es habitual imponer que  $M_s$  esté en el rango de 1,3 a 2.

Una forma de medir la robustez del sistema de lazo cerrado es por medio de los márgenes

de ganancia MG y de fase MF, definidos como

$$\begin{aligned} \text{MG} &= \left| \frac{1}{G_l(j\omega_u)} \right|, \\ \text{MF} &= 180^\circ + \arg G_l(j\omega_x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde la frecuencia última  $\omega_u$  es la frecuencia donde  $\arg G_l(j\omega_u) = -180^\circ$  y la frecuencia de cruce (crossover)  $\omega_x$  es la frecuencia donde  $|G_l(j\omega_x)| = 1$  (ver Figura 4.2). Estos márgenes están relacionados con el  $M_s$  a través de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \text{MG} &> \frac{M_s}{M_s - 1}, \\ \text{MF} &> 2 \arcsin \frac{1}{M_s}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Los márgenes MG y MF indican que tanto puede afectar los cambios en la dinámica de la planta a la estabilidad y al desempeño del sistema de lazo cerrado. Los valores típicamente requeridos para el margen de fase están entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$  y para el margen de ganancias entre 2 y 5. Si observamos la Figura 4.2, los márgenes MG y MF imponen que el diagrama de Nyquist de  $G_l$  siempre debe estar fuera de un círculo centrado en  $-1$  y de radio  $1/M_s$ . Estos márgenes indican que el sistema de lazo cerrado seguirá siendo estable si incrementamos la ganancia en un factor MG o la fase en un factor MF. En los casos donde también existan elementos no lineales dentro del lazo, tales como  $f(x)$ , podemos garantizar que el sistema de lazo cerrado será estable si se verifica que

$$xM_s/(M_s + 1) < f(x) < xM_s/(M_s - 1).$$

Esto nos indica que pequeños valores de  $M_s$  garantizan que el sistema será estable a pesar de las características no lineales del actuador.

#### 4.2.4 Seguimiento de referencia

En los problemas de seguimiento de referencia, las especificaciones se dan en función de la respuesta a un escalón unitario en la referencia. Las magnitudes comúnmente utilizadas son las siguientes (Figura 4.3).

- El **tiempo de subida**  $t_r$  se define como el tiempo necesario para que la respuesta al escalón pase del 10 % al 90 % del valor final  $y_0$ .
- El **tiempo de establecimiento**  $t_s$  es el tiempo necesario antes de que la respuesta al escalón permanezca dentro de una banda del 2 % del valor final.
- La **tasa de atenuación**  $d$  es la relación entre dos máximos consecutivos del error  $e = r - y$ . El valor tradicional es  $d = 1/4$ , sin embargo en el caso de seguimiento de referencia este valor puede ser excesivo.
- El **sobrepaso**  $M_p$  es la relación entre la diferencia del primer máximo y el valor final. Los valores habituales en aplicaciones industriales están entre 8 % y 10 %.
- El **error de estado estacionario**  $e_{ss}$  se define como la diferencia entre la amplitud del escalón y el valor final  $y_0$ . Hemos visto que si el controlador tiene acción integral  $e_{ss} = 0$ .

Los criterios IAE, IE e ISE también pueden ser utilizados en el caso del seguimiento de referencia. En general, el error inicial en el caso de un escalón en el setpoint es grande. Por tanto, es conveniente que estos casos el criterio ponga menos énfasis en el error inicial. Algunos de los criterios de este tipo son

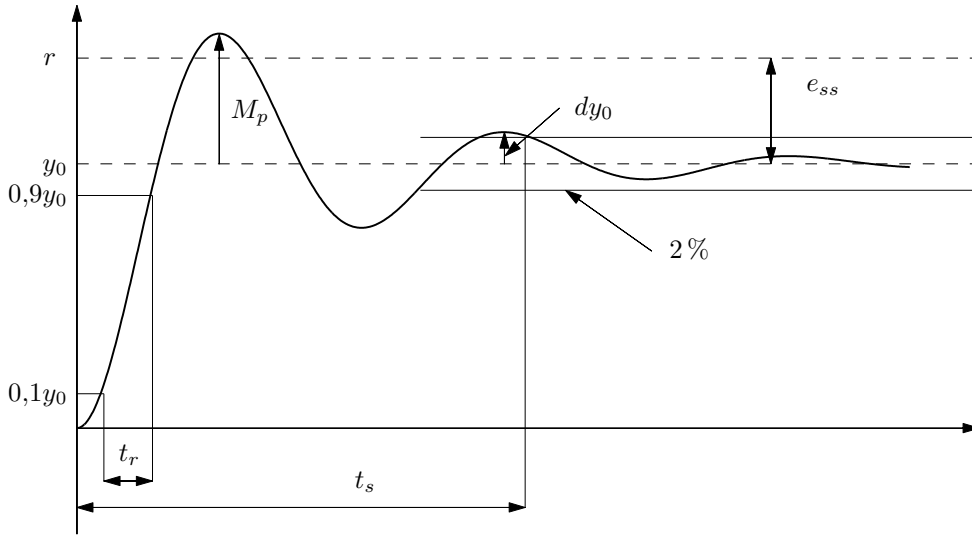
$$\text{ITAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt,$$

$$\text{ITE} = \int_0^{\infty} te(t)dt,$$

$$\text{ITSE} = \int_0^{\infty} te(t)^2dt,$$

$$\text{ISTE} = \int_0^{\infty} t^2e(t)^2dt.$$

Estas integrales son finitas sólo si el error de estado estacionario es cero. Si  $e_{ss} \neq 0$ , el error se toma como la diferencia entre la referencia y el valor final.



**Figura 4.3:** Especificación del seguimiento de referencia en base a la respuesta a un escalón.

Para evaluar las propiedades del sistema de control, también debemos considerar la acción control. Por lo general, la acción de control presenta un sobrepaso cuando aplicamos un escalón en la referencia. En la mayoría de los controladores PID se utiliza el algoritmo de dos grados de libertad. En estos casos el valor inicial de la acción de control es  $\Delta u(0) = Kb\Delta r$ , donde  $K$  es la ganancia del controlador,  $b$  es el peso sobre la referencia y  $\Delta r$  es el cambio en la referencia. El valor de estado estacionario de la acción de control será  $\Delta u_{ss} = \Delta r/K_p$ , donde  $K_p$  es la ganancia estática de la planta. Luego, con estos dos valores podemos definir la magnitud

$$M_u = \frac{\Delta u(0)}{\Delta u_{ss}} = KK_p b$$

que cuantifica el sobrepaso inicial normalizado de la señal de control. Esta magnitud corresponde al sobrepaso exacto si el máximo ocurre inmediatamente después del cambio en la referencia. Si el sistema tiene un retardo  $L$ , el sobrepaso puede ser aproximado por

$$M_u = KK_p(b + L/T_i).$$

La cantidad  $M_u$  es útil para evaluar el desempeño del sistema de control.

## 4.3 Método de ajuste de Ziegler–Nichols

En la década de 1940, Ziegler y Nichols propusieron dos métodos empíricos para ajustar los parámetros de un controlador PID. Estos métodos, o algunas de sus variantes, son ampliamente utilizados en la industria aún en la actualidad. Los métodos de Ziegler–Nichols se basan en determinar, por medio de ensayos simples, ciertas características de la dinámica de la planta. Una vez obtenidos dichas características, los parámetros del controlador se calculan utilizando fórmulas simples.

### 4.3.1 Método de la respuesta al escalón

El primer método de Ziegler–Nichols se basa en registrar la respuesta a un escalón unitario del sistema a lazo abierto, para luego ajustar los tres parámetros de un modelo de primer orden con retardo dado por

$$G_p(s) = \frac{K_p}{Ts + 1} e^{-sL}. \quad (4.8)$$

La forma de ajustar los parámetros  $K_p$ ,  $T$  y  $L$  fue discutida en el [Capítulo 2](#). Una vez obtenidos los valores de  $K_p$ ,  $T$  y  $L$  para el proceso a controlar, se los ingresa en la [Tabla 4.1](#) para obtener los parámetros del controlador.

**Tabla 4.1:** Parámetros de un controlador PID según el método de Ziegler–Nichols de la respuesta al escalón

Controlador	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{1}{K_p} \left( \frac{T}{L} \right)$	$\infty$	0
PI	$0,9 \frac{1}{K_p} \left( \frac{T}{L} \right)$	$3L$	0
PID	$1,2 \frac{1}{K_p} \left( \frac{T}{L} \right)$	$2L$	$\frac{L}{2}$

#### Ejemplo 4.1: Método de Ziegler–Nichols de la respuesta al escalón

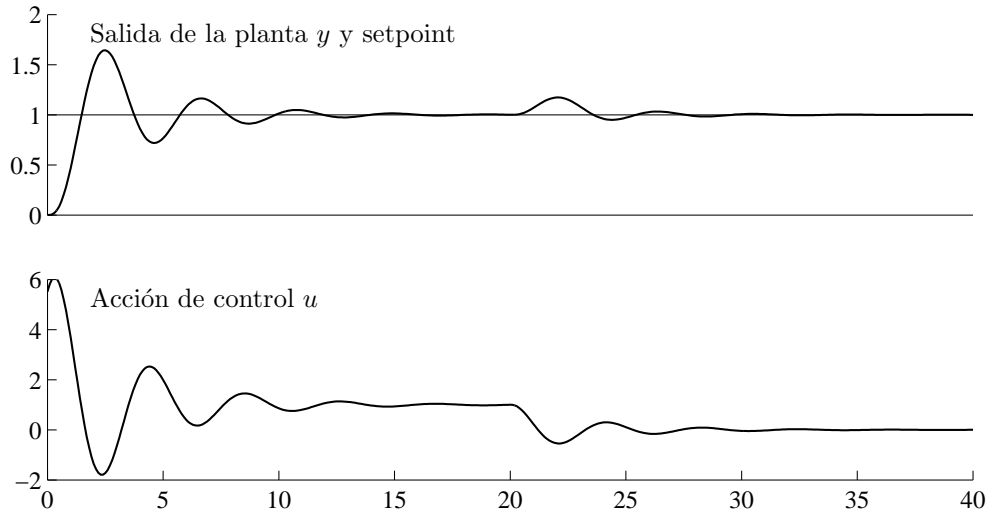
Apliquemos el primer método de Ziegler–Nichols a una planta con transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}.$$

De la respuesta al escalón del sistema a lazo abierto obtenemos  $K_p = 1$ ,  $T = 3,697$  y  $L = 0,806$ . Los parámetros del controlador los obtenemos de la [Tabla 4.1](#). Para el caso de un controlador PID, tenemos  $K = 5,50$ ,  $T_i = 1,61$  y  $T_d = 0,403$ .

En la [Figura 4.4](#) se muestra la respuesta del sistema a lazo cerrado para un escalón en el setpoint seguido de otro escalón en la perturbación. Podemos observar que

la respuesta a la perturbación presenta una tasa de atenuación de  $1/4$ . También podemos observar que el sobrepaso en la respuesta a un escalón en el setpoint es muy apreciable. Este es un punto débil del método de Ziegler–Nichols.



**Figura 4.4:** Simulación de un sistema de lazo cerrado con un controlador PID ajustado según el primer método de Ziegler–Nichols (Ejemplo 4.1).

### 4.3.2 Método de la respuesta en frecuencia

El segundo método, o método de la respuesta en frecuencia, también se basa en una caracterización simple de la dinámica de la planta. El método requiere conocer el punto donde el diagrama de Nyquist de la transferencia de la planta  $G_p(s)$  cruza el eje real negativo. Este punto es caracterizado por la ganancia última  $K_u$  y el período último  $T_u$ . Como hemos visto en el [Capítulo 2](#), estos parámetros se obtienen anulando las acciones integral y derivativa ( $T_i = \infty$ ,  $T_d = 0$ ) e incrementando lentamente la ganancia  $K$  del controlador hasta observar que el sistema de lazo cerrado comienza a oscilar. El menor valor de ganancia que hace oscilar al sistema es la ganancia última  $K_u$  y el período de la oscilación es el período último  $T_u$ . A partir de estos dos parámetros, Ziegler–Nichols propusieron las fórmulas simples indicadas en la [Tabla 4.2](#) para determinar los parámetros del controlador.

**Tabla 4.2:** Parámetros de un controlador PID según el método de Ziegler–Nichols de la respuesta en frecuencia

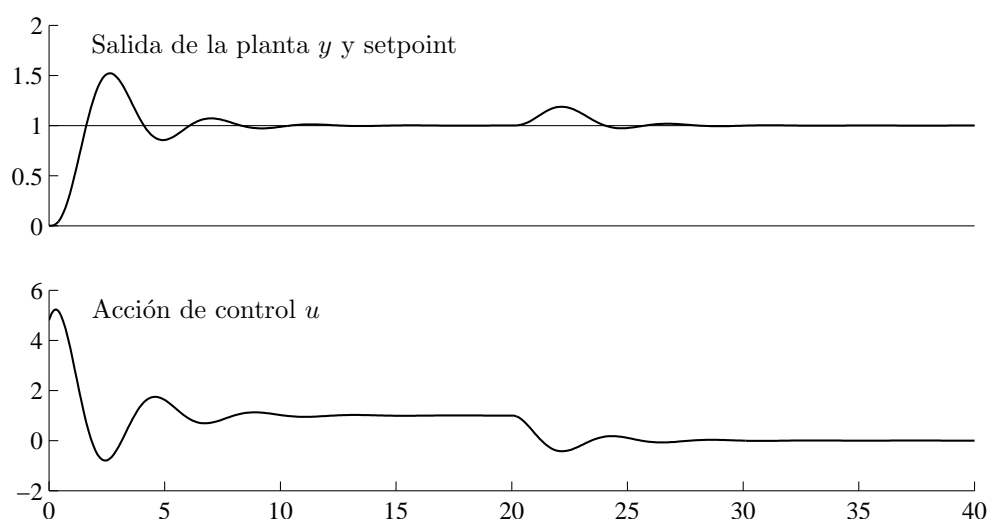
Controlador	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_u$	$\infty$	0
PI	$0,4K_u$	$0,8T_u$	0
PID	$0,6K_u$	$0,5T_u$	$0,125T_u$



**Ejemplo 4.2:** Método de Ziegler–Nichols de la respuesta en frecuencia

Volvamos a considerar la planta dada en el Ejemplo 4.1. La frecuencia última de este proceso es  $K_u = 8$  y el período último es  $T_u = 2\pi/\sqrt{3} \approx 3,63$ . Luego, con estos valores obtenemos de la Tabla 4.2 un controlador PID con  $K = 4,8$ ,  $T_i = 1,81$  y  $T_d = 0,44$ .

En la Figura 4.5 podemos observar la respuesta del sistema a lazo cerrado para un escalón en el setpoint seguido de otro escalón en la perturbación. Las respuestas obtenidas son similares a las obtenidas con el método de la respuesta al escalón, pero en este caso son levemente más amortiguadas.



**Figura 4.5:** Simulación de un sistema de lazo cerrado con un controlador PID ajustado según el segundo método de Ziegler–Nichols (Ejemplo 4.2).

### 4.3.3 Evaluación de los métodos de Ziegler–Nichols

Los métodos de Ziegler–Nichols son simples e intuitivos, requieren poco conocimiento de la planta a controlar y pueden aplicarse con poco esfuerzo. Éstas son algunas de las razones por las cuales los métodos de Ziegler–Nichols son tan populares. Sin embargo, los métodos tienen algunas deficiencias. Las reglas de sintonía de Ziegler–Nichols fueron diseñadas originalmente para obtener un buen rechazo de las perturbaciones. Estas reglas se obtuvieron en forma empírica por medio de extensivas simulaciones en una amplia variedad de plantas y fueron elegidas para lograr una tasa de atenuación de  $1/4$ . Esto da como resultado un buen rechazo de las perturbaciones pero también un sistema de lazo cerrado muy poco amortiguado y con pobres márgenes de estabilidad.

El método de la respuesta en frecuencia suele ser más confiable que el método de la respuesta al escalón. Esto se debe a que la ganancia última está definida en forma única, a diferencia de los parámetros de la respuesta al escalón. Además, los métodos de Ziegler–Nichols suelen lograr mejores resultados cuando se diseñan controladores PID que cuando se diseñan controladores PI. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo.

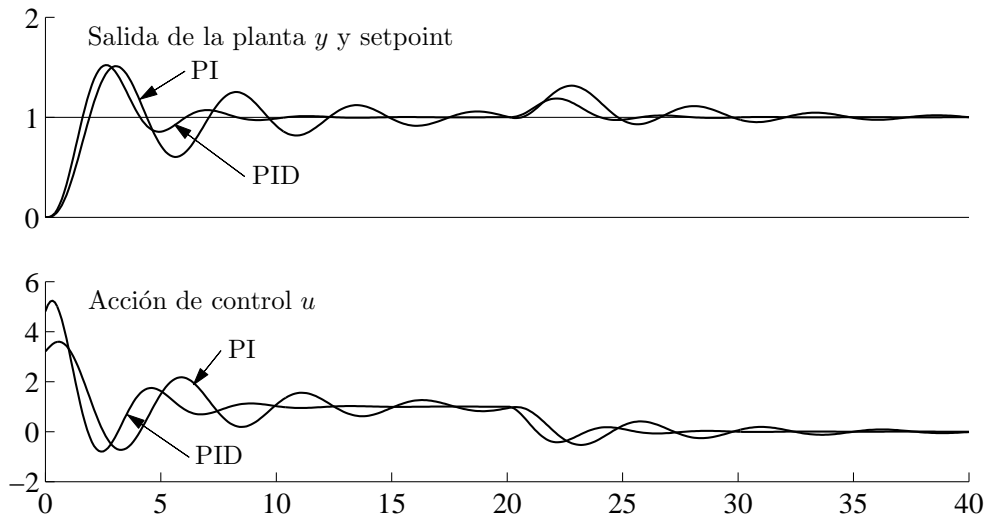
**Ejemplo 4.3:** Comparación de controladores PI y PID diseñados por Ziegler–Nichols

Consideremos el mismo proceso del Ejemplo 4.1, cuya transferencia es

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

De la respuesta al escalón podemos obtener  $K_p = 1$ ,  $T = 3,697$  y  $L = 0,806$ . Entrando estos valores para el caso PI en la Tabla 4.2, tenemos que  $K = 4,13$  y  $T_i = 2,42$ . La ganancia última es  $K_u = 8$  y el período último  $T_u = 3,63$ . El método de la respuesta en frecuencia da  $K = 3,2$  y  $T_i = 2,90$ . Observemos que la ganancia obtenida con el método de la respuesta en frecuencia es menor que con el método de la respuesta al escalón.

En la Figura 4.6 podemos ver simulaciones del sistema de lazo cerrado con un controlador PI y con un PID, ambos diseñados según el método de la respuesta en frecuencia. Las simulaciones corresponden a un escalón en el setpoint seguido de uno en la perturbación. La Figura 4.6 muestra claramente que la tasa de atenuación en el caso del controlador PI es mucho mayor a  $1/4$ . También podemos ver que la respuesta del sistema con el controlador PID es mucho mejor.



**Figura 4.6:** Simulación de un sistema de lazo cerrado ajustado según el segundo método de Ziegler–Nichols (Ejemplo 4.3).

Las reglas de Ziegler–Nichols no logran el comportamiento de una tasa de atenuación de  $1/4$  en cualquier tipo de planta. Un parámetro que suele utilizarse para establecer el rango de validez de los métodos de sintonías es el cociente  $\nu = L/T$ . En general, los mejores resultados se obtienen en planta donde el parámetro  $\nu$  está entre 0,1 y 1. Las plantas con valores de  $\nu$  pequeños, se caracterizan por una dinámica dominada por el atraso de fase. En estos casos, la dinámica de la planta no es lo que limita la performance, sino más bien otros factores, como por ejemplo, el ruido de medición. El ajuste de los parámetros del controlador por medio de las reglas de Ziegler–Nichols puede ser mejorado significativamente usando otros métodos. Acción derivativa o incluso controles más complicados pueden ser utilizados para mejorar la performance en

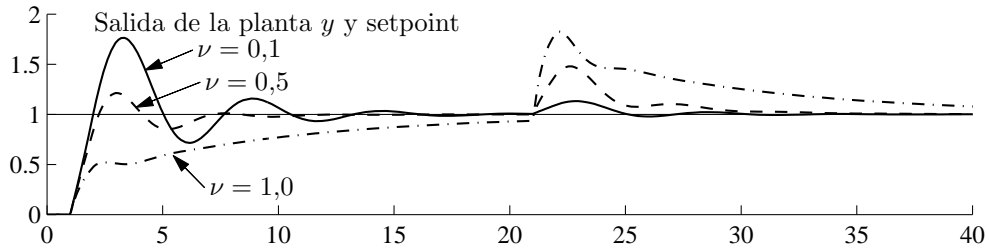
aquellos casos donde las perturbaciones son pequeñas. Las plantas con valores de  $\nu$  grandes presentan una dinámica dominada por la demora. En estos casos, los métodos de Ziegler–Nichols no dan buenos resultados. Los controles PI o PID puede ser utilizados pero las reglas de sintonía deben ser mejoradas. Métodos como el predictor de Smith puede lograr drásticas mejoras. Como veremos en el siguiente ejemplo, las reglas de Ziegler–Nichols son muy sensibles al valor del cociente  $\nu$ .

#### Ejemplo 4.4: Ajuste por Ziegler–Nichols para distintos valores de $\nu$

Para observar la sensibilidad de la reglas de Ziegler–Nichols a los cambios del cociente  $\nu$  consideremos una planta con la siguiente transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + sT)} e^{-s}.$$

donde la constante de tiempo toma tres valores distintos 0,1, 0,5 y 1. Utilizando controladores diseñados con el segundo método de Ziegler–Nichols, obtenemos las respuestas mostradas en la Figura 4.7. Las simulaciones muestran que los controladores no logran la performance esperada en los casos donde  $\nu = 0,1$  y  $\nu = 2$ . También resulta claro lo sensible que resultan estas fórmulas respecto del cociente  $\nu$ .



**Figura 4.7:** Ilustración de la sensibilidad de las reglas de Ziegler–Nichols al cociente  $\nu$  (Ejemplo 4.4).

#### 4.3.4 Método de Cohen–Coon

Una característica atractiva de los métodos de Ziegler–Nichols es que con ensayos sencillos podemos sintonizar un controlador. Las fórmulas propuestas por Ziegler–Nichols sólo requieren dos o tres parámetros para caracterizar la dinámica de la planta y con ellos es posible ajustar los parámetros del controlador. Sin embargo, la respuesta es muy sensible a la relación  $L/T$  y no siempre podemos obtener una respuesta satisfactoria. Por este motivo, se han propuesto varios métodos que modifican las fórmulas originales de Ziegler–Nichols pero manteniendo la metodología de sintonizar el controlador a partir de dos o tres parámetros que capturan la dinámica de la planta. Uno de estos métodos es el de Cohen–Coon.

El método de Cohen–Coon se basa en un modelo de la planta del tipo

$$G_p(s) = \frac{K_p}{1 + sT} e^{-sL}.$$

Las fórmulas propuestas por Cohen–Coon tienen como principal objetivo rechazar las perturbaciones. Para ello se intenta ubicar los polos dominantes de lazo cerrado de manera de obtener una tasa de atenuación de  $1/4$ . Para los controladores P y PD los polos se ubican de manera de tener la máxima ganancia con la condición de lograr una tasa de atenuación de  $1/4$ . Esto permite reducir el error de estado estacionario originado por las perturbaciones. Para los controladores PI y PID se maximiza la ganancia  $k_i = K/T_i$ , lo cual equivale a minimizar el error integral (IE) debido a un escalón en la perturbación. En el caso del PID, se ubican los tres polos de lazo cerrado. Dos complejos conjugados y el tercero a la misma distancia desde origen que los otros polos. Esta distribución de los polos se ajusta para tener una tasa de atenuación de  $1/4$  y la distancia de los polos al origen para minimizar el IE. Basados en estos criterios, Cohen y Coon determinaron en forma analítica y numérica una serie de fórmulas que permiten sintonizar el controlador a partir de los parámetros de la planta ( $K_p$ ,  $T$  y  $L$ ). Estas fórmulas se resumen en la [Tabla 4.3](#).

Los parámetros  $K_p$ ,  $T$  y  $L$  pueden obtenerse en la misma forma que el método de la respuesta al escalón de Ziegler–Nichols. Si comparamos las fórmulas de la [Tabla 4.3](#) con las propuestas por Ziegler y Nichols en el método de la respuesta al escalón ([Tabla 4.2](#)), podemos ver que los parámetros obtenidos con ambas fórmulas son cercanos cuando  $L/T$  es pequeño. También podemos notar que el tiempo integral se reduce cuando  $L/T$  crece lo cual es deseable. Uno de los objetivos de las fórmulas de Cohen–Coon es obtener diseños no tan sensibles a la relación  $L/T$ . Sin embargo, al igual que los métodos de Ziegler–Nichols el sistema de lazo cerrado resulta poco amortiguado debido a la tasa de atenuación de  $1/4$ .

**Tabla 4.3:** Parámetros de un controlador PID según el método de Cohen–Coon

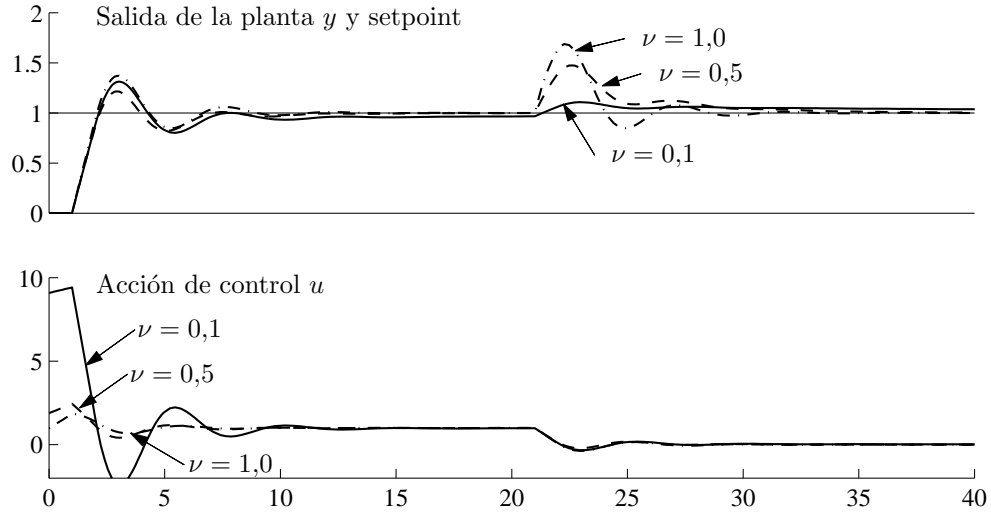
Controlador	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{K_p L} \left( 1 + 3 \frac{L}{T} \right)$	$\infty$	0
PI	$\frac{T}{K_p L} \left( 0,9 + \frac{L}{12T} \right)$	$\frac{30 + 3(L/T)}{9 + 20(L/T)} L$	0
PD	$\frac{T}{K_p L} \left( 0,16 + 1,24 \frac{L}{T} \right)$	$\infty$	$\frac{0,27 - 0,088(L/T)}{1 - 0,13(L/T)} L$
PID	$\frac{T}{K_p L} \left( 1,35 + \frac{L}{4T} \right)$	$\frac{32 + 6(L/T)}{13 + 8(L/T)} L$	$\frac{4L}{11 + 2(L/T)}$

#### **Ejemplo 4.5:** Ajuste por Cohen–Coon para distintos valores de $\nu$

Consideremos la misma planta del ejemplo 4.5,

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + sT)} e^{-s}.$$

donde la constante de tiempo toma tres valores distintos 0,1, 0,5 y 1. Utilicemos ahora la reglas de Cohen–Coon para ajustar los parámetros de los controladores PI. En la [Figura 4.8](#) podemos ver la respuesta del sistema de lazo cerrado con los distintos controladores. Si comparamos esta figura con la [Figura 4.7](#) es claro que las reglas de Cohen–Coon dan como resultado controladores menos sensibles a los valores del cociente  $\nu$ .



**Figura 4.8:** Respuesta del sistema de lazo cerrado con controladores PI diseñados con las reglas de Cohen–Coon (Ejemplo 4.5).

#### 4.3.5 Método del margen de fase

El método de la respuesta en frecuencia de Ziegler–Nichols puede interpretarse como un método donde un punto del diagrama de Nyquist es posicionado. Con un controlador PI o PID es posible mover un punto del diagrama de Nyquist a una posición arbitraria del plano complejo. Cambiando la ganancia, un punto del diagrama de Nyquist se mueve en dirección radial desde el origen. Mientras que cambiando la acción integral o la acción derivativa es posible mover un punto en dirección ortogonal. Teniendo en cuenta esta propiedad de los controladores PI o PID, es posible formular un método para diseñar controladores que logran un cierto margen de fase.

El método consiste en dado un punto

$$A = G_p(j\omega_0) = r_a e^{(\pi + \phi_a)j}$$

hallar el controlador que mueve este punto a

$$B = G_l(j\omega_0) = r_b e^{(\pi + \phi_b)j}.$$

Escribiendo la respuesta en frecuencia del controlador en la forma  $G_c(j\omega_0) = r_c e^{\phi_c j}$ , obtenemos que

$$r_b e^{(\pi + \phi_b)j} = r_a r_c e^{(\pi + \phi_a + \phi_c)j}.$$

Para cumplir esta condición, por tanto, el controlador debería cumplir

$$r_c = \frac{r_b}{r_a},$$

$$\phi_c = \phi_b - \phi_a.$$

En el caso de un controlador PI, esto implica

$$K = \frac{r_b \cos(\phi_b - \phi_a)}{r_a},$$

$$T_i = \frac{1}{\omega_0 \tan(\phi_b - \phi_a)}.$$

Esto significa que debemos imponer  $\phi_a > \phi_b$  para tener un tiempo integral positivo.

En el caso de un controlador PID, podemos obtener

$$K = \frac{r_b \cos(\phi_b - \phi_a)}{r_a},$$

$$\omega_0 T_d - \frac{1}{\omega_0 T_i} = \tan(\phi_b - \phi_a).$$

Podemos notar que, en este caso, los parámetros  $T_i$  y  $T_d$  no están unívocamente determinado. Por tanto, debemos imponer una condición adicional para que estos parámetros queden determinados en forma única. Habitualmente se impone que  $T_d = \alpha T_i$ , como en las reglas de Ziegler–Nichols, donde  $\alpha = 0,25$ . Con esta condición tenemos que

$$T_i = \frac{1}{2\alpha\omega_0} \left( \tan(\phi_b - \phi_a) + \sqrt{4\alpha + \tan^2(\phi_b - \phi_a)} \right),$$

$$T_d = \alpha T_i.$$

Si utilizamos el mismo ensayo que en el método de Ziegler–Nichols, tenemos que  $r_a = 1/K_u$  y  $\phi_a = 0$ , donde  $K_u$  es la ganancia última. Luego, los parámetros de un controlador PI están dados por

$$K = K_u r_b \cos(\phi_b),$$

$$T_i = -\frac{T_u}{2\pi \tan(\phi_b)}.$$

Notar que  $\phi_b$  debe ser negativo para tener un  $T_i$  positivo. Para el caso de un PID, eligiendo  $\alpha = 0,25$ , tenemos que

$$K = K_u r_b \cos(\phi_b),$$

$$T_i = \frac{T_u}{\pi} \left( \frac{1 + \sin(\phi_b)}{\cos(\phi_b)} \right),$$

$$T_d = \frac{T_u}{4\pi} \left( \frac{1 + \sin(\phi_b)}{\cos(\phi_b)} \right).$$

Si comparamos estas expresiones con las dadas por el método de la respuesta en frecuencia de Ziegler–Nichols, podemos observar que las fórmulas tienen la misma forma pero con distintos valores numéricos. Eligiendo  $r_b = 0,5$  y  $\phi_b = 20^\circ$  podemos obtener sistemas con mayor amortiguamiento que con las reglas originales de Ziegler–Nichols.

## 4.4 Método de ajuste basados en optimización

La teoría de control óptimo tiene por objetivo hallar procedimientos que permitan obtener la acción de control que más se acerca a lograr el comportamiento ideal del sistema de lazo cerrado. En los problemas de control óptimo se debe especificar por un lado la estructura del controlador y por el otro establecer de alguna manera lo que entendemos por comportamiento ideal. Aquí nos concentraremos en controladores con una estructura tipo PID, por tanto, buscamos un procedimiento de optimización que nos provea los valores más adecuados de  $K$ ,  $T_i$  y  $T_d$ .

El comportamiento ideal se especifica a través de un índice de performance. Este índice se define de manera tal que disminuya su valor en la medida que los parámetros del controlador se acercan a los valores que logran el comportamiento ideal. Por definición, los valores de los parámetros para los cuales el índice alcanza el mínimo se denominan valores óptimos. Debemos tener en cuenta que un controlador óptimo bajo determinado índice no es óptimo bajo otro índice de performance.

Algunos de los índices más utilizados para cuantificar la cercanía al comportamiento óptimo son los IAE, ICE, etc. que presentamos en la Sección 4.2. Los índices de performance como el IAE, ICE, etc. se calculan integrando una función del error (el valor absoluto en el caso del IAE, el cuadrado en el caso del ICE, etc.). La integral se extiende desde el instante en que aparece la perturbación o cambio en el setpoint hasta un tiempo bastante posterior, ya que no se puede fijar de antemano la duración de las respuestas.

Para poder calcular el error en función del tiempo necesitamos un modelo que describa el comportamiento dinámico de la planta. En general, en los métodos basados en la minimización de los criterios de performance suponen que el comportamiento dinámico de la planta está descrito por

$$G_p(s) = \frac{K_p}{s\tau + 1} e^{-sL}. \quad (4.9)$$

Otro punto que debemos establecer es el tipo y forma de la entrada. El tipo de entrada se refiere a si optimiza para un cambio en el setpoint o para una perturbación en la entrada de la planta. La forma tiene que ver el tipo de señal, un escalón, un impulso, etc.

Una vez establecido el índice de performance, un modelo para el proceso y el tipo y forma de la entrada, es posible determinar el juego de parámetros del controlador óptimo. Los valores de los parámetros se resumen en la Tabla 4.4 para los casos de rechazo de perturbaciones en la entrada de la planta y en la Tabla 4.5 para los casos de seguimiento de referencia. Para el caso de rechazo de perturbaciones (Tabla 4.4), los parámetros del controlador se calculan con las siguientes fórmulas

$$K = \frac{a_1}{K_p} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}, \quad T_i = \frac{T}{a_2} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_2}, \quad T_d = a_3 T \left( \frac{L}{T} \right)^{b_3}.$$

y para el caso de seguimiento de referencia (Tabla 4.5), con

$$K = \frac{a_1}{K_p} \left( \frac{L}{T} \right)^{b_1}, \quad T_i = \frac{T}{a_2 + b_2(L/T)}, \quad T_d = a_3 T \left( \frac{L}{T} \right)^{b_3}.$$

Debemos notar que todos los índices se vuelven indeterminados cuando el error estacionario es no nulo, es decir, cuando no hay acción integral. En estos caso, se reemplaza la definición del error por la diferencia entre la variable controlada y el valor de estado estacionario.

#### **Ejemplo 4.6:** Ajuste utilizando las fórmulas para minimizar el IAE

Volvamos a considerar el proceso presentado en el Ejemplo 4.1, cuya transferencia es

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

**Tabla 4.4:** Fórmulas para obtener los parámetros del controlador que minimizan un índice de performance para rechazo perturbaciones

Controlador	Índice	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
<b>P</b>	<b>ICE</b>	1,411	–	–	–0,917	–	–
	<b>IAE</b>	0,902	–	–	–0,985	–	–
	<b>IAET</b>	0,490	–	–	–1,084	–	–
<b>PI</b>	<b>ICE</b>	1,305	0,492	–	–0,959	0,739	–
	<b>IAE</b>	0,984	0,608	–	–0,986	0,707	–
	<b>IAET</b>	0,859	0,674	–	–0,977	0,680	–
<b>PID</b>	<b>ICE</b>	1,495	1,101	0,560	–0,945	0,771	1,006
	<b>IAE</b>	1,435	0,878	0,482	–0,921	0,749	1,137
	<b>IAET</b>	1,357	0,842	0,381	–0,947	0,738	0,995

**Tabla 4.5:** Fórmulas para obtener los parámetros del controlador que minimizan un índice de performance para seguimiento de referencia

Controlador	Índice	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
<b>PI</b>	<b>IAE</b>	0,758	1,020	–	–0,861	–0,323	–
	<b>IAET</b>	0,586	1,030	–	–0,916	–0,165	–
<b>PID</b>	<b>IAE</b>	1,086	0,740	0,348	–0,869	–0,130	0,914
	<b>IAET</b>	0,965	0,796	0,308	–0,855	–0,147	0,9292

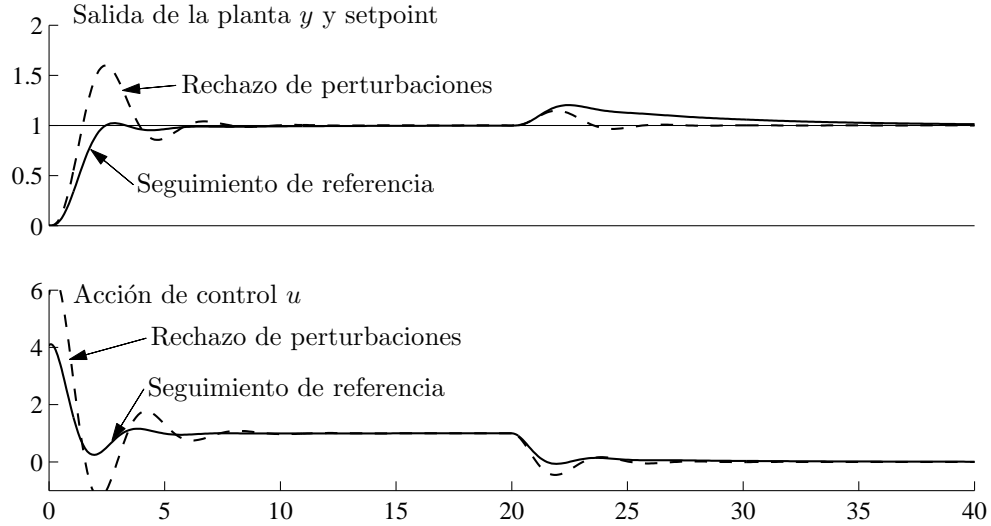
De la respuesta al escalón tenemos que  $K_p = 1$ ,  $T = 3,697$  y  $L = 0,806$ . Con estos valores ingresamos en las Tablas 4.4 y 4.5 y obtenemos, para el caso de cambios en el setpoint  $K = 4,08$ ,  $T_i = 6,09$  y  $T_d = 0,679$  y para el caso de rechazo de perturbaciones  $K = 5,83$ ,  $T_i = 1,345$  y  $T_d = 0,574$ .

En la Figura 4.9, podemos observar la respuesta del sistema de lazo cerrado a un escalón en el setpoint seguido de uno en la perturbación. Claramente podemos observar que los controladores logran una buena respuesta en los casos para los que fueron optimizados. El controlador optimizado para cambios en el setpoint, presenta un sobrepaso pequeño, como es deseable en este caso, pero el rechazo a la perturbación no es tan efectiva. Mientras que el controlador optimizado para el rechazo a perturbaciones logra una rápida corrección del apartamiento del error originado por la perturbación, pero un sobrepaso excesivo ante un escalón en el setpoint.

## 4.5 Métodos de ajuste analíticos

Existen varios métodos de ajuste donde la transferencia del controlador se obtiene por cálculo directo desde las especificaciones. Esto es, si  $G_p$  y  $G_c$  son las transferencias de





**Figura 4.9:** Simulación de un sistema de lazo cerrado ajustado según los métodos para minimizar el índice IAE (Ejemplo 4.6).

la planta y del controlador, respectivamente, la transferencia de lazo cerrado es

$$G_0 = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c}.$$

De donde tenemos que la transferencia del controlador es

$$G_c = \frac{1}{G_p} \frac{G_0}{1 - G_0}. \quad (4.10)$$

Luego, si traducimos las especificaciones en una transferencia de lazo cerrado  $G_0$  y conocemos la transferencia de la planta  $G_p$  podemos determinar la transferencia del controlador  $G_c$ .

La ecuación (4.10) nos indica que los polos y los ceros de la planta serán cancelados por el controlador. Esto significa que el método no podrá ser aplicado a plantas con polos y ceros poco amortiguados. El método tampoco logrará un buen rechazo de perturbaciones en los casos donde se cancelen polos lentos.

#### 4.5.1 Método de ajuste- $\lambda$

El método denominado ajuste- $\lambda$  ha sido desarrollado para plantas con demoras importantes. En este caso, consideramos que la transferencia de la planta es

$$G_p = \frac{K_p}{1 + sT} e^{-sL}$$

y asumimos que la transferencia de lazo cerrado deseada tiene la forma

$$G_0 = \frac{e^{-sL}}{1 + s\lambda T},$$

donde  $\lambda$  es un parámetro de sintonía. Si  $\lambda = 1$ , las transferencias de lazo cerrado y lazo abierto coinciden. En cambio, el sistema de lazo cerrado responderá en forma más

rápida que el sistema de lazo abierto cuando  $\lambda < 1$  y responderá más lento cuando  $\lambda > 1$ .

Luego, utilizando la ecuación (4.10) llegamos a la conclusión de que la transferencia del controlador debe ser

$$G_c = \frac{1 + sT}{K_p(1 + s\lambda T - e^{-sL})}. \quad (4.11)$$

Este controlador tiene acción integral ya que  $G_c(0) = \infty$ . La relación entre la entrada y la salida del controlador es

$$(1 + s\lambda T - e^{-sL})U(s) = \frac{1}{K_p}(1 + sT)E(s)$$

de donde obtenemos que

$$U(s) = \frac{1}{\lambda K_p} \left(1 + \frac{1}{sT}\right) \left(E(s) - \frac{K_p}{1 + sT}(1 - e^{-sL})U(s)\right). \quad (4.12)$$

Cuando  $L = 0$ , esta expresión corresponde a un controlador PI con ganancia  $K = 1/\lambda K_p$  y tiempo integral  $T_i = T$ . El término

$$U(s) = \frac{K_p}{1 + sT}(1 - e^{-sL})U(s)$$

lo podemos interpretar como una predicción de la salida de la planta en el tiempo  $t$  basada en los valores de la acción de control en el intervalo  $(t - L, t)$ . El controlador dado por la (4.12) puede considerarse un controlador PI predictivo donde la predicción es formada corrigiendo los efectos de la acción de control que ha sido aplicada pero que aún no aparecen en la salida de la planta. Debido a sus propiedades predictivas, este controlador suele llamarse controlador PI predictivo (PPI). En los casos donde la demora es importante, la (4.12) logra una mejor predicción que un término derivativo.

Hemos visto que el error integral (IE) de un controlador PI es  $T_i/K$ . Si ajustamos los parámetros del controlador con el primer método de Ziegler–Nichols, tenemos que

$$IE_{ZN} = \frac{K_p L^2}{0,6T}.$$

Si, en cambio, utilizamos el método de ajuste- $\lambda$  podemos encontrar que

$$IE_{PPI} = K_p(L + \lambda T).$$

En el caso del método de ajuste- $\lambda$ , vemos que el IE es menor cuando  $L$  es grande y  $\lambda$  pequeño. Por otro lado, tenemos que la sensibilidad cuando utilizamos un controlador PPI es

$$S(s) = 1 - \frac{e^{-sL}}{1 + s\lambda T} = \frac{1 + s\lambda T - e^{-sL}}{1 + s\lambda T}.$$

Es posible probar que  $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|$  siempre es menor de 2. Un valor aproximado de esta cantidad está dada por

$$M_s = 2 - \lambda \frac{T}{L},$$

de donde deducimos que  $M_s$  será menor cuanto mayor sea  $\lambda$ .

Podemos notar, entonces, que valores pequeños de  $\lambda$  reducen el error integral, pero también reduce el margen de estabilidad dado por  $M_s$ . En la práctica es común adoptar valores de  $\lambda$  entre 0,5 y 5.

**Ejemplo 4.7: Método de ajuste- $\lambda$** 

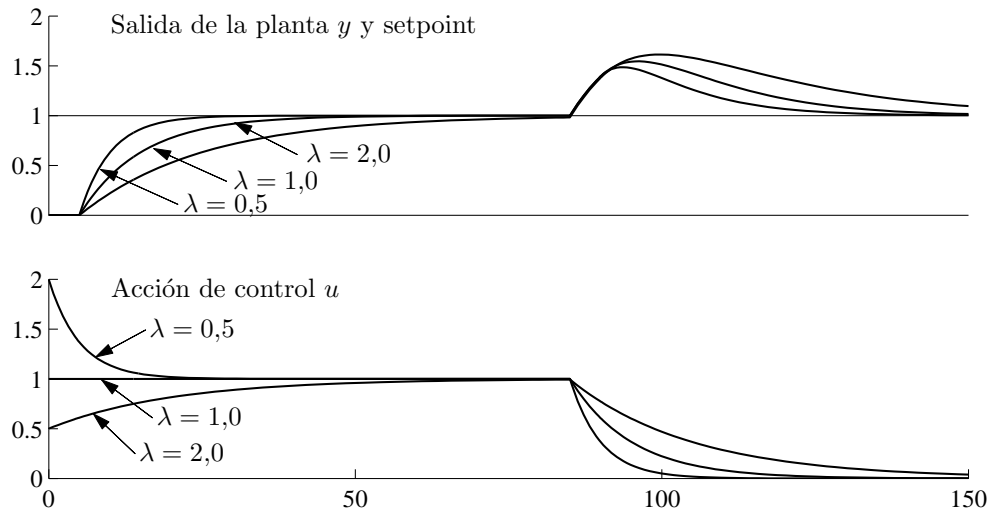
Para ilustrar el uso del método de ajuste- $\lambda$ , tomemos un proceso cuyo comportamiento puede ser aproximado por

$$G_p = \frac{1}{1 + 10s} e^{-5s}.$$

Entonces el método de ajuste- $\lambda$  indica que el controlador será

$$U(s) = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{10s} \right) \left( E(s) - \frac{1}{1 + 10s} (1 - e^{-s5}) U(s) \right). \quad (4.13)$$

En la [Figura 4.10](#), podemos observar las respuestas del sistema de lazo cerrado a un escalón en el setpoint seguido de un escalón en la perturbación. Las distintas curvas corresponden a tres valores del parámetro  $\lambda$ . Resulta claro que el parámetro  $\lambda$  gobierna la respuesta de lazo cerrado. Podemos observar que en la medida que  $\lambda$  decrece el sistema responde más rápido.



**Figura 4.10:** Simulaciones correspondientes a un sistema de lazo cerrado donde el controlador se diseñó según el método de ajuste- $\lambda$  (Ejemplo 4.7).

### 4.5.2 El método Haalman

Un enfoque alternativo es partir de la transferencia de lazo deseada  $G_l$  para determinar la transferencia del controlador

$$G_c(s) = \frac{G_l}{G_p} \quad (4.14)$$

donde  $G_p$  es la transferencia de la planta. Este enfoque puede resultar en controladores PI o PID si las transferencias  $G_l$  y  $G_p$  son suficientemente simples.

Existen diversas formas de obtener una  $G_l$  deseada. Para sistemas con demora  $L$ , Haalman ha propuesto tomar

$$G_l(s) = \frac{2}{3L} e^{-sL} \quad (4.15)$$

El valor  $2/3$  se obtiene de minimizar el error cuadrático ICE para un cambio tipo escalón en el setpoint. Esta elección da un valor de sensibilidad  $M_s = 1,9$ , lo cual es un valor razonable. Podemos notar que sólo la demora  $L$  influye en la transferencia del lazo. Esto implica que todos los polos y los ceros deben ser cancelados, lo cual puede ser una desventaja.

Cuando aplicamos el método de Haalman en un proceso con transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + sT} e^{-sL}$$

el controlador resulta

$$G_c(s) = \frac{2(1 + sT)}{2Ls} = \frac{2T}{3L} \left( 1 + \frac{1}{sT} \right).$$

Esta transferencia corresponde a un controlador PI con ganancia  $K = 2T/3L$  y tiempo integral  $T_i = T$ . En cambio, cuando consideramos que la transferencia de la planta es

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} e^{-sL}$$

el controlador resulta ser PID con ganancia  $K = 2(T_1 + T_2)/3L$ , tiempo integral  $T_i = T_1 + T_2$  y tiempo derivativo  $T_d = T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$ . Para procesos más complejos es necesario aproximar la dinámica de la planta.

Una de las desventajas de métodos como el de Haalman es la cancelación de polos y ceros. Cuando se cancelan polos y ceros, habrá modos no controlables en el sistema de lazo cerrado. Si estos modos son excitados puede dar como resultado un deterioro considerable de la performance. El problema es más acentuado si la cancelación involucra a modos lentos o inestables. El siguiente ejemplo ilustra los efectos de la cancelación.

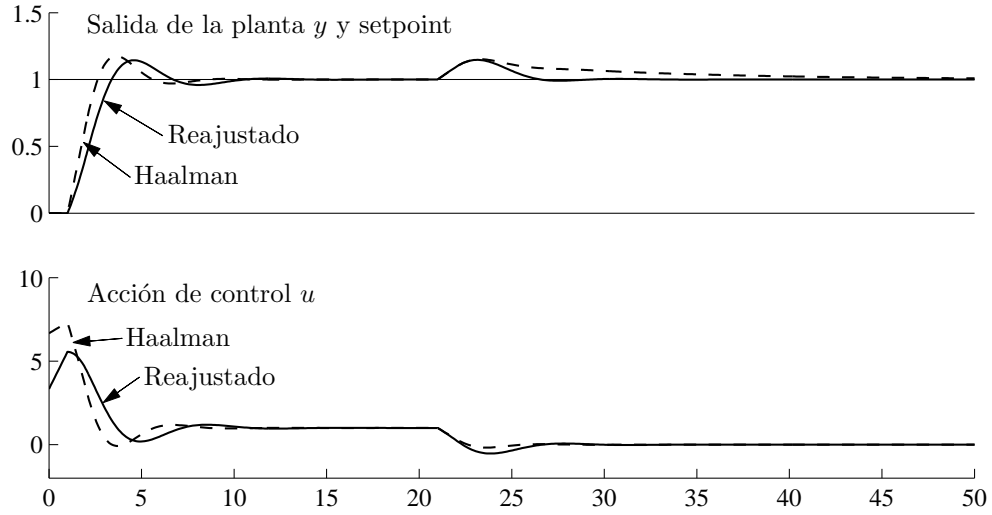
#### **Ejemplo 4.8:** Pérdida de controlabilidad debido a cancelación polo–cero

Consideremos un proceso cuya transferencia es

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + 10s} e^{-s}.$$

En este caso, el método de Haalman establece que el controlador PI tendrá ganancia  $K = 6,67$  y tiempo integral  $T_i = 10$ . En la [Figura 4.10](#), podemos ver la respuesta del sistema de lazo cerrado ante un escalón en el setpoint seguido de uno en la perturbación. Una de las curvas corresponde a un controlador ajustado según el método de Haalman y la otra curva corresponde a un controlador PI reajustado con  $K = 6,67$ ,  $T_i = 3$  y  $b = 0,5$ . Podemos observar que en el caso del controlador de Haalman la respuesta al cambio en el setpoint es muy buena pero que el rechazo a la perturbación es bastante malo. La razón de esto es que el controlador cancela el polo en  $s = -0,1$  con un cero en  $s = -0,1$ . Podemos notar que la salida de la planta, luego de producirse la perturbación, decrece con una constante de tiempo  $T = 10$  pero que la acción de control es prácticamente constante debido a la cancelación. En cambio, en el controlador PI reajustado, donde hemos reducido el tiempo integral, el rechazo de la perturbación mejora notablemente ya que no hay cancelación entre polos y ceros.

Debemos tener en cuenta que los efectos de la cancelación entre polos y ceros se pone de manifiesto si el modo cancelado es excitado. Por este motivo no apreciamos el efecto cuando se aplica un cambio en el setpoint.

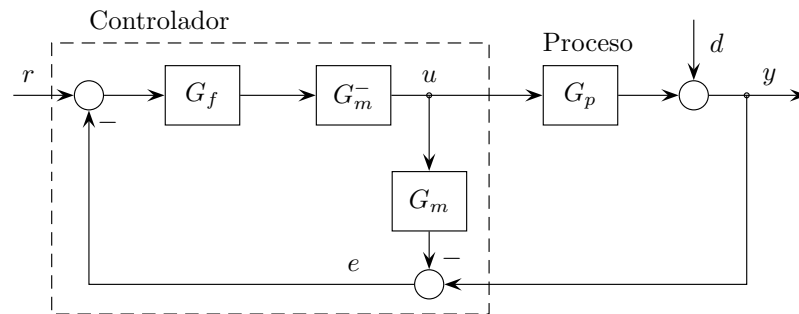


**Figura 4.11:** Ilustración del efecto de la cancelación de modos lentos. Las simulaciones corresponden a sistemas de lazo cerrado con un controlador sintonizado según el método de Haalman y con un PI reajustado (Ejemplo 4.8).

## 4.6 Controladores de modelo interno (IMC)

Uno de los problemas de los métodos analíticos que hemos visto en la sección previa es que requieren invertir el modelo de la planta. Esto puede conducir a controladores irrealizables o inestables. Otra desventaja es que no se consideran los errores de modelado. Para salvar estas limitaciones se ha propuesto el principio de modelo interno, el cual es un método general para el diseño de controladores que puede aplicarse al diseño de controladores PID.

La Figura 4.12 muestra un diagrama en bloque de un sistema de lazo cerrado con un controlador por modelo interno (IMC). En este diagrama se supone que todas las perturbaciones son reducidas a una perturbación  $d$  que actúa sobre la salida de la planta. El símbolo  $G_m$  representa un modelo de la planta cuya transferencia real es  $G_p$  (la cual consideramos desconocida). La transferencia  $G_f$  es un filtro pasa bajos. El nombre modelo interno proviene del hecho de que el controlador contiene internamente un modelo de la planta, el cual es conectado en paralelo al proceso.



**Figura 4.12:** Diagrama en bloques de un controlador de modelo interno (IMC).

En la técnicas de IMC el modelo de la planta se factoriza en la forma

$$G_m = \frac{G_m^+}{G_m^-}$$

donde la transferencia  $G_m^+$  tiene la demora, los ceros de no mínima fase y tiene ganancia de continua unitaria.  $G_m^-$  es la inversa aproximada de la transferencia de la planta.

A partir del diagrama en bloques de la [Figura 4.12](#) tenemos la acción de control resulta

$$U(s) = \frac{G_f G_m^-}{1 - G_f G_m^+} (R(s) - Y(s)) = G_c(s) (R(s) - Y(s)). \quad (4.16)$$

La variable controlada resulta

$$Y(s) = \frac{G_p G_f G_m^-}{1 + G_f G_m^- (G_p - G_m)} R(s) + \frac{1 - G_f G_m^+}{1 + G_f G_m^- (G_p - G_m)} D(s) \quad (4.17)$$

El filtro  $G_f$  se toma por lo general de la forma

$$G_f = \frac{1}{(sT_f + 1)^r}$$

donde  $T_f$  es la constante de tiempo del sistema de lazo cerrado deseada y  $r$  es un entero positivo que se elige de manera que el orden del polinomio numerador de  $G_c$  no supere al orden del denominador en más de uno.

Si disponemos de un modelo exacto para el proceso, es decir  $G_m = G_p$ , la señal  $e$  será igual a la perturbación  $d$  para toda acción de control  $u$ . Si, además,  $G_f = 1$  y la  $G_m^-$  es una inversa perfecta del modelo de la planta, entonces la perturbación  $d$  será perfectamente cancelada. El filtro  $G_f$  se incluye para que el sistema sea menos sensible a los errores de modelado.

En general, el principio de modelo interno da como resultado un controlador de orden elevado. Sin embargo, con ciertas suposiciones es posible obtener controladores del tipo PI o PID. Por ejemplo, si tenemos una planta modelada por la transferencia

$$G_m(s) = \frac{K_p}{1 + sT} e^{-sL}. \quad (4.18)$$

Entonces, podemos factorizarla en la forma

$$G_m^-(s) = \frac{1 + sT}{K_p}, \quad G_m^+(s) = e^{-sL}.$$

Notemos que no se ha incluido la demora en la inversa. La demora la podemos aproximar por

$$e^{-sL} \approx 1 - sL$$

y como filtro podemos tomar

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + sT_f}.$$

Luego, con estas suposiciones tenemos que el controlador será

$$G_c(s) = \frac{1 + sT}{K_p s(L + T_f)}$$

el cual tiene la forma de un controlador PI, con ganancia  $K = T/K_p(L + T_f)$  y tiempo integral  $T_i = T$ .

Si, en cambio, usamos la aproximación de Padé de primer orden para demora, es decir,

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - sL}{1 + sL}$$

obtenemos un controlador del tipo PID

$$G_c(s) = \frac{(1 + sL/2)(1 + sT)}{K_p s(L + T_f + sT_f L/2)} \approx \frac{(1 + sL/2)(1 + sT)}{K_p s(L + T_f)}.$$

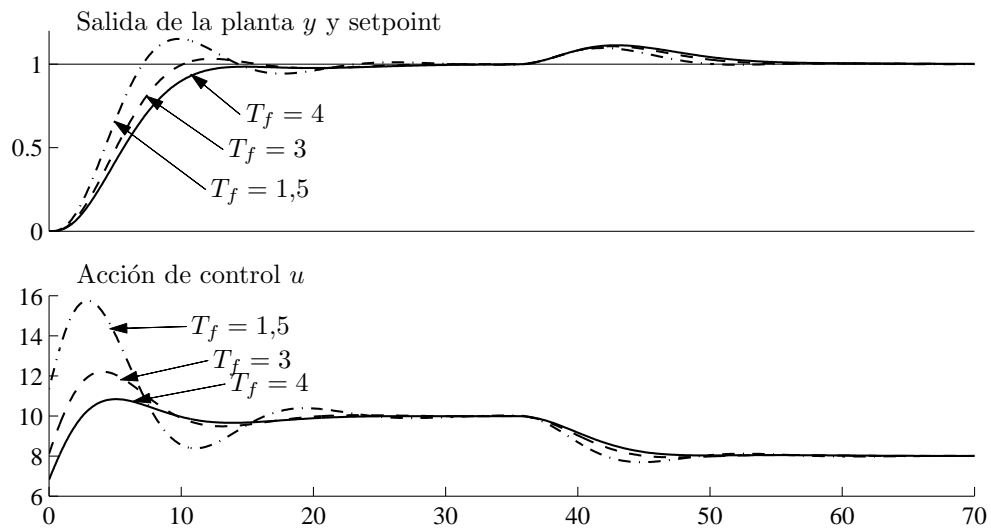
#### Ejemplo 4.9: Controlador PID IMC

Consideremos una planta modelada con una transferencia

$$G_l(s) = \frac{2}{1 + s} e^{-s}.$$

De acuerdo a lo que hemos visto un controlador PI diseñado según las técnicas IMC tendrá una ganancia  $K = 1/2(1 + T_f)$  y el tiempo integral  $T_i = 1$ .

En la [Figura 4.13](#), podemos ver la respuesta del sistema de lazo cerrado ante un escalón en el setpoint seguido de uno en la perturbación. Las simulaciones corresponden a tres controladores diseñados según el método IMC con  $T_f = 0,1$ ,  $T_f = 0,5$  y  $T_f = 1$ , respectivamente. Podemos observar que en la medida que reducimos la constante  $T_f$  la respuesta se vuelve más rápida y la acción de control resulta más agresiva. También podemos observar que la respuesta al cambio en el setpoint es muy buena pero que el rechazo a la perturbación no tanto. Nuevamente, la razón de este comportamiento es la cancelación entre polos y ceros.



**Figura 4.13:** Simulaciones correspondientes a un sistema de lazo cerrado con un controlador sintonizado según el método IMC (Ejemplo 4.9).

Una característica interesante de los controladores IMC es que la robustez es considerada explícitamente durante el diseño. La robustez de los controladores IMC se logra una elección apropiada del filtro  $G_f$ . Utilizando el parámetro  $T_f$  es posible hallar un compromiso entre performance y robustez. Los controladores IMC pueden lograr una muy buena respuesta a los cambios en el setpoint pero el rechazo de las perturbaciones puede ser deficiente. Esto es consecuencia de la cancelaciones de polos y ceros. Sin embargo, este inconveniente puede salvarse con una estructura de dos grados de libertad.

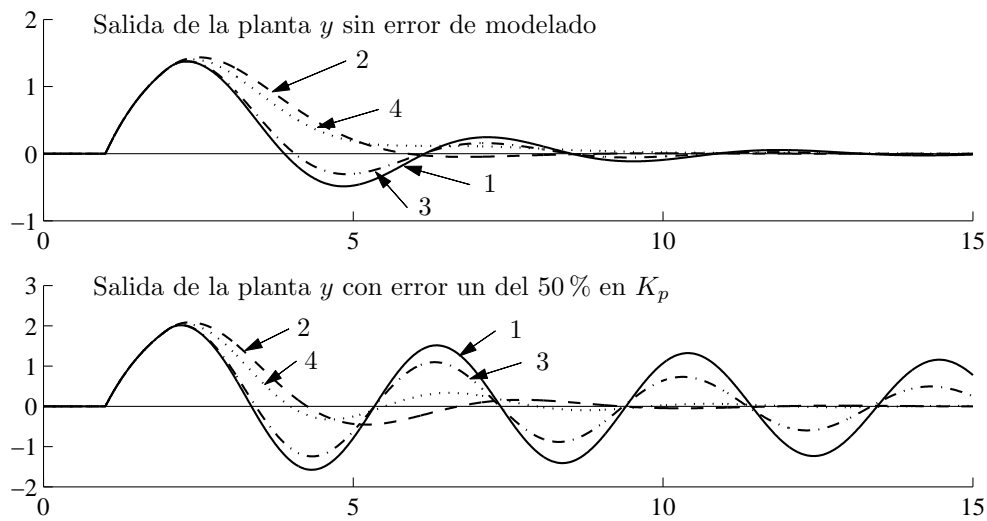
#### Ejemplo 4.10: Controlador PID IMC (Robustez)

Consideremos nuevamente una planta modelada con una transferencia

$$G_l(s) = \frac{2}{1+s} e^{-s}.$$

En la [Figura 4.14a](#), podemos ver la respuesta de sistemas de lazo cerrado formados con distintos controladores. Las curvas 1 y 2 corresponden a controladores PI diseñados según las fórmulas IMC con  $T_f = 0$  y  $T_f = 0,8$ , la curva 3 a un controlador PI diseñado con las fórmulas de Cohen–Coon y la curva 4 a un controlador PI diseñado con las fórmulas IAE para el rechazo de perturbaciones. Podemos observar que los métodos IAE y IMC con  $T_f = 0,8$  presentan el mejor rechazo de la perturbación.

Si con los mismos controladores ahora introducimos un error del 50 % en la ganancia de la planta obtenemos las respuestas mostradas en la [Figura 4.14b](#). Podemos notar que las respuestas obtenidas con los controladores sintonizados según Cohen–Coon y IAE es ahora inaceptable. En cambio, los controladores diseñados según el método IMC presentan una respuesta bastante aceptable. La robustez es una de las características más interesantes del método IMC.



**Figura 4.14:** Ilustración de la robustez de los controladores diseñados según varios métodos (Ejemplo 4.10). 1) IMC con  $T_f = 0$ , 2) IMC con  $T_f = 0,8$ , 3) Cohen–Coon y 4) IAE (perturbación).



En forma similar a lo que hicimos en el caso del modelo (4.18), podemos hallar fórmulas para ajustar los parámetros del controlador para otros modelos. Estas fórmulas se resumen en la [Tabla 4.6](#).

**Tabla 4.6:** Parámetros de controladores PID según el método IMC

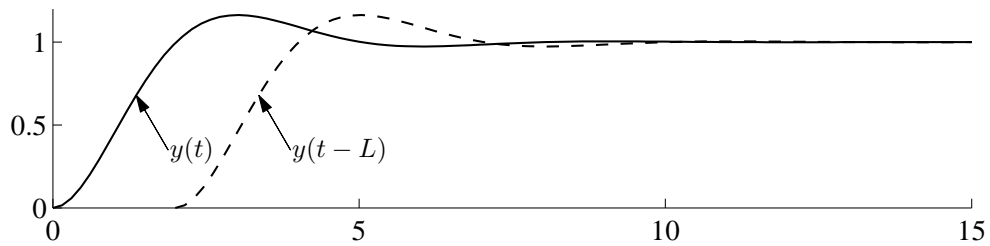
Modelo	$K$	$T_i$	$T_d$
$\frac{K_p}{1 + sT}$	$\frac{T}{K_p T_f}$	$T$	0
$\frac{K_p}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	$\frac{T_1 + T_2}{K_p T_f}$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$
$\frac{K_p}{T^2 s^2 + s\xi T s + 1}$	$\frac{2\xi T}{K_p T_f}$	$2\xi T$	$\frac{T}{s\xi}$
$\frac{K_p(-\beta s + 1)}{T^2 s^2 + s\xi T s + 1}$	$\frac{2\xi T}{K_p(\beta + T_f)}$	$2\xi T$	$\frac{T}{s\xi}$
$\frac{K_p}{s}$	$\frac{1}{K_p T_f}$	$\infty$	0
$\frac{K_p}{s(1 + sT)}$	$\frac{1}{K_p T_f}$	$\infty$	0

## 4.7 El predictor de Smith

En los casos donde sea necesario controlar plantas con demoras importantes, un esquema de control conocido como predictor de Smith puede lograr muy buenos resultados. El predictor de Smith se basa en el siguiente principio, supongamos que deseamos diseñar un controlador para una planta descrita por

$$G_p(s) = G(s)e^{-sL} \quad (4.19)$$

donde  $G(s)$  es la transferencia sin la demora. Supongamos, además, que un controlador  $G_c(s)$  ha sido diseñado de manera tal que la repuesta a un escalón del sistema de lazo cerrado formado por  $G(s)$  y  $G_c(s)$  es la señal  $y(t)$  indicada en la [Figura 4.15](#). El principio de Smith dice que  $y(t - L)$  es la respuesta al escalón deseada para el sistema de lazo cerrado formado por  $G_p(s)$  y un controlador  $G_{cs}(s)$  a determinar.



**Figura 4.15:** Ilustración del principio de Smith.

Veamos cual sería el controlador  $G_{cs}(s)$  que estamos buscando. De acuerdo al principio

de Smith, la respuesta deseada para el sistema con demora está dada por la transferencia

$$\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}e^{-sL}. \quad (4.20)$$

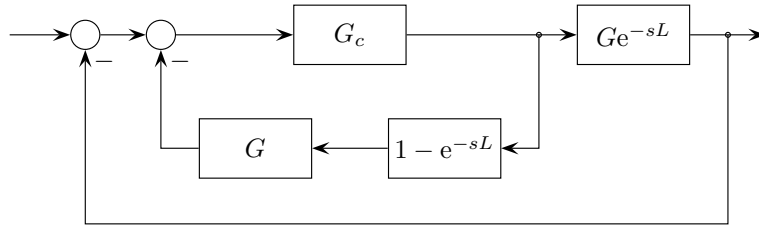
Por otro lado, la transferencia de lazo cerrado formada por  $G_p(s)$  y el controlador  $C_s(s)$  buscado es

$$\frac{G_{cs}(s)G(s)e^{-sL}}{1 + G_{cs}(s)G(s)e^{-sL}}. \quad (4.21)$$

Luego, igualando las ecuaciones (4.20) y (4.21) podemos obtener el controlador  $G_{cs}$  que satisface el principio de Smith, el cual está dado por

$$G_{cs}(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)(1 - e^{-sL})}. \quad (4.22)$$

La Figura 4.16 muestra un diagrama en bloque del sistema de lazo cerrado con el controlador (4.22).



**Figura 4.16:** Diagrama en bloques del controlador (4.22).

La ecuación (4.22) nos permite diseñar el controlador utilizando cualquiera de los métodos visto previamente sin tener en cuenta la demora de la planta. Una vez obtenido el controlador  $G_c(s)$  para el proceso sin demora, construimos el controlador  $G_{cs}(s)$  según la expresión (4.22).

Manipulando el diagrama en bloques de la Figura 4.16 es posible arribar al diagrama mostrado en la Figura 4.17. En dicha figura, hemos reemplazado  $G$  y  $L$  por  $G_m$  y  $L_m$  en el controlador. Esto nos permite diferenciar el modelo de la planta utilizado para calcular el controlador ( $G_me^{-sL_m}$ ) y la dinámica real de proceso descrita por  $Ge^{-sL}$ . Debemos tener en cuenta que siempre la transferencia describe el comportamiento dinámica de la planta en forma aproximada. Notemos que si  $G_me^{-sL_m}$  describe en forma exacta a la dinámica de la planta la señal en el punto E sería nula.

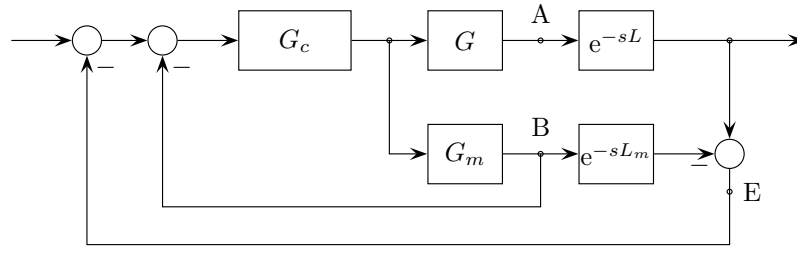
#### Ejemplo 4.11: Predictor de Smith

Para ilustrar el diseño de un predictor de Smith, consideremos una planta cuya transferencia es

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}e^{-3s}. \quad (4.23)$$

Para diseñar un predictor de Smith debemos hallar un modelo aproximado para la transferencia (4.23) con demora cero. Utilizando los métodos vistos en el Capítulo 2 podemos hallar

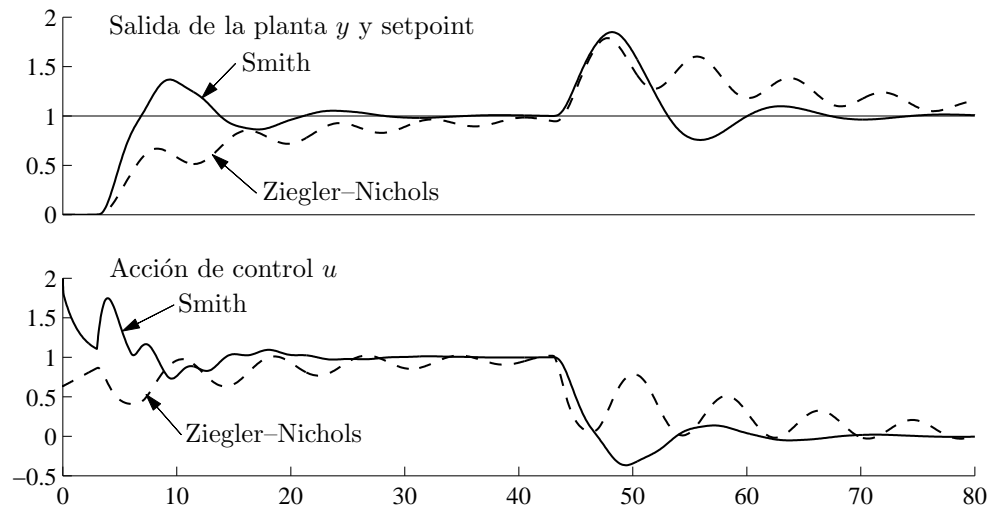
$$G_m(s) = \frac{1}{2,17s+1}e^{-1,12s}. \quad (4.24)$$



**Figura 4.17:** Diagrama en bloques de un predictor de Smith.

Luego, lo único que nos resta es diseñar el controlador  $G_c$ . Si utilizamos, por ejemplo, las reglas de Ziegler–Nichols para diseñar un PID para el modelo (4.24) obtenemos  $K = 2,32$ ,  $T_i = 2,25$  y  $T_d = 0,56$ .

En la [Figura 4.18](#) podemos ver la respuesta del sistema de lazo cerrado a un escalón en el setpoint seguido de uno en la perturbación. Las líneas continuas corresponden al lazo cerrado con el predictor de Smith, mientras que las líneas de trazos al sistema de lazo cerrado con un controlador PID diseñado según Ziegler–Nichols. Podemos observar que la respuesta del sistema con el predictor de Smith cumple con el principio de Smith. Esto es, el sistema de lazo cerrado presenta una respuesta similar con una tasa de atenuación de un  $1/4$  como es de esperar de PID diseñado por Ziegler–Nichols, pero con un retraso de 3 unidades de tiempo. Claramente la respuesta obtenida con el predictor de Smith es muy superior a la obtenida con un PID (sin predictor) diseñado según las reglas de Ziegler–Nichols. En este ejemplo la relación  $L/T$  es muy superior a uno, por lo que es de esperar que las reglas de Ziegler–Nichols no logren un buen diseño.



**Figura 4.18:** Simulaciones correspondientes a dos sistemas de lazo cerrado, uno formado con un predictor de Smith y otro con un controlador PID diseñado según Ziegler–Nichols (Ejemplo 4.11).



# 5

## Esquemas de control multivariables

### 5.1 Introducción

Hasta ahora nos hemos concentrado en problemas de control que involucran una acción de control y una única variable medida. Sin embargo, es muy común que los procesos tengan varias variables de control y varias variables medidas. Una forma de abordar el control de este tipo de plantas es construyendo un sistema de control a partir de componentes simples.

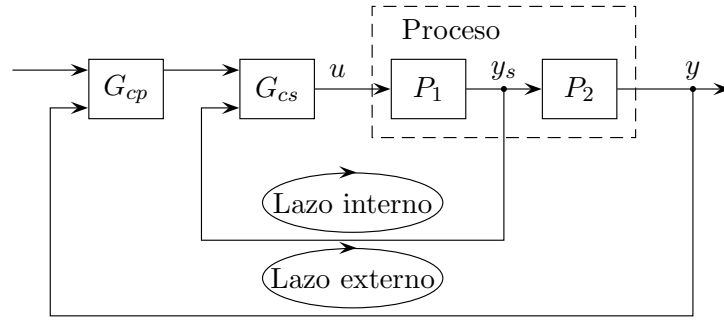
Existen un cierto número de paradigmas para construir sistemas de control complejos a partir de componentes simples. Los componentes suelen ser controladores PID, filtros y no linealidades estáticas. Simples lazos de realimentación son utilizados para mantener constantes las variables de la planta o para hacer que cambien de acuerdo a ciertas especificaciones. El problema clave es determinar cuales variables de control deben usarse para controlar una dada variable de la planta. Otro de los problemas es la interacción de los distintos lazos de realimentación. Todos estos temas los abordaremos en este capítulo.

### 5.2 Control en cascada

El control en cascada puede ser utilizado cuando tenemos varias señales medidas y una sola variable de control. En particular, es muy útil en procesos con grandes retardos y grandes constantes de tiempo entre la variable de control y la salida de la planta. En estos caso, el control puede mejorarse midiendo una variable intermedia que responda en forma más rápida a la variable de control.

Un esquema de control en cascada se construye con varios lazos de control anidados. En la [Figura 5.1](#) se ilustra un diagrama en bloques de un esquema de control en cascada

con dos lazos de control. En este caso, el lazo interno es llamado lazo secundario y el lazo externo es llamado lazo primario. La razón de esta denominación es que el lazo externo controla la variable primaria. En general, puede haber más de dos lazos anidados. La performance del sistema puede ser mejorada con una mayor cantidad de variables medidas pero existe un límite. Cuando todos los estados son medidos, en general no tiene sentido medir más variables. En esta situación, el control en cascada se reduce a una realimentación de estados. Para ilustrar los beneficios del control en cascada consideremos el siguiente ejemplo.



**Figura 5.1:** Diagrama en bloques de un esquema de control en cascada.

### Ejemplo 5.1: Mejora en el rechazo de perturbaciones

Consideremos un proceso como el mostrado en la [Figura 5.1](#), donde

$$G_{p1} = \frac{1}{s+1}, \quad G_{p2} = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

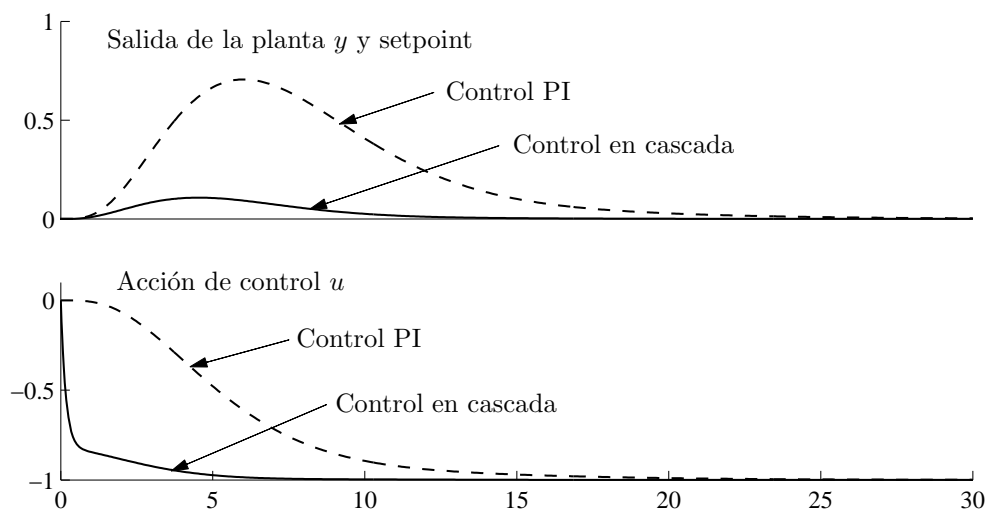
Supondremos que la perturbación ingresa en la entrada de la planta. Es claro que existe una considerable constante de tiempo entre la acción de control y la salida de la planta. Sin embargo, la salida secundaria responde mucho más rápida. En este caso, es esperable que el control en cascada logre mejoras en la performance. En un lazo de realimentación convencional, una elección razonable es un controlador PI con parámetros  $K = 0,37$  y  $T_i = 2,2$  (Usando los métodos discutidos en el [Capítulo 4](#). La respuesta del sistema de lazo cerrado con este controlador corresponde a la curva graficada con línea de trazos en la [Figura 5.2](#).

Ya que la respuesta de la variable secundaria a la variable de control es bastante rápida, es posible utilizar alta ganancia en el lazo secundario. Si aplicamos control proporcional  $K_s$  en el lazo interno, la transferencia desde el setpoint del controlador  $G_{cs}$  a la salida primaria es

$$G(s) = \frac{K_s}{(s+1+K_s)(s+1)^3}.$$

Esta dinámica es más rápida que la dinámica de lazo abierto, por lo cual podemos utilizar un controlador con mayor ganancia en el lazo externo. Con una ganancia  $K_s = 5$  en el lazo secundario y un controlador PI con parámetros  $K = 0,55$  y  $T_i = 1,9$  en el lazo externo, obtenemos la respuesta mostrada con línea continua en la [Figura 5.2](#). Claramente podemos observar una mejora sustancial al emplear control en cascada. En particular, podemos notar que la acción de control decrece mucho más rápido en el caso del control en cascada. Esto es consecuencia de haber hecho

el lazo interno más rápido, el cual es capaz de detectar la perturbación en forma rápida que el lazo externo. El control proporcional del lazo interno es el encargado de eliminar la mayor parte del error debido a la perturbación. El resto del error es eliminado más lentamente por el lazo externo.



**Figura 5.2:** Respuesta del sistema de lazo cerrado a una perturbación en la entrada del proceso. (Ejemplo 5.1).

### 5.2.1 Elección de las variables secundarias

Es importante que seamos capaces de juzgar los casos donde el control en cascada puede mejorar la performance y tener un método para seleccionar la variable secundaria. Para esto debemos tener en mente que la idea del control en cascada es plantear un control riguroso en torno a la perturbación. En el caso ideal, el control secundario es tan estricto que el lazo secundario se comporta como un servo ideal, en donde la variable secundaria responden muy rápidamente a la acción de control.

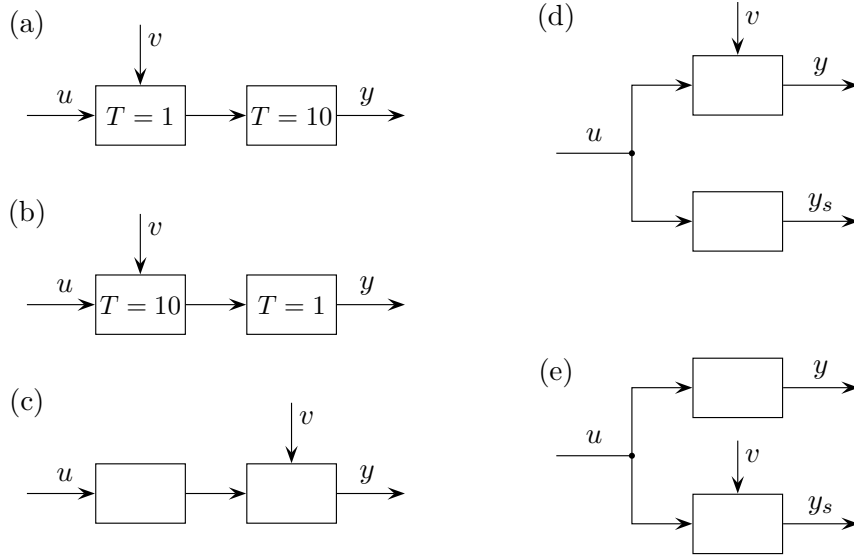
Para seleccionar la variable secundaria podemos seguir las siguientes reglas

- Debería existir una relación bien definida entre la variable primaria y la secundaria.
- Es esencial que la perturbación actúe sobre el lazo interno.
- El lazo interno debe ser más rápido que el lazo externo.
- Debería ser posible tener alta ganancia en el lazo interno.

Un caso muy habitual es plantear un lazo cerrado en torno al actuador. Esta realimentación cumple la función de un lazo interno.

En la [Figura 5.3](#) se ilustran varios esquemas de control de sistemas con una variable de control y dos variables medidas. En dicha figura, la variable de control es  $u$ , la

perturbación es  $v$ , la variable primaria es  $y$  y la variable secundaria es  $y_s$ . Siguiendo las reglas indicadas previamente, el caso (a) es el único en donde la aplicación del control en cascada trae beneficios.



**Figura 5.3:** Ejemplos de distintas configuraciones de plantas y mediciones.

### 5.2.2 Elección de los modos de control

Una vez que hemos elegido la variable secundaria nos resta decidir que tipo de controles aplicamos en cada lazo y como los sintonizamos. La elección se debe basar en la dinámica de la planta y la naturaleza de la perturbación.

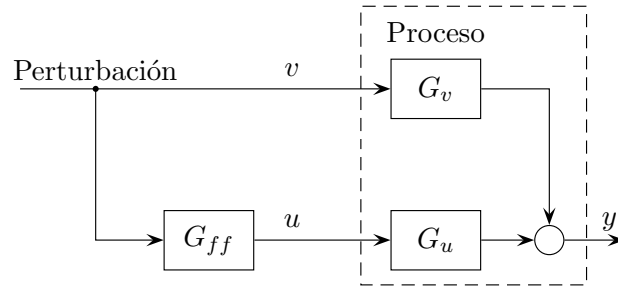
Es difícil dar reglas generales para elegir el tipo de control, sin embargo, podemos seguir las siguientes normas. El lazo secundario se concentra en eliminar el error debido a perturbaciones rápidas, mientras que el lazo primario se aboca a rechazar las perturbaciones lentas. En el esquema de la [Figura 5.1](#), para que el control en cascada sea efectivo,  $P_2$  debe ser más lento que  $P_1$  y la perturbación debe actuar sobre  $P_1$ . Suponiendo que estas condiciones se cumplen. Entonces, el controlador secundario puede ser del tipo P o PD y el controlador primario puede tener acción integral. Ésta puede ser útil para mejorar el rechazo de las perturbaciones lentas. Emplear acción integral en el lazo secundario no es conveniente. La acción integral en el lazo secundario origina sobrepasos en la respuesta del lazo primario.

Los controladores deben ser sintonizados en una secuencia adecuada. El controlador externo debe ponerse en manual cuando se sintoniza el controlador interno. Por el contrario, el controlador interno debe ponerse en automático cuando se sintoniza el controlador externo.



## 5.3 Control feedforward

Si bien las perturbaciones pueden ser rechazadas por medio de realimentación, es necesario que exista un error antes que el controlador tome las acciones correctivas necesarias. En ciertos casos, es posible medir las perturbaciones antes de que éstas afecten la salida de la planta. Cuando esto sucede, es natural tratar de eliminar las perturbaciones antes de que originen un error. Este esquema de control se conoce como **feedforward** y se ilustra en la Figura 5.4. El control feedforward se puede utilizar tanto en sistemas lineales como en no lineales, pero requiere un modelo matemático de la planta.



**Figura 5.4:** Diagrama en bloques de un control feedforward.

Para ilustrar el principio de control feedforward consideremos un sistema lineal con una salida  $y$  y dos entradas, la acción de control  $u$  y la perturbación  $v$ . La función de transferencia desde la perturbación a la salida es  $G_v$  y la transferencia desde la acción de control a la salida es  $G_u$ . La planta puede describirse por medio de la siguiente expresión

$$Y(s) = G_u(s)U(s) + G_v(s)V(s) \quad (5.1)$$

donde la transformada de Laplace de las variables se indica con letras mayúsculas. La ley de control feedforward

$$U(s) = -\frac{G_v(s)}{G_u(s)}V(s) \quad (5.2)$$

anula la salida para toda perturbación  $v$ . Por tanto, la transferencia de feedforward debería ser elegida como

$$G_{ff}(s) = -\frac{G_v(s)}{G_u(s)}. \quad (5.3)$$

El compensador feedforward es, en general, un sistema dinámico. La transferencia  $G_{ff}$  debe, por supuesto, ser estable, lo cual implica que  $G_v$  debe también ser estable.

Si la planta es caracterizado por las siguientes transferencias

$$G_u(s) = \frac{K_u}{1 + sT_u}, \quad G_v(s) = \frac{K_v}{1 + sT_v} \quad (5.4)$$

de la (5.3) tenemos que la transferencia de feedforward es

$$G_{ff} = -\frac{K_v}{K_u} \frac{1 + sT_u}{1 + sT_v}. \quad (5.5)$$

El control feedforward es mucho más sensible a los errores de modelado que el control por realimentación. Precisamente, como el control por feedforward se basa en la idea de cancelar dos señales, es necesario que el modelo de la planta sea razonablemente exacto. Como consecuencia, cualquier error de modelado se traduce en una degradación del rechazo de la perturbación. No obstante, a pesar de estas limitaciones, en muchos casos un filtro como el dado por la (5.5), o incluso una simple ganancia, logra muy buenos resultados.

La realimentación y el feedforward tienen propiedades complementarias. Con realimentación es posible reducir el efecto de las perturbaciones con frecuencias menores al ancho de banda del sistema. Con feedforward, en cambio, es posible rechazar las perturbaciones más rápidas. La realimentación es relativamente insensible a los errores de modelo, mientras que el feedforward es muy sensible a los cambios en los parámetros del modelo. La realimentación puede hacer inestable al sistema de lazo cerrado, mientras que el feedforward no afecta para nada la estabilidad. Por tanto, combinando la realimentación y el feedforward es posible lograr un control con buena performance.

## 5.4 Control de relación

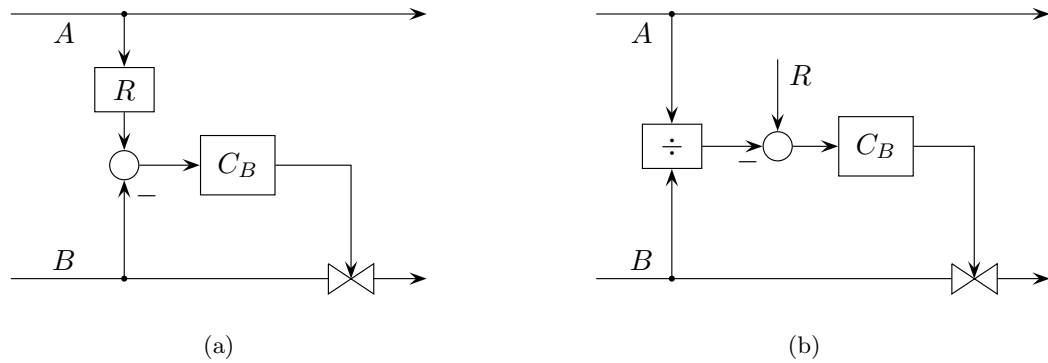
Cuando en un proceso se requiere mezclar distintas sustancias en una dada relación es común aplicar un esquema conocida como control de relación o de razón. En este tipo de sistema de control el objetivo es mezclar dos flujos,  $A$  y  $B$ , en una dada proporción o relación  $R = A/B$ . Claramente, la forma más simple de cumplir este objetivo es controlar cada flujo mediante dos lazos de control, cada uno con un valor de setpoint adecuado de manera de mezclar ambos flujos en la proporción correcta. Sin embargo, si uno de los flujos no puede ser controlado (por ejemplo, el flujo  $A$ ), sino únicamente medirlo, la tarea de control resulta más compleja. Ahora debemos hallar la forma de que el flujo  $B$  varíe en forma proporcional al flujo  $A$  para obtener una mezcla correcta.

Podemos plantear dos esquemas de control de relación. El primer esquema consiste en medir el flujo  $A$  y multiplicarlo por la relación  $R$  para utilizarlo como señal de setpoint del lazo de control del flujo  $B$  (Figura 5.5a). Con este esquema, el flujo  $B$  cambiará en forma acorde a los cambios del flujo  $A$  para mantener la mezcla en la proporción correcta. Cuando se requiera cambiar la proporción de la mezcla bastará con modificar la relación  $R$ . En el segundo esquema, se miden ambos flujos y se dividen para obtener la relación real entre los flujos (Figura 5.5b). Dicha relación se envía como señal de setpoint al controlador del flujo  $B$ . En la práctica se utilizan ambos esquemas pero el primero suele ser preferido pues se evita los elementos no lineales.

Los controladores de razón pueden implementarse fácilmente combinando controladores PI o PID con dispositivos sumadores y multiplicadores. Sin embargo, el control de relación es tan común que puede hallarse implementado en única unidad, denominada RPI o RPID (Ratio PI o Ratio PID).

## 5.5 Lazos interactuantes

La construcción de sistemas complejos a partir de componentes simples tiene la ventaja de reducir la complejidad ya que requiere pocos principios de control. En muchos casos,



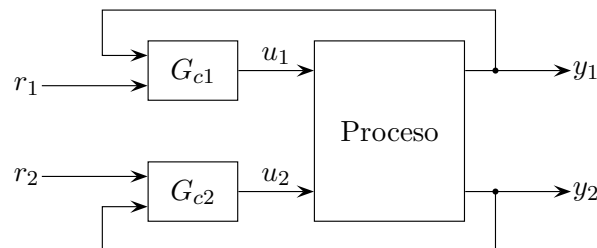
**Figura 5.5:** Esquemas de control de relación

podemos extrapolar la experiencia que tenemos en el diseño de lazos de control simples. Sin embargo, también existen algunas desventajas.

- Como no hemos determinado las limitaciones del sistema, no podemos saber si un refinamiento adicional traerá beneficios.
- Es fácil que el sistema se vuelva innecesariamente complejo. En los sistemas donde existen varios lazo de control puede suceder que los distintos lazos compitan entre ellos.
- Existen casos donde es difícil obtener un buen sistema total analizando lazo por lazo.

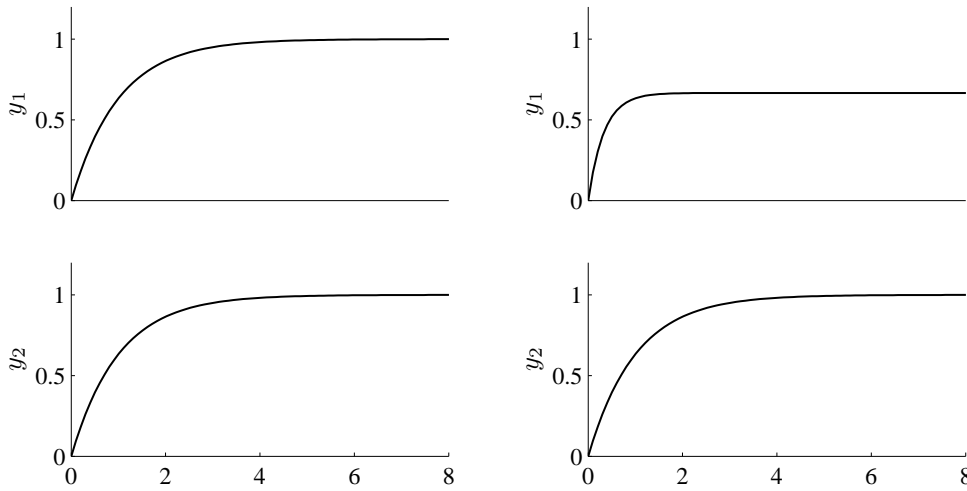
Cuando existen dificultades, es necesario utilizar planteos sistemáticos basados en modelos matemáticos y simulaciones. A continuación estudiaremos algunas de las dificultades que pueden surgir en el control de sistemas multivariables.

Los procesos que tiene muchas variables de control y muchas variables medidas se denominan sistemas MIMO (Multiple Input–Multiple Output). Los sistemas MIMO son bastante difíciles de controlar debido a la interacción entre las distintas variables. Un tratamiento completo del control de sistemas MIMO escapa a los objetivos del curso. Por tanto, nos limitaremos a estudiar las dificultades que pueden surgir en el control de un sistema con dos variables de control y con dos variables medidas. La [Figura 5.6](#) nos muestra un diagrama en bloques de dicho sistema de control.



**Figura 5.6:** Diagrama en bloques de un sistema de control de una planta de dos entradas y dos salidas.

En el sistema de la Figura 5.6 tenemos un esquema de control simple formado por dos controladores conectados en dos lazos simples. Para diseñar un control de este tipo, lo primero que debemos hacer es decidir con cual variable controlamos cada salida medida. Esto es, debemos decidir si la salida  $y_1$  la controlamos por medio de la variable  $u_1$  o de  $u_2$  y lo mismo respecto de la salida  $y_2$ . El problema resulta bastante directo si la interacción de los lazos es pequeña. Esto implica que el controlador  $G_{c1}$  afecta a la variable  $y_1$  pero casi no altera el valor de  $y_2$ . De la misma manera, el controlador  $G_{c2}$  afecta a la variable  $y_2$  pero no a la  $y_1$ . Para determinar si los lazos son interactuantes podemos hallar las respuestas de todas las salidas a todas las entradas. Si el acoplamiento entre los lazos es pequeño, los controladores pueden sintonizarse en forma independiente. Por el contrario, cuando los lazos están acoplados el diseño de los controladores se torna bastante dificultoso.



**Figura 5.7:** Respuesta de lazo abierto del sistema del Ejemplo 5.2. Los gráficos de la izquierda corresponden a la respuesta a un escalón en la entrada  $u_1$ . Los gráficos de la derecha a corresponden a la respuesta a un escalón en la entrada  $u_2$ .

### Ejemplo 5.2:

Consideremos un sistema de dos entradas y dos salidas. Un sistema de este tipo puede ser caracterizado por medio de transferencias que relacionen todas las entradas y todas las salidas. Estas transferencias se organizan en una matriz

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 2/(s+3) \\ 1/(s+1) & 1/(s+1) \end{bmatrix}$$

El primer índice indica la salida y el segundo la entrada, por ejemplo,  $g_{12}$  denota la transferencia entre la segunda entrada y la primera salida.

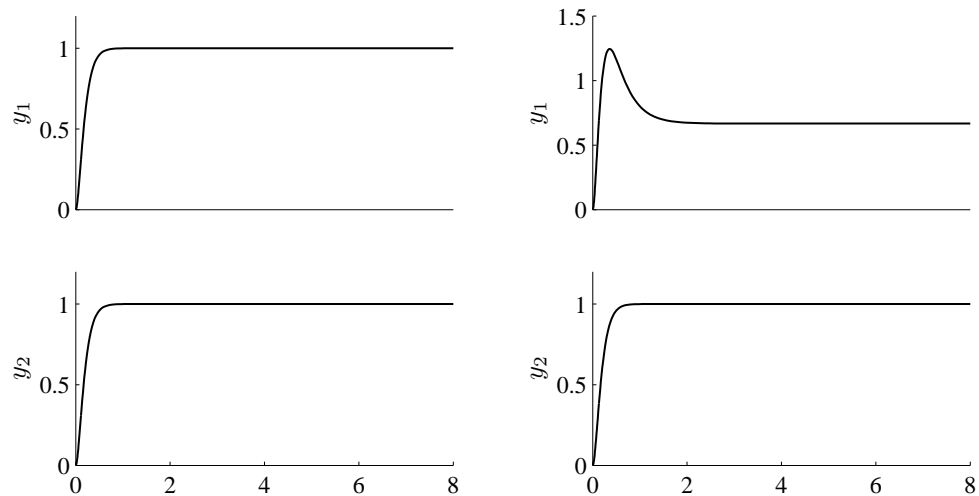
El comportamiento del sistema puede ser ilustrado graficando las respuestas al escalón a todas las entradas, como se muestra en la Figura 5.7. Esta figura nos muestra que existe una significativa interacción entre las señales. Sin embargo, las respuestas parecen indicar que la dinámica del sistema es bastante benigna. En este caso, no es obvio como las señales deben ser apareadas. Arbitrariamente, podemos tomar los pares  $u_1 - y_1$ ,  $u_2 - y_2$ . Una vez elegido los pares, si consideramos que no hay interacción el diseño del control se reduce a ajustar un controlador para cada lazo. En este

caso particular ambos controladores deben ser sintonizados para la transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

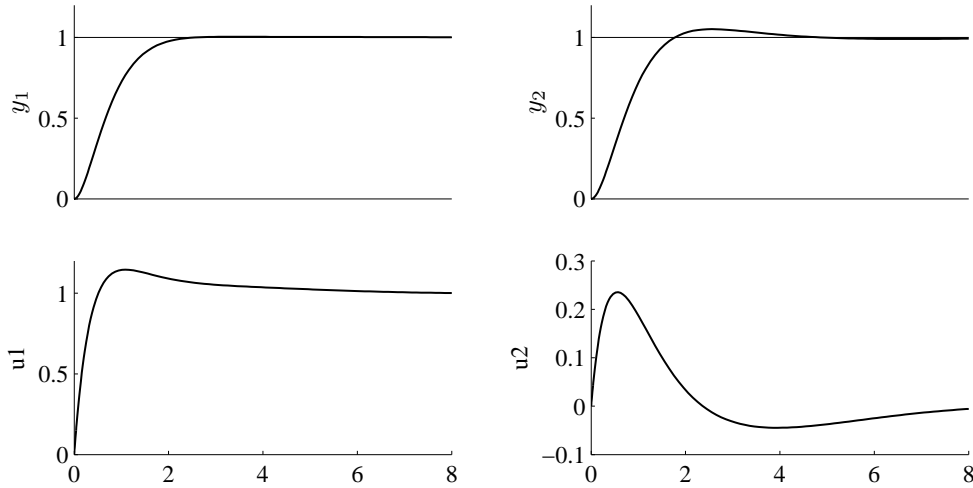
Una elección razonable es un controlador PI con  $K = 19$ ,  $b = 0$  y  $T_i = 0,19$ , con lo cual logramos que el sistema de lazo cerrado tenga un amortiguamiento relativo  $\xi = 0,7$  y frecuencia natural en 10 r/s. La Figura 5.8 muestra la respuesta obtenida con este controlador en un lazo mientras el otro permanece abierto. Podemos observar que la respuesta es como esperábamos pero que también hay una respuesta importante en las otras señales. Si ambos lazos son cerrados simultáneamente el sistema se vuelve inestable.

Para obtener una respuesta aceptable con ambos lazos cerrados es necesario reajustar los controladores. La Figura 5.9 muestra la respuesta obtenida cuando el controlador en el primer lazo tiene los parámetros  $K = 2$  y  $T_i = 0,5$  y el otro  $K = 0,8$  y  $T_i = 0,7$ . Las ganancias son de un orden de magnitud inferiores a los valores calculados para los lazos independientes. Podemos observar que las respuestas mostradas en la Figura 5.9 son considerablemente más lentas.



**Figura 5.8:** Respuesta al escalón con un lazo abierto y el otro cerrado para el sistema del Ejemplo 5.2. Los gráficos de la izquierda corresponden a la respuesta a un escalón en la entrada  $r_1$ , cuando el controlador  $G_{c2}$  está desconectado. Los gráficos de la derecha corresponden a la respuesta a un escalón en la entrada  $r_2$ , cuando el controlador  $G_{c1}$  está desconectado.

El ejemplo anterior muestra claramente las deficiencias de la sintonía lazo a lazo. Si bien el ejemplo elegido puede ser un poco extremo, pone de manifiesto que necesitamos una técnica que nos indique si las interacciones de las señales nos traerán dificultades. No existe un método universal para esto pero una idea puede ser obtenida con el arreglo de ganancias relativas (RGA). Este arreglo se puede calcular a partir de las ganancias estáticas de todos los lazos de un sistema multivariable. Para un sistema de  $2 \times 2$  como



**Figura 5.9:** Respuesta cuando ambos lazos están cerrados (Ejemplo 5.2). Los gráficos muestran la respuesta a cambios simultáneos del tipo escalón en el set-point en ambos lazos.

el del ejemplo anterior, el RGA es

$$R = \begin{bmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

donde

$$\lambda = \frac{g_{11}(0)g_{22}(0)}{g_{11}(0)g_{22}(0) - g_{12}(0)g_{21}(0)}.$$

El número  $\lambda$  es el cociente entre la ganancia desde  $u_1$  a  $y_1$  con el segundo lazo abierto y la ganancia desde  $u_1$  a  $y_1$  con el segundo lazo bajo un control muy estricto ( $y_2 = 0$ ). La interacción es nula si  $\lambda = 1$ , mientras que si  $\lambda = 0$  no hay interacción pero los lazos deberían ser intercambiados. Los lazos deberían ser intercambiados cuando  $\lambda < 0,5$ . La interacción es más severa cuando  $\lambda = 0,5$ .

Para un sistema MIMO la ganancia relativa es una matriz  $R$  en la cual el elemento  $r_{ij}$  está dado por

$$r_{ij} = g_{ij}h_{ji}$$

donde  $g_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz estática  $G(0)$  y  $h_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz estática  $H(0) = G^{-1}(0)$ .

Para aparear entradas y salidas es recomendable que la ganancia relativa correspondiente sea positiva y tan cercana a uno como sea posible. Si las ganancias están fuera del intervalo  $0,67 < \lambda < 1,5$ , el uso de técnicas de desacoplamiento puede lograr mejorar significativas en el control. Debemos tener en cuenta que la ganancia relativa se basa en las propiedades estáticas del sistema y, por tanto, no captura todos los aspectos de la interacción.