

Trajectory Tracking Control for a Differential Drive Wheeled Mobile Robot Considering the Dynamics Related to the Actuators and Power Stage

R. S. Ortigoza, J. R. G. Sánchez, V. M. H. Guzmán, C. M. Sánchez, and M. M. Aranda

Abstract— In this work a three-level controller that carries out the trajectory tracking task for a differential drive wheeled mobile robot (WMR) is presented. Such a controller considers, for the first time in literature, the dynamics associated with the three subsystems that compose a WMR, i.e., *mechanical structure*, *actuators*, and *power stage*. The high level corresponds to an input-output linearization control for the *mechanical structure*; the medium level is based on two sensorless controls designed via differential flatness for the *actuators*; and the low level is related to two cascade controls based on sliding modes and PI control for the *power stage*. The performance and robustness of the controller is verified and shown via realistic simulations when parametric uncertainties associated with the subsystems that compose the WMR are considered.

Keywords— Trajectory tracking, wheeled mobile robot, DC motor, DC/DC Buck power converter, input-output linearization, flat system, cascade control, sliding mode control, PI control.

I. INTRODUCCIÓN

LOS ROBOTS móviles de ruedas (RMRs) tipo diferencial son sistemas no-holónomos [1] que pueden desplazarse de forma autónoma en ambientes de diversa naturaleza [2]. Por tal motivo han sido utilizados en una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo en las industrias automotriz, petroquímica, acerera, así como para asistencia médica, educación, entretenimiento, entre otras [3], [4]. Estas aplicaciones han sido posibles, en parte, gracias a los avances teóricos en el diseño de controles mediante los cuales se han logrado resolver las siguientes problemáticas asociadas con los RMRs: *regulación*, *seguimiento de trayectorias*, *seguimiento de sendas* y *evasión de obstáculos*. En esa dirección, a buen conocimiento de los autores, al día de hoy no existen investigaciones reportadas sobre el diseño de controles que consideren la dinámica asociada a los tres subsistemas más importantes que componen a un RMR, i.e., *estructura mecánica*, *actuadores* y *etapa de potencia*, para solucionar las problemáticas antes mencionadas. En lo que respecta al problema de seguimiento de trayectorias, de acuerdo con la literatura especializada en RMRs tipo diferencial, los controles propuestos han sido diseñados

mediante dos enfoques distintos. A saber, *i)* cuando sólo es considerado el modelo cinemático/dinámico del *subsistema estructura mecánica* [5]-[21] y *ii)* cuando se toman en cuenta el modelo cinemático/dinámico del *subsistema estructura mecánica* y el modelo matemático del *subsistema actuadores* [22]-[27]. Mientras que al día de hoy la dinámica asociada al *subsistema etapa de potencia* no sólo ha sido ignorada en el diseño de controles para la tarea de seguimiento de trayectorias, sino también para las otras problemáticas de control.

Partiendo de lo anterior, con base en el enfoque de controladores jerárquicos; utilizado en robótica móvil (ver [22], [23] y [28]) y en sistemas convertidores de CD/CD-motor de CD (ver [29]-[31]), la contribución de este trabajo es presentar un controlador que considere la dinámica asociada a los tres subsistemas que componen un RMR diferencial para resolver la tarea de seguimiento de trayectorias. Es importante mencionar que la dinámica asociada a los actuadores se debe tomar en cuenta en el diseño del control ya que, de acuerdo con [32] y [33], el no hacerlo puede ocasionar una disminución en el desempeño de un robot e incluso que éste se inestabilice. Mientras que, de acuerdo con [34], el considerar la dinámica asociada a los tres subsistemas en el diseño del control permite una mejora en el desempeño de un sistema mecatrónico. Así, en este trabajo se propone un controlador para un RMR diferencial que consta de tres niveles (alto, medio y bajo), asociados a cada uno de los subsistemas que lo componen (véase Fig. 1). En el nivel alto para la *estructura mecánica* se considera un control basado en linealización entrada-salida. En el nivel medio para los *actuadores* se proponen dos controles basados en planitud diferencial (los cuales no hacen uso de variables mecánicas). Y en el nivel bajo para la *etapa de potencia* se consideran dos controles en cascada, cada uno basado en modos deslizantes y PI. Entonces, siguiendo el enfoque de controladores jerárquicos, los controles del nivel alto, medio y bajo son conectados entre sí con la finalidad de resolver la tarea de seguimiento de trayectorias cuando se consideran todos los subsistemas de un RMR diferencial. Para verificar la robustez y el desempeño del controlador propuesto, se presentan resultados de simulación numérica realistas donde se consideran cambios abruptos asociados con algunos parámetros del RMR.

El resto del trabajo está organizado como sigue. El diseño del controlador de tres niveles se presenta en la Sección II, mientras que las simulaciones del RMR en lazo cerrado se llevan a cabo en la Sección III. Finalmente se presentan las conclusiones en la Sección IV.

R. S. Ortigoza está adscrito al Área de Mecatrónica, CIDETEC, Instituto Politécnico Nacional. C.P. 07700, Ciudad de México, México (e-mail: rsilvao@ipn.mx).

J. R. G. Sánchez está adscrito al Área de Mecatrónica, CIDETEC, Instituto Politécnico Nacional. C.P. 07700, Ciudad de México, México (e-mail: jrgs_ipn@hotmail.com).

C. M. Sánchez está adscrito al Área de Mecatrónica, CIDETEC, Instituto Politécnico Nacional. C.P. 07700, Ciudad de México, México.

V. M. H. Guzmán está adscrito a la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro. C.P. 76150, Querétaro, Qro., México.

M. M. Aranda está adscrita a la SEPI, UPIICSA, Instituto Politécnico Nacional. C.P. 08400, Ciudad de México, México.

II. CONTROLADOR PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN RMR CONSIDERANDO TODOS SUS SUBSISTEMAS

En esta sección se diseña un controlador de tres niveles para la tarea de seguimiento de trayectorias de un RMR diferencial. En la Fig. 1 se muestran los subsistemas de los cuales se compone el RMR diferencial bajo estudio. En esta figura, y en el resto de este trabajo, se identifican los parámetros, componentes y variables asociadas con las ruedas derecha e izquierda mediante los subíndices d e i , respectivamente. Las características más relevantes del controlador son las siguientes:

- 1) En el nivel alto se propone un control basado en linealización entrada-salida, ω_d y ω_i , para la estructura mecánica. Este control permite que el RMR siga una trayectoria deseada, i.e., $(x, y, \varphi) \rightarrow (x^*, y^*, \varphi^*)$, y a su vez corresponde a los perfiles de velocidad angular deseada que deben ser seguidos por las flechas de los motores de CD.
- 2) En el nivel medio se presentan dos controles basados en planitud diferencial que no requieren mediciones de variables mecánicas, ϑ_d y ϑ_i , los cuales permiten que las flechas de los motores de CD lleven a cabo la tarea de seguimiento de trayectoria de velocidad angular, i.e., $(\varpi_d, \varpi_i) \rightarrow (\omega_d, \omega_i)$. Estos controles imponen los perfiles de voltaje deseado que deben ser seguidos por los voltajes de salida de los convertidores de potencia de CD/CD Buck.
- 3) En el nivel bajo se proponen dos controles en cascada basados en modos deslizantes y PI, u_d y u_i , los cuales logran que el voltaje de salida de los convertidores de potencia de CD/CD Buck converjan a los perfiles de voltaje deseado, i.e., $(v_d, v_i) \rightarrow (\vartheta_d, \vartheta_i)$.
- 4) Con base en el enfoque de controladores jerárquicos, los controles desarrollados en los incisos 1), 2) y 3) son conectados entre sí para resolver la tarea de seguimiento de trayectorias en un RMR diferencial.

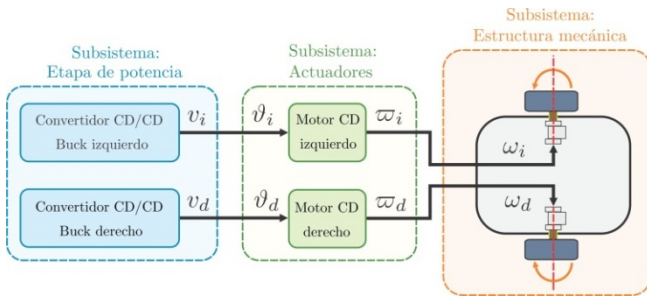


Figura 1. Subsistemas que componen a un RMR.

A. Control de nivel alto: Para la estructura mecánica

En esta subsección se presenta un control basado en linealización entrada-salida para el modelo cinemático de un RMR diferencial, el cual se muestra en la Fig. 2. La finalidad de este control es lograr que el RMR lleve a cabo la tarea de seguimiento de trayectorias, i.e., $(x, y, \varphi) \rightarrow (x^*, y^*, \varphi^*)$.

De acuerdo con [35] el modelo cinemático de un RMR diferencial que se desplaza en el plano XY y con la suposición de que las ruedas se desplazan sin deslizarse, está dado por

$$\dot{x} = \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \cos \varphi, \quad (1)$$

$$\dot{y} = \frac{(\omega_d + \omega_i)r}{2} \sin \varphi, \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(\omega_d - \omega_i)r}{2l}, \quad (3)$$

siendo (x, y) la posición del punto medio del eje que une las dos ruedas, φ la orientación del RMR, ω_d y ω_i los controles del RMR asociados a las velocidades angulares derecha e izquierda de las ruedas, respectivamente; r el radio de las ruedas y $2l$ la distancia entre éstas (ver Fig. 2). En estas ecuaciones, y en lo que resta del trabajo, la derivada con respecto al tiempo t se representará indistintamente mediante un punto o bien por d/dt .

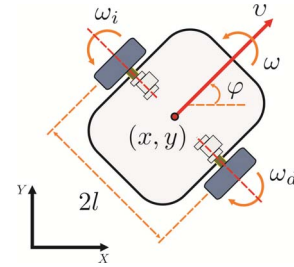


Figura 2. RMR tipo diferencial.

Con base en [22], un control basado en linealización entrada-salida, $(\omega_d, \omega_i) - (x, \varphi)$, está dado por

$$\begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} & \frac{l}{r} \\ 1 & -\frac{l}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\varphi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

donde $\varphi \neq k\pi/2$ para $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, con u_x y u_φ definidos por

$$u_x = \dot{x}^* - \alpha_x(x - x^*), \quad (5)$$

$$u_\varphi = \dot{\varphi}^* - \alpha_\varphi(\varphi - \varphi^*), \quad (6)$$

siendo α_x y α_φ constantes positivas. De esta manera, el sistema (1)-(3) en lazo cerrado con (4), siendo $y^* = f(x^*)$ y $[x(0), y(0), \varphi(0)] = (0, 0, \varphi_0)$, logra seguir una trayectoria deseada, i.e., $(x, y, \varphi) \rightarrow (x^*, y^*, \varphi^*)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

B. Control de nivel medio: Para los actuadores

En esta subsección se presenta una ley de control que logre que las flechas de los motores de CD sigan los perfiles de velocidad angular impuestos por las entradas del RMR, i.e., logre que $(\varpi_d, \varpi_i) \rightarrow (\omega_d, \omega_i)$.

De acuerdo con [36] el modelo matemático de un motor de CD, expresado en términos de la velocidad angular ϖ , está

dado por

$$L_a \frac{di_a}{dt} = \vartheta - R_a i_a - k_e \varpi, \quad (7)$$

$$J \frac{d\varpi}{dt} = -b\varpi + k_m i_a, \quad (8)$$

con ϑ voltaje de entrada, i_a corriente de armadura, k_e fuerza contra-electromotriz, k_m constante de par del motor, L_a inductancia de armadura, R_a resistencia de armadura, J momento de inercia del rotor y de la carga y b el coeficiente de fricción viscosa del motor.

El sistema (7)-(8) al ser diferencialmente plano (ver [35] y [37]), puede representarse en términos de ϖ de la siguiente manera

$$\vartheta = \frac{JL_a}{k_m} \ddot{\varpi} + \frac{1}{k_m} (bL_a + JR_a) \dot{\varpi} + \left(\frac{bR_a}{k_m} + k_e \right) \varpi. \quad (9)$$

Considerando la siguiente definición para el control ϑ , reportado en [22],

$$\vartheta = \frac{JL_a}{k_m} \mu + \frac{1}{k_m} (bL_a + JR_a) \dot{\varpi} + \left(\frac{bR_a}{k_m} + k_e \right) \varpi, \quad (10)$$

se encuentra que el sistema a controlar se reduce a

$$\mu = \ddot{\varpi}. \quad (11)$$

Si el control auxiliar, μ , se define como

$$\mu = \ddot{\varpi}^* - \gamma_2 (\dot{\varpi} - \dot{\varpi}^*) - \gamma_1 (\varpi - \varpi^*) - \gamma_0 \int_0^t (\varpi - \varpi^*) d\tau, \quad (12)$$

siendo ϖ^* el perfil de velocidad angular deseado de la flecha del motor, y se lleva a cabo una apropiada selección de las ganancias γ_0, γ_1 y γ_2 , entonces se logra que $\varpi \rightarrow \varpi^*$ cuando $t \rightarrow \infty$, como se demostró en [22]. La selección de las ganancias se lleva a cabo a partir de las siguientes expresiones (ver [22])

$$\gamma_2 = a + 2\xi\omega_n, \quad \gamma_1 = 2\xi\omega_n a + \omega_n^2, \quad \gamma_0 = a\omega_n^2. \quad (13)$$

Para la implementación del control (10) se requieren de sensores electromecánicos para medir la posición, velocidad y aceleración del eje del motor. La siguiente modificación al control (10), donde ϖ y $\dot{\varpi}$ no son necesarias, fue presentada en [22]. Se tiene entonces que

$$\vartheta = \frac{JL_a}{k_m} \mu + \frac{1}{k_m} (bL_a + JR_a) \hat{\varpi} + \left(\frac{bR_a}{k_m} + k_e \right) \hat{\varpi}, \quad (14)$$

donde

$$\mu = \ddot{\varpi}^* - \gamma_2 (\hat{\varpi} - \dot{\varpi}^*) - \gamma_1 (\hat{\varpi} - \varpi^*) - \gamma_0 \left(\int_0^t \varpi d\tau - \int_0^t \varpi^* d\tau \right), \quad (15)$$

siendo

$$\int_0^t \varpi d\tau = \frac{L_a}{k_e} \left[-i_a + \frac{1}{L_a} \int_0^t (\vartheta - R_a i_a) d\tau \right], \quad (16)$$

$$\hat{\varpi} = -\frac{bL_a}{k_e} \left[-i_a + \frac{1}{L_a} \int_0^t (\vartheta - R_a i_a) d\tau \right] + \frac{k_m}{J} \int_0^t i_a d\tau, \quad (17)$$

$$\hat{\varpi} = \frac{b^2 L_a}{J^2 k_e} \left[-i_a + \frac{1}{L_a} \int_0^t (\vartheta - R_a i_a) d\tau \right] - \frac{b k_m}{J^2} \int_0^t i_a d\tau + \frac{k_m}{J} i_a. \quad (18)$$

En resumen el control propuesto es (14), el cual está formado por (15)-(18) y no requiere de sensores electromecánicos.

C. Control de nivel bajo: Para la etapa de potencia

El objetivo de la presente subsección es proponer un control que permita que los voltajes de salida de los convertidores Buck converjan a los perfiles de voltaje deseados impuestos por las entradas de los motores de CD, i.e., $(v_d, v_i) \rightarrow (\vartheta_d, \vartheta_i)$.

El modelo conmutado de un convertidor de CD/CD Buck, de acuerdo a [38], está dado por

$$L \frac{di}{dt} = -v + Eu, \quad (19)$$

$$C \frac{dv}{dt} = i - \frac{v}{R}, \quad (20)$$

donde i es la corriente en el inductor L , v el voltaje de salida del convertidor asociado al capacitor C , R la resistencia de carga y E la fuente de alimentación del convertidor (ver Fig. 3). Mientras que u corresponde a una señal conmutada que solo puede tomar los valores del conjunto discreto $\{0,1\}$.

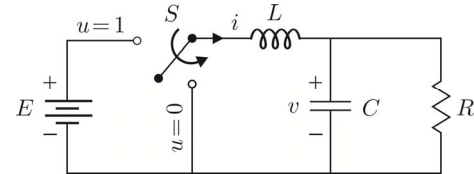


Figura 3. Convertidor de potencia de CD/CD Buck.

Para lograr que $v \rightarrow v^*$, se diseñó en [31] el siguiente control en cascada basado en modos deslizantes y PI

$$u = \frac{1}{2} [1 - \text{sign}(s)], \quad (21)$$

$$s = i - i_*, \quad \text{sign}(s) = \begin{cases} +1, & \text{si } s \geq 0, \\ -1, & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

$$i_* = i^* + i_c, \\ = \underbrace{C \frac{dv^*}{dt}}_{i^*} + \underbrace{\frac{v^*}{R} + k_p e + k_i \int_0^t e d\tau}_{i_c}, \quad (22)$$

$$e = v^* - v, \quad (23)$$

donde i_* es la corriente de referencia, v^* es el perfil de voltaje deseado, E, v, i y u fueron definidas previamente, y e es el

error de voltaje. El sistema (19)-(20) en lazo cerrado con (21) es asintóticamente estable siempre que k_p y k_i sean positivas, como se demostró en [31].

D. Diseño del controlador de tres niveles

Con base en el enfoque de controladores jerárquicos utilizado en robótica móvil (ver [22] y [23]) y en sistemas convertidores de CD/CD-motores de CD (ver [28]-[31]), el objetivo de esta subsección es realizar la interconexión de los controles diseñados en las subsecciones II-A, II-B y II-C para resolver la tarea de seguimiento de trayectorias en un RMR diferencial.

Partiendo del modelo cinemático de un RMR diferencial (1)-(3), se encontró que los controles que imponen los perfiles de velocidad angular deseados ω_d y ω_i están determinados por (4), i.e.,

$$\begin{pmatrix} \omega_d \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos \varphi} & \frac{l}{r} \\ \frac{1}{r \cos \varphi} & -\frac{l}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\varphi \end{pmatrix}, \quad (24)$$

donde u_x y u_φ están definidas en (5) y (6), respectivamente. Dado que los actuadores son dos motores de CD, con base en (14)-(15), los controles que logran $(\varpi_d, \varpi_i) \rightarrow (\omega_d, \omega_i)$ son los siguientes

$$\begin{aligned} \vartheta_d = & \frac{J_d L_{ad}}{k_{m_d}} \mu_d + \frac{1}{k_{m_d}} (b_d L_{ad} + J_d R_{ad}) \widehat{\varpi}_d \\ & + \left(\frac{b_d R_{ad}}{k_{m_d}} + k_{e_d} \right) \widehat{\varpi}_d, \end{aligned} \quad (25)$$

para el motor derecho, siendo

$$\begin{aligned} \mu_d = & \ddot{\varpi}_d^* - \gamma_{2_d} (\widehat{\varpi}_d - \dot{\varpi}_d^*) - \gamma_{1_d} (\widehat{\varpi}_d - \varpi_d^*) \\ & - \gamma_{0_d} \left(\int_0^t \widehat{\varpi}_d d\tau - \int_0^t \varpi_d^* d\tau \right), \end{aligned}$$

mientras que para el motor izquierdo se tiene

$$\begin{aligned} \vartheta_i = & \frac{J_i L_{ai}}{k_{m_i}} \mu_i + \frac{1}{k_{m_i}} (b_i L_{ai} + J_i R_{ai}) \widehat{\varpi}_i \\ & + \left(\frac{b_i R_{ai}}{k_{m_i}} + k_{e_i} \right) \widehat{\varpi}_i, \end{aligned} \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_i = & \ddot{\varpi}_i^* - \gamma_{2_i} (\widehat{\varpi}_i - \dot{\varpi}_i^*) - \gamma_{1_i} (\widehat{\varpi}_i - \varpi_i^*) \\ & - \gamma_{0_i} \left(\int_0^t \widehat{\varpi}_i d\tau - \int_0^t \varpi_i^* d\tau \right), \end{aligned}$$

y

$$(\varpi_d^*, \varpi_i^*) = (\omega_d, \omega_i). \quad (27)$$

Al considerar que cada motor de CD es manejado por un convertidor de potencia Buck, con base en (21), los controles, u_d y u_i , que logran $(v_d, v_i) \rightarrow (\vartheta_d, \vartheta_i)$ están dados por

$$u_d = \frac{1}{2} [1 - \text{sign}(s_d)], \quad (28)$$

$$s_d = i_d - i_{*d}, \quad e_d = v_d^* - v_d,$$

y

$$u_i = \frac{1}{2} [1 - \text{sign}(s_i)], \quad (29)$$

$$s_i = i_i - i_{*i}, \quad e_i = v_i^* - v_i,$$

para el convertidor Buck derecho e izquierdo, respectivamente, siendo

$$(v_d^*, v_i^*) = (\vartheta_d, \vartheta_i). \quad (30)$$

En resumen, los controles (28) y (29) permiten que $(v_d, v_i) \rightarrow (\vartheta_d, \vartheta_i)$ y de esta manera $(\varpi_d, \varpi_i) \rightarrow (\omega_d, \omega_i)$. En consecuencia se logra el objetivo de control en el RMR, esto es que $(x, y, \varphi) \rightarrow (x^*, y^*, \varphi^*)$.

III. SIMULACIONES

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas, vía MATLAB-Simulink, del RMR diferencial en lazo cerrado. El controlador se compone de (24), (25)-(26) y (28)-(29).

Los parámetros de simulación asociados con el RMR y con los motores de CD se retomaron de [22]. Mientras que para los convertidores Buck se propusieron los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} L_d = L_i = 15.91 \times 10^{-3} \text{ H}, \quad C_d = C_i = 50 \times 10^{-6} \text{ F}, \\ R_d = R_i = 25 \, \Omega, \quad E_d = E_i = 36 \text{ V}. \end{aligned}$$

Las ganancias asociadas al control (24) se eligieron como

$$\alpha_x = 5.75, \quad \alpha_\varphi = 50.75.$$

Para los controles (25)-(26), de acuerdo con (13), las ganancias se obtuvieron a partir de la siguiente elección de sus parámetros

$$\begin{aligned} a_d = 15, \quad \xi_d = 3, \quad \omega_{n_d} = 96.71, \\ a_i = 15, \quad \xi_i = 3, \quad \omega_{n_i} = 91.81. \end{aligned}$$

Finalmente, las ganancias asociadas a los controles (28)-(29), véase (22), se propusieron de la siguiente manera

$$k_{p_d} = k_{p_i} = 0.5, \quad k_{i_d} = k_{i_i} = 50.$$

La trayectoria deseada esta basada en el algoritmo de interpolación presentado en [23]. Este algoritmo permite generar trayectorias suaves a partir de puntos por donde se requiere que pase el RMR. Para este trabajo, en la generación de la trayectoria, se consideraron los pares coordenados de la Tabla 1. Así, la trayectoria deseada que debe seguir el RMR, i.e., (x^*, y^*, φ^*) , se observa en las primeras dos subfiguras asociadas con las Figs. 4, 5, 6 y 7.

En las Figs. 4 y 5 se muestra el desempeño del controlador cuando se consideran variaciones abruptas y simultáneas en los siguientes parámetros de los convertidores Buck: resistencias de carga, R_d y R_i , fuentes de alimentación, E_d y E_i , inductores, L_d y L_i , y capacitores, C_d y C_i . Tales variaciones se observan en las últimas dos subfiguras relacionadas a cada resultado de simulación. Por otro lado, en

la Fig. 6 se presentan los resultados del RMR en lazo cerrado cuando existen cambios abruptos en las inercias de los motores de CD, J_d y J_i , los cuales se muestran en las últimas dos subfiguras asociadas a dicho resultado. Mientras que en la Fig. 7 se observa el desempeño del controlador cuando se consideran no-linealidades en el modelo matemático asociado con los motores de CD. La no-linealidad considerada es la fricción de Coulomb. Así, partiendo de (7) y (8), el modelo matemático asociado con cada motor de CD se reescribe de la siguiente manera

$$L_{ad} \frac{di_{ad}}{dt} = \vartheta_d - R_{ad}i_{ad} - k_{ed}\varpi_d, \quad (31)$$

$$J_d \frac{d\varpi_d}{dt} = -b_d\varpi_d - b_{1d}\text{sign}(\varpi_d) + k_{md}i_{ad}, \quad (32)$$

para el motor derecho y

$$L_{ai} \frac{di_{ai}}{dt} = \vartheta_i - R_{ai}i_{ai} - k_{ei}\varpi_i, \quad (33)$$

$$J_i \frac{d\varpi_i}{dt} = -b_i\varpi_i - b_{1i}\text{sign}(\varpi_i) + k_{mi}i_{ai}, \quad (34)$$

para el motor izquierdo, respectivamente, con $b_{1d} = 20b_d$ y $b_{1i} = 20b_i$.

TABLA I. PUNTOS DE LA TRAYECTORIA BASADA EN INTERPOLACIÓN.

x^*	y^*
$x_0 = 0.0$ m	$y_0 = 0.0$ m
$x_1 = 1.5$ m	$y_1 = 1.5$ m
$x_2 = 3.0$ m	$y_2 = 1.0$ m
$x_3 = 5.0$ m	$y_3 = 1.2$ m
$x_4 = 7.0$ m	$y_4 = 0.5$ m
$x_5 = 8.0$ m	$y_5 = 1.5$ m

Se observa en las Figs. 4, 5, 6 y 7 la robustez del controlador al lograr satisfactoriamente el objetivo de control, i.e., $(x, y, \varphi) \rightarrow (x^*, y^*, \varphi^*)$, en presencia de cambios abruptos y simultáneos en algunos parámetros asociados con el RMR y cuando se consideran no-linealidades en el modelo matemático de los motores de CD.

IV. CONCLUSIÓN

En este trabajo se presentó un controlador para resolver la tarea de seguimiento de trayectorias en un RMR diferencial. En el diseño del controlador se consideró, por primera vez en la literatura, la dinámica asociada a los tres subsistemas más importantes que componen a un RMR, i.e., *estructura mecánica*, *actuadores* y *etapa de potencia*. Dicho controlador esta conformado por tres niveles: en el nivel alto se realizó un control por linealización entrada-salida para la estructura mecánica; en el nivel medio se propusieron dos controles basados en planitud diferencial (los cuales no hacen uso de variables mecánicas) para los actuadores; y en el nivel bajo se propusieron dos controles en cascada basados en modos deslizantes y PI para la etapa de potencia. Para verificar el desempeño y robustez del controlador propuesto se

presentaron resultados realistas de simulación, donde se mostró que el objetivo se logra, i.e., $(x, y, \varphi) \rightarrow (x^*, y^*, \varphi^*)$, cuando se consideran: a) variaciones súbitas y simultáneas en las resistencias de carga, R_d y R_i , fuentes de alimentación, E_d y E_i , inductancias y capacitancias, L_d , L_i , C_d y C_i , e inercias, J_d y J_i ; y b) no-linealidades en el modelo matemático asociado a cada motor de CD.

Actualmente se esta desarrollando un prototipo de RMR diferencial con la finalidad de implementar el controlador aquí propuesto para validar su desempeño y así reportar los resultados experimentales en un trabajo futuro. Por otro lado, sería interesante trabajar de forma conjunta los subsistemas *actuadores* y *etapa potencia* en el diseño de un control [39].

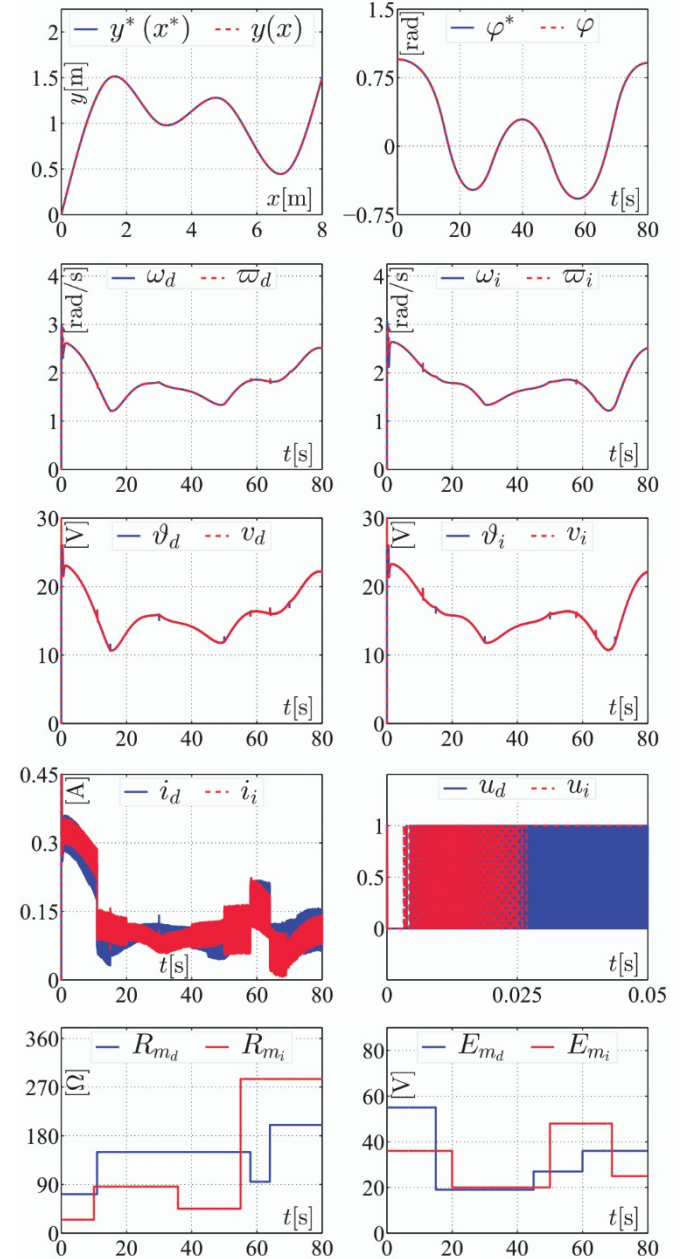


Figura 4. Resultados de simulación para cambios abruptos y simultáneos en R_d , R_i , E_d y E_i .

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al editor y a los revisores por su valioso tiempo asociado con la revisión del presente trabajo. Esta investigación fue apoyada por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN), México. R.S. Ortigoza y M. M. Aranda agradecen el apoyo recibido por el SNI-México y los programas EDI y COFAA del IPN. El trabajo de J. R. G. Sánchez y C. S. Márquez ha sido apoyado por becas CONACYT-México y BEIFI-IPN. Finalmente, V. M. H. Guzmán agradece el apoyo otorgado por el SNI-México.

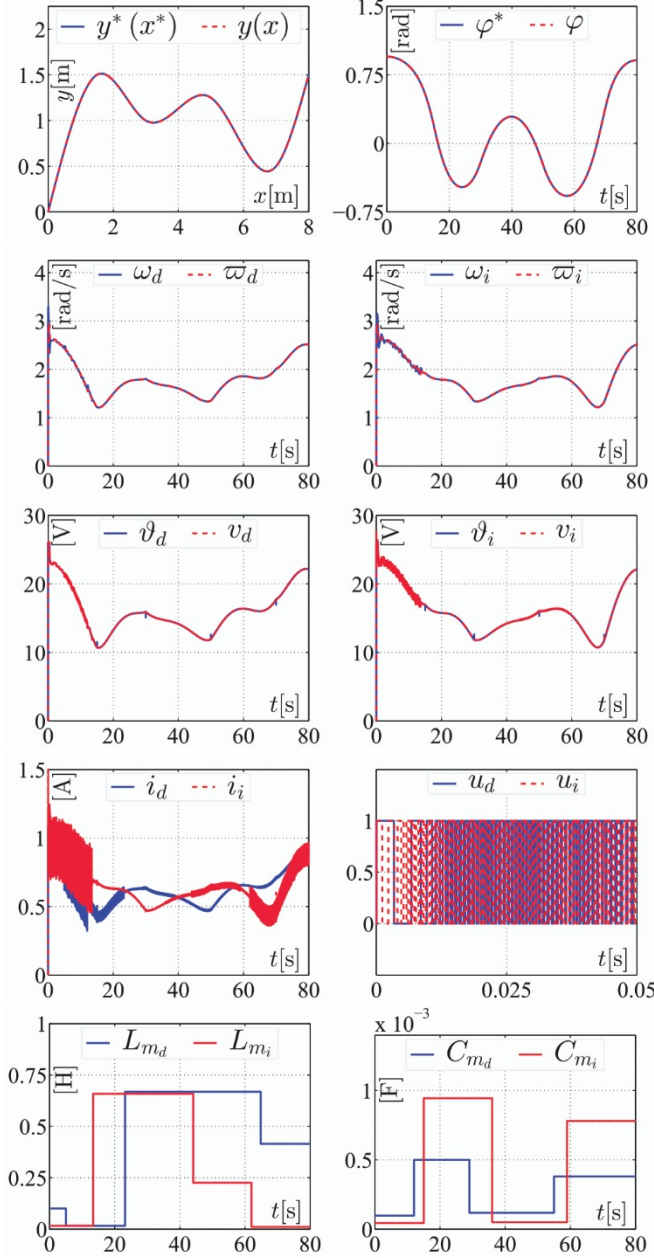


Figura 5. Resultados de simulación para cambios abruptos y simultáneos en L_d , L_i , C_d y C_i .

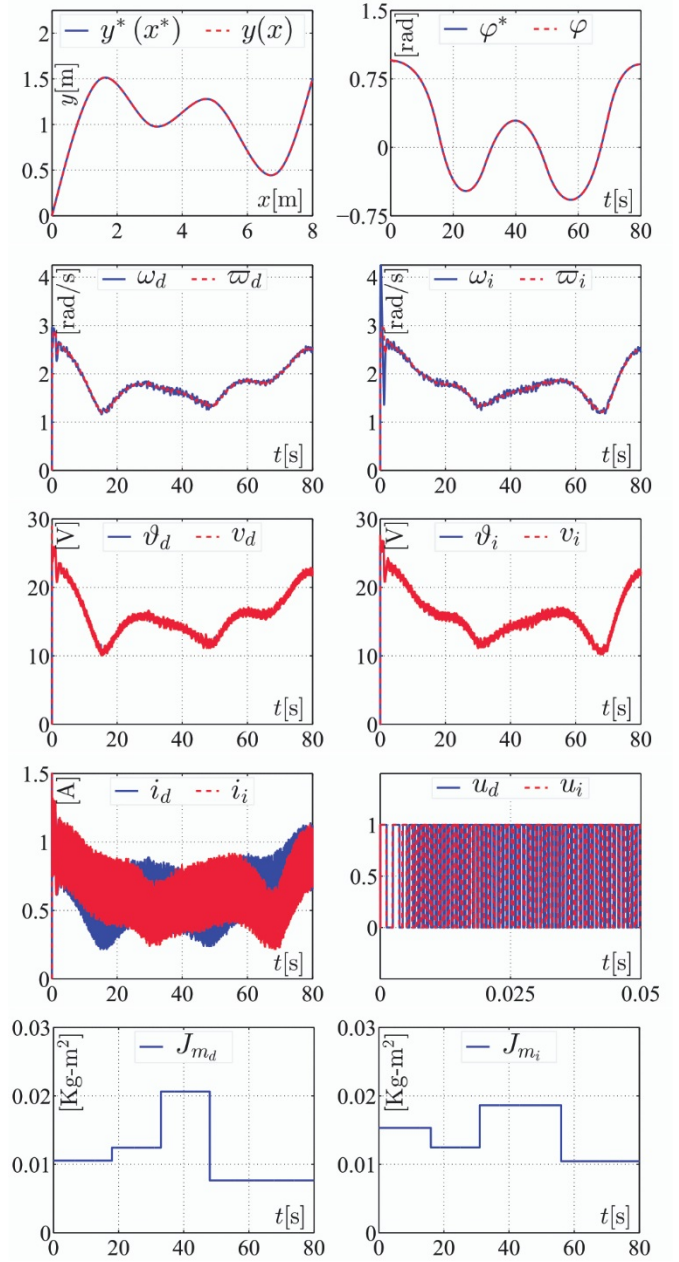


Figura 6. Resultados de simulación para variaciones simultáneas en J_d y J_i .

REFERENCIAS

- [1] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch "Developments in nonholonomic control problems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, no. 6, pp. 20–36, 1995.
- [2] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2004.
- [3] B. Siciliano and O. Khatib, *Handbook of Robotics*. Heidelberg, Berlin, Germany: Springer-Verlag, pp. 1065–1298, 2008.
- [4] R. S. Ortigoza, M. M. Aranda, G. S. Ortigoza, V. M. H. Guzmán, M. A. M. Vilchis, G. S. González, J. C. H. Lozada, and M. O. Carbajal, "Wheeled mobile robots: A review," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 10, no. 6, pp. 2209–2217, 2012. [Online]. Available: <http://www.ieee.org/reg/9/etrans/esp/publicaciones.php>.
- [5] R. M. Murray and S. S. Sastry, "Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 5, pp. 700–716, 1993.

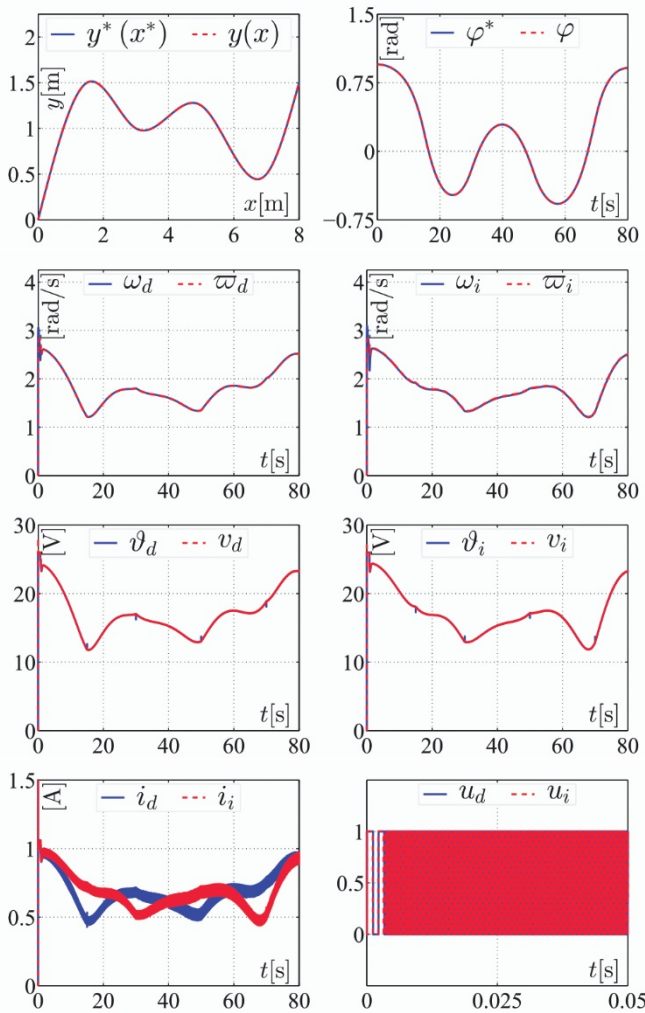


Figura 7. Resultados de simulación cuando se consideran no linealidades en el modelo cinemático del RMR.

[6] Z. P. Jiang and H. Nijmeijer, "A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 2, pp. 265–279, 1999.

[7] G. Oriolo, A. De Luca, and M. Vendittelli, "WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation and experimental validation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 6, pp. 835–852, 2002.

[8] M. Defoort, T. Floquet, A. Kökösy, and W. Perruquetti, "Sliding-mode formation control for cooperative autonomous mobile robots," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 11, pp. 3944–3953, 2008.

[9] N. A. Martins, E. S. El'youssef, D. W. Bertol, E. R. De Pieri, U. F. Moreno, and E. B. Castelan, "Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with kinematic disturbances: A variable structure control design," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 9, no. 3, pp. 276–283, 2011.

[10] E. Y. Veslin, J. Slama, M. S. Dutra, and O. Lengerke, "Motion planning on mobile robots using differential flatness," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 9, no. 7, pp. 1006–1011, 2011.

[11] S. Blažič, "On periodic control laws for mobile robots," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 7, pp. 3660–3670, 2014.

[12] K. Wang, Y. Liu, and L. Li, "Visual servoing trajectory tracking of nonholonomic mobile robots without direct position measurement," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 30, no. 4, pp. 1026–1035, 2014.

[13] Y. Wang, Z. Miao, H. Zhong, and Q. Pan, "Simultaneous stabilization and tracking of nonholonomic mobile robots: A Lyapunov-based approach," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 4, pp. 1440–1450, 2015.

[14] X. Liang, H. Wang, W. Chen, D. Guo, and T. Liu, "Adaptive image-based trajectory tracking control of wheeled mobile robots with an uncalibrated fixed camera," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 6, pp. 2266–2282, 2015.

[15] J. Yuan, F. Sun, and Y. Huang, "Trajectory generation and tracking control for double-steering tractor-trailer mobile robots with on-axle hitching," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 12, pp. 7665–7677, 2015.

[16] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi, "Adaptive tracking control of nonholonomic mobile robot," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, no. 5, pp. 609–615, 2000.

[17] K. Morioka, J. H. Lee, and H. Hashimoto, "Human-following mobile robot in a distributed intelligent sensor network," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, no. 1, pp. 229–237, 2004.

[18] T. J. Ren, T. C. Chen, and C. J. Chen, "Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller," *Control Engineering Practice*, vol. 16, no. 3, pp. 365–375, 2008.

[19] B. S. Park, S. J. Yoo, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Adaptive neuronal sliding model control of nonholonomic wheeled mobile robots with model uncertainty," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 1, pp. 207–214, 2009.

[20] F. G. Rossomando, C. Soria, and R. Carelli, "Adaptive neuronal dynamic compensator for mobile robots in trajectory tracking control," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 9, no. 5, pp. 593–602, 2011.

[21] F. G. Rossomando and C. Soria, "Design and implementation of adaptive neural PID for nonlinear dynamics in mobile robots," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 13, no. 4, pp. 913–918, 2015.

[22] R. Silva-Ortigoza, G. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, V. R. Barrientos-Sotelo, J. M. Albarrán-Jiménez, and V. M. Silva-García, "Trajectory tracking in a mobile robot without using velocity measurements for control of wheels," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 6, no. 7, pp. 598–607, 2008. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TLA.2008.4917431>.

[23] R. Silva-Ortigoza, C. Márquez-Sánchez, M. Marcelino-Aranda, M. Marciano-Melchor, G. Silva-Ortigoza, R. Bautista-Quintero, E. R. Ramos-Silvestre, J. C. Rivera-Díaz, and D. Muñoz-Carrillo, "Construction of a WMR for trajectory tracking control: Experimental results," *The Scientific World Journal*, vol. 2013, pp. 1–17, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/723645>.

[24] A. K. Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Robust adaptive controller for a tractor-trailer mobile robot," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 19, no. 3, pp. 943–953, 2014.

[25] T. Das and I. N. Kar, "Design and implementation of an adaptive fuzzy logic-based controller for wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 3, pp. 501–510, 2006.

[26] B. S. Park, S. J. Yoo, J. B. Park, and Y. H. Choi, "A simple adaptive control approach for trajectory tracking of electrically driven nonholonomic mobile robots," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 5, pp. 1199–1206, 2010.

[27] C. L. Hwang and W. L. Fang, "Global fuzzy adaptive hierarchical path tracking control of a mobile robot with experimental validation," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, 2016. DOI: 10.1109/TFUZZ.2015.2476519.

[28] A. W. Divelbiss and J. T. Wen, "Trajectory tracking control of a car-trailer system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 5, no. 3, pp. 269–278, 1997.

[29] R. Silva-Ortigoza, J. R. García-Sánchez, J. M. Alba-Martínez, V. M. Hernández-Guzmán, M. Marcelino-Aranda, H. Taud, and R. Bautista-Quintero, "Two-stage control design of a Buck converter/DC motor system without velocity measurements via a $\Sigma - \Delta$ -modulator," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, pp. 1–11, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/929316>.

[30] R. Silva-Ortigoza, C. Márquez-Sánchez, F. Carrizosa-Corral, M. Antonio-Cruz, J. M. Alba-Martínez, and G. Saldaña-González, "Hierarchical velocity control based on differential flatness for a DC/DC Buck converter-DC motor system," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–12, 2014. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/912815>.

[31] R. Silva-Ortigoza, V. M. Hernández-Guzmán, M. Antonio-Cruz, and D. Muñoz-Carrillo, "DC/DC Buck power converter as a smooth starter for

a DC motor based on a hierarchical control,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 30, no. 2, pp. 1076–1084, 2015. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TPEL.2014.2311821>.

- [32] M. C. Good, L. M. Sweet, and K. L. Strobel, “Dynamic models for control system design on integrated robot and drive systems,” *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, vol. 107, no. 1, pp. 53–59, 1985.
- [33] T. Tarn, A. K. Bejczy, X. Yun, and Z. Li, “Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 1, pp. 114–122, 1991.
- [34] K. Erenturk, “Hybrid control of a mechatronic system: Fuzzy logic and grey system modeling approach,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 12, no. 6, pp. 703–710, 2007.
- [35] H. Sira-Ramírez and S. K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*. New York, NY, USA: Marcel Dekker, 2004.
- [36] V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza, and R. V. Carillo-Serrano, *Control Automático: Teoría de Diseño, Construcción de Prototipos, Modelado, Identificación y Pruebas Experimentales*. Mexico City, Mexico: Colección CIDETEC-IPN, 2013. [Online]. Available: <http://www.controlautomatico.com.mx>
- [37] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon, “Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and applications,” *International Journal of Control*, vol. 61, no. 6, pp. 1327–1361, 1995.
- [38] H. Sira-Ramírez and R. Silva-Ortigoza, *Control Design Techniques in Power Electronics Devices*. London, U.K.: Springer-Verlag, 2006.
- [39] V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza, and D. Muñoz-Carrillo, “Velocity control of a brushed DC-motor driven by a DC to DC Buck power converter,” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 11, no. 2, pp. 509–521, 2015. [Online]. Available: <http://www.ijicic.org/ijicic-14-04031.pdf>



Ramón Silva Ortigoza received the B.S. degree in electronics from Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, Mexico, in 1999, and the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering (mechatronics) from the Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), Mexico City, Mexico, in 2002 and 2006, respectively. He has been a Researcher at the Department of Mechatronics, CIDETEC-IPN, since 2006, and belongs to SNI-CONACYT, Mexico. He is a coauthor of the book *Control Design Techniques in Power Electronics Devices* (London, U.K.: Springer-Verlag, 2006). He was an Editor of the book *Mechatronics (in Spanish)* (Mexico City, Mexico: Colección CIDETEC-IPN, 2010). Moreover, he has recently coauthored the book *Automatic Control: Design Theory, Prototype Construction, Modeling, Identification and Experimental Tests (in Spanish)* (Mexico City, Mexico: Colección CIDETEC-IPN, 2013). He has published more than 40 papers in refereed journals. His research interests include mechatronic systems control, mobile robotics, control in power electronics, and the development of educational technology.



José Rafael García Sánchez received the B.S. degree in industrial robotics from Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN, Mexico City, Mexico, in 2003, and the M.S. degree in automatic control from Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, Mexico, in 2013. He is currently working toward the Ph.D. degree at the Department of Mechatronics, CIDETEC-IPN, Mexico City, Mexico. His research interests include the theory and application of automatic control in mobile robotics, teleoperated systems, and power electronic systems.



Víctor Manuel Hernández Guzmán was born in Querétaro, Qro., Mexico. He received a B.S. from the Instituto Tecnológico de Querétaro, Querétaro, Mexico, in 1988, an M.S. from the Instituto Tecnológico de la Laguna, Coahuila de Zaragoza, Mexico, in 1991, and a Ph.D. from CINVESTAV-IPN, Mexico City, Mexico, in 2003, all in electrical engineering. He has been a Professor at the Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, Mexico, since 1995, where he teaches Classical and Nonlinear Control. He is a coauthor of the book *Automatic Control: Design Theory, Prototype Construction, Modeling, Identification and Experimental Tests (in Spanish)* (Mexico City, Mexico: Colección CIDETEC-IPN, 2013).



Celso Márquez Sánchez received the B.S. degree in computer engineering from the Universidad Autónoma del Estado de México, Estado de México, Mexico, in 2008, and the M.S. degree in computing technology from CIDETEC-IPN, Mexico City, Mexico, in 2014. He is currently working toward the Ph.D. degree at the Department of Mechatronics, CIDETEC-IPN, Mexico City, Mexico. His research interests include the theory and application of automatic control in mobile robotics. Also, he is interested in software development with mobile devices for embedded systems.



Mariana Marcelino Aranda received the M.S. degree in business administration and the Ph.D. degree in administration sciences, both from the Instituto Politécnico Nacional, Mexico City, Mexico, in 2004 and 2008, respectively. She belongs to the Researchers National System of CONACYT-Mexico, with Level I. Also, she currently is a Professor and Researcher at the Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas of the Instituto Politécnico Nacional (UPIICSA-IPN). Her research interests include sustainable business studies and educational technology.