

# CAPITULO 4

## 4. CONTROL DIGITAL DETERMINISTICO

### 4.1 Introducción.

Se define el control como **determinístico** cuando el diseño del sistema de control se realiza considerando que el mismo va a operar en un entorno determinístico. Esto es, cuando las señales o variables consideradas, sean estas de referencia, de entrada o de perturbación, son de carácter determinístico.

Variables determinísticas son aquellas cuya evolución puede ser descripta en forma analítica con precisión y por tal razón, en contraposición a las variables estocásticas, puede predecirse exactamente su evolución futura.

Esta condición de diseño difiere en gran medida de la realidad, dado que normalmente los sistemas de control están sometidos a señales de referencia o perturbación de carácter estocástico, esto es, no predecibles, y por ende no expresables analíticamente. Cuando se realiza el diseño bajo consideraciones determinísticas, se asume que si bien el sistema podrá estar perturbado estocásticamente, estas señales de perturbación no intervienen en el diseño. Se considera que el sistema de control eliminará u operará adecuadamente procesando las señales determinísticas y estocásticas de igual modo. Esta consideración será más o menos válida dependiendo de la magnitud y tipo de perturbación. El diseño bajo consideraciones estocásticas se tratará en el capítulo 5.

En este capítulo, luego de definir y clasificar los sistemas de control, se estudian primeramente los controladores digitales con realimentación de salida de parámetros optimizados del tipo PID, diseñados a partir del PID continuo y también directamente en el dominio digital. Luego se presentan los controladores de estructura óptima de cancelación y de tiempo finito. Finalmente se estudian los controladores de estado en sus distintas versiones.

### 4.2 Definiciones, planteos de control y clasificación.

#### 4.2.1 Definiciones fundamentales relativas a los sistemas de control.

Un **Sistema de Control de Procesos** involucra en sus aspectos fundamentales la existencia de un **Proceso** a controlar y de un **Controlador** que actúa sobre el proceso.

Para definir un **Sistema de Control de Procesos** es importante dar las siguientes definiciones parciales:

**- Sistema:**

Sistema es todo ordenamiento de elementos interrelacionados entre sí con un objetivo común.

**- Proceso:**

Proceso es el conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno. Esto es, un proceso constituye una situación evolutiva temporal.

**- Proceso Técnico:**

Proceso técnico es aquel que involucra a las situaciones evolutivas normalmente encontradas en el campo de la técnica, esto es: transporte de materia, transformaciones físicas de energía o información.

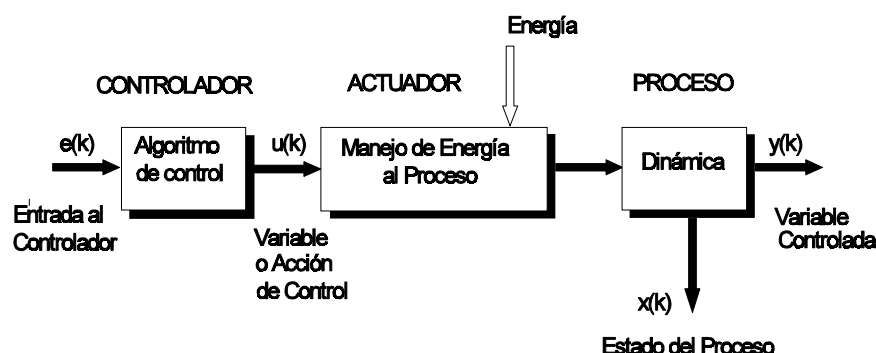
**- Control:**

El control implica el gobierno o dominio de algo. Desde el punto de vista técnico implica el procedimiento o acciones por las cuales se fijan o modifican las condiciones de evolución de un proceso. Esto constituye el **Control de Procesos**.

**- Controlador - Control Digital:**

El control es ejercido por un **Controlador**. En el **Control Digital** el controlador está normalmente materializado en un computador y las acciones de control están generadas por un **Algoritmo de Control**. Estas acciones gobiernan la evolución del proceso, hacia un estado determinado, constituyendo esto el fin u objetivo del sistema de control.

En la Fig. 4.2.1. se representan esquemáticamente los elementos constituyentes del sistema con la denominación clásica de las variables involucradas. Para lograr el control del proceso, el controlador genera, a partir de una **Señal de Entrada**  $e(k)$  que es procesada por un algoritmo de control, una **Señal de Control**  $u(k)$  o **Acción de Control**.



**Fig. 4.2.1 Sistema de control.**

La acción de control se aplica a través de un **Actuador** al proceso. El actuador es

sensible a la señal (información digital) proveniente del controlador y realiza el manejo de las variables físicas de entrada al proceso, lo que normalmente involucra manejo de energía (eléctrica, mecánica, hidráulica, etc.)

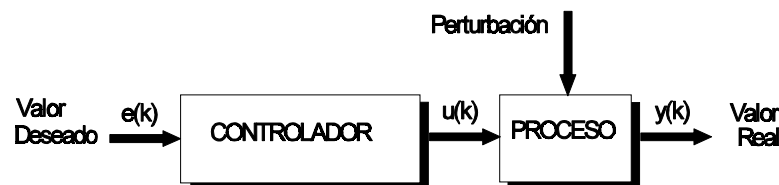
El proceso responde a esta entrada con una determinada **Característica Dinámica** propia del proceso, evolucionando la **Variable de Salida** o **Variable Controlada**  $y(k)$  en determinado sentido o permaneciendo en determinada situación. La evolución o situación del proceso también puede estar definida por el **Estado del Proceso**  $x(k)$  o bien por las **Variables de Estado**.

Cuando las señales involucradas en el sistema de control están constituidas por múltiples variables, o bien tienen más de una componente, el sistema se denomina de **Control Multivariable**. Normalmente las señales se representan en este caso por **Señales Vectoriales**.

La información necesaria para la operación del controlador constituye la **Entrada del Controlador**  $e(k)$ . La forma de generar esta información determina la primera y más general clasificación de los sistemas de control; que se describe a continuación.

#### 4.2.2 Control en lazo abierto y en lazo cerrado.

Cuando la entrada al controlador está definida exclusivamente por un valor instantáneo deseado, sea éste determinado por una referencia, un operador humano o una consigna elaborada por otro nivel de control, se denomina de **Lazo Abierto**. Este tipo de control se esquematiza en la Fig. 4.2.2.



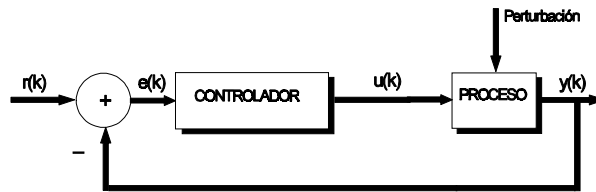
**Fig. 4.2.2. Control en lazo abierto.**

En este planteo de control, a la entrada del controlador no se tiene información directa de lo que sucede a la salida del proceso.

Cuando la entrada al controlador  $e(k)$  está definida a través de una comparación entre el valor deseado y la situación real del proceso, se tiene el control en **Lazo Cerrado** o **Control Realimentado**.

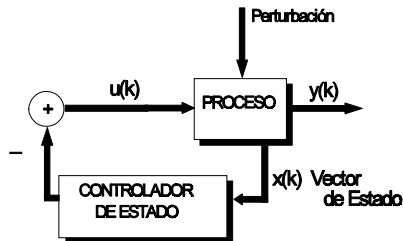
Cuando la comparación se realiza entre el valor de referencia deseado  $r(k)$  y la salida  $y(k)$  estableciéndose la diferencia entre ambos, se tiene un **Control con Realimentación**.

de la Salida, el cual se representa en la Fig. 4.2.3.



**Fig. 4.2.3 Realimentación de la salida**

Cuando la información de entrada al controlador está constituida por las variables de estado del proceso  $x(k)$  y no de su salida, se tiene el **Control con Realimentación de Estados**, cuyo esquema se representa en la Fig. 4.2.4.

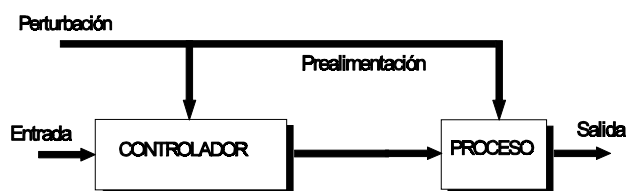


**Fig. 4.2.4 Control de Estado.**

El control de lazo abierto tiene el grave inconveniente que si el sistema está perturbado, o bien las características del proceso no se conocen con precisión o cambian por distintas razones, al no tenerse información de lo que sucede con la salida, el desempeño del control está severamente cuestionado.

Cuando se presupone que el sistema es perfectamente conocido, que también se conocen las perturbaciones y se pueden medir, es posible plantear un **Control por Prealimentación o Avanacción**. Este tipo de control se esquematiza en la Fig. 4.2.5.

Al poder medirse la perturbación, ésta puede incorporarse al controlador para que actúe consecuentemente y tienda a eliminarla de la salida. Dado que raramente se da esta circunstancia, el control por prealimentación tiene poca significación real y no se tratará en los próximos capítulos. En determinados casos particulares el control por prealimentación tiene sentido cuando está combinado con el control realimentado mejorando sus características. En todos los puntos siguientes se trata exclusivamente el control realimentado.



**Fig. 4.2.5 Control por prealimentación.**

### 4.2.3 Clasificación de los tipos de controladores.

El diseño del controlador en sistemas lineales constituye el objetivo fundamental planteado en este texto, por lo que resulta importante clasificar y especificar los tipos de controladores que se tratarán en lo sucesivo. Las definiciones y categorías dadas están referidos a la Fig. 4.2.6, donde se referencian los controladores lineales más generalizados.

La primer gran división se realiza entre controladores de parámetros optimizados y de estructura optimizada. En los de parámetros optimizados, se deja fija la estructura y se optimizan los parámetros de acuerdo a las condiciones dinámicas del proceso. El tratamiento de este tipo de controladores se centrará en los distintos tipos de controladores PID y en los controladores de bajo orden de estructura fija, presentados en el punto 4.3.

Partiendo del PID continuo se realiza la discretización y se presentan distintas variantes para características especiales del proceso. También se introducen en el punto 4.3.6 los controladores lineales de bajo orden y de estructura fija diseñados directamente en el campo discreto.

En relación a los controladores de estructura optimizada, en función de las características dinámicas del proceso, se optimiza tanto la estructura como los parámetros. En los puntos 4.4 y 4.5 se analizan los controladores determinísticos de estructura óptima, con realimentación de la salida. Se presenta el controlador de cancelación, de tiempo finito y el de tiempo incrementado. Los controladores de estado determinísticos se presentan en el punto 4.6.

Los controladores de estructura óptima diseñados bajo condicionamientos estocásticos se tratan en el capítulo quinto, analizándose el controlador monovisible de mínima variancia y finalmente en forma extensa el controlador de estado con estimador. Con los controladores presentados se cubre una amplia gama de aplicaciones en el control digital, haciéndose en cada caso referencia a sus propiedades específicas para facilitar su elección.

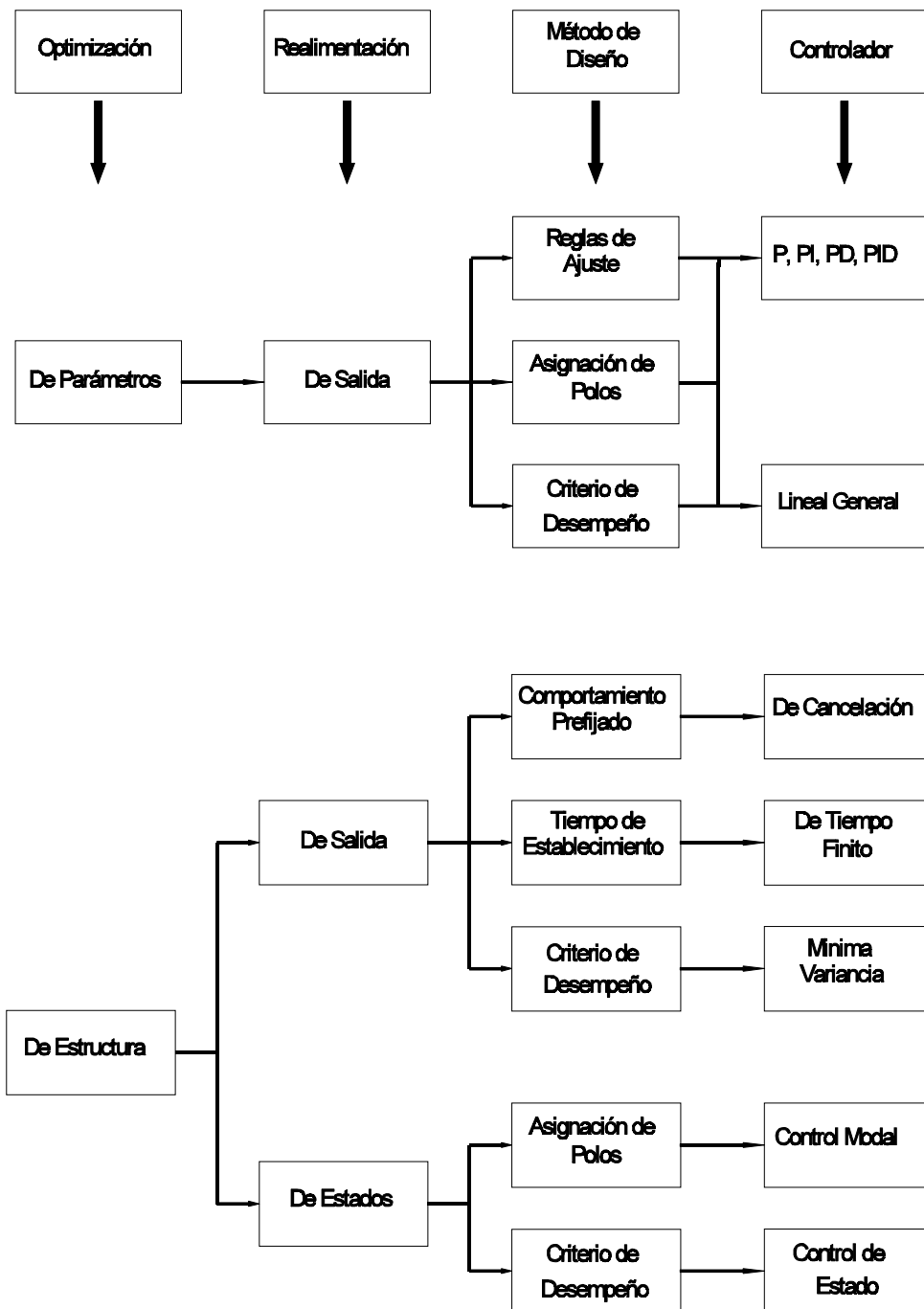


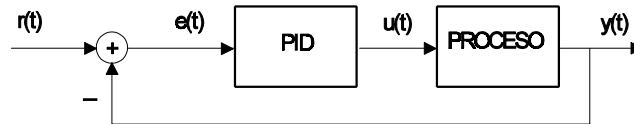
Fig. 4.2.6 Clasificación de controladores digitales.

### 4.3 Controladores de parámetros optimizados.

#### 4.3.1 Controlador PID discreto.

Los controladores de parámetros optimizados son aquellos en los cuales partiendo de una estructura definida se optimizan sus parámetros adecuándolos a la dinámica del proceso a controlar.

El más clásico y difundido controlador de parámetros optimizados es el denominado **controlador PID**, ampliamente tratado en la bibliografía de control clásico y moderno. Su nombre proviene de su comportamiento como controlador de tipo **Proporcional**, **Integral**, y **Derivativo**, en el caso más general. Cuando falta alguna de estas acciones se denomina consecuentemente, controlador P, PI o PD. En la Fig. 4.3.1 se representa esquemáticamente un lazo de control con controlador PID.



**Fig. 4.3.1 Sistema de control con controlador PID.**

La ecuación diferencial que rige el comportamiento dinámico entrada-salida de un PID continuo, es

$$u(t) = K[e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt}] \quad (4.3-1)$$

siendo  $K$  una constante de proporcionalidad,  $K_I$  de integración y  $T_D$  de derivación.

Para un control digital, las señales continuas deben discretizarse. Si el tiempo de muestreo es suficientemente pequeño, se puede hacer una discretización directa de la ecuación diferencial para obtener la ecuación en diferencias. De este modo la derivada primera se transforma en diferencia de primer orden y la integral en sumatoria. Aproximando la integral por aproximación rectangular, se obtiene

$$u(k) = K \left\{ e(k) + K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i-1) + (T_D/T_o)[e(k) - e(k-1)] \right\} \quad (4.3-2)$$

con

$$e(k) = r(k) - y(k).$$

En este algoritmo, para calcular el valor presente de  $u(k)$  se requiere resolver la sumatoria de los valores pasados de  $e(i)$  hasta  $k-1$ . Mayor eficiencia para el cálculo en computador se puede lograr utilizando algoritmos recursivos que posibilitan la determinación del nuevo valor basado en el cálculo anterior.

Para obtener la ecuación recursiva se calcula la Ec. 4.3-2 en el instante  $(k-1)$

$$u(k-1) = K \{ e(k-1) + K_I T_o \sum_{i=1}^{k-1} e(i-1) + (T_D/T_o)[e(k-1) - e(k-2)] \}. \quad (4.3-3)$$

Haciendo la diferencia entre las Ec. 4.3-2 y Ec. 4.3-3, se obtiene

$$u(k) - u(k-1) = K \{ [e(k) - e(k-1)] + K_I T_o e(k-1) + (T_D/T_o)[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \}. \quad (4.3-4)$$

o bien,

$$u(k) = u(k-1) + K(1 + T_D/T_o)e(k) - K(1 + 2T_D/T_o - T_o K_I)e(k-1) + K(T_D/T_o)e(k-2). \quad (4.3-5)$$

La Ec. 4.3-5 permite calcular la salida  $u(k)$  a partir del valor anterior  $u(k-1)$  del valor  $e(k)$  y sus dos valores pasados. Precalculando

$$A = K(1 + T_D/T_o)$$

$$B = -K(1 + 2T_D/T_o - K_I T_o)$$

$$C = K(T_D/T_o)$$

la Ec. 4.3-5 se expresa

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2). \quad (4.3-6)$$

Utilizando una aproximación trapezoidal para la integral, en lugar de la Ec. 4.3-2 se obtiene



$$u(k) = K \left\{ e(k) + K_I T_o \left[ \frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right] + T_D/T_o [e(k) - e(k-1)] \right\}. \quad (4.3-7)$$

Como ecuación en diferencias recursiva se obtiene

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) \quad (4.3-8)$$

con

$$A = K(1 + K_I T_o/2 + T_D/T_o)$$

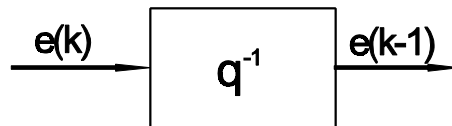
$$B = -K(1 + 2T_D/T_o - K_I T_o/2)$$

$$C = K(T_D/T_o)$$

La Ec. 4.3-8 difiere con la Ec. 4.3-6 en el cálculo de los coeficientes, incorporando el término  $K_I T_o/2$  como consecuencia de una mejor aproximación de la integral y por ende es, en general, preferible al anterior.

#### 4.3.2. Función de Transferencia discreta del controlador PID.

Para representar el controlador PID en variable  $z$  y obtener su función de transferencia discreta, se modifican primero las ecuaciones en diferencias incorporando el operador  $q^{-d}$ , el cual tiene como resultado retardar la señal temporal  $d$  intervalos de muestreo. Este operador facilita luego la transformación del dominio temporal al dominio en variable  $z$  por simple reemplazo de  $q^{-d}$  por  $z^{-d}$ . La operación del operador  $q^{-d}$  se esquematiza para  $d = 1$  en la Fig. 4.3.2.



**Fig. 4.3.2. Operador retardo**

Tomando la ecuación en diferencias, Ec. 4.3-2, se opera con cada uno de los sumandos.

La parte proporcional es

$$u_p(k) = Ke(k) \quad (4.3-9)$$

La función de transferencia discreta de la parte proporcional se obtiene directamente transformando a variable  $z$  como

$$C_p(z) = \frac{u_p(z)}{e(z)} = K. \quad (4.3-10)$$

La parte derivativa, es

$$u_D(k) = KT_D/T_o[e(k) - e(k-1)]. \quad (4.3-11)$$

Utilizando el operador retardo, queda

$$u_D(k) = (KT_D/T_o)e(k)(1 - q^{-1}). \quad (4.3-12)$$

La función de transferencia discreta de la parte derivativa se obtiene ahora, como

$$C_D(z) = \frac{u_D(z)}{e(z)} = (KT_D/T_o)(1 - z^{-1}). \quad (4.3-13)$$

La parte integral, con aproximación rectangular, Ec. 4.3-2, es

$$u_I(k) = K K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i-1).$$

Expresado con el operador retardo queda

$$u_I(k) = K K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i)q^{-1}$$

Expandiendo la sumatoria

$$u_I(k) = K K_I T_o q^{-1}[e(1) + e(2) + \dots + e(k)]$$

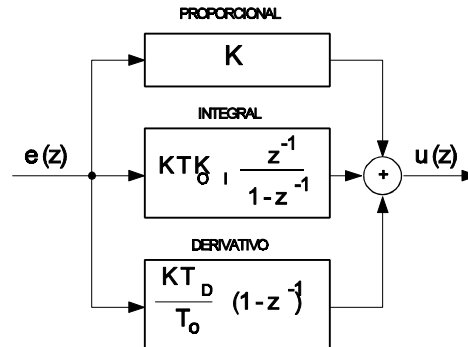
que puede reescribirse, como

$$u_I(k) = K K_I T_o q^{-1}e(k)[1 + q^{-1} + \dots + q^{-(k-1)}]. \quad (4.3-14)$$

La serie  $(1 + q^{-1} + \dots)$  representa una función escalón unitario discretizada cuya transformada es  $1/(1 - q^{-1})$ . Entonces de la Ec. 4.3-14 se obtiene

$$C_I(z) = \frac{u_I(z)}{e(z)} = K_I K T_o \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (4.3-15)$$

El controlador PID puede representarse como en la Fig. 4.3.3 en sus tres bloques de transferencia P, I y D.



**Fig. 4.3.3 Función de Transferencia discreta del PID.**

#### 4.3.3 Controlador PID modificado.

En un controlador PID obtenido por discretización directa de la ecuación diferencial, las partes P y D aparecen multiplicadas por  $e(k)$ ; o sea, por el instante presente del error. Esto tiene como implicancia directa, que al producirse variaciones bruscas de la referencia  $r(k)$ , también el error  $e(k)$  varía instantáneamente, como se observa en la Ec. 4.3-16.

$$e(k) = r(k) - y(k). \quad (4.3-16)$$

Con este error los términos P y D generan acciones de control  $u(k)$  que pueden ser excesivas y llegar a comprometer la operación del actuador que gobierna al proceso; en particular el término D que es el que responde a la derivada.

Se propone una modificación del algoritmo tal que la variable que afecta a dichos términos no incluya la referencia  $r(k)$ . De este modo se definen las entradas:

Para el término I

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

para los términos P y D

$$e(k) = -y(k). \quad (4.3-17)$$

Introduciendo en la ecuación recursiva Ec. 4.3-4 la Ec. 4.3-17 se obtiene

$$u(k) = u(k-1) + K \{ -y(k) + y(k-1) + K_I T_o e(k-1) + (T_D/T_o)[-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \}$$

o bien

$$u(k) = u(k-1) + A y(k) + B y(k-1) + C y(k-2) + D e(k-1) \quad (4.3-18)$$

con

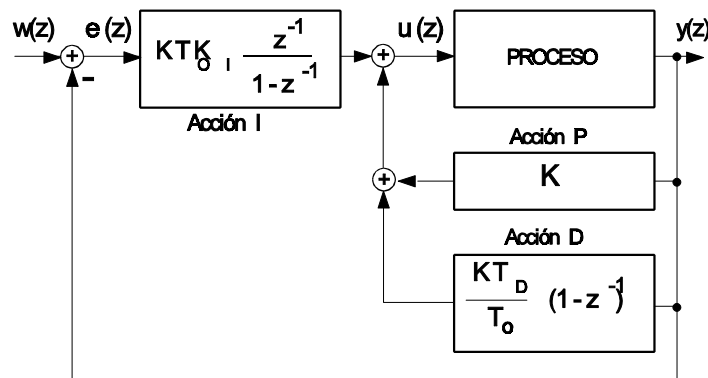
$$A = -K(1 + T_D/T_o)$$

$$B = K(1 + 2T_D/T_o)$$

$$C = -K(T_D/T_o)$$

$$D = K K_I T_o.$$

La ecuación en diferencias Ec. 4.3-18 puede llevarse como en los casos anteriores al dominio Z y plantearse la función de transferencia discreta. En este caso no existirá una sola entrada al controlador, ver Fig. 4.3.3, sino que el mismo tiene como entradas el error  $e(k)$  y la salida del proceso  $y(k)$  como se representa en la Fig. 4.3.4.



**Fig. 4.3.4. Controlador PID modificado.**

Si bien se pierde algo en la velocidad de respuesta, el beneficio logrado en cuanto a la reducción de la acción de control es muy significativo.

Si solamente se quiere atenuar el efecto del cambio brusco en la parte D que es el más crítico, se consideran como entradas:

Para las partes I y P

$$e(k) = r(k) - y(k),$$

para la parte D

$$e(k) = -y(k).$$

En tal caso se obtendrá

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + C[y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)]$$

siendo

$$A = K$$

$$B = -K(1 + K_I T_o)$$

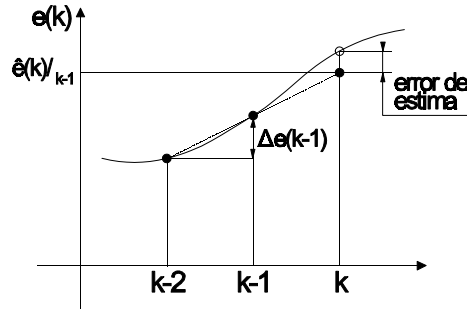
$$C = -K(T_D/T_o).$$

En tal caso la Fig. 4.3.4. se modifica, teniendo el bloque de acción P y acción I como entrada  $e(z)$ .

#### 4.3.4 Controlador PID con predictor.

Para tiempos de muestreo reducidos, el tiempo de cómputo que requiere la unidad de procesamiento para calcular el próximo valor de salida, puede ser comparable al de muestreo. En ese caso el tiempo transcurrido entre la toma de la muestra del error y la aplicación de la acción de control correspondiente es significativo, siendo que la teoría presupone el sincronismo de ambas señales. Para obviar esto es posible anticipar la acción de control utilizando una predicción de la muestra. Por simplicidad de cálculo, el cual es ya crítico, se realiza una predicción lineal del error.

En base a la Fig. 4.3.5, se calcula el valor de la predicción de  $e(k)$  en el instante  $k-1$ ,  $\hat{e}(k)_{k-1}$ .



**Fig. 4.3.5. Predicción lineal del error.**

$$\hat{e}(k)/_{k-1} = e(k-1) + [e(k-1) - e(k-2)]. \quad (4.3-19)$$

Reemplazando en la Ec. 4.3-2,  $e(k)$  por  $\hat{e}(k)/_{k-1}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{u}(k)/_{k-1} = & K \{ \hat{e}(k)/_{k-1} + K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i-1) + \\ & + T_D/T_o [\hat{e}(k)/_{k-1} - e(k-1)] \}. \end{aligned} \quad (4.3-20)$$

Incorporando la Ec. 4.3-19 en la Ec. 4.3-20, operando y reordenando, del mismo modo que en la obtención de la Ec. 4.3-6 y considerando que en el instante  $k$  la acción de control que se aplica efectivamente es

$$u(k) = \hat{u}(k)/_{k-1}$$

se obtiene la ecuación recursiva Ec. 4.3-21.

$$\begin{aligned} \hat{u}(k)/_{k-1} = & \hat{u}(k-1)/_{k-2} + A e(k-1) + \\ & + B e(k-2) + C e(k-3) \end{aligned} \quad (4.3-21)$$

con

$$A = K(2 + K_I T_o + T_D/T_o)$$

$$B = K(-3 - 2T_D/T_o)$$

$$C = K(1 + T_D/T_o).$$

Normalmente, la predicción lineal es suficientemente buena y este controlador PID se adecua para los casos en que el tiempo de cálculo es comparable al período de

muestreo.

#### 4.3.5 Controlador PID de velocidad

Para determinados tipos de procesos no resulta conveniente aplicar directamente la acción de control  $u(k)$  sino su valor incremental, esto es, se aplica al proceso la diferencia entre  $u(k)$  y su valor anterior  $u(k-1)$ . El controlador que así se obtiene se denomina PID de velocidad y su acción de control es  $u_v(k)$ . La estructura del controlador se obtiene en forma inmediata a partir de cualquiera de los algoritmos recursivos de control del tipo PID mostrados en los puntos anteriores, pasando el término  $u(k-1)$  al primer miembro. Tomando por ejemplo la Ec. 4.3-8, tiene la forma

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2)$$

$$u_v(k) = Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2)$$

La estructura de este controlador es de segundo orden no recursiva y desde el punto de vista dinámico no incluye un efecto integrador. Por esta razón su campo de aplicación se restringe fundamentalmente al control de procesos que incluyen el efecto integrador en su estructura, esto es que su función de transferencia tiene un polo en  $z=1$ .

#### 4.3.6 Definición de la estructura, tiempo de muestreo y parámetros del controlador PID.

##### Estructura del controlador.

En primera instancia debe determinarse la estructura del controlador. Esta se fija en función de las características globales del proceso a controlar. En algunos casos particulares podrán ser eliminadas algunas de las acciones integrativa o derivativa. Como norma general, si resulta muy importante la eliminación del error de estado estacionario, deberá estar presente la acción integral. Debe tenerse en cuenta que esta acción reduce el margen de fase. De igual modo cuando es fundamental obtener respuestas rápidas frente a cambios bruscos de la referencia, con buen amortiguamiento, se pone énfasis en la parte derivativa. Esta acción aumenta el margen de fase. En general dependiendo del tipo de perturbaciones y dinámica del proceso, para decidir la eliminación de alguna de las acciones será conveniente realizar ensayos de simulación. Un cambio de estructura de PID a PI o PD puede también interpretarse como una optimización de parámetros donde alguno de ellos tiende a cero.

##### Tiempo de muestreo.

La selección del tiempo de muestreo es el resultado de varios compromisos. Como norma general si sólo interesa el desempeño del control, el tiempo de muestreo  $T_o$  debe ser lo menor posible, para aproximarse al caso continuo. Desde el punto de vista de la cantidad de cálculo involucrado, el tiempo de muestreo debe ser lo mayor posible. Dentro de estos límites existe una gran variedad de casos de compromiso. Aparte de otros elementos del sistema de control como los sensores y actuadores que pueden influir en la determinación del tiempo de muestreo, el aspecto fundamental está constituido por las características dinámicas del proceso. En general cuanto mayores sean los valores de las constantes de tiempo, mayor es  $T_o$ .

El límite superior de  $T_o$  está dado por el teorema de Shannon (Ec. 2.5-6). Esto es, si se conocen las armónicas máximas de las señales involucradas, o se pueden estimar, la frecuencia de muestreo debe duplicar por lo menos a la frecuencia de estas armónicas. Ante la posible presencia de armónicas de mayor orden a las autorizadas por el teorema de Shannon, se deben incluir filtros para eliminarlas. Para procesos con retardo puro dominante  $T_t$ , el tiempo de muestreo debe elegirse entre  $1/4$  y  $1/8$  de  $T_t$ .

El tiempo de crecimiento  $T_c$ , o sea el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 95% del valor final en respuesta a un escalón de entrada, puede también ser un indicador para seleccionar  $T_o$ . Valores adecuados son:  $T_c/5 > T_o > T_c/15$ .

Las constantes de tiempo menores del proceso  $T_{\min}$ , sobre las que se quiere tener control, imponen condiciones a los valores máximos de  $T_o$ . En general debe ser  $T_o < T_{\min}/2$ . Este valor surge como valor aproximado a partir del teorema de Shannon. En la práctica se aconseja utilizar un período de muestreo  $T_o$  por lo menos un factor  $1/5$  menor que  $T_{\min}$ . Si las dinámicas rápidas no son consideradas, deben filtrarse las señales antes del muestreo tal como lo especifica el teorema del muestreo de Shannon.

Finalmente, la selección de  $T_o$  modifica la posición de los ceros y los polos de la función de transferencia discreta pudiendo incluso transformarse el modelo en sistema de fase no mínima, esto es incluir ceros fuera del círculo unitario. En muchos casos el aumento de  $T_o$  mejora las características de la respuesta temporal, o bien reduce la energía de la acción de control. La selección de  $T_o$  en base a este aspecto implica analizar el desplazamiento de los ceros y los polos de la función de transferencia discreta en el plano  $Z$ , o también analizar las respuestas temporales obtenidas por simulación.

Para sistemas de dinámica muy rápida, como ser el control de las variables eléctricas de un circuito, el orden de magnitud de  $T_o$  se aproxima a  $1 \text{ mseg}$ . Para el control de sistemas electromecánicos rápidos, como por ejemplo motores eléctricos que mueven



estructuras mecánicas ligeras, se suele elegir  $T_o = 10 \text{ mseg}$  o menor. Para procesos químicos o térmicos es normalmente mucho mayor, por ejemplo:  $1 \text{ seg} < T_o < 20 \text{ seg}$ .

### Optimización de Parámetros.

La adaptación o calibración de los parámetros del controlador a la dinámica del proceso se puede realizar por distintas vías:

- a) Optimización de los parámetros mediante un criterio de desempeño.
- b) Prueba y error.
- c) Aplicación de reglas de ajuste o sintonía.

#### a) Criterio de desempeño.

La optimización de los parámetros aplicando un criterio de desempeño definido, se utiliza en aquellos casos de requerimientos muy rigurosos. En general, se plantea un índice en el que se evalúa, por ejemplo, la magnitud del error  $e(k)$  que tiene la salida respecto de la referencia y también la magnitud de las variaciones de las acciones de control  $u(k)$ , respecto a su valor medio  $\Delta u(k)$ . Un índice muy utilizado es el propuesto por Fletcher-Powell que se expresa como

$$J = \sum_{k=0}^M [e^2(k) + r(\Delta u)^2(k)]. \quad (4.3-22)$$

Este tipo de índices será analizado para los casos de control óptimo de estado y control estocástico. La solución analítica, esto es la obtención de los parámetros como función de  $J$ , es sólo posible para controladores de muy bajo orden. La Ec. 4.3-22 es no obstante muy útil para la evaluación del desempeño del controlador en un planteo experimental de prueba y error.

#### b) Prueba y error

Se trata de una metodología puramente experimental que consiste en variar en forma sistemática los distintos parámetros y observar el resultado obtenido, ya sea directamente sobre el proceso real, si las condiciones de experimentación así lo permitan, o mejor en un esquema de simulación. La entrada usualmente utilizada es un escalón cuya amplitud sea compatible con el rango de trabajo del sistema.

En general primeramente se eliminan los efectos integrativos y derivativos y se trata de obtener una ganancia proporcional lo mayor posible que provea una adecuada

respuesta temporal. Si esto no se puede lograr por el solo ajuste de la ganancia, se comienza a introducir con cautela el efecto derivativo. Eventualmente se puede ajustar nuevamente el término proporcional para mejorar aún más la respuesta. Es necesario repetir este proceso hasta lograr una buena respuesta temporal con el mínimo error de estado estacionario posible. Es importante tener en cuenta que el amortiguamiento de la respuesta del sistema se logra mediante el carácter predictivo de la acción derivativa. En general la acción derivativa reduce las sobreelongaciones, aumentando el margen de fase del sistema.

Si el error de estado estacionario es un aspecto fundamental, se hace necesario la incorporación del efecto integrativo. Se comienza con el mínimo valor posible y se corrige analizando la respuesta temporal de forma de obtener la eliminación del error de estado estacionario en un tiempo prudencial. Se debe tener en cuenta que la acción integral reduce el margen de fase lo que puede llevar a la generación de sobreelongaciones significativas. Estas deberán minimizarse reduciendo el efecto integrativo, si el tiempo de eliminación del error de estado estacionario resultante es aceptable. En caso contrario es necesario reajustar los términos proporcional y derivativo. En particular es conveniente aumentar el efecto derivativo primero y verificar la respuesta. Esto puede estar complementado con una modificación en la ganancia proporcional.

Esta metodología normalmente se aplica luego de obtener valores indicativos provistos por otros métodos, como el de las **reglas de ajuste** y constituyen un paso de gran importancia para la obtención de resultados satisfactorios en un sistema de control.

### c) Reglas de ajuste o sintonía.

Las reglas de ajuste de parámetros para un controlador PID continuo son muy difundidas en la literatura de control clásico e incluso bastante conocidas por los operadores de plantas industriales. Estas reglas tienen una fuerte componente empírica y las más conocidas son las denominadas de Ziegler-Nichols. Se aplican para procesos del tipo pasa-bajos, los que constituyen la mayoría de los procesos industriales. Reglas del mismo tipo se han presentado para los modelos discretos, los que pueden diferir en mayor o menor grado dependiendo del tiempo de muestreo. Por ejemplo las reglas de Takahashi se deducen de las de Ziegler-Nichols. Ambos tipos de reglas se presentan a continuación.

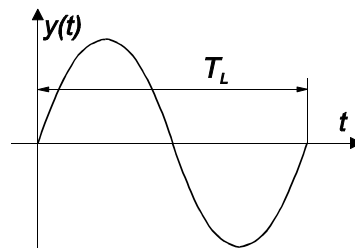
### Metodología para la obtención de los parámetros.

Cuando se conoce el modelo del proceso, resulta en general más adecuado hacer el análisis en diagramas de Bode, Nyquist o diagrama de raíces para encontrar los parámetros del controlador más adecuado. Cuando no se conoce el modelo del proceso se puede realizar un análisis experimental del mismo para determinar sus

características dinámicas más relevantes y a partir de estas obtener los parámetros del controlador. A continuación se resume la secuencia de pasos a dar para obtener los parámetros según las reglas de Ziegler-Nichols y Takahashi. Este análisis se basa primeramente en llevar el sistema de lazo cerrado al límite de estabilidad. En estas circunstancias se determinan la frecuencia de oscilación y la ganancia del lazo que ha llevado al sistema a dicho límite.

### Procedimiento experimental.

- \* Se fijan los valores de las partes I y D igual a cero y se hace crecer la ganancia P hasta el límite de la estabilidad con lo cual el sistema comenzará a oscilar generando una respuesta como la presentada en la Fig. 4.3.6.
- \* Se determina el valor de ganancia  $K_L$  que lleva el sistema a la oscilación.
- \* Se determina el período de oscilación  $T_L$ .
- \* Conociendo  $K_L$ ,  $T_L$  se ajustan los parámetros de acuerdo a las reglas de la Fig. 4.3.7. en el dominio continuo



**Fig. 4.3.6. Sistema en el límite de estabilidad.**

	Controlador	$K$	$K_I$	$T_D$
<b>P</b>	$K$	$0,5 K_L$		
<b>PI</b>	$K(1 + K_I/s)$	$0,45 K_L$	$1,2/T_L$	

<b>PID</b>	$K[1 + (K_I/s) + T_D s]$	$0,6 K_L$	$2/T_L$	$T_L/8$
------------	--------------------------	-----------	---------	---------

**Fig. 4.3.7. Reglas de ajuste según Ziegler-Nichols basadas en el criterio del límite de estabilidad.**

Para el mismo procedimiento según Takahashi para sistemas de tiempo discreto con período de muestreo  $T_o$  se utiliza el cuadro de la Fig. 4.3.8. Estos valores son sólo válidos para el controlador PID modificado representado por la Ec. 4.3-18.

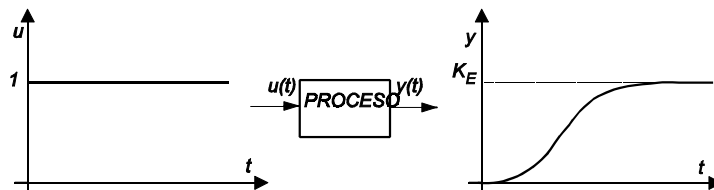
	$K$	$K_I T_o$	$T_D/T_o$
<b>P</b>	$0,5 K_L$		
<b>PI</b>	$K_1 K_L T_o / T_L$ *	$0,54 (K_L / K) (T_o / T_L)$	
<b>PID</b>	$0,6 K_L T_o / T_L$ **	$1,2 (K_L / K) (T_o / T_L)$	$(3/40) (K_L / K) (T_L / T_o)$

•  $K_1 = [0,45 \dots 0,2]$ . Valores más pequeños para  $T_o \approx 4T_U$  (ver Fig. 4.3-10)

\*\* Válido para  $T_o \leq 2T_U$

**Fig. 4.3.8. Reglas de ajuste según Takahashi.**

Cuando no se dispone aún del controlador o bien no es posible llevar el sistema al límite de estabilidad, el análisis se realiza a lazo abierto en base a la respuesta del proceso a una entrada escalón según se esquematiza en la Fig. 4.3.9.



**Fig. 4.3.9. Respuesta al escalón.**

Se supone que no hay oscilación en la respuesta. Se distinguen los siguientes casos:

El proceso no tiene comportamiento integral.

El proceso tiene comportamiento integral.

Cuando el proceso no tiene carácter integral se sigue el siguiente procedimiento:

- \* Se obtiene la respuesta al escalón unitario y se realiza la construcción de la Fig. 4.3.10.

De esta forma se aproxima el proceso con un modelo continuo basado en un sistema de primer orden y un retardo puro de la forma representada por la Ec. 4.3-23.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_E}{1 + T_G s} e^{-T_U s} \quad (4.3-23)$$

- \* Se determinan los valores de  $K_E$ ,  $T_U$ ,  $T_G$  según la Fig. 4.3.10.

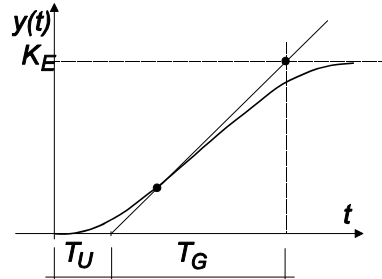
- \* Con estos valores se determinan los parámetros del controlador de acuerdo a las reglas de la Fig. 4.3.12.

Este método no es aplicable para procesos cuyo modelo sea de primer orden sin retardo puro. Para sistemas de tiempo discreto con período de muestreo  $T_o$  se aplican las reglas según Takahashi de la Fig. 4.3.13

Si el sistema tiene comportamiento integral se aplica el siguiente procedimiento:

- \* Se obtiene la respuesta al escalón unitario y se determinan los valores de  $T_U$  y  $K_E/T_G$

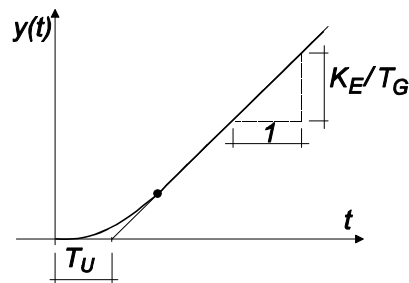
como la pendiente de crecimiento según la Fig. 4.3.11; aproximando el proceso con un modelo que incluye un retardo puro y un integrador puro, según la Ec. 4.3-24.



**Fig. 4.3.10. Determinación de  $K_E$ ,  $T_G$  y  $T_U$**

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_E}{T_G s} e^{-T_U s} \quad (4.3-24)$$

Con los valores de  $T_U$ ,  $K_E/T_G$  se determinan los parámetros de acuerdo a las reglas de la Fig. 4.3.12.



**Fig. 4.3.11. Respuesta a un escalón unitario para sistema con carácter integral.**

	Controlador	$K$	$K_I$	$T_D$
<b>P</b>	$K$	$\frac{1}{(K_E/T_G)T_U}$		
<b>PI</b>	$K(1+K_I/s)$	$\frac{0,9}{(K_E/T_G)T_U}$	$\frac{1}{3,3 T_U}$	

<b>PID</b>	$K(1 + K_I/s + T_D s)$	$\frac{1,2}{(K_E/T_G)T_U}$	$\frac{1}{2 T_U}$	$0,5 T_U$
------------	------------------------	----------------------------	-------------------	-----------

**Fig. 4.3.12. Reglas de ajuste según Ziegler-Nichols basado en la respuesta al escalón.**

Según Takahashi para controladores PID de tiempo discreto con período de muestreo  $T_o$  se utiliza el cuadro de la Fig. 4.3.13. Los valores dados aquí sólo se aplican al controlador PID modificado según la ley de control dada por la Ec. 4.3-18.

	$K$	$K_I T_o$	$T_D / T_o$
<b>P</b>	$\frac{T_G / K_E}{T_U + T_o}$		
<b>PI</b>	$\frac{0,9 T_G / K_E}{T_U + T_o / 2} - \frac{0,13 T_o T_G / K_E}{(T_U + T_o / 2)^2}$	$\frac{0,27 T_G T_o / K_E}{K(T_U + T_o / 2)^2}$	
<b>PID</b>	$\frac{1,2 T_G / K_E}{T_U + T_o / 2} - \frac{0,3 T_o T_G / K_E}{(T_U + T_o / 2)^2}$	$\frac{0,6 T_G T_o / K_E}{K(T_U + T_o / 2)^2}$	$\frac{0,5 T_G / K_E}{K T_o}$

**Fig. 4.3.13. Reglas de ajuste según Takahashi basado en la respuesta al escalón.**

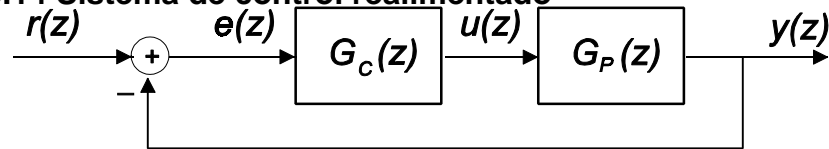
Los valores obtenidos por estas reglas de ajuste en general requieren de modificaciones posteriores de los parámetros mediante el procedimiento de prueba y error. De todos modos los valores si bien son indicativos, proporciona una buena base sobre la cual se puede continuar con el ajuste basado en la respuesta temporal del sistema.

### 4.3.7 Controlador discreto de bajo orden de parámetros optimizados.

La obtención del controlador PID discreto a partir del clásico controlador PID continuo constituye un planteo válido cuando el tiempo de muestreo es suficientemente pequeño en relación a las características dinámicas del proceso a controlar y de este modo el diseño se aproxima al caso continuo. No siempre se verifica esta situación; debido a condicionamientos tecnológicos, por ejemplo cuando el período de muestreo debe seleccionarse de forma tal que el diseño no puede considerarse como aproximación al caso continuo, o bien por razones de optimización dinámica. Por estos motivos es de utilidad hacer el diseño del controlador directamente en el dominio discreto. En esta sección se hace un planteo de controlador discreto general de estructura fija.

En la Fig. 4.3.14 se representa un sistema de control realimentado que incluye esquemáticamente un proceso  $G_p(z)$  y un controlador  $G_c(z)$ .

**Fig. 4.3.14 Sistema de control realimentado**



Representados en el dominio  $Z$  los modelos del proceso y del controlador tendrán en general la forma

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} \quad (4.3-26)$$

$$G_c(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_r z^{-r}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}. \quad (4.3-27)$$

Como se plantea una optimización de los parámetros del controlador, los órdenes de los polinomios de éste pueden ser elegidos en principio en forma independiente al proceso. En términos generales se proponen estructuras relativamente simples con el objeto de mantener reducido el cálculo del controlador en tiempo real.

Aparte de otros condicionamientos de realizabilidad, estabilidad y de características dinámicas específicos, se impone como norma al controlador la condición de eliminar el error de estado estacionario,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$$



o bien en el dominio  $Z$

$$\lim_{z \rightarrow 1} e(z)(1 - z^{-1}) = 0.$$

Esta condición se suele denominar efecto integrador. Si este efecto no está incorporado en el proceso, deberá ser asumido por el controlador.

Basado en el teorema del valor final en el campo discreto, el controlador deberá incorporar un polo en  $z=1$ . El controlador más simple que cumpla con esta condición tendrá una estructura del tipo

$$G_c(z) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - z^{-1}}. \quad (4.3-28)$$

El orden de  $Q(z^{-1})$  definirá el orden y tipo del controlador. Tratándose de controladores simples normalmente no se proponen órdenes mayores que el segundo. Un controlador discreto de segundo orden estará representado por

$$G_c(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{A + Bz^{-1} + Cz^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (4.3-29)$$

transformando al dominio temporal resulta

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) \quad (4.3-30)$$

La Ec. 4.3-30 tiene la misma forma que la ecuación del controlador PID discreto representado en la Ec. 4.3-6. No obstante los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  no se obtienen en principio a través de la fijación de constantes de ganancia estática, constante de integración o derivación como en el caso del controlador PID.

Suponiendo una entrada escalón unitario al controlador, se puede calcular la respuesta temporal discreta del mismo a partir de la Ec. 4.3-30.

$$e(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases}$$

$$u(0) = A$$

$$u(1) = 2A + B$$

$$u(2) = 3A + 2B + C$$

.

.

.

$$u(k) = (k+1)A + kB + (k-1)C. \quad (4.3-31)$$

También

$$u(k) = (A - C) + k(A + B + C) \quad (4.3-32)$$

La Ec. 4.3-32 representa una recta con ordenada al origen  $(A - C)$  y pendiente  $(A + B + C)$ .

La respuesta temporal de un controlador PID a un escalón, muestra un elevado valor de salida para  $t = 0$  (parte D) para luego disminuir a un valor mínimo y finalmente crecer a velocidad constante (parte I). Si se desea que este controlador discreto tenga un comportamiento similar deberá ser

$$u(1) < u(0) ; u(1) < u(2).$$

Para un controlador con comportamiento PID con ganancia positiva se observa de la Ec. 4.3-32 que deberá ser (ver Fig. 4.3.15)

$$\begin{aligned} A &> 0 \\ (A - C) &> 0 \\ (A + B + C) &> 0 \\ (2A + B) &< A. \end{aligned}$$

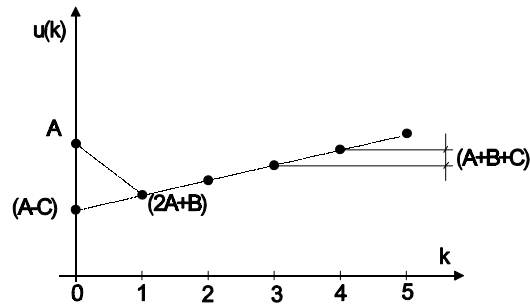
De tal forma resultan las siguientes condiciones para comportamiento tipo PID

$$\begin{aligned} A &> 0 \\ B &< -A \\ -(A + B) &< C < A. \end{aligned} \quad (3.4-33)$$

Una respuesta típica se muestra en la Fig. 4.3.15. Asociando esta respuesta a la de un controlador PID continuo se pueden definir

$$\begin{aligned} G &= A - C \\ C_D &= [A - (A - C)]/G = C/G \\ C_I &= (A + B + C)/G \end{aligned} \quad (4.3-34)$$

como ganancia estática, constante de derivación y constante de integración respectivamente.



**Fig. 4.3.15 Respuesta al escalón del controlador discreto con comportamiento tipo PID.**

La determinación de los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  del controlador general discreto de la Ec. 4.3-17 requiere de un proceso de optimización o calibración. Si se le quiere dar comportamiento tipo PID se puede en primera aproximación utilizar las reglas de Takahashi teniendo en cuenta que se pueden establecer las siguientes equivalencias.

$$\begin{aligned} K &\rightarrow G \\ T_D/T_o &\rightarrow C_D \\ K_I T_o &\rightarrow C_I \end{aligned} \quad (4.3-35)$$

Si en la Ec. 4.3-29 alguno de los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  se anula se tiene un controlador discreto de primer orden. Cuando es  $C = 0$ , toma la forma

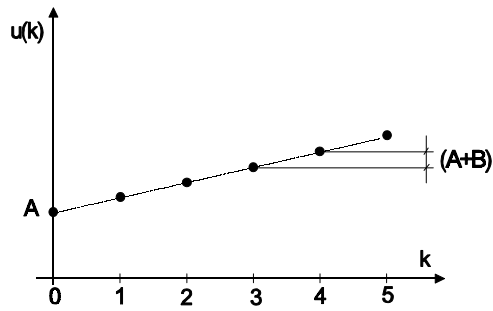
$$G_c(z) = \frac{A + Bz^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (4.3-36)$$

La ecuación en diferencias resulta

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1). \quad (4.3-37)$$

En la Fig. 4.3.16 se representa la respuesta temporal discreta para una entrada escalón unitario. Su evolución puede ser comparada con un controlador continuo de tipo PI, con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} A &> 0 \\ A + B &> 0. \end{aligned} \quad (4.3-38)$$



**Fig. 4.3.16 Respuesta al escalón del controlador de 1<sup>er</sup> Orden.**

La ganancia estática y la constante de integración equivalen respectivamente

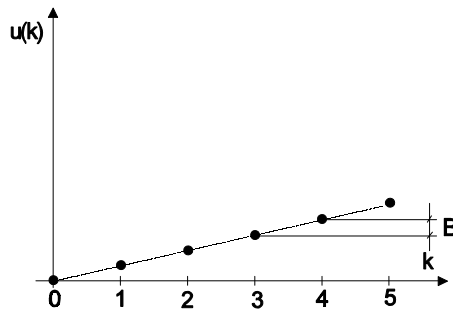
$$G = A$$

$$C_I = 1 + B / A.$$

Si además es  $B = 0$  se obtiene un controlador del mismo tipo PI cuya constante de integración es la unidad. Cuando se hace  $A = 0$  con  $B \neq 0$  se obtiene un controlador de tipo integral puro

$$u(k) = u(k-1) + B e(k-1). \quad (4.3-39)$$

La respuesta discreta al escalón unitario se representa en la Fig. 4.3.17.



**Fig. 4.3.17. Respuesta tipo I.**

Cuando el error de estado estacionario no es importante o bien el efecto integrador no es deseable, éste se puede eliminar. En tal caso la estructura del controlador toma la forma

$$G_c(z) = A + Bz^{-1} \quad (4.3-40)$$

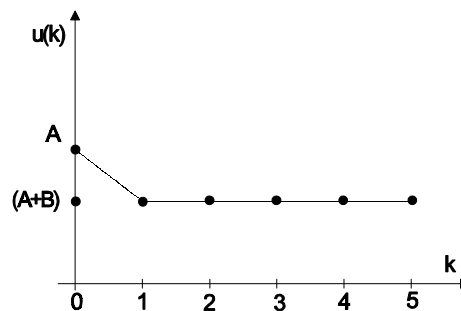
$$u(k) = Ae(k) + B e(k-1). \quad (4.3-41)$$

Esta ecuación es no recursiva y la respuesta discreta al escalón unitario se muestra en la Fig. 4.3.18 para la condición

$$A > 0$$

$$B < 0$$

$$A + B > 0.$$



**Fig. 4.3.18 Respuesta tipo PD.**

La respuesta al escalón tiene un comportamiento equivalente a un controlador continuo del tipo PD, en el cual la constante de proporcionalidad y la derivativa se corresponden a

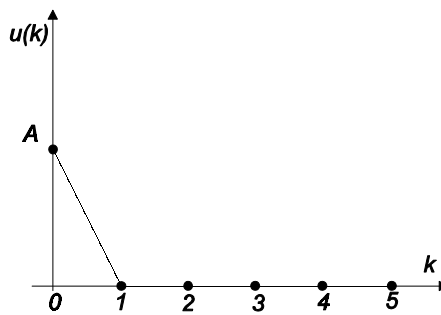
$$G = A + B$$

$$C_D = -\frac{B}{G}.$$

Cuando es  $B = 0$  el controlador se reduce a un proporcional puro con ganancia

$$G = A.$$

Si se impone la condición  $A = -B$  se obtiene un controlador que puede asociarse a uno continuo de tipo D. Su respuesta discreta se representa en la Fig. 4.3.19.



**Fig. 4.3.19 Respuesta tipo D**

El análisis realizado se hizo relacionando los controladores obtenidos con los clásicos continuos de tipo PID. Los controladores lineales discretos resultantes en tal caso pueden asociarse a acciones del tipo PID. No obstante otras relaciones de los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son posibles conduciendo a controladores que no responden a un comportamiento específico. El diseñador podrá utilizar para ciertas aplicaciones, los controladores generales con una selección de los coeficientes adecuada a la aplicación, o bien con coeficientes que son resultado de la optimización de acuerdo a un objetivo de control a través de un funcional de desempeño.