

# Informe de Trabajo Final



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Departamento de Electrotecnia**  
**Sistemas controlados por computadora**

Diseño e Implementación de un Robot Seguidor de Línea Controlado  
Mediante PID

Alumnos:

Ferreyra Tania      Ingeniería Electrónica      ferreyra.1992@gmail.com  
Sanson Sebastian      Ingeniería Electrónica      sansoni.sebas@gmail.com

Neuquén, 2018

# 1. Resumen

El presente informe trata el diseño y desarrollo de un robot seguidor de línea. Este trabajo se encuentra enmarcado como proyecto de final de materia de Sistemas Controlados por Computadora, materia de la carrera Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional del Comahue.

El objetivo de estudio para la materia era la discretización e implementación en la vida real de un controlador PID. Con esto en mente se propuso la realización de un robot seguidor de línea del estilo utilizado en diversas competencias de robótica, donde el objetivo de diseño es que el robot sea capaz de seguir una pista en un plano horizontal de forma autónoma en el menor tiempo posible. El presente trabajo se orientó a la obtención de un seguidor de línea básico, de velocidad moderada, con perspectiva de mejorarse en versiones posteriores.

## 2. Introducción

### 2.1. Motivación

En el marco de las Jornadas Argentinas de Robótica (JAR) 2019 a realizarse en la Universidad Nacional del Comahue, se desea dar los primeros pasos en la implementación de sistemas robóticos. En particular, se desea trabajar en el inicio de un movimiento en la facultad para la utilización de la robótica educativa. La robótica educativa, también conocida como robótica pedagógica, es una disciplina que tiene por objeto la concepción, creación y puesta en funcionamiento de prototipos robóticos y programas especializados con fines pedagógicos (Ruiz-Velasco, 2007). Partiéndose de un proyecto concreto a realizar, el proceso de concepción, diseño, armado y puesta en marcha del prototipo enriquece el proceso de aprendizaje del alumno, fortaleciendo sus capacidades de liderazgo y motivándolo a resolver retos cada vez más complejos.

Este tipo de herramienta pedagógica se encuentra dentro de la metodología ABP (aprendizajes basados en proyectos). El ABP se desarrolla en un entorno real y experimental, lo que ayuda a los alumnos a relacionar los contenidos teóricos con el mundo real y mejora la receptividad para aprender los conceptos teóricos. Los alumnos toman un papel activo en el proyecto, ya que tienen que marcar el ritmo y profundidad del aprendizaje, y fijar los objetivos de la realización del proyecto. Este tipo de metodología motiva al alumno, por lo que resulta una estrategia de particular interés para mejorar el rendimiento académico y la persistencia en los estudios.

En la UNCo, particularmente en nuestra carrera, existe una fuerte inclinación a priorizar la enseñanza de conceptos casi exclusivamente teóricos, habiendo actualmente pocas materias que pidan la realización de proyectos concretos. Este enfoque puede traer aparejado una serie de inconvenientes: alumnos con poca capacidad para resolución de problemas reales, dificultad para relacionar los conceptos aprendidos con la vida real o para entender los mismos, falta de motivación en los alumnos, etc. Considerando esto y que actualmente la tasa de deserción en la carrera es de 50 % o más, es que se desea avanzar hacia las metodologías ABP mencionadas, particularmente en el área de robótica.

En el marco de esto, el presente trabajo busca implementar los conocimientos adquiridos en la materia en el diseño e implementación de distintas estrategias de control sobre un robot en la configuración de seguidor de línea.

### 2.2. Seguidor de línea

Los robots seguidores de línea son robots muy sencillos, que cumplen una única misión: seguir una línea marcada en el suelo (normalmente de color negro sobre un tablero blanco). Son considerados los "Hola mundo" de la robótica. La dificultad del recorrido determina la complejidad del robot y el requerimiento o no de una mayor cantidad de sensores, capacidad de procesamiento, mejoras de hardware, etc. Esta flexibilidad los hace particularmente interesantes como herramientas educativas, ya que se puede comenzar con diseños sencillos para luego avanzar en sucesivas mejoras del prototipo, pudiendo adaptarse a distintas materias de la carrera.

En Argentina se festejan distintas competencias relacionadas con la fabricación y puesta en marcha de los seguidores de líneas, también clasificada como la modalidad "carreras". Se destacan entre otros:

- 15º Competencia Internacional de Robótica - GRS - UTN Bahía Blanca.
- Liga nacional de robótica - <http://www.lnr-argentina.com.ar>
- Competencia Nacional de Robótica 2017 - Instituto La Salle Florida – Bs. As.
- Grupo de Robotica Universidad de Mendoza (GRUM).
- Instituto Tecnológico del Comahue (ITC)- Neuquén.

A nivel internacional existe un proyecto llamado Open Lamborghini [1], en el cual se detalla la construcción de un seguidor de línea con componentes relativamente baratos y de fácil acceso.

### 3. Objetivos de la propuesta

El presente trabajo tiene por objetivo general el desarrollo e implementación de un robot seguidor de línea y como objetivo específico de la materia la implementación de un controlador PID discreto.

### 4. Estructura del Trabajo

El siguiente trabajo se divide en 13 secciones. En la sección 5 se define el hardware y estructura mecánica a utilizar, con un detalle del material de trabajo disponible. En la sección 6 se analiza cómo modelar matemáticamente el comportamiento del sistema. En 7 se define la estrategia de control a implementar. En 8 se explican los sensores diseñados para el robot. En 9 se aborda la identificación de sistemas realizada para poder ajustar los controladores, lo cual se detalla en la sección 10. En la sección 11 discute los resultados obtenidos al probar el sistema completo, mientras que en la sección 12 se dan las conclusiones del trabajo. Y por último en la sección 13 se determinan cuales son los pasos a seguir en próximas incursiones de este proyecto.

## 5. Implementación

Para facilitar la implementación del robot, se propone utilizar la configuración de hardware recomendada en Open Lamborghini con algunas modificaciones de diseño propio. La configuración se detalla a continuación:

- 2 motores N20 con reducción 1:10 [2].
- Driver para motores: TB6612FNG [3].
- Computadora de abordo: Arduino Nano [4].
- Batería de LiPo: 2S 1100mA.
- Comunicación inalámbrica: par de Módulos bluetooth HC-05 o similar.
- Estructura fabricada en la impresora 3D de la facultad.

### 5.1. Estructura Mecánica

Se definió utilizar una estructura con dos ruedas y un punto de apoyo. El frente del robot se encuentra en el lado opuesto al del punto de apoyo, con una estructura para soporte de los LEDs del sensor de línea colocada en esta zona. La estructura diseñada se muestra en la figura 1. El diseño de las piezas mecánicas fue realizado

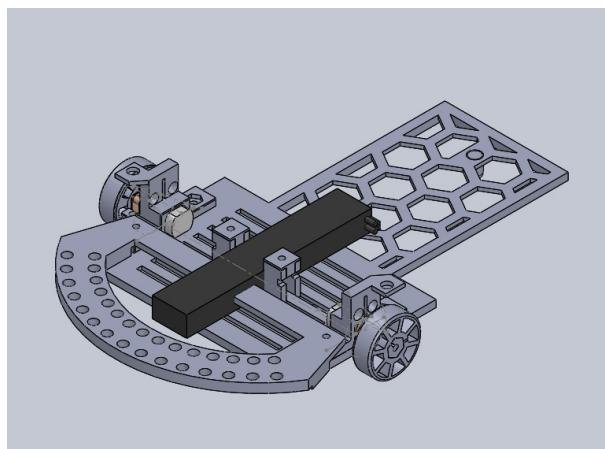


Figura 1: Estructura mecánica del robot.

por el ahora ingeniero Carrascal Cliver. Las mismas se imprimieron con impresora 3D.

## 6. Modelado del sistema

### 6.1. Modelo cinemático

#### 6.1.1. Ecuaciones de Movimiento

Según [5], el robot que se desea modelar se lo conoce como robot diferencial ya que cuenta con 2 ruedas y un punto de apoyo. Esta clase de robots son no holonómicos ya que tiene restricciones a la hora de realizar

movimientos sobre el plano; por ejemplo, no puede realizar movimientos puramente laterales. En la figura 2 se muestra un esquemático de este tipo de robots.

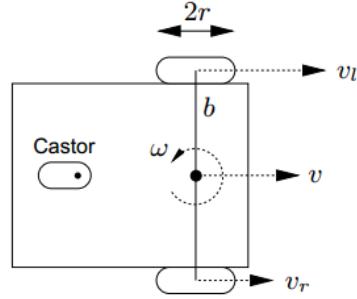


Figura 2: Robot diferencial.

Suponiendo que no hay deslizamiento, la posición y orientación del punto central del dispositivo, C, están dadas por las ecuaciones cinemáticas 1. El punto C es el punto medio del segmento que une las ruedas del robot.

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad \dot{y} = v \sin \theta \quad \dot{\theta} = \omega \quad (1)$$

Donde  $(x, y)$  indica la posición del centro C en el espacio cartesiano y  $\theta$ , conocida como orientación, es el angulo entre el eje x del sistema de coordenadas y el eje homologo del robot, es decir, el eje de simetría del cuerpo. De esta manera  $(x, y, \theta)^T$  definen la postura del sistema completo.

Si los motores se mueven a velocidades  $\omega_R$  y  $\omega_L$ , las velocidades  $v$  y  $\omega$  son [6]:

$$v = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2}$$

$$\omega_C = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{L} \quad (2)$$

donde L es la distancia entre las ruedas.

### 6.1.2. Modelado del sistema de medición

Suponiendo la situación mostrada en la figura 3 en donde la linea a seguir se encuentra sobre el eje x,

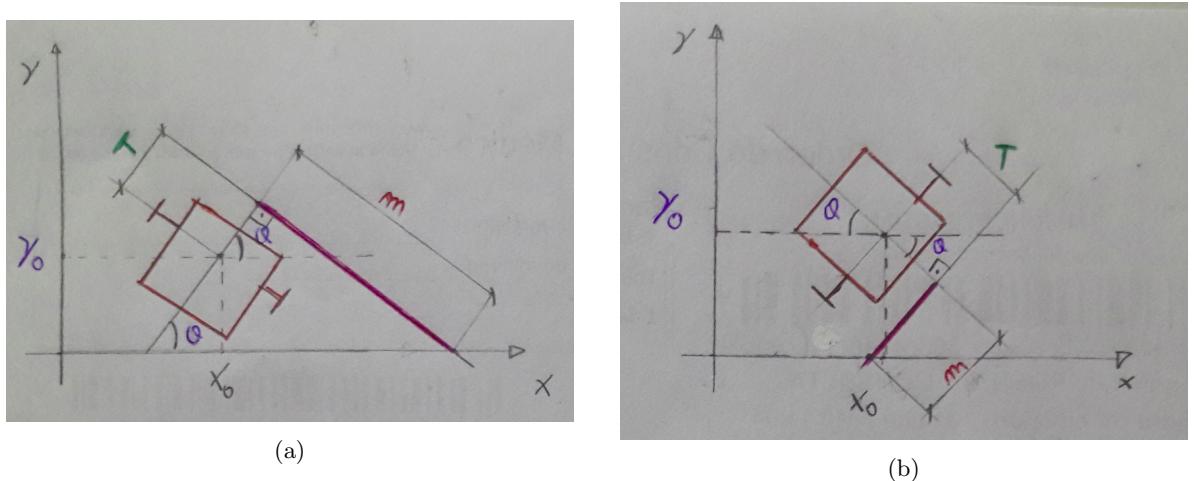


Figura 3: Geometría del robot considerando dos posturas distintas: (a)  $Y_0 > 0$  y  $\theta > 0$  y (b)  $Y_0 > 0$  y  $\theta < 0$ .

con ayuda de un poco de geometría se puede demostrar que para (a)

$$m = (T \sin(\theta) + Y_0) \frac{1}{\cos(\theta)} \quad (3)$$

y para (b)

$$m = \sqrt{Y_0^2 - T^2 + \left( (T - Y_0 \sin(\theta)) \frac{1}{\cos(\theta)} \right)^2} \quad (4)$$

en donde  $m$  es la medida del sensor en *metros* y  $\theta$ ,  $X_0$  y  $Y_0$  determinan la pose del dispositivo. Suponiendo que  $|Y_0| \approx 0$  y simplificando en 3 y 4 resulta que

$$m \approx T \tan(\theta) \quad (5)$$

Como  $T$  es fijo, la medición de  $m$  puede traducirse en una medición del ángulo de orientación. De esta manera podríamos buscar minimizar el ángulo para alinear el robot con la pista. Como la medición se hace suponiendo que  $Y_0 \approx 0$ , si el robot no está centrado respecto a la pista el cálculo del ángulo va a indicar una medición errónea, por lo que al llevar a cero  $\theta$  medido de esta manera se termina garantizando que el robot esté centrado respecto a la pista.

La hipótesis utilizada debería ser válida si el sistema controlado es lo suficientemente rápido para corregir desviaciones antes de que el centro se desplace fuera de la pista.

Como lo que se controla son las velocidades de cada motor de forma individual, resulta que

$$\dot{\theta} = \omega_C = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{L} \quad (6)$$

Dado que solo interesa la diferencia entre velocidades angulares del motor, se puede mantener  $v$  constante (por medio de  $\omega$ ) tomando:

$$\omega_R = \omega_{fijo} + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\omega_L = \omega_{fijo} - \frac{\Delta\omega}{2}$$

Esto disminuiría el problema a una sola señal de control  $\Delta\omega$ .

### 6.1.3. Radio de giro

En la figura 4 se muestra la disposición del robot cuando esta siguiendo una curva. En este caso la velocidad

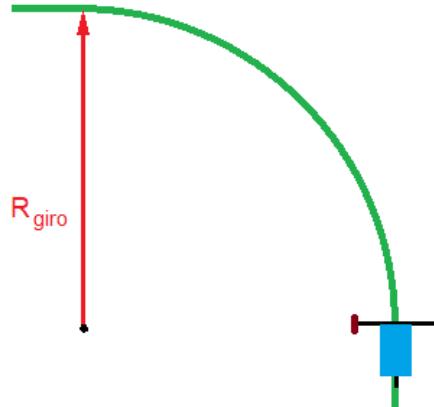


Figura 4: Esquema del robot girando.

del punto C tiene una componente tangencial,  $v$ , y una componente radial,  $\omega$ , dadas por

$$v = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2} = r\omega_{fijo} \quad (7)$$

$$\omega_C = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{L} = \frac{r\Delta\omega}{L} \quad (8)$$

la relación entre ambas magnitudes es

$$v = R_{giro}\omega_C$$

reemplazando esto en las ecuaciones 7 y 8, se obtiene

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{fijo}L}{R_{giro}} \quad (9)$$

Así, mientras más pequeño sea el radio de giro, más grande debe ser  $\Delta\omega$ . Para una velocidad  $\omega_{fijo}$  constante, el máximo valor admisible de  $\Delta\omega$  determinará el menor radio de giro que podrá hacer el robot.

## 6.2. Modelado de los motores

Los motores a utilizar son motores de DC con escobillas. Segundo [8, pág. 58-59], si se desprecia el torque de la perturbación, la función de transferencia de la combinación motor-carga resulta

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)}$$

donde  $\theta$  es la posición angular,  $V_f$  es la tensión de excitación,  $K_m$  es la constante que relaciona la corriente con el par del motor,  $J$  es el momento de inercia del eje,  $b$  es la constante de fricción del eje,  $L_f$  y  $R_f$  son la autoinductancia y resistencia del bobinado, respectivamente. Simplificando la función de transferencia resulta

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{k}{s(s + a)(s + b)}$$

donde  $k$ ,  $a$  y  $b$  son constantes a determinar mediante la identificación.

Por practicidad en vez de usar  $\theta$  se usa  $\dot{\theta}$ , lo que produce una función de transferencia un orden menor

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{V_f(s)} = \frac{k}{(s + a)(s + b)} \quad (10)$$

## 7. Estrategia de Control a Utilizar

Para alcanzar los objetivos del proyecto se decidió implementar tres controladores PID en simultáneo: dos controladores para regularizar el comportamiento de los motores y el controlador para el sistema total, que se encargará de que el robot siga la pista. Los dos primeros se utilizan para que las ruedas se muevan a la velocidad requerida y para compensar asimetrías en la respuesta de los dos motores. Una vez implementados todos los controladores descritos el sistema total queda según se observa en el diagrama en bloques de la figura 5.

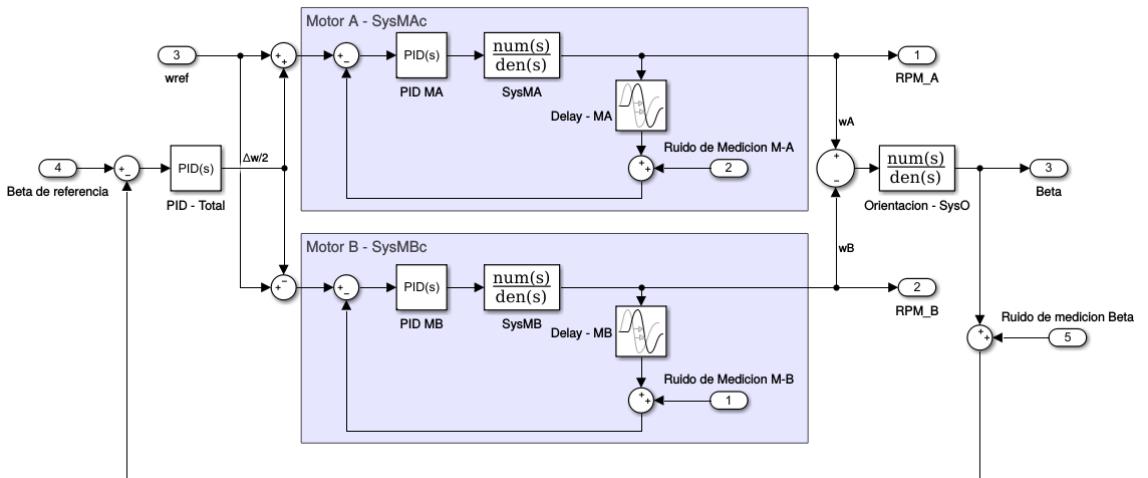


Figura 5: Diagrama en bloques del sistema total con los tres controladores PID implementados.

En la anterior figura, se observa que cada sistema motor  $Sys_M$  cuenta con dos entradas, una llamada  $\omega_{ref}$  y otra  $\pm \frac{\Delta\omega}{2}$ , ademas cuentan con su propio controlador, originando así un sistema realimentado llamado  $Sys_{Mc}$ . Luego la diferencia de velocidades de los ejes de cada motor controlado ingresa a la planta de orientación  $Sys_O$ . Con ayuda de la ecuación 6 se deduce:

$$\theta(s) = Sys_O(\omega_R(s) - \omega_L(s)) = Sys_O(Sys_{MBc}Setpoint_B(s) - Sys_{MAc}Setpoint_A(s)) \quad (11)$$

en donde  $Setpoint = \omega_{ref} \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ , luego reemplazando

$$\theta(s) = Sys_O \left( Sys_{MBc}(\omega_{ref}(s) + \frac{\Delta\omega(s)}{2}) - Sys_{MAc}(\omega_{ref}(s) - \frac{\Delta\omega(s)}{2}) \right) \quad (12)$$

reordenando

$$\theta(s) = Sys_O \left( \omega_{ref}(s)(Sys_{MBc} - Sys_{MAc}) + \frac{\Delta\omega(s)}{2}(Sys_{MBc} + Sys_{MAc}) \right) \quad (13)$$

luego si  $Sys_{MBc} \approx Sys_{MAc}$  y ademas el termino  $\omega_{ref}(Sys_{MBc} - Sys_{MAc})$  es muy pequeño comparado con  $\frac{\Delta\omega}{2}(Sys_{MBc} + Sys_{MAc})$  resulta que

$$\theta(s) = \Delta\omega(s) Sys_O Sys_{MAc} = \Delta\omega(s) Sys_{total} \quad (14)$$

por lo tanto es necesario que el sistema controlado de ambos motores se comporten lo mas parecido posible y que ademas se cumpla  $\omega_{ref}(Sys_{MBc} - Sys_{MAc}) \ll \frac{\Delta\omega}{2}(Sys_{MBc} + Sys_{MAc})$ .

Bajo estas hipótesis, el sistema completo sin control en la orientación será

$$\frac{\theta(s)}{\Delta\omega(s)} = Sys_O(s) Sys_{MAc}(s) = Sys_O(s) \frac{C_a(s) Sys_{MA}(s)}{1 + C_a(s) Sys_{MA}(s)} \quad (15)$$

en donde  $C_a(s)$  es el controlador para el motor A.

## 7.1. PID

A continuación se realiza un breve repaso del controlador PID a modo de introducción cualitativa, ya que se asume que el lector posee conocimiento básico de control. Para profundizar en el análisis teórico del controlador PID específicamente, se recomienda leer [11].

Un controlador PID esta constituido por 3 controles fácilmente identificables: Proporcional (P), Integral (I) y Derivativo (D). Si bien el nombre *PID* hace referencia a la estrategia de control, existen distintas maneras de implementarlo, esto es I-PD, PI-D, PI, PD, P, entre otros. Por cuestiones didácticas, se explicara sintéticamente lo mas relevante de algunos de estos controladores.

Considerando la figura 6, se puede observar el diagrama en bloques de un sistema genérico realimentado, en donde  $l$  y  $n$  son ruido/perturbaciones del modelo y de la medición respectivamente,  $r$  es la señal de referencia, esto es, el valor deseado de la señal de salida  $y$ ,  $e$  es la diferencia entre el valor deseado y el valor medido de la salida,  $u$  es la salida del controlador (o acción de control) y  $x$  es la salida de la planta sin que esté afectada por ruidos / perturbaciones.

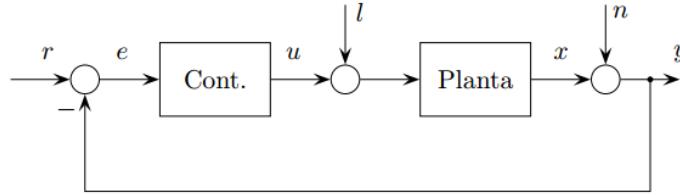


Figura 6: Diagrama en bloques de un sistema realimentado.

### 7.1.1. Control Proporcional

Un control proporcional es aquel en donde la acción de control  $u$  es proporcional al error  $e$ , esto es

$$e = r - y \rightarrow u = k(e) = k(r - y) \quad (16)$$

Para lograr un mejor entendimiento, se va a ejemplificar una situación práctica:

**Ejemplo:** Se desea controlar la velocidad del eje de un motor de corriente continua (CC), para lo cual se cuenta con un generador de *PWM* y un sistema de medición de *RPM* del eje.

Supongamos que deseamos que el eje del motor gire a  $1000RPM$ , inicialmente el eje se encuentra en reposo, por lo que la medición del sensor sera  $y = 0RPM$ . Dados estos datos el error sera

$$e = r - y \rightarrow e = 1000RPM - 0RPM = 1000RPM$$

por lo que la acción de control sera  $u = k1000RPM$ .

En este caso el valor de  $k$  representa una constante que adecua las unidades de *RPM* a *% de duty* y ademas aplica un factor de ganancia, esto es:

$$k = k_{unidades} k_{ganancia}$$

Dicho esto, suponga que  $k_{unidades} = 1/10$  [*%duty/RPM*] y que  $k_{ganancia} = 1$ , luego la salida del controlador será  $100\%duty$ .

Si todo esta bien conectado, el eje se comenzará a mover, por lo que el sensor de velocidad medirá una velocidad no nula, lo cual producirá una señal de control menor a la que inicialmente se obtuvo. Luego de un periodo prudente en donde el estado transitorio convergerá, se observa que la velocidad final del motor resulta ser  $y = 700RPM$  y la acción de control por lo tanto sera  $u = k(r - y) = 30$  [*%duty*].

Gracias al anterior ejemplo se pueden observar algunas características del control proporcional:

1. Cuando el error  $e$  es cero la salida es cero, por lo que siempre habrá una diferencia entre el valor deseado (set point) y el valor medido, a menos claro que el *setpoint* sea cero.
2. Si el valor de  $k_{ganancia}$  es más grande, en el estado estacionario se puede observar que la salida del control será mayor, por lo que el motor girará a mayor velocidad, produciendo así, un valor más cercano al deseado.
3. Si  $k_{ganancia}$  es un valor elevado, cuando exista alguna perturbación en la medición, este error en la medida sera  $k$  veces amplificado en la acción de control.

### 7.1.2. Control Integral

Para resolver la problemática planteada en el item 1 del control proporcional, se plantea como solución la utilización de un control integral.

El control integral se puede interpretar como que la salida de control  $u$  es proporcional a la integral del error  $e$ , en símbolos

$$u = K_i \int_{t_0}^{t_1} e dt \quad (17)$$

en la cual se observa que si el error entre la salida y el *setpoint* perdura en el tiempo, la acción de control se incrementara hasta que el error sea nulo.

**Problemática:** En la realidad, la acción de control posee una cota, ya que no puede ser arbitrariamente grande. Suponga el ejemplo utilizado en el **Control Proporcional**, pero esta vez tiene implementado un controlador PI y además hay una falla en las conexiones lo que produce que el motor no funcione. Si el *setpoint* se establece en  $1000RPM$ , la acción de control en el primer instante es de  $100\%duty$ , pero como el motor está mal conectado, el eje no gira produciendo que luego de unos instantes el error siga siendo de  $1000RPM$  y el termino integral incremente a medida que siga pasando el tiempo. Cuando se corrija la falla eléctrica, el eje del motor girará a una velocidad superior a la del *setpoint* el tiempo necesario hasta que el error negativo "des-integre" todo el error acumulado anteriormente.

Como solución a esta problemática se implementan técnicas de ventaneo, tal que limiten la parte integral y no permita que diverja.

### 7.1.3. Control Derivativo

El control derivativo, o la acción derivativa, se puede interpretar como anticiparse al error en un estado posterior al actual, por medio del cálculo de la tangente de la curva del error. Para obtener esta predicción, suponga la expansión en serie de Taylor

$$\begin{aligned} e(t_1) &= e(t_0) + \frac{de(t_0)}{dt}(t_1 - t_0) + \dots \\ e(t_1) &\approx e(t_0) + \frac{de(t_0)}{dt}(t_1 - t_0) \end{aligned} \quad (18)$$

en ella se puede apreciar que aparece un termino del error actual y luego otro termino con la derivada del error ponderada por la diferencia temporal. A este controlador se lo conoce comúnmente como PD. Su estructura básica se muestra a continuación

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (19)$$

Según [11, pág. 40] la acción derivativa puede traer dificultades si existe ruido de medición de alta frecuencia. Considerando la figura 6, un ruido de medición sinusoidal

$$n = a \sin(\omega t)$$

contribuye al término derivativo de la señal de control como

$$u_n = K_d \frac{dn}{dt} = a K_d \omega \cos(\omega t)$$

Se puede observar que la amplitud de la señal de control puede ser arbitrariamente grande si la frecuencia  $\omega$  es lo suficientemente alta.

Por este motivo, es común que la ganancia del término derivativo sea limitada en alta frecuencia. Esto puede lograrse implementando el término derivativo como

$$D' = D_{ideal}(s)D_{sat}(s) = sK_d \frac{1}{1 + s\frac{K_d}{N}} = \frac{sK_d}{1 + s\frac{K_d}{N}} \quad (20)$$

Esta modificación puede interpretarse como la derivada del error del sistema concatenada con un filtro pasa bajos con un polo colocado  $N$  veces más lejos. Quiere decir que para frecuencias menores a  $\frac{N}{K_d}$  la derivada del error se amplificara como antes, pero cuando la frecuencia supere esta cota, el sistema saturará y por lo tanto la atenuará. Valores normales de  $N$  oscilan entre 8 y 20.

#### 7.1.4. PID total

Dado lo visto anteriormente, si se consideran todas las acciones de control en paralelo, el sistema para tiempo continuo resulta

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{t_0}^{t_1} e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (21)$$

en donde los parámetros  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son las constantes con las que se realiza el ajuste para cada planta en particular.

La representación anterior es la forma clásica (o no interactuante) del controlador PID escrita para tiempo continuo. En forma de función de transferencia resulta

$$u(s) = G(s)e(s) = (K_p + K_i/s + sK_d) e(s) \quad (22)$$

considerando el ajuste de la ecuación 20, la expresión 22 queda

$$u(s) = G(s)e(s) = \left( K_p + K_i/s + \frac{sK_d}{1 + \frac{sK_d}{N}} \right) e(s) \quad (23)$$

#### 7.1.5. Discretización PID

Según [14, pág. 214] se puede representar una ecuación diferencial mediante su aproximación

**Método de Euler:** La derivada de una variable se puede aproximar por una **diferencia adelantada**

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (24)$$

o por una **diferencia atrasada**

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \quad (25)$$

Por otro lado, según [11, pág. 46] la integral de una variable dada por la ecuación 26 se puede aproximar mediante distintas formas recursivas.

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (26)$$

**Regla rectangular hacia adelante:**

$$I(nh) = \frac{K}{T_i} h \sum_0^{n-1} e(nh) = \frac{K}{T_i} h \sum_0^{n-2} e(nh) + h \frac{K}{T_i} e((n-1)h) = I((n-1)h) + h \frac{K}{T_i} e((n-1)h) \quad (27)$$

**Regla rectangular hacia atrás:**

$$I(nh) = \frac{K}{T_i} h \sum_0^n e(nh) = I((n-1)h) + h \frac{K}{T_i} e(nh) \quad (28)$$

Esta aproximación se diferencia de la anterior, en que utiliza la muestra actual de la señal  $e(nh)$  en vez de la muestra anterior  $e(h(n-1))$ .

## Regla trapezoidal:

$$I(nh) = \frac{K}{T_i} h \sum_{i=1}^n e((i-1)h) - e(ih) = I((n-1)h) + \frac{K}{T_i} \frac{e(nh) - e((n-1)h)}{h} \quad (29)$$

Según [14] en el contexto del control digital la aproximación 29 suele denominarse *aproximación de Tustin, o transformación bilineal*.

Utilizando estos métodos la función de transferencia discreta  $H(z)$  se obtiene simplemente sustituyendo el argumento  $s$  de  $G(s)$  por  $s'$ , donde

$$s' = \frac{z-1}{h} \quad (\text{Metodo de Euler}) \quad (30)$$

$$s' = \frac{z-1}{zh} \quad (\text{Diferencias en retroceso}) \quad (31)$$

$$s' = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (\text{Aproximacion de Tustin}) \quad (32)$$

Considerando la expresión 23 y teniendo en cuenta [14, pág. 219] el método más común para discretizar un PID es realizar una aproximación de Euler 30 para la parte integral y una aproximación en diferencias en retroceso 31 para la parte derivativa, lo cual origina el siguiente controlador discreto

$$u(kh) = \left( K_p + \frac{K_i h}{z - 1} + K_d \frac{z - 1}{zh + \frac{K_d}{N}(z - 1)} \right) e(kh) \quad (33)$$

el cual por medio de manipulación algebraica se puede transformar en la siguiente ecuación en diferencias

$$u(k+1) = Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) + Du(k-1) + Eu(k-2) \quad (34)$$

donde los parámetros  $A, B, C, D$  y  $E$  se obtienen a partir de las constantes  $h, K_p, Ki, Kd$  y  $N$ . Es conveniente utilizar algún software de cálculo como apoyo para realizar estas transformaciones.

## 8. Sistemas de Medición

### 8.1. Medición de velocidad de los Motores

### 8.1.1. Estructura Mecánica

Para la medición de velocidad de los motores se utilizaron encoders ópticos. Estos consisten en un diodo LED infrarrojo enfrentado a un fotodiodo receptor en dirección vertical, con una estructura que interrumpe el haz colocada entre ambos. Ésta última fue diseñada en SolidWorks® e impresa con impresora 3D y su forma se asemeja a la de jaula de ardilla. La idea del diseño es que las varillas bloquen o dejen pasar la luz del LED, de modo que el fotodiodo genere una señal que permita detectar el paso de cada una de ellas. Hay que tener en cuenta que no todos los materiales con los que la impresora trabaja son opacos a la luz infrarroja, por lo que es recomendable verificar esto previamente.

### 8.1.2. Circuito Eléctrico

El fotodiodo receptor se encuentra conectado según el esquema mostrado en la figura 7. La señal de salida

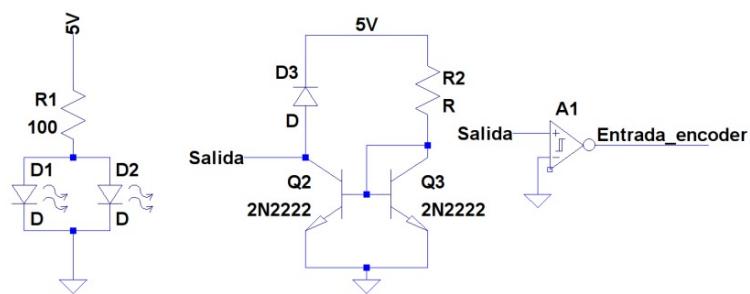


Figura 7: Circuito del fotodiodo y de los diodos infrarrojos.

se conecta a un Schmitt trigger para discretizar la señal y luego la salida de ésta se conecta al microcontrolador. La sensibilidad de los diodos receptores se calibra manualmente por medio de R2.

Los diodos emisores, por su parte, se encuentran conectados en paralelo entre sí y en serie con una resistencia de  $100\Omega$  conectada a la salida de tensión de 5V del kit de desarrollo Arduino Nano. Inicialmente se había diseñado un circuito con espejo de corriente que permitía regular la intensidad de los LEDs desde el microcontrolador para poder adaptarse a cambios de luz en el ambiente, no obstante, las pruebas demostraron que se podía calibrar una intensidad que funcionase bajo todas las condiciones de luz del lugar de trabajo usado, por lo que se descartó el circuito por la simple versión actual.

Se midió con el osciloscopio la señal de salida de la compuerta y se verificó que la misma es una señal cuadrada, modulada por las barras de la jaula de ardilla. Esta modulación, al provenir de un sistema mecánico, copia las asimetrías del sistema por lo que no genera una onda cuadrada perfectamente simétrica mientras se mantiene una velocidad angular  $\omega$  constante.

### 8.1.3. Medición de Velocidad con el Microcontrolador

Las señales acondicionadas de los encoders (ver figura 7) se conectan a entradas del microcontrolador, donde se resuelve la medición de velocidad por medio de interrupciones. Para ello se utilizan pines con interrupción por cambio de estado y se mide el tiempo entre interrupciones sucesivas. Esta medición de tiempo presenta una serie de problemas explicados a continuación.

El microcontrolador ATmega328P posee un total de 3 timers. El timer1 se utilizó para generar los PWM de los motores, mientras que el timer2 se utilizó para la generación de un tiempo de muestreo constante para el sistema. Esto dejaba únicamente el timer0 disponible para realizar la medición de tiempos entre interrupciones, sin embargo, dado que el timer0 es el que utilizan las librerías de Arduino por defecto, se decidió buscar una alternativa que permitiese reservar este timer para realizar tareas de depuración. Para ello se optó por utilizar el timer2 de forma simultánea para las interrupciones constantes a  $T_s$  (periodo de muestreo) y para el conteo de tiempo.

Para entender cómo usar de forma conjunta el timer, consideremos lo que ocurre cuando se inicia el microcontrolador. Cada vez que el timer2 desborda se incrementa una variable auxiliar *cantOverflow*. Cuando se detecta el primer cambio de estado o flanco (interrupción por pin), el tiempo transcurrido va a ser

$$t = \frac{\text{Prescaler}}{f_{clk_{io}}} (TCNT2 + \text{cantOverflow} \cdot OCR2A)$$

Ya que la cantidad de pulsos contados por el timer es igual al valor actual del timer (registro TCNT2 del microcontrolador) más *cantOverflow* veces el máximo valor que cuenta (dados por el registro *OCR2A* del microcontrolador).

Una vez guardado el valor del timer actual, se resetea *cantOverflow*. Así, la siguiente vez que se genere una interrupción el valor de *cantOverflow* reflejará la cantidad de overflows que hubo desde la interrupción pasada. Si a la siguiente interrupción por cambio de estado de la señal del encoder se hace el cálculo de tiempo como antes, se tendrá un error de cálculo debido a que en realidad no transcurrieron *cantOverflow* ciclos de conteo completos del timer, sino que el primero arrancó a contar desde el valor que tenía el timer cuando se hizo la interrupción anterior. Para eso se agrega una variable auxiliar de corrección cuyo valor sea siempre el valor del timer al momento de la última interrupción

$$t = \frac{\text{Prescaler}}{f_{clk_{io}}} (TCNT2 + \text{cantOverflow} \cdot OCR2A - TCNT2_{anterior}) \quad (35)$$

Como este cálculo debe realizarse para cada motor, el código de interrupción por cambio de estado verifica cuál encoder generó la interrupción y almacena las variables necesarias para hacer el cálculo de velocidad del motor (*TCNT2*, *TCNT2anterior* y *cantOverflow* para cada motor) en el código principal, es decir, fuera de la interrupción para no consumir tiempo de ejecución con prioridad (interrupción) del microcontrolador.

Conociendo el tiempo entre interrupciones, el cálculo de velocidad correspondiente en rpm se realiza según la fórmula

$$\omega = 60 \frac{\text{seg}}{\text{min}} \frac{1}{D \cdot t}$$

Donde  $D$  es la cantidad de varillas del encoder.

Para el primer modelo de encoder propuesto, que utilizaba los diodos conectados en paralelo y media la reflexión de luz sobre un disco dentado blanco, la señal cuadrada a la entrada del microcontrolador presentaba variaciones en el ancho del pulso debidas al movimiento de la rueda que se encontraba ligeramente descentralizada. Para evitar este inconveniente y las variaciones introducidas por posibles asimetrías en la fabricación del encoder, se decidió calcular la velocidad con el tiempo demorado en realizar una vuelta entera. Para el modelo de encoder actual esta variación en la señal es menor, pero no ha desaparecido del todo, por lo que la estrategia se ha mantenido en el código. El resultado de esta forma de medición equivale a agregar un filtro discreto de media móvil (moving average). El efecto de esto se verá más adelante. Sabiendo que la mínima variación de tiempo

está dada por la cantidad de conteos realizados por el timer, resulta evidente que mientras más rápido cambie el timer mayor precisión se tendrá en la medición de velocidad. Sabemos que el timer genera interrupciones cada

$$T_{int} = \frac{Prescaler(1 + OCR2A)}{f_{clk_{io}}} \quad (36)$$

por lo que si se desea un  $T_{int}$  pequeño se debe utilizar un prescaler lo menor posible. Dado que este mismo  $T_{int}$  es el que se utiliza para generar la frecuencia de muestreo constante, se aumenta el prescaler efectivo para la determinación de  $T_s$  utilizando una variable auxiliar como contador. Así, la frecuencia de muestreo del sistema será un múltiplo de  $T_{int}$ . Para determinar el valor del prescaler a utilizar se debe tener en cuenta que el tiempo  $T_{int}$  sea suficiente para realizar las operaciones necesarias en la interrupción por overflow del timer y para que estas interrupciones no se generen con una frecuencia tan alta que impida el correcto funcionamiento de las restantes interrupciones.

## 8.2. Sensor de Línea

Los sensores de línea utilizados regularmente consisten en una serie de fotodiódos y LEDs infrarrojos colocados en dos líneas paralelas.

Supóngase que el sensor se encuentra sobre una superficie reflectante (por ej. de color blanca). Luego la luz emitida por el LED IR se reflejará y llegará al fotodiodo con una intensidad  $I_{blanco}$ .

Ahora supóngase que el sensor se encuentra sobre una superficie poco reflectante (por ej. de color negra). Luego la luz emitida por el LED IR se reflejará y llegará al fotodiodo con una intensidad  $I_{negro}$ .

Entonces, siempre y cuando la diferencia entre estas intensidades sea mayor que la sensibilidad del sensor  $|I_{blanco} - I_{negro}| > I_{sens}$ , se podrá discernir entre una superficie y la otra.

Generalmente cuando cambia el color de una superficie también cambia el material de la misma, por lo que no se puede asegurar que *siempre* una superficie de color negro generara una intensidad reflejada menor que una superficie de color blanco, es decir,  $I_{negro} < I_{blanco}$ .

La idea se muestra en la figura 8, donde se colocaron sobre el soporte del robot dos LEDs de color visible para ver la región que iluminaría el emisor y la que podría detectar el receptor.

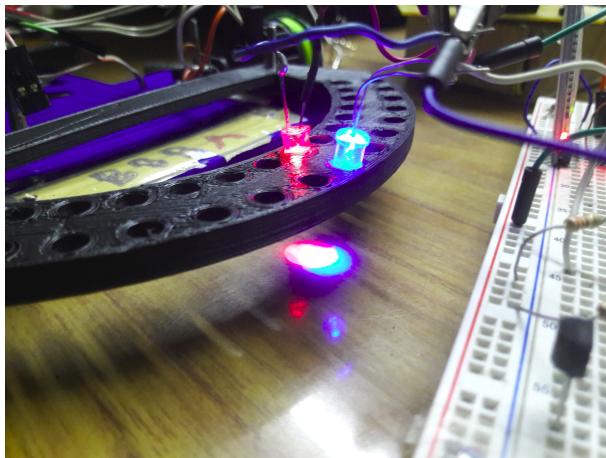


Figura 8: En esta implementación se ve el cabezal circular con 2 leds emisores. El led Rojo hace las veces de led Emisor de luz y el led Azul como fotodiodo (receptor de luz).

La región en donde se ve la luz de color rojo, es en donde los fotones inciden en la superficie y no son captados por el fotodiodo (led azul), por otro lado la región en donde solo se ve la luz azul es la zona en donde el fotodiodo posee mayor sensibilidad para captar los fotones reflejados y además no coincide con la zona de incidencia del LED IR. La superposición de los colores es el intervalo espacial en donde la luz emitida por el led rojo es recibida por el fotodiodo. Esta región es en donde se evaluará si la zona es muy reflectante o poco reflectante, es decir, si hay una linea o no.

### 8.2.1. Circuito Eléctrico

Para alimentar este arreglo de emisores y receptores se utilizó el circuito de la figura 9. En ella se observa que los diodos se alimentan a través de espejos de corriente que permiten ajustar la intensidad de luz emitida. La sensibilidad de todos los fotodiódos se ajusta por medio de  $R_2$ . Las salidas se conectan a compuertas Schmitt trigger para acomodar la señal de salida a una que permita trabajar con lógica digital. Se corroboró con el osciloscopio que la señal de salida era apropiada para la lectura digital por parte del microcontrolador. Hay que aclarar que la estructura del espejo de corriente correspondiente a los LEDs no es viable ya que dados por los ordenes de las corrientes manejadas (25mA) hace que la estructura se sobrecaliente, entre en inercia térmica,

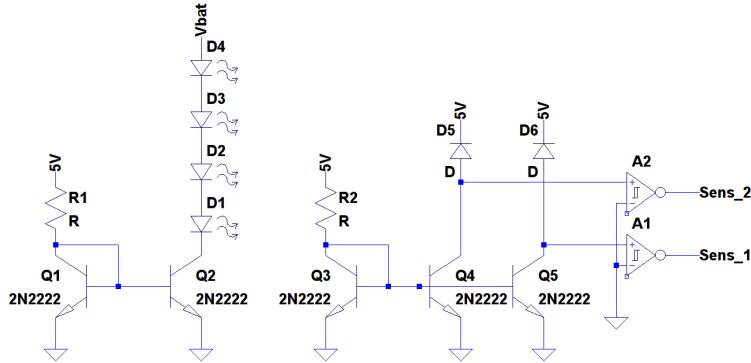


Figura 9: Circuito utilizado para alimentar los diodos LED infrarrojos y los correspondientes fotodiodos que componen el sensor de línea. Este esquema permite ampliar la cantidad de sensores a la que se desee. En el dispositivo final se cuenta con 8 fotodiodos.

los transistores aumentan su  $\beta$  produciendo así, que entren en zona de saturación, con lo cual no regularía correctamente la corriente deseada. Sin embargo, como la tensión de alimentación es 7.4V, es viable conectar 4 LEDs en serie *sin* regulación. Esto hace dependiente la intensidad de los LEDs con la tensión de la batería, por lo que en el momento en que se realizaron las pruebas se tuvo especial cuidado en mantener la tensión de la batería por sobre los 7.4V (entre 8.4V y 7.4V).

### 8.2.2. Estructura Mecánica

La disposición física de los LEDs estaba dada inicialmente por la placa PCB utilizada en el circuito. Esto hacía que los LEDs se encontraran a alturas ligeramente variables y con leves diferencias de inclinación, además de que la placa no se encontraba centrada respecto al cuerpo del robot por estar colocada en una posición casi arbitraria. A pesar de estos problemas, el sensor presentaba un desempeño básico aceptable que permitió realizar las pruebas necesarias hasta lograr que el robot realizara el seguimiento de una pista. No obstante, una vez finalizado el prototipo inicial, se rediseñó la estructura para solucionar estos problemas. En esta etapa del trabajo se diseñaron y fabricaron dos estructuras alternativas: la primera con una disposición de los LEDs lineal y la segunda con una disposición circular. Esta última se propuso en función del análisis realizado en la sección Modelado del Sistema (6), según el cual podíamos trabajar con un modelo LTI simple si considerábamos únicamente el ángulo de desviación de la orientación del robot respecto de la línea. Las estructuras obtenidas pueden observarse en la figura 10.

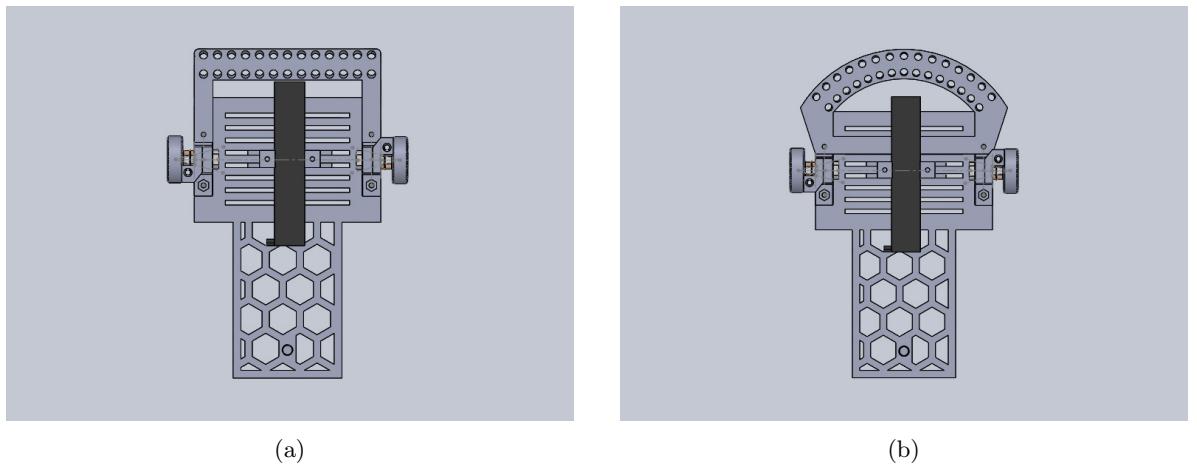


Figura 10: Esquema del robot con los dos tipos de estructuras diseñadas para fijar la disposición de los diodos según la configuración geométrica deseada: (a) lineal, y (b) circular.

Se optó por diseñar las dos variantes para poder probar a futuro distintas estrategias de control, no obstante, la utilizada actualmente funcionaría mejor con la disposición circular. Además, para permitir variar las pruebas en etapas de desarrollo, se diseñaron las estructuras con agujeros adicionales para tener la posibilidad de agregar LEDs o modificar la distancia entre los mismos. Para las pruebas mostradas en este informe se utilizó una configuración con 8 pares de LEDs ubicados desde los extremos al centro dejando un lugar vacío entre ellos.

### 8.2.3. Valores de Lectura

Considerando que se deseaba obtener un valor de ángulo como lectura del sensor, se podría haber realizado una deducción geométrica de los valores de ángulo a asignar para cada lectura posible del sensor. Sin embargo, dado que el diseño inicial tenía múltiples asimetrías, que resultaba difícil identificar correctamente el centro del robot y que los diodos utilizados pueden presentar imperfecciones o diferencias de sensibilidad, se optó por realizar un ensayo donde se midiera el rango de valores de ángulo de desviación para el cual se mantenía cada medición posible del sensor. Este ensayo se realizó marcando en un papel líneas de referencia y colocando cinta en línea recta sobre el mismo. Girando el robot sobre la pista con el centro siempre sobre un punto medio de la línea, se marcaron los rangos de desviación para los cuales se mantenía cada medición del sensor. En la implementación con el microcontrolador se asignó a cada medición el valor promedio del rango obtenido por medio de este ensayo.

### 8.2.4. Lectura del Sensor con el Microcontrolador

Las salidas de las compuertas se conectan a pines de entrada del microcontrolador. En el programa principal la medición de la línea se necesita cada vez que se calcula el PID del sistema total, por ello se programó una subrutina de medición que se llama en el programa principal (main) antes de calcular el controlador cada  $T_s = 5ms$ . Dentro de esta subrutina se lee cada valor digital de entrada y se almacenan los resultados en un vector de 8 componentes. Para anticiparse a valores de mediciones atípicos y atenuar el efecto de posibles errores de medición, se calcula una suma ponderada de las entradas para obtener un número que indica debajo de cuál de los fotodioidos se encuentra el centro de la línea, siendo las posibilidades para el caso de 8 LEDs: 1, 1.5, 2, 2.5, ..., 7, 7.5 y 8, donde los números no enteros representan el caso en el que la línea se encuentre entre dos fotodioidos. Si a este número lo multiplicamos por dos y le restamos dos, nos queda uno de los siguientes resultados: 0, 1, 2, ...14, que pueden usarse como índice de un vector. De esta forma lo que se hace es definir un vector constante con los resultados de ángulo obtenidos por ensayo cuando la línea estaba bajo cada una de las posibilidades y utilizar el número calculado para definir con cuál de los elementos del vector quedarse como medición actual. El caso en que todos las entradas estén en 0 se toma como valor particular y se la asigna el número 3 para que funcione como bandera e indique que se perdió la línea. Cuando esto ocurre el programa principal mantiene para los cálculos la última medición válida.

## 9. Identificación de Sistemas

Para sintonizar los controladores PID ha implementar se necesita tener algún tipo de información sobre el comportamiento de la planta a controlar. En función de lo definido en la sección 7, las plantas a identificar o caracterizar son tres: los dos motores, cuyo modelado matemático se analizó en la sección 6.2, y el sistema total, que incluye los motores con sus PID y la cinemática del robot analizada en la sección 6.1.

A continuación se detallan los ensayos realizados para la identificación de los sistemas a controlar.

### 9.1. Identificación de los Motores

El modelo de función de transferencia planteado matemáticamente en la sección 6.2 define como variable de salida la velocidad angular del motor  $\omega$  y como variable de entrada la tensión promedio aplicada entre sus bornes. Para la implementación con el microcontrolador se utiliza una señal de PWM de alta frecuencia  $15Khz$ (comparada con la frecuencia de corte del polo mecánico y el polo eléctrico) cuyo duty cycle modifica el valor de tensión continua aplicado al motor. Esto es factible debido a que el *sistema motor* actúa como un filtro pasabajos, manteniendo la componente de continua de la señal y atenuando las restantes. Dado que esta es la señal que se puede controlar realmente, se utiliza como señal de entrada el duty cycle utilizado en los PWM.

El modelo obtenido de forma teórica realiza varias simplificaciones. Una de ellas es ignorar el ciclo de histéresis de los motores y otra es no considerar el efecto de una carga en el motor, que en este caso implicaría considerar la dinámica del robot sobre el suelo. Estos fenómenos hacen que el comportamiento real de los motores no sea realmente lineal. Para analizar la linealidad el sistema y el intervalo de trabajo a utilizar se diseñó un ensayo que genere un barrido de las distintas posibilidades de duty cycle para cada motor y almacenara varias muestras de las velocidades obtenidas en el estado estacionario. En la figura 11 se muestra la curva obtenida para el motor B (motor a la derecha del robot). La del motor A (izquierda del robot) es análoga.

Analizando la curva de respuesta del sistema observamos que los motores comienzan a moverse recién a partir de un 5 % de duty cycle. Esto se debe al par de fricción estática aplicada al eje. Por otra parte, la recta ajustada muestra que el comportamiento es aproximadamente lineal hasta un 80 % de duty cycle. Para garantizar un buen funcionamiento se trabajará de 10 % a 80 % para los ensayos de estimación del sistema.

En función de las consideraciones anteriores, se diseño un ensayo que permitiese obtener la respuesta al escalón de ambos motores. Dado que es de interés conocer el comportamiento con carga y no en vacío, se buscó que el ensayo se realizara con el robot completo funcionando en condiciones normales. Para ello se programó que el robot anduviera en línea recta, primero a una velocidad baja y luego a una mayor dada por un cambio

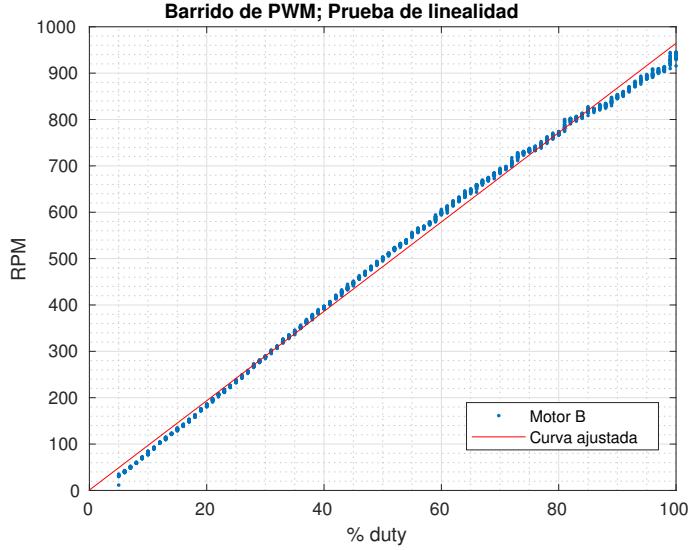


Figura 11: Curva de respuesta entrada-salida para el motor B.

repentino del duty cycle de ambos motores. Las señales de interés se muestrearon a una frecuencia de 200Hz, se almacenaron en la EEPROM y luego fueron transmitidas a la computadora por puerto serie. La curva obtenida de ambos motores se muestra en la figura 12.

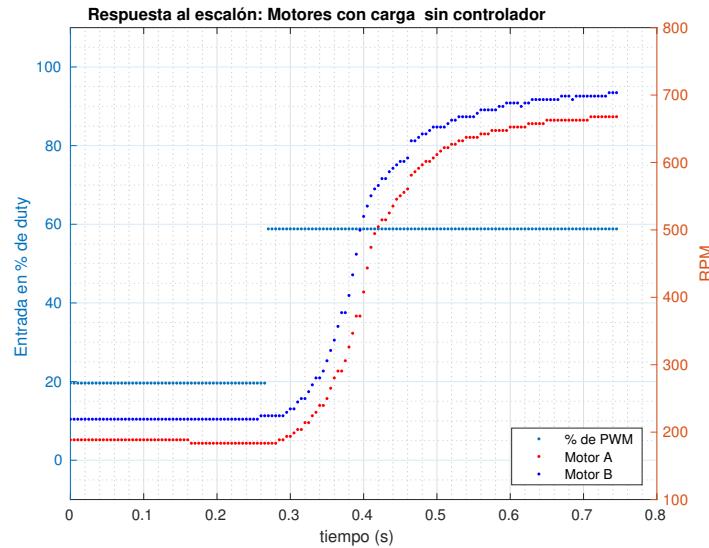


Figura 12: Respuesta al escalón de ambos motores a lazo abierto con carga.

Analizando los resultados obtenidos se detectó que existía una demora en el sistema no anticipada por el modelo matemático. Ésta se debe a la dinámica del sistema de medición de velocidad, que en los análisis teóricos no se suele considerar. Específicamente, el promedio realizado al momento de medir la velocidad de cada motor genera la demora observada. Dado que se almacenan los tiempos correspondientes a un giro completo de la rueda para realizar el cálculo de velocidad, cuando la velocidad real cambia de forma abrupta el sistema demora una revolución del eje en reemplazar todas las mediciones y por lo tanto en otorgar una medición actualizada. Este comportamiento se corresponde con el de un sistema de media móvil, pero variante en el tiempo y alineal, ya que la demora depende de la velocidad de giro. Para poder continuar trabajando en el contexto de sistemas LTI se utilizará una estimación del sistema alrededor de cierto punto de trabajo.

Utilizando los datos obtenidos se estimó un sistema LTI continuo mas un retardo tal que se ajuste a cada curva utilizando la herramienta de Matlab System Identification [12]. Las funciones de transferencias obtenidas, fueron ajustadas con un 95.15 % para el motor A y 96.65 % para el motor B. Las mismas se muestran a continuación

$$M_a(s) = \frac{7075.3e^{-0.013s}}{(s + 9.631)(s + 67.5)} \quad (37)$$

$$M_b(s) = \frac{5042.1e^{-0.013s}}{(s + 9.988)(s + 45.48)} \quad (38)$$

Cabe aclarar que la precisión del ajuste depende mayoritariamente de cómo fueron tomadas las muestras. En este caso la metodología de medición genera un delay variable con las *RPM* (mayor delay a bajas *RPM*), por lo que se optó por ajustar los modelos para un ensayo escalón en el cual se producirá el mayor delay, es decir el peor de los casos.

## 9.2. Identificación de la Cinemática el Robot

En función de lo analizado en la sección 6.1, se puede pensar que si el robot arranca alineado con una línea recta, y manteniendo la restricción de  $v$  constante, entonces la planta se comporta como un sistema cuya entrada es  $\Delta\omega$  y su salida  $\theta$ , gobernado por la ecuación 6. Para un mayor entendimiento se reemplaza  $\theta$  por  $\beta$  ya que si bien  $\theta \approx \beta$  cuando  $|Y_0| \approx 0$ , no es válido en todo momento. Utilizando la hipótesis mencionada la ecuación se reescribe a continuación como:

$$\dot{\beta} = \frac{r\Delta\omega}{L} \quad (39)$$

Para realizar el ensayo al escalón se debería empezar con  $\Delta\omega = \beta = 0$  y luego cambiar  $\Delta\omega$  abruptamente a un valor final, midiendo el valor de  $\beta$  obtenido. Físicamente esto implica que el robot debe empezar andando a velocidad constante, perfectamente alineado con la línea, y luego girar hasta perder la línea (más allá de este punto no tiene sentido seguir porque se pierde la medición). Si el cambio de velocidad de los motores fuese automático, el robot giraría siguiendo una circunferencia perfecta como se ve a en la figura 13.

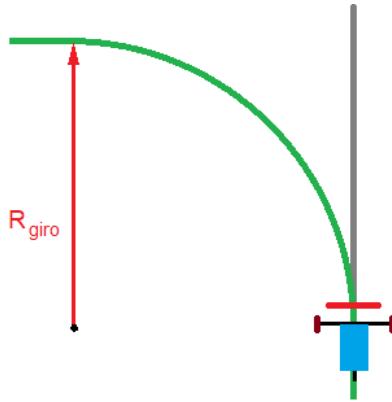


Figura 13: Trayectoria seguida por el robot si empieza a girar a  $\Delta\omega$  constante (verde) arrancando inicialmente alineado con la línea (gris).

Sin embargo, la implementación perfecta de un ensayo al escalón resulta muy difícil por dos inconvenientes. El primero es que se requiere que durante un tiempo el robot siga la línea perfectamente antes de girar. Para lograr esto se implementó un controlador proporcional ajustado a mano que permitía que el robot siga la pista. Así, el código implementado sigue la línea usando este controlador durante un breve lapso de tiempo que permite la estabilización del robot y luego desactiva el controlador y cambia abruptamente la diferencia de velocidad de los motores (manteniendo  $v$  constante), siendo los valores del ensayo los tomados a partir de este instante de tiempo. El segundo conflicto es que la señal que realmente se puede controlar no es la diferencia real de velocidad de los motores, sino la diferencia de velocidad deseada. La diferencia entre ambas señales está dada por la dinámica de los motores con sus controladores correspondientes. Como sólo se desea estimar la sección correspondiente a la cinemática, se optó por medir las señales de entrada y salida de esta sección, es decir,  $\Delta\omega$  real y  $\beta$ , y utilizar esas señales para estimación con el System Identification de Matlab [12] .

En la figura 14 se muestra uno de los resultados de este ensayo. Utilizando un conjunto de estos ensayos se estimó el siguiente sistema:

$$Syst_{tot} = \frac{0.028934}{s} \quad (40)$$

el cual explica un 82.93 % de los datos utilizados en el mejor de los casos.

De la ecuación 39 y de 40 se concluye que  $\frac{r}{L} = 0.028934$ . Los parámetros medidos, si embargo, son  $r = 1.5cm$  y  $L = 16cm$ , lo cual daría  $\frac{r}{L} = 0.09375$ . Esta discrepancia no se pudo explicar aún.

## 10. Ajuste de los Controladores

### 10.1. Control de los Motores

Existen diversas estrategias para realizar la sintonización de un controlador PID. Una de las posibilidades estudiadas en la carrera es la utilización de tablas empíricas, como son los métodos de Ziegler Nichols. Inicialmente se quiso implementar el ajuste con uno de estos métodos por considerárselo más didáctico y porque no

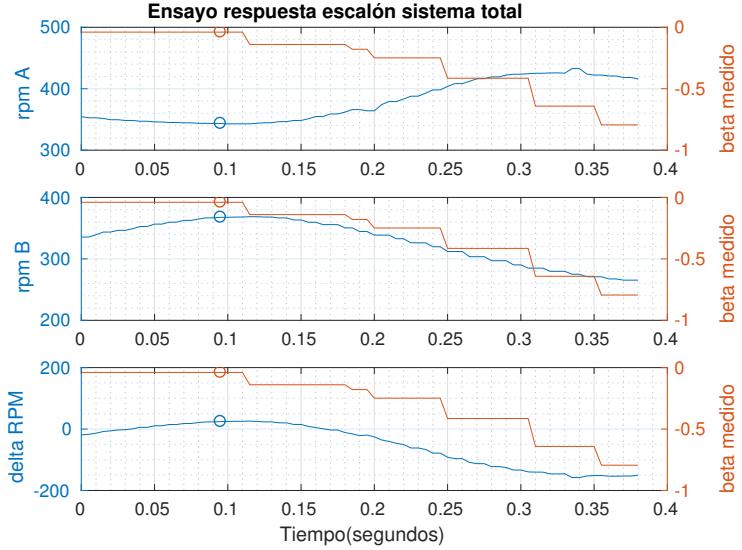


Figura 14: Resultado del ensayo de respuesta al escalón del sistema total. El círculo marca cuando se desactiva el control y el sistema comienza a trabajar en lazo abierto. En este caso  $\Delta\omega$  máximo fue de -50 RPM.

requiere un modelo completo de la planta. Más adelante se detalla el procedimiento seguido, no obstante los controladores obtenidos no presentaban un desempeño satisfactorio.

Otras opciones estudiadas en la carrera requieren disponer de un modelo completo del sistema a controlar. Es por esto que se realizaron las estimaciones de funciones de transferencia explicadas en la sección 9. Conocidos los modelos de los sistemas, se puede realizar un ajuste con fundamentos matemáticos, pero dado que resulta más rápido y más intuitivo se optó por realizar un ajuste por software. Para ello se usó la herramienta de PID tuner de Matlab [13] que permite un ajuste muy fácil observando la curva de salida. Esto resulta de gran utilidad ya que se puede ver en la gráfica el impacto en el comportamiento efectivo, mientras que los cálculos teóricos estudiados en la carrera utilizan restricciones sobre los parámetros matemáticos que se relacionan de forma indirecta, aproximada y menos tangible con la respuesta temporal que realmente tendrá el sistema a lazo cerrado.

Para el ajuste de los controladores de los motores se buscó que la respuesta al escalón fuese rápida y con poco sobreimpulso, ya que el impacto se vería incrementado al considerar todo el robot en su conjunto. Además, se buscó un ajuste que diera un comportamiento muy similar para ambos motores, ya que las asimetrías se traducirían en trayectorias erráticas. Los controladores obtenidos para cada motor fueron los siguientes:

$$C_a(s) = \frac{19.243(s - 11.74)}{s}$$

$$C_b(s) = \frac{18.68(s - 10.93)}{s}$$

El ajuste se realizó en tiempo continuo, con lo cual resulta necesario realizar una discretización del controlador para poder implementarlo en el microcontrolador. La discretización utilizada fue la de Backward Euler (o diferencias hacia atrás).

A la hora de realizar este ajuste hay que tener en cuenta la salida del controlador, ya que esta limitada, en este caso por el  $\%duty \in [0, 100]$ . Esta aclaración es necesaria ya que cuando se obtengan los valores de los coeficientes hay que constatar los ordenes de magnitud de los mismos porque puede ser que se den situaciones en que sea necesario que la acción de control requerida este por fuera de los intervalos reales, produciendo así que no responda como se espera.

Una vez implementados los controladores, se repitió el ensayo al escalón con el sistema a lazo cerrado. El resultado es el mostrado en la figura 15. Se observa que se pudo alcanzar el objetivo propuesto de reducir la asimetría de los motores.

## 10.2. Sintonización de controlador PID mediante reglas de Ziegler Nichols

Según [10] casi todos los controladores PID se ajustan en el sitio. En la literatura se han propuesto muchos tipos diferentes de reglas de sintonización, que permiten llevar a cabo una sintonización delicada y fina de los controladores PID en el sitio. Asimismo, se han desarrollado métodos automáticos de sintonización y algunos de los controladores PID poseen capacidad de sintonización automática en línea. Actualmente se usan en la industria formas modificadas del control PID, tales como el control I-PD y el control PID con dos grados de libertad.

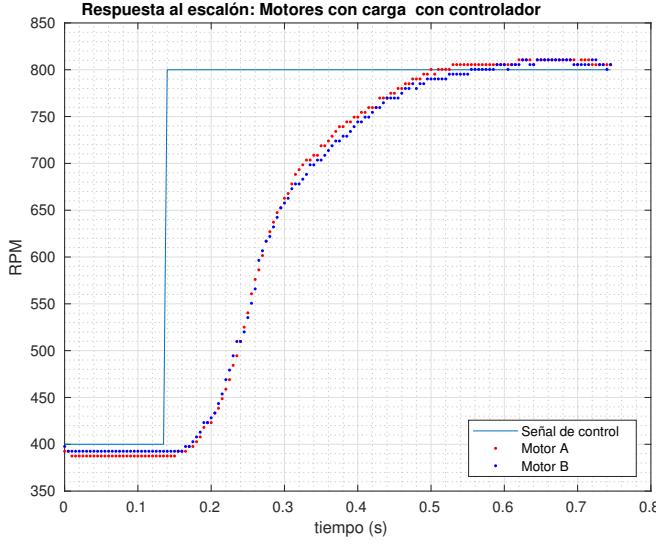


Figura 15: Resultado del ensayo de respuesta al escalón para ambos motores funcionando con los controladores PI calculados.

La utilidad de los controles PID estriba en que se aplican en forma casi general a la mayoría de los sistemas de control. En particular, cuando el modelo matemático de la planta no se conoce y, por lo tanto, no se pueden emplear métodos de diseño analíticos, es cuando los controles PID resultan más útiles. En el campo de los sistemas para control de procesos, es un hecho bien conocido que los esquemas de control PID básicos y modificados han demostrado su utilidad para aportar un control satisfactorio, aunque tal vez en muchas situaciones específicas no aporten un control óptimo.

Las reglas de Ziegler-Nichols son muy convenientes cuando no se conocen los modelos matemáticos de las plantas. Tales reglas sugieren un conjunto de valores de  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  que darán una operación estable del sistema. No obstante, el sistema resultante puede presentar una gran sobreelongación en su respuesta escalón de forma que resulte no aceptable. En tales casos se necesitará una serie de ajustes finos hasta que se obtenga el resultado deseado. De hecho, las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols dan una estimación razonable de los parámetros del controlador y proporcionan un punto de partida para una sintonía fina, en lugar de dar los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  en un único intento.

Tal determinación de los parámetros de los controladores PID o sintonía de controladores PID se pueden realizar mediante experimentos sobre la planta. Hay dos métodos denominados reglas de sintonía de Ziegler-Nichols: método de la respuesta al escalón y método del  $K_{inestable}$ . En este trabajo se implementó el primero, por lo que sólo se detallara este. En caso de que el lector desee profundizar más en el tema, puede consultar [11] [9].

#### 10.2.1. Método de Z-N: respuesta al escalón

Según [11] este método se basa en registrar la respuesta a un escalón unitario del sistema a lazo abierto, para luego ajustar los tres parámetros de un modelo de primer orden con retardo dado por la ecuación 41.

$$G_s(s) = \frac{K_p}{Ts + 1} e^{-sL} \quad (41)$$

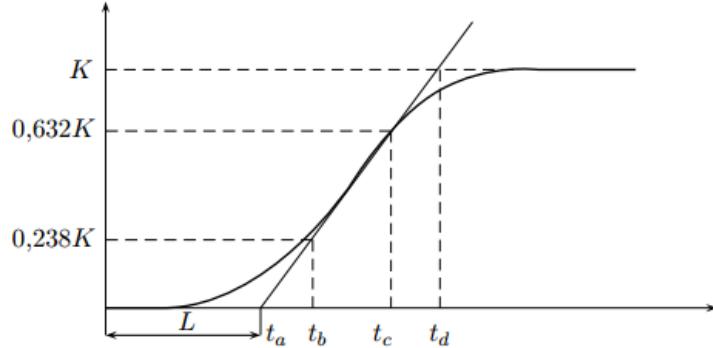


Figura 16: Determinación gráfica de los parámetros de un modelo a partir de la respuesta escalón en forma de S

Los parámetros del modelo de la ecuación 41 pueden ser determinados por medio de la figura 16. La ganancia estática  $K$  la obtenemos del valor final de la salida del proceso dividido el valor máximo de la entrada.

Para hallar los otros dos parámetros hay varias alternativas. Una de ellas consiste en trazar una recta tangente al punto donde de la respuesta al escalón presenta la mayor pendiente. El valor de la demora  $L$  lo obtenemos de la intersección de esta recta con el eje horizontal. El valor de la constante de tiempo  $T$  lo podemos obtener a partir de la distancia  $t_a - t_c$ , donde  $t_c$  es el tiempo donde la respuesta al escalón es  $0.632K$ . Otro método, un poco más preciso, consiste en determinar los puntos  $t_b$  y  $t_c$  donde  $s(t)$  toma los valores  $0.283K$  y  $0.632K$ , respectivamente. Luego, la demora y la constante de tiempo la hallamos a partir de las ecuaciones 42.

$$T = 1.5(t_c - t_b) \quad L = t_c - T \quad (42)$$

Como se mencionó en la sección 10, este método no generó resultados satisfactorios en lo que el control de los motores respecta. Una de las causas reside en que este método está diseñado para funcionar dentro de un rango de validez [11, pág. 60] dado por  $0.1 < L/T < 1$ . Para nuestro caso, debido al delay de medición, el parámetro  $L/T$  oscilaba entre 10 y 6, es decir  $L/T \in (6, 10)$ .

### 10.3. Control de la Orientación - Sistema Total.

Para el ajuste de este controlador hay que considerar la planta completa a lazo abierto, la cual se puede reducir a la ecuación 15 utilizando algunas hipótesis ya explicadas. Por comodidad se vuelve a mostrar a continuación:

$$\frac{\theta(s)}{\Delta\omega(s)} = Sys_O(s)Sys_{MAc}(s) = Sys_O(s) \frac{C_a(s)M_a(s)}{1 + C_a(s)M_a(s)}$$

en donde  $C_a(s)$  y  $M_a(s)$  son el controlador del motor A y el modelo del motor A respectivamente. El sistema de la cinemática es un integrador con un polo en el origen, tal como se dedujo en 6.1.2 llegándose a la ecuación 6 y se corroboró por medio de mediciones que arrojaron un sistema estimado dado por 40. Por la naturaleza del problema, no es viable ajustar un controlador mediante las reglas de Ziegler-Nichol. Además no es realista solo ajustar la parte del control de la orientación de manera independiente del resto del sistema, ya que no se estarían considerando la respuesta de los motores reales ni el sistema completo. Teniendo en cuenta todo esto el procedimiento fue obtener los controladores de los motores, controlar ese subsistema y obtener un modelo de este sistema controlado. El sistema controlado para el motor A resulta

$$Sys_{MAc}(s) = \frac{C_a(s)M_a(s)}{1 + C_a(s)M_a(s)} \quad (43)$$

Si se reemplaza por sus valores reales y se realiza un poco de álgebra se obtiene

$$Sys_{MAc}(s) = \frac{367.68(s + 11.74)}{(s + 61.79)(s^2 + 15.34s + 69.87)} \quad (44)$$

Considerando el modelo estimado de la cinemática del vehículo, el sistema a controlar resulta:

$$\frac{\theta(s)}{\Delta\omega(s)} = Sys_O(s)Sys_{MAc}(s) = \frac{10.639(s + 11.74)}{s(s + 61.79)(s^2 + 15.34s + 69.87)} \quad (45)$$

Con estos resultados se ensayaron distintos controladores sobre esta planta con el fin de calificar su rendimiento.

## 11. Funcionamiento del Sistema Total

Para probar el rendimiento de los distintos controladores, se diseñó el siguiente ensayo.

Se ajustó cada controlador teniendo en cuenta el esfuerzo máximo de la señal de control  $\Delta u$  y el tiempo de asentamiento necesario  $T_{as}$  para recuperar su posición sobre la linea. Luego se desarrolló una prueba en pista que dure un total de 30 segundos. Solo se registraron los controladores que lograron mantener el dispositivo siempre sobre la pista, es decir, que pudieran completar la prueba. Hay casos en que si bien pierden momentáneamente la pista, logran recuperarse y terminar el recorrido. Los resultados se muestran en la tabla 1.

Hay que considerar que si se baja la velocidad de referencia  $\omega_{ref}$  la salida del controlador será menor en amplitud y más lenta, lo cual genera un andar menos oscilatorio y más estable. Si bien estos son algunos parámetros que se midieron en los ensayos, quizás existan otras variables más relevantes acerca del comportamiento deseado, por ejemplo número de oscilaciones, estabilidad, gasto energético, entre otras.

Un ensayo implementado se puede ver en el siguiente [VIDEO](#). El mismo corresponde a una prueba con el último controlador PID funcionando a  $550RPM$ , lo cual determina una velocidad promedio de  $0.5m/s$ . A esta velocidad y sobre la pista, el vehículo no puede completar la prueba de 30 segundos ya que se sale de la pista unos antes de completar el tiempo de la prueba.

Controlador	$E_c[RPM]$	$T_{as}[s]$	$N^o v$	$\omega_{ref}[RPM]$	$\omega_{med}[RPM]$	$P_l$	$TV_{med}[s]$	$\Delta\omega_{max}$
P	466	1.8	4	400	393.012	si	6.315	443.1373
PI	466	1.85	4	400	392.3911	si	6.135	376.47
PDF	477	0.88	4	400	392.7832	si	6.5475	231.3725
PIDF	618	0.784	5	400	393.7146	no	6.006	325.4902
PIDF	910	0.466	5	500	491.4325	no	5.0586	360.78

Tabla 1: Mediciones de distintos controladores sobre la pista de la facultad. Referencias:  $E_c$  esfuerzo del controlador,  $T_{as}$  tiempo de asentamiento,  $N^o v$ : Número de vueltas,  $P_l$  pierde momentáneamente la linea,  $TV_{med}$  promedio de tiempo por vuelta

## 12. Conclusiones

En función de los objetivos propuestos, la conclusión más importante es que se logró desarrollar e implementar un robot seguidor de linea basado en componentes fáciles de conseguir y/o fabricar, lo cual podría impulsar el desarrollo de esta clase de dispositivos en la institución. En particular se destaca que se logró implementar todo el sistema en un microcontrolador de bajas prestaciones, el cual cumple con los requisitos de fácil implementación, amplia documentación, bajos costos, entre otros.

Respecto a los objetivos de control planteados, se pudieron implementar controladores PID digitales de desempeño satisfactorio y realizar estudios prácticos que permitieron profundizar en el conocimiento de los controladores PID. Se obtuvieron por medio de ensayos los modelos de los motores y se implementó con éxito un controlador PI en cada motor. Además, se pudieron implementar con éxito controladores PID de distinta estructura que permitiesen al robot cumplir el requisito básico de completar la pista de prueba a velocidades moderadas. Para la estimación de sistemas y ajuste de los controladores las herramientas principales utilizadas fueron los toolbox de matlab [12, 13]. Se hizo énfasis en la implementación de sistemas de control de tiempo discreto ajustados por métodos estandarizados, de tal manera que sean repetibles.

A pesar de todo el trabajo realizado, no se pudo estimar la planta total con tanta precisión ni se obtuvo un modelo del sistema aceptable para alcanzar los requisitos de competición. Aún así, el dispositivo actual puede seguir una curva de radio  $r = 40cm$  a una velocidad de  $500RPM$ , esto es aproximadamente  $47cm/s$ , lo que representa un satisfactorio primer prototipo para luego poder avanzar en futuras versiones a desempeños competitivos, lo cual se corresponde con lo planteado en los objetivos.

Si bien el proyecto completo demoró mucho más del tiempo estimado inicialmente, la realización del mismo permitió integrar conceptos de distintas materias y profundizar en los mismos de formas que no serían posible con un estudio exclusivamente teórico de la temática. Enfrentándose a los problemas que surgen en la implementación práctica de un proyecto de este calibre surgen dudas o errores de concepto que es fácil pasar por alto en los estudios teóricos. Además, la temática elegida permitió mantener un nivel de motivación alto, incluso frente a las mayores dificultades. Todo esto permitió corroborar las ideas expresadas en 2.1, por lo que los miembros de este grupo consideran de gran interés para la institución la implementación de estas estrategias pedagógicas.

Los modelos de las piezas para imprimir, los circuitos, las placas y el programa se encuentran en esta dirección [LINK](#).

## 13. Mejoras a futuro

Una de las principales trabas en el desarrollo de este proyecto fue el diseño del sistema de medición de velocidad de las ruedas. El método actual, si bien es funcional, posee la desventaja de incorporar un atraso en las mediciones, lo cual limita la rapidez del controlador. Como mejora en este campo se propone implementar medición de la contra fem del motor o determinar un método libre de distorsiones debido al ensamble. Quizás sea viable diseñar un filtro digital que estime la velocidad de las ruedas sin incorporar un atraso considerable.

Otra limitación observada a la hora de probar distintos controladores es la resolución del sensor de linea. Como se ve en los ensayos, los datos del sensor de linea son digitales, por lo que poseen valores discretos a la salida, lo cual limita las capacidades del control para tomar acciones de corrección. Se podría obtener un mejor desempeño aumentando la resolución actual del sensor o buscando estrategias nuevas de medición que permitan medir una mayor cantidad de valores.

El modelado del sistema es otra de las áreas donde se pueden realizar mejoras. Una opción es obtener el modelo del sistema con hipótesis más suaves de las que se utilizaron en esta oportunidad, de forma que el control implementado pueda resolver situaciones en donde la velocidad media del robot sea mayor. La otra posibilidad es estudiar modelos más complejos del sistema, por ejemplo, incorporando la dinámica al estudio del movimiento del robot.

Asociado a lo dicho en los párrafos anteriores, se podría plantear la incorporación de sistemas de medición adicionales que permitan obtener mayor información del sistema, como por ejemplo, una IMU (unidad de medición inercial). De esta manera se tendrían opciones adicionales al momento de implementar las estrategias

de control, además de que podría permitir la incorporación de la odometría de la pista, lo que a su vez haría posible adaptar el control a la curvatura actual de la misma.

Finalmente, no se puede dejar de mencionar la parte mecánica. Si se desea alcanzar un desempeño de alto nivel para poder competir es probable que se requiera de un diseño mecánico superior. Este punto, sin embargo, es el más conflictivo, ya que requiere conocimientos que corresponden a la ingeniería mecánica más que a la electrónica, por lo que la mejor solución sería la incorporación de otra persona al proyecto, cosa que no ha sido factible hasta el momento.

## Referencias

- [1] *Proyecto Lamborghini*.
- [2] *10:1 Micro Metal Gearmotor HPCB 6V*
- [3] *Driver IC for Dual DC motor*
- [4] *Arduino Nano*
- [5] *Path Following Mobile Robot in the Presence of Velocity Constraints*, Bak, Poulsen y Ravn.
- [6] *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Siciliano, Sciavicco, Villani y Oriolo.
- [7] *Diseño y Control del Péndulo Invertido*, Alexey Sidenko.
- [8] *Sistemas de control moderno*, Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, 10ma edición, pág. 58.
- [9] *Método de Ziegler-Nichols* Picuino.
- [10] *Ingeniería de control moderna*, Katsuhiko Ogata, 5ta edición cap. 5.
- [11] *Notas sobre el diseño de sistemas de control*, Fernando D. Bianchi.
- [12] *System Identification Toolbox Matlab ®*
- [13] *Automatically tune PID controller gains Matlab ®*
- [14] Aström, Karl J. *Sistemas controlados por computador*. No. 04; TJ213, A8.. 1988.