Ejercicio 1

Datos:

a) 9 monedas falsas y una justa
b) $P(C|F) = 0{,}8$
c) $P(C|J) = 0{,}5$
d) Experimento. Se lanzan 16 veces y todas son cara

Además:

$P(F) = 9/10$

$P(J) = 1/10$

Calcular

a) Probabilidad de que sea falsa dado que se obtuvieron 16 caras consecutivas. $\rightarrow P(F|16C)$

b) Probabilidad de que sea justa dado que se obtuvieron 16 caras consecutivas $\rightarrow P(J/16C)$

Resolución mediante Bayes

$$P(F|16C) = \frac{P(16C|F) \cdot P(F)}{P(16C)} \qquad (1).$$

$$P(J|16C) = \frac{P(16C|J) \cdot P(J)}{P(16C)} \qquad (2).$$

Donde $P(16C)$ es la probabilidad total de obtener 16 caras consecutivas. Entonces,

$$P(16C) = P(16C|F) \cdot P(F) + P(16C|J) \cdot P(J).$$

$$P(16C) = (0{,}8)^{16} \cdot \frac{9}{10} + (0{,}5)^{16} \cdot \frac{1}{10}$$

$$P(16C) = 0{,}025334273 8$$

Reemplazando en (1) y (2):

$$P(F|16C) = \frac{(0{,}8)^{16} \cdot \frac{9}{10}}{P(16C)}$$

$$\boxed{P(F|16C) \cong 0{,}999939} \quad (1).$$

$$P(J|16C) = \frac{(0{,}5)^{16} \cdot \frac{1}{10}}{P(16C)}$$

$$\boxed{P(J|16C) = 0{,}0000602} \quad (2).$$

Ejercicio 2.

a) Determinar K.

Para que $f_{X,Y}(x,y)$ sea una función de densidad conjunta válida, debe satisfacer:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) = 1$$

a.1) Definiendo los límites de integración para x e y.

La región para donde la función es no nula, está definida por $4x^2 \leq y \leq 2x$.

Para que estas desigualdades tengan solución, $4x^2 - 2x \leq 0$

$\Rightarrow 2x(2x-1) \leq 0$

Las raíces son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

La desigualdad se cumple cuando $x \in [0; \frac{1}{2}]$

Para cada $x \in [0; \frac{1}{2}]$, y varía desde $4x^2$ hasta $2x$.

Por lo tanto, la integral a normalizar es:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{4x^2}^{2x} Ky\,dy\,dx = 1.$$

a.2. Calculamos primero la integral interior con respecto a y.

$$\int_{4x^2}^{2x} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_{4x^2}^{2x} = \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(4x^2)^2}{2} =$$

$$= \frac{4x^2}{2} - \frac{16x^4}{2} = 2x^2 - 8x^4$$

a.3. Integramos con respecto a x.

$$K\int_0^{1/2} \left(2x^2 - 8x^4\right) dx = K\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{8x^5}{5}\right]_0^{1/2} =$$

$$= K\left(\frac{2.\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{8.\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}\right)$$

$$= K.\left(\frac{1}{30}\right)$$

Por lo tanto; $K.\left(\frac{1}{30}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{K = 30}$

b. Densidad marginal $f_Y(y)$ de Y.

La densidad marginal de Y se obtiene integrando la densidad conjunta sobre todos los posibles valores de x.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx.$$

Dado que $f_{X,Y}(x,y) = 30y$ cuando $4x^2 \leq y \leq 2x$, necesitamos encontrar los valores de x para los cuales, dado y, se cumple $4x^2 \leq y \leq 2x$.

b.1. Resolvemos las desigualdades.

- $y \leq 2x \Rightarrow x \geq y/2$
- $y \geq 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4} \Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{y}}{2}.$

como $x \in [0; 1/2]$, combinando las desigualdades:

$$\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{2}$$

La región $4x^2 \leq y \leq 2x$ para $x \in [0; \frac{1}{2}]$ implica que y varía desde $y = 4x^2$ hasta $y = 2x$.

Para encontrar el rango de y, observamos:

- En $x = 0$: y va de 0 a 0
- En $x = 1/2$: y va 1 a 1
- En $x = 1/4$: y va de $1/4$ a $1/2$
- El valor mínimo de y es 0 y el máximo es 1. Para cada $y \in (0,1)$, los x correspondientes son aquellos que satisfacen $y/2 \leq x \leq \sqrt{y}/2$.

Por lo tanto:

$$f_Y(y) = \int_{y/2}^{\sqrt{y}/2} 30y\, dx = 30\, dy \left(\frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{y}{2}\right)$$

$$= 15y\left(\sqrt{y} - y\right)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 15y(\sqrt{y} - y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

c) Densidad condicional $f_{X|Y}(x, y)$ de x dado y.

La densidad condicional se define como:

$$f_{(X|Y)}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$: siempre que $f_Y(y) > 0$

Entonces, si:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 30y & \text{si } 4x^2 \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y.

$$f_Y(y) = 15y\left(\sqrt{y} - y\right) \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1$$

además, para un y fijo, x debe satisfacer $\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{2}$

Por lo tanto:

$$f_{(X|Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{30y}{15y(\sqrt{y}-y)} = \dfrac{2}{\sqrt{y}-y} & \text{si } \dfrac{y}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{y}}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\boxed{f_{(X|Y)}(x,y) \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{y}-y} & \text{si } \dfrac{y}{2} \le x \le \dfrac{\sqrt{y}}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}}$$