



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
IEE3323 - OPERACIÓN ECONÓMICA DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

Tarea 3

2024-1 Profesor Samuel Córdova

Vicente Goehring - 19637187
Sebastián Villagra - 19636822



1. Problema 1: Benders Anidado

1.1. Problema de optimización anidado

Para resolver el problema con horizonte de 3 periodos, se considera cada situación posible de cada periodo como un sub-problema anidado.

Cada sub problema está determinado por 3 condiciones:

- Agua almacenada al inicio de la semana: v_{t-1} .
- Agua recibida por los afluentes: a_t .
- Demanda estimada para el periodo: D_t .

Es muy importante tener en cuenta, que estas 3 condiciones *no son variables de decisión*, pues han sido determinadas en el periodo anterior (agua almacenada) o simplemente son ajenas al control del operador independiente (agua de afluentes y demanda).

De esta forma, se tiene el siguiente modelo para cada sub problema:

$$\begin{aligned} \min_{p_i, p_H, v, \theta} \quad & \sum_{i=1}^I p_i C_i + \theta \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq p_i \leq P_i^{max} \quad \forall i, \\ & 0 \leq p_H \leq P_H^{max}, \\ & p_H + \sum_{i=1}^I p_i = D, \\ & v \leq V^{max}, \\ & v + p_H = a + v_{prev} \quad (\alpha), \\ & \theta \geq 0 \end{aligned}$$

Para el cual:

- a es la cantidad de agua recibida por afluentes (constante).
- v_{prev} es la cantidad de agua almacenada al principio del periodo actual.
- p_i son las potencias generadas por unidades térmicas.
- p_H es la potencia del generador hídrico.

Resolver este problema entregará los costos de generación de la etapa actual, el costo estimado para la siguiente etapa, y la cantidad de agua **que se dejará almacenada al final del periodo**, es decir, es igual a la constante v_{prev} del problema de optimización de la siguiente etapa.

1.1.1. Variable dual

Se ha anotado en el problema anidado una variable dual α para la penúltima restricción. Esta restricción es el acople que existe entre el sub problema de una etapa, y el sub problema de la etapa siguiente, pues indica que **el volumen de agua almacenada al final del periodo actual será igual al volumen al inicio del periodo más lo recibido por los afluentes y menos el agua utilizada por el generador hídrico.**

El lado derecho está definido por el periodo anterior y por las probabilidades climáticas, mientras que por otro lado, el lado izquierdo depende de las variables de decisión (p_H se puede despejar de la restricción de equilibrio de demanda y reemplazar en la restricción de acople).

La variable dual se refiere a cuánto va a mejorar el valor objetivo por cada unidad adicional de volumen disponible haya en el periodo actual, y por lo tanto, por cada unidad adicional de volumen que se haya decidido almacenar en el periodo anterior.

1.1.2. Cortes de Benders

A medida que se resuelve cada problema, se tendrá información acerca de:

- Costo de la etapa actual.
- Costo esperado de la siguiente etapa.
- Variable dual α .

Con estos valores (más en específico el primero y el tercero) es posible crear cortes de Benders para la etapa anterior, es decir, se va a restringir el costo esperado de la siguiente etapa. La restricción tendrá la forma:

$$\theta \geq C_{next} + \alpha_{next}(v - v')$$

En donde C_{next} es el costo real de la etapa siguiente dada la decisión de almacenar v' hecha en el *forward* anterior. El parámetro α_{next} corresponde a la variable dual de la etapa anterior.

Es decir, esta restricción quiere decir que, parado en la etapa actual, el costo estimado para la etapa siguiente debe ser mayor al costo obtenido con la decisión de almacenamiento propuesta en un inicio v' .

Esta cuota inferior para θ puede reducirse por cada unidad adicional de almacenamiento respecto a la decisión original que se decida guardar. La reducción por cada unidad adicional a almacenar es justamente el precio sombra de la etapa siguiente, pues este almacenamiento extra permitirá en la siguiente etapa generar una unidad adicional con el generador hídrico a costo cero, es decir, se ahorrará una unidad de generación con la unidad más cara.

1.2. Resolución del problema

1.2.1. Iteración Forward

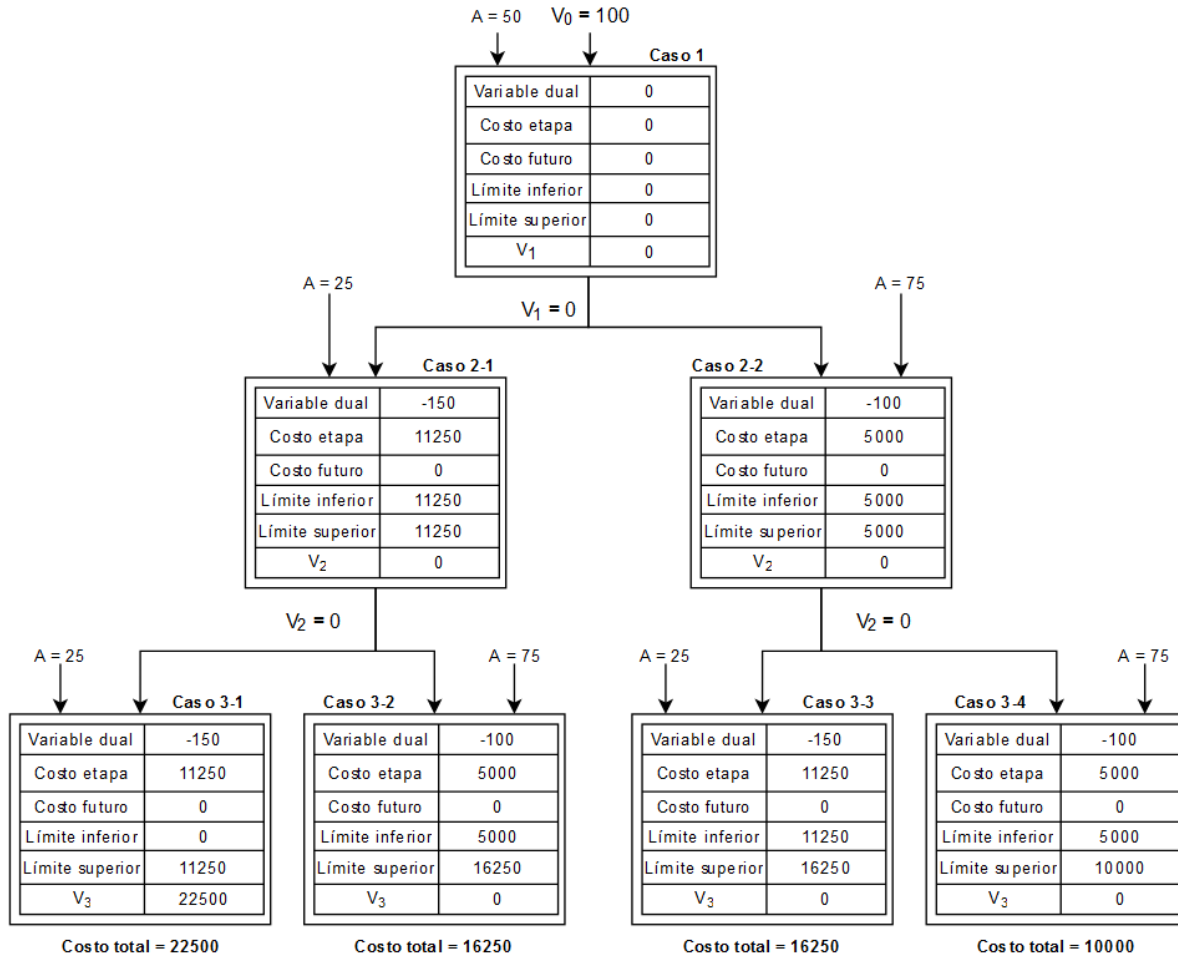


Figura 1: Primera iteración de los sub problemas.

El sub problema descrito al inicio se ha resuelto 7 veces: una para cada escenario. La Figura 1 muestra los principales resultados de cada escenario, en donde:

- Variable dual: es el α asociado a la restricción de acoples entre almacenamientos.
- Costo etapa: es el costo asociado a la generación térmica.
- Costo futuro: es el costo esperado para la siguiente etapa θ .
- Límite superior: es la suma entre el costo de la etapa anterior y el costo de la etapa actual.
- Límite inferior: es la suma entre el costo de la etapa actual y el costo esperado de la etapa siguiente.
- V_t : es el volumen almacenado al final del periodo t .

Se puede observar como en el primer periodo todos estos valores son nulos. Esto ocurre porque toda la demanda es suplicada con el generador hídrico. Así mismo, como no hay información del futuro, el optimizador asume que los costos futuros también serán nulos.

Sin embargo, esto es ajeno a la realidad, pues en las siguientes etapas, la escasez de agua obliga a despachar las unidades térmicas, siendo los escenarios más caros los casos 2-1, 3-1 y 3-3.

Por ejemplo, en el caso 3-1, no se tiene agua almacenada de la etapa anterior y los afluentes aportan 25 MWh. Estos 25 MWh son utilizados por el generador hídrico, por lo que las unidades térmicas 1, 2 y 3 aportan con 50, 50 y 25 MWh respectivamente. El costo de la etapa es de:

$$C_{3-1} = 50(50) + 50(100) + 25(150) = 11250$$

Haber almacenado 1 MWh en la etapa anterior hubiera significado generar un MWh con el generador hídrico a costo cero, y por lo tanto generar solo 24 MWh con la unidad térmica más cara:

$$C'_{3-1} = 50(50) + 50(100) + 25(150) = 11250 - 150$$

El **costo promedio** de la operación total es:

$$C_T = 16250$$

Si a este costo se le resta el costo de la operación inicial, se nota una diferencia muy alta entre lo estimado inicialmente y el costo real. Por lo tanto se agregan los cortes y se vuelve a iterar.

Se muestra el resumen de generación

	p_1	p_2	p_3	p_H	Costo etapa
Caso 1	0	0	0	150	0
Caso 2-1	50	50	25	25	11250
Caso 2-2	50	25	0	75	5000
Caso 3-1	50	50	25	25	11250
Caso 3-2	50	25	0	75	5000
Caso 3-3	50	50	25	25	11250
Caso 3-4	50	25	0	75	5000

Cuadro 1: Generación por unidad: primera iteración.

1.2.2. Iteración Backward: Cortes de Benders

Para calcular los cortes, se toma el promedio ponderado por la probabilidad de cada escenario del costo de operación y de la variable dual α . Como cada escenario tiene la misma probabilidad de ocurrencia, se toma la media común y corriente.

Los casos 3-1 y 3-2 tienen un costo promediado de: $0,5(11250) + 0,5(5000)$. es decir, de 8125. A su vez, el precio sombra es de 125.

Lo mismo ocurre para los casos 3-3 y 3-4 que promedian el mismo costo de operación y precio sombra. Por lo tanto, el corte entregado para la etapa 2 es:

$$\theta \geq 8125 - 125(v - v')$$

En donde 8125 es el costo promedio dado el almacenamiento del *forward 1*, 125 el precio sombra promedio y v' la decisión de almacenamiento del *forward 1*.

Para los casos 2-1 y 2-2 se tienen también los mismos valores promedio, luego el corte hecho para el periodo 1 es exactamente el mismo.

1.2.3. Segunda Iteración Forward

Se vuelven a resolver los 7 sub problemas anidados, pero esta vez con la restricción adicional:

$$\theta \geq 8125 - 125(v - v')$$

Es decir, con los cortes de Bender de cada etapa. La Figura 2 muestra los nuevos valores obtenidos.

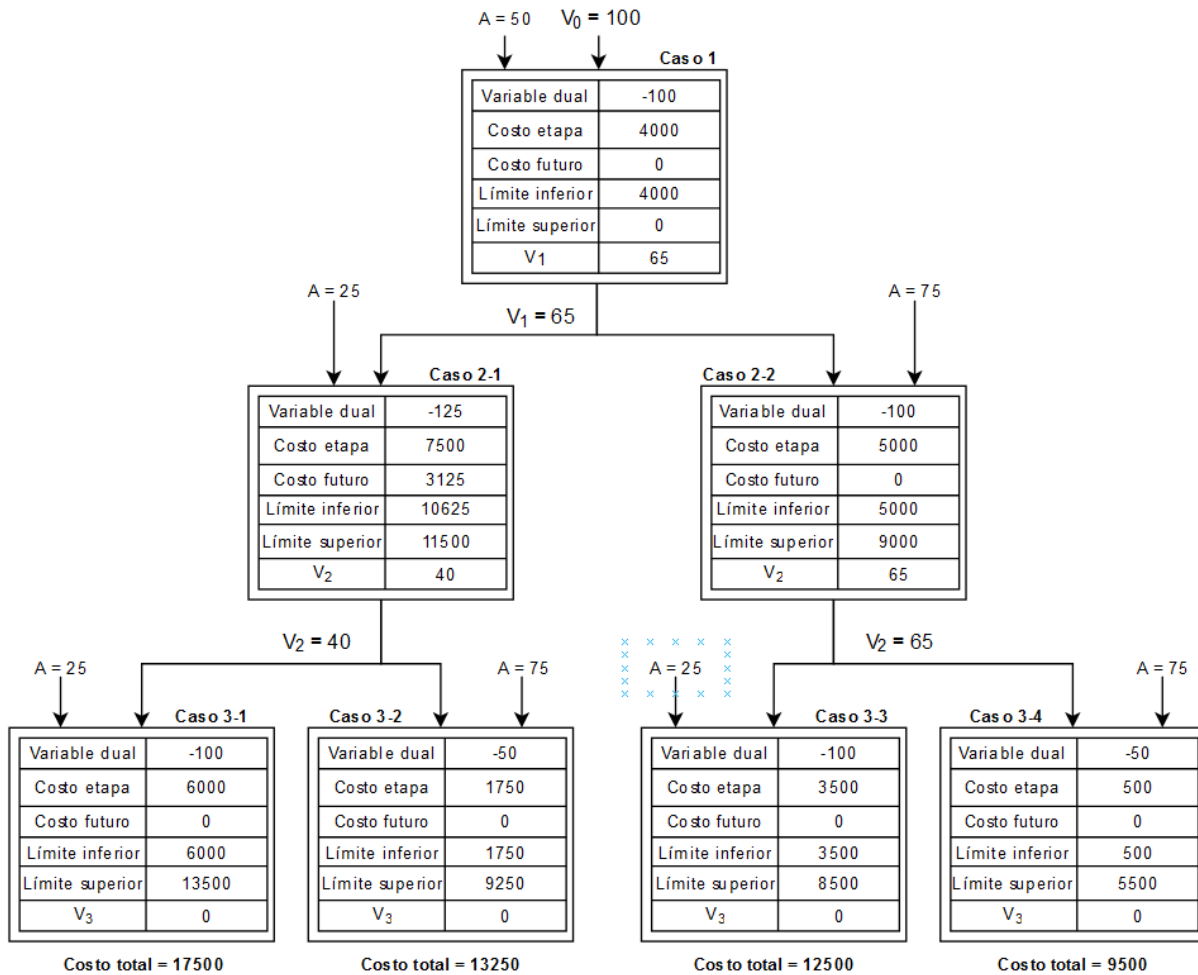


Figura 2: Primera iteración de los sub problemas.

Se puede observar que esta vez, se decide almacenar 65 MWh para la etapa 2, lo que significa que el costo de operación de la etapa 1 no será cero, sino 4000. El valor esperado hacia el futuro sigue siendo 0, por lo tanto, la operación total mínima deberá ser mayor o igual a 4000.

En la etapa 2 también se decide almacenar una cantidad mayor a 0 para cada escenario. También se observa como la decisión de almacenar agua en el periodo anterior causa una disminución en la operación de la etapa 2.

Finalmente, en la etapa 3 también disminuyen los costos de operación, por lo que se obtiene una disminución general de los 4 escenarios distintos posibles. El nuevo costo total promedio es:

$$C_T = 13187,5$$

Es decir, se ha logrado disminuir el costo esperado al agregar los cortes de Benders.

El costo estimado a futuro en la etapa 1 todavía tiene una gran diferencia con el costo de operación real del futuro, por lo que se puede seguir iterando hasta que estos 2 valores sean idealmente iguales y se haya encontrado el mínimo costo de operación.

El detalle de cada unidad se deja a continuación:

	p_1	p_2	p_3	p_H	Costo etapa
Caso 1	50	15	0	85	0
Caso 2-1	50	50	0	50	7500
Caso 2-2	50	25	0	75	5000
Caso 3-1	50	35	0	65	6000
Caso 3-2	35	0	0	115	1750
Caso 3-3	50	10	0	90	3500
Caso 3-4	10	0	0	140	500

Cuadro 2: Generación por unidad: segunda iteración.

2. Problema 2: SDDP.jl

Basado en el tutorial del paquete SDDP.jl y en los datos del problema 1, se escribe un código (incluido en anexos) el cual busca el punto de operación óptimo, considerando los distintos escenarios posibles de afluentes.

A diferencia del problema 1, ahora se tienen 20 escenarios posibles para cada etapa y también es necesario simular para 100 semanas.

Para estudiar como se comporta este modelo, se decide implementar este con distinto número de iteraciones máximas, partiendo en 5, luego 20, 50 y por último 100. En primer lugar para cada número de iteraciones máximas se toma una muestra de la cantidad de embalse al final de cada semana, a lo largo de las 100 semanas. El muestreo se realizó de manera aleatoria mostrando 1 de las 100 posibles realizaciones. El gráfico es el siguiente:

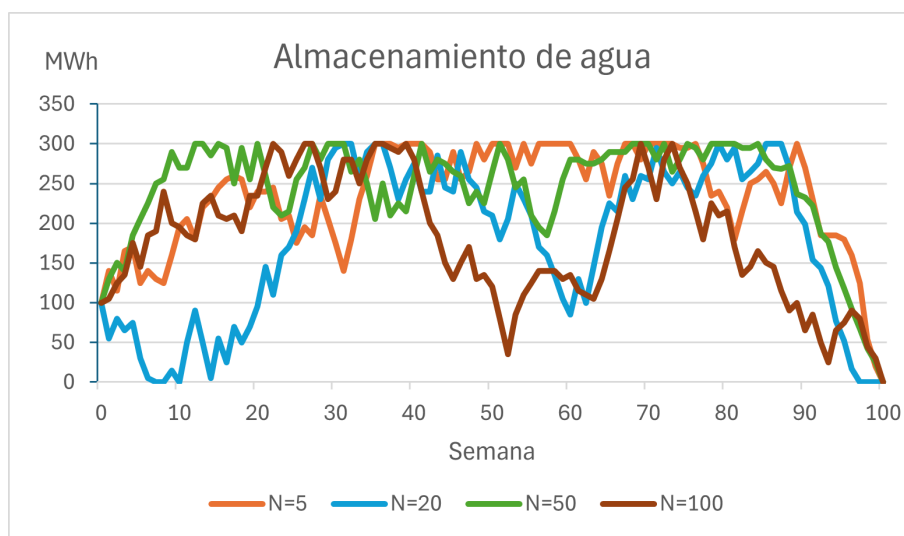


Figura 3: Evolución del almacenamiento según número máximo (N) de iteraciones del modelo

También se tienen las siguientes cotas superior e inferior, la función de costos futuros para la primera etapa y el costo marginal del agua almacenada, también para la primera etapa.

Iteraciones máximas (N)	5	20	50	100
Media Cota superior	719304	718466	718353	718640
Intervalo Cota superior	± 1405	± 1392	± 1391	± 1410
Intervalo Inferior	713617	715580	716042	716445
Costos futuros almacenamiento agua	715369	718147	719434	719813
Costos marginales almacenamiento agua	-100	-110	-122	-119

Cuadro 3: Resultados según número de iteraciones máximas

Se puede apreciar que conforme aumenta el número de iteraciones máximas, la solución se

vuelve más precisa, pues la cota superior y la inferior tienen a converger. La cota superior disminuye su valor, mientras que la inferior aumenta.

También se puede ver como conforme aumentan las iteraciones, la variación en los costos respecto a la cantidad anterior de iteraciones es menor, tanto para los costos futuros como para los costos marginales. Por esta razón se puede evidenciar que conforme aumentan las iteraciones, los resultados de las iteraciones son menos variables, demostrando convergencia en las soluciones.

Obtener mejores predicciones en la generación hidráulica tiene gran importancia en el sistema eléctrico de países con gran aporte hídrico, como lo es Chile. De hecho, en el año 2023, el 28,6 % de la generación eléctrica total fue generada por centrales hidráulicas (Coordinador,2024), correspondiendo al tipo de tecnología con mayor generación en ese año.

Debido a la naturaleza incierta, la capacidad de almacenar la energía hidráulica y la gran cantidad de energía que esta representa en Chile, es extremadamente importante aprovecharla para obtener los mayores beneficios a menor costo. Esto se logra justamente mediante este tipo de modelos, los cuales permiten tener una idea, pese a la incertidumbre, de como debe aprovecharse el recurso hídrico.

3. Problema 3: Operación detallada

Se pretende reescribir el problema en formato de programación dinámica, es decir, según lo ilustrado por el tutorial del paquete SDDP de Julia ¹ como se ve en la Figura

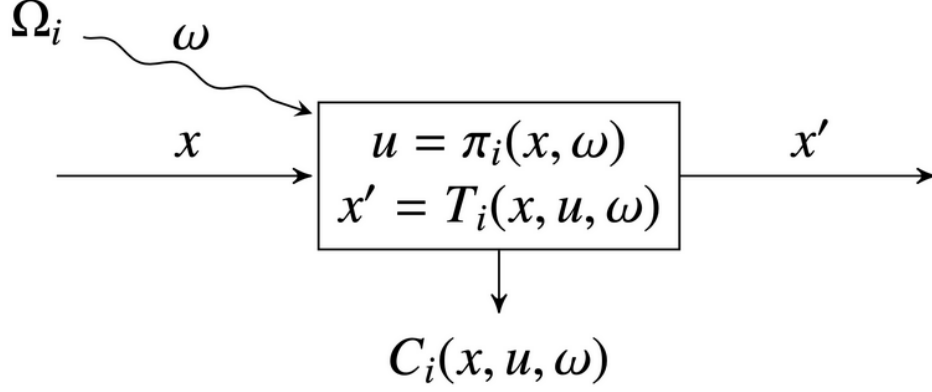


Figura 4: Esquema programación dinámica (SDDP.jl).

3.1. Variables de estado (X)

Se considera como variables de estado el volumen almacenado en cada embalse al comienzo de la etapa ($x = v_{h,t-1}$) y al final de la etapa ($x' = v_{h,t}$). En forma vectorial resulta:

$$x' = \begin{bmatrix} v_{1,t} \\ \vdots \\ v_{H,t} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} v_{1,t-1} \\ \vdots \\ v_{H,t-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

3.2. Variables de control (U)

Las acciones de control son todas las variables de decisión del despacho hídrico original a excepción de las variables de estado recién nombradas. Entonces, las acciones de control son:

- Potencia de generadores p .
- Agua utilizada para generar q del embalse h .
- Agua vertida s del embalse h .
- Energía enviada a otros nodos y recibida por otros nodos f .

Es decir:

$$u(x, \omega) = [p^T \quad q^T \quad s^T \quad f^T]^T \quad (2)$$

¹Tutorial: <https://sddp.dev/stable/>

3.3. Variables inciertas

La variable incierta es el flujo de afluentes hídricos:

$$\omega = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_H \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.4. Restricciones de acople temporal

Es también conocida como **función de transición** y es la relación entre el estado final de la etapa y su estado inicial, es decir, para el volumen almacenado:

$$v'_h = \sum_{k \in Q_{up}(h)} q_k + \sum_{S_{up}(h)} s_k - q_h - s_h + I_h + v_h \quad \forall h \quad (4)$$

En donde $Q_{up}(h)$ y $S_{up}(h)$ son los flujos recibidos aguas arriba del ebalse h por generación y por vertimiento respectivamente.

Es de notar que esta función puede ser representada por una matriz A de $h \times 1$, una matriz B $h \times m$ y una matriz F de $h \times 1$. El parámetro m es el total de variables de decisión.

$$x' = Ax + Bu + F\omega \quad (5)$$

3.5. Restricciones asociadas a variables de estado

Son aquellas únicamente referidas al volumen almacenado:

$$v_h \leq V_h^{max} \quad \forall h \quad (6)$$

$$-v_h \leq -V_h^{min} \quad \forall h \quad (7)$$

Con la notación de programación dinámica, estas restricciones también se pueden escribir en función de las variables de estado x:

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} x' \leq \begin{bmatrix} \vec{V}^{max} \\ -\vec{V}^{min} \end{bmatrix}$$

Que a su vez se pueden representar a partir de una matriz de restricciones (R_1) y un vector \vec{m} que almacena los valores máximos y los mínimos negativos:

$$R_1 x' \leq \vec{m} \quad (8)$$

3.6. Restricciones asociadas a variables de control

Corresponden a todas aquellas restricciones restantes:

$$\sum_g p_g + \sum_{h \in H(n)} \nu_h q_h - \sum_{l \in L^{FR}(n)} f_l + \sum_{l \in L^{TO}(n)} f_l = D_n \quad \forall n \quad (9)$$

$$(p, f) \in \Omega \quad (10)$$

En donde n son las barras del sistema, $H(n)$ es el conjunto de embalses en la barra n y $L^{TO}(n)$ con $L^{FR}(n)$ son las líneas de transmisión que salen del nodo n y que llegan a este respectivamente.

En el conjunto de restricciones Ω se incluyen las potencias máximas y mínimas de cada generador, así como los flujos máximos por línea. No se incluyen rampas, pues cada etapa involucra un periodo de tiempo generalmente más largo de lo que necesita un generador para pasar del mínimo al máximo o viceversa.

Al igual que las restricciones anteriores, se toman 2 últimas restricciones en 2 restricciones matriciales, una de igualdad y otra de desigualdad:

$$R_2 u \leq \vec{\gamma} \quad (11)$$

$$R_3 u = \vec{\rho} \quad (12)$$

3.7. Problema recursivo multi-etapa

Ahora, en vez de resolver el problema global, se define el subproblema que se resuelve en cada instante t .

$$V_t(x, \omega) = \min_{x', \bar{x}, u} \sum_{g \in G} C_g(P_g) \quad (13)$$

s.t.

$$\begin{aligned} x' &= A\bar{x} + Bu + F\omega \\ R_1 x' &\leq \vec{m} \\ R_2 u &\leq \vec{\gamma} \\ R_3 u &= \vec{\rho} \\ \bar{x} &= x \end{aligned}$$

El problema optimización se resuelve como una función V_t que recibe como argumentos el flujo hídrico incierto $I(\omega)$ y el estado $v(x)$ al inicio de la etapa.

La función resolverá el problema de optimización descrito y entregará como resultados los costos, así como el estado x' al final del periodo. Este estado final x' será el argumento de

entrada en el siguiente periodo para la función V_{t+1} . De esta forma, se resuelve el problema en forma recursiva.

Se ha añadido una última restricción que fija \bar{x} igual a la entrada de la función x . De esta forma es posible computar de forma más sencilla la variable dual a partir de la cuál se calculan los cortes de Benders.

4. Problema 4: Publicaciones recientes

1. Paper 1: *Medium-term stochastic hydrothermal scheduling with short-term operational effects for large-scale power and water networks*

- a) El paper describe que desde hace mucho tiempo se ha trabajado e investigado en la planificación hidro-térmica (*hydrothermal scheduling (HS)*), pero que debido a la naturaleza incierta de los afluentes de agua, siempre se ha buscado mejores maneras de resolver el (HS). En los últimos años también ha existido un aumento en la generación renovable, lo que implica en la necesidad de aumentar la flexibilidad del sistema (por ejemplo para el amanecer y para las horas del atardecer), y por lo tanto diseñar modelos HS que representen esta flexibilidad y otras restricciones que permitan planificar un despacho más eficiente y económico para mediano y largo plazo. Este problema es significativamente más relevante en países susceptibles a sequías (como lo es Chile; el caso de estudio), donde decisiones tomadas con predicciones erradas, pueden llevar aun gran impacto en el futuro. Este *paper* en particular aborda el problema de planificación hidro-térmica directamente, pues este presenta un "novedoso modelo de optimización estocástica lineal multi-etapa a largo plazo para HS", el cual mediante una metodología nueva de generación de parámetros busca simplificar ciertas expresiones matemáticas para poder remover ciertas no-convexidades del problema, para luego la simplificación computacional.
- b) Para esto, en el paper se inicia con un modelo de planificación hidro-térmica determinista, al cual gradualmente le añaden nuevas restricciones con el fin de incluir características más realistas, como lo son la flexibilidad, costos de inicio y apagado, etc. En un principio el modelo incluye las restricciones típicas del **despacho económico**, como lo son el flujo de las líneas con aproximación DC, flujo máximo y generación igual a demanda, a la vez que incluye las restricciones de la generación hídrica, como lo son almacenamiento hídrico, flujo entre "nodos", vertimiento, balance de masas, ente otros. Con el modelo "básico" listo, empiezan a añadir nuevas restricciones, como lo son la consideración de escenarios de hídricos, lo que significa la transformación a un modelo estocástico multi-etapa (similar a **SDDP**). También se añaden restricciones operacionales, como lo son el almacenamiento en corto plazo (baterías), restricciones de rampa, requerimientos de reserva y costos de encendido y apagado (restricciones también utilizadas en **Unit Commitment**). Para estos dos últimos se definen los parámetros Θ y Λ , los cuales explicaré se explicarán más adelante. Se define como se llevará a cabo la representación de la incertidumbre hídrica y luego se explica como se incluye en el modelo a la demanda de riego, que tal como indica su nombre corresponde a una demanda de agua mínima utilizada para la agricultura Finalmente se presenta el modelo completo con todas estas restricciones, además se explica como son calculados los parámetros Θ y Λ , asociados a las reservas y a los costos de encendido y apagado respectivamente.
- c) En este *paper* se realiza una comparación entre el modelo base (el cual no considera restricciones de corto plazo propias del **UC**), el modelo propuesto y una simplificación

del modelo propuesto, el cual no considera las restricciones asociadas a Θ y Λ . En comparación al modelo base, el modelo propuesto reduce la diferencia entre el costo esperado de operación del modelo lineal y el costo actual de operación del modelo de *Unit Commitment*. Esto conlleva a su vez en un aumento en la valorización del agua, de entre un 1 hasta un 658 % con respecto a al *UC*.

- d) El modelo propuesto en el paper tiene la ventaja de poder ser aplicado en sistemas de gran escala, tanto temporalmente como espacialmente, teniendo un tiempo esperado de computo de 170 minutos (lo cual es rápido para un modelo que considera todo Chile). Esto permitirá ser utilizado de manera real para la planificación de sistemas hidro-térmicos, considerando un posible uso semanal del modelo. Este modelo además de rápido y práctico, también considera muchos aspectos de flexibilidad e incertidumbre asociadas a las energías renovables, lo que es una clara mejora respecto a los modelos des-actualizados. Los autores también destacan que este modelo podría impactar sustancialmente en la administración de los sistemas hídricos en los países con actual sequía, como lo es Chile.

2. Paper 2: *Evaluation of Multipurpose Reservoir Operating Policies at Basin and Electric Power System Scales*

- a) La existencia de sequías actuales ha llevado a problemas relacionados a el uso del recurso hídrico en la generación eléctrica, pues este recurso también es utilizado, por ejemplo en la agricultura. Ante esto, el *paper* lleva a cabo la evaluación de políticas de operación de reservas multi-propósito (agricultura y generación eléctrica), y su rendimiento tanto en escala local como regional, bajo distintos escenarios hidrológicos.
- b) Se desarrolla un modelo estocástico de optimización multi-etapa para planificación Hidro-térmica, basado en un modelo de vector auto-regresivo (VAR) para la los escenarios hidrológicos futuros.

5. Referencias

Coordinador Eléctrico Nacional. (2024). "Histórico Generación de Energía". Reportes, Estadísticas y Plataformas de Uso Frecuente. En <https://www.coordinador.cl/reportes-y-estadisticas/#Estadisticas>

Durán Flores, A. I. P., Favereau Monti, M. J., Lorca Gálvez, Á. H., Vicuña Diaz, S., Melo Contreras, Ó. A., & Negrete Pincetic, M. A. (2024). Evaluation of multipurpose reservoir operating policies at basin and electric power system scales.

Navarro Casamayor, A., Favereau Monti, M. J., Lorca Gálvez, Á. H., Olivares Quero, D., & Negrete Pincetic, M. A. (2024). Medium-term stochastic hydrothermal scheduling with short-term operational effects for large-scale power and water networks.

SDDP.jl. An introduction to SDDP.jl. En https://sddp.dev/stable/tutorial/first_steps/.