
OTTIMIZZAZIONE NATURALE

Sofia Macrì e Sebastiano Alfonsi

Cosa vuol dire ottimizzare?

L'ottimizzazione è quella branca della Matematica che si occupa della ricerca del valore ottimo - massimo o minimo – di una assegnata funzione sotto alcune condizioni anch'esse assegnate. Praticamente è un processo che permette di massimizzare l'efficienza, minimizzando gli sprechi.

La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo, infatti in molti sistemi naturali si osserva la tendenza a minimizzare l'energia.

- *Nell'alveare le celle hanno una forma tale da massimizzare massimizzare gli spazi riducendo al minimo minimo il consumo di cera*



- *Le bolle di sapone assumono forme tali da rendere minima la tensione superficiale*



- *Le foglie delle piante si dispongono lungo il fusto assumendo una posizione tale da massimizzare l'esposizione alla luce, all'aria e all'acqua piovana*



In particolare, la disposizione delle foglie delle piante secondo schemi geometrici era già nota nell'antichità, con osservazioni da Teofrasto e Plinio il Vecchio. **Leonardo da Vinci** fu il primo a descrivere questo fenomeno in termini geometrici, osservando una disposizione a spirale con angoli specifici. **Keplero** intuì una connessione con i numeri di Fibonacci, ma la conferma arrivò solo nel XIX secolo grazie agli studi di botanici come **Schimper, Braun e Bravais**, *che formulirono la regola generale della fillotassi basata su rapporti tra numeri di Fibonacci*.

FILLOTASSI

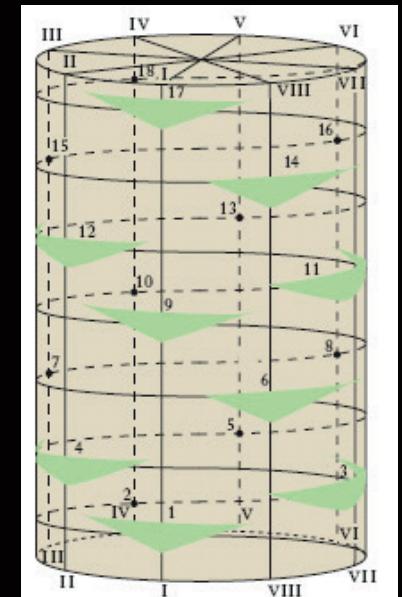
Origina da parole greche: ***phyllon*** (foglia) e ***taxis*** (ordine).

Studio della disposizione geometrica delle foglie, fiori, semi e altre strutture botaniche.

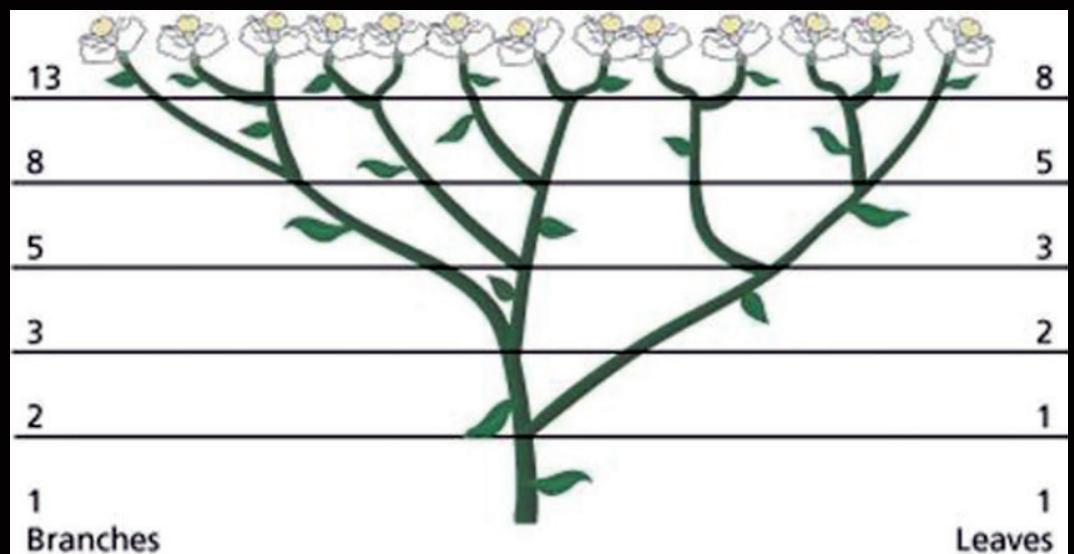
Le foglie non crescono una sopra l'altra per evitare di togliersi a vicenda ossigeno, pioggia e luce però la cosa più sorprendente è che la loro disposizione sembra rivelare un modello ossia un certo tipo di organizzazione.

Le foglie si dispongono secondo una spirale: se prendiamo come punto di partenza la prima foglia di un ramo e contiamo quante foglie ci sono fino a quella perfettamente allineata questo numero è quasi sempre un numero di Fibonacci e anche il numero di giri in senso orario o antiorario che si compiono per raggiungere tale foglia allineata è un numero di Fibonacci.

In realtà le foglie quando si sviluppano sono ruotate di un angolo di $137^\circ 30'$, la disposizione più idonea alla crescita.



Quello che avviene nelle foglie è paragonabile a quello che succede in alcune piante i cui rami si distribuiscono secondo i numeri della serie di Fibonacci come nell'Achillea palustre.



SEQUENZA FIBONACCI

In matematica, la successione di Fibonacci (detta anche successione aurea) è una successione di numeri interi in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti, eccetto i primi due che sono, per definizione, 0 e 1. Questa successione, indicata con F_n o con $\text{Fib}(n)$, è definita ricorsivamente: partendo dai primi due elementi, $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$, ogni altro elemento della successione sarà dato dalla relazione:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

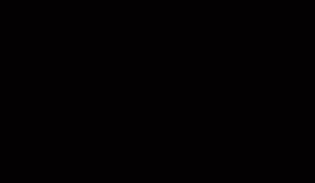
Gli elementi F_n sono anche detti numeri di Fibonacci. I primi termini della successione di Fibonacci, che prende il nome dal matematico pisano del XIII secolo Leonardo Fibonacci, sono:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946...

Tale sequenza ha un'altra particolarità: tutti i rapporti dei numeri di Fibonacci sono strettamente correlati al **numero aureo**. Il rapporto tra un numero di Fibonacci e quello immediatamente precedente si avvicina infatti sempre di più al numero 1.61803398874989..., ovvero la sezione aurea o il numero di phi.

spiegazione

F_n



numero di posto all'interno della sequenza

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_6 = F_5 + F_4$$

$$8 = 5 + 3$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 25

84, 4181, 6765, 10946...

Ma come fece Fibonacci a comprendere questo fenomeno?

Un uomo gli chiese:

“Se due conigli sono stati messi in un recinto, quante coppie di conigli produrranno in un anno?”. I conigli non possono riprodursi fino all’età di un mese. Quindi nel primo mese rimane la stessa coppia. Nel secondo mese, la femmina dà alla luce una coppia di conigli.

Nel terzo mese, la coppia produce un’altra coppia di nuovi nati, mentre la loro prole cresce fino all’età adulta. Questo schema continua e segue la sequenza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 che va all’infinito: ecco che si ha la sequenza di Fibonacci.

Mesi	Coppie nate	Coppie adulte *	Totale coppie	Evoluzione nascite nei primi sei mesi
Inizio	0	1	1	
1°	1	1	2	
2°	1	2	3	
3°	2	3	5	
4°	3	5	8	
5°	5	8	13	
6°	8	13	21	
7°	13	21	34	
8°	21	34	55	
9°	34	55	89	
10°	55	89	144	
11°	89	144	233	
12°	144	233	377	
Totale coppie nate	376			

* Nella colonna “Coppie adulte” sono comprese sia le coppie non ancora feconde, sia quelle feconde (contrassegnate nelle figure con un pallino nero).

SEZIONE AUREA

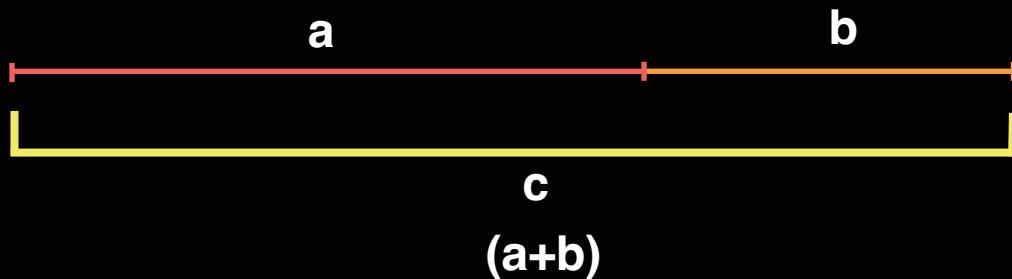
Numero aureo, sezione aurea o costante di Fidia

Similmente a π (pi), è un numero decimale infinito.

Lo indichiamo con la lettera greca ϕ (phi) e il valore approssimato è 1,61803.

Sarebbe ***la divisione di un segmento in due parti tali che la parte maggiore (a) sia medio proporzionale fra l'intero segmento (c=a+b) e la parte minore (b).***

Questa divisione crea un rapporto che appare ripetutamente in natura.



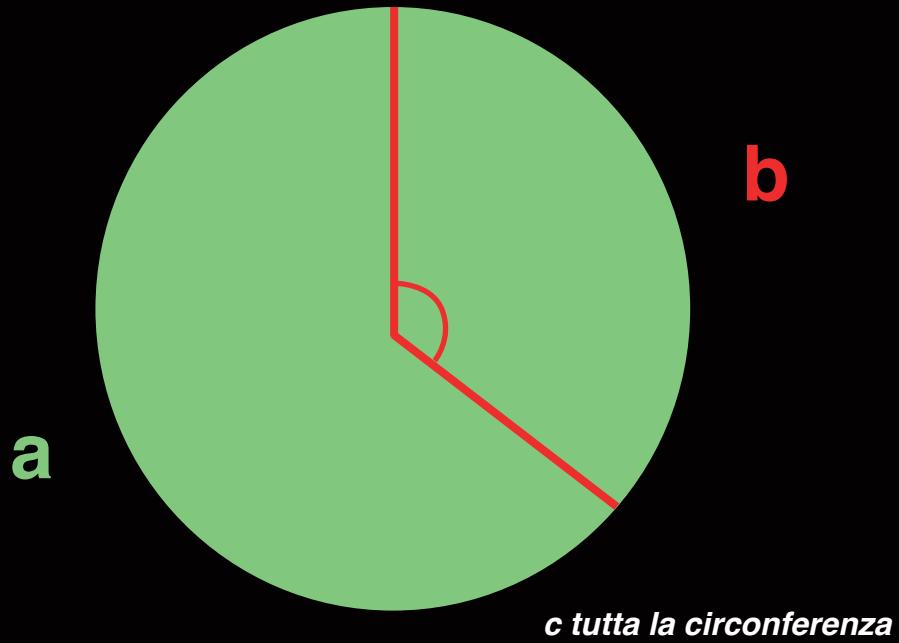
$$\phi = c : a = a : b$$

parte maggiore | | parte minore

(medio proporzionale)

ANGOLO AUREO

Direttamente collegato al numero aureo è anche l'angolo aureo, ovvero quell'angolo che si ottiene dividendo la circonferenza stessa in due archi **a** e **b** che stanno tra loro nello rapporto che si ha nella sezione aurea . *Data quindi una circonferenza **c** e due archi di circonferenza **a** e **b** in cui essa è divisa, l'angolo aureo è l'angolo sotteso dall'arco **b** , a condizione che $c : a = a : b$*



GIRASOLE

Nel girasole possiamo osservare una serie di spirali formate dai semi presenti nel disco che seguono coppie di numeri consecutivi della successione di Fibonacci (come 21-34 o 89-144).

Questa disposizione permette al fiore di sfruttare al massimo lo spazio disponibile, favorendo la crescita del maggior numero possibile di semi che crescono in spirale con un angolo preciso tra loro, in modo da catturare meglio la luce solare e spingere i semi più vecchi verso l'esterno, permettendo al fiore di continuare a crescere.



PASSIFLORA

Il numero di petali di un fiore è spesso uno dei seguenti numeri: 3, 5, 8, 13, 21, 34 o 55. Numeri che, come detto, appartengono alla sequenza di Fibonacci. Un esempio su tutti è la passiflora, in cui la corrispondenza con i numeri di Fibonacci è sempre esatta.



La sequenza di Fibonacci può essere applicata anche a molte altre specie di fiori in relazione al loro numero di petali.

Ecco qualche esempio:

3 petali: giglio, iris

5 petali: ranuncolo, rosa selvatica, speronella, aquilegia

8 petali: delphinium

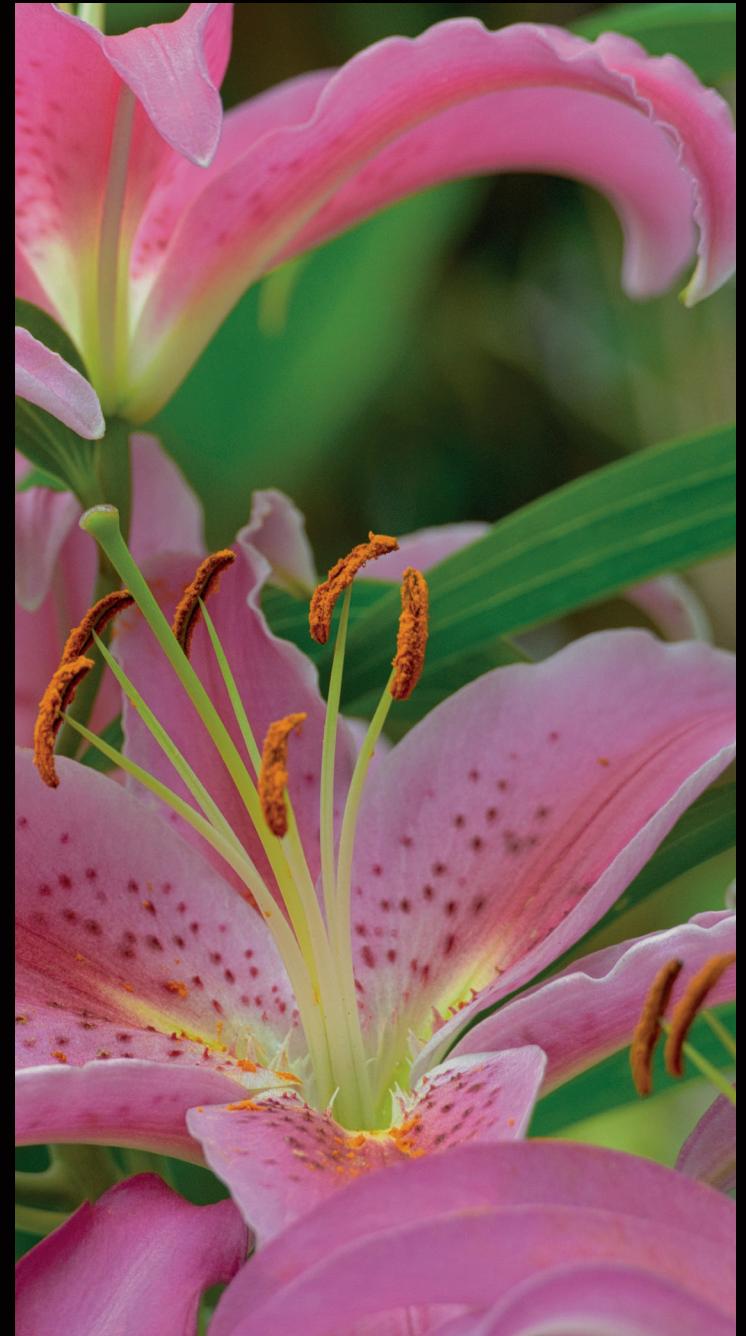
13 petali: artemisia, calendula, cineraria

21 petali: astri, dente di leone, Susanna dagli occhi neri

34 petali: piantaggine, fitolacca

21, 34, 55, 89 petali:

margherite michelmas, famiglia delle asteraceae



Anche **LE PIGNE** e i loro semi sono disposti a spirale, composte da una coppia di spirali che si irradia verso l'alto in direzione opposta.



FRATTALI VEGETALI: COME SI CREANO LE SPIRALI DI BROCCOLI E CAVOLFIORI

I broccoli e cavolfiori mostrano come la matematica sia presente in natura attraverso strutture frattali.

Questi vegetali non sviluppano completamente i loro fiori, ma formano spirali di gemme che si ripetono in scale sempre più piccole, creando un pattern frattale. Il broccolo romanesco è l'esempio più visibile di questa auto-similarità.

Contando le spirali, emerge la sequenza di Fibonacci con tipicamente **5 spirali in senso orario e 8 in senso antiorario**. Questo non è casuale: i rapporti tra numeri consecutivi di Fibonacci ($8/5=1,6$; $13/8=1,625\dots$) approssimano la sezione aurea ($\phi\approx1,618$).

Questa disposizione, basata sull'angolo aureo, consente alla pianta di ottimizzare l'esposizione alla luce e l'uso dello spazio durante la crescita, dimostrando come la natura utilizzi principi matematici per massimizzare l'efficienza.



Nell'ananas si riscontra una struttura frattale simile a quella del broccolo, anche se meno evidente. Le scaglie dell'ananas seguono uno schema di autosomiglianza legato alla sequenza di Fibonacci, disponendosi in linee curve che si incrociano. Il numero di queste linee in ciascuna direzione corrisponde sempre a coppie della sequenza (come 5 e 8 o 8 e 13), riproducendo il rapporto aureo.

