

OTTIMIZZAZIONE NATURALE

Cosa vuol dire ottimizzare?

L'ottimizzazione è quella branca della Matematica che si occupa della ricerca del valore ottimo - massimo o minimo – di una assegnata funzione sotto alcune condizioni anch'esse assegnate. Praticamente è un processo che permette di massimizzare l'efficienza, minimizzando gli sprechi.

La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo, infatti in molti sistemi naturali si osserva la tendenza a minimizzare l'energia.

- *Nell'alveare le celle hanno una forma tale da massimizzare gli spazi riducendo al minimo il consumo di cera*
- *Le bolle di sapone assumono forme tali da rendere minima la tensione superficiale*
- Le foglie delle piante si dispongono lungo il fusto assumendo una posizione tale da massimizzare l'esposizione alla luce, all'aria e all'acqua piovana**

In particolare, la disposizione delle foglie delle piante secondo schemi geometrici era già nota nell'antichità, con osservazioni da Teofrasto e Plinio il Vecchio. **Leonardo da Vinci** fu il primo a descrivere questo fenomeno in termini geometrici, osservando una disposizione a spirale con angoli specifici. **Keplero** intuì una connessione con i numeri di Fibonacci, ma la conferma arrivò solo nel XIX secolo grazie agli studi di botanici come **Schimper, Braun e Bravais**, che formularono la regola generale della fillotassi basata su rapporti tra numeri di Fibonacci.

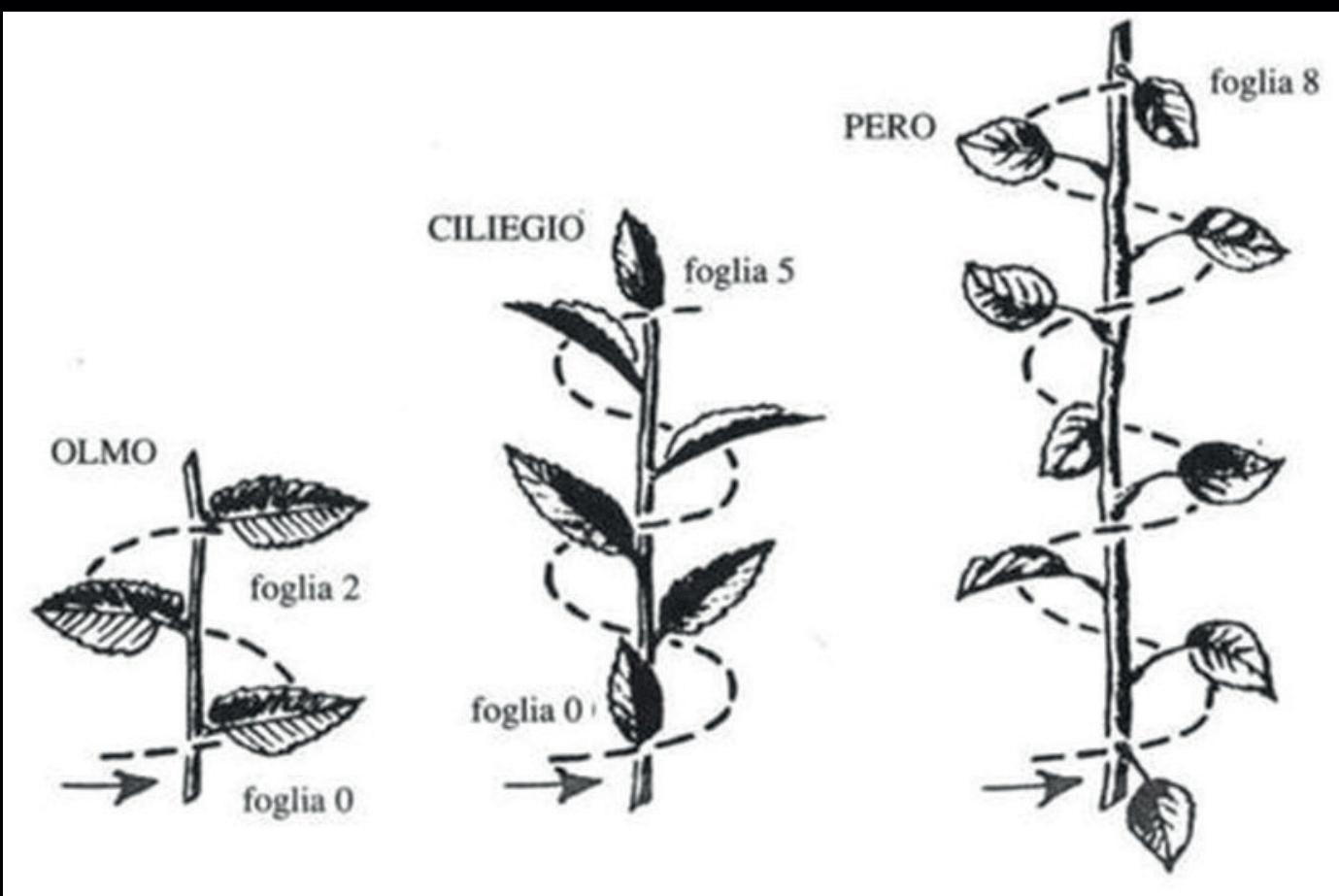
FILLOTASSI

Origina da parole greche: ***phyllon*** (foglia) e ***taxis*** (ordine).

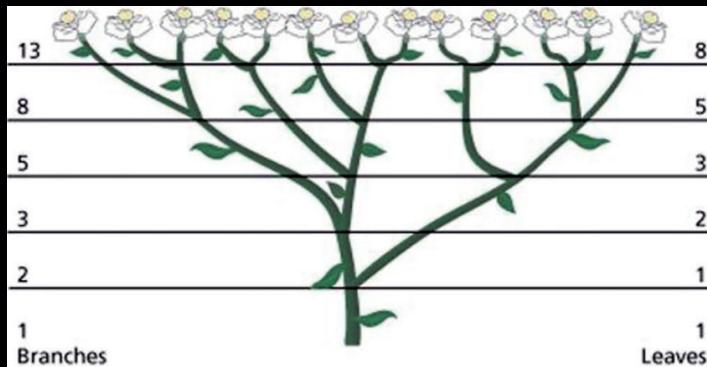
Studio della disposizione geometrica delle strutture botaniche.

Le foglie si dispongono secondo una spirale lungo il fusto in modo irregolare per non crescere una sopra l'altra ed evitare di togliersi a vicenda ossigeno, pioggia e luce. La disposizione rivela un modello ossia un certo tipo di organizzazione.

Se prendiamo come punto di partenza la prima foglia di un ramo e contiamo quante foglie ci sono fino a quella perfettamente allineata, questo numero è quasi sempre un numero di Fibonacci, così come l'angolo di divergenza tra una foglia e l'altra e anche il numero di giri in senso orario o antiorario che si compiono per raggiungere tale foglia allineata.



Quello che avviene nelle foglie è paragonabile a quello che succede in alcune piante i cui rami si distribuiscono secondo i numeri della serie di Fibonacci come nell'Achillea palustre.



SEQUENZA FIBONACCI

In matematica, la successione di Fibonacci (detta anche successione aurea) è una successione di numeri interi in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti, eccetto i primi due che sono, per definizione, 0 e 1. Questa successione, indicata con F_n o con **Fib(n)**, è definita ricorsivamente: partendo dai primi due elementi, $F_0=0$ e $F_1=1$, ogni altro elemento della successione sarà dato dalla relazione:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Gli elementi F_n sono anche detti numeri di Fibonacci. I primi termini della successione di Fibonacci, che prende il nome dal matematico pisano del XIII secolo Leonardo Fibonacci, sono:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946...

Tale sequenza ha un'altra particolarità: tutti i rapporti dei numeri di Fibonacci sono strettamente correlati al **numero aureo**. Il rapporto tra un numero di Fibonacci e quello immediatamente precedente si avvicina infatti sempre di più al numero 1.61803398874989...

spiegazione

F_n

numero di posto all'interno della sequenza

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,25
84,4181,6765,10946...

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_6 = F_5 + F_4$$

$$8 = 5 + 3$$

Ma come fece Fibonacci a comprendere questo fenomeno?

Un uomo gli chiese:

“Se due conigli sono stati messi in un recinto, quante coppie di conigli produrranno in un anno?”.

I conigli non possono riprodursi fino all'età di un mese. Quindi nel primo mese rimane la stessa coppia. Nel secondo mese, la femmina dà alla luce una coppia di conigli. Nel terzo mese, la coppia produce un'altra coppia di nuovi nati, mentre la loro prole cresce fino all'età adulta. Questo schema continua e segue la sequenza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 che va all'infinito: ecco che si ha la sequenza di Fibonacci.

Mesi	Coppie nate	Coppie adulte *	Totale coppie	Evoluzione nascite nei primi sei mesi
Inizio	0	1	1	
1°	1	1	2	
2°	1	2	3	
3°	2	3	5	
4°	3	5	8	
5°	5	8	13	
6°	8	13	21	
7°	13	21	34	
8°	21	34	55	
9°	34	55	89	
10°	55	89	144	
11°	89	144	233	
12°	144	233	377	
Totale coppie nate	376			

* Nella colonna “Coppie adulte” sono comprese sia le coppie non ancora feconde, sia quelle feconde (contrassegnate nelle figure con un pallino nero).

SEZIONE AUREA

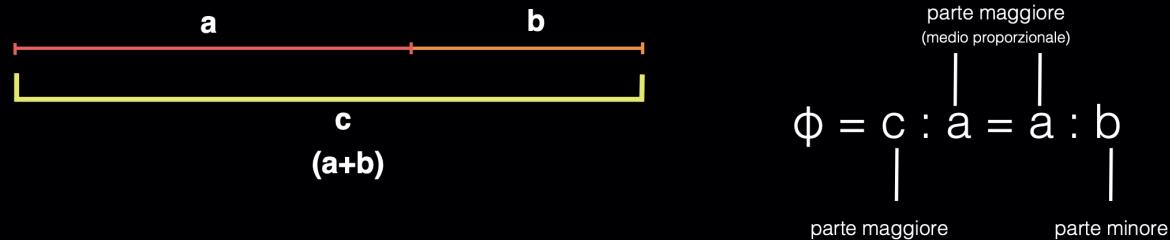
Numero aureo, sezione aurea o costante di Fidia.

Similmente a π (pi), è un numero decimale infinito.

Lo indichiamo con la lettera greca ϕ (phi) e il valore approssimato è 1,61803.

Sarebbe ***la divisione di un segmento in due parti tali che la parte maggiore (a) sia medio proporzionale fra l'intero segmento ($c=a+b$) e la parte minore (b).***

Questa divisione crea un rapporto che appare ripetutamente in natura.

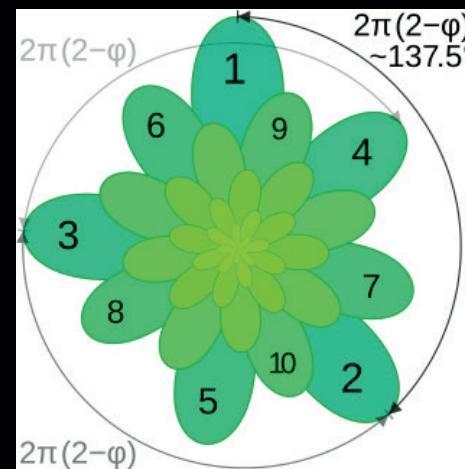
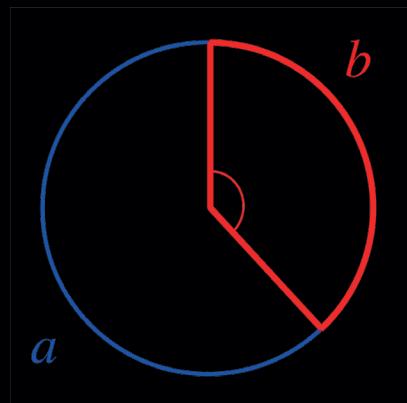


ANGOLO AUREO

Direttamente collegato al numero aureo è anche l'angolo aureo, ovvero quell'angolo che si ottiene dividendo la circonferenza stessa in due archi a e b che stanno tra loro nello rapporto che si ha nella sezione aurea .

Data quindi una circonferenza c e due archi di circonferenza a e b in cui essa è divisa, l'angolo aureo è l'angolo sotteso dall'arco b , a condizione che

$$c : a = a : b$$



L'angolo b ha valore di 137.5° circa.

In molte piante con struttura spiraliformi, possiamo trovare questo angolo nella disposizione delle foglie. Secondo uno studio di Roger V. Jean (1992) su 650 specie, questo angolo si trova nel 92% dei casi .

Perchè proprio quest'angolo? E perchè le spirali?

Non tutte le piante hanno strutture spiraliformi, ma per molte, come il girasole questo è necessario per ottimizzare gli spazi e l'assorbimento energetico. Sempre nel caso del girasole, una forma spirale anzichè rettilinea permette di avere più semi possibili all'interno della stessa area (disco floreale). Ma non tutte le spirali sono efficienti allo stesso modo, così come ci sono angoli che permettono una migliore disposizione rispetto ad altri.



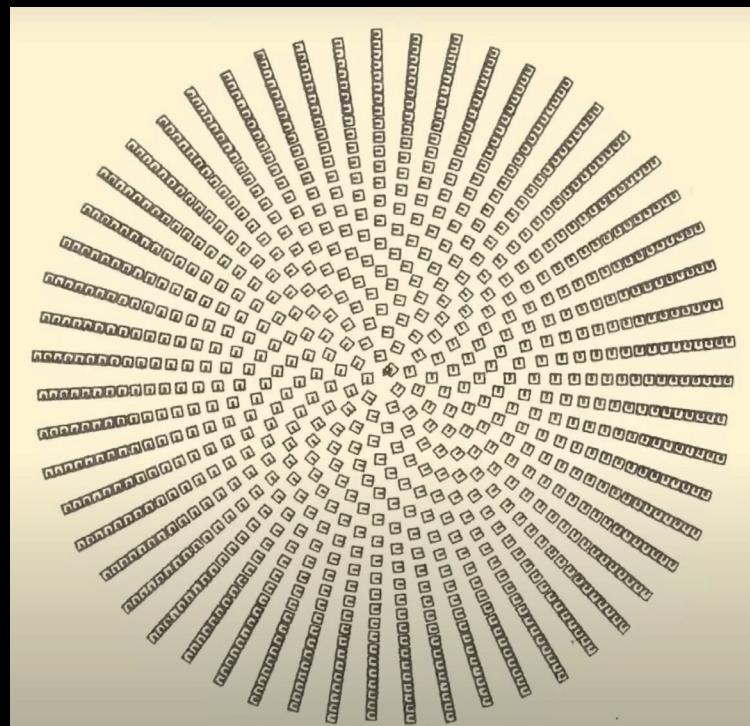
Se l'angolo è scritto in forma di frazione semplificata la spirale avrà tante braccia quante il denominatore della frazione.



Gli angoli che hanno come valore un numero razionale, tenderanno a delle braccia rettilinee mentre quelli con un numero irrazionale (π o ϕ), tenderanno ad averle curve.

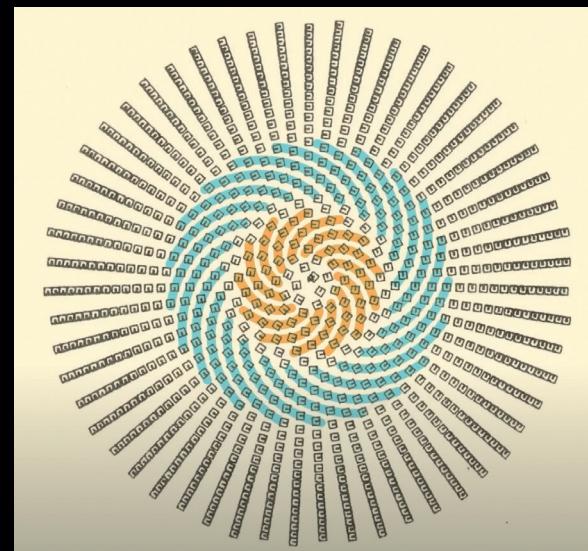
L'angolo migliore è quello che permette di posizionare tutti i punti nella maniera più uniforme possibile e questo è direttamente collegato al numero di braccia della spirale della pianta.

Più braccia sono e più sono intrecciate tra loro, migliore sarà l'ottimizzazione dello spazio. Tra tutti quello che permette ciò è proprio l'angolo aureo.



Approssimazione razionale dell'angolo aureo

Interessante notare come, in questa spirale il numero delle braccia sia direttamente proporzionale alla sequenza di fibonacci.



La sequenza di Fibonacci può essere applicata anche a molte altre specie di fiori in relazione al loro numero di petali.

Ecco qualche esempio:

3 petali: giglio, iris

5 petali: ranuncolo, rosa selvatica, speronella, aquilegia

8 petali: delphinium

13 petali: artemisia, calendula, cineraria

21 petali: astri, dente di leone, Susanna dagli occhi neri

34 petali: piantaggine, fitolacca

21, 34, 55, 89 petali:

margherite michelmas, famiglia delle asteraceae



Anche *le pigne* e i loro semi sono disposti a spirale, composte da una coppia di spirali che si irradia verso l'alto in direzione opposta.



FRATTALI VEGETALI

I broccoli e cavolfiori mostrano come la matematica sia presente in natura attraverso strutture frattali. Questi vegetali non sviluppano completamente i loro fiori, ma formano spirali di gemme che si ripetono in scale sempre più piccole, creando un pattern frattale come nelbroccolo romanesco. Contando le spirali, emerge la sequenza di Fibonacci con tipicamente **5 spirali in senso orario e 8 in senso antiorario**.



Nell'ananas si riscontra una struttura frattale simile a quella del broccolo, anche se meno evidente.



SITOGRAFIA

<https://www.treccani.it/enciclopedia/fillotassi/>

<https://www.actaplantarum.org/morfologia/morfologia4e.php>

https://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Fibonacci

<https://lemnismath.org/2022/05/fracciones-continuas-mejor-aproximacion/>

<https://youtu.be/lXyCRP871VI?si=ULkHwWNf8ZgjQb7p>

https://it.wikipedia.org/wiki/Angolo_aureo

https://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea

[https://www.treccani.it/enciclopedia/sezione-aurea_\(Encyclopedie-della-Matematica\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/sezione-aurea_(Encyclopedie-della-Matematica)/)

https://youtu.be/SjSHVDfXHQ4?si=SpvLapIpEvDsrZ_z

<https://youtu.be/2tv6Ej6JVho?si=rXGmaIABDQMUKoy->