UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Complejo MAT 521227/525211

Pauta Evaluación No 2. (21.11.15// 9:15-10:55hrs.)

Problema 1

P1 Evaluar sólo dos integrales $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ donde:

1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $\quad \Gamma$: la recta $\quad z(t) = \frac{t}{2} + (1+t)i, -2 \leq t \leq 0$
2. $f(z) = e^{2/z}\sin(\frac{1}{z})$: $\quad \Gamma : z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
3. $f(z) = \frac{e^z}{z^4 + iz^2}$: $\quad \Gamma$: cuadrado de vértices $\pm 1 \pm i$

R1.1 Re-escribimos la recta como $\Gamma : (x(t), y(t)) = (0,1) + \frac{t}{2}(1,2), \ -2 \leq t \leq 2.$
Este segmento de recta lo podemos englobar por una curva simple cerrada tal que el origen este en su exterior. Así podemos aplicar el teorema del cálculo integral eligiendo la rama logarítmica

$$log(z) = \ln|z| + i\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

luego

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-1-i}^{i} \frac{dz}{z} = i\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{2}(\ln(2) + \frac{3\pi}{2})$$

R1.2 Realizamos el cambio de variable $\eta = \frac{1}{z}$ en tal caso

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \oint\limits_{|\eta|=1} \frac{e^{2\eta}\sin(\eta)}{\eta^2} d\eta = 2\pi i Res\left(\frac{e^{2\eta}\sin(\eta)}{\eta^2}, 0\right) = 2\pi i.$$

R1.3 Observamos que $z^4 + iz^2 = z^2(z^2+i) = z^2(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i))(z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i))$, es decir, $z = 0$ es un polo doble del integrando mientras que $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ son polos simples. Como los tres polos son englobados por Γ, en consecuencia, si $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ inferimos gracias al teorema de los residuos:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} f(z)dz &= 2\pi i Res(f(z), -z_0) + 2\pi i Res_2(f(z), 0) + 2\pi i Res(f(z), z_0) \\
&= -(2\pi i)\frac{e^{-z_0}}{2z_0^3} + (2\pi i)\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+i}\right)\Bigg|_{z=0} + (2\pi i)\frac{e^{z_0}}{2z_0^3} \\
&= 2\pi + 2\pi i\frac{\sinh(z_0)}{z_0^3}
\end{aligned}$$

Problema 2

P2 Resolver la integral impropia reales:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}dx$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+4x+5}dx$

R2.1 Si se designa por I el valor principal requerido, observamos que $I = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i2x}}{x^2}dx\right)$.

Para aplicar el método de los residuos debemos utilizar $f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{z^2}$ con

$$Res(f(z),0) = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{i2z}}{z} = -2i$$

y la trayectoria $\Gamma_{\mathrm{R}} = C_{\mathrm{R}} \cup C_\epsilon \cup L_{\epsilon\mathrm{R}}$, donde C_{R} y C_ϵ son semi círculos, positivamente orientados, en el semi plano superior, centrados en el origen y de radios R y ϵ respectivamente. Mientras que $L_{\epsilon\mathrm{R}}$ es la secante, positivamente orientada, del semi circulo C_{R} sobre el el eje real a la cual se le ha suprimido el segmento $\overrightarrow{[-\epsilon,\epsilon]}$. Si R $>>$ ϵ:

$$0 = \oint\limits_{\Gamma_{\mathrm{R}}} f(z)dz = \int\limits_{C_{\mathrm{R}}} f(z)dz - \int\limits_{C_\epsilon} f(z)dz + \int\limits_{L_{\epsilon\mathrm{R}}} f(z)dz$$

y aplicando el lema uno y tres de Jordan discutidos en clases, se infiere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = (\pi i)(-2i) = 2\pi \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}dx = 2\pi.$$

R2.2 Si se designa por J el valor principal requerido, entonces $J = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-z_0)(x-\overline{z_0})}\right)$ con $z_0 = -2+i$. El método de los residuos exige considerar $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-z_0)(z-\overline{z_0})}$ el residuo

$$Res(f(z),z_o) = \frac{z_0e^{iz_0}}{2\Im(z_0))} = \frac{2\cos(2)+\sin(2)}{4e} - i\frac{\cos(2)+2\sin(2)}{2e}$$

y la trayectoria $\Gamma_{\mathrm{R}} = C_{\mathrm{R}} \cup L_{\mathrm{R}}$ donde C_{R} es el semicírculo en el semiplano superior centrado en el origen y de radio R mientras que L_{R} es la secante del semicírculo sobre el eje real. Si $R >> |z_0| = \sqrt{5}$ se infiere

$$2\pi i Res(f(z),z_0) = \oint\limits_{\mathrm{R}} f(z)dz = \int\limits_{C_{\mathrm{R}}} f(z)dz + \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)dx$$

y aplicando el lema uno de Jordan visto en clases se concluye :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi Res(f(z),z_0) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)dx}{x^2+4x+5} = \frac{\pi(\cos(2)+2\sin(2))}{e}.$$

Problema 3

P3.1 Determinar la Serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{4z-z^2}$ en la región $\mathcal{R} : 4 < |z-4|$

P3.2 Describa gráficamente la región en la cual es aplicado el cuadrado de vértices en $(\pm 1, \pm 1)$ bajo la transformación $w = \frac{2}{z}$.

R3.1 Basta observar que si $z \neq 0$ y $z \neq 4$ entonces

$$f(z) = \frac{-1}{(z-4)}\frac{1}{z} = \frac{-1}{(z-4)^2}\frac{1}{1+\frac{4}{z-4}}.$$

En consecuencia, la serie de laurent pedida es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n}{(z-4)^{n+2}}, \qquad 4 < |z-4|.$$

R3.2 Definimos los lados verticales del cuadrado por

$$L_1 = \{-1 + it : -1 \leq t \leq 1\}, \quad L_3 = 2 + L_1$$

y los lados horizontales por

$$L_2 = \{t - i : -1 \leq t \leq 1\}, \quad L_4 = 2i + L_3.$$

Enseguida, evaluamos

- $w(L_1) = \left\{-\frac{2}{1+t^2} - i\frac{2t}{1+t^2} : -1 \leq t \leq 1\right\}$.
  Si $u(t) = -\frac{2}{1+t^2}$ y $v(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ se tiene para el rango de valores de t:

  $$(u,v) \in w(L_1) \iff (u+1)^2 + v^2 = 1, \quad u \in [-2,-1],\ v \in [-1,1].$$

  Luego $w(L_3) = \left\{(u,v) \in [1,2] \times [-1,1] : (u-1)^2 + v^2 = 1\right\}$.
- Análogamente,

  $$w(L_2) = \left\{(u,v) \in [-1,1] \times [-2,-1] : u^2 + (v+1)^2 = 1\right\}$$

  y

  $$w(L_4) = \left\{(u,v) \in [-1,1] \times [1,2] : u^2 + (v-1)^2 = 1\right\}$$

FPV/fpv.
25 de Noviembre de 2015