UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo IV MAT 525212/529202
Listado FINAL

P1 calcule las siguientes integrales usando residuos.

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^z - 1} \qquad\qquad \oint_{|z|=1} (z + z^2)e^{1/z}$$

P2 Demuestre las siguientes integrales

$$\oint_{|z|=5} \frac{z}{sin(z)} dz = 0$$

$$\oint_{|z-1|=2} (z-1)e^{1/(z)^2} dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z^4 + 16)} dz = 0$$

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{z^2 e^z}{1 - e^{z^4}} dz = -2\pi i$$

$$\oint_{|z-\pi|=\pi} \frac{dz}{cos^2(z)} dz = 0$$

$$\oint_{|z|=1} e^{2/z} sin(1/z) dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1 - e^{z^2}}{z^3} dz = 0$$

P3 Considere la integral

$$I = \oint_{|z|=1/2} \frac{sin(1/z)}{z-1} dz$$

(a) Evaluar I usando residuos, luego exprese la respuesta en la forma de una serie infinita.

(b) Sea $w = 1/z$ en I, evalua la integral resultante y luego sume la serie en (a)

4 Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} sech(\pi/2)$$

Usando, para $R > 1$ el rectangulo de vértices $-R, R, R + i\pi, -R + i\pi$ y el teorema de los residuos.

5 Sea $A \subset \mathbb{C}$ acotado, abierto y conexo. Sean $f, g : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas en $\overline{A}$, holomorfas en A. Si $f = g$ en $Fr(A)$, mostrar que $f = g$ en $\overline{A}$

6 Sea una función $f(z)$ analítica en el plano z incluyendo ∞ a excepción de los puntos $z = i/2$ donde tiene un polo de orden 1 y en $z = 2$ donde tiene un polo de orden 2. Además se sabe que

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=3} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{|z|=3} (z-1)f(z)dz = 0$$

Encuentre la expansión en serie de Laurent para $f(z)$ alrededor de $z = 0$.

7 Resolver las siguientes integrales impropias reales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - cos(2x)}{x^2}$$

$$\int -\infty^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 4x + 5} dx$$