Complemento de Cálculo MAT 521234

Pauta Evaluación No 1. (13.05.14-13:15hrs.)

P1 1. Evaluar

$$a = \frac{e^{3+i\pi} Ln(\sqrt{3}+i)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+2i)}$$

Solución:
Como $e^{3+i\pi} = -e^3$, $\quad Ln(\sqrt{3}+i) = \ln(2) + i\frac{\pi}{6}$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+2i) = \cosh(2)$
se tiene que

$$a = -\frac{e^3}{\cosh(2)}\left(\ln(2) + i\frac{\pi}{6}\right).$$

[**0.6** puntos]

2. Establecer que la siguiente función es analítica en un dominio adecuado. Evaluar $f'(\pi + i)$.

$$f(x+iy) = x + \sin(x)\cosh(y) + i(y + \cos(x)\sinh(y)).$$

Solución. Presentamos la respuesta más simple.
Observar que $f(z) = z + \sin(z)$ luego ella es entera y $f'(z) = 1 + \cos(z)$.
Además, $f'(\pi + i) = 1 - \cosh(1)$. [**1.0** puntos]

3. Se suprimió durante la evaluación.

P2 Evaluar dos de las siguientes tres integrales:

1. $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{e^{2z}\sin(z^2-2i)}{(z-1-i)^2}dz$
donde Γ es una curva simple y cerrada que no pasa por $1+i$. Ind. $(1+i)^2 = 2i$

Solución. [**1.2** puntos]

- Si $z_0 = 1+i$ no es encerrado por Γ el integrando es analítico y gracias al Teorema de Cauchy-Goursat la integral vale cero.
- En caso contrario z_0 es un polo simple del integrando, pues,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\sin(z^2-2i)}{(z-z_0)^2} = \lim_{z\to z_0} 2z\cos(z^2-2i) = 2z_0 \neq 0$$

En consecuencia, la integral propuesta es igual a $(2\pi i)2z_0e^{2z_0}$, esto es:

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}\sin(z^2-2i)}{(z-1-i)^2}dz = -4\pi e^2\left[\cos(1)+\sin(1)+i(\sin(1)-\cos(1))\right]$$

2. $\oint_{\Gamma} \frac{z-4i}{z^4+4z^2}dz$
donde Γ es una curva simple y cerrada que no pasa por $z=-2i$ pero encierra a $z=0$ y $z=2i$.

Solución [**1.2** puntos]

- Si Γ no encierra a $z_0=-2i$, entonces si $f(z)=\frac{z-4i}{z^4+4z^2}=\frac{z-4i}{z^2(z^2+4)}$:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z-4i}{z^4+4z^2}dz = 2\pi i\left\{Res_2[f,0]+Res[f,2i]\right\}=\frac{3\pi}{4}i$$

 pues

$$Res_2[f,0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2f(z)]=\frac{1}{4} \quad \wedge \quad Res[f,2i]=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\frac{1}{8}.$$

- En caso contrario z_o es un polo simple de $f(z)$, en consecuencia:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z-4i}{z^4+4z^2}dz = \frac{3\pi}{4}i+2\pi i Res[f,z_0]=0$$

 pues

$$Res[f,z_0]=\lim_{z\to z_o}(z-z_0)f(z)=-\frac{3}{8}.$$

3. $\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$
donde Γ viene representado por la figura.

Solución. [**1.2** puntos]
Observamos que si $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$, entonces

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i Res_2[f,i]-2\pi i Res[f,-i]=\frac{\pi}{e},$$

pues,

$$Res_2[f,i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2f(z)]=-i\frac{1}{2e} \quad \wedge \quad Res_2[f,-i]=0.$$

P3 Sean α y β números positivos. Evaluar las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+\beta^2}dx$ 2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\alpha\sin(\theta)+\beta\cos(\theta)}{2-\cos(\theta)}d\theta$

Ind: En (2) separar las integrales.

Solución

P3-1 Si designamos por I la integral, se tiene que

$$I = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+\beta^2}dx\right) = \Re\left\{\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+\beta^2}dz\right\}$$

donde $\Gamma_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\} \bigcup \overrightarrow{\{-RR\}}$. Si designamos por $f(z)$ el integrando se tiene que

$$Res[f(z); z = i\beta] = \lim_{z\to i\beta}(z-i\beta)f(z) = \frac{e^{-\alpha\beta}}{2i\beta}$$

se tiene, citando los lemas de Jordan que

$$I = \Re\left\{2\pi i \cdot \frac{e^{-\alpha\beta}}{2i\beta}\right\} = \frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{\beta}.$$

P3-2 Si designamos por J la integral y por $f(\theta)$ a su integrando, se tiene que

$$f(\theta) = \frac{\alpha\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)} + \frac{\beta\cos(\theta)}{2-\cos(\theta)} = \frac{\alpha\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)} + \frac{2\beta}{2-\cos(\theta)} - \beta$$

por tanto

$$J = \ln(2-\cos(\theta))|_0^{2\pi} + 2\beta\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos(\theta)} - 2\pi\beta.$$

el primer sumando es nulo y el segundo resulta ser

$$2\beta\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos(\theta)} = i4\beta\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)^2-(\sqrt{3})^2} = -8\pi\beta Res[g, 2-\sqrt{3}]$$

donde

$$Res[g, 2-\sqrt{3}] = \lim_{z\to 2-\sqrt{3}}(z-2+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{(z-2+\sqrt{3})(z-2-\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Luego

$$J = \beta\pi\left(\frac{4\sqrt{3}-6}{3}\right).$$

[2.0 puntos]

Bonus Encontrar la *Serie de Laurent* de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$$

que sea válida en la región: $|z-3| > 3$. [1.0 puntos]

Solución

La región $\mathcal{R}$ se puede escribir como

$$z \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow \left|\frac{3}{z-3}\right| < 1.$$

Luego

$$\forall z \in \mathcal{R} : f(z) = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-3)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(z-3)^{n+2}}.$$

FPV/fpv.
30 de Mayo de 2014