UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales II

Tarea 1

Integrantes

Allison Mora Ortega
Evelyn Pafián Martínez

Docente

Freddy Paiva

25 de Septiembre de 2017, Concepción

1. Ejercicio 1

Resuelva la siguiente EDP, vía método de integrales primeras, verificando que las condiciones necesarias para poder definir las soluciones implícitas, además resolver mediante parametrización y compare ambos resultados.

Hallar $u \in \mathbb{C}(\Omega)$, donde Ω será un abierto a definir en la resolución del ejercicio, tal que:

$$\begin{array}{c} xu_x + yu_y = xe^{-u} \\ u(x,x^2) = 0 \end{array}$$

Realice una gráfica de la solución, puede usar el programa que más le acomode.

Resolución

1.1. Mediante método de Integrales Primeras

1. Se obtiene de la EDP que el sistema caracteristico esta dado por:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xe^{-u}}$$

2. Buscando las integrales primeras:

   2.1 Primera integral primera:
   Del sistema se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \Leftrightarrow lnx - lny &= C_1 \\ \Leftrightarrow ln(\frac{x}{y}) &= C_1 \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x} &= C_1^*, \quad C_1^* \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Luego,

$$\phi(x,y,u) = \tfrac{y}{x} \text{ con } x \neq 0, x, y \in \mathbb{R}.$$

   2.2 Segunda integral primera:
   Del sistema característico se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{du}{xe^{-u}} \\ \frac{dx}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} &= \frac{du}{\cancel{x}e^{-u}} \cdot \cancel{x} \\ \Leftrightarrow dx &= e^u du \\ \Leftrightarrow e^u du - dx &= 0 \\ \Leftrightarrow e^u - x &= C_2, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Entonces,
$\psi(x,y,u) = e^u - x$, con $x \in \mathbb{R}$

Así, la solución general es de la forma,

$$f(e^u - x, \tfrac{y}{x}) = 0 \quad \text{ó} \quad e^u - x = f(\tfrac{y}{x})$$

Por el dato de Cauchy se tiene que $y = x^2 \Rightarrow u = 0$. Luego aplicandolo a $e^u - x = f(\frac{y}{x})$ la expresión queda $1 - x = f(x)$.

Evaluando en $\frac{y}{x}$, la solución queda expresada como,

$$e^u = x + (1 - \frac{y}{x})$$

$$\Leftrightarrow u = ln(x + 1 - \frac{y}{x})$$

La solución $u = ln(x + 1 - \frac{y}{x})$ con $u \in C^1(\Omega)$ y
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x > y, x \neq 0\}$.

1.2. Mediante el método de parametrización

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ abierto, un conjunto por definir donde la solución estara bien definida y sea de clase $C^1(D)$.
Reescribimos la EDP como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ademas sea $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$, parametrizamos nuestra curva inicial como:

$$\Gamma_o = \{(x,y,u) : (x(s), y(s), u(s)) = (s, 0, 0), s \in \mathbb{R}\}$$

Nuestro sistema característico será escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(s,0) = s \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(s,0) = s^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} = xe^{-u} \\ u(s,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(s,0) = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{d}{dt} - 1)x = 0 \\ x(s,0) = s \end{cases}$$

Usando el Factor integrante $\phi(t) = e^{-t}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}e^{-t} - xe^{-t} &= 0 \\ \Leftrightarrow d[xe^{-t}] &= 0 \\ xe^{-t} &= F(s) \end{aligned}$$

Como $x(s,0) = s$, se tiene que: $s \cdot e^0 = F(s) \Rightarrow F(s) = s$.

Luego, $x(s,t) = F(s) \cdot e^t = s \cdot e^t$.

De:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(s,0) = s^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(s,0) = s^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} - y = 0 \\ y(s,0) = s^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Usando el Factor integrante $\phi(t) = e^{-t}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}e^{-t} - ye^{-t} &= 0 \\ \Leftrightarrow d[ye^{-t}] &= 0 \\ \Leftrightarrow ye^{-t} &= G(s) \end{aligned}$$

Ahora, como $y(s,0) = G(s) \cdot e^0 = s^2 \Rightarrow G(s) = s^2$.

Luego,

$$y(s,t) = s^2 \cdot e^t$$

De:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{du}{dt} = xe^{-u} \\ u(s,0) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = xe^{-u} \\ u(s,0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^u du = xdt \\ u(s,0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^u du = se^t dt \\ u(s,0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d[e^u] = s \cdot d[e^t] \\ u(s,0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d[e^u - s \cdot e^t] = 0 \\ u(s,0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^u - s \cdot e^t = C(s) \\ u(s,0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Como, $u(s,0) = 0$, se tiene que $e^0 - s \cdot e^0 = C(s) \Rightarrow C(s) = 1 - s$
Luego,

$$\begin{aligned} e^u - s \cdot e^t &= 1 - s \\ \Leftrightarrow e^u &= 1 - s + s \cdot e^t \\ \Leftrightarrow u &= ln(1 - s + s \cdot e^t), s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Volviendo a las variables originales, con:

$$\begin{aligned} x &= se^t \\ y &= s^2e^t = xs \end{aligned}$$

Se tiene,

$$u(x,y) = ln(1 + x - \frac{y}{x})$$

Donde las condiciones de validez son las mismas que al resolver por el método de integrales primeras ya que al comparar resultados las soluciones son iguales y como la curva γ no es tangencial a una característica y las funciones involucradas son suave se garantiza existencia y unicidad del problema Cauchy en el dominio Ω que contiene al intervalo $I = (-1, 0)$

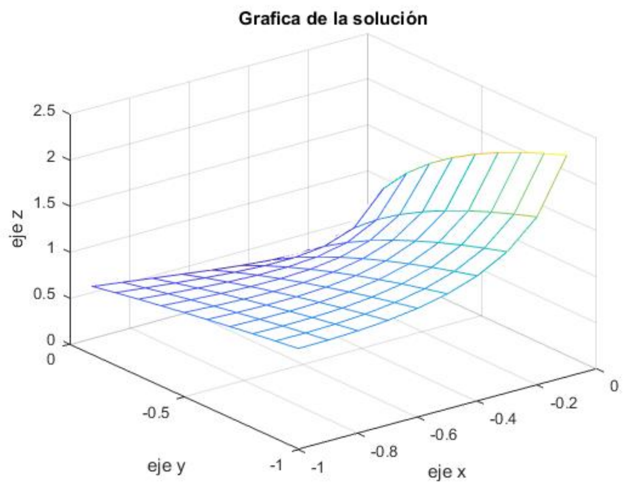

Figura 1: Curva solución.

Donde la Figura 1 fue realizada mediante Matlab.

2. Ejercicio 2

Hallar $u \in C(\Omega)$, donde Ω será un abierto a definir en la resolución del ejercicio, tal que:

$$u_x + 2u_y + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

Para este ejercicio usea cambio de variable. Debe justificar en qué casos la función tiene solución, y espresarla en términos de una función tal que al momento de imponer condiciones de frontera se pueda hallar una solución.

Resolución

Notamos que la EDP puede ser reescrita como,

$$u_x + 2u_y + (2x - y)u = (2x - y)(x + 2y)$$

Luego el sistema característico es,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{(2x - y)(x + 2y - u)}$$

Determinamos la ecuación de las curvas características dado que el problema es lineal, tomamos entonces

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{2} \\ \Leftrightarrow 2dx - dy &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - y &= s, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ahora podemos elegir cualquier otra recta que no sea paralela a s y además que se intesecten en un sólo punto, por lo que tomamos $t = x + 2y$.
Verificamos la dependencia funcional mediante el cálculo del Jacobiano asociado a la tranformación:

$$\left| \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Como el jacobiano es distinto de cero podemos utilizar la tranformación. Entonces, se resuelve la EDP para $V(s,t) = u(x,y)$, donde:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = V_x s_x + V_t s_x = 2V_s + V_t \\ u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = V_s s_y + V_t s_y = -V_s + 2V_t \end{aligned}$$

Reemplazando los valores obtenidos mediante la parametrización en la EDP a resolver

$$2V_s + V_t + 2(-V_s + 2V_t) + sV = st \Rightarrow 5V_t + sV = st$$

Al reemplazar vemos que el resultado es una EDO lineal, procedemos a resolver mediante factor integrante $q(t)$=$e^{\frac{s}{5}t}$, donde nos queda:

$$\begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{s}{t})V &= \frac{st}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}[Ve^{\frac{s}{5}t}] &= \frac{s}{5}te^{\frac{s}{5}t} \\ \Leftrightarrow Ve^{\frac{s}{5}t} &= \frac{s}{5}(\frac{5}{s}e^{\frac{s}{5}t}t + \frac{25}{s^2}e^{\frac{s}{5}t} + F(s)) \\ \Leftrightarrow V &= t - \frac{5}{s} + F(s)e^{\frac{-st}{5}} \\ \Leftrightarrow V(s,t) &= t - \frac{5}{s} + F(s,t) \end{aligned}$$

Volviendo a las variables x, y mediante la transformación

$$\left\{ \begin{array}{l} s = 2x - y \\ t = x + 2y \end{array} \right.$$

la solución está dada por,

$$u(x, y) = x + 2y - \frac{5}{2x - y} + F(2x - y, x + 2y)$$

donde la fución tiene solución para $2x - y \neq 0$ y cuando nuestro dato de Cauchy no está sobre la curva característica $\phi(x, y, u) = 2x - y$.