UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

TAREA 2

Nombre: José Irribarra B. **Profesor:** Freddy Paiva.

Problema 1.

Considere la siguiente EDP:

$$y'' + (\lambda + c)y = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$y'(0) = 0$$
$$y'(1) = 0$$

Luego

1. Llevar la ecuación a su forma adjunta.
2. Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.
3. Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios distintos son ortogonales con respecto a un producto interior $L^2\omega(\Omega)$.
4. Encontrar los valores propios y las funciones propias.
5. Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión $[y'' + \lambda y = 0]$. Además dar los primeros modos de vibración.
6. graficar $\lambda_n, \quad f_n, \quad n = 1, 2, 3, 4.$

1)

La forma adjunta es como sigue:

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0$$

Sea $K = \lambda + c$, así (1) es reescrito como:

$$y'' + Ky = 0 \tag{2}$$

De la forma anterior consideramos $p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1$ para obtener:

$$\frac{d}{dx}[y'(x)] + [K]y(x) = 0 \quad \text{(Forma adjunta)}$$

Sea el operador L tal que:

$$Ly = -Ky, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad y \in Dom(L)$$

Se define

$$L := D^2, \quad Dom(L) := \{y \in \mathcal{C}^2(]0,1[) \cap \mathcal{C}([0,1]) : y'(0) = 0 \wedge y'(1) = 0\}$$

2)

Primero se define el siguiente producto interior:

$$< f, g >= \int_\Omega f(x)g(x)dx \tag{3}$$

Luego se multiplica la ecuación (2) por $y(x)$ para obtener:

$$y(x)y(x)'' + Ky^2(x) = 0$$

Despejamos $Ky^2(x)$ e integramos en $\Omega =]0,1[$:

$$K\int_0^1 y^2(x)dx = -\int_0^1 y(x)y''(x)dx \tag{4}$$

Se observa que:

$$\frac{d}{dx}[y(x)y'(x)] = (y'(x))^2 + y(x)y''(x)$$
$$\Leftrightarrow y(x)y''(x) = \frac{d}{dx}[y(x)y'(x)] - (y'(x))^2$$

Aplicando este resultado en (4):

$$\begin{aligned} K\int_0^1 y^2(x)dx &= \int_0^1 (y'(x))^2dx - \int_0^1 \frac{d}{dx}[y(x)y'(x)]dx \qquad \text{Por T.F.C} \\ \Leftrightarrow K\|y(x)\|^2 &= \|y'(x)\|^2 - [y(x)y'(x)]_0^1 \\ &= \|y'(x)\|^2 - (y(1)y'(1) - y(0)y'(0)) \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno se obtiene:

$$K\|y(x)\|^2 = \|y'(x)\|^2 \geq 0$$

así necesariamente:

$$K \geq 0$$

Por tanto los valores propios son NO negativos, posteriormente en el apartado 4) se demostrará que son crecientes.

3)

Sean $(K_\lambda, y), (K_\beta, z)$ dos pares caracteristicos, ie:

$$y'' + K_\lambda y = 0, \quad K_\lambda \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$
$$z'' + K_\beta z = 0, \quad K_\beta \in \mathbb{R}^+ \tag{6}$$

Multiplicando (5) por $z(x)$ y (6) por $y(x)$ se tiene:

$$zy'' + K_\lambda yz = 0 \tag{7}$$
$$yz'' + K_\beta yz = 0 \tag{8}$$

Pero

$$zy'' = \frac{d}{dx}[zy'] - z'y'$$
$$yz'' = \frac{d}{dx}[yz'] - y'z'$$

Así, aplicando este resultado a (7) y (8) respectivamente y restando se tiene:

$$\frac{d}{dx}[zy'] - \frac{d}{dx}[yz'] + (K_\lambda - K_\beta)yz = 0$$
$$\Leftrightarrow (K_\lambda - K_\beta)\int_0^1 y(x)z(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx}[y(x)z'(x)] - \frac{d}{dx}[z(x)y'(x)]\right)dx$$
$$\Leftrightarrow (K_\lambda - K_\beta) < y, z > = [y(x)z'(x) - z(x)y'(x)]_0^1 \quad \text{Aplicando C.C}$$
$$\Leftrightarrow < y, z > = 0$$

Por lo tanto, se concluye que funciones propias distintas asociadas a valores propios distintos son ortogonales bajo el producto interno definido en (3).

4)

Caso 1) $K = 0$
(2) es equivalente a:

$$y''(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow y(x) = Ax + B$$
$$\Rightarrow y'(x) = A$$

Por condiciones de contorno:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

así, la solucion para este caso esta dada por:

$$\boxed{y(x) = B, \quad B \in \mathbb{R}} \tag{9}$$

notar que (9) posee infinitas soluciones, por ende no existe unicidad para la ecuación diferencial, así no hay funciones propias asociadas a K, del cual se concluye que $K = 0$ no puede ser varlor propio.

Caso 2) $K > 0$
de (2) se obtiene:

$$y(x) = Acos((\sqrt{K})x) + Bsen((K)x)$$
$$\Rightarrow y'(x) = -A(\sqrt{K})sen((\sqrt{K})x) + B(\sqrt{K})cos((\sqrt{K})x)$$

Aplicando las condiciones de contorno se tiene:

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow B(\sqrt{K}) &= 0 \\ \Leftrightarrow B &= 0 \quad \text{pues } K > 0 \\ y'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -A(\sqrt{K})sen((\sqrt{K})1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A = 0 \vee sen(\sqrt{K}) = 0$$

Si $A = 0$ se tiene la solución trivial

$$y(x) \equiv 0$$

La cual no es válida, pues las funciones propias son distintas de la función nula, necesariamente se debe resolver la *Ecuación Trascendental de los Valores Propios:*

$$\begin{aligned} sen(\sqrt{K}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{K} &= n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Así los valores propios están dados por:

$$K_n = (n\pi)^2$$

En este caso las funciones propias son:

$$\boxed{y_n(x) = Acos(n\pi x) \quad A, x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}} \tag{10}$$

notar que para todo n en $\mathbb{Z}$ se cumple:

$$K_n = (n\pi)^2 = n^2\pi^2 = (-n\pi)^2 = K_{-n}$$

Además es facil ver que:

$$K_n = (n\pi)^2 \leq \Big((n+1)\pi\Big)^2 = K_{n+1}$$

Por lo tanto, los valores propios son crecientes.

5)

Bajo las condiciones de contorno dadas inicialmente, no podemos concluir nada sobre la posición de alguno de los extremos de la viga, pero si se puede decir que en cada extremo de esta la pendiente de la curva de deflexión es cero.

Por otra parte de (10) vemos que el primer modo de vibración es:

$$y_1(x) = Acos(\pi x)$$

el segundo modo de vibración:

$$y_2(x) = Acos(2\pi x)$$

el tercer modo de vibración:

$$y_3(x) = Acos(3\pi x)$$

Etc.

6)

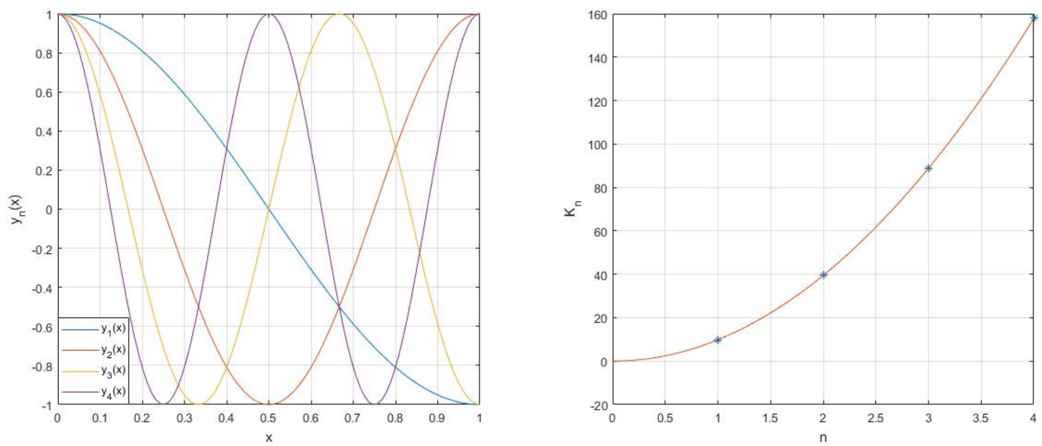

Figura 1: Primeros modos de vibración.