UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 2

Ecuaciones Diferenciales II

Concepción, 18 de octubre de 2017.

Paola Toledo Muñoz

- Considere $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $y'(e^{-1}) = 0$, $y(1) = 0$
  - (i) Llevar la ecuación a su forma adjunta.

    Sea la ecuación con $a_1(x) = x^2$, $a_2(x) = x$

$$a_1(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a_2(x) + \lambda y = 0 \qquad .....(1)$$

definamos $p(x) = \frac{r(x)}{a_1(x)}$, $q(x) = 0$ y $\mu(x) = e^{\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt}$ reemplazando en (1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[r(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + [\lambda p(x)]y = 0$$

Normalizando la EDP

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{\lambda}{x^2}y = 0$$

con ayuda del factor integrante

$n'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow n(x) = Ln(x), x > 0$

$\mu(x) = e^{n(x)} \Leftrightarrow \mu(x) = e^{ln(x)} = x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy'] + \left[\lambda\frac{1}{x}\right]y = 0, x \neq 0$$

multiplicando por x

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy'] + [\lambda]\,y = 0, x \neq 0$$

Debemos demostrar que el operador es autoadjunto ,es decir

$$y, z \in D(L) : \langle Ly, z\rangle = \langle y, Lz\rangle$$

Para $r(x) = x, p(x) = \frac{1}{x}$ .Definimos un producto interior arbitrario

$$\langle y, z\rangle = \int_{e^{-1}}^{1} p(x)y(x)z(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x}y(x)z(x)dx$$

donde las condiciones de contorno estarán definidas como

$$\left.\begin{matrix} y'(e^{-1}) = 0 \\ y(1) = 0 \end{matrix}\right| \qquad \wedge \qquad \left.\begin{matrix} z'(e^{-1}) = 0 \\ z(1) = 0 \end{matrix}\right|$$

Definimos el operador
notamos que $r(x) = x$ y $r(0) = 0$, por lo que no se requiere condición de contorno en la frontera $x = 0$ unicamente que sea acotado en los puntos frontera antes definidos.
$D(L) = \left\{y \in \zeta^2]e^{-1}, 1[\cap\zeta^1[e^{-1}, 1]\right\}$

$$L = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy']$$

en efecto

$$\langle Ly, z\rangle = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy']\,z(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x}x(xy')'z(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x) + xy''(x)z(x)dx \qquad (*)$$

tomando

$$\int_{e^{-1}}^{1} xy''(x)z(x)dx$$

integrando por partes con

$$\left.\begin{array}{ll} u = z(x)x & du = z(x) + z'(x)xdx \\ dv = y''(x)dx & v = y'(x) \end{array}\right|$$

$$\int_{e^{-1}}^{1} xy''(x)z(x)dx = xz(x)y'(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x) + y'(x)z'(x)xdx = -\int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx - \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z'(x)xdx$$

reemplazando en (*)

$$\int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x) - \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx - \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z'(x)xdx = -\int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z'(x)xdx$$

integrando por partes con

$$\left.\begin{array}{ll} u = z'(x)x & du = z'(x) + z''(x)xdx \\ dv = y'(x)dx & v = y(x) \end{array}\right|$$

$$-\int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z'(x)xdx = -\,xz'(x)y'(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} + \int_{e^{-1}}^{1} y(x)z'(x) + z''(x)y(x)xdx = \int_{e^{-1}}^{1} y(x)z'(x) + z''(x)y(x)xdx$$

$$= \int_{e^{-1}}^{1} (xz')'y(x)dx / \cdot \frac{x}{x} = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x} \cdot x(xz')'y(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x}y(x)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xz'\right]dx = \langle y, Lz\rangle$$

por lo tanto el operador es autoadjunto, de lo anterior podemos asegurar que la forma del operador autoadjunto es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xy'\right] + \left[\lambda\frac{1}{x}\right]y = 0, x \neq 0$$

- (ii) Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.
  Definimos el siguiente producto interior con $p(x) = \frac{1}{x}$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \wedge L^2(\Omega) : \Omega := (e^{-1}, 1) \to \mathbb{R}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-1}}^{1} p(x) f(x) g(x) dx = \langle g, f \rangle$$

el cual define la norma $|| \cdot ||$.

$$\langle y, y \rangle = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x} y(x) y(x) dx = \frac{1}{x} ||y||^2$$

Sabemos que $||y||^2 =< y, y >\geq 0$, $y \in L^2$, debido a esto $p(x)$ debe cumplir

$x \in [e^{-1}, 1], p(x) > 0$ lo cual se cumple.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [y'x] = -\lambda \frac{1}{x} y$$

Multiplicando por y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [y'x]\, y(x) = -\lambda \frac{y^2}{x}$$

Integrando

$$\int_{e^{-1}}^{1} (y'x)' dx = -\lambda \int_{e^{-1}}^{1} \frac{y^2}{x}$$

integrando por partes con

$$\left. \begin{array}{cc} u = y(x) & du = y'(x)dx \\ dv = (xy'(x))'dx & v = y'(x)x \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow y(x)y(x)'x|_{e^1}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} y(x)'y'(x)xdx = -\lambda |||y||^2$$

de las condiciones de contorno $y(1) = 0 \wedge y'(e^{-1}) = 0$

$$\Leftrightarrow -\int_{e^{-1}}^{1} (y'(x))^2 xdx = -\lambda |||y||^2 / \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -\int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x} (xy'(x))^2 dx = -\lambda |||y||^2$$

$$\Leftrightarrow ||xy'||^2 = \lambda ||y||^2$$

como y es función propia $y \neq 0$, además $x \in [e^{-1}, 1] \Leftrightarrow x > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{||xy'||^2}{||y||^2} = \lambda$$

de aquí ya que $x > 0$ y $||y||^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$, la familia de valores propios es mayor igual a cero.

- (iii)Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales.

  la forma autoadjunta está dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xy'\right]+\left[\lambda\frac{1}{x}\right]y=0\Leftrightarrow (xy')'+\lambda\frac{1}{x}y=0, x>0$$

con $p(x)=\frac{1}{x}$.

Sea $(\lambda,y)(\beta,z),\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ pares caracteristicas

$$(ry')'+(\lambda p)y=0.....(1) \qquad \wedge \qquad (rz')'+(\beta p)z=0.....(2)$$

multiplicando (1) por z y (2) por y

$$z(ry')'+zy(\lambda p)=0.....(2) \qquad \wedge \qquad y(rz')'+yz(\beta p)=0.....(3)$$

por otro lado notamos

$$(z(ry'))'=z'(ry')+(ry')'z \qquad \wedge \qquad (y(rz'))'=y'(rz')+(rz')'y$$

Reemplazando en (2) y (3)

$$(z(ry'))'-z'(ry')+zy(\lambda p)=0 \quad \wedge \qquad (y(rz'))'-y'(rz')+zy(\beta p)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$(z(ry'))'=z'(ry')-zy(\lambda s) \qquad \wedge \qquad (y(rz'))'=y'(rz')-zy(\beta p)$$

Restando ambas expresiones obtenemos

$(z(ry'))'-(y(rz')'=-zy(\lambda p)+zy(\beta p)$
$\Leftrightarrow$
$(\beta-\lambda)\int_{e^{-1}}^{1}p(x)y(x)z(x)dx=\beta\int_{e^{-1}}^{1}\frac{1}{x}y(x)z(x)dx-\lambda\int_{e^{-1}}^{1}\frac{1}{x}y(x)z(x)dx=(\beta-\lambda)\left\langle y,z\right\rangle$

las funciones propias asociadas serán ortogonales si se cumple

$$(\beta-\lambda)\left\langle y,z\right\rangle=0$$

Difinimos el operador con respecto a su forma adjunta

$$\widetilde{L}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$$

de aquí

$$\widetilde{L}y=-p(x)\lambda y(x)\Leftrightarrow\widetilde{L}y=-\frac{1}{x}\lambda y(x)/\cdot z\Leftrightarrow\widetilde{L}y\cdot z(x)=-\frac{1}{x}\lambda y(x)z(x) \qquad (1)$$

$$\widetilde{L}z=-p(x)\beta z(x)\Leftrightarrow\widetilde{L}z=-\frac{1}{x}\beta z(x)/\cdot y\Leftrightarrow\widetilde{L}z\cdot y(x)=-\frac{1}{x}\beta z(x)y(x) \qquad (2)$$

las condiciones de contorno quedarán definidas como :

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\mathrm{d}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]}{\mathrm{d}x}=-\lambda\dfrac{y}{x}\\ y'(e^{-1})=0\\ y(1)=0\end{array}\right| \qquad \wedge \qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{\mathrm{d}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]}{\mathrm{d}x}=-\beta\dfrac{z}{x}\\ z'(e^{-1})=0\\ z(1)=0\end{array}\right|$$

de (1) y (2)

$$(\beta-\lambda)\left\langle y,z\right\rangle=\int_{e^{-1}}^{1}\widetilde{L}z(x)dx-\int_{e^{-1}}^{1}\widetilde{L}y(x)dx\Leftrightarrow\int_{e^{-1}}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\right)z(x)dx-\int_{e^{-1}}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right]\right)y(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{e^{-1}}^{1} (xy'(x))'\, z(x)dx - \int_{e^{-1}}^{1} (xz'(x))'\, y(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx + xy''(x)z(x)dx - z'(x)y(x)dx - z''(x)xy(x)dx$$

$$= \int_{e^{-1}}^{1} xy''(x)z(x)dx - \int_{e^{-1}}^{1} xz''(x)y(x)dx$$

integrando por partes con

$$\left.\begin{array}{cc} u = xz(x) & du = (z(x) + z'(x)x)dx \\ dv = y''(x)dx & v = y'(x) \end{array}\right| \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{cc} u = xy(x) & du = (y(x) + y'(x)x)dx \\ dv = z''(x)dx & v = z'(x) \end{array}\right|$$

obtenemos

$$= xz(x)y'(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx + y'(x)z'(x)xdx - xy(x)z'(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} + \int_{e^{-1}}^{1} z'(x)y(x)dx + z'(x)y'(x)xdx$$

de las condiciones de contorno antes definidas notamos $xz(x)y'(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} = 0$ y $xy(x)z'(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} = 0$ así

$$= \int_{e^{-1}}^{1} z'(x)y(x)dx - \int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx \qquad (*)$$

tomando

$$-\int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx$$

integrando por partes con

$$\left.\begin{array}{cc} u = z(x) & du = z'(x)dx \\ dv = y'(x)dx & v = y(x) \end{array}\right|$$

$$-\int_{e^{-1}}^{1} y'(x)z(x)dx = -\, z(x)y(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} + \int_{e^{-1}}^{1} y(x)z'(x)dx$$

reemplazando en (*)

$$\int_{e^{-1}}^{1} z'(x)y(x)dx - z(x)y(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} + \int_{e^{-1}}^{1} y(x)z'(x)dx \Leftrightarrow 2\int_{e^{-1}}^{1} z'(x)y(x)dx = z(x)y(x)\Big|_{e^{-1}}^{1} = 0$$

de lo anterior las funciones propias asociadas a los valores propios diferentes son ortogonales .

- (iv) Encontrar los valores propios y las fuciones propias.

Analizamos $\lambda = 0$

Trabajamos con la EDO

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

Si $\lambda = 0$

$$x^2y'' + xy' = 0 \qquad ,x > 0$$

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' = 0/\cdot\frac{1}{x} &\Leftrightarrow xy'' + y' = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy'] = 0/\int \\ &\Leftrightarrow xy' = C_1 \\ &\Leftrightarrow y' = \frac{C_1}{x}/\int \\ &\Leftrightarrow y(x) = C_1Ln(x) + C_2 \end{aligned}$$

Usando las condiciones de contorno

$y(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 0$
$y(e^{-1}) = 0 \Leftrightarrow 0 = C_1Ln(e^{-1}) \Leftrightarrow 0 = C_1 \cdot -Ln(e) \Leftrightarrow C_1 = 0$

así $y(x) = 0$ lo cual es una contradicción, ya que $y \neq 0$ al ser una función propia , por lo tanto cero no es valor propio.

ya que definimos $\lambda \geq 0$ solo falta analizar $\lambda > 0$

Analizamos $\lambda > 0$

Definimos $\lambda = w^2$ con $w > 0$, resolviendo la EDO de Cauchy-Euler de manera usual , definimos $y(x) = Acos(wn(x)) + Bsin(wn(x))$,con $n(x) = ln(x) \Leftrightarrow y(x) = Acos(wLn(x)) + Bsin(wLn(x))$

De las condiciones de contorno obtenemos

$y(1) = A = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$y'(e^{-1}) = -sen(-w)Aw + Bwcos(-w) \Leftrightarrow Bwcos(w) \Rightarrow Bwcos(w) = 0$

Notamos que para no obtener resultados nulos $B \neq 0$ y de la definición $w > 0$

$cos(w) = 0 \Leftrightarrow w = \frac{\pi}{2}(2k-1)$, $k \in \mathbb{K}$

de aquí vemos

$y(x) = sen(\frac{\pi}{2}(2k-1)Ln(x)), k \in \mathbb{Z}$

así los valores propios

$$\left\{\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^2\right\}_{k=1}^{\infty}$$

y la funcióne propia será

$$\left\{sen(\frac{\pi}{2}(2k-1)Ln(x))\right\}_{k=1}^{\infty}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

- (v) Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión $y'' + \lambda y = 0$,.

  De las condiciones de contorno $y''(L) = 0$ obtenemos que el momento de flexión es cero y además empotrado.

- (vi) Graficar $\lambda_k, f_k, k = 1, 2, 3, 4$.

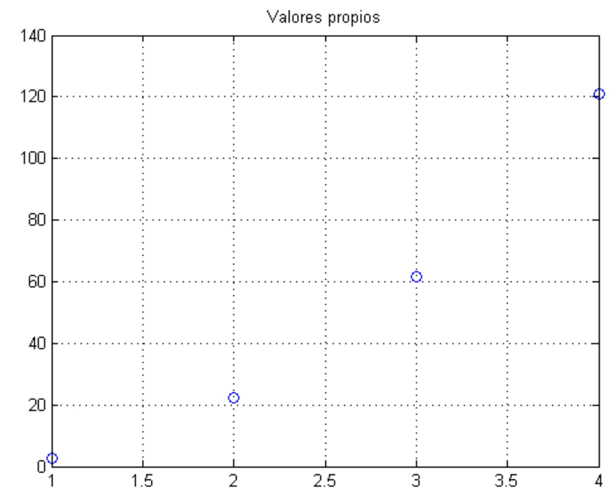

Figura 1: Valores propios para λ_k

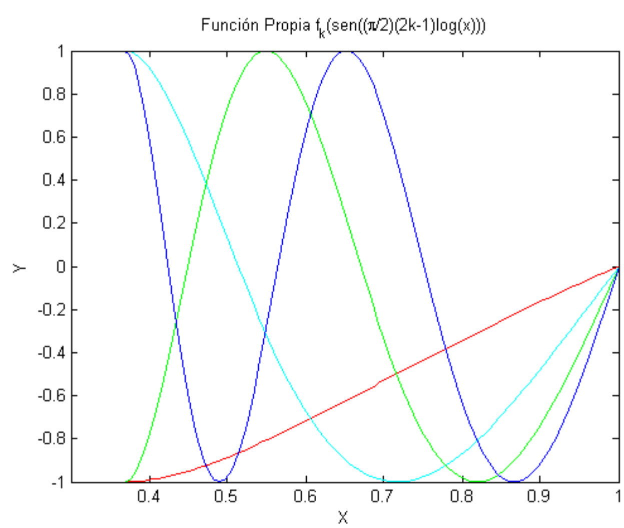

Figura 2: función propia para f_k