Problema 20

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y''(\pi) = 0$$

Solución: Sea L=$D(4)$, con $Dom(L) = \{y \ \epsilon\ \mathbb{R} : \ y'(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y''(\pi) = 0\}$

Luego, sean dos funiones $y, z \ \epsilon \ Dom(L)$ con las cuales buscaremos demostrar que se cumpla:

$$< Ly; z >=< z; Ly >$$

$$\Leftrightarrow < Ly; z > = < z; Ly >$$

$$< Ly; z >= \int_0^\pi y^{(4)} z dx$$

Aplicando integración por partes: (trabajando con la integral indefinida asociada)

$$\Rightarrow \int y^{(4)} z dx = y^{(3)} z - \int y^{(3)} z' dx$$

$$\Leftrightarrow \int y^{(4)} z dx = y^{(3)} z \ - [y'' z' - \int y'' z'' dx]$$

$$\Leftrightarrow \int y^{(4)} z dx = y^{(3)} z - y'' z' + y' z'' - \int y' z^{(3)} dx$$

$$\Leftrightarrow \int y^{(4)} z dx = y^{(3)} z - y'' z' + y' z'' - [z^{(3)} y - \int y z^{(4)} dx]$$

Ahora, evaluando en los valores de la integral original:

$$\therefore \int_0^\pi y^{(4)} z dx = \Big[y^{(3)} z - y'' z' + y' z'' - [z^{(3)} y \Big]]_0^\pi + \int_0^\pi y z^{(4)} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi y^{(4)} z dx = \Big[y^{(4)}(\pi) z(pi) + y'(\pi) z''(\pi) \Big] + \Big[y''(0) z'(0) + y(0) z^{(3)}(0) \Big] + \int_0^\pi y z^{(4)} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi y^{(4)} z dx = \int_0^\pi z^{(4)} y dx$$

Con esto demostramos que

$$\Leftrightarrow \quad < Ly; z >=< z; Ly >$$

Con lo que podemos concluir que el operador L es autoadjunto.

Ahora, considerando el teorema espectral, gracias a que es autoadjunto podemos asegurar que existe una familia numerable y creciente de valores propios. Luego, procedemos a analizar si son ortogonales las funciones propias asociadas a los valores propios: Sean $(y, \lambda), (z, \beta)$ dos pares caracteristicos tales que:

$$y^{(4)} - \lambda y = 0 \qquad (1)$$

$$z^{(4)} - t z = 0 \qquad (2)$$

Multiplicamos $(1) \cdot z$ y $(2) \cdot y$ obteniendo:

$$z y^{(4)} - \lambda z y = 0 \qquad (3)$$

$$y z^{(4)} - t y z = 0 \qquad (4)$$

Restamos (3) y (4):

$$zy^{(4)} - yz^{(4)} = (\lambda + t)zy$$

Primero calculamos la integral indefinida asociada a la nueva ecuación obtenida:

$$\Rightarrow \int zy^{(4)} - yz^{(4)}dx = (\lambda + t)\int zydx$$

$$\Leftrightarrow zy^{(4)} - z'y'' + \int z''y''dx - yz''' + y'z'' - \int y''z''dx = (\alpha - t)\int yzdx$$

$$\Leftrightarrow zy^{(4)} - z'y'' - yz''' + y'z'' = (\lambda + t)\int yzdx$$

Evaluamos el resultado en los valores de la integral definida original y calculamos usando los valores de contorno:

$$0 = (\lambda + t)\int_0^\pi yzdx$$

Lo cual podemos traducir como el wronskiano, es decir:

$$\Rightarrow (\lambda - t) < y, z >= W(\pi) - W(0)$$

Dónde, como teníamos que el valor de la integral era cero, eso implica $W(\pi) = W(0 =$ con lo que podemos asegurar la ortogonalidad.

Ahora, analizamos el signo de los valores propios planteando un par característico (λ, y) y analizando nuestra ed:

$$\Rightarrow y^{(4)} - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \; yy^{(4)} - \lambda y^2 = 0$$

Integrando respecto a x entre 0 y π

$$\Leftrightarrow \lambda \int_0^\pi y^2 dx = \int_0^\pi yy^{(4)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \int_0^\pi y^2 dx = \left[yy^{(3)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi y'y^{(3)}dx$$

$$\Leftrightarrow \lambda \int_0^\pi y^2 dx = \left[y(\pi)y^{(3)}(\pi) - y(0)y^{(3)}\right] - \left[y'(\pi)y^{(3)}(\pi) - y(0)y^{(3)}(0)\right] + \int_0^\pi y''y''dx$$

Tras reducir términos usando los datos de contorno

$$\Leftrightarrow \lambda \int_0^\pi y^2 dx = \int_0^\pi y''y''dx$$

$$\Leftrightarrow \lambda \int_0^\pi y^2 dx = \int_0^\pi (y'')^2 dx$$

Esto serán las normas de la función, por lo que reescribiendo

$$\Leftrightarrow \lambda \left\|y\right\|^2 = \left\|y^{(2)}\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\left\|y''\right\|^2}{\left\|y\right\|^2} \geq 0$$

Luego $\lambda = 0$ si y sólo si $\left\|y_0''\right\|^2 = 0$, es decir: $y_0''(x) = 0, \quad x \,\epsilon\, \mathbb{R}$ es tal que: $y_0(x) = A + Bx$

$$\Rightarrow y_0'(0) = B = 0$$

$$\Rightarrow {y_0}'(\pi) = A = 0$$
$$A = B = 0$$

En conclusión, $y_0(x) = 0,\ x \,\epsilon\, \mathbb{R}$. Sin embargo, esto nos lleva a una contradicción puesto que y_0 es una función propia. En conclusión $\lambda > 0$. Así los valores propios son positivos mayores que cero

Sea $\lambda = \alpha^4,\ \alpha > 0$ tal que
$$(D^4 - \alpha^4)y = 0$$
con $0 < x < 1$ y las condiciones de contorno mencionadas en el enunciado:
$$y'(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y''(\pi) = 0$$

Desarrollamos
$$D^4 - \alpha^4 = (D^2 - \alpha^2)(D^2 + \alpha^2)y = 0$$
Donde, como el intervalo es acotado podemos considerar una función hiperbólica
$$y(x) = Acos(\alpha x) + Bsen(\alpha x) + Ccos(\alpha x) + Esenh(\alpha x)$$

Utilizando las condiciones de contorno :
$$(1) \quad y(\pi) = Acos(\alpha\pi) + Bsen(\alpha\pi) + Ccosh(\alpha\pi) + Esenh(\alpha\pi) = 0$$
$$(2) \quad y'(0) = -\alpha Asen(\alpha 0) + \alpha Bcos(\alpha 0) + \alpha Csenh(\alpha 0) + \alpha Ecosh(\alpha 0) = 0$$
$$(3) \quad y''(\pi) = -\alpha^2 Acos(\alpha\pi) - \alpha^2 Bsen(\alpha\pi) + \alpha^2 Ccosh(\alpha\pi) + \alpha^2 Esenh(\alpha\pi) = 0$$
$$(3) \quad y^3(0) = \alpha^3 Asen(\alpha 0) - \alpha^3 Bcos(\alpha 0) + \alpha^3 Csenh(\alpha 0) + \alpha^3 Ecosh(\alpha\pi) = 0$$
Tomando (2) y (4), recordando que $\alpha > 0$, factorizamos e igualamos ambas ecuaciones obteniendo:
$$(2)\alpha[B + E] = 0$$
$$(4)\alpha^3[-B + E] = 0$$
con $\alpha > 0 \Rightarrow B = E = 0$ Por otro lado con esta nueva información trabajamos $(1)y(3)$ dónde, tras reemplazar los valores obtenidos de B y E nos resulta:
$$y(\pi) = Acos(\alpha\pi) + Ccosh(\alpha\pi)$$
$$y''(\pi) = -\alpha^2 Acos(\alpha\pi) + \alpha^2 Ccosh(\alpha\pi)$$
Así, reescribiendo las ecuaciones
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & cosh(\alpha) \\ -\alpha^2 cos(\alpha) & \alpha^2 cosh(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esto podemos apreciar que existirán infinitos valores propios asociados a infinitas funciones propias, puesto que en el sistema el rango es 1, es decir, toda subdeterminación de mayor dimensión es cero. Luego calculamos el determinante
$$\begin{vmatrix} cos(\alpha) & cosh(\alpha) \\ -\alpha^2 cos(\alpha) & \alpha^2 cosh(\alpha) \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^4 \begin{vmatrix} cos(\alpha) & cosh(\alpha) \\ -cos(\alpha) & cosh(\alpha) \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^4 cos(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & cosh(\alpha) \\ -1 & cosh(\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 cos(\alpha) cosh(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 cos(\alpha) cosh(\alpha) 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 cos(\alpha) cosh(\alpha) = 0$$

Ahora, analizando los casos tenemos $\Rightarrow cosh(\alpha) = 0$, pero $cosh(\alpha)$ no se anula para ningún α, por lo que nos queda $cos(\alpha) = 0$ para lo cual definimos $\alpha =^[(2n-1)\frac{\pi}{2}]$ con $n \epsilon \mathbb{Z}$ Finalmente la función propia la podemos expresar, con

$$\lambda_n = \left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]^4$$

$$\Rightarrow y_{n1} = cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow y_{n2} = cosh\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Por último, analizando físicamente la función como una viga, podemos asegurar de los datos de contorno que esta tendrá un extremo $(x = \pi)$ fijo y el otro extremo con pendiente cero $(x = 0)$