UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales II

TAREA 2

Estudiante
JAVIERA ARIAS GUTIÉRREZ

Docente
FREDDY PAIVA VEJAR

Antes de resolver el problema, recordamos el siguiente Teorema (1):

Sea $L = p(D)$, $p \in P_n(\mathbb{R})$ y $D = \frac{d}{dx}$. Se tiene:

i) $Ker(L)$ es un sub-espacio de $C^n(\mathbb{R})$.

ii) Si $y \in Ker(L)$, entonces $y' \in Ker(\mathbb{R})$ y, en consecuencia, $Ker(L)$ es un sub-espacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.

iii) Si $y(a) \in Ker(L) \Rightarrow (\forall \tau \in \mathbb{R})\ \ y(a-\tau) \in Ker(L)$.

Demostración.

i) Directo.

ii) $y \in C^n(\mathbb{R})$,

$$p(D) \cdot y = a_n y^{(n)} + ... + a_0 y = 0$$
$$\Leftrightarrow y^{(n)} = \left[\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + ... + \frac{a_1}{a_n} y' + \frac{a_0}{a_n} y\right]$$

El lado derecho admite una derivada, y en consecuencia, el lado izquierdo es derivable.

$$0 = Dp(D)y = p(D)(Dy)$$

Por lo tanto

$$Dy \in Ker(L)$$

Y así recursivamente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ y^{(n)} \in Ker(L)$$

iii)

$$\hat{y}(a) = y(a-\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$$
$$\hat{y}'(a) = y'(a-\tau) \cdot (1)$$
$$\hat{y}^{(n)}(a) = y^{(n)}(a-\tau) \cdot (1) = y^{(n)}(a-\tau)$$

■

Problema. Resuelva el siguiente ejercicio de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(-\pi) = 0, \;\; y(\pi) = 0$$

Con el operador

$$L = D^2, \;\; Dom(L) = \left\{ y \in C^2\left(]-\pi, \pi[\right) \cap C^1([-\pi, \pi]), \; y(\pi) = 0, \; y(-\pi) = 0 \right\}.$$

Por demostrar que L es autoadjunto, es decir

$$< Ly_1, y_2 >=< y_1, Ly_2 >, \forall y, z \in Dom(L)$$

con $y_1(x) = y_1, \;\; y_2(x) = y_2$.
Aquí el producto interior es el usual

$$< y_1, y_2 >= \int_{-\pi}^{\pi} y_1 y_2 \, dx$$

Por demostrar que

$$< Ly_1, y_2 > - < y_1, Ly_2 >= 0$$
$$\Rightarrow < y_1'', y_2 > - < y_1, y_2'' >= 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} y_2 y_1'' dx - \int_{-\pi}^{\pi} y_1 y_2'' dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [(y_2 y_1')' - y_2' y_1'] dx - \int_{-\pi}^{\pi} [(y_1 y_2')' - y_2' y_1'] dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (y_2 y_1')' dx - \int_{-\pi}^{\pi} (y_1 y_2')' dx = 0$$

Lo cual es cierto ya que $y_1, y_2 \in Dom(L)$

$$\Rightarrow < Ly_1, y_2 >=< y_1, Ly_2 >$$

1) Llevar la ecuación a su forma adjunta.
   El caso genérico es
   $$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] + \lambda r(x) y(x) = 0$$
   en este caso,
   $$\frac{d}{dx}[1 \cdot y'(x)] + \lambda \cdot 1 \cdot y(x) = 0,$$
   con $p(x) = r(x) = 1$.

2) Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un producto interior.

   Sean $\alpha, \beta \in L^2(\Omega)$, con el producto interior usual
   $$< \alpha; \beta >= \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(x)\beta(x) dx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$
   Sean $y_1, y_2 \in Dom(L)$, funciones propias arbitrarias asociadas a valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ positivos y distintos.
   De
   $$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-\pi) = 0, \;\; y(\pi) = 0.$$

se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y_1'' + \lambda_1 y_1 = 0 \\ y_2'' + \lambda_2 y_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} y_2 y_1'' + \lambda_1 y_1 y_2 = 0 \\ y_1 y_2'' + \lambda_2 y_1 y_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + \lambda_2 y_1 y_2 - \lambda_1 y_1 y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = (\lambda_1 - \lambda_2) y_1 y_2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [y_1 y_2'' - y_2 y_1''] dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{-\pi}^{\pi} y_1 y_2 dx$$

Por otro lado, resolviendo con Integración por Partes el lado izquierdo y aplicando condiciones iniciales

$$\int_{-\pi}^{\pi} [y_1 y_2'' - y_1'' y_2] dx = y_1 y_2' \int_{-\pi}^{\pi} y_1' y_2' dx - y_1' y_2 + \int_{-\pi}^{\pi} y_1' y_2' dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [y_1 y_2'' - y_1'' y_2] dx = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

Entonces

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{-\pi}^{\pi} y_1 y_2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) < y_1; y_2 >= 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$< y_1; y_2 >= 0$$

3) Encontrar los valores propios y las funciones propias.

Para $\lambda < 0$, sea $\lambda = -\omega^2,\ \omega > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$.

$$y'' - \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow y(x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$$

Aplicando condiciones de contorno

$$\left.\begin{array}{r} y(-\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{-\omega\pi} + c_2 e^{\omega\pi} = 0 \\ y(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\omega\pi} + c_2 e^{-\omega\pi} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow c_1 e^{-\omega\pi} + c_2 e^{\omega\pi} = c_1 e^{\omega\pi} + c_2 e^{-\omega\pi}$$

$$\Leftrightarrow c_1 + c_2 e^{2\omega\pi} = c_1 e^{2\omega\pi} + c_2$$

$$\Leftrightarrow e^{2\omega\pi}(c_2 - c_1) = c_2 - c_1$$

$$\Leftrightarrow e^{2\omega\pi} = 1 \vee c_2 = c_1$$

Como $e^{2\omega\pi} = 1 \Leftrightarrow \omega = 0$, y en este caso $\omega > 0$,

$$c_2 = c_1$$

Reemplazando

$$c_1 e^{\omega\pi} + c_1 e^{-\omega\pi} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 e^{\omega\pi} = -c_1 e^{-\omega\pi}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0$$

Entonces para todo $\lambda < 0$ existe única solución y es la función nula (o trivial)

$$y(x) = 0, \;\; -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Para $\lambda = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow y(x) = Ax + B$$

Aplicando condiciones de contorno

$$\left.\begin{array}{r} y(\pi) = A\pi + B = 0 \\ y(-\pi) = -A\pi + B = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow A\pi + B = -A\pi + B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = B = 0$$

Entonces si $\lambda = 0$, existe sólo solución trivial $y(x) \equiv 0, \;\; 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Para $\lambda > 0$, sea $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$$

Aplicando el Teorema (1)

$$y(x) = y(x - \pi) = c_1 \cos((x - \pi)\omega) + c_2 \sin((x - \pi)\omega)$$

Utilizando condiciones de contorno y la paridad de las funciones

$$y(\pi) = c_1 \cos((\pi - \pi)\omega) + c_2 \sin((\pi - \pi)\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$y(-\pi) = c_1 \cos(-2\pi\omega) + c_2 \sin(-2\pi\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(-\pi) = c_1 \cos(2\pi\omega) - c_2 \sin(2\pi\omega) = 0$$

Pero $c_2 \neq 0$, ya que $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Entonces

$$\sin(2\pi\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{n}{2} \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n = \frac{n^2}{4} \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y_n = c_2 \sin\left(\frac{n}{2}(x - \pi)\right)$$

Además $\sin(x)$ es una función impar, y el sistema de soluciones es

$$\left\{\sin\left(\tfrac{n}{2}(x - \pi)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

4) Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.

λ_n es positivo ya que $n^2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $4 > 0$.
Por otro lado,

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4}$$

Por demostrar que

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$$

$$n \leqslant n+1$$

$$\Rightarrow n^2 \leqslant (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{4} \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}$$

Luego

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$$

Entonces λ_n es positivo y creciente.

5) Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión $[y'' + \lambda y = 0]$. Además dar los primeros modos de vibración.

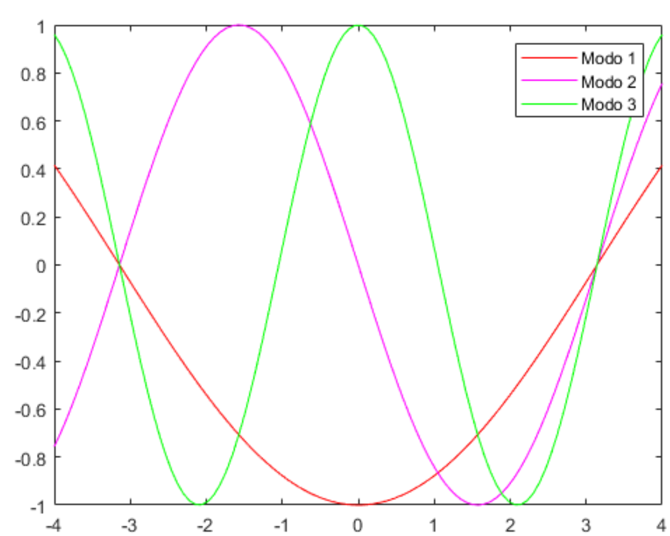
$$y_n(x) = c_2 \sin\left(\frac{n}{2}(x-\pi)\right), \quad y(\pi) = y(-\pi) = 0$$

Por la información que entregan las condiciones de contorno, se interpreta como una viga empotrada en $-\pi$ y π de largo 2π.
Los 3 primeros modos (o curvas de deflexión) están dados por

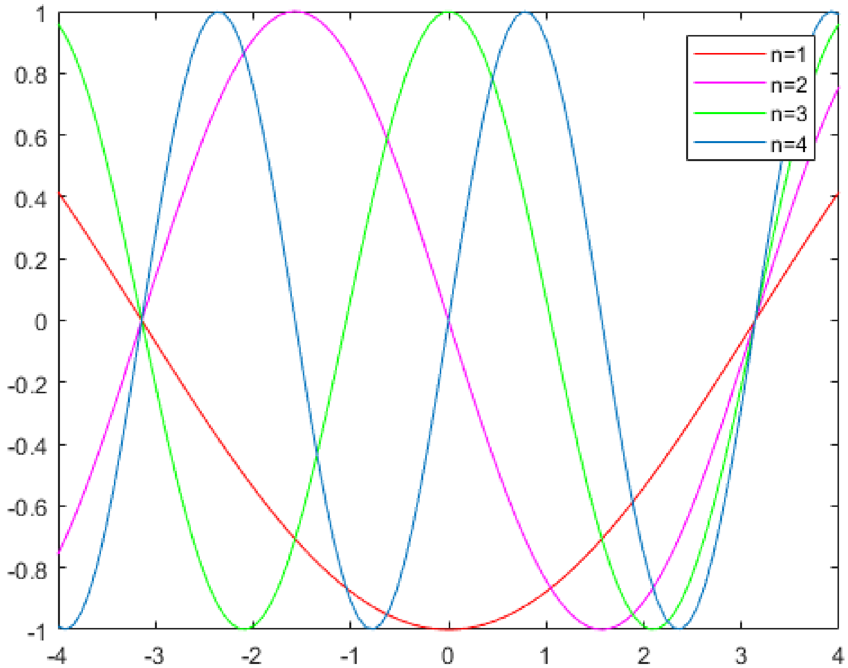
$$y_1(x) = c_2 \sin\left(\frac{1}{2}(x-\pi)\right)$$

$$y_2(x) = c_2 \sin(x-\pi)$$

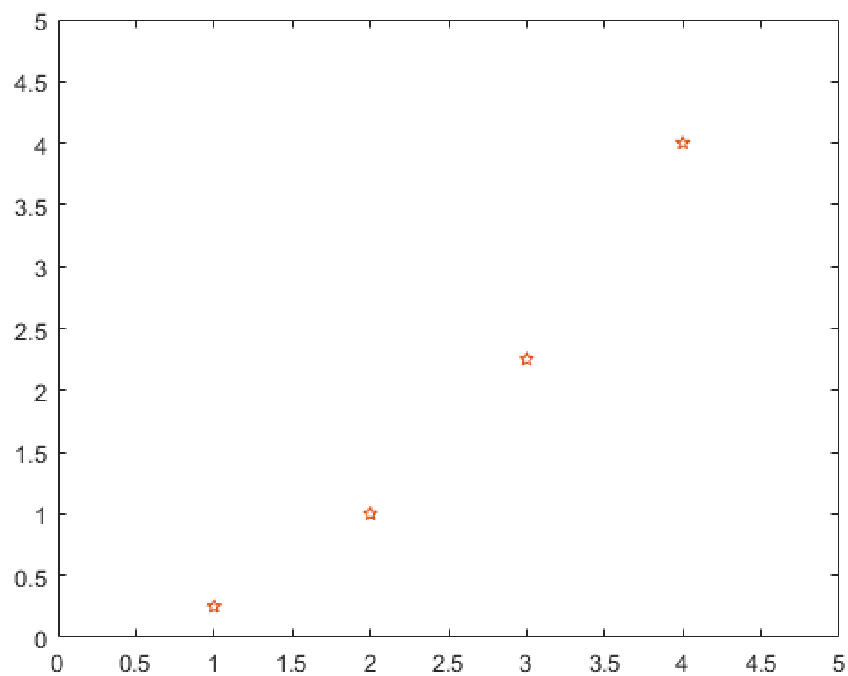
$$y_3(x) = c_2 \sin\left(\frac{3}{2}(x-\pi)\right)$$



6) Graficar



Gráfica de $f_n, \ n = 1, 2, 3, 4.$



Gráfica de $\lambda_n, \ n = 1, 2, 3, 4.$