Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales
Tarea 2
Problema de Sturm Liouville

- **Estudiante:** Paola Freire Rojas
- **Profesor:** Freddy Paiva
- **Ayudante:** Sebastian Moraga

16 de Octubre 2017

Problema de STURM-LIOVELLI a Resolver

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$
$$y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0$$

1)Primero llevaremos la ecuación a su forma adjunta

Empezaremos normalizando la EDO

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$
$$\Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \frac{\lambda y}{x^2}$$

Sea factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}$entonces $\mu(x) = x$

Luego multiplicamos por $\mu(x)$ la Edo normalizada

$$\Rightarrow xy'' + y' + \frac{\lambda y}{x} = 0, x \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[xy'] + \left[\frac{\lambda}{x} - 0\right] y = 0$$

Asi la forma adjunta de la ecuación del tipo euler es

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[xy'] + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

Siendo

$$r(x) = x, q(x) = 0, p(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

2)Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente

Sean f,g funciones continuas usaremos el siguente producto interior:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2_{\omega}(\Omega)xL^2_{\omega}(\Omega) \longrightarrow \Re$$
$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} p(x)f(x)g(x)dx$$

Nuestro operador a usar es $L_y = -\lambda$ lo que implica que $L_y = x\frac{d[xy'(x)]}{dx}$

$$Dom(L) = \left\{y \epsilon C^2(]1, e^{\pi}[) \cap C([1, e^{\pi}]) : y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0\right\} \ \Omega = (1, e^{\pi})$$

Para probar que nuestro operador es autoadjunto,se debe cumplir :

$\forall$y,zϵ $Dom(L)$ $\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle$

$$\langle Ly, z \rangle = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{x} \cdot x\frac{d}{dx}[xy'(x)] \cdot z(x)dx = 0$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\Omega} \frac{d}{dx}[xy'(x)] \cdot z(x)dx = 0$$

Integrando por partes se obtiene

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{x} \cdot Lzdx = 0$$
$$\Rightarrow \langle y, Lz \rangle = \langle Ly, z \rangle$$

Como se demostro que es autoadjunto que significa que el dominio de un operador hermítico y el de su operador adjunto coinciden totalmente ,en consecuencia por el teorema espectral existen valores propios para este psl .

Ahora analizaremos el signo que poseen los valores propios. ocupando el p.i que fijamos anteriormente ,decimos que este define una norma $\|.\|$ tq:

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_\Omega \frac{1}{x} f(x) f(x) = \|f(x)\|^2$$

Multiplicando por y e integrando con respecto Ω nuestra forma adjunta
Obtenemos

$$\int_\Omega y \frac{d[xy'(x)]}{dx} dx + \int_\Omega \lambda \frac{y^2}{x} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega y \frac{d[xy'(x)]}{dx} dx + \lambda \|y\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \|y\|^2 = - \int_\Omega y \frac{d[xy'(x)]}{dx} dx \ \ (1)$$

Integramos por partes a (1),

$$\Rightarrow \cancel{y(x)y'(x)x|_1^{e^\pi}} - \int_\Omega y'(x) x y'(x) dx = 0$$

,se cancela por las condiciones de contorno

$$\Rightarrow - \int_\Omega y'(x) x y'(x) dx = 0$$

,multiplicamos por 1

$$\Rightarrow - \int_\Omega x \cdot \frac{1}{x} \cdot y'(x) x y'(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow - \int_\Omega y \frac{d[xy'(x)]}{dx} dx = \|xy'(x)\|^2$$

Asi reemplazando en lo obtenido en (1),

$$\lambda \|y\|^2 = \|xy'(x)\|^2$$

$$\lambda = \frac{\|xy'(x)\|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

Por los valores propios son positivos y crecientes.

3)Encontrar los valores propios y funciones propias

Resolución del PSL.
Como sabemos que los signos de son$\lambda \geqslant 0$ haremos dos casos para encontrar los valores propios
Caso 1) $\lambda = 0$ la edo sería

$$x^2 y'' + xy' = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{dy^2}{dx^2} = x \frac{-dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x \frac{dy^2}{dy} = \frac{-dx^2}{dx}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{-dx}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = -ln(x) + C(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = Aln(x) + B; A, B \epsilon \Re$$

Aplicando las condiciones de contorno.

$$y(1) = B \ \Rightarrow B = 0$$
$$y(e^\pi) = Aln(x) \ \Rightarrow A \cdot \pi = 0 \Rightarrow A = 0$$

Por lo tanto la solución para este caso es $y(x) = 0$, la cual no es solución del problema al ser una función nula

Caso 2) $\lambda > 0$ el PSL sería

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

Sea $\Omega = (1, e^{\pi})$ un conjunto abierto en $\Re$,$Dom(L) = \left\{y\epsilon C^2(\Omega) \cap C([\Omega]) : y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0\right\}$
También sabemos que la solución de una EDO tipo euler es de la forma

$$x^k y^k(x) = D(D-1)(D-2)...(D-k+1)y, D = \frac{d}{dt}$$

Resolvemos la EDO haciendo un cambio de variable con

$$y(t) = e^t$$
$$e^t = x^D$$
$$y'(x) = Dx^{D-1}$$
$$y''(x) = D(D-1)x^{D-2}$$

Reeplazamos en la EDO

$$x^2D(D-1)x^{D-2} + x(D-1)x^{D-1} + \lambda x^D = 0$$
$$\Rightarrow (D(D-1) + x(D-1) + \lambda = 0)$$

$$[D(D-1) + D + \lambda] = 0$$
$$\Rightarrow D^2 + \lambda = 0,\ 0 < t < \pi$$

Sea $\lambda = \omega^2$ tal que

$$y(x) = Acos(\omega t) + Bsen(\omega t)\ A, B\epsilon\Re$$

Volviendo a nuestras variables originales

$$\Rightarrow y(x) = Acos(\omega \cdot ln(x)) + Bsen(\omega \cdot ln(x))\ A, B\epsilon\Re$$

Aplicamos las condiciones de contorno

$$y(1) = Acos(0) + Bsen(0) = 0$$
$$\Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$y(e^{\pi}) = Bsen(\omega \cdot ln(e^{\pi})) = 0$$

Como B no puede ser igual a cero pues de ser así el resultado de este PSL sería nulo y puesto que $\omega \neq 0$ al ser $\lambda > 0$. Entonces como es necesario definir que el

$$sen(\omega \cdot ln(e^{\pi})) = 0$$

Haremos que el argumento de la función sea $n\pi$,$n\epsilon N$

Así,

$$\omega \cdot ln(e^{\pi}) = n\pi$$
$$\Rightarrow \omega \cdot ln(e^{\pi}) = n \cdot \pi$$
$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot \cancel{\pi} = n \cdot \cancel{\pi} \backslash()^2$$
$$\Rightarrow \lambda = n^2\ ,n\epsilon N$$

Obteniendo finalmente la familia de valores propios y funciones propias,

$$\lambda_n = n^2, n = 1, 2, 3...$$

$$f_n = \{sen(n \cdot ln(x))\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, 2, 3...$$

4)Demostrar que las funciones propias asociadas la los valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un p.i.$L^2\omega(\Omega)$

$Dom(L) = \left\{y\epsilon C^2(]1, e^{\pi}[) \cap C([1, e^{\pi}]) : y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0\right\}$ $\Omega = (1, e^{\pi})$

$$\forall y, z\ \epsilon Dom(L) \quad \langle Ly, z\rangle = \langle y, Lz\rangle \quad (*)$$

Sean y ,z funciones propias distintas asociadas a los valores propios diferentes λ, β,se cumple que

$$L_y = -\lambda y \quad \bigwedge \quad L_z = -\beta z$$

Reemplazamos en $(*)$,

$$\langle -\lambda y, z\rangle = \langle y, -\beta z\rangle$$

Como si son reales se cumple,

$$-\lambda\langle y, z\rangle = -\beta\langle y, z\rangle$$
$$\Rightarrow (\lambda - \beta)\langle y, z\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle y, z\rangle = 0$$

Ahora verificaremos que los valores propios son reales.
Supongamos que la función propia y esta asociado a un valore propio complejo λ entonces:

$$\langle Ly, y\rangle = \langle y, Ly\rangle \quad , (y = z)$$

reemplazamos

$$\Rightarrow \langle -\lambda y, y\rangle = \langle y, -\lambda y\rangle$$
$$\Rightarrow -\lambda\langle y, y\rangle = -\overline{\lambda}\langle y, y\rangle$$
$$\Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\|y\|^2 = 0 \quad , \|y\| \neq 0$$
$$\lambda - \overline{\lambda} = 2iIm(\lambda) = 0$$
$$\rightarrow\leftarrow$$
$$\therefore \lambda \quad es \quad real$$

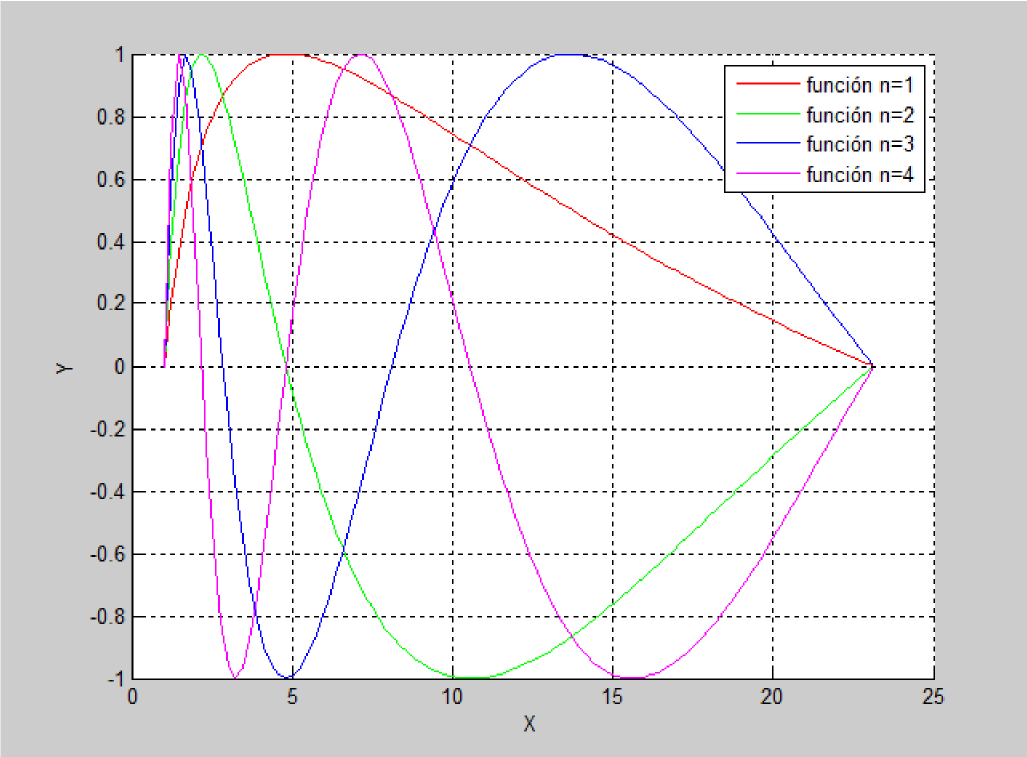
Como el producto interior entre las funciones propias asociadas es igual a cero y estos son reales se cumple que estas sean ortogonales entre sí.

5)*Interpretar los resultados como un problema de viga con deflexión*$[y'' + y\lambda = 0]$*además dar los primeros modos de vibración*

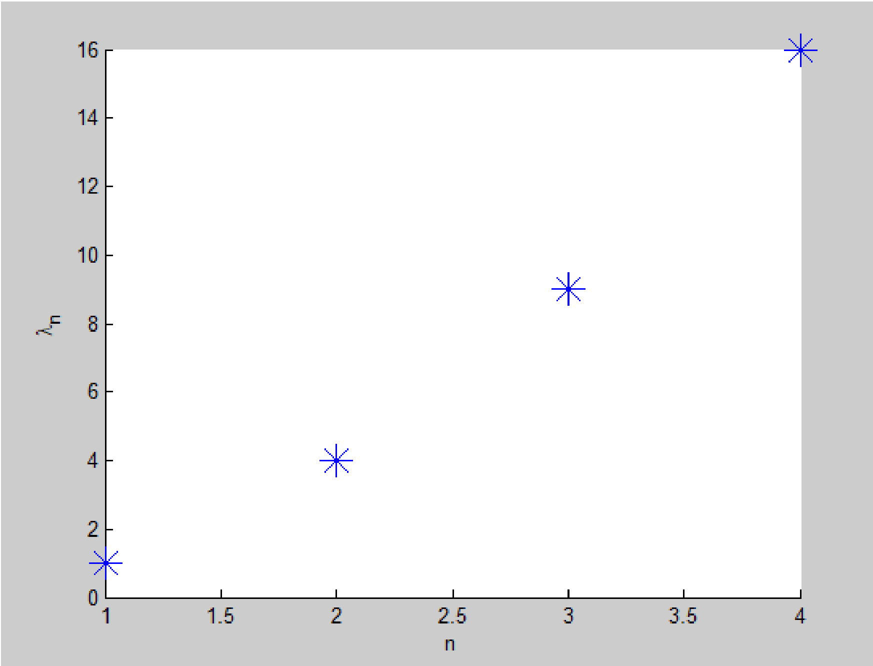
R.]Sabemos que siendo las condiciones de contorno la longitud sujeta a una carga axial P,
$\lambda = P/EI$ y que las curvas de flexión son la funcion propia correspondiente entonces:
$\lambda_n = P_n/EI = n^2, n = 1, 2, 3..$
Lo que nos implica que $P_n = n^2EI$ estás son nuestras cargas criticas que nos indican cuando nuestra viga se flexionara. Nuestra carga critica mas pequeña ,denomida carga de euler es $P_1 = EI$,con $y(x) = B \cdot sen(n \cdot ln(x))$ que se conoce como el primer modo de pandeo.

Se comprueba que con las graficas a contination en el punto
6) si la curva original tuviera alguna clase de restricción para x=4.8 ,la carga critica más pequeña es $P_2 = 4EI$,lo mismo sucederá si x=2.8 y en x=8.1 ,entonces la columna no se pandeará sino hasta que se aplique una carga critica $P_3 = 9EI$y lo mismo sucederá para n=4, si se restringe en x=2.2, x=4.8 y x=10.5 entonces la curva de deflexión tendra una carga critica de $P_4 = 16EI$

6) Graficar λ_n, f_n**,** $n = 1, 2, 3, 4$



Gráfica de funciones propias con n=1,2,3,4.



Gráfica donde se encuentran los $\lambda_n, n = 1, 2, 3, 4$