UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales II

Tarea 2

Docente

Freddy Paiva

Integrantes

Allison Mora Ortega

16 de Octubre de 2017, Concepción

Ejercicio

Para el siguiente problema de Sturm Liouville

$$\begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(2) = 0 \end{cases}$$

1. Llevar la ecuación a su forma adjunta

Resolución:

Vemos que la ecuación es una EDO orden 1 en y', utilizando factor integrante $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$ y lo multiplicamos por (1)

$$y'' + y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$e^x y'' + e^x y' + \lambda e^x y = 0$$

Luego su forma adjunta esta dada por

$$\frac{d}{dx}[e^x y'] + \lambda e^x y = 0$$

Notar que la forma regular de Sturm-Liouville y el producto interior estan dados respectivamente por

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0$$

$$< y, z >= \int_\Omega p(x)y(x)z(x)\ dx \quad , \quad \Omega = [a, b]$$

Así basandonos en la forma general obtenemos del problema $r(x) = e^x,\ p(x) = e^x,\ q(x) = 0$ y el producto interno queda definido como

$$< y, z >= \int_\Omega e^x y(x)z(x)\ dx \quad , \quad \Omega = [0, 2]$$

Es importante recordar que se utilizara notación Ω para definir el intervalo en donde el problema es válido.

2. Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.

Resolución:

Primero que nada comenzamos demostrando que el operador lineal es autoadjunto o sea,$L = L^*$ con L^* el operador adjunto de L, es decir mostramos que:

$$\forall y, z \in Dom(L) : < Ly, z >=< y, L^* z>$$

donde el dominio y de la forma adjunta se tiene que el operador lineal asociado a el problema estan dados respectivamente por

$$Dom(L) = \{f \in C^2(0, 2) \cap C^1[0, 2] : y(0) = 0, y(2) = 0\}$$

$$L = e^{-x}\frac{d}{dx}[e^x D]$$

Verificando si el operador es el correcto, para $\lambda \in \mathbb{R}, y \in Dom(L)$:

$$Ly = -\lambda y$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\frac{d}{dx}[e^x\frac{dy}{dx}] = -\lambda y \qquad /e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}[e^x\frac{dy}{dx}] = -\lambda e^x y$$

$$\Leftrightarrow e^x y'' + e^x y' + \lambda e^x y = 0$$

$$\Leftrightarrow y'' + y' + \lambda y = 0$$

Procedemos a demostrar que es autoadjunto, utilizando producto interior e integración por partes, recordando que la evaluación es en condiciones de contorno, es decir, $z(0) = y(0) = 0$, $z(2) = y(2) = 0$

$$< Ly, z >= \int_\Omega e^x \cdot e^{-x}\frac{d}{dx}(e^x y(x))z(x)dx$$

$$= \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^x y(x)]z(x)dx$$

$$= e^x y'(x)z(x)|_\Omega - \int_\Omega \frac{d}{dx}z'(x)e^x y'(x)dx$$

$$= -e^x z'(x)y(x)|_\Omega + \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^x z(x)]y(x)dx$$

$$= \int_0^2 e^x y(x)\frac{d}{dx}[e^x\frac{dz}{dx}(x)]dx =< y, Lz >$$

Como el operador es autoadjunto, el Teorema Espectral nos asegura que existen valores propios y son crecientes

Ahora multiplicamos la ecuación de Luville por y, enseguida integramos (respecto al producto interno definido) utilizando integración por partes y el cambio $y'y = \frac{1}{2}(y\cdot y)'$ para resolver la primera igualdad asi como tambien el teorema fundamental del cálculo en los resultados y evaluación de ellos.

$$\lambda\int_0^2 y^2(x)dx = -(\int_0^2 y''(x)y(x) + y'(x)y(x)dx)$$

$$\lambda \parallel y \parallel^2 = -(yy'|_\Omega - \parallel y' \parallel^2 + \frac{1}{2}y^2|_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \parallel y \parallel^2 = \parallel y' \parallel^2 \geq 0$$

Evaluando el caso en que $\lambda = 0$ se tiene que,

$$D(D+1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 x + C_2 e^{-x}$$

Aplicando condiciones de contorno,

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$y(2) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

Es decir la única solución lineal es $y(x) = 0$ en el intervalo $[0, 2]$ y no puede ser función propia ya que las funciones propias son no nulas.
Así la familia de valores propios es positiva y creciente.

3. Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un producto interno.

Resolución:

Tomo $(y, \lambda), (z, \beta)$ dos pares característicos, es decir:

$$(*) \quad [e^x y']' + \lambda e^x y = 0$$

$$(**) \quad [e^x z']' + \lambda e^x z = 0$$

Multiplico $(*)$ por z y $(**)$ por y, reordeno los terminos, resto $(*) - (**)$, y la expresión resultante la integro en el intervalo Ω Entonces el desarrollo:

$$[e^x y']' z + \lambda e^x yz = 0$$

$$[e^x z']' y + \beta e^x zy = 0$$

$$\lambda zy = -[e^x y']' z$$

$$\beta yz = -[e^x z']' y$$

$$(\lambda - \beta) e^x y(x) z(x) = [e^x z']' y - [e^x y']' z$$

$$(\lambda - \beta) \int_\Omega e^x y(x) z(x)\, dx = \int_\Omega [e^x z'(x)]' y(x) - [e^x y'(x)]' z(x)\, dx$$

$$(\lambda - \beta) \int_\Omega e^x y(x) z(x)\, dx = e^x z'(x) y(x)|_\Omega - \int_\Omega e^x y'(x) z'(x) - e^x y'(x) z(x)|_\Omega + \int_\Omega e^x y'(x) z'(x)\, dx$$

$$(\lambda - \beta) \int_\Omega e^x y(x) z(x)\, dx = e^x z'(x) y(x)|_\Omega - e^x y'(x) z(x)|_\Omega$$

$$(\lambda - \beta) \int_\Omega e^x y(x) z(x)\, dx = e^2 y(2) z'(2) - y(0) z'(0) + y'(0) z(0) - e^2 y'(2) z(2) = 0$$

Donde La ultima igualdad es debido a las condiciones iniciales $y(2) = z(2) = 0$ y $y(0) = z(0) = 0$ entonces se verifica que las funciones propias asociadas a diferentes valores propios son ortogonales respecto al producto interno.

4. Encontrar los valores propios y las funciones propias.

Resolución:

Para el cálculo de los valores propios, al hacer completación de cuadrados en nuestro problema,

$$[(D+\frac{1}{2})^2+(\lambda-\frac{1}{4})]y=0 \qquad (***)$$

La ecuación se reduce mediante, un polinomio al que llamamos p,así se define:

$$p(D)=[(D+\frac{1}{2})^2+(\lambda-\frac{1}{4})]$$

De aquí si multiplicamos nuestro polinomio p por la variable y, esto sería igual a 0 por lo dicho en (***) y si tomanos $y=e^{-\frac{1}{2}}z(x)$ nos queda la expresión

$$p(D)y=p(D)e^{\frac{-x}{2}}z(x)=0$$

$$\Rightarrow p(D)e^{\frac{-x}{2}}z(x)=0$$

Evaluando en $(D-\frac{1}{2})$

$$p(D-\frac{1}{2})e^{\frac{-x}{2}}z(x)=e^{\frac{-x}{2}}[D^2+(\lambda-\frac{1}{4})]z(x)=0$$

lo que nos resulta es un problema de Sturm Liouville,

$$\begin{cases} z''+(\lambda-\frac{1}{4})z=0\ , \quad 2<x<0 \\ \qquad\qquad z(0)=0,\ z(2)=0 \end{cases}$$

Donde las condiciones de contornos se definen ya que

$$y(0)=e^{-\frac{1}{2}}z(0)=0$$

$$y(2)=e^{-\frac{1}{2}}z(2)=0$$

$$\Leftrightarrow z(0)=0\ \ , \qquad z(2)=0$$

Como ya sabemos que los valores propios son positivos, se analiza el caso en el que $\lambda>\frac{1}{4}$

Suponiendo $(\lambda-\frac{1}{4})=\omega^2$ tengo

$$z''+\omega^2 z=0$$

$$\Rightarrow z(x)=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$$

Aplicando condiciones de contorno

$$z(0)=0=C_1$$

$$z(2)=0=C_2\ sin\ (2\omega)$$

$$\Leftrightarrow C_2=0 \quad \vee \quad \sin\ (2w)=0$$

Si $C_2=0$ la única solucion lineal $z(x)=0$ la cual no es posible por Teorema Espectral por lo que debemos resolver ecuación transcental de los valores propios

$$\sin(2w)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = n\pi$$
$$\Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{2}$$
$$\Rightarrow z(x) = \sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

Ahora como utilizamos un reemplazo volvemos a y(x)

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}} z(x) = e^{\frac{-x}{2}} \sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

Luego como $w_n^2 = (\frac{n\pi}{2})^2 = \lambda_n - \frac{1}{4}$
El conjunto de valores propios y las funciones propias

$$\{\lambda_n = \frac{(n\pi)^2 + 1}{4}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{f_n = e^{\frac{-x}{2}} \sin(\frac{n\pi}{2}x)\}_{n=1}^{\infty}$$

para $n \in \mathbb{N}$, y notamos que la familia de funciones propias es impar.

5. Interprete los resultados como problema de viga con deflexión $[y'' + \lambda y = 0]$. Además dar los tres primeros modos de vibración

Resolución:

Analizando la ecuación

$$\frac{d}{dx}[e^x y'] + \lambda e^x y = 0$$

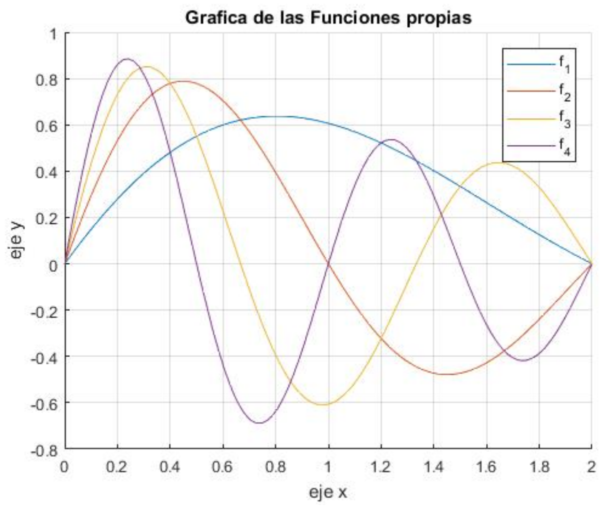
ahora para el problema Sturm-Liouville que estamos resolviendo, se puede interpretar como una columna empotrada en ambos extemos, donde su longitud es 2,para este caso se dice que la pendiente de la columna en el espacio puede variar pero sus extremos se mantienen fijos así vemos que por el cálculo ya hecho que las curvas de deflexión estan dadas por $y_n(x) = e^{\frac{-x}{2}} \sin(\frac{n\pi}{2}x)$, $n = 1, 2, 3, ...$ donde el peso P, el cual es el causante de la deflexión toma el mismo valor de los valores propios $\lambda_n = \frac{(n\pi)^2+1}{4}, 4$, $n = 1, 2, 3, ...$, esto significaría que la columna se pandeara o flexionará solo cuando la fuerza compresiva sea uno de los valores $P_n = \frac{(n\pi)^2+1}{4}$, luego los primeros modos de vibración estan dados por:

$\rightsquigarrow$Primer modo de vibración: $e^{\frac{-1}{2}} \sin(\frac{\pi}{2}x)$

$\rightsquigarrow$Segundo modo de vibración: $e^{-1} \sin(\pi x)$

$\rightsquigarrow$Tercer modo de vibración: $e^{\frac{-3}{2}} \sin(\frac{3\pi}{2}x)$

6. Graficar $\lambda_n,\ f_n,\ n = 1, 2, 3, 4$



Figuras 1: funciones propias.

Donde la Figura 1 fue realizada mediante Matlab.

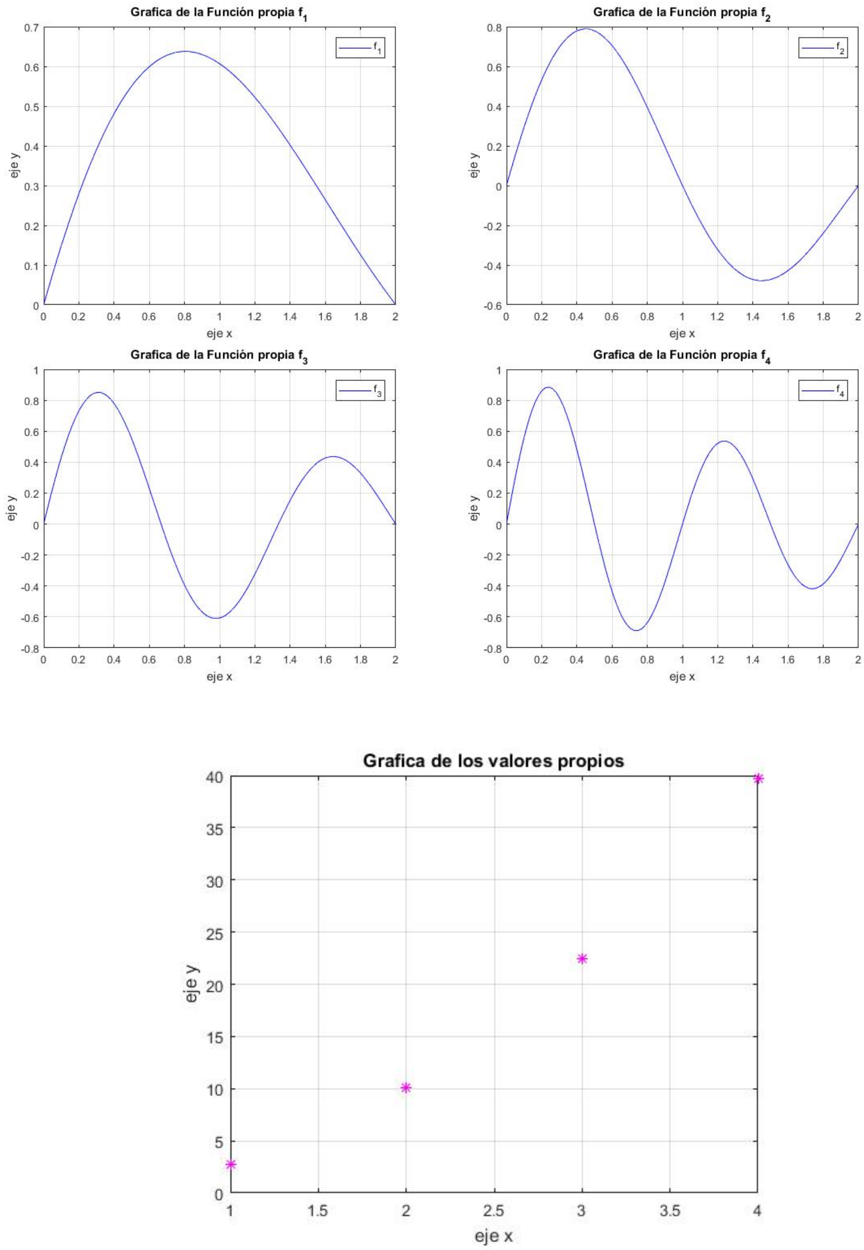


Figura 6: Valores Propios.

Donde la Figura 6 fue realizada mediante Matlab.