UNIVERSIDAD DE CONCEPCÍON
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

TAREA N2 DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Profesor:Freddy Paiva.
Ayundante de tareas: Sebastian Moraga.

Nombre:Ignacio Ortega.
Carrera: Ingenieria Civil Matemática.
Fecha de entrega:13 de Octubre.

Presentacion del problema.

Para todos los ejercicios se va concicerar la edo:

$$y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0 \tag{1}$$

Condiciones iniciales

$$y(0) = (5) = 0$$

Llevar la ecuacion a su forma adjunta.

Demotrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.

Demostrar que sus funciones propias asociadas a un valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un producto interior $L^2\ \omega\ (\Omega)$

Sea el producto punto definido en el intervalo $[0, 5]$ como :

$$< f(x), g(x) >= \int_0^5 f(x)g(x)dx$$

Encontrar valores propios y funciones propias

Interprete los resultados como un problema de viga con deflexion, dan los 3 primeros modos de vibracion.

Graficar $\lambda, f_n \ n = 1, 2, 3, 4, ...$

1. Llevar la ecuacion a su forma adjunta.

Solucion:
La ecuacion (1) multiplico por μ

$$y''\mu + 2\mu y' + (\lambda + 1)\mu y = 0 \tag{2}$$

Sea la forma adjunta de cualquier edo

$$(y'r)' + (\lambda p - q)y) = 0 \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow y''r + y'r' + \lambda py - qy = 0 \tag{4}$$

Entonces:

$$r' = 2\mu; r = \mu$$

Derivamos $r(x)$

$$r' = \mu'$$
$$r' = 2\mu$$
$$\Rightarrow 2\mu = \mu'$$
$$\Rightarrow \mu = e^{2x}$$

Multiplicamos la edo por el factor integrante $\mu = e^{2x}$ y reducimos terminos:

$$(y'e^{2x})' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$$

2. Demotrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.

$$y''(x) + 2y'(x) + (\lambda + 1)y(x) = 0 \tag{5}$$

Como la edo es de coeficientes constantes suponemos que $y(x)$ es de la forma e^{mx} y lo reemplazamos en (1)

$$e^{xm}(m^2 + 2m + \lambda + 1) = 0$$
$$\Rightarrow 2m = -2 \pm \sqrt{(4 - 4(\lambda + 1))}$$

Recordar que e^{xm} es diferente de cero para cualquier x variable y m constante.

$$\Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{-\lambda}$$

Entonces hay tres casos:
$\lambda = 0$
$\lambda > 0$
$\lambda < 0$

2.1. Caso $\lambda = 0$

En este caso, se deduce que $m = -1$ con multiplicidad algebraica dos , luego la solucion de $y(x)$ es :

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Obs:
$e^{\alpha} \neq 0$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$
Aplicamos las condiciones inciales:
Aplicando $y(0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = C_1 e^{-x}$$
$$\Rightarrow C_1 = 0$$

Entonces se tiene que $y(x) = C_2 x e^{-x}$,aplicando $y(5) = 0$

$$0 = 5C_2 e^{-5}$$
$$\Rightarrow C_2 = 0$$

Como $C_1 = 0$y $C_2 = 0$, entonces $\lambda = 0$ no es valor propio.

2.2. caso $\lambda < 0$

En este caso $m = -1 \pm \sqrt{-\lambda}$, luego $y(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{-\lambda})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{-\lambda})x}$ Aplicando condiciones iniciales:
$y(0) = 0$

$$0 = C_1 + C_2 \tag{6}$$

$$y(5) = 0$$
$$\Rightarrow 0 = C_1 e^{(-1+\sqrt{-\lambda})5} + C_2 e^{(-1-\sqrt{-\lambda})5}$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{C_1 e^{10\sqrt{-\lambda}} + C_2}{e^5 e^{5\sqrt{-\lambda}}}$$

Despejando C_2 en (6) y sustituimos C_1 en la ultima ec. escrita:

$$0 = \frac{C_2(-e^{10\sqrt{-\lambda}} + 1)}{e^5 e^{\sqrt{5\lambda}}}$$

$\Rightarrow C_2 = 0$ ó $(1 - e^{10\sqrt{-\lambda}}) = 0$. Como $e^c = 1 \Leftrightarrow c = 0$, ademas $10\sqrt{-\lambda} \neq 0$ (por que $\lambda < 0$ por hipotesis)entonces $C_2 = 0$. $C_1 + C_2 = 0$ y $C_2 = 0$, entonces $C_1 = 0$. Luego $\lambda < 0$ no es valor propio.

2.3. caso $\lambda > 0$

Se tiene que $m = -1 \pm \sqrt{-\lambda}$ luego $m = -1 \pm i\sqrt{\lambda}$.
y(x) queda definido por $y(x) = C_1 e^{-x}\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 e^{-x}\sin(\sqrt{\lambda}x)$
Aplicando condiciones iniciales $y(0) = 0$

$$0 = C_1$$

Entonces y(x) queda de la forma:

$$y(x) = C_2 e^{-x}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando y(5)=0;

$$0 = y(5) = C_2 e^{-5}\sin(\sqrt{\lambda}5)$$

Para que λ sea valor propio $C_2 \neq 0$ entonces :

$$\sin(\sqrt{\lambda}5) = 0$$

$\Rightarrow 5\sqrt{\lambda} = n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$
Despejando λ se obtiene que:

$$\lambda_n = \frac{(n\pi)^2}{25}$$

Con esto se prueba que:

λ es valor propio.

$\lambda > 0$.

λ es creciente.

3. Demostrar que sus funciones propias asociadas a un valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un producto interior L^2 ω (Ω)

Sea el producto punto definido en el intervalo $[0, 5]$ como :

$$< f(x), g(x) >= \int_0^5 f(x)g(x)dx$$

Sea $y(x)$,$g(x)$ dos funciones propias para los valores propios α y β respectivamente, entonces se tiene que cumplen con la edo adjunta:

$$(y'(x)e^{2x})' + e^{2x}y(x) + e^{2x}\alpha y(x) = 0 \tag{7}$$

$$(z'(x)e^{2x})' + e^{2x}z(x) + e^{2x}\beta z(x) = 0 \tag{8}$$

Luego multiplico la ecuacion (7) por z y la ecuacion (8) por y, luego despejamos :

$$z(x)(y'(x)e^{2x})' + e^{2x}y(x)z(x) = -\alpha e^{2x}y(x)z(x) \tag{9}$$

$$y(x)(z'(x)e^{2x})' + e^{2x}y(x)z(x) = -\beta e^{2x}y(x)z(x) \tag{10}$$

Restando:

$$z(x)(y'(x)e^{2x})' - y(x)(z'(x)e^{2x})' = \beta e^{2x}y(x)z(x) - \alpha e^{2x}y(x)z(x)$$

$$\Leftrightarrow z(x)(y'(x)e^{2x})' - y(x)(z'(x)e^{2x})' = (\beta - \alpha)e^{2x}y(x)z(x) \tag{11}$$

Sumamos y restamos $z'(x)y'(x)e^{2x}$:

$$z'(x)(y'(x)e^{2x}) + z(x)(y'(x)e^{2x})' - z'(x)(y'(x)e^{2x}) - y(x)(z'(x)e^{2x})' = (\beta - \alpha)e^{2x}y(x)z(x)$$

$$\Leftrightarrow z'(x)[y'(x)e^{2x}] + z(x)[y'(x)e^{2x}]' - y'(x)[z'(x)e^{2x}] - y(x)[z'(x)e^{2x}]' = (\beta - \alpha)e^{2x}y(x)z(x)$$

$$\frac{d}{dx}(z(x)(y'(x)e^{2x})) - \frac{d}{dx}(y(x)(z'(x)e^{2x})) = (\beta - \alpha)e^{2x}y(x)z(x)$$

$$\frac{d}{dx}(z(x)(y'(x)e^{2x}) - y(x)(z'(x)e^{2x})) = (\beta - \alpha)e^{2x}y(x)z(x) \tag{12}$$

Aqui integramos a ambos lado con intevalo $[0, 5]$:

$$\int_0^5 \frac{d}{dx}(z(x)(y'(x)e^{2x}) - y(x)(z'(x)e^{2x}))dx = \int_0^5 (\beta - \alpha)y(x)z(x)e^{2x}dx \tag{13}$$

Usando el teorema fundamental del calculo en (13):

$$z(x)(y'(x)e^{2x})\Big|_0^5 - y(x)(z'(x)e^{2x})\Big|_0^5 = (\beta - \alpha)\int_0^5 e^{2x}y(x)z(x)dx$$

Recordando que las funciones propias evaluadas en 0 y 5 son nulas por las condiciones iniciales:

$$0 = (\beta - \alpha)\int_0^5 e^{2x}y(x)z(x)dx \tag{14}$$

Como β y α son distintos entonces:

$$0 = \int_0^5 e^{2x}y(x)z(x)dx \tag{15}$$

En conclusion $y(x)$,$z(x)$ son ortogonales con respecto al peso e^{2x}.

4. Interprete los resultados como un problema de viga con deflexion, dan los 3 primeros modos de vibracion.

Las funciones propias son de la forma $y(x) = e^{-x}\sin(\sqrt{\lambda}x)$, con $\lambda_n = \dfrac{(n\pi)^2}{25}$, y tenemos las condiciones iniciales $y(0) = (5) = 0$.
Primero las condiciones iniciales establecen en que condiciones estan cada uno de los extremos de la viga,es decir siesta apoya, apernada o en el aire. Como y(x) indica la deflexion de la viga horizontal, es decir en que altura esta la particula ubicada en x de la viga horizontal.
Ahora como no hay deflexion en los extremos debido a las condiciones iniciales que tenemos, se deduce que la viga horizontal esta empotrada o apoyada en ambos extremos.
Derivamos y(x) para saber si en los extremos sus derivadas son igual a 0 y de esa manera deducir las condiciones de la viga:

$$y'(x) = -e^{-x}\sin(\frac{xn\pi}{5}) + \frac{\pi n\cos(\frac{xn\pi}{5})}{5e^{-x}}$$

Evaluamos en $x = 0$ y $x = 5$.

$$y'(0) = \frac{n\pi}{5} \neq 0$$

$$y'(5) = \frac{(-1)^n\pi e^{-5}}{5} \neq 0$$

$$y''(0) = \frac{-2n\pi}{5} \neq 0$$

$$y''(5) = -2\frac{(-1)^n\pi e^{-5}}{5} \neq 0$$

$$y^{(3)}(0) = \frac{75\pi n - (\pi n)^3}{125} \neq 0$$

$$y^3(5) = \frac{75\pi n e^{-5}(-1)^n - (\pi n)^3 e^{-5}(-1)^n}{125} \neq 0$$

Recordar que λ_n es una fuerza que se aplica a la viga. Además cabe recalcar que cuando $\lambda \neq (\frac{(n\pi)}{5})^2$, $y(x) = 0$, luego cuando $\lambda = (\frac{(n\pi)}{5})^2$entonces $y(x) = C_2 * e^{-x}\sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Resumiendo:
Pareciera que esta empotrada o apoyada por que $y(0) = y(5) = 0$ pero no es ninguna de las dos ya que sus derivas superiores en los extremos es distinto de cero para una λ_n fijo.
Cuando se aplica una $fuerza = \lambda = (\frac{(n\pi)}{5})^2$ la viga se deflexiona, en caso contrario la viga no sufre ninguna deflexion.

5. Graficar $\lambda, f_n \ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$