FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMÁTICAS.

DEPARTAMENTO DE INGERNIERÍA MATEMÁTICA .

ECUACIONES DIFERENCIALES II.

TAREA II

Profesor: Freddy Paiva

Vicente Márquez Sanders
Estudiantes de pregrado Ingeniería Civíl Matemática.

Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

$$y(1) = 0, y(5) = 0$$

Resolver

1. Llevar la ecuación a su forma autoadjunta general
   Solución:

   A la ecuación $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ le buscamos su factor integrante $\mu(x)$ tal que

   $$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

   Así obtenemos: $xy'' + y' + \lambda \frac{y}{x} = 0$ con $p(x) = x, q(x) = 0, s(x) = \frac{1}{x}$
   Por lo tanto su forma autoadjunta es:

   $$\frac{d}{dx}(xy') + \lambda \frac{y}{x} = 0, \qquad x \neq 0 \tag{1}$$

2. Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente
   Solución:

   De lo anterior obtenemos nuestro operador $L = x\frac{d}{dx}(xy')$ el cual es autoadjunto con respecto al producto interior $< \cdot, \cdot >$: $L^2_\omega = \int_\Omega s(x)f(x)g(x)\,dx$ donde:
   $Dom(L) = \{y \in C^2(]1,5[) \cap C([1,5]) : y(1) = y(5) = 0\}$,y $\Omega =]1,5[$
   Es decir:

   $$\forall y, z \in Dom(L), < Ly, z >=< y, Lz >$$

   En efecto:

   $$< Ly, z >= \int_\Omega s(x)Ly(x)z(x)\,dx$$
   $$\Longleftrightarrow < Ly, z >= \int_\Omega \frac{d}{dx}(xy')z(x)\,dx$$

   Integrando por parte

   $$< Ly, z >= \int_\Omega \frac{1}{x}y(x)Lz(x)\,dx$$
   $$\Longleftrightarrow < Ly, z >=< y, Lz >$$

Ahora, gracias al teorema espectral existen valores propios u_n crecientes pertenecientes al $Dom(L)$ tal que $Ly_n = u_n y_n$ con $y_n \in Dom(L)$

De tal modo que nuestra forma autoadjunta general queda:

$$x\frac{d}{dx}(xy_n'(x)) = -u_n y_n(x)$$

Multiplicando por $\frac{1}{x}, x \neq 0$

$$\frac{d}{dx}(xy_n'(x)) = -u_n \frac{y_n(x)}{x}$$
$$\iff xy_n'' + y_n' + u_n \frac{y_n}{x} = 0$$

Ahora, analizamos los signos de los valores propios usando (1) y multiplicando por y

$$y\frac{d}{dx}(xy') + \lambda \frac{y^2}{x} = 0$$

Usando la forma de la ecuacíon de Sturm-Liouville donde $p(x) = x$, $s(x) = \frac{1}{x}$ e integrando en Ω con respecto a x obtenemos

$$y(py')|_{\Omega} - \int_{\Omega} p(y')^2\, dx + \lambda \int_{\Omega} sy^2\, dx = 0$$
$$\iff \lambda = \frac{< p, (y')^2 >}{< s, y^2 >}$$

Con $p(x) > 0, s(x) > 0$ en Ω
Por lo tanto $\lambda \geq 0$

3. Calcular el par caracteristico
   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ con $t = ln(x)$, $x \in]1, 5[$,$t \in]0, ln(5)[$

$$dx = e^t dt \iff e^{-t} = \frac{dt}{dx}$$

Luego, calculando las derivadas de y con respecto a x usando regla de cadena nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}e^{-t} \\ \iff \frac{dy^2}{dx^2} &= e^{-2t}\frac{dy^2}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

De tal forma que si reemplazamos en $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{-2t}y''(t)e^{2t} - e^{2t}y'(t)e^{-2t} + e^{t}y'(t)e^{-t} + \lambda y(t) = 0 \\ \iff y''(t) + \lambda y(t) = 0 \\ D^2 + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Del item anterior demostramos que los valores propios λ son no negativos $(\lambda \geq 0)$
Ahora, si $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} D^2 = 0 \\ \iff y(t) = At + B, \qquad A, B \in R \\ \iff y(x) = Aln(x) + B \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y(1) = 0 \iff B = 0 \\ y(5) = 0 \iff Aln(5) = 0 \iff A = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\lambda = 0$, existe unica solución la cual es la función nula

Luego, para analizar los $\lambda > 0$ usamos a $\lambda = w^2$ con $w \in R^+$
Así, resolviendo la EDO :

$$\begin{aligned} D^2 + w^2 = 0 \\ \iff y(t) = Acos(wt) + Bsin(wt), \qquad A, B \in R \\ \iff y(x) = Acos(ln(x)w) + Bsin(ln(x)w) \qquad (*) \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando las condiciones de contorno sobre $(*)$ y por propiedad de la función seno y coseno

$$\begin{aligned} y(1) = 0 \iff A = 0 \\ y(5) = 0 \iff Bsin(ln(5)w) = 0 \end{aligned}$$

Luego, por el teorema espectral sabemos que $B \neq 0$ así:

$$\begin{aligned} sin(ln(5)w) &= 0 \\ \Longleftrightarrow ln(5)w &= 0 + n\pi \\ \Longleftrightarrow w &= \frac{n\pi}{ln(5)}, n \in N \end{aligned}$$

Por lo tanto, ls solución general es

$$y_n = Bsin(\frac{ln(x)}{ln(5)}n\pi), \qquad B \in R, x \in \Omega, n \in N$$

4. Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios son ortogonales con respecto a un producto interior $L^2_{\omega}(\Omega)$
Solución:
Sean las funciones propias $y(x), z(x)$ con valores propios asociados distintos λ, β respectivamente

$$(py')' + (\lambda s - q)y = 0 \tag{2}$$
$$(pz')' + (\beta s - q)z = 0 \tag{3}$$

Multiplicando y a (3)y z a (2) obtenemos:

$$z(py')' + (\lambda s - q)zy = 0 \tag{4}$$
$$y(pz')' + (\beta s - q)yz = 0 \tag{5}$$

como:

$$z(py')' = (z(py'))' - pz'y' \tag{6}$$
$$y(pz')' = (y(pz'))' - pz'y' \tag{7}$$

Restando (4) y (5)

$$(\lambda - \beta)syz = y(pz')' - z(py')'$$

y usando (6) y (7)

$$[p(yz' - zy')]' = [pW[y, z]]'$$

Integrando entre $x = a, x = b$

$$(\lambda - \beta)\int_a^b y(x)z(x)s(x)\,dx = p(b)W(b) - p(a)W(a)$$

Así, aplicando esto en nuestra ecuacion diferencial y con las condiciones de contornos $y(1) = 0, y(5) = 0$ obtendremos:

$$p(5)W(5) - p(1)W(1) = 0$$

Esto implica que $\int_a^b y(x)z(x)s(x)\,dx = 0$. Por lo tanto las funciones propias son ortogonales para valores propios diferentes

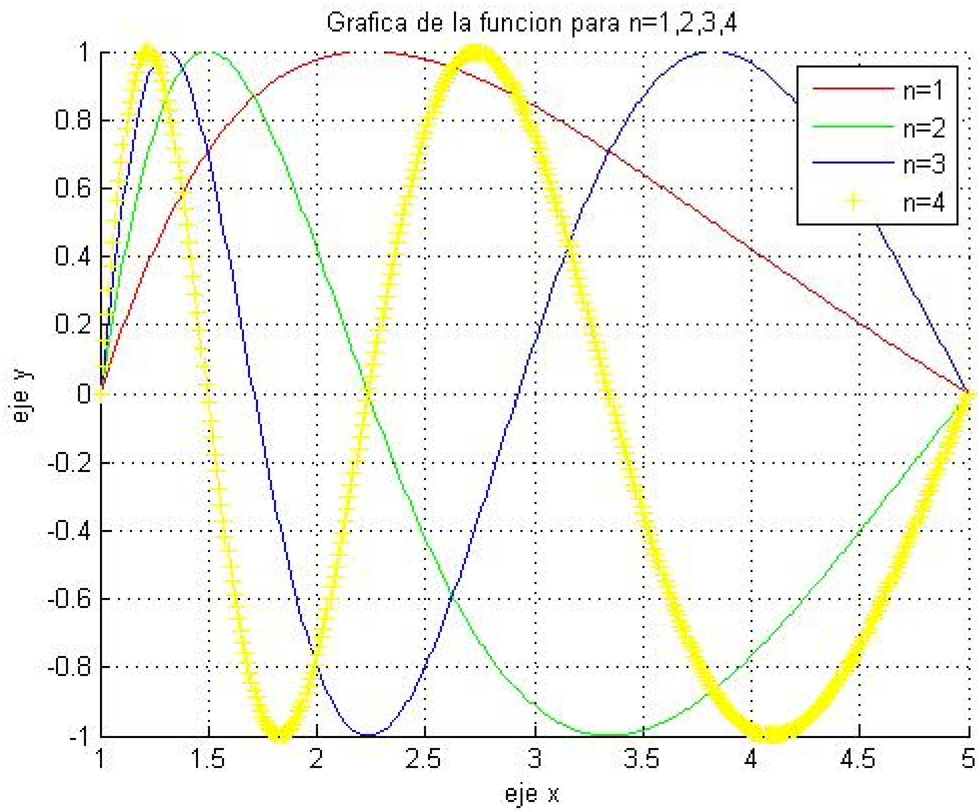
Grafica de la funcion para n=1,2,3,4
n=1
n=2
n=3
n=4
eje y
eje x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Figura 1: