Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Tarea 1

Autor

Alfredo Herrera
Vicente Márquez

Docente
Freddy Paiva

I. Formulación del Problema

$$u_x + u_y = u^2$$
$$u(x,0) = \tanh(x)$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto , un conjunto por definir donde la solución estará bien definida y sea de clase $\mathrm{c}^1(\Omega)$

II. Utilización de las integrales primera para resolver la EDP
El *Sistema Característico* asociado es:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{u^2} \tag{1}$$

De (1) la Primera integral primera :

$$dx = dy \Leftrightarrow dx - dy = 0 \Leftrightarrow x - y = c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

así:

$$\varphi(x,y,u) = x - y \tag{2}$$

De (1) la Segunda integral primera :

$$dx = \frac{du}{u^2} \Leftrightarrow d(x + \frac{1}{u}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{u} = c_2 \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

así:

$$\phi(x,y,z) = x + \frac{1}{u} \tag{3}$$

III. Solución General
Por teorema:

$$F(x-y) = x + \frac{1}{u} \tag{4}$$

IV. Independencia funcional
Tenemos que :

$$\bigtriangledown\varphi = (1,-1,0)$$
$$\bigtriangledown\phi = (1,0,-u^{-2})$$

por lo que $\{\bigtriangledown\varphi, \bigtriangledown\phi\}$ son L.i en $\mathbb{R}^3$, es decir funciones independientes.

V. Determinación de la solución principal
Como $u = \tanh(x)$, cuando $y = 0$,:

$$F(x) = x + \frac{1}{\tanh(x)} \tag{5}$$

De (4) y (5) tenemos:

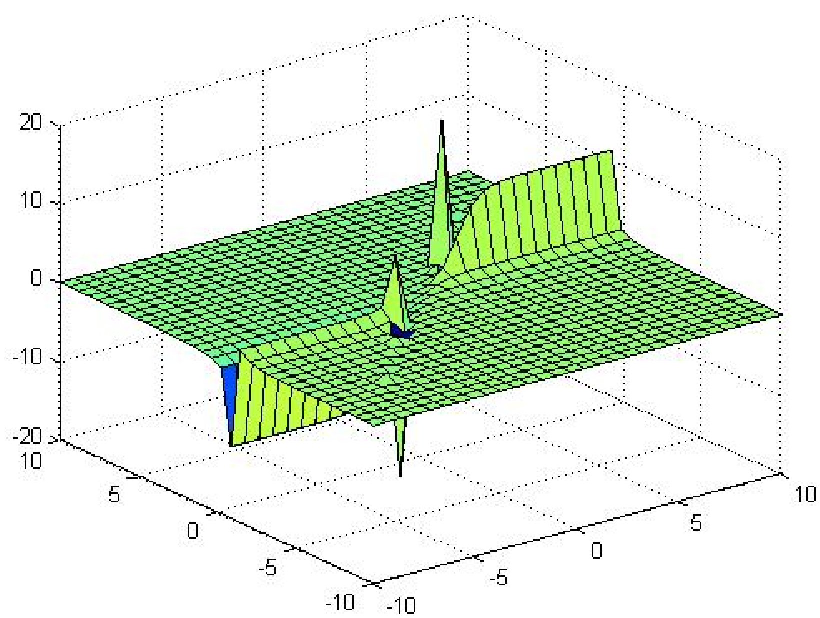
$$x - y + \frac{1}{\tanh(x-y)} = x + \frac{1}{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{1 - y\tanh(x-y)}{tanh(x-y)}$$

así se tiene que la curva integral correspondiente a la solución es:

$$u(x,y) = \frac{\tanh(x-y)}{1 - y\tanh(x-y)} \tag{6}$$

Figura 1: Gráfica de la superficie integral



Resolver la siguiente ED
Considere el problema de Cauchy

$$uu_x + u_y = u$$

$$u(x,0) = 2x$$

I. Resolvemos mediante parametrización

Sea
$$\Gamma := \{(x,y,z) = (s,0,2s), s \in \mathbb{R}\}$$
Luego, mi PVI característico es:
$$\frac{dx}{dt} = u \text{ , } x(s,0) = s$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 \text{ , } y(s,0) = 0$$
$$\frac{du}{dt} = u \text{ , } u(s,0) = 2s$$
Resolviendo el sistema con respecto a y(s,t) y usando la condición inicial notamos que:
$$y(s,t) = t + f(s)$$
$$y(s,0) = 0$$
$$\iff y(s,t) = t$$
Del sistema con respecto a u(s,t) y usando la condición inicial nos queda que:
$$\frac{du}{dt} - u = 0$$
$$\iff (\frac{d}{dt} - 1)u = 0$$
Integrando y usando el PVI característico
$$\iff u(s,t) = c(s)e^t$$
$$u(s,0) = 2s = c(s)$$
$$\iff u(s,t) = 2se^t$$
Así, encontramos x(s,t) usando el resultado anterior:
$$\frac{dx}{dt} = u = 2se^t$$
$$\iff x(s,t) = 2s(e^t + h(s))$$
$$x(s,0) = s = 2s(1 + h(s))$$
$$\iff h(s) = \frac{-1}{2}$$
$$\iff x(s,t) = 2se^t - s$$

II. Luego, representando x,y como s,t se tiene:

$$s = \frac{x}{2e^y - 1}$$
$$t = y$$

Así, el cambio de variable existe y es único si

$$y \neq -ln(2)$$

III. Así la solución del problema es:

$$u(x, y) = \frac{2xe^y}{2e^y - 1}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, y \neq -ln(2)$$

Figura 2: Gráfica superficie solución del problema de Cauchy