UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 2

Ecuaciones Diferenciales II

Concepción, 17 de octubre de 2017.

Paola Toledo Muñoz

- Considere $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $y'(e^{-1}) = 0$, $y(1) = 0$
  - (i) Llevar la ecuación a su forma adjunta.

    Sea la ecuación con $a_1(x) = x^2$, $a_2(x) = x$

    $$a_1(x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a_2(x) + \lambda y = 0 \qquad .....(1)$$

    definamos $s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}$, $q(x) = 0$ y $p(x) = e^{\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt}$ reemplazando en (1)

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + [\lambda s]y = 0$$

    aquí $s, p \in C[e^{-1}, 1]$ con $p \in \zeta^1(]e^{-1}, 1[)$, el operador con condición de contorno conveniente conveniente resulta ser autoadjunto.
    Reescribimos en su forma autoadjunta

    $$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{\lambda}{x^2}y = 0$$

    con ayuda del factor integrante

    $s'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow s(x) = Ln(x), x > 0$

    $u(x) = e^{s(x)} \Leftrightarrow u(x) = e^{ln(x)} = x$

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy'] + \left[\lambda\frac{1}{x}\right]y = 0, x \neq 0$$

    notamos que $p(x) = x$ y $p(0) = 0$, por lo que no se requiere condición de contorno en la frontera $x = 0$ unicamente que sea acotado en los puntos frontera antes definidos.

- (ii) Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.
  Definimos el siguiente producto interior

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : L^2(\Omega) \wedge L^2(\Omega) : \Omega := (e^{-}1, 1) \to \mathbb{R}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-1}}^{1} s(x) f(x) g(x) dx = \langle g, f \rangle$$

el cual define la norma $|| \cdot ||$.

$$\langle y, y \rangle = \int_{e^{-1}}^{1} s(x) y(x) y(x) dx = s(x) ||y||^2$$

Sabemos que $||y||^2 =< y, y >\geq 0$, $y \in L^2$, debido a esto $s(x)$ debe cumplir

$x \in [e^{-1}, 1], s(x) > 0 \Leftrightarrow x = 0$ lo cual se cumple.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [y'x] = \lambda \frac{1}{x} y$$

Multiplicando por y

$$y(x)y'(x)x + y(x)y'(x) = -\lambda \frac{y^2}{x}$$

Integrando

$$\int_{e^{-1}}^{1} y(x)y'(x)x + \int_{e^{-1}}^{1} y(x)y'(x) = -\lambda \int_{e^{-1}}^{1} \frac{y^2}{x}$$

$$\Leftrightarrow y^2(x)x|_{e^1}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} y(x)y'(x) + \int_{e^{-1}}^{1} y(x)y'(x) = -\lambda \frac{||y||^2}{x}$$

$$\Leftrightarrow y^2(1)1 - y^2(e^{-1})e^{-1} = -\lambda \frac{||y||^2}{x}$$

de las condiciones de contorno $y(1) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{xy^2(e^{-1})e^{-1}}{||y||^2} = \lambda$$

de aquí ya que $x > 0$ y $||y||^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$, la familia de valores propios es mayor igual a cero.

- (iii)Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales.

  Sea $(\lambda, y)(\beta, z), \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ pares caracteristicas

  $$(py')' + (\lambda s)y = 0.....(1) \qquad \wedge \qquad (pz')' + (\beta s)z = 0.....(2)$$
  multiplicando (1) por z y (2) por y

  $$z(py')' + zy(\lambda s) = 0.....(2) \qquad \wedge \qquad y(pz')' + yz(\beta s) = 0.....(3)$$

  por otro lado notamos

  $$(z(py'))' = z'(py') + (py')'z \qquad \wedge \qquad (y(pz'))' = y'(pz') + (pz')'y$$

  Reemplazando en (2) y (3)
  $$(z(py'))' - z'(py') + zy(\lambda s) = 0 \quad \wedge \qquad (y(pz'))' - y'(pz') + zy(\beta s) = 0$$
  $\Leftrightarrow$

  $$(z(py'))' = z'(py') - zy(\lambda s) \qquad \wedge \qquad (y(pz'))' = y'(pz') - zy(\beta s)$$
  Restando ambas expresiones obtenemos

  $(z(py'))' - (y(pz')' = -zy(\lambda s) + zy(\beta s)$
  $\Leftrightarrow$
  $(\beta - \lambda)s(x)y(x)z(x)dx \qquad \underset{=}{T.F.C} \qquad [p(x)W[y,z]]_{e^{-1}}^{1} = p(1)W[y,z](1) - p(e^{-1})W[y,z](e^{-1})$

  , ya que $p(1) \neq p(e^{-1}) \neq 0$ analisamos :

  Notamos de las condiciones de contorno que $y(1) = 0 \Leftrightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow$

  $$W[y,z](1) = \begin{vmatrix} y(1) & z(x) \\ y'(1) & z'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z(x) \\ 0 & z'(x) \end{vmatrix} = 0$$

  para analizar $W[y,z](e^{-1})$ necesitamos las funciones propias obtenidas en (iv)
  definimos de (iv) , $k \in \mathbb{Z}$,

  $$y(x) = sen(\frac{\pi}{2}(2k-1)Ln(x)) \Leftrightarrow y'(e^{-1}) = cos(-\frac{\pi}{2}(2k-1)) \Leftrightarrow y'(e^{-1}) = cos(\frac{\pi}{2}(2k-1))$$
  $$z(x) = 1 \Leftrightarrow z'(e^{-1}) = 0$$

  así
  $$W[y,z](e^{-1}) = \begin{vmatrix} y(e^{-1}) & z(e^{-1}) \\ y'(e^{-1}) & z'(e^{-1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -sen(\frac{\pi}{2}(2k-1)) & 1 \\ cos(\frac{\pi}{2}(2k-1)) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  por lo tanto $W[y,z](1) = W[y,z](e^{-1}) = 0$ así con $\lambda \neq \beta$, se cumple PSL-Regular con condiciones de contorno separadas

  $$(\lambda - \beta)\langle y, z\rangle = p(1)W[y,z](1) - p(e^{-1})W[y,z](e^{-1}) \Leftrightarrow (\lambda - \beta)\langle y, z\rangle \overset{\lambda \neq \beta}{\Leftrightarrow} \langle y, z\rangle = 0$$

  de lo anterior las funciones propias asociadas a los valores propios diferentes son ortogonales .

- (iv) Encontrar los valores propios y las fuciones propias.

  Analizamos $\lambda = 0 \Leftrightarrow y''(x) = 0 \quad con \quad x > 0$

  $$y(x) = Ax + B$$

  Usando las condiciones de contorno

  $y(1) = A + B \qquad \wedge \qquad y'(e^{-1}) = B = 0 \qquad \Leftrightarrow A = B = 0$

  así $y(x) = 0$

  ya que definimos $\lambda \geq 0$ solo falta analizar $\lambda > 0$

  Definimos $\lambda = w^2$ con $w > 0$, sabemos que $y(x) = Acos(ws(x)) + Bsin(ws(x))$

  De las condiciones de contorno obtenemos ,con $s(x) = ln(x)$

  $$y(1) = A = 0 \qquad ...(1)$$

  $$y'(e^{-1)} = -sen(-w)Aw + Bwcos(-w) \quad (1) \quad Bwcos(w) \Rightarrow Bwcos(w) = 0$$

  Notamos que para no obtener resultados nulos $B \neq 0$ y de la definición $w > 0$

  $$cos(w) = 0 \Leftrightarrow w = \tfrac{\pi}{2}(2k-1) \ , k \in \mathbb{K}$$

  de aquí vemos

  $y(x) = sen(\frac{\pi}{2}(2k-1)Ln(x)), k \in \mathbb{Z}$

  así los valores propios

  $$\left\{ \left(\frac{\pi}{2}(2k-1) \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty}$$

  las funciones propias para que el sistema sea ortogonal serán

  $$\left\{ 1, sen(\frac{\pi}{2}(2k-1)Ln(x)), cos(\frac{\pi}{2}(2k-1)Ln(x)) \right\}_{k=1}^{\infty}$$

  con $k \in \mathbb{Z}$

- (v) Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión $y'' + \lambda y = 0$,.

  De las condiciones de contorno $y''(L) = 0$ obtenemos que el momento de flexión es cero y además empotrado.

- (vi) Graficar $\lambda_k, f_k, k = 1, 2, 3, 4.$

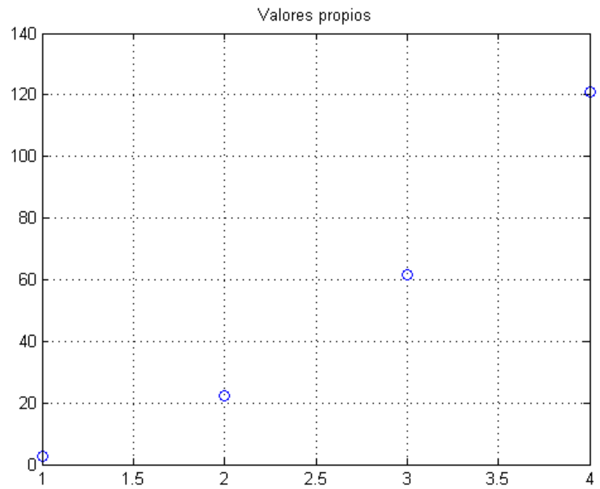

Figura 1: Valores propios para λ_k

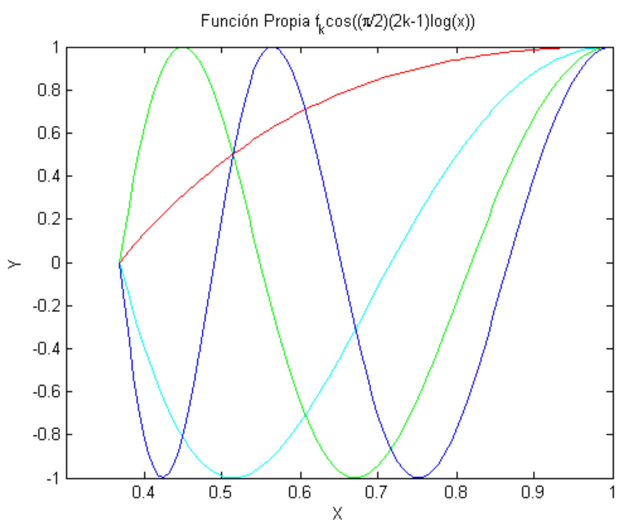

Figura 2: función propia para f_k

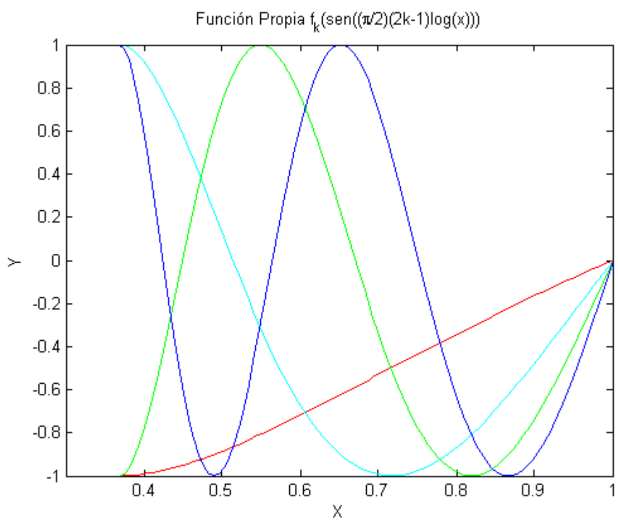

Figura 3: función propia para f_k