UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales II

TAREA 1

Integrantes

JAVIERA ARIAS GUTIÉRREZ
CLAUDIO CORREA BARRÍA

Docente
FREDDY PAIVA VEJAR

Problema.

Hallar $u \in C^1(\Omega)$ donde Ω es un abierto a definir en la solución del ejercicio:

$$u_x + u_y + u = e^{(x+2y)}$$
$$u(x,0) = 0$$

Solución.

a) Vía parametrización (s, τ) :

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto donde la solución estará bien definida y sea de clase $C^1(\Omega)$. Reescribimos la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}$$

Y sea $x = x(s,\tau)$ y $y = y(s,\tau)$, parametrizaremos nuestra curva inicial como

$$\Gamma_0 = \{(x,y,u) : (x(s), y(s), u(s)) = (s,0,0), s \in I \subseteq \mathbb{R}\}$$

El sistema característico asociado a la EDP será

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial x}{\partial \tau} = 1\\ x(s,0) = s\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}\frac{\partial y}{\partial \tau} = 1\\ y(s,0) = 0\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{x+2y} - u\\ u(s,0) = 0\end{array}\right\}$$

Resolviendo tenemos

$$x(s,\tau) = \tau + c_1(s)$$
$$y(s,\tau) = \tau + c_2(s)$$

Aplicando dato inicial

$$x(s,0) = c_1(s) = s$$
$$y(s,0) = c_2(s) = 0$$

Así

$$\left.\begin{array}{c}x(s,\tau) = \tau + s\\ y(s,\tau) = \tau\end{array}\right\}$$

ahora reemplazando, nos queda

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{s+3\tau} - u\\ u(s,0) = 0\end{array}\right\}$$

Reescribimos como

$$u_\tau + u = e^{s+3\tau}$$

Resolvemos la EDO usando el Factor Integrante: $\Phi(\tau) = e^{\tau}$,
se tiene que

$$e^{\tau}u_\tau + e^{\tau}u = e^{s+3\tau}e^{\tau}$$
$$\Leftrightarrow \Phi[ue^{\tau}] = e^{s+4\tau}$$
$$\Leftrightarrow \int \Phi[ue^{\tau}]d\tau = \int e^{s+4\tau}d\tau$$
$$\Leftrightarrow ue^{\tau} = \frac{1}{4}e^{s+4\tau} + C(s)$$
$$\Leftrightarrow u(s,\tau) = \frac{1}{4}e^{s+3\tau} + e^{-\tau}C(s)$$

Aplicando el dato inicial

$$u = (s,0) = \frac{1}{4}e^{s} + C(s) = 0$$
$$C(s) = -\frac{1}{4}e^{s}$$
$$\Rightarrow u(s,\tau) = \frac{1}{4}(e^{s+3\tau} - e^{s-\tau}) \quad s,\tau \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Volvemos a las variables originales

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ \tau \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces

$$s(x,y) = x - y$$
$$\tau(x,y) = y$$
$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{4}(e^{x+2y} - e^{x-2y})$$
$$\Leftrightarrow u(x,y) = \frac{e^{x}}{4}(e^{2y} - e^{-2y}) \quad x,y \in \Omega.$$

Como $u(x,y)$ está bien definida para todo $\mathbb{R}^2$, entonces $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Ahora, veamos que $u(x,y)$ es único:

$$\begin{vmatrix} a(\Gamma_0(s)) & x'(s) \\ b(\Gamma_0(s)) & y'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

donde a y b son funciones que acompañan a u_x y u_y respectivamente.
Entonces $u(x,y)$ es una solución única en Ω.

$\blacksquare$

Problema.

Hallar $u \in C^1(\Omega)$ donde Ω es un abierto a definir en la solución del ejercicio:

$$u_x + u_y + u = e^{(x+2y)}$$
$$u(x,0) = 0$$

Solución.

b) Vía cambio de variable:

Su sistema característico es

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{e^{x+2y} - u}$$

Encontramos una Integral Primera,

$$\phi(x,y,u) = x - y = c$$

Aplicaremos el cambio de variable $v(s,t) = u(x,y)$

$$s = x - y$$

$$t = y$$

Vemos que $\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces es invertible.

$$u_x = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = v_s$$

$$u_y = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = -v_s + v_t$$

Reemplazando en la EDP tenemos

$$v_s - v_s + v_t + v = e^{s+3t}$$
$$\Leftrightarrow v_t + v = e^{s+3t}$$

usando Factor Integrante $\phi(t) = e^t$ resulta

$$e^t v_t + e^t v = e^{s+4t}$$

$$\Rightarrow e^t v = \int e^{s+4t} dt$$

$$\Leftrightarrow e^t v = \frac{1}{4}e^{4t+s} + C(s)$$

$$\Leftrightarrow v(s) = \frac{1}{4}e^{3t+s} + e^{-t}C(s) \quad , s \in \mathbb{R}.$$

Volviendo a las variables originales, nos queda

$$u(x,y) = \frac{1}{4}e^{3y+(x-y)} + e^{-y}C(x-s)$$

$$\Leftrightarrow u(x,y) = \frac{1}{4}e^{2y+x} + e^{-y}C(x-y)$$

Por el Dato de Cauchy

$$u(x,0) = \frac{1}{4}e^{x} + C(x) = 0$$

$$C(x) = -\frac{1}{4}e^{x}$$

finalmente

$$u(x,y) = \frac{1}{4}e^{2y+x} + e^{-y}(-\frac{1}{4}e^{x-y})$$

$$\Leftrightarrow u(x,y) = \frac{1}{4}e^{2y+x} - \frac{1}{4}e^{x-2y}$$

$$\Leftrightarrow u(x,y) = \frac{1}{4}e^{x}(e^{2y} - e^{-2y}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vemos que $u(x,y)$ está bien definida para todo $\mathbb{R}^2$, entonces $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Y $u(x,y)$ es único, ya que:

$$\begin{vmatrix} a(\Gamma_0(s)) & x'(s) \\ b(\Gamma_0(s)) & y'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

con a y b funciones que acompañan a u_x y u_y respectivamente.

$\blacksquare$

Gráfico.

Notamos que el gráfico va aumentando considerablemente, tanto así que si cambiamos los límites, visualizamos un gráfico que forma la misma figura.
Aquí mostramos el gráfico en dos tamaños distintos: