UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES II

TAREA 2

Docente
FREDDY PAIVA

Alumno
VICENTE MARCHANT CONTRERAS

Ayudante
SEBASTIÁN MORAGA

Problema:

1. Llevar la ecuación a su forma adjunta.
2. Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.
3. Demostrar que las funciones propias asociadas a vectores propios distintos son ortogonales con respecto a un p.i. $L^2w(\Omega)$.
4. Encontrar los valores propios y las funciones propias.
5. Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión. Además dar los 3 primeros modos de vibración.
6. Graficar λ_n, f_n, para $n = 1, 2, 3, 4$

Sea el problema de Sturm-Liouville con datos en la frontera:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Definimos producto interior:

$$< ; > \ : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$< f, g > = \int_\Omega \rho(x) f(x) g(x) dx$$

Con $\Omega = (0, \frac{\pi}{4})$ y $\rho(x) = 1$ por la forma adjunta de la EDO que veremos mas adelante.
Sea el operador L, demostramos que es autoadjunto:

$$L = D^2 + \lambda \qquad Dom(L) = \left\{ y \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : y'(0) = 0, \ y(\frac{\pi}{4}) = 0 \right\}$$

Sean $y, z \in Dom(L)$, evaluamos:

$$\begin{aligned} < y'' + \lambda y, \ z > - < y, \ z'' + \lambda z > &= \int_\Omega z(y'' + \lambda y) dx - \int_\Omega y(z'' + \lambda z) dx \\ &= \int_\Omega y'' z dx + \lambda \int_\Omega yz dx - \int_\Omega y z'' dx - \lambda \int_\Omega yz dx \\ &= \int_\Omega y'' z dx - \int_\Omega y z'' dx \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$yz'' = (yz')' - y'z'$$
$$zy'' = (zy')' - z'y'$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_\Omega y'' z dx - \int_\Omega y z'' dx &= \int_\Omega (zy')' dx - \int_\Omega (yz')' dx \\ &= \left. (zy' - yz') \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 0 \end{aligned}$$

Ya que $y, z \in Dom(L)$

$$\Rightarrow < y'' + \lambda y,\ z > = < y,\ z'' + \lambda z >$$
$$\Leftrightarrow < Ly, z > = < y, Lz >$$

Así L es autoadjunto, lo que asegura la existencia de valores propios, luego analizamos el signo de estos, multiplicando por $y \in Dom(L)$ en la EDO.

$$\begin{aligned}
y'' + \lambda y &= 0 \quad / \cdot y \\
\Rightarrow\ yy'' + \lambda y^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} yy''dx + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2 dx &= 0 \\
\Leftrightarrow \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2 dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} yy''dx \\
\Leftrightarrow \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2 dx &= -(yy')|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} y'^2 dx \\
\Leftrightarrow \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2 dx &= -(y(\frac{\pi}{4})y'(\frac{\pi}{4})y(0)y'(0)) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} y'(x)^2 dx \\
\Leftrightarrow \lambda &= \frac{< y', y' >}{< y, y >} \\
\Leftrightarrow \lambda &= \frac{||y'||^2}{||y||^2} \geq 0
\end{aligned}$$

Concluimos que los valores propios son no negativos.

Caso 1: $\lambda = 0$
De la EDO tenemos que $y''(x) = 0$, donde integrando y aplicando condiciones de contorno obtenemos la solución trivial $y(x) \equiv 0$.

Caso 2: $\lambda > 0$, sea $\lambda = w^2$, $w \in \mathbb{R}$

$$y'' + w^2 y = 0$$
$$\Rightarrow y(x) = c_1 cos(wx) + c_2 sen(wx) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

con:

$$y'(x) = w[-c_1 sen(wx) + c_2 cos(wx)]$$

Aplicamos condiciones de contorno:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 &\Leftrightarrow c_1 cos\left(w\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow cos\left(w\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
&\Rightarrow w\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow w_n = 2 + 4n \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Luego, la familia de funciones propias será:

$$y_n(x) = cos((2+4n)x) \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Asociado a los valores propios:

$$\lambda_n = (4n+2)^2 \tag{2}$$

Respuestas:
(i) La forma adjunta de una EDO está dada por:

$$\frac{d}{dx}(u(x)y'(x)) + (q(x) + \lambda\rho(x))y = 0$$

Para el problema, $u(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$, así:

$$\frac{d}{dx}(1 \cdot y'(x)) + \lambda y(x) = 0$$

(ii) La familia de valores propios obtenidos es positiva y creciente, en efecto:

$$\lambda_n = (4n+2)^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &< \lambda_{n+1} \\
(4n+2)^2 &< (4(n+1)+2)^2 \\
\Leftrightarrow (4n+2)^2 &< (4n+6)^2 \\
\Leftrightarrow 16n^2 + 16n + 4 &< 16n^2 + 48n + 36 \\
\Leftrightarrow 0 &< 32(n+1) \\
\Leftrightarrow 0 &< (n+1), \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Así, λ_n es creciente.

(iii) Sean $y_1, y_2 \in Dom(L)$, dos funciones propias arbitrarias asociadas a valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ respectivamente, del problema tenemos:

$$\begin{aligned}
&y_1''(x) + \lambda_1 y_1(x) = 0 \quad / \cdot y_2(x) \\
\Rightarrow &y_2(x)y_1''(x) + \lambda_1 y_1(x)y_2(x) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&y_2''(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad / \cdot y_1(x) \\
\Rightarrow &y_1(x)y_2''(x) + \lambda_2 y_1(x)y_2(x) = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Restando (3) y (4) e integrando:

$$\int_\Omega (y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x))dx = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_\Omega y_1(x)y_2(x)dx \tag{5}$$

Integrando por partes el miembro izquierdo y teniendo en cuenta que $y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \forall y \in Dom(L)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x))dx &= (y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left|\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 0
\end{aligned}$$

Luego de (5):

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_\Omega y_1(x) y_2(x) dx = 0$$

Por hipótesis, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, luego:

$$< y_1, y_2 >= 0$$

$\blacksquare$

(vi) De (1) y (2), los valores propios y las funciones propias obtenidas son:

$$f_n(x) = cos((4n+2)x)$$
$$\lambda_n = (4n+2)^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

(v) El problema se puede interpretar como una viga de la forma:

$$Ely'' + Py = 0$$

Donde P es la fuerza compresiva aplicada sobre la viga y $E \cdot l$ es la rigidez flexionante de esta.
Para el problema tenemos:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0, \;\; y(\frac{\pi}{4}) = 0$$

con $\lambda_n = \dfrac{P_n}{E \cdot l}$.

De los datos de contorno se deduce que en $x = 0$ la viga está empotrada, y en $x = \frac{\pi}{4}$ la viga está articulada.
Graficamos los 3 primeros modos o curvas de deflexión, dados respectivamente por:

$$f_1(x) = cos(6x)$$
$$f_2(x) = cos(10x)$$
$$f_3(x) = cos(14x)$$

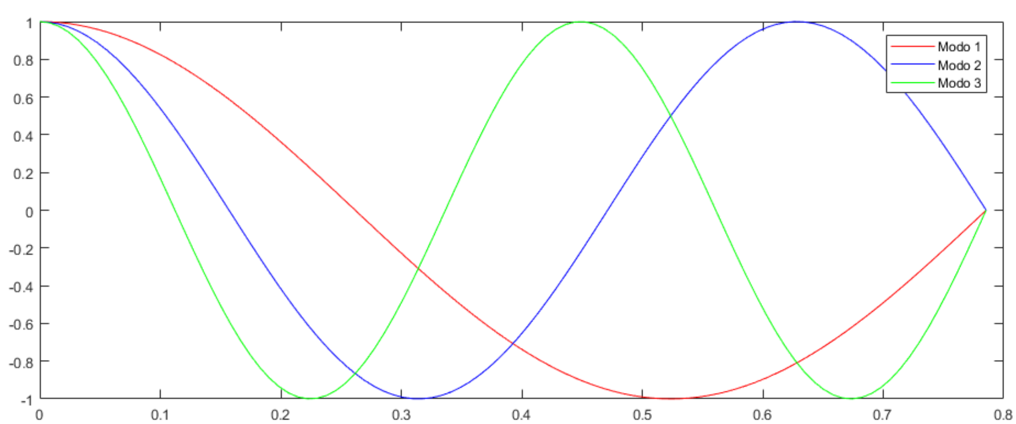

Figura 1: Modos de deflexión para $n = 1, 2, 3$

(vi) Gráfica de f_n, λ_n para $n = 1, 2, 3, 4$

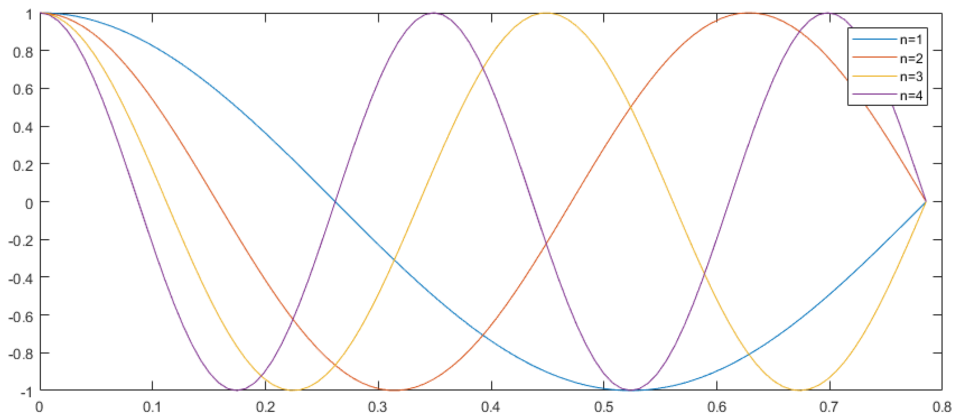

Figura 2: Gráfica de f_n *para* $n = 1, 2, 3, 4$

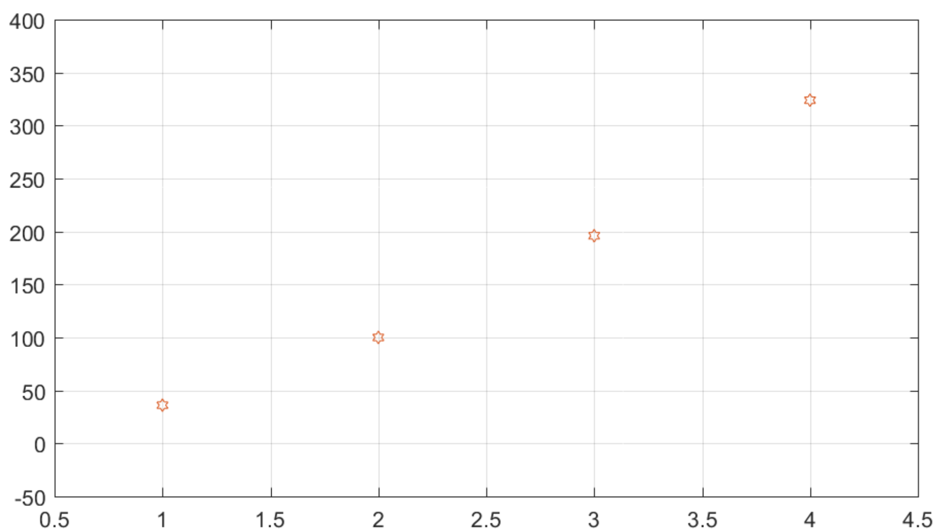

Figura 3: Gráfica de λ_n *para* $n = 1, 2, 3, 4$