Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Tarea 2

ECUACIONES DIFERENCIALES II

- Nombre:
  - Tamahí Martínez Fernández

16 de Octubre, 2017

Resuelva el siguiente Problema de Sturm Liouville:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

1. Forma adjunta

La forma adjunta de un PSL está dada por:

$$(r(x)y')' + (\lambda p(x) + q(x))y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

donde, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1(]a,b[)$.

En efecto, la forma adjunta de (1) es

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

con $r(x) = 1$, $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$.

Aquí, el operador $L = D^2$, $Dom(L) = \{y \in C^2(]0, \frac{\pi}{2}[) \cap C^1([0, \frac{\pi}{2}])\}$.

2. Operador autoadjunto

Sea $\Omega = (0, \frac{\pi}{2})$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Definimos el siguiente p.i.:

$$< \cdot, \cdot >: L^2\omega(\Omega) \times L^2\omega(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$< f, g > = \int_\Omega [f(x) \cdot g(x)]\omega(x)\, dx$$

El cual define la norma $\| \cdot \|$ tal que $\|y\|^2 =< y, y >$ para todo $y \in L^2$.

Sean $y, z \in Dom(L)$. Considerando:

$$yz'' = (yz')' - y'z'$$

$$zy'' = (zy')' - y'z'$$

Evaluando los p.i. y reemplazando yz'' y zy'' se tiene:

$$< y'', z > - < y, z'' > = \int_\Omega y''(x) \cdot z(x)\, dx - \int_\Omega y(x) \cdot z''(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow < y'', z > - < y, z'' > = \int_\Omega (z(x)y'(x))'\, dx - \int_\Omega (y(x)z'(x))'\, dx$$

$$\Leftrightarrow < y'', z > - < y, z'' > = \left| \begin{array}{cc} z(x) & y(x) \\ z'(x) & y'(x) \end{array} \right| \Bigg|_\Omega$$

$$\Leftrightarrow < y'', z > - < y, z'' > \left| \begin{array}{cc} z(\frac{\pi}{2}) & y(\frac{\pi}{2}) \\ z'(\frac{\pi}{2}) & y'(\frac{\pi}{2}) \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} z(0) & y(0) \\ z'(0) & y'(0) \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow < y'', z > - < y, z'' > = \left| \begin{array}{cc} z(\frac{\pi}{2}) & y(\frac{\pi}{2}) \\ 0 & 0 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ z'(0) & y'(0) \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow < y'', z > = < y, z'' >$$

Así, el operador L es autoadjunto y en consecuencia por el Teorema espectral existen infinitos valores propios numerables, y crecientes.

3. Signo de los valores propios

Multiplicando la EDO por y e integrando por partes se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} yy''\,dx + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow yy'|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'^2\,dx + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow -\|y'\|^2 + \lambda\|y\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\|y'\|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

Así, los valores propios son no negativos.

Si $\lambda = 0$ fuera valor propio, entonces $y(x) = Ax + B$. Aplicamos las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Luego, la única solución es la trivial $y(x) \equiv 0$, y como las funciones propias deben ser no nulas, los valores propios son positivos.

4. Resolución del PSL

Sabemos que los valores propios son positivos. Sea $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x); \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = B\sin(\omega x); \quad B \in \mathbb{R}$$

De la segunda condición de contorno:

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \omega B\cos(\omega\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\omega\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega\tfrac{\pi}{2} = (2n-1)\tfrac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Así, los valores propios son $\lambda = \lambda_n = \omega_n^2 = (2n-1)^2$ y se tiene el sistema de soluciones:

$$y_n = \sin((2n-1)x), \quad n \in \mathbb{N}$$

5. Funciones propias

La familia de funciones propias $\{\sin((2n-1)x)\}_{n=1}^{\infty}$ asociadas a distintos valores propios son ortogonales con respecto al p.i $L^2\omega(\Omega)$:

$$\Rightarrow < \sin((2m-1)x), \sin((2n-1)x) >= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2m-1)x) \cdot \sin((2n-1)x)\, dx, \quad m \neq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x(m-n)) - \cos(2x(m+n-1))\, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin((m-n)\pi)}{2(m-n)} - \frac{\sin((m+n)\pi)}{2(m+n-1)}, \quad m \neq n$$

Sea $k_1 = m - n$ y $k_2 = m + n$. Como m y n son números naturales $k_2 \in \mathbb{N}$. Si $m < n$ entonces $k_1 \in \mathbb{Z}$, si $m > n$ entonces $k_1 \in \mathbb{N}$. Además como $\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\Rightarrow < \sin((2m-1)x), \sin((2n-1)x) >= \frac{\sin(k_1\pi)}{2(k_1)} - \frac{\sin(k_2\pi)}{2(k_2-1)} = 0$$

6. Interpretación como problema de viga con deflexión

El problema de deflexión de una viga homogénea de longitud $\frac{\pi}{2}$ sujeta a una carga axial constante P a ser resuelto es

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Donde el producto EI se denomina rigidez flexionante de la viga. Si escribimos $\lambda = P/EI$ vemos que

$$\Rightarrow y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

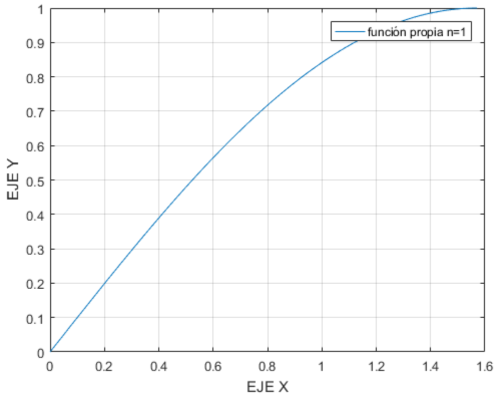
De este análisis vemos que las curvas de deflexión son $y_n = \sin((2n-1)x)$ que corresponden a los valores propios $\lambda_n = P_n/EI = (2n-1)^2, n \in \mathbb{N}$. Esto significa que la viga se flexionará solo cuando la fuerza compresiva sea uno de los valores de las cargas críticas $P_n = (2n-1)^2 \cdot EI, n \in \mathbb{N}$.

Modos de Pandeo

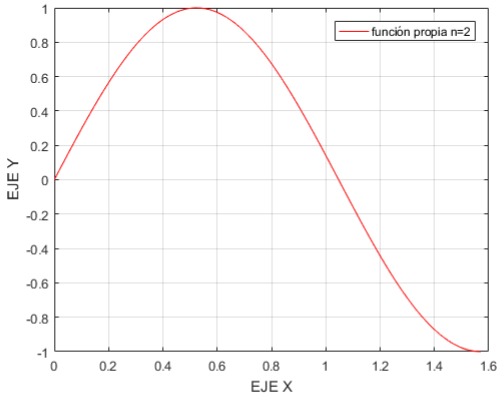
Se conoce como modos de pandeo a la curva de deflexión correspondiente a cada carga crítica. Así, nuestros tres primeros modos son:

Primer modo: $y_1 = \sin(x)$.
Segundo modo: $y_2 = \sin(3x)$.
Tercer modo: $y_3 = \sin(5x)$.

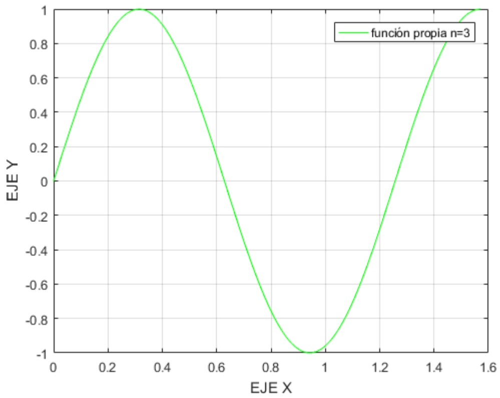
Gráficos Funciones propias



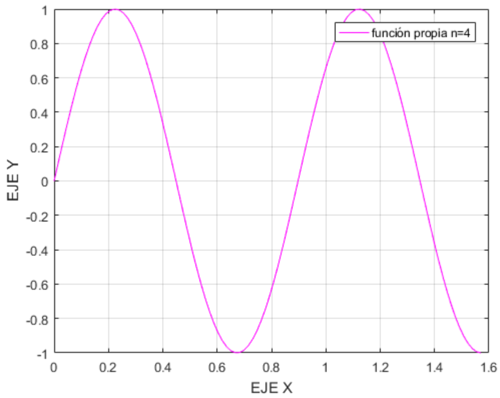
(a) Función propia y_1



(b) Función propia y_2



(c) Función propia y_3



(d) Función propia y_4

Figura 1: Gráficos

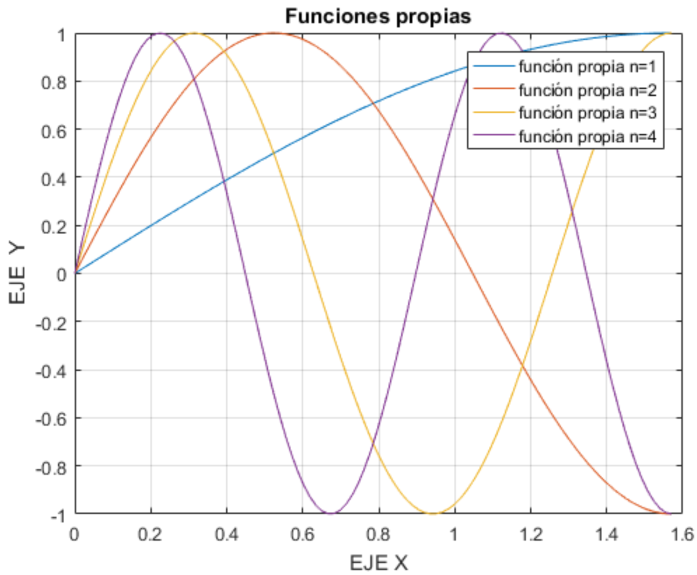


Figura 2: Gráfico de las funciones propias y_n para $n = 1, 2, 3, 4$.

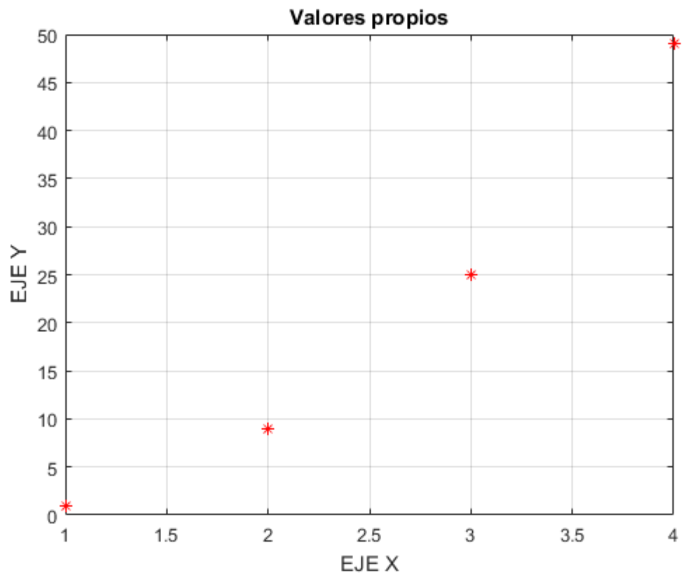


Figura 3: Gráfico de los valores propios λ_n para $n = 1, 2, 3, 4$.