UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 2 — Ecuaciones Diferenciales II

1. Enunciado

Se considera el siguiente problema de autovalores con condiciones mixtas periódicas

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in]-L, L[\\ y(-L) = y(L), & y'(-L) = y'(L) \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Forma adjunta

Sabemos que la forma adjunta de una ecuación de un problema de Sturm-Liouville es

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda p(x) - q(x)\right) y = 0 \tag{2.1}$$

Identificando $r \equiv 1$, $p \equiv 1$ y $q \equiv 0$, la forma adjunta es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{2.2}$$

y el producto interior es el usual en $[-L, L]$.

3. Valores y funciones propias

Proposición 3.1. *El operador $L = D^2$ es autoadjunto en $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \in \mathcal{C}^2(]-L, L[) \cap \mathcal{C}^1([-L, L]) \wedge f(-L) = f(L) \wedge f'(-L) = f'(L)\}$.*

Demostración. Podemos demostrar que dados $f, g \in V \quad \langle -f'', g\rangle = \langle f, -g''\rangle$.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f''g &= f'g\Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} f'g' \\ &= f'g\Big|_{-L}^{L} - fg'\Big|_{-L}^{L} + \int_{-L}^{L} fg'' \\ &= \int_{-L}^{L} fg'' \end{aligned}$$

□

Luego, por el Teorema Espectral, el operador L tiene valores propios que pueden ser ordenados de manera creciente y, además, funciones propias.

Proposición 3.2. *Los valores propios de L son no negativos y crecientes*

Demostración. Dado que los valores propios de L son reales por ser autoadjunto, sabemos que se pueden ordenar. Basta probar entonces que son positivos.

Consideremos la ecuación original como una igualdad y multipliquemos por y en ambos lados,

$$\begin{aligned} -y'' = \lambda y \Leftrightarrow -yy'' &= \lambda y^2 \\ \Leftrightarrow -\int_{-L}^{L} yy'' &= \lambda \int_{-L}^{L} y^2 \\ \Leftrightarrow \int_{-L}^{L} (y')^2 &= \lambda \int_{-L}^{L} y^2 \\ \Leftrightarrow \frac{||y'||}{||y||} &= \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

donde $||y|| > 0$ pues es autofunción.

Observación: De aquí notamos que $\lambda = 0 \Leftrightarrow ||y'|| = 0$. De aquí, extraemos que si $y' \equiv 0$, entonces la autofunción asociada a $\lambda = 0$ debe ser una función constante, que verifica las condiciones de contorno de manera trivial. Así hemos encontrado λ_0 y $\phi_0(x) \equiv 1$. □

Proposición 3.3. *Sean (z, λ) y (w, η) dos autopares de L, tales que $\lambda \neq \eta$. Entonces, z y w son ortogonales con respecto al p.i. de V.*

Demostración. Dado que z y w son autofunciones de L asociadas a sus respectivos valores propios, se verifica que

$$-z'' = \lambda z \Rightarrow \lambda wz = -wz'' \tag{3.1}$$

$$-w'' = \eta w \Rightarrow \eta wz = -w''z \tag{3.2}$$

Restando ambas ecuaciones e integrando de $-L$ a L,

$$\begin{aligned} (\lambda - \eta) \int_{-L}^{L} wz &= \int_{-L}^{L} -wz'' - \int_{-L}^{L} -w''z \\ &= \langle w, z'' \rangle - \langle w'', z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $(\lambda - \eta) \neq 0$, se concluye que w y z son ortogonales. □

Dado el previo análisis cualitativo, calculamos el resto de los valores propios y funciones propias de L de manera explícita

Sea $\lambda > 0$. Podemos hacer la sustitución $\lambda = \omega^2$, con $\omega > 0$. Así, $y'' + \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Imponiendo las condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} y(-L) = y(L) &\Leftrightarrow A\cos(\omega L) - B\sin(\omega L) = A\cos(\omega L) + B\sin(\omega L) \\ &\Rightarrow B\sin(\omega L) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} y'(-L) = y'(L) &\Leftrightarrow \omega A\sin(\omega L) + \omega B\cos(\omega L) = -\omega A\sin(\omega L) + \omega B\cos(\omega L) \\ &\Rightarrow \omega A\sin(\omega L) = 0 \\ &\Rightarrow A\sin(\omega L) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dado que $A^2 + B^2 \neq 0$ para obtener soluciones no triviales, podemos sumar el cuadrado de las ecuaciones anteriores y obtener

$$(A^2 + B^2)\sin^2(\omega L) = 0 \Leftrightarrow \sin(\omega L) = 0$$

Es conocido que $sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Así, obtenemos $\omega = \frac{n\pi}{L}$ con $n \in \mathbb{N}$. Reemplazando para la ecuación original, se obtienen los valores propios $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, con las funciones propias asociadas $\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ y $\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ para $n = 1, 2, \ldots$.

En resumen, los valores propios obtenidos fueron $\left\{ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right\}_{n=0}^{\infty}$ con las funciones propias asociadas $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right\}_{n=0}^{\infty}$ y $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$.

4. Un problema de pandeo

Sea una barra delgada de acero de largo $2L$ sometida a una carga axial constante de magnitud P, E su módulo de elasticidad e I su momento de inercia de su sección transversal. Si $y(x)$ representa la deformación transversal en la posición x, con $x = 0$ fijado en la mitad de la barra, la ecuación que describe el pandeo de la barra es

$$EIy''(x) + Py(x) = 0 \tag{4.1}$$

que fácilmente se transforma en un problema de valores propios de la forma $y'' + \lambda y = 0$, con $\lambda = \frac{P}{EI}$.

Suponga que el fenómeno ocurre con condiciones idénticas en los extremos de la barra, i.e., el problema es de condiciones periódicas.

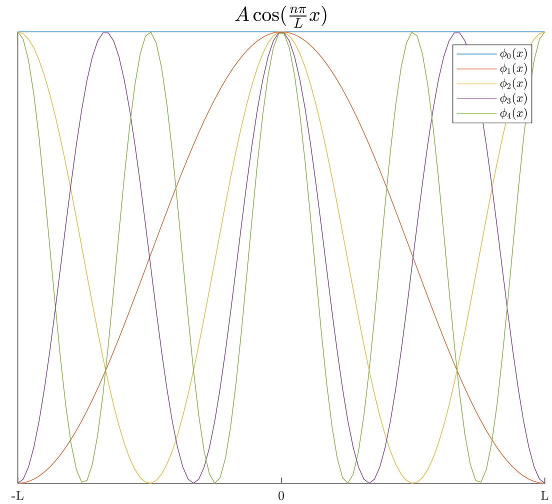
De los resultados de la sección anterior conocemos los valores propios para esta ecuación, de modo que podemos determinar la carga crítica mínima para que ocurra pandeo. Tomando $n = 1$ tenemos:

$$P_{min} = 0 \tag{4.2}$$

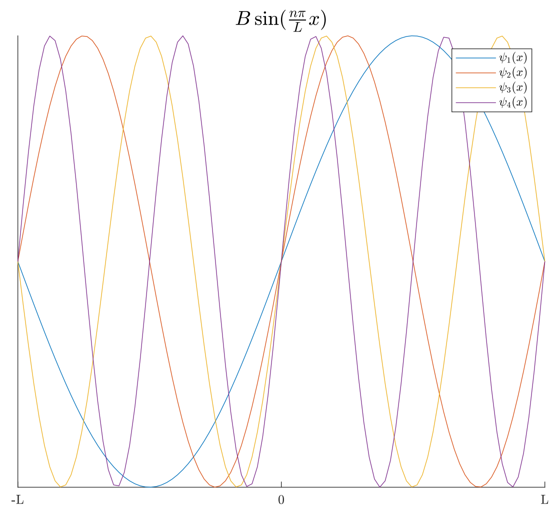
con el primer modo de pandeo $y_1(x) = A$ con amplitud desconocida.

Esto quiere decir que, al fijar los extremos de forma periódica, la barra puede sufrir desplazamiento porque no se ha especificado que está empotrada o con algún soporte en particular. Es por ello que se necesitarían otras restricciones sobre el modelo para determinarlo de mejor manera.

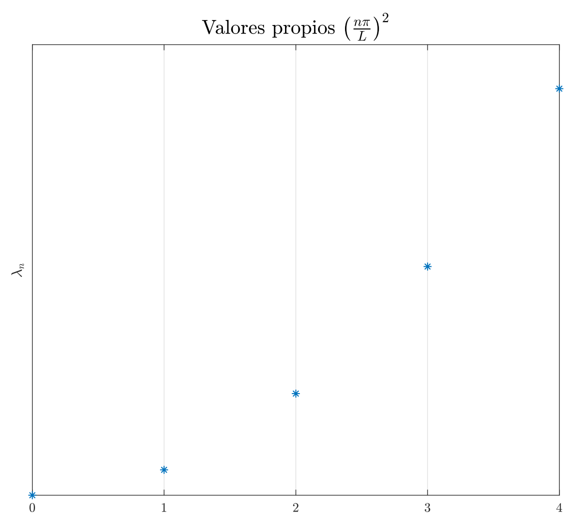
5. Gráficos



$A\cos(\frac{n\pi}{L}x)$
$\phi_0(x)$
$\phi_1(x)$
$\phi_2(x)$
$\phi_3(x)$
$\phi_4(x)$
-L
0
L



$B\sin(\frac{n\pi}{L}x)$
$\psi_1(x)$
$\psi_2(x)$
$\psi_3(x)$
$\psi_4(x)$
-L
0
L



Valores propios $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$
λ_n
0
1
2
3
4
n