UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# TAREA 1

ECUACIONES DIFERENCIALES II (525222)

## 1. PRIMER PROBLEMA

Sea $V = (yz, -xz, xy(x^2 + y^2))$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto a definir. Hallar $u \in C^1(\Omega)$ tal que

$$V \cdot \nabla u(x, y, z) = 0 \tag{1.1}$$

### 1.1. RESOLUCIÓN

Podemos reescribir 1.1 como

$$yzu_x - xzu_y + xy(x^2 + y^2)u_z = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{xy(x^2 + y^2)} \tag{1.3}$$

Del sistema característico podemos obtener dos ecuaciones Pfaffianas, las cuales resolvemos para obtener dos integrales primeras:

$$\begin{aligned} &xdx + ydy = 0 \\ &\quad \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 = C_1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &C_1 ydy + zdz = 0 \\ &\quad \psi(x, y, z) = z^2 + (x^2 + y^2)y^2 = C_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Verificamos que sean funcionalmente independientes mediante la ecuación $\nabla\varphi(x, y, z) \times \nabla\psi(x, y, z) = 0$.

```
x = sym('x','real');
y = sym('y','real');
z = sym('z','real');

v = [x, y, z];

phi = x^2 + y^2;
psi = z^2 + (x^2+y^2)*y^2;

dphi = gradient(phi,v);
dpsi = gradient(psi,v);

fdep = cross(dphi,dpsi);
eqn3 = [fdep(1) == 0, fdep(2) == 0, fdep(3) == 0];
sol3 = solve(eqn3,[x, y, z], 'ReturnConditions', true);
```

El código anterior verifica que la única solución es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Luego, la solución de 1.1, definida en $\Omega = \mathbb{R}^3$ estará dada por

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= F(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)) \\ &= F(x^2 + y^2, z^2 + (x^2 + y^2)y^2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

con $F$ una función real diferenciable arbitraria que verifique $F_\varphi \nabla\phi + F_\psi \nabla\psi \neq 0$.

## 2. SEGUNDO PROBLEMA

Considérese el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} x(y^2+u)u_x - y(x^2+u)u_y = (x^2-y^2)u \\ u(x,-x) = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Hallar $u \in C^1(\Omega)$ que satisfaga 2.1 mediante parametrización y realizar la gráfica de la solución en MATLAB.

### 2.1. RESOLUCIÓN

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto por definir, donde la solución $u := u(x,y)$ estará bien definida y sea de clase $C^1(\Omega)$.

De 2.1 obtenemos el siguiente sistema característico y las consecuentes integrales primeras:

$$\frac{dx}{x(y^2+u)} = \frac{dy}{-y(x^2+u)} = \frac{du}{(x^2-y^2)u} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} xdx + ydy - du = 0 \\ \psi(x,y,u) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - u \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} x^{-1}dx + y^{-1}dy + u^{-1}du = 0 \\ f(x,y,u) = \log|xyu| \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para facilidad de cálculo, consideramos $\varphi(x,y,u) = e^{f(x,y,u)} = xyu$ como integral primera.

Sea $(x,y,u) \in \mathbb{R}^3$. Supongamos que $\nabla\varphi(x,y,u) = (yu, xu, xy)$ y $\nabla\psi(x,y,u) = (x,y,-1)$ forman un conjunto linealmende dependiente en $\mathbb{R}^3$. Es decir, para $\lambda \neq 0$.

$$\begin{gathered} \nabla\varphi(x,y,u) = \lambda\nabla\psi(x,y,u) \Leftrightarrow \\ \left.\begin{aligned} yu &= \lambda x \\ xu &= \lambda y \\ xy &= -\lambda \neq 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \\ \left.\begin{aligned} yu &= -x^2y \\ xu &= -xy^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \\ u = -x^2 = -y^2 \end{gathered}$$

Por lo tanto, las integrales primeras son funcionalmente independientes salvo en las curvas $\{k, -k, -k^2 : k \in \mathbb{R}\}$ y $\{-k, k, -k^2 : k \in \mathbb{R}\}$.

Sea $\Gamma_0 := \{(x,y,u) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,u) = (s,-s,1) \quad s \in \mathbb{R}\}$ una parametrización de la curva inicial.

Verificamos la condición de transversalidad para asegurar la existencia de solución dentro de una vecindad de la curva inicial. Para eso, consideramos según la parametrización, $x(y^2+u) \mapsto s^3+s$, $-y(x^2+u) \mapsto s^3+s$

$$\begin{vmatrix} s^3+s & 1 \\ s^3+s & -1 \end{vmatrix} = -2s(s^2+1) \neq 0$$

La restricción natural que aparece es $s \neq 0$. De aquí, definimos dos intervalos para trabajar, $I_1 = ]0, r[$ e $I_2 = ]-r, 0[$ con $r > 0$, donde tenemos garantizada la existencia de la solución en una vecindad de $\Gamma_0$.

Parametrizando las integrales primeras se obtiene:

$$\varphi(x(s), y(s), u(s)) = C = -s^2 = C_1 \tag{2.5}$$

$$\psi(x(s), y(s), u(s)) = s^2 - 1 = C_2 \tag{2.6}$$

$$C_1 + C_2 + 1 = 0 \tag{2.7}$$

Volviendo a las variables originales:

$$\begin{aligned} xyu + \frac{1}{2}(x^2+y^2) - u + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ u(xy-1) &= -1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Leftrightarrow \\ 2u(xy-1) &= -2 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Luego, se tiene que la solución, definida en $\Omega := \{(x, y, u) : xy - 1 \neq 0\}$, es

$$u(x, y) = \frac{2 + x^2 + y^2}{2(1 - xy)} \tag{2.8}$$

## 2.2. GRÁFICA

Notar que en realidad se trata de dos soluciones, dado que se definieron dos intervalos donde trabajar. En consecuencia, se excluye el punto $(0, 0, 1)$.