Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Ingeniería Civil Matamática **Tarea EDP**

1. Encontrar las Superficies Integrales de la ecuación siguiente para cada una de las siguientes condiciones:

$$uu_x + u_y = 1 \tag{1}$$

$$x(s,0) = s; \quad y(s,0) = 2s; \quad u(s,0) = s \tag{2}$$

$$x(s,0) = s^2; \quad y(s,0) = 2s; \quad u(s,0) = s \tag{3}$$

$$x(s,0) = \frac{s^2}{2}; \quad y(s,0) = s; \quad u(s,0) = s \tag{4}$$

Resuelva el caso $(u,1)\cdot\bigtriangledown u = 0$ para (4) y realice la gráfica de la función resultante.

2. Consideraciones para la resolución: Como vamos a trabajar sobre una curva cuya
parametrización requiere una sola variable (pues dejamos la otra componente de la
parametrización fija), usando a t como parámetro de la curva característica, tendremos a $u = u(x_{(s,t)}, y_{(s,t)})$.
Luego, por regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

De lo que, de acuerdo a la edp, podemos hacer, en forma paramétrica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1; \quad (5.1) \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u; \quad (5.2) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 1 \quad (5.3) \tag{5}$$

$$x = x_0(s); \qquad y = y_0(s); \qquad u = u_0(s)$$

Despejando ∂t obtenemos el sistema característico:

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{1} = \frac{\partial u}{1} \tag{6}$$

Tenemos que la ecuación 5.3 y 5.1 son una EDO de variables separables, luego:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 1 \Rightarrow y(s,t) = t + f_2(s); \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 1 \Rightarrow u(s,t) = t + f_3(s)$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$y(s,0) = f_2(s) = y_0(s)$$
$$u(s,0) = f_3(s) = u_0(s)$$

Reemplanzado esto último en 5.2

$$\frac{\partial x}{\partial t} = t + u_0(s)$$
$$\Rightarrow x(s,t) = \frac{t^2}{2} + tu_0(s) + x_0(s)$$

Con esto establecido, podemos resolver las distintas condiciones.

3. Solución de (1), con la condición inicial (2) Esto es:

$$x(s,0) = s; \quad y(s,0) = 2s; \quad u(s,0) = s$$

$$\left.\begin{aligned} x(s,t) &= \frac{t^2}{2} + ts + s \\ y(s,t) &= t + 2s \\ u(s,t) &= t + s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} s(x,y,u) &= y - u \\ t(x,y,u) &= 2u - y \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial(t)} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+s & 1 \\ t+1 & 2 \end{vmatrix} = t + 2s - 1 \neq 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Así,

$$x = \frac{(2u-y)^2}{2} + (2u-y)(y-u) + (y-u)$$

$$x = \frac{4u^2 - 4uy + y^2}{2} + 2uy + uy - 2u^2 - y^2 + y - u$$

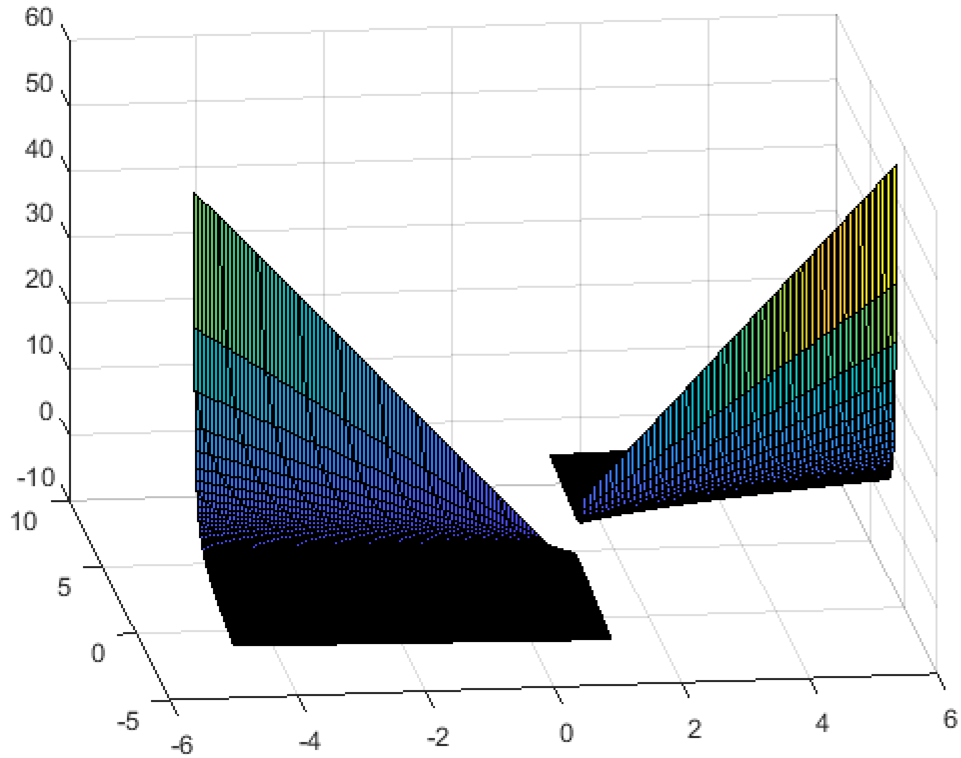
$$2x = -y^2 + 2yu + 2y - 2u$$

$$2x = 2u(y-1) + y(2-y)$$

$$u(x,y) = \frac{2x + y(y-2)}{2(y-1)}; \qquad con \quad y \neq 1.$$

El script a ingresar en matlab, para graficar la solución u, junto con la imágen que genera se detallan a continuación:

```
clc;
clear all;
close all;
x = linspace(-5,0.9);
y = linspace(-5,0.9);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) ((y.^2./2)-y+x)./(y-1);

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
hold on
x = linspace (1.1,6);
y = linspace(1.1,6);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) ((y.^2./2)-y+x)./(y-1);

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
```

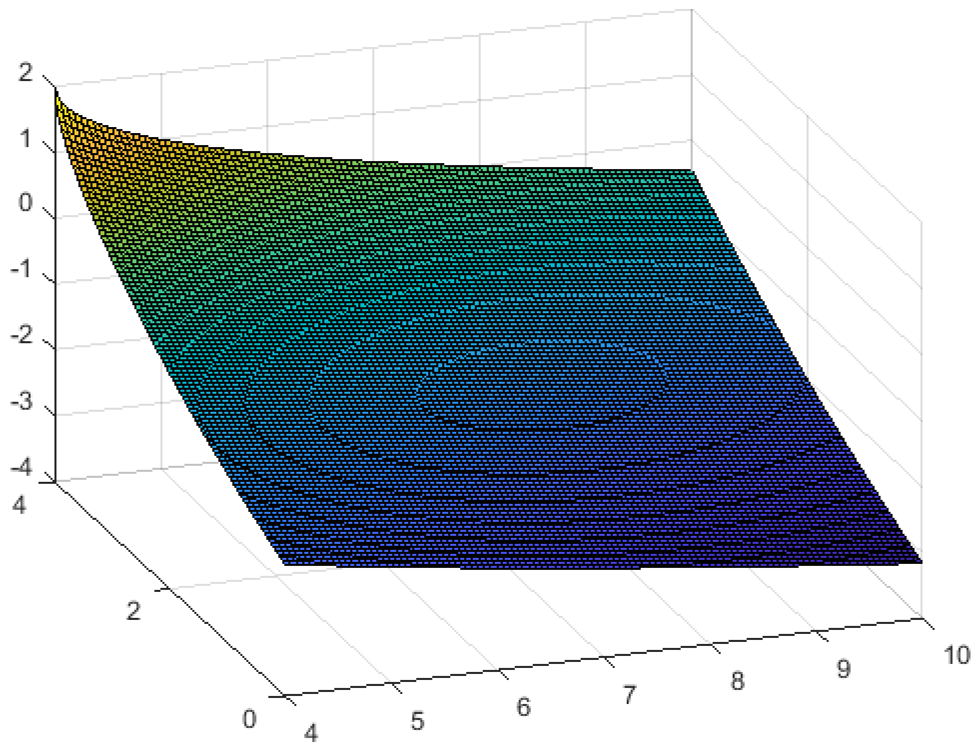

60
50
40
30
20
10
0
-10
10
5
0
-5
-6
-4
-2
0
2
4
6

4. Solución de (1), con la condición inicial (3).
   Esto es:
$$x = \frac{(2u-y)^2}{2} + (2u-y)(y-u) + (y-u)^2$$
$$x = \frac{4u^2-4uy+y^2}{2} + 2uy + uy - 2u^2 - y^2 + y^2 - 2yu + u^2$$

$$2x = 4u^2 - 4uy + y^2 + 2(2uy - 2u^2 - y^2 + uy) + 2(y^2 - 2uy + u^2)$$
$$2x = y^2 - 2uy + 2u^2$$
$$u^2 - 2uy + y^2 - 2x = 0$$
$$u(x,y) = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(\frac{y^2}{2} - x)}}{2}$$
$$u(x,y) = \frac{y \pm \sqrt{4x - y^2}}{2}$$

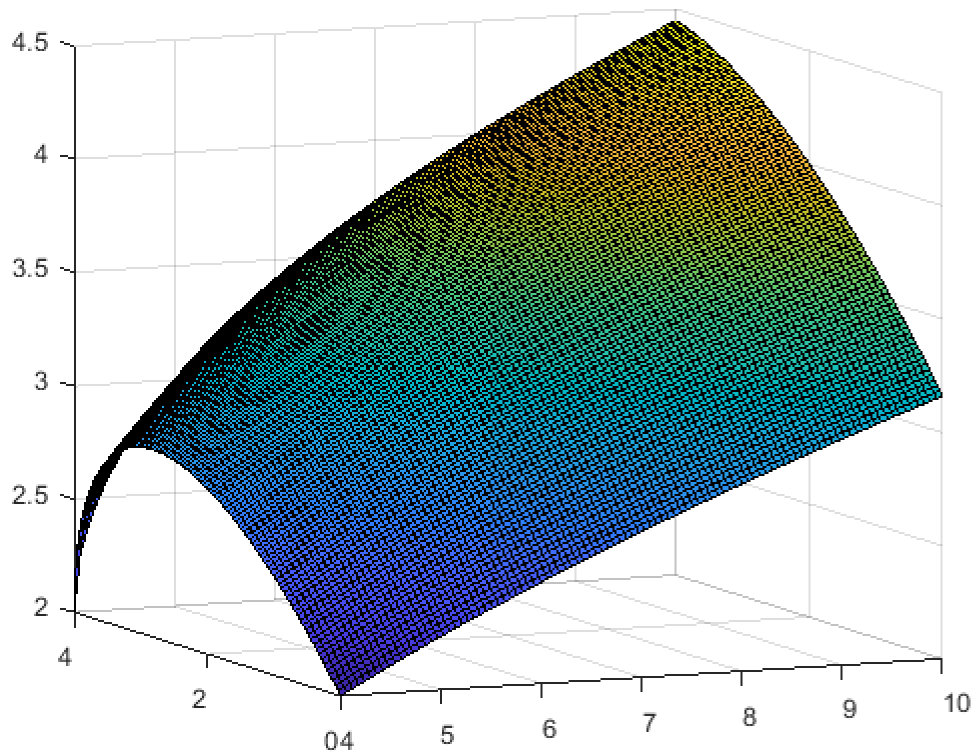
   Al igual que antes, se detalla el script para matlab. En este caso, como son dos soluciones dado el $\pm$ de la raíz se tiene:
   Para la solución con signo negativo:

```
clc;
clear all;
close all
x = linspace(4,10);
y = linspace(0,4);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) y./2 - (sqrt(4*x-y.^2))./2;

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
```


2
1
0
-1
-2
-3
-4
4
2
0
4
5
6
7
8
9
10

Para la solución con signo positivo en la raíz:

```
clc;
clear all;
close all
x = linspace(4,10);
y = linspace(0,4);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) y./2 + (sqrt(4*x-y.^2))./2;

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
```


4.5
4
3.5
3
2.5
2
4
2
04
5
6
7
8
9
10

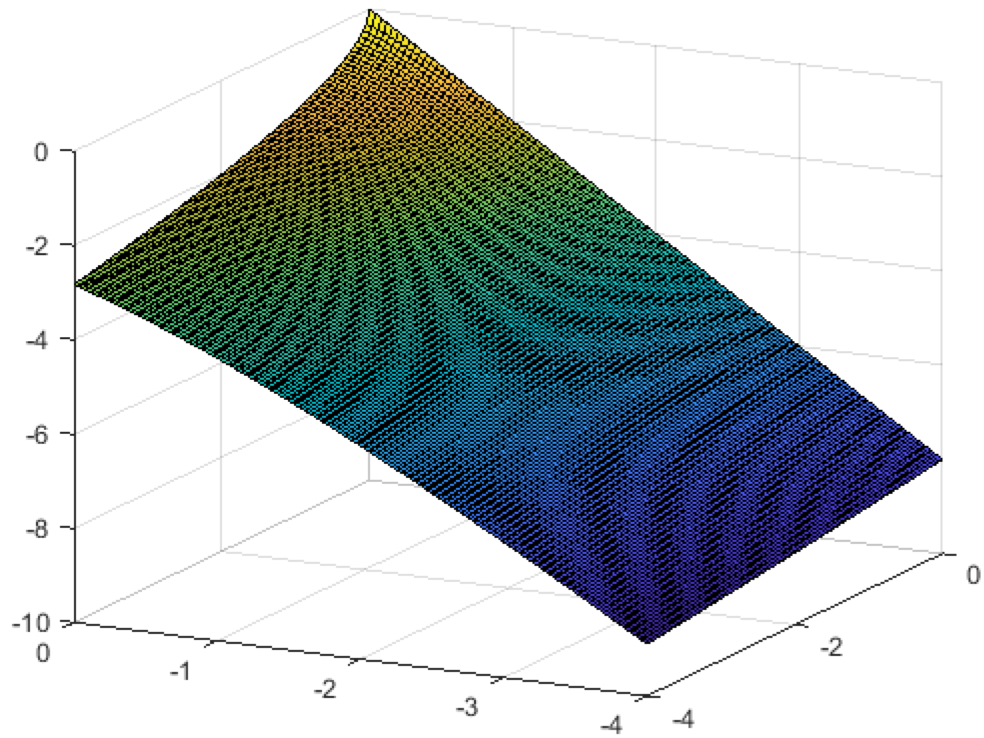
5. Solución de (1), con la condición inicial (4) Esto es:

$$x(s,0) = \frac{s^2}{2}; \quad y(s,0) = s; \quad u(s,0) = s$$

$$\left.\begin{array}{r} x(s,t) = \dfrac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2} \\ \\ y(s,t) = t + s \\ \\ u(s,t) = t + s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = u \\ \\ 2x = (t+s)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} y = u \\ y^2 = 2x = u^2 \end{array}$$

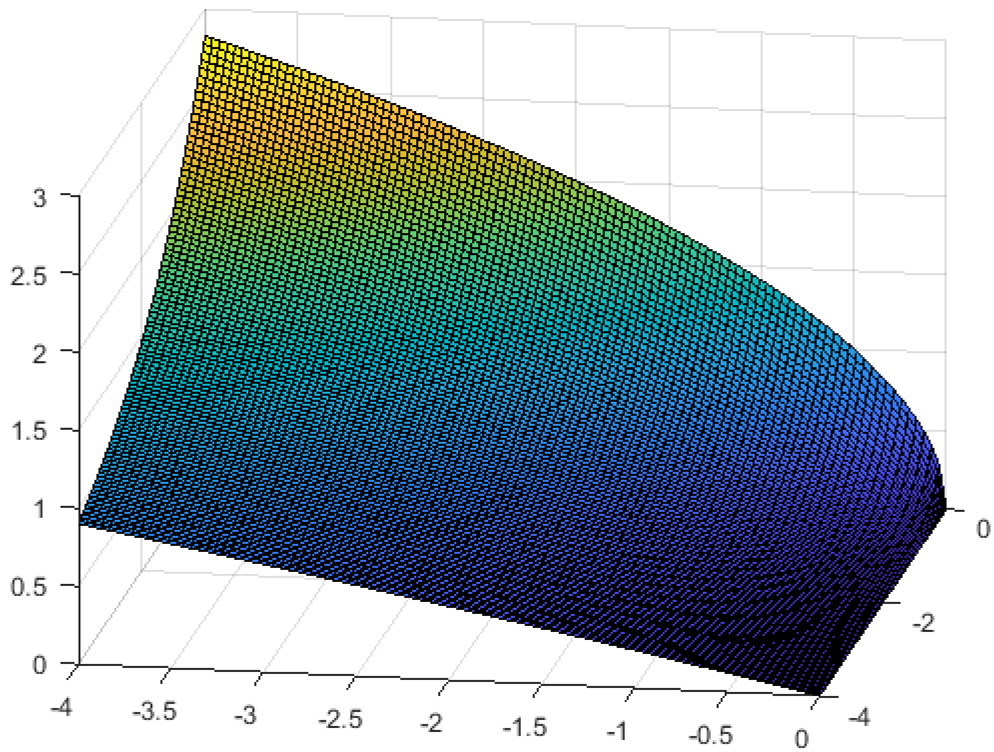
Y el script para programar en Matlab la gráfica de la función es, teniendo en cuenta los signos de las raíces:
para la raíz negativa:

```
clc; clear all; close all
x = linspace(-4,0);
y = linspace(-4,0);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) y - sqrt(y.^2-2*x);

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
```



Para la raíz positiva:

```
clc; clear all; close all
x = linspace(-4,0);
y = linspace(-4,0);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) y + sqrt(y.^2-2*x);

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
```



6. Caso $(u,1)\nabla u = 0$ Es la ecuación homogenea y su sistema característico es:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0} \tag{7}$$

De la última igualdad sabemos que u es constante sobre las curvas características. Luego

$$\frac{dx}{u} = \frac{dx}{c} = \frac{dy}{1}; \quad c \in \mathbb{R} \tag{8}$$

$$dx = c \cdot dy; \quad c \in \mathbb{R} \tag{9}$$

$$d(x - cy) = 0 \Rightarrow x - cy = d; \quad d \in \mathbb{R} \tag{10}$$

$$u(x,y) = x - cy \tag{11}$$

El script y gráfica para matlab es lo siguiente:

```
clc;
clear all;
close all
y = linspace(-1000,1000);
x = y.^2./2;

[X,Y] = meshgrid(x,y);

u = @(x,y) y;

Z = u(X,Y);

surf(X,Y,Z)
```