UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES II

TAREA 2

Autor

ALFREDO HERRERA

Docente

FREDDY PAIVA

I. Formulación del Problema

$$y^{(4)} - \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, y''(0) = 0, y(1) = 0, y''(1) = 0 \tag{1}$$

II.Operador autoadjunto

Sea el operador $L = D^4 - \lambda$ en un $Dom(L)$,

$$Dom(L) = \left\{ y \in C^2(]0, L[) \cap C^1([0, L]) \mid y(0) = y'(0) = 0, y(1) = 0, y''(1) = 0 \right\}$$

Definición del producto interior.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = L^2(0,1)xL^2(0,1) \to \mathbb{R}$$
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \qquad f, g \in L^2(\Omega)$$

Sea $y, z \in Dom(L)$.
por demostrar que $\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle$ Asi

$$\langle Ly, z \rangle = \langle D^{(4)}y + \lambda y, z \rangle = \langle D^{(4)}y, z \rangle + \langle \lambda y, z \rangle = \langle D^{(4)}y, z \rangle + \langle y, \lambda z \rangle \tag{2}$$

Luego

$$\left\langle D^4 y, z \right\rangle = \int_0^1 y^{(4)}(x)z(x)dx = y'''(x)z(x) \mid_0^1 - \int_0^1 y'''(x)z'(x)dx =$$
$$-y''(x)z'(x) + \int_0^1 y''(x)z''(x)dx = y'(x)z''(x) \mid_0^1 - \int_0^1 y'(x)z'''(x)dx$$
$$= -y(x)z''(x) \mid_0^1 + \int_0^1 y(x)z^{(4)}(x)dx = \int_0^1 y(x)z^{(4)}(x)dx = \langle y, D^4 z \rangle \tag{3}$$

De (2) y (3) se tiene que

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle$$

Asi L es autoadjunto y por teorema espectral existe una familia creciente de valor propios

III. Ortogonalidad

Las funciones propias asociada a valor propio correspondiente son ortogonales.

$$\begin{array}{rr} y_1^{(4)} + \lambda_1 y_1 = 0 & y_2^{(4)} + \lambda_2 y_2 = 0 \\ y_1(0) = y_1''(0) = 0 & y_2(0) = y_2''(0) = 0 \\ y_1(1) = y_1''(1) = 0 & y_2(1) = y_2''(1) = 0 \end{array}$$

multiplicando por y_1 y y_2 las ecuaciones correspondiente queda:

$$y_2 y_1^4 + \lambda_1 y_1 y_2 = 0$$
$$y_1 y_2^4 + \lambda_2 y_1 y_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 y_2^4 - y_2 y_1^{iv} + \lambda_2 y_1 y_2 - \lambda_1 y_1 y_2 \Longleftrightarrow$$

integrando

$$\int_0^| (y_1 y_2^{iv} - y_2 y_1^{iv})dx = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 y_1 y_2 dy \Longrightarrow$$

$$I = \int_0^| (y_1 y_2^{iv} - y_2 y_1^{iv})dx = y_1 y_2'''|_0^1 - \int_0^1 y_1' y_2''' dx - y_2 y_1'''|_0^1 - \int_0^1 y_2' y_1''' dx$$

$$I = y_1 y_2'''|_0^1 - y_1' y_2''|_0^1 + \int_0^1 y_1'' y_2'' dx - y_2 y_1''|_0^1 + y_2' y_1''|_0^1 - \int_0^1 y_2'' y_1'' dx$$

Por las condiciones de contorno

$$I = 0 \Longrightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 y_1 y_2 dy = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\int_0^1 y_1 y_2 dy = 0$$

IV. Signo de los valores propios

Sea (λ, y) un par característico de valor y función propia.
multiplicando(1) por y

$$y(x)y^{(4)}(x) - \lambda y^2(x) = 0$$

integrando entre 0 y 1

$$\lambda \int_0^1 y^2(x) = \int_0^1 y(x)y^{(4)}(x)dx = y(x)y'''(x)\ |_0^1 - \int_0^1 y'(x)y'''(x)dx$$

$$= -y'(x)y''(x)\ |_0^1 + \int_0^1 y''(x)y''(x)dx = \int_0^1 y''(x)y''(x) = ||y_0''(x)||^2 \Rightarrow$$

$$\lambda ||y||^2 = ||y''||^2 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{||y''||^2}{||y||^2} \geq 0$$

observemos que si $\lambda = 0 \Longleftrightarrow ||y_0''||^2 = 0 \Longleftrightarrow y''(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$
Así $y_0(x) = aX$ con $a \in \mathbb{R}$ pero $y_0(1) = 0$ Por lo tanto los valores propios son positivos.
Sea $\lambda = \alpha^4$, $\alpha > 0$

$$(D^4 - \alpha^4)y = 0,\ 0 < x < 1$$

$$y(0) = y''(0) = 0$$

$$y(1) = y''(1) = 0$$

$$D^4 - \alpha^4 = (D^2 - \alpha^2)(D^2 + \alpha^2) \Longleftrightarrow$$

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\cosh(\alpha x) + E\sinh(\alpha x)$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \Longleftrightarrow 0 = A1 + C1$$

$$y''(0) = 0 \Longleftrightarrow 0 = -A\alpha + C\alpha$$

$$\iff A = C = 0$$

Por lo tanto

$$y(x) = B\sin(\alpha x) + Esenh(\alpha x)$$

$$y(1) = 0 \iff 0 = B\sin\alpha + E\sinh\alpha, \quad \alpha \neq 0$$

$$y''(1) = 0 \iff 0 = -B\alpha^2\sin\alpha + E\alpha^2\sinh\alpha, \quad \alpha \neq 0$$

Luego.

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha & \sinh\alpha \\ -\alpha^2\sin\alpha & \alpha^2\sinh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que existe una infinidad de funciones propias y valores propios, el sistema anterior tiene infinitas soluciones, por lo que el rango es 1.
Por propiedades de determinante se tiene que

$$\alpha^2 \begin{bmatrix} \sin\alpha & \sinh\alpha \\ -\sin\alpha & \sinh\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\alpha^2 \sin\alpha\sinh\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego $\sinh\alpha = 0 \iff \alpha = 0$ pero $\alpha > 0$ por lo tanto $sin(\alpha) = 0 \iff \alpha = n\pi,\ n \in \mathbb{N}$
Funciones y valores propios
Valores propios :

$$\lambda = (n\pi)^4$$

funciones propias :

$$y_1(x)_n = \sin(n\pi x) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_2(x)_n = \sinh(n\pi x) \quad n \in \mathbb{N}$$

Figura 1: Gráfica de y_1 y sus valores propios

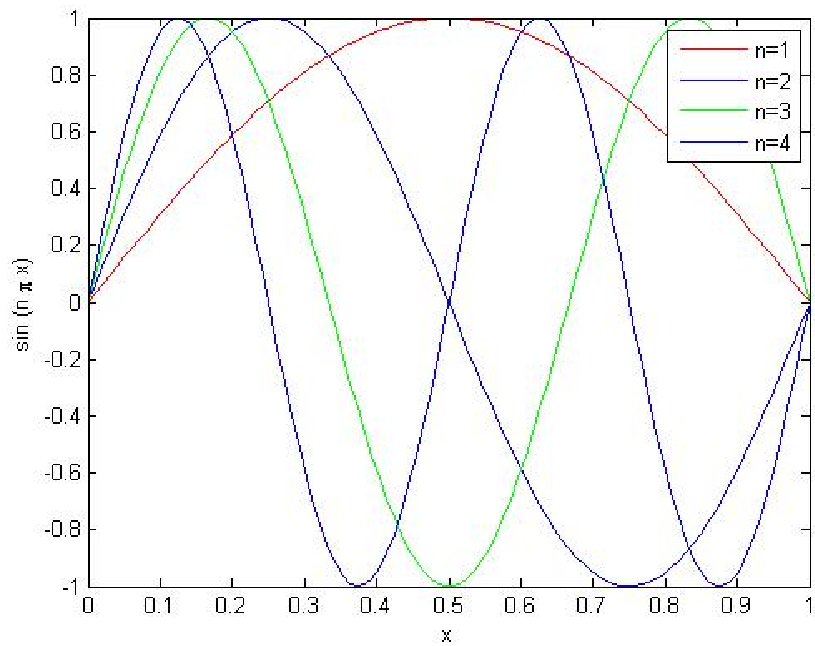

Figura 2: Gráfica de y_2 y sus valores propios