Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Tarea 2

Docente:
Freddy Paiva

Alumno:
Alberto Mardones González

Ayudantes:
Iván Navarrete
Sebastián Moraga

Considere la Ecuacion Diferencial

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 < x < \pi$$

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

1. Llevar la ecuación a su forma adjunta.
2. Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente.
3. Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un producto interior $L^2(\Omega)$.
4. Encontrar los valores propios y las funciones propias.
5. Interprete los resultados como un problema de vigas con deflexión. Además, dar 3 primeros modos de vibración.
6. Graficar λ_n, f_n, con $n = 1, 2, 3, 4$.

Resolución:
La forma adjunta de una ED es:

$$\frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + (\lambda p(x) - q(x))\, y = 0 \qquad a < x < b$$

Así, es claro ver que en nuestra ED, $r(x) = 1$, $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$. Por lo tanto, la forma adjunta queda de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left[1 \cdot \frac{dy}{dx}\right] + (\lambda \cdot 1)y = 0 \qquad 0 < x < \pi$$

Sea $\Omega = (0, \pi)$ un abierto de $\mathbb{R}$. Considerando el operador $L = D^2 + \lambda$, en donde:

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$Dom(L) = \left\{ y \in C^2(]0,\pi[) \cap C([0,\pi]) : y(0) = 0,\, y(\pi) = 0 \right\} = L_0^2(\Omega)$$

El producto interior está definido como:

$$< f, g >= \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Debemos demostrar que el operador L es autoadjunto. Considerando $f, g \in Dom(L)$, y aplicando las condiciones de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned}
< Lf, g > &=< D^2 f + \lambda f, g > \\
&=< D^2 f, g > +\lambda < f, g > \\
&=< f'', g > +\lambda < f, g > \\
&= \int_\Omega f''(x)g(x)dx + \lambda < f, g > \\
&= g(x)f'(x)\big|_0^\pi - \int_\Omega f'(x)g'(x)dx + \lambda < f, g > \\
&= g(x)f'(x)\big|_0^\pi - g'(x)f(x)\big|_0^\pi + \int_\Omega f(x)g''(x)dx + \lambda < f, g > \\
&= \int_\Omega f(x)g''(x)dx + \lambda < f, g > \\
&=< f, g'' > + > f, \lambda g > \\
&=< f, D^2 g > + < f, \lambda g > \\
&=< f, Lg >
\end{aligned}$$

Para encontrar el signo de los valores propios, multiplicaremos e integraremos sobre Ω la ecuación.

$$\begin{aligned}
y'' + \lambda y = 0 &\Longleftrightarrow \int_\Omega y''(x)y(x)dx + \lambda \int_\Omega (y(x))^2 dx = 0 \\
&\Longleftrightarrow \int_\Omega [(y(x)y'(x))' - (y'(x))^2]dx + \lambda \int_\Omega (y(x))^2 dx = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda \int_\Omega (y(x))^2 dx = - \int_\Omega [(y(x)y'(x))' - (y'(x))^2]dx \\
&\Longleftrightarrow \lambda \left\|y\right\|^2 = -y(x)y'(x)\Big|_0^\pi + \int_\Omega (y'(x))^2 dx \\
&\Longleftrightarrow \lambda \left\|y\right\|^2 = \left\|y'\right\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \lambda = \frac{\left\|y'\right\|^2}{\left\|y\right\|^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Por lo cual, los valores propios λ son no negativos. En el caso de que $\lambda = 0$, se tendría que

$$y''(x) = 0 \Longleftrightarrow y(x) = Ax + B \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = A \cdot 0 + B \Leftrightarrow B = 0 \\
y(\pi) = 0 \Leftrightarrow 0 = A \cdot \pi + 0 \Leftrightarrow A = 0
\end{aligned}$$

Así, $y(x) \equiv 0$, por lo cual $\lambda = 0$ no es valor propio pues la función nula no es función propia. De tal manera, $\lambda > 0$. Luego, tenemos que:

$$y(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aplicando las condiciones de contorno en nuestra función

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 cos(0) + c_2 sen(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow c_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(\pi) = 0 &\Leftrightarrow 0 \cdot cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\
&\Leftrightarrow sen(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \qquad (*) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \qquad n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_n} = n \qquad n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \lambda_n = n^2 \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene el sistema de soluciones $\{sen(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ y, así,

$$y_n(x) = c \cdot sen(nx) \qquad n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$$

Observación: Notar que en $(*)$ no consideramos la opción de $c_2 = 0$ ya que, de ser así, $y(x) \equiv 0$, lo cual no nos interesa.

Ahora, para que los valores propios sean crecientes, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_n < \lambda_{n+1} &\Leftrightarrow n^2 < (n+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{(n+1)^2} \\
&\Leftrightarrow |n| < |n+1| \\
&\Leftrightarrow n < n+1
\end{aligned}$$

■

Observación: Como $n \in \mathbb{N}$, el valor de $|n|$ y $|n+1|$ es n y $n+1$ respectivamente.

De tal forma, queda demostrado que los valores propios λ son positivos y crecientes.

Para demostrar que dos funciones propias asociadas a valores propios distintos son ortogonales, procederemos a tomar dos pares característicos $(y, \lambda), (z, \beta)$, con $\lambda, \beta \in \mathbb{R}^+$, tales que:

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{1}$$
$$z'' + \beta z = 0 \tag{2}$$

Aplicando el producto interior en (1) con respecto a z, y en (2) con respecto a y, e igualando, nos queda:

$$\begin{aligned}
< y'' + \lambda y, z >=< z'' + \beta z, y > &\Leftrightarrow \int_\Omega [y''(x) + \lambda y(x)]z(x)dx = \int_\Omega [z''(x) + \beta z(x)]y(x)dx \\
&\Leftrightarrow \int_\Omega [y''(x)z(x) + \lambda y(x)z(x)]dx = \int_\Omega [z''(x)y(x) + \beta z(x)y(x)]dx \\
&\Leftrightarrow \int_\Omega y''(x)z(x)dx + \int_\Omega \lambda y(x)z(x)dx = \int_\Omega z''(x)y(x)dx + \int_\Omega \beta y(x)z(x)dx \\
&\Leftrightarrow (\lambda - \beta)\int_\Omega y(x)z(x)dx = \int_\Omega [z''(x)y(x) - y''(x)z(x)]dx \\
&\Leftrightarrow (\lambda - \beta) < y, z >= \int_\Omega [(z'(x)y(x))' - z'(x)y'(x) - (y'(x)z(x))' + z'(x)y'(x)]dx \\
&\Leftrightarrow (\lambda - \beta) < y, z >= \int_\Omega (z'(x)y(x))'dx - \int_\Omega (y'(x)z(x))'dx \\
&\Leftrightarrow (\lambda - \beta) < y, z >= (z'(x)y(x))\Big|_0^\pi - (y'(x)z(x))\Big|_0^\pi \\
&\Leftrightarrow (\lambda - \beta) < y, z >= 0 \\
&\Leftrightarrow < y, z >= 0
\end{aligned}$$

Así, como $\lambda \neq \beta$, las funciones propias asociadas a valores propios distintos son ortogonales.

■

Tenemos nuestra ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

Considerando $\lambda = P/EI$, en donde E es el módulo de Young de la elasticidad, I es el momento de inercia, y P es una fuerza (o carga) vertical compresiva, tenemos el problema de viga:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0$$

Con las condiciones de contorno que tenemos, podemos interpretar que la viga está fija en sus dos bordes, pero no podemos inferir nada más. La curva de deflexión que corresponde a la carga crítica más pequeña es:

$$y_1(x) = sen(x)$$

Además, los dos siguientes modos de vibración son:

$$y_2(x) = sen(2x)$$
$$y_3(x) = sen(3x)$$

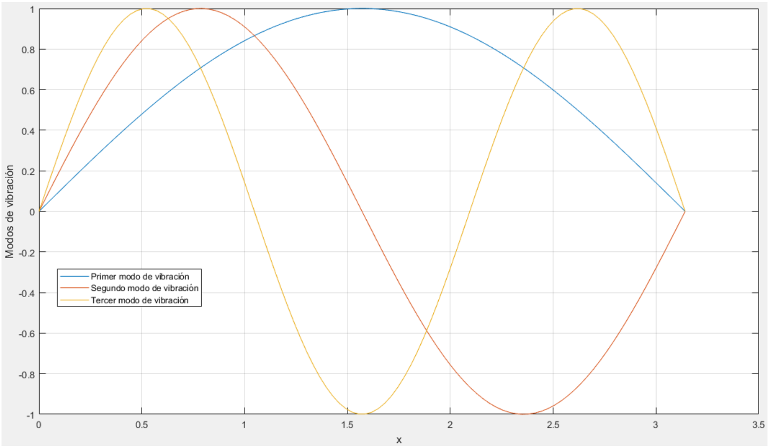

Figura 1: Gráfico de los 3 primeros modos de vibración.

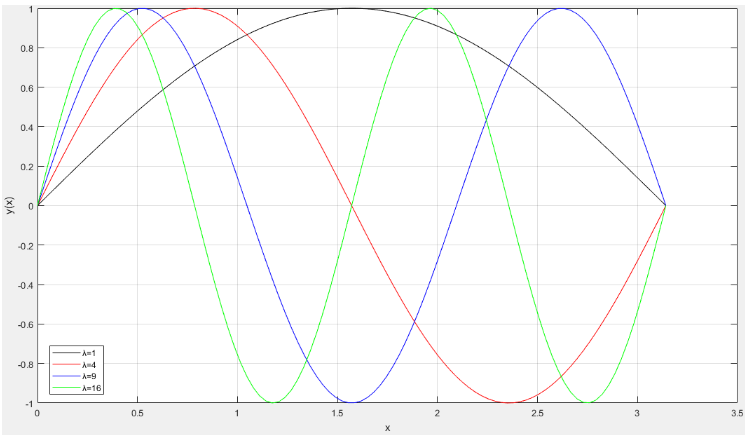

Figura 2: Gráfico de las funciones para λ=1,4,9,16.

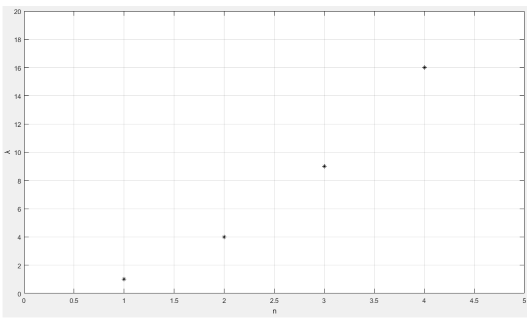

Figura 3: Gráfico de los valores propios y su respectivo n