UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 1

ECUACIONES DIFERENCIALES II

En los ejercicios que siguen es libre de usar todo lo visto en el curso (teoría y ayudantía). Entrega:(vía webmail) En LATEXy entregar una copia impresa para su revisión. Si hay copias serán calificados con un 1.0.

TAREA Para la tarea final consta de una sola entrega (sin la modalidad de entregar-corregir-entregar) del informe resolviendo el problema i) que es obligatorio, para este problema debe graficar su evolución en Matlab. Luego de $\{ii), iii), iv), v)\}$ elija tres problemas y resuelvalos con sus respectivas gráficas, de no tener condiciones iniciales usted elija alguna distinta de 0.
Para la entrega debe mandar el informe vía webmail y por grupo presentarme las gráficas en sus computadores personales un día y hora fijados. El problema "NO OBLIGATORIO"lo entregan solamente si quieren, no cuenta como problema de elección y tendrá algún puntaje adicional solo si está bien resuelto. La tarea les requerirá bastante tiempo por lo que les sugiero empezarlo cuanto antes. Suerte.

i) Considere la membrana

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} :^2 + y^2 \leq 1\} \tag{1}$$

Si el peso es despreciable y no existen fuerzas externas actuando en ella, la membrana vibra de acuerdo al siguiente problema.

$$\begin{array}{cc} u_{tt} = c^2 \Delta u & r \in (0,1), \theta \in [0, 2\pi], t > 0 \\ u(r, \theta, 0) = g(r, \theta) & r \in (0,1), \theta \in [0, 2\pi] \\ u_t(r, \theta, 0) = h(r, \theta) & r \in (0,1), \theta \in [0, 2\pi] \\ u(1, \theta, t) = 0 & \theta \in [0, 2\pi], t > 0 \end{array} \tag{2}$$

Encuentre una solución u en el caso en que $h = 0, g = g(r)$, para empezar note que la solución es única ya que tiene simetría radial, de lo contrario se podría construir otra solución rotando la solución dada. Resuelva mediante separación de variables.

ii) Resuelva el siguiente problema de Poisson-Dirichlet en el disco unitario mediante separación de variables.

$$\begin{array}{cc} \Delta u(x, y) = y & B_1 \\ u = 1 & \partial B_1 \end{array} \tag{3}$$

Se sugiere comenzar con buscar soluciones de la forma $u = v + w$ donde v resuelve el problema con condiciones homogeneas y w resuelve el problema de Poisson no homogeneo(para el cual basta usar el principio del máximo). Además pase a coordenadas polares $v = V(r, \theta)$ donde V es 2π-periódico y resuelva la EDO.

iii) Sea $C > 0$ una constante, $g \in C^1((0,\pi))$ tal que $g(0) = g(\pi)$, resuleva la ecuación mediante separación de variables $u(x,t) = v(x)w(t)$:

$$\begin{array}{cc} u_t(x,t) = Cu_{xx}(x,t) & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{array} \tag{4}$$

iv) Considere $b \neq 0$ y mediante separación de variables $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ donde $v_x(0) = 0$ y $v_x(\pi) = b$ (como por ejemplo $v(x) = bx^2/(2\pi)$) demuestre que:

$$\begin{array}{cc} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi,t) = b & t > 0 \end{array} \tag{5}$$

tiene como solución

$$u(x,t) = \frac{b}{\pi}t + \frac{bx^2}{2\pi} - \frac{b\pi}{6} + \frac{2b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}e^{-k^2 t}cos(kx) \tag{6}$$

hint: Al momento de resolver el problema de Newmann para w, primero vea qué forma tiene w expandida como serie, luego encuentre los coeficientes para que w satisfaga la EDP que genera la separación de variables, luego concluya.

v) La superficie de una placa rectangular delgada de largo a y ancho b está termicamente aislada mientras que en sus cuatro bordes la temperatura se mantiene a cero grados. Inicialmente se le aplica una función $g(x,y)$. Asuma coeficiente de difusión $K = 1$. Determine la evolución de temperatura sabiendo su valor inicial.

NO OBLIGATORIO: Hallar: $\int x^4 J_1(x)$;$\int J_3(x)$;$\dfrac{dx^3 J_4(x^2)}{dx}$; $\int \dfrac{J_4(x)}{x^3}$: en terminos de J_0, J_1 funciones de Bessel.

Concepción, Noviembre 2017
FP/SMS/INJ/sms