Universidad de Concepción

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS.

DEPARTAMENTO DE INGERNIERÍA MATEMÁTICA.

ECUACIÓNES DIFERENCIALES II.

TAREA I

Profesor: Freddy Paiva.
Ayudantes : Iván Navarrete.
Sebastian Moraga.

Lucas Romero
Mario Constanzo.
Estudiantes de Ingeniería Civíl Matemática.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

---

1. Resuelva la siguiente EDP. de dos formas vistas en clases.

$$3u_x + 2u_y = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$

   a) Usando el método de integrales primeras.

   - Sistema caracteristico de la EDP.

   $$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{0}$$

   - Calculamos la Primera integral Primera.

   $$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{2} \Leftrightarrow 2dx = 3dy \Leftrightarrow 2dx - 3dy = 0 \Leftrightarrow d(2x - 3y) = 0$$
   $$\Leftrightarrow 2x - 3y = C_1 \qquad ; C_1 \epsilon R$$

   - La Primera integral es:

   $$\Phi(x,y,u) = 2x - 3y$$

   - Es facil ver que la segunda integral primera es :

   $$\Psi(x,y,u) = u$$

   - Si Ψ y Φ son funcionalmente independientes, existe un campo escalar(Ω) de clase C^1 talque

   $$F(\Psi, \Phi) = 0$$

   define implicitamente la solucion o bien

   $$\Psi = \mathcal{H}(\Phi)$$

   $\mathcal{H}$, una función real de clase $C^1(\Omega)$

   - Si$\nabla\Psi$ y $\nabla\Phi$ son vectores linealmente independientes, Ψ y Φ son funcionalmente independientes

   $$\nabla\Psi = [0,0,1]$$
   $$\nabla\Phi = [2,-3,0]$$

   Como son vectores linealmente independientes las integrales primeras son funcionalmente independientes

- Luego la solución general de la EDP. es de la forma:

$$\Psi = \mathcal{H}(\Phi) \Leftrightarrow u(x,y) = \mathcal{H}(2x - 3y)$$

- Usando la condición inicial

$$u(x,0) = \mathcal{H}(2x) = f(x)$$

- Con el cambio de variable v=$2x$, tenemos:

$$f(\frac{v}{2}) = \mathcal{H}(v)$$

- Entonces existe una función $f \ \epsilon \ C^1(\Omega)$ tal que la solución de la EDP es:

$$u(x,y) = f(x - \frac{3y}{2}) \quad ;(x,y)\epsilon\Omega$$

b) Por parametrización.

- Parametrizamos la curva inicial.

  $\Gamma_0 := \{X(s,0) = s \quad Y(s,0) = 0 \quad u(s,0) = f(s) \quad ; s \ \ \epsilon \ \ R\}$

- El sistema caracteristico

$$\begin{array}{ccc} 1.) \ \dfrac{dx}{dt} = 3 & 2.) \ \dfrac{dy}{dt} = 2 & 3.) \ \ \dfrac{du}{dt} = 0 \\ X(s,0) = s & Y(s,0) = 0 & u(s,0) = f(s) \end{array}$$

- Resolvemos los PVI con sus condiciones iniciales (CI).

$$1.)X(s,t) = 3t + h_1(s) \overset{porCI}{\Rightarrow} X(s,t) = 3t + s$$

$$2.)Y(s,t) = 2t + h_2(s) \overset{porCI}{\Rightarrow} Y(s,t) = 2t$$

$$3.)u(s,t) = h(s) \overset{porCI}{\Rightarrow} u(s,t) = f(s)$$

- Calculamos el Jacobiano para saber si existe un S(x,y) y un T (x,y) que defina la solución de la EDP.

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

  Por lo que se define una solución para la EDP cuasilineal.

- Luego

$$\left.\begin{array}{c} X = 3t + s \\ Y = 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} s = x - 3t \\ t = \frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s = x - \frac{3y}{2}$$

- La solución a la EDP es

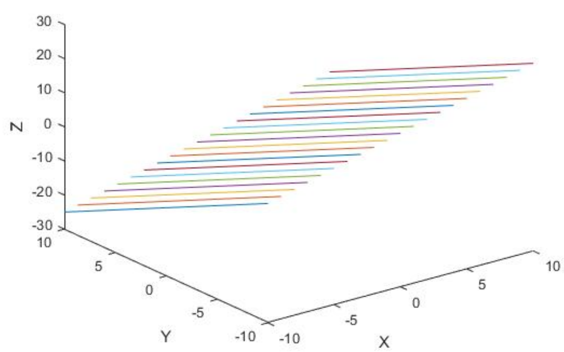
$$u(x,y) = f(x - \frac{3y}{2}) \qquad ; (x,y) \epsilon \Omega$$

Haciendo variar f(x) definiremmos el conjunto abierto Ω en el cual se determina la solución de la EDP

- Sea f(x)=x, nos queda la superficie:

$$u(x,y) = x - \frac{3y}{2} \qquad \Omega := \left\{(x,y)\epsilon R^2\right\}$$

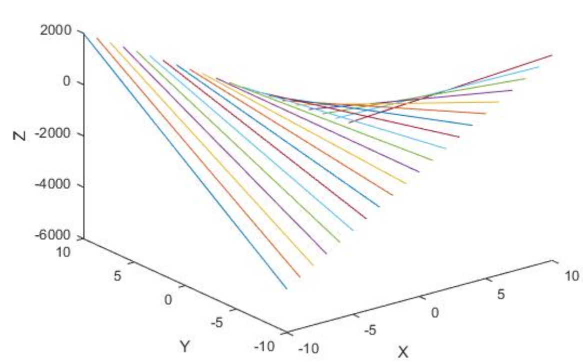
Figura 1



- Sea f(x)=x^2, la superficie esta definida por

$$u(x,y) = (x - \frac{3y}{2})^2 \qquad \Omega := \left\{(x,y)\epsilon R^2\right\}$$

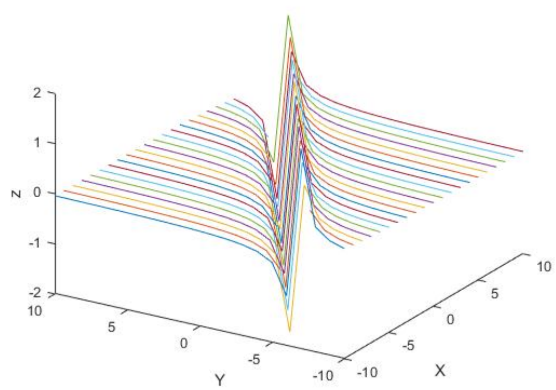
Figura 2



- Sea f(x)= x^{-1}, la superficie queda definida por

$$u(x,y) = (\frac{1}{x} - \frac{2}{3y}) \qquad \Omega := \{(x,y); x \neq \frac{3y}{2}; x \neq 0, y \neq 0\}$$

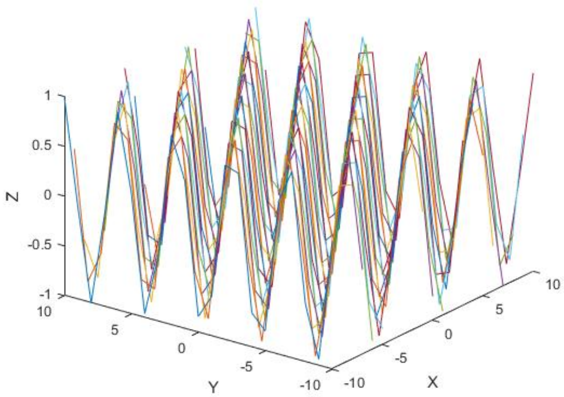
Figura 3



- Sea $f(x)$=$cos(x)$, la superficie queda definida por

$$u(x,y) = \cos(x - \frac{3y}{2}) \qquad \Omega := \left\{(x,y)\epsilon R^2\right\}$$

Figura 4



2. Resuelva la siguiente EDP. de dos formas vistas en clases.

$$uu_x + u_y = 1$$
$$u(s,0) = \alpha s$$
$$X(s,0) = s$$
$$Y(s,0) = 0$$

a) Por parametrización.

- El sistema caractristico nos queda

$$I. \quad \frac{dx}{dt} = u \qquad II. \quad \frac{dy}{dt} = 1 \qquad III. \quad \frac{du}{dt} = 1$$
$$X(s,0) = s \qquad Y(s,0) = 0 \qquad u(s,0) = \alpha s$$

- Resolvemos el PVI II y el PVI III.
  Para el PVI II.

$$Y(s,t) = t + h_2(s) \overset{porCI}{\Rightarrow} Y(s,t) = t \tag{1}$$

  Para el PVI III.

$$u(s,t) = t + h(s) \overset{porCI}{\Rightarrow} u(s,t) = t + \alpha s \tag{2}$$

- Luego utilizando el resultado obtenido en el PVI III , el PVI I queda de la forma

$$\frac{dx}{dt} = t + \alpha s$$
$$X(s,0) = s$$

- Resolvemos el PVI I

$$X(s,t) = \frac{t}{2}^2 + t\alpha s + h_1(s) \overset{porCI}{\Rightarrow} X(s,t) = \frac{t}{2}^2 + t\alpha s + s$$

- Calculamos el Jacobiano para saber si existe un S(x,y) y un T (x,y) que defina la solución de la EDP.

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \alpha t + 1 & t + \alpha s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha t + 1$$

  Como se localizó Γ_0 en t=0 desde el comiénzo.

$$\alpha t + 1 = 1 \neq 0$$

  Por lo que se define una solución para la EDP cuasilineal para todo $\alpha \epsilon \mathbf{R}$

- Luego

$$\left.\begin{matrix} X = \frac{t}{2}^2 + t\alpha s + s \\ Y = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = \frac{2x - t^2}{2t\alpha + 2} \\ t = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = \frac{2x - y^2}{2y\alpha + 2}$$

- Así la solución de la EDP es

$$u(x,y) = \alpha \frac{2x - y^2}{2y\alpha + 2} \quad ; x, y \epsilon \Omega$$

b) Usando el método de integrales primeras.

- Calculamos la primera integral primera.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{u} &= \frac{du}{1} \\
\Leftrightarrow dx - udu &= 0 \\
\Leftrightarrow d(x - \frac{u^2}{2}) &= 0 \\
\Leftrightarrow x - \frac{u^2}{2} &= C_1 \quad ; C_1 \epsilon R
\end{aligned}$$

- Por lo que la primera integral primera esta definida por

$$\Phi(x, y, u) = (x - \frac{u^2}{2})$$

- Es facil ver que la segunda integral primera esta definida por

$$\Psi(x, y, u) = (y - u)$$

- Si Ψ y Φ son funcionalmente independientes, existe un campo escalar(Ω) de clase C^1 talque

$$F(\Psi, \Phi) = 0$$

define implicitamente la solucion o bien

$$\Psi = \mathcal{H}(\Phi)$$

$\mathcal{H}$, una función real de clase $C^1(\Omega)$

- Si$\nabla\Psi$ y $\nabla\Phi$ son vectores linealmente independientes, entonces Ψ y Φ son funcionalmente independientes.

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi &= [0, 1, -1] \\
\nabla\Phi &= [1, 0, -1]
\end{aligned}$$

Como son vectores linealmente independientes las integrales primeras son funcionalmente independientes.

- Así la solución general de la EDP es

$$f(x - \frac{u^2}{2}, y - u) = 0$$

- Luego, aplicando el dato inicial en las integrales primeras

$$2x-(\alpha x)^2=2C_1 \qquad (1)$$
$$-(\alpha x)=C_2 \qquad (2)$$

Despejamos αx de (1)

$$2x-2C_1=(\alpha x)^2={C_2}^2$$

Nos queda que

$${C_2}^2=2x-2C_1 \quad (3)$$

Reemplazando C_1 y C_2 en (3)

$$(y-u)^2=u^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad y^2-2uy+u^2=u^2\\
&\Leftrightarrow \quad 2uy=-y^2\\
&\Leftrightarrow \quad 2uy+2x=2x-y^2\\
&\Leftrightarrow \quad u=u(\frac{2x-y^2}{2uy+2x})\\
&\Leftrightarrow \quad u=\frac{2ux-uy^2}{2uy+2x}\\
&\Leftrightarrow \quad u=\frac{2ux}{2yu+2x}-(\frac{y^2u}{x})(\frac{x}{2yu+2x})\\
&\Leftrightarrow \quad u=\frac{2u-y^2\frac{u}{x}}{2y\frac{u}{x}+2}
\end{aligned}$$

- Como u $=\alpha x$

$$u=\frac{2(\alpha x)-y^2\frac{\alpha x}{x}}{2y\frac{\alpha x}{x}+2}\Leftrightarrow u=\frac{2(\alpha x)-y^2\alpha}{2y\alpha+2}$$

- Así la solución de la EDP

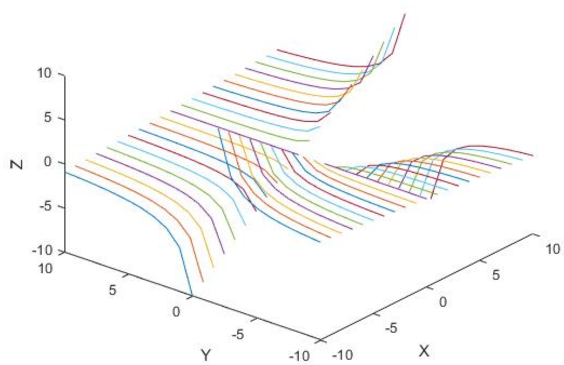
$$u(x,y)=\alpha\frac{2x-y^2}{2y\alpha+2} \qquad ;(x,y)\epsilon\Omega$$

Haciendo variar α determinaremos el conjunto abierto Ω en el cual la función esta definida.

- sea α= 1 , tenemos la superficie

$$u(x,y) = \frac{2x - y^2}{2y + 2} \qquad \Omega := \{(x,y); y \neq -1\}$$

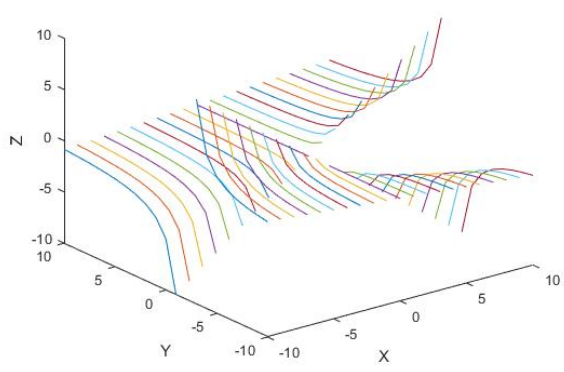
Figura 5



- Sea $\alpha = \frac{1}{2}$, nos queda la superficie

$$u(x,y) = \frac{2x - y^2}{2y + 4} \qquad \Omega := \{(x,y); y \neq -2\}$$

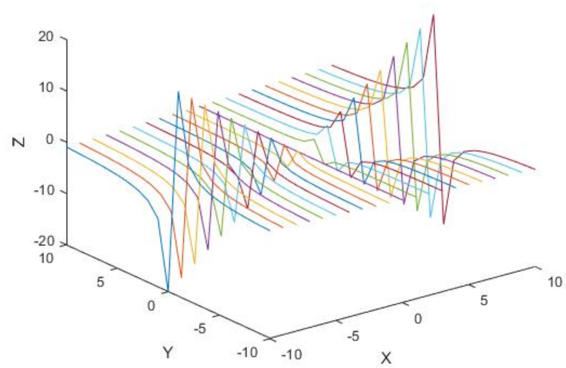
Figura 6



- Sea α=2 , nos queda la superficie

$$u(x,y)=\frac{4x-2y^2}{4y+2} \qquad \Omega := \left\{(x,y); y \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

Figura 7



- Sea α=0, nos queda la superficie

$$u(x,y)=0 \qquad \Omega := \left\{(x,y)\epsilon R^2\right\}$$

Figura 8