Universidad de Concepción

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS.

DEPARTAMENTO DE INGERNIERÍA MATEMÁTICA.

ECUACIÓNES DIFERENCIALES II.

TAREA II

Profesor: Freddy Paiva.
Ayudantes : Iván Navarrete.
Sebastian Moraga.

Lucas Romero
Estudiante de Ingeniería Civíl Matemática.

Sea el problema de valores de frontera:

$$y'' + 2y' + (\lambda + C)y = 0 \quad ; C > 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(5) = 0 \end{cases}$$

- Llevar la ecuación a su forma adjunta
  Sea el factor integrante

$$p(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

Multiplicamos la ecuación (1) por el factor integrante $p(x)$

$$\begin{aligned} & e^{2x}y'' + 2e^{2x}y' + 2e^{2x}(\lambda + C)y = 0 \\ \iff & (e^{2x}y')' + (e^{2x}C + e^{2x}\lambda)y = 0 \end{aligned}$$

Asi la EDO escrita en su forma autoadjunta es

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}\frac{dy}{dx}] + \mu e^{2x}y = 0 \qquad ; \mu = \lambda + C.$$

Así $r(x) = e^{2x}$ y $p(x) = e^{2x}$
Se define el producto interior$< \cdot, \cdot >$: $L^2u(\Omega) \times L^2u(\Omega) \to \mathbb{R}$.
El operador $L = e^{-2x}\frac{d}{dx}[e^{2x}\frac{d}{dx}]$ es autoadjunto con respecto al producto interior$< \cdot, \cdot >$ bajo las condiciones Dirichlet

$$Dom(L) = \{y \epsilon C^2(]0,5[) \cap C([0,5]); y(0) = y(5) = 0\} \quad \Omega := (0,5)$$

$$\forall y, z \epsilon Dom(L) \quad < Ly, z > = < y, Lz >$$

$$\begin{aligned} < Ly, z > &= \int_\Omega e^{2x}Ly(x)z(x)dx \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}y'(x)]z(x)dx \end{aligned}$$

Realizando una integración por partes

$$\int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}y']z(x)dx = e^{2x}y'(x)z(x)|_\Omega - \int_\Omega e^{2x}y'(x)z'(x)dx$$

Nuevamente integramos por partes

$$\int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}y'(x)]z(x)dx = e^{2x}y'(x)z(x)|_\Omega - e^{2x}z'(x)y(x)|_\Omega + \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}z'(x)]y(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}y']z(x)dx &= e^{2x}y'(x)z(x)|_\Omega - e^{2x}z'(x)y(x)|_0^5 + \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}z'(x)]y(x)dx \\ &= [e^{2x}(y'(x)z(x) - z'(x)y(x))]_\Omega + \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}z'(x)]y(x)dx \\ &= e^{2x}\left| \begin{matrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{matrix} \right|_\Omega + \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}z'(x)]y(x)dx \end{aligned}$$

Como la función al ser evaluada en los puntos frontera es 0, el determinante de las matríces evaluadas en dichos puntos será igual a 0.

Por lo tanto

$$\int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}y'(x)]z(x)dx = \int_\Omega \frac{d}{dx}[e^{2x}z'(x)]y(x)dx$$

Esto quiere decir que para cualquier función que pertenezca al domnio del L.

$$< Ly, z >=< y, Lz >$$

Por lo tanto el operador L es autoadjunto.En consecuencia, gracias al teroema espectral sabemos que existen infinitos valores propios μ_n crecientes. Esto nos dice que para todo μ_n, existe al menos un $y_n$en el dominio de L,tal que

$$Ly_n = \mu_n y_n$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} e^{-2x}\frac{d}{dx}[e^{2x}y_n'(x)] &= -\mu_n y_n(x) \\ \iff \frac{d}{dx}[e^{2x}y_n'](x) &= -\mu_n e^{2x} y_n(x) \\ \iff y_n'' + 2y_n' + \mu_n y_n &= 0 \end{aligned}$$

- Signo de los valores propios.
  Multiplicamos la forma autoadjunta de la EDO por y

$$y\frac{d}{dx}[e^{2x}y'](x) = -\mu e^{2x}y^2(x)$$

$$\iff yy''(x) + 2yy'(x) = -\mu y^2(x)$$

Integramos

$$\begin{aligned} \int_\Omega yy''(x)dx + 2\int_\Omega yy'(x)dx &= -\mu\int_\Omega y^2(x)dx \\ \iff -[(yy')|_0^5 + ||y'||^2 - y^2|_\Omega &= \mu||y||^2 \\ \iff \mu||y||^2 &= ||y'||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Así los valores de μ son no negativos

$$\Rightarrow \lambda + C \geq 0$$

Si μ =0

$$\begin{aligned} y'' + 2y' &= 0 \\ (D(D+2))y &= 0 \\ y(x) &= Ax + Be^{-2x} \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = B = 0$$

$$y(5) = 5A = 0$$
$$\Longleftrightarrow A = B = 0 \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Así la única solución es la trivial $y(x) = 0, 0 < x < 5$ y no puede ser función propia, ya que las funciones propias no pueden ser la función nula. Por lo tanto los valores propios son positivos.

- Cálculo de los pares característicos

$$y'' + 2y' + \mu y = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (D^2 + 2D)y + \mu y = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ((D+1)^2 - 1)y + \mu y = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (D+1)^2 y + (\mu - 1)y = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (D+1)^2 y + \eta y = 0 \quad \eta = \mu - 1
\end{aligned}$$

Usando la siguiente identidad de los operadores diferenciales

$$L = p(D) \quad p \epsilon P_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
Le^{\beta x} Z &= p(D) e^{\beta x} Z \\
&= e^{\beta x} p(D + \beta) Z
\end{aligned}$$

Para el ejemplo

$$p(D) = (D+1)^2 + \eta$$

con el cambio de variable

$$y(x) = e^{-x} Z(x)$$

Así

$$[(D+1)^2 + \eta] e^{-x} Z = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad e^{-x}[D^2 + \eta] Z = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (D^2 + \eta) Z = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad Z'' + \eta Z = 0
\end{aligned}$$

Cambiando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
y(x) = e^{-x} Z(x) \quad &\Leftrightarrow \quad Z(x) = e^{x} y(x) \\
Z(0) \quad &= \quad e^{0} y(0) = 0 \\
Z(5) \quad &= \quad e^{5} y(5) = 0
\end{aligned}$$

Así, el ejemplo queda definido por

$$\begin{aligned}
Z'' + \eta Z &= 0 \\
Z(0) &= 0 \\
Z(5) &= 0
\end{aligned}$$

Resolvemos el problema de osilador armónico simple

- Sea $\eta = 0$

$$Z(x) = Ax + B$$

Usando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} Z(0) &= B = 0 \\ Z(5) &= 5A + B = 0 \end{aligned}$$

Así la única solución es

$$Z(x) = 0 \qquad \forall x \in (\Omega)$$

- Sea $\eta < 0$

$$Z(x) = C_1 e^{\sqrt{-\eta}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\eta}x}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} Z(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ Z(5) &= C_1 e^{5\sqrt{-\eta}} + C_2 e^{-5\sqrt{-\eta}} = 0 \\ \Rightarrow C_1 &= C_2 = 0 \end{aligned}$$

La solución es

$$Z(x) = 0$$

- Sea $\eta > 0$

$$Z(x) = A\cos(\sqrt{\eta}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\eta}x)$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} Z(0) &= A = 0 \\ Z(5) &= B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\eta}5) = 0 \\ &\iff 5\sqrt{\eta} = n\pi \qquad n \in \mathbb{N} \\ &\iff \eta = \frac{n^2\pi^2}{25} \end{aligned}$$

La solución de la EDO es

$$Z(x) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{5}x\right) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Como

$$\eta = \lambda + C - 1 \qquad C > 0$$

Los valores propios de la EDO son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{25} - C + 1 \qquad n \in \mathbb{N}, C > 0$$

y las funciones propias correspondientes son

$$y(x)_n = e^{-x} B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 25C + 25}}{5}x\right) \qquad n \in \mathbb{N}, C > 0, B \in \mathbb{R}$$

Así la familia de funciones propias esta definida por la sucesión

$$\left\{e^{-x} B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 25C + 25}}{5}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

- Ortogonalidad de las funciones propias

Sean y y f dos funciones propias pertenecientes al dominio del operador L asociadas a los valores propios λ y α respectivamente

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

$$f'' + \alpha f = 0 \tag{3}$$

Multiplicando (1) por f y (2) por y

$$\begin{aligned} fy'' + \lambda fy &= 0 \\ yf'' + \alpha yf &= 0 \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \lambda fy &= -(fy')' + (y'f') \\ \alpha yf &= -(yf')' + (y'f') \end{aligned}$$

Restando e integrando

$$\begin{aligned} (\lambda - \alpha)\int_\Omega f(x)y(x)dx &= \int_\Omega (y(x)f'(x))'dx - \int_\Omega (f(x)y'(x))'dx \\ &= [y(x)f'(x) - f(x)y'(x)]_\Omega \\ &= \left|\begin{array}{cc} y(x) & f(x) \\ y'(x) & f'(x) \end{array}\right|_\Omega \\ &= \left|\begin{array}{cc} y(5) & f(5) \\ y'(5) & f'(5) \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc} y(0) & f(0) \\ y'(0) & f'(0) \end{array}\right| \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno

$$\left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ y'(5) & f'(5) \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ y'(0) & f'(0) \end{array}\right| = 0$$

y como $\lambda \neq \alpha$

$$\int_\Omega y(x)f(x)dx = 0$$

Por lo tanto las funciones propias$f$ y y son ortogonales

- Interprete el resultado como un problema de vigas.

  El ejercicio debido a sus condiciones de contorno corresponde a una deflexión de una colummna delgada vertical de longitud 5 , en el cual las curvas de deflexión vienen definidas por las funciones

$$y(x)_n = e^{-x} B \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 25C + 25}}{5} x\right) \qquad n \in \mathbb{N}, C > 0, B \in \mathbb{R}$$

  como la ecuación diferencial es homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución es también una solución.Entonces tomaremos simplemente B=1, y para que las curvas de deflexión tengan un sentido físico, la constante C tomará valores en los cuales las funciónes solo nos den valores reales.
  Esto es

$$y(x)_n = e^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{n^2\pi^2 - 25C + 25}}{5} x\right) \qquad n \in \mathbb{N}, C \in]0, \frac{n^2\pi^2}{25} - 1]$$

- Gráfica de las curvas de deflexión.

  En la Figura 1 se muestran las curvas de deflexión para cuatro nodos distintos, asumiendo $C = 1$ en el intervalo $0 < x < 5$