Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Tarea 1

Vicente Marchant Contreras
Alberto Mardones González

Problema 1

Hallar $u \in C(\Omega)$, donde Ω será un abierto a definir en la resolución del ejercicio, tal que:

$$u_x + 2u_y = 1 + u$$
$$u(x, 3x+1) = sin(x)$$

Solución 1: Integrales Primeras
De la EDP obtenemos el sistema característico:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{1+u}$$

(i) Primera integral primera, resolvemos:

$$2dx - dy = 0$$
$$\Leftrightarrow d(2x-y) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - y = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \varphi(x,y,u) = 2x - y$$

(ii) Segunda integral primera, resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1} &= \frac{du}{1+u} \\ \Leftrightarrow \frac{du}{dx} - u &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}[e^{-x}u] &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow e^{-x}u &= -e^{-x} + c \\ \Leftrightarrow (u+1)e^{-x} &= c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ \Rightarrow \psi(x,y,u) &= (u+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

(iii) Las integrales primeras son funcionalmente independientes. En efecto:

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(x,y,u) \times \nabla\psi(x,y,u) &= [2,-1,0] \times [-e^{-x}(u+1), 0, e^{-x}] \\ &= [-e^{-x}, -2e^{-x}, -e^{-x}(u+1)] \neq 0 \end{aligned}$$

Así, por teorema de Lagrange, la solución está dada implícitamente por:

$$F(\varphi, \psi) = 0$$

o bien:

$$\begin{aligned} \psi &= G(\varphi) \\ \Leftrightarrow (u+1)e^{-x} &= G(2x-y) \qquad (1) \end{aligned}$$

con F y G funciones reales, arbitrarias y de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Aplicando dato inicial obtenemos:

$$G(-x-1) = e^{-x}(sin(x)+1)$$

Realizando un cambio de variable obtenemos G.

$$\theta = -x - 1$$
$$\Leftrightarrow x = -\theta - 1$$
$$\Rightarrow G(\theta) = e^{\theta+1}(sin(-\theta - 1) + 1)$$

Por lo tanto:

$$G(2x - y) = e^{2x-y+1}(sin(y - 2x - 1) + 1))$$

De (1):

$$(u + 1)e^{-x} = e^{2x-y+1}(sin(y - 2x - 1) + 1)$$
$$\Rightarrow u(x, y) = -1 + e^{3x-y+1}(sin(y - 2x - 1) + 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Solución 2: Parametrización

$$u_x + 2u_y = 1 + u$$
$$u(x, 3x + 1) = sin(x)$$

(i) Parametrización curva inicial:

$$\Gamma_0 : \quad x(s, 0) = s. \quad y(s, 0) = 3s + 1. \quad u(s, 0) = sin(s). \quad s \in \mathbb{R}$$

(ii) Sistema de ecuaciones caracteristico:

$$\begin{array}{ccc} \frac{dx}{dt} = 1 & \frac{dy}{dt} = 2 & \frac{du}{dt} = 1 + u \\ x(s, 0) = s & y(s, 0) = 3s + 1 & u(s, 0) = sin(s) \end{array}$$

Así, resolviendo obtenemos:

$$x(s, t) = t + s$$
$$y(s, t) = 2t + 3s + 1$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(iii) Del tercer PVI:

$$\frac{du}{dt} = 1 + u$$
$$u(s, 0) = sin(s)$$

Resolvemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} - u = 1 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{d}{dt}[ue^{-t}] = e^{-t} \\
\Leftrightarrow\ &u(s,t) = -1 + e^t f(s)
\end{aligned}
$$

Aplicando el dato inicial obtenemos :

$$u(s,t) = -1 + e^t[sin(s) + 1]$$

De (2), obtenemos el cambio de variable inverso:

$$
\begin{aligned}
s(x,y) &= y - 2x - 1 \\
t(x,y) &= 3x - y + 1
\end{aligned}
$$

Volviendo al cambio de variable:

$$u(x,y) = -1 + e^{3x-y+1}[sin(y-1-2x) + 1], \quad (x,y) \in \mathbb{R}$$

Al no haber restricciones para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Omega = \mathbb{R}$$

Problema 2

Hallar $u \in C(\Omega)$, donde Ω será un abierto a definir en la resolución del ejercicio, tal que:

$$\begin{aligned} &xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2 \\ &u(x,1) = x^2, \quad x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

Solución 1: Integrales Primeras
Del problema primero obtenemos el sistema caracteristico.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{du}{x^2 + y^2}$$

(i) Primera integral primera:

$$\begin{aligned} &ln(x) = -\frac{1}{2}ln(y) \\ &\Leftrightarrow ln(x) + ln(\sqrt{y}) = c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{y} = c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \varphi(x,y,u) = x\sqrt{y}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

(ii) Segunda integral primera:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)dy &= -2ydu \\ \Leftrightarrow du &= \left(\frac{-1}{2}\frac{x^2}{y} - \frac{1}{2}y\right)dy \end{aligned}$$

Hacemos cambio de variable: $x = \frac{c}{\sqrt{y}}, \quad c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow du = \frac{-c^2}{2}\frac{1}{y^2}dy - \frac{1}{2}ydy \\ &\Leftrightarrow u = \frac{c^2}{2y} - \frac{y^2}{4} \end{aligned}$$

Volviendo a $c = x\sqrt{y}$:

$$\begin{aligned} &u - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = k, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \psi(x,y,u) = u - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \end{aligned}$$

(iii) Las integrales primeras son funcionalmente independientes. En efecto:

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(x,y,u) \times \nabla\psi(x,y,u) &= [\sqrt{y}, \frac{x}{2\sqrt{y}}, 0] \times [-x, \frac{y}{2}, 1] \\ &= [\frac{x}{2\sqrt{y}}, -\sqrt{y}, \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{y}}] \neq 0 \end{aligned}$$

Ya que $x, y > 0$

Por Teorema de Lagrange, la solución implícita estará dada por:

$$u - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = F(x\sqrt{y}) \tag{3}$$

Donde F es una función real, arbitraria y de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Aplicando el dato inicial:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow F(x) &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F(x\sqrt{y}) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{1}{4}$$

Así, en (3):

$$\begin{aligned} u - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} &= \frac{x^2 y}{2} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow u(x,y) &= \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{1}{4}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Solución 2: Parametrización

$$\begin{aligned} &xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2 \\ &u(x,1) = x^2, \quad x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

(i) Parametrización curva inicial.

$$\Gamma_0 : \quad x(s,0) = s \quad y(s,0) = 1 \quad u(s,0) = s^2 \quad s \in \mathbb{R}$$

(ii) Sistema de ecuaciones caracteristico.

$$\begin{array}{ccc} \frac{dx}{dt} = x & \frac{dy}{dt} = -2y & \frac{du}{dt} = x^2 + y^2 \\ x(s,0) = s & y(s,0) = 1 & u(s,0) = s^2 \end{array}$$

Resolviendo obtenemos:

$$\begin{aligned} x(s,t) &= e^t s \\ y(s,y) &= e^{-2t} \end{aligned} \tag{4}$$

(iii) Vemos si el cambio de variable está bien definido, para eso:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} e^t & e^t s \\ 0 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(iv) Del tercer PVI:

$$\frac{du}{dt} = x^2 + y^2$$
$$u(s,0) = s^2$$

Resolvemos:

$$\frac{du}{dt} = e^{2t}s^2 + e^{-4t}$$
$$\Leftrightarrow u(s,t) = \frac{s^2}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + c(s)$$

Aplicando dato inicial:

$$c(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4}$$

Luego:

$$u(s,t) = \frac{s^2}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4}$$

(v) Realizando el cambio de variable inverso de (4):

$$s(x,y) = x\sqrt{y}$$
$$t(x,y) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = ln(y^{\frac{-1}{2}})$$

Así:

$$u(x,y) = x^2y\frac{1}{2}e^{2ln(y^{\frac{-1}{2}})} - \frac{1}{4}e^{-4ln(y^{\frac{-1}{2}})} + \frac{x^2y}{2} + \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow u(x,y) = \frac{x^2y}{2y} - \frac{1}{4}y^2 + \frac{x^2y}{2} + \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}y^2 + \frac{x^2y}{2} + \frac{1}{4}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Al no haber restricciones para $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Omega = \mathbb{R}$$

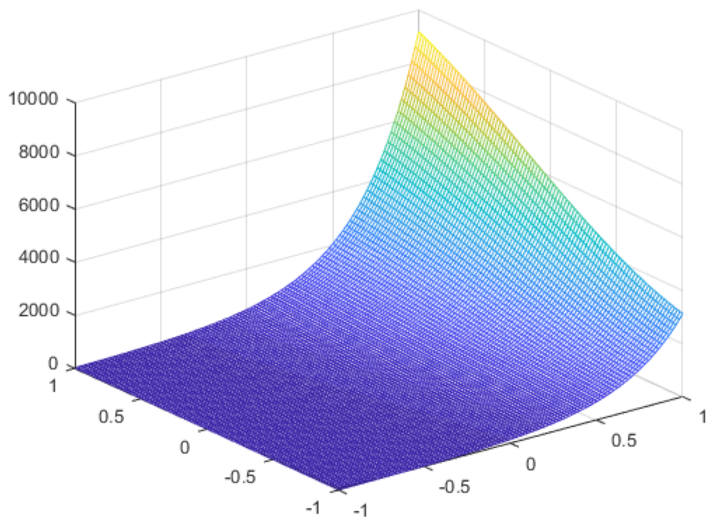

Figura 1: *Solución Problema 1, intervalo* $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$.

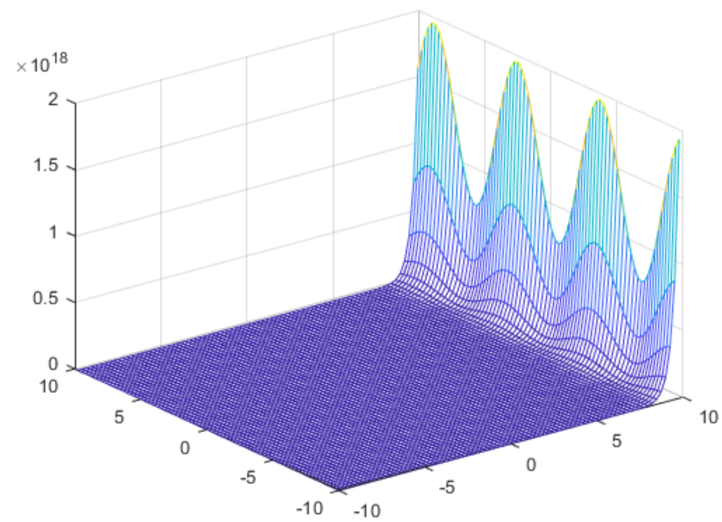

Figura 2: *Solución Problema 1, intervalo* $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$.

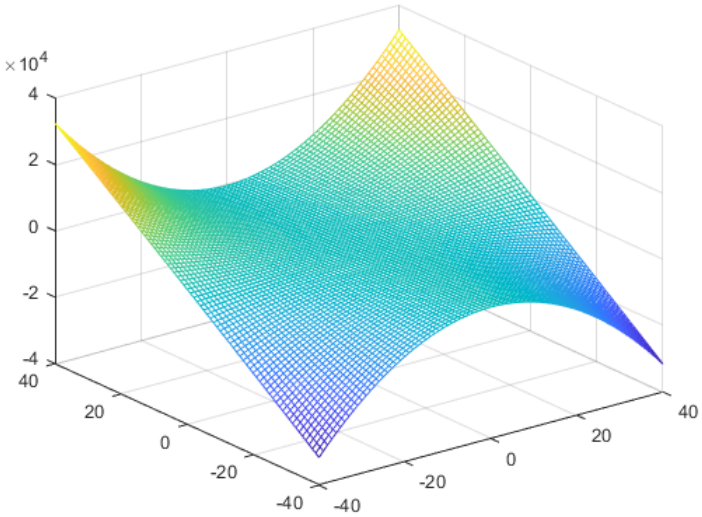

Figura 3: *Solución Problema 2, intervalo* $x \in [-40, 40]$*,* $y \in [-40, 40]$*.*

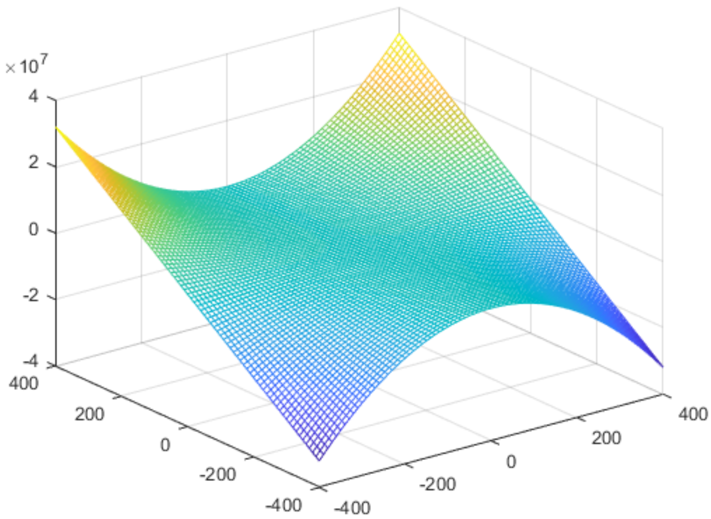

Figura 4: *Solución Problema 2, intervalo* $x \in [-400, 400]$*,* $y \in [-400, 400]$*.*