Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales
Tarea 2
Problema de Sturm Liouville

- **Estudiante:** Paola Freire Rojas
- **Profesor:** Freddy Paiva
- **Ayudante:** Sebastian Moraga

16 de Octubre 2017

Problema de STURM-LIOVELLI a Resolver

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$
$$y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0$$

1)Primero llevaremos la ecuación a su forma adjunta

Empezaremos normalizando la EDO

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$
$$\Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \frac{\lambda y}{x}$$

Sea factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}$entonces $\mu(x) = x$

Luego multiplicamos por $\mu(x)$ la Edo normalizada

$$\Rightarrow xy'' + y' + \frac{\lambda y}{x} = 0, x \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[xy'] + \left[\frac{\lambda}{x} - 0\right] y = 0$$

Asi la forma adjunta de la ecuación del tipo euler es

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[xy'] + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

Siendo

$$r(x) = x, q(x) = 0, w(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

2)Demostrar que la familia de valores propios es positiva y creciente

Sea $\Omega = (1, e^{\pi})$un conjunto abierto en $\Re$,siendo $x = e^t$ nuestro operador es $L = D(D-1), D = \frac{d}{dt}$
$Dom(L) = \left\{y\epsilon C^2(]1, e^{\pi}[) \cap C([1, e^{\pi}]) : y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0\right\}$ tal que para todo $y, z\epsilon Dom(L)$ usamos el producto interior

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, Lz\rangle$$

resolveremos con el siguente p.i:

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : L^2_{\omega}(\Omega)xL^2_{\omega}(\Omega) \longrightarrow \Re$$

,con f,g funciones continuas

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Como $x = e^t$ cambian nuestras condiciones de contorno implica que $\Omega(t) = (0, 1)$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (D^2 - D)y(t)z(t)dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} y''(t)z(t)dt + \int_{\Omega} y'(t)z(t)dt = 0$$

Integrando por partes se obtiene

$$\Rightarrow z(t)y'(t)|_0^{\pi} + \int_{\Omega} y''(t)z(t)dt - z(t)y(t)_0^{\pi} + \int_{\Omega} y(t)z'(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{z(\pi)y'(\pi)} - \cancel{z(0)y'(0)} + \int_{\Omega} y''(t)z(t)dt - \cancel{z(\pi)y(\pi)} + \cancel{z(0)y(0)} + \int_{\Omega} y(t)z'(t)dt = 0$$

,se cancelan debido a las condiciones de contorno.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} y'(t)z'(t)dt + \int_{\Omega} z'(t)y(t)dt = \langle y, Lz \rangle$$

Como se demostro que es autoadjunto que significa que el dominio de un operador hermítico y el de su operador adjunto coinciden totalmente ,en consecuencia por el teorema espectral existen valores propios positivos y crecientes para este psl .

3)Encontrar los valores propios y funciones propias

Resolución del PSL.
Como $\lambda \geqslant 0$ lo haremos por casos
Caso 1) $\lambda = 0$ la edo sería

$$x^2 y'' + xy' = 0$$
$$\Rightarrow x^2 \frac{dy^2}{dx^2} = x\frac{-dy}{dx}$$
$$\Rightarrow x\frac{dy^2}{dy} = \frac{-dx^2}{dx}$$
$$\Rightarrow dy = \frac{-dx}{x}$$
$$\Rightarrow y(x) = -ln(x) + C(x)$$
$$\Rightarrow y(x) = Aln(x) + B; A, B\epsilon\Re$$

Aplicando las condiciones de contorno.

$$y(1) = B \ \Rightarrow B = 0$$
$$y(e^{\pi}) = Aln(x) \ \Rightarrow A \cdot \pi = 0 \Rightarrow A = 0$$

Por lo tanto la solución para este caso es $y(x) = 0$, la cual no es solución del problema al ser una función nula

Caso 2) $\lambda > 0$ el PSL sería

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$$

Sea $\Omega = (1, e^{\pi})$ un conjunto abierto en $\Re$,$Dom(L) = \left\{ y\epsilon C^2(\Omega) \cap C([\Omega]) : y(1) = 0; y(e^{\pi}) = 0 \right\}$
También sabemos que la solución de una EDO tipo euler es de la forma

$$x^k y^k(x) = D(D-1)(D-2)...(D-k+1)y, D = \frac{d}{dt}$$

Resolvemos la EDO haciendo un cambio de variable con

$$y(t) = e^t$$
$$e^t = x^D$$
$$y'(x) = Dx^{D-1}$$
$$y''(x) = D(D-1)x^{D-2}$$

Reeplazamos en la EDO

$$x^2 D(D-1)x^{D-2} + x(D-1)x^{D-1} + \lambda x^D = 0$$
$$\Rightarrow (D(D-1) + x(D-1) + \lambda = 0)$$

$$[D(D-1)+D+\lambda]=0$$
$$\Rightarrow D^2+\lambda=0,\ 0<t<\pi$$

Sea $\lambda=\omega^2$ tal que

$$y(x)=Acos(\omega t)+Bsen(\omega t)\ A,B\epsilon\Re$$

Volviendo a nuestras variables originales

$$\Rightarrow y(x)=Acos(\omega\cdot ln(x))+Bsen(\omega\cdot ln(x))\ A,B\epsilon\Re$$

Aplicamos las condiciones de contorno

$$y(1)=Acos(0)+Bsen(0)=0$$
$$\Rightarrow A\cdot 1+B\cdot 0=0\Rightarrow A=0$$
$$y(e^\pi)=Bsen(\omega\cdot ln(e^\pi))=0$$

Como B no puede ser igual a cero pues de ser así el resultado de este PSL sería nulo y puesto que $\omega\neq 0$ al ser $\lambda>0$. Entonces como es necesario definir que el

$$sen(\omega\cdot ln(e^\pi))=0$$

Haremos que el argumento de la función sea $n\pi$,$n\epsilon N$

Así,

$$\omega\cdot ln(e^\pi)=n\pi$$
$$\Rightarrow\omega\cdot ln(e^\pi)=n\cdot\pi$$
$$\Rightarrow\sqrt{\lambda}\cdot\cancel{\pi}=n\cdot\cancel{\pi}\backslash()^2$$
$$\Rightarrow\lambda=n^2\ ,n\epsilon N$$

Obteniendo finalmente la familia de valores propios y funciones propias,

$$\lambda_n=n^2,n=1,2,3...$$

$$f_n=\{sen(n\cdot ln(x))\}_{n=1}^{\infty}\ ,n=1,2,3...$$

4)Demostrar que las funciones propias asociadas la los valores propios diferentes son ortogonales con respecto a un p.i.$L^2\omega(\Omega)$

Esto lo realizaremos con la ayuda del siguente producto interior:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:L^2\omega(\Omega)xL^2\omega(\Omega)\longrightarrow\Re$$

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b w(x)f(x)g(x)\cdot dx$$

,siendo $\omega(x)$ función peso, para todo x que pertenece al intervalo abierto(a,b)con $\omega(x)>0$

Sea $\Omega=(1,e^\pi)$un conjunto abierto en $\Re$

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_\Omega\frac{1}{x}f(x)g(x)dx$$

Realizamos un cambio de variable con

$$u = ln(x)$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

$$u(1) = 0; u(e^{\pi}) = \pi$$

.Siendo así

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

En efecto

$$\langle sen(n \cdot ln(x)), sen(m \cdot ln(x)\rangle, m \neq n \; n, m\epsilon\Re$$

Por lo que el p.i

$$\langle sen(n \cdot ln(x)), sen(m \cdot ln(x)\rangle = \int_{\Omega} sen(nu)sen(mu)du$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}\int_{\Omega}[cos((m+n)x) - cos((m-n)x)dx = 0$$

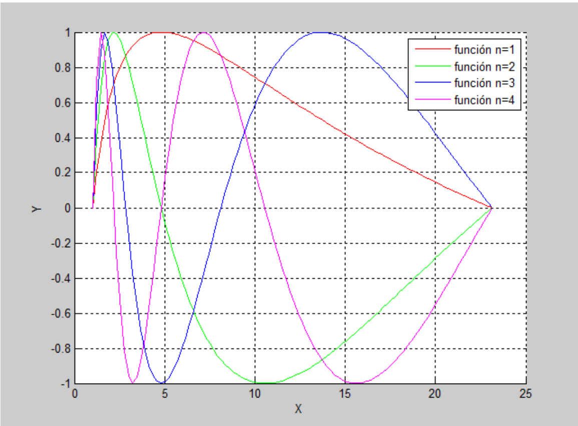
Por lo tanto son ortogonales las funciones propias asociadas.

5)*Interpretar los resultados como un problema de viga con deflexión*$[y'' + y\lambda = 0]$*además dar los primeros modos de vibración*

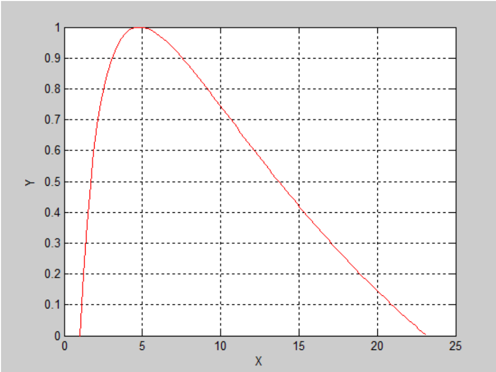
R.]Sabemos que siendo las condiciones de contorno la longitud sujeta a una carga axial P,
$\lambda = P/EI$ y que las curvas de flexión son la funcion propia correspondiente entonces:
$\lambda_n = P_n/EI = n^2, n = 1, 2, 3..$
Lo que nos implica que $P_n = n^2 EI$ estás son nuestras cargas criticas que nos indican cuando nuestra viga se flexionara. Nuestra carga critica mas pequeña ,denomida carga de euler es $P_1 = EI$,con $y(x) = B \cdot sen(n \cdot ln(x))$ que se conoce como el primer modo de pandeo.

Se comprueba que con las graficas a continación en el punto 6) si la curva original tuviera alguna clase de restricción para x=4.8 ,la carga critica más pequeña es $P_2 = 4EI$,lo mismo sucederá si x=2.8 y en x=8.1 ,entonces la columna no se pandeará sino hasta que se aplique una carga critica $P_3 = 9EI$y lo mismo sucederá para n=4, si se restringe en x=2.2, x=4.8 y x=10.5 entonces la curva de deflexión tendra una carga critica de $P_4 = 16EI$

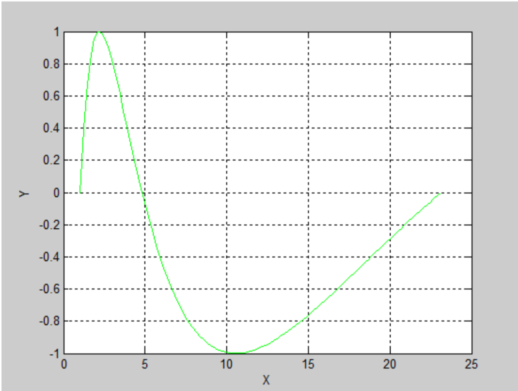
6)Graficar λ_n, f_n***,***$n = 1, 2, 3, 4$



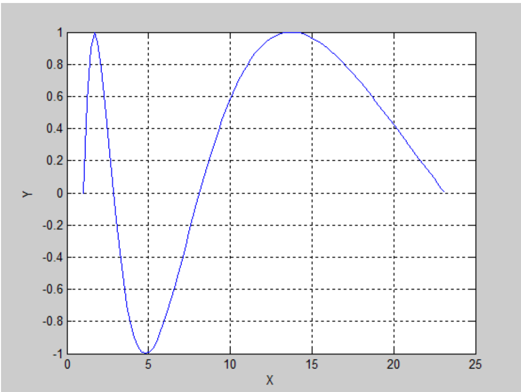
Gráfica de funciones propias con n=1,2,3,4.



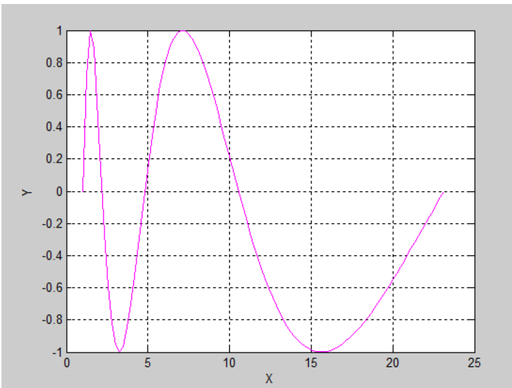
Gráfica de función propia n=1



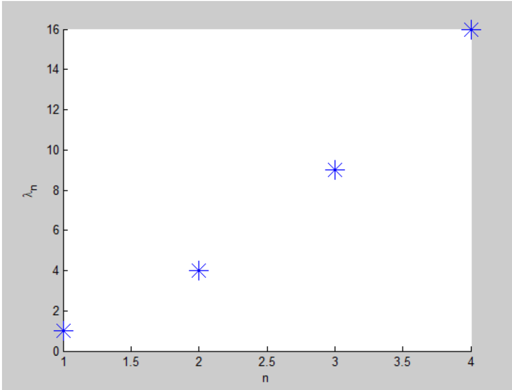
Gráfica de función propia n=2



Gráfica de función propia n=3



Gráfica de función propia n=4



Gráfica donde se encuentran los $\lambda_n, n = 1, 2, 3, 4$