UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales II

Tarea 2

Evelyn Pafián Martinez

13 de Octubre de 2017, Concepción

1. Ejercicio

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}_0.$$

(i) LLEVAR LA ECUACIÓN A SU FORMA ADJUNTA.
La ecuación correponde a la Ecuación de Legendre, y su forma adjunta es,

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0$$

(ii) DEMOSTRAR QUE LA FAMILIA DE VALORES PROPIOS ES POSITIVA Y CRECIENTE.
Se tiene que $L = D[(1-x^2)D]$ y $Dom(L) = \{y \in C^2(]-1,1[) \cap C([-1,1])$ para todo $y, z \in Dom(L)\}$

$$\langle Ly, z\rangle = \int_{-1}^{1} z(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']dx$$

Utilizando integración por partes, con $u = z(x)$ y $dv = \frac{d}{dx}[(1-x^2)y']dx$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\langle Ly, z\rangle &= [z(x)\cancel{(1-x^2)}y'(x)]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)y'(x)z'(x)dx \\
&= -\left\{[z'(x)\cancel{(1-x^2)}y(x)]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} y(x)\frac{d}{dx}[z'(x)(1-x^2)]dx\right\} \\
&= \int_{-1}^{1} y(x)\frac{d}{dx}[z'(x)(1-x^2)]dx \\
&= \langle y, Lz\rangle
\end{aligned}$$

Entonces el operador es autoadjunto,además $\Omega = 1-x^2$, $\Omega(1) = \Omega(-1) = 0$ por lo que no requiere condiciones de contorno mienntras las funciones sean de clase $C^2(]-1,1[)\cap([-1,1])$. Además, por Teorema espectral, existe un número infinito de valores propios que forman una familia creciente. Estos valores propios son $\lambda_n = n(n+1)$.

(iii) DEMOSTRAR QUE LA FAMILIA DE VALORES PROPIOS ASOCIADAS A VALORES PROPIOS DISTINTOS SON ORTOGONALES CON RESPECTO A UN PRODUCTO INTERIOR $L^2_\omega(\Omega)$.

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de polinomios de Legendre de grado n. Entonces, para el intervalo $x \in [-1,1]$ se tiene que $P_n(x)$ y $P_m(x)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{1}$$
$$\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + m(m+1)P_m(x) = 0 \tag{2}$$

Multiplicando (1) por $P_m(x)$ y (2) por $P_n(x)$,

$$P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x)P_m(x) = 0 \tag{3}$$
$$P_n(x)\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + m(m+1)P_nP_m(x) = 0 \tag{4}$$

Luego, restando (3) y (4) queda,

$$P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' - P_n(x)\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' = m(m+1)P_n(x)P_m(x) - n(n+1)P_n(x)P_m(x)$$

Integrando por partes entre -1 y 1 y haciendo $u = P_m(x)$ y $dv = [(1-x^2)P_n'(x)]'\,dx$,

$$[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} P_m(x)\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' dx}_{I_2}$$

Se tiene que,

$$I_1 = \left[P_m(x)\overset{0}{\cancel{(1-x^2)}}P_n'(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx$$

$$I_2 = \left[P_n(x)\overset{0}{\cancel{(1-x^2)}}P_m'(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx &= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $m \neq n \Rightarrow m(m+1) \neq n(n+1)$. Entonces,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \ \ si \ \ m \neq n.$$

Mostrandose así, que las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

(iv) Encontrar los valores propios y las funciones propias.

Si $n \in \mathbb{N}$ las funciones propias de la ecuación se reducen a polinomios, los cuales son conocidos como Polinomios de Legendre $(y(x) = P_n(x))$, y los valores propios son $\lambda_n = \{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$

La función $w(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$ es la función generadora de estos polinomios.

$$w(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n; \ \ |t|<1, \ \ |x| \leq 1$$

Derivando respecto a t,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\cancel{2}}(1-2xt+t^2)^{-3/2}\cdot(-\cancel{2}x+\cancel{2}t) = \frac{-(t-x)(1-2xt+t^2)^{-1/2}}{(1-2xt+t^2)}$$

$$\begin{aligned}
(1-2xt+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} + (t-x)w &= 0 \\
(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= 0 \\
(n+1)P_{n+1}(x)\cancel{t^n} - 2xnP_n(x)\cancel{t^n} + P_{n-1}(x)(n-1)\cancel{t^n} + (P_{n-1}(x) - xP_n(x))\cancel{t^n} &= 0 \\
(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) &= 0, \ \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Que corresponde a la ecuación de recurrencia para obtener los $P_n(x)$, con $P_0(x) = 1$.
Con $n = 0$ y $P_0(x) = 1$:

$$\begin{aligned} P_1(x) - xP_0 &= 0 \\ P_1(x) &= x \end{aligned}$$

Con $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x) &= 0 \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

Con $n = 2$:

$$\begin{aligned} 3P_3(x) - 5xP_2(x) + 2P_1(x) &= 0 \\ P_3(x) &= \frac{1}{3}\left[5x \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) - 2x\right] \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Con $n = 3$:

$$\begin{aligned} 4P_4(x) - 7xp_3(x) + 3P_2(x) &= 0 \\ P_4(x) &= \frac{1}{4}\left[\frac{35}{2}x^4 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{3}{8} - \frac{9}{8}x^2\right] \\ P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Esta ecuación de recurrencia se utiliza para funciones especiales. De manera general, los polinomios de Legendre se obtienen de la formula de Rodrigue, donde:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, n = 0, 1 \ldots$$

donde, por definicion $P_0(x) = 1$.

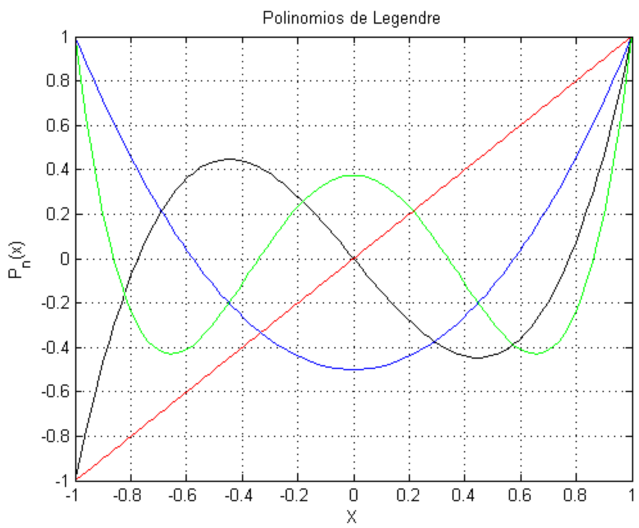

Figura 1: Polinomios de Legendre hasta n=4.