UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES II: TAREA N°2

Estudiante: Daniela Lefimil   Profesor: Freddy Paiva

Problema 1:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$$

1.1 Lleve la ecuación a su forma autoadjunta

1.2 Demuestre que las familias de valores propios es positiva y creciente

1.3 Demuestre que las funciones propias son ortogonales respecto a su peso en $L^2_w(\Omega)$

1.4 Encuentre los valores propios y las funciones propias

1.5 Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión.

1.6 Grafique λ_n, f_n para n=1, 2, 3, 4, 5

Solución: Para el desarrollo del documento se define $\Omega =]0,1[$

1.1 Sea la forma autoadjunto definida como:

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy}{dx}\right] + qy + r\lambda y = 0$$

Es fácil ver que la forma autoadjunta del problema está dada por:

$$\frac{d}{dx}\left[1\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0$$

Por lo tanto, se determina que p=1, q=0, r=1

1.2

- Se demuestra que los valores propios son positivos.
  Se define el siguiente producto interior:

$$<.,.> = L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad con\ \Omega\ abierto$$
$$<f,g> = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Entonces, para el problema dado se tiene:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y'' &= -\lambda y \quad / <.,y> \\ <y'',y> &= <-\lambda y, y> \\ <y'',y> &= -\lambda <y,y> \\ \lambda <y,y> &= -<y'',y> \\ \lambda ||y||^2 &= -\int_\Omega y''(x)y(x)dx \end{aligned}$$

Ahora integrando por partes y aplicando condiciones de contorno, obtenemos:

$$\lambda||y||^2 = -y(1)y'(1) + ||y'(x)||^2$$

Notamos que por condiciones de contorno y(1) + y'(1)=0, se tiene que:

$$\begin{aligned} & y(1) = y'(1) = 0 \ \vee \ y(1) = -y'(1) \\ & \Rightarrow y(1)y'(1) = 0 \ \vee \ y(1)y'(1) < 0 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \lambda ||y||^2 &= -y(1)y'(1) + ||y'(x)||^2 \\ \lambda &= \frac{-y(1)y'(1) + ||y'(x)||^2}{||y||^2} \geq 0 \end{aligned}$$

- Se demuestra que los valores propios son crecientes.
  Los valores propios, como se demostrará más adelante, se definen de la siguiente manera:

$$\lambda_n = w_n^2 = n^2\pi^2$$

  Por lo que es claro que los autovalores son crecientes a medida que aumentamos el n,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < ...$$

1.3 Sean $(y,\lambda),(z,\beta) \in L^2(\Omega)$ dos pares característicos, con $\lambda \neq \beta,\ \lambda,\beta \in \mathbb{R}$, es decir,

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$z'' + \beta z = 0 \tag{2}$$

Si multiplicamos (1) por z y (2) por y:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda zy = -y''z \\ \beta zy = -z''y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda zy = -(zy')' + (y'z') \\ \beta zy = -(yz')' + (y'z') \end{cases}$$

Ahora, restando e integrando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\lambda-\beta)zy dx &= \int_\Omega [-(zy')' + (yz')']dx \\ (\lambda-\beta)\int_\Omega zy dx &=^{T.F.C.} [y(x)z'(x) - z(x)y'(x)]|_0^1 \\ (\lambda-\beta) < z,y > &= y(1)z'(1) - z(1)y'(1) - y(0)z'(0) + z(0)y'(0) \end{aligned}$$

Debemos considerar los valores de contorno y'(0)= 0, y(1)+y'(1)=0, como y, z $\in L^2(\Omega)$, también se cumple que z'(0)=0 y z(1)+z'(1)=0

$$\begin{aligned} (\lambda-\beta) < z,y > &= y(1)z'(1) - z(1)y'(1) \\ &= y(1)y'(1) + y(1)y(1) \\ &= y(1)[y'(1) + y(1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como se vio en un principio $\lambda \neq \beta$, por lo tanto $< z,y >=< y,z >= 0$
Así, concluimos que las funciones propias son ortogonales en $L^2(\Omega)$ con respecto al producto interior definido con peso p(x)=1.

1.4 Para encontrar los autovalores analizamos los casos:

- CASO: $\lambda = 0$, se define

$$\begin{cases} y(x) = C_1 + C_2 x \\ y'(x) = C_2 \end{cases}$$

  Aplicando las condiciones de contorno, se obtiene $C_1 = C_2 = 0$, por lo tanto, la solución es trivial y no entrega información, $\lambda = 0$ no es autovalor .

- CASO: $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} y(x) = C_1 cos(wx) + C_2 sen(wx) \\ y'(x) = -wC_1 sen(wx) + wC_2 cos(wx) \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de contorno, se obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 cos(w) &= wC_1 sen(w) \\ \iff \frac{1}{w} &= \frac{sen(w)}{cos(w)} \\ \iff tan(w) &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

A pesar de que no podemos encontrar la solución explícita en este caso, sabemos que la función tangente es impar en el intervalo, simétrica con respecto al origen. Además, la función tangente es π-periódica, en consecuencia podemos encontrar una aproximación haciendo:

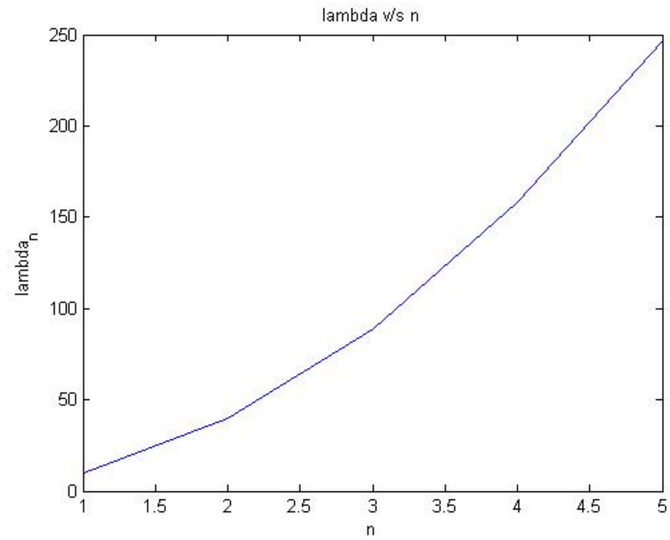
$$\begin{aligned} w &= n\pi \\ \sqrt{\lambda} &= n\pi \quad /()^2 \\ \lambda &= n^2\pi^2 \end{aligned}$$

Con lo anterior en mano, las funciones propias y_n asociadas para cada λ_n, están dadas por:

$$y_n(x) = C_1 cos(wx) = \{cos(wx)\}$$

1.5 Vemos que el problema dado corresponde a un caso empotrado del problema de viga (correspondiente a y'(0)=0, es decir la función es una constante), esto quiere decir que la viga está empotrada en un extremo con pendiente igual 0, una vez que la viga recibe un 'golpe' o 'impacto', ésta sufre una pequeña vibración.

1.6 Graficamos para λ_n y para f_n respectivamente:



En el siguiente gráfico se puede observar las funciones con los respectivos nodos (n=1,2,3,4,5)