UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TAREA 2

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Claudio Correa Barría

Problema 1. Resuelva el siguiente Problema de Sturm - Liouville

$$y'' + (\lambda + 1)y = 0, \text{ sobre }]0, 1[$$

$$y'(1) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

teniendo en cuenta lo siguiente.

- Llevar la ecuación a su forma adjunta.
- Demostrar que la familia valores propios es positiva y creciente.
- Demostrar que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales respecto a un producto interior.
- Encontrar los valores propios y funciones propias.
- Interprete los resultados como un problema de viga con deflexión $y'' + \lambda y = 0$. Ademas dar los primeros modos de vibración.
- Graficar λ_n,f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.

En primer lugar al y sabiendo que la forma adjunta en el caso genérico es $(p(x)y')' + (q(x) + \lambda R(x))y = 0$, en este caso particular es fácil darse cuenta que la ecuación ya se encuentra en su forma adjunta, donde $p(x) = q(x) = R(x) = 1$

ademas que el operador es

$$L = D^2 + 1$$

es decir que

$$Ly + \lambda y = 0$$

por otra parte del $R(x)$ podemos inducir el siguiente producto interior

$$\forall f, y \in L^2([0, 1]) < f, g >= \int_0^1 fg dx$$

Ahora demostremos que las funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales respecto a un producto interior.

Sea y_n, y_m funciones propias asociadas a λ_n, λ_m distintos respectivamente. Luego formamos el siguiente sistema

$$y_n'' + (1 + \lambda_n)y_n = 0$$

$$y_m'' + (1 + \lambda_m)y_m = 0$$

si multiplicamos por y_m y y_n respectivamente en cada ecuación

$$y_n''y_m + (1 + \lambda_n)y_ny_m = 0$$

$$y_m''y_n + (1 + \lambda_m)y_my_n = 0$$

$$\Leftrightarrow y_n''y_m - y_m''y_n + (\lambda_n - \lambda_m)y_ny_m = 0$$
$$\Leftrightarrow y_n''y_m - y_m''y_n + y_m'y_n' - y_m'y_n' + (\lambda_n - \lambda_m)y_ny_m = 0$$
$$\Leftrightarrow (y_n'y_m)' - (y_m'y_n)' + (\lambda_n - \lambda_m)y_ny_m = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 (y_n'y_m)'dx - \int_0^1 (y_m'y_n)'dx + \int_0^1 (\lambda_n - \lambda_m)y_ny_m dx = \int_0^1 0dx$$
$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^1 y_ny_m dx = 0$$

como $\lambda_m \neq \lambda_n$, entonces $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$,luego y_n y y_m son ortogonales respecto al producto interior usual, si y solo si $m \neq n$

Ahora mostremos que el operador $L = D^2 + 1$ es autoadjunto es decir sea $y_n, y_m \in Dom(L)$ para $m \neq n$ mostrar que

$$< Ly_n, y_m > = < y_n, Ly_m >$$
$$< y_n'' + 1, y_m > - < y_n, y_m'' + 1 >$$
$$= \int_0^1 (y_n'' + y_n)y_m dx - \int_0^1 y_n(y_m'' + y_m)dx$$
$$= \int_0^1 y_n''y_m dx + \int_0^1 y_my_n dx - \int_0^1 y_m''y_n dx - \int_0^1 y_ny_m dx$$
$$= \int_0^1 y_n''y_m dx - \int_0^1 y_m''y_n dx$$
$$= \int_0^1 y_n''y_m dx - \int_0^1 y_m''y_n dx + \int_0^1 y_n'y_m' dx - \int_0^1 y_n'y_m' dx$$

por el teorema fundamental del calculo y evaluando en las condiciones de contorno.

$$= \int_0^1 (y_n'y_m)'dx - \int_0^1 (y_m'y_n)dx = 0$$

entonces, podemos afirmar existencia de los valores propios.

Continuemos con el análisis del problema

$$y'' + (1 + \lambda)y = 0$$

si multiplicamos por y, nos queda

$$y''y + (1 + \lambda)y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)y^2 = -y''y - y'y' + y'y'$$
$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)y^2 = y'y' - (y'y)'$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1 + \lambda)y^2 dx = -\int_0^1 (y'y)'dx + \int_0^1 y'^2 dx$$
$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)||y||^2 = ||y'||^2$$
$$\Leftrightarrow 1 + \lambda = \frac{||y'||}{||y||}$$

$||y|| \neq 0$, dado que y es autofunción, entonces por definición de norma

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda = \frac{||y'||}{||y||} \geq 0$$

así podemos afirmar que

$$\lambda + 1 \geq 0$$

$$\lambda \geq -1$$

observación, por causa de un coeficiente compensación que corrió en una unidad a la izquierda los valores propios, por ende es imposible demostrar que los la familia de valores propios son pospositivos

Ahora encontraremos los valores propios y funciones propias. Hacemos un cambio de variable $\omega^2 = \lambda + 1$

$$y'' + y(\omega^2) = 0$$

para $\omega^2 = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow y = Ax + B$$

donde A, B con constantes a determinar y de las condiciones de contorno se deduce

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$y'(1) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

entonces $\eta = 0$ es un valor propio asociado a una función propia $y_0(x) = 1$
para $\eta > 0$, la ecuación es similar a un problema de resorte, entonces la solución de la ecuación diferencial.

$$y = Acos(x\omega) + Bsin(x\omega) \quad A \text{ y } B \text{ por determinar.}$$

$$y' = -A\omega sin(x\omega) + B\omega cos(x\omega)$$

considerando las condiciones de contorno, nos queda.

$$y'(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y'(1) = A\omega sin(\omega) = 0$$

$A \neq 0$ ya que y es una función propia distinto de 0,entonces.

$$sen(\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pi n$$

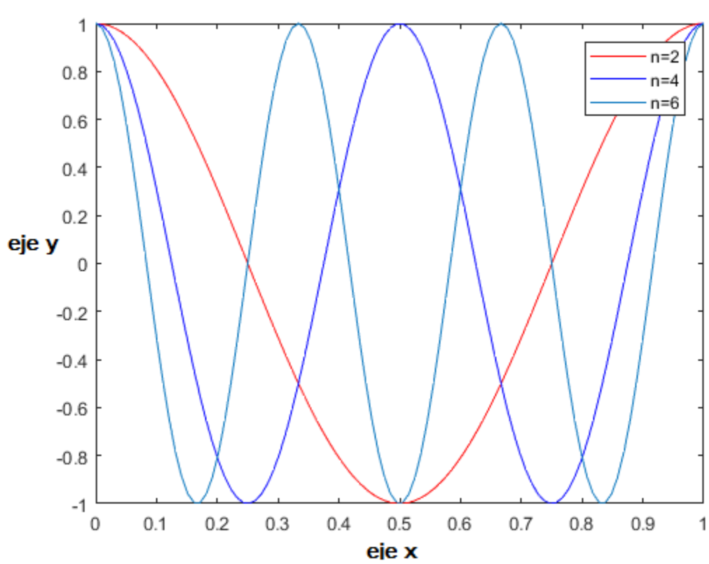
$$\Leftrightarrow \lambda = (\pi n)^2 - 1$$

$$\Rightarrow y_n = Acos(\pi n x)$$

Si estudiamos el problema asignado como un problema de vigas podemos observar que la familia de funciones propias describen dos casos distintos de vigas empotradas esto sucede por que los datos de contorno solo nos brida la información que en $x = 0$ y $x = 1$ la pendiente es paralela al eje x , ademas de que la viga tiene un largo de 1 unidad

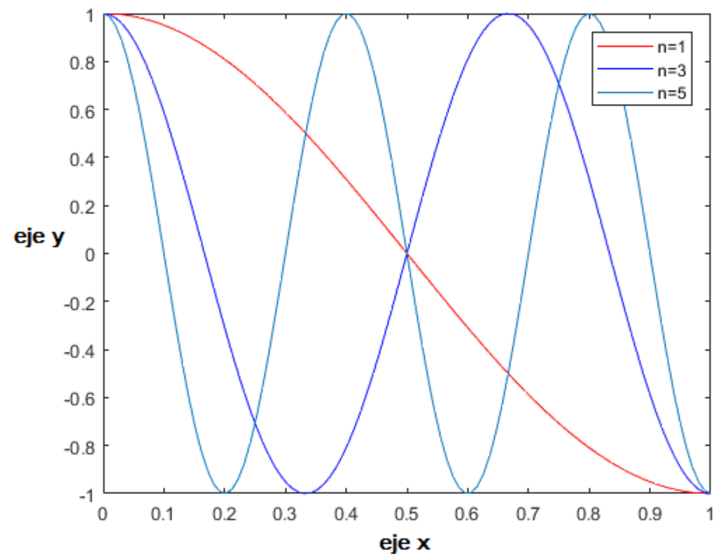
caso 1 : $n = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

$$y_{2k} = Acos(\pi(2k)x)$$



caso 2 : $n = 2k - 1 \;\; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$$y_{2k-1} = Acos(\pi(2k-1)x)$$



los valores propios $\lambda = (n\pi)^2 - 1$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$